

Національна академія наук України  
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного

Коваленко Ганна Андріївна



УДК 519.859

**БАЛАНСНА КОМПОНОВКА 3D-ОБ'ЄКТІВ:  
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

Науковий керівник доктор технічних наук, професор  
**Романова Тетяна Євгеніївна,**  
Інститут проблем машинобудування  
ім. А. М. Підгорного НАН України,  
пров. науковий співробітник

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор  
**Комяк Валентина Михайлівна,**  
Національний університет цивільного захисту Укра-  
їни, професор кафедри

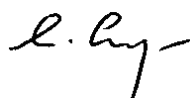
доктор технічних наук, професор  
**Бідюк Петро Іванович,**  
Інститут прикладного системного аналізу Націона-  
льного технічного університету України «Київський  
політехнічний інститут», професор кафедри

Захист відбудеться «17» березня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 при Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічній бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий «15» лютого 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01  
д.т.н., проф.



О. О. Стрельнікова

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Задачі балансної компоновки (*Balance Layout Problems – BLP*) належать до класу *NP*-складних задач розміщення (*Cutting and Packing Problems – C&P*) та є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв’язання – новим напрямом теорії дослідження операцій. Суть задачі полягає в пошуку оптимального розміщення заданого набору 3D-об’єктів в деякій обмеженій області (контейнері) з урахуванням *обмежень поведінки (behavior constraints)*, які забезпечують баланс розглянутої системи.

Необхідність урахування *обмежень поведінки* в оптимізаційних задачах розміщення виникає в різних прикладних областях науки і техніки, наприклад, в задачах логістики (при упаковці вантажів для транспортування чи зберігання), в машинобудуванні (при компоновці літальних апаратів, суден, субмарин тощо, компоновці обладнання, приладів та пристроїв, деталей виробу). Особливий інтерес до цього класу задач виникає при проектуванні ракетно-космічної техніки. На початковому етапі проектування (компоновці) космічного апарата необхідно враховувати ряд обмежень на статичні та динамічні характеристики (центр мас, осьові та відцентрові моменти інерції).

Роботи багатьох вчених присвячені методам розв’язання задач балансної компоновки. Вагомий внесок в їх розвиток зробили такі вчені як Н. Teng, Z. Sun, С. Che, Y. Chen, Y. Wang, L. Jingfa, L. Gang, K. Lei, W. A. Oliveira, A. C. Moretti, L. L. Salles-Neto та багато інших. Актуальні проблеми компоновки об’єктів в сучасному ракетно-космічному машинобудуванні розглядаються в монографіях серії «Springer Optimization and Its Applications» під редакцією Giorgio Fasano<sup>1</sup> та Janos D. Pinter<sup>2</sup> (див., наприклад, [1\*]).

Аналіз публікацій по даній тематиці показав, що задачі *BLP* є найменш дослідженими в класі задач *C&P*. Серед об’єктів розміщення, як правило, розглядаються циліндри або паралелепіпеди, а довільні просторові форми апроксимуються наборами  $\delta$ -паралелепіпедів. Для розв’язання задач балансної компоновки використовуються евристичні і мета-евристичні алгоритми, що призводить до втрати оптимальних розв’язків. До того ж запропоновані підходи не враховують допустимих відстаней між об’єктами.

Таким чином, виникає необхідність в побудові *адекватних* математичних моделей для задач балансної компоновки з використанням реальних (без попередньої апроксимації) просторових форм об’єктів розміщення та контейнерів, а також з урахуванням заданих мінімально і максимально допустимих відстаней. Важливою проблемою також є розробка ефективних алгоритмів розв’язання задач *BLP* з використанням сучасних локальних і глобальних *NLP-солверів (NLP-solvers – програмне забезпечення для розв’язування задач нелінійного програмування)*.

<sup>1</sup> G. Fasano [<https://it.linkedin.com/pub/giorgio-fasano/7/467/4b2>] – провідний спеціаліст великої європейської компанії «Thales Alenia Space» [<https://www.thalesgroup.com/en>], яка спеціалізується на розробці, побудові, тестуванні та управлінні інноваційними космічними системами.

<sup>2</sup> J. D. Pinter [[www.linkedin.com/pub/janos-d-pinter/10/9/676](http://www.linkedin.com/pub/janos-d-pinter/10/9/676)] – експерт в області моделювання і оптимізації систем (systems modeling and optimization), Co-Editor, Springer Briefs in Optimization [[www.springer.com/series/8918](http://www.springer.com/series/8918)].

[1\*] Fasano G., Pinter J. D. Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications. – Vol. 73. – New York: Publisher Springer New York, 2013. – 404 p.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в період з 2012 р. по 2015 р. у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України і є частиною досліджень, що проводяться під керівництвом члена-кореспондента НАН України Стояна Ю. Г. відповідно до планів науково-дослідних робіт за д/б темою «Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач розміщення об'єктів довільних просторових форм» (2012-2016 рр., № ДР 0112U002488), а також згідно з грантом УНТЦ (2013-2014 рр., проект № 5710).

**Мета та задачі дослідження.** Мета роботи – підвищення ефективності розв'язання оптимізаційних задач балансної компоновки шляхом розробки конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання, нових математичних моделей та ефективних оптимізаційних алгоритмів із застосуванням методів нелінійного програмування, негладкої оптимізації і сучасних *NLP-солверів*.

Для досягнення цієї мети поставлені такі наукові задачі:

1) Сформулювати задачу балансної компоновки (задачу *BLP*) у вигляді оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів (куль, прямих кругових циліндрів, торів, сфероциліндрів, прямих прямокутних паралелепіпедів, прямих правильних призм) у заданому контейнері (прямому круговому циліндрі, параболоїді обертання або прямому усіченому круговому конусі) з урахуванням *мінімально і максимально допустимих відстаней та обмежень поведінки* (обмеження на центр мас, осьові та відцентрові моменти інерції).

2) Розробити засоби математичного моделювання для розв'язання задачі *BLP*, включаючи аналітичний опис *обмежень розміщення* (неперетин об'єктів та їх включення в контейнер з урахуванням допустимих відстаней і наявності стелажів в контейнері); *обмежень поведінки* для об'єктів і контейнерів розглянутих просторових форм.

3) Побудувати математичну модель задачі *BLP* у вигляді задачі нелінійного програмування (*NLP-model*) з використанням методу *phi*-функцій. Побудувати основні реалізації математичної моделі задачі *BLP* залежно від виду просторових форм контейнера і об'єктів; особливостей розміщення об'єктів в контейнері (наявність стелажів); обмежень на мінімально та максимально допустимі відстані (не задані, задані між кожною парою об'єктів, задані між об'єктами і боковою поверхнею контейнера); виду функції цілі (метричні характеристики контейнера, відхилення центра мас системи від заданої точки, моменти інерції системи).

4) Розробити стратегію розв'язання задачі *BLP* на основі особливостей її математичної моделі.

5) Розробити методи пошуку локально оптимальних розв'язків для основних реалізацій задачі *BLP*.

6) Створити програмне забезпечення для розв'язання основних реалізацій задачі *BLP*.

*Об'єкт дослідження* – процес оптимальної компоновки 3D-об'єктів в контейнері з урахуванням *обмежень поведінки та обмежень розміщення*, включаючи мінімально і максимально допустимі відстані.

*Предмет дослідження* – засоби математичного моделювання, математичні

моделі і методи розв'язання задач балансної компоновки 3D-об'єктів.

*Методи дослідження.* В роботі застосовуються аналітична геометрія та функціональний аналіз для побудови псевдонормалізованих *phi*-функцій і псевдонормалізованих квазі-*phi*-функцій; математичний аналіз і теоретична механіка для формалізації *обмежень поведінки*; методи геометричного проектування для побудови математичних моделей задач *BLP*; методи нелінійного програмування та негладкої оптимізації для розробки алгоритмів розв'язання задач *BLP*.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у такому:

✓ Набув подальшого розвитку метод *phi*-функцій Стояна: побудовані псевдонормалізовані *phi*-функції і псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції як засоби математичного моделювання *обмежень розміщення*, враховуючи особливості задачі *BLP*.

✓ Вперше формалізовані *обмеження поведінки* для задачі *BLP* у вигляді системи нерівностей з диференційованими функціями.

✓ Вперше побудована математична модель задачі *BLP* у вигляді задачі нелінійного програмування для 3D-об'єктів (кулі, прямі кругові циліндри, тори, сфероциліндри, прямі прямокутні паралелепіеди, прямі правильні призми) в контейнері (прямий круговий циліндр, параболоїд обертання, усічений прямий круговий конус) з урахуванням *обмежень розміщення* та *обмежень поведінки*.

✓ Набули подальшого розвитку методи розв'язання задач геометричного проектування: запропонована стратегія розв'язання задачі *BLP* та розроблені ефективні алгоритми для основних її реалізацій з використанням методів нелінійного програмування, негладкої оптимізації та сучасних *NLP-солверів*, які (на відміну від існуючих евристичних підходів):

- не використовують попередню апроксимацію об'єктів та контейнерів;
- враховують одночасно неперервні трансляції та обертання об'єктів, мінімально та максимально допустимі відстані і *обмеження поведінки*;
- дозволяють отримувати локально оптимальні розв'язки для задач *BLP*, кращі за значенням цільової функції (порівняно з *benchmark instances* – відомими опублікованими результатами).

**Практичне значення одержаних результатів.** Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні: створено нові математичні моделі та розроблено ефективні алгоритми, які дозволяють враховувати *обмеження поведінки* в оптимізаційних задачах розміщення 3D-об'єктів і мають широкий спектр застосувань в пріоритетних областях науки і техніки.

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання та ефективність запропонованих методів підтверджується найкращими результатами обчислювальних експериментів, порівняно із зарубіжними аналогами. Отримано два свідоцтва про реєстрацію авторського права на програмний продукт.

Запропоновані засоби математичного моделювання задач *BLP* впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в курсах: «Математичне та комп'ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень» та «Геометричне проектування складних систем».

**Особистий внесок здобувача** в роботах, що виконані в співавторстві: [1], [15] – математична модель задачі розміщення 3D-об'єктів на стелажах контейнера пара-

болічної форми з урахуванням обмежень поведінки; [2], [8], [9], [11], [12] – обмеження поведінки задачі балансної упаковки кругових циліндрів в циліндричний контейнер; [3], [13] – *phi*-функції для аналітичного описання відношень включення 3D-об'єктів в контейнер параболічної форми; [6] – математична модель задачі рівноважної компоновки циліндрів в циліндричному контейнері мінімального радіуса; [4], [16], [17] – математичні моделі трьох реалізацій узагальненої математичної моделі задачі балансної компоновки циліндричних об'єктів в контейнері з круговими стежами; [5], [20] – обмеження розміщення задачі *BLP* з урахуванням мінімально і максимально допустимих відстаней, псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції для описання умов неперетину об'єктів в задачі *BLP* з урахуванням максимально допустимих відстаней; [7], [14], [21], [22] – математична модель задачі *BLP* для 3D-об'єктів в контейнері з урахуванням мінімально і максимально допустимих відстаней, реалізації математичної моделі задачі *BLP* та їх особливості, дерево розв'язків задачі *BLP*; [10] – математична модель упаковки 3D-об'єктів в усічений конус з урахуванням спеціальних обмежень.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати роботи доповідалися та дістали схвалення на міжнародних конференціях і форумах: «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (м. Харків, 2013-2014 рр.); 10-th ESICUP Meeting (Lille, France, 2013); «Питання оптимізації обчислень», (сmt. Кацівелі, Крим, 2013 р.); «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS), (м. Дніпропетровськ, 2013-2015 рр.); «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии» (м. Кишинів, Молдова, 2014 р.); «Optimization and Applications» (OPTIMA-2014) (Petrovac, Montenegro, 2014); «Информационные системы и технологии» (ИСТ-2015) (Харків, 2015 р.); на всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів, Україна, 2015 р.); на конференціях молодих вчених і спеціалістів «Современные проблемы машиностроения» (м. Харків, 2014-2015 рр.); на постійно діючому семінарі «Математические методы геометрического проектирования» (м. Харків, 2014-2015 рр.) при науковій раді з проблеми «Кібернетика» НАН України; на семінарі відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (м. Київ, 2014-2015 рр.); на семінарах відділу математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (м. Харків, 2013-2015 рр.).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковані 23 наукових праці, у тому числі: 7 статей в спеціалізованих виданнях, затверджених ДАК МОН України [1-7], включаючи статтю, що входить до міжнародних наукометричних баз (таких як SCOPUS, ABI/INFORM, Academic OneFile, Academic Search, CompuScience); 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на програмний продукт [8, 9], 14 тез доповідей на міжнародних, всеукраїнських та молодіжних наукових конференціях [10-23].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація містить вступ, 6 розділів, висновки по роботі, 4 додатки, 40 рисунків, 2 таблиці та список використаних джерел з 108 найменувань на 12 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 172 сторінки, з них 135 сторінок основного тексту.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертації, сформульовані мета і задачі дослідження, вказується об'єкт, предмет і методи дослідження, визначається наукова новизна і практична значущість отриманих результатів, наведено відомості про публікації за темою дисертаційної роботи і апробацію результатів дослідження.

**Перший розділ** дисертації містить три підрозділи. В першому з них здійснюється огляд джерел літератури за темою, розглядаються роботи, присвячені задачам балансної компоновки, зокрема, в області ракетно-космічного машинобудування, стисло викладається мета публікацій, особливості запропонованих моделей та алгоритмів. Другий підрозділ присвячено публікаціям з даної тематики в рамках теорії геометричного проектування. Задачі *BLP* з використанням методу *phi*-функцій досліджувались в роботах Стояна Ю. Г., Гіля М. І., Куліша Є. М., Романової Т. Є., Панкратова О. В., Стецюка П. І. Аналіз публікацій дозволив оцінити стан проблеми, що посприяло вибору напрямку дослідження.

У третій частині розділу формулюється задача балансної компоновки.

Нехай задано контейнер  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) \geq 0\}$  висоти  $H$ . Розглядаються такі види контейнерів:  $\Omega \equiv \mathbf{C}$  – прямий круговий циліндр з основами радіуса  $R$ ,  $G(x, y, z) = \min\{-x^2 - y^2 + R^2, -z + H, z\}$ ;  $\Omega \equiv \mathbf{\Lambda}$  – параболоїд обертання з основою радіуса  $R = \sqrt{H}$ ,  $G(x, y, z) = \min\{-z - x^2 - y^2 + H, z\}$ ;  $\Omega \equiv \mathbf{E}$  – прямий круговий усічений конус з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  нижньої та верхньої основ, ( $R_1 > R_2$ ),  $G(x, y, z) = \min\{-z - H \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} + R_1)/(R_1 - R_2), -z + H, z\}$ . Контейнер  $\Omega$  розділений круговими стелажми  $S_k$ ,  $k = 2, \dots, m$ , на підконтейнери  $\Omega^k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Вважаємо, що  $S_1$  і  $S_{m+1}$  – нижня та верхня основи контейнера  $\Omega$ . Між стелажми  $S_k$  і  $S_{k+1}$  задана відстань  $t_k$ . Початок власної системи координат  $Oxyz$  контейнера  $\Omega$  знаходиться в центрі симетрії нижньої основи  $S_1$  контейнера  $\Omega$ ;  $Oz$  – подовжня вісь симетрії  $\Omega$  (рис. 1). Контейнер  $\Omega$  розглядається як однорідна поверхня маси  $m_0$ . Маса стелажів  $S_k$ ,  $k = 2, \dots, m$ , контейнера  $\Omega$  не враховується.

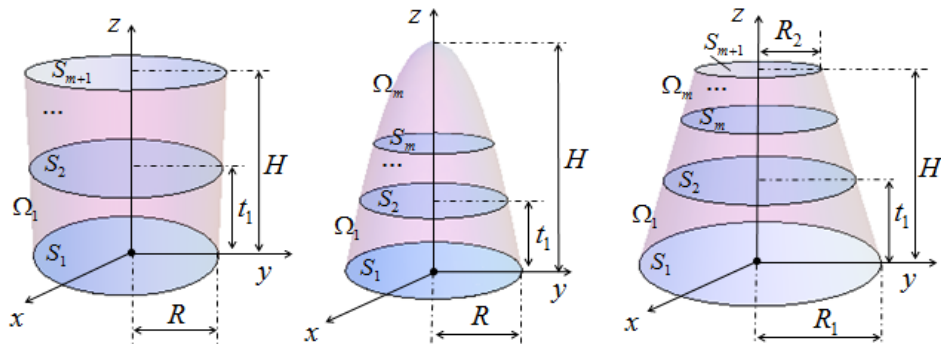


Рис. 1. Види контейнерів

Множина об'єктів розміщення  $A = \{A_i, i \in I_n\}$ ,  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , включає в себе кулі  $S_i$  радіуса  $r_i$ ,  $i \in I_1$ ; прямі кругові циліндри  $\mathbf{C}_i$  радіуса основи  $r_i$  та висоти  $2h_i$ ,

$i \in I_2$ ; тори  $\mathbb{T}_i$  з метричними характеристиками  $(r_i, h_i)$ , де  $r_i$  – відстань від центра твірного кола до осі обертання;  $2h_i$  – висота тора,  $i \in I_3$ ; сфероциліндри  $S_{Ci}$  з метричними характеристиками  $(l_i, r_i, h_i)$ , де  $l_i$  – висота кульових сегментів,  $r_i$  – радіус основи циліндра,  $2h_i$  – висота циліндра,  $i \in I_4$ ; прямі прямокутні паралелепіпеди  $\mathbb{P}_i$  з метричними характеристиками  $(w_i, l_i, h_i)$ , де  $2w_i$  – довжина,  $2l_i$  – ширина,  $2h_i$  – висота  $\mathbb{P}_i$ ,  $i \in I_5$ ; прямі правильні призми  $\mathbb{K}_i$  з метричними характеристиками  $(r_i, h_i, s_i)$ , де  $r_i$  – радіус основи циліндра, описаного навколо  $\mathbb{K}_i$ ,  $2h_i$  – висота  $\mathbb{K}_i$ ,  $s_i$  – кількість вершин опуклого багатокутника, що лежить в основі  $\mathbb{K}_i$ ,  $i \in I_6$  (рис. 2). При цьому  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_6 = I_n$ . Позначимо через  $O_i x_i y_i z_i$  власну систему координат об'єкта  $A_i$ , початок  $O_i$  якої знаходиться в центрі симетрії  $A_i$ , де  $O_i x_i$ ,  $O_i y_i$ ,  $O_i z_i$  – осі симетрії об'єкта  $A_i$ , а  $O_i z_i \parallel Oz$ . Кожен об'єкт  $A_i$  являє собою однорідне тверде тіло заданої маси  $m_i$ .

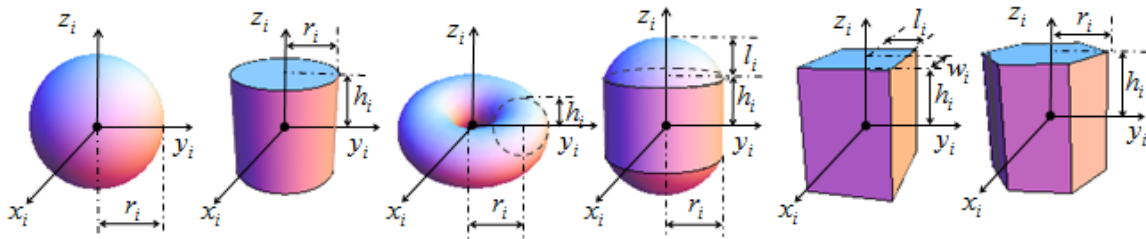


Рис. 2. Види об'єктів розміщення

Вважаємо, що відомо розбиття множини  $A$  на підмножини  $A^k = \{A_i, i \in I^k\}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , відповідно до вимог розміщення об'єктів в підконтейнерах  $\Omega^k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . В свою чергу, підмножина  $A^k$  об'єктів, у загальному випадку, розбивається на дві підмножини  $A_+^k = \{A_i, i \in I_+^k\}$  та  $A_-^k = \{A_i, i \in I_-^k\}$ , де  $A_+^k$  – підмножина об'єктів, що мають бути розміщені на стелажі  $S_k$ ,  $A_-^k$  – підмножина об'єктів, що мають бути розміщені під стелажом  $S_{k+1}$  всередині  $\Omega^k$  (рис. 3а).

Розміщення об'єктів множини  $A$  в контейнері  $\Omega$  визначається вектором параметрів розміщення  $u_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_i)$  відносно системи координат  $Oxyz$ , де  $(x_i, y_i, z_i)$  – вектор трансляції об'єкта  $A_i$ ,  $\theta_i$  – кут повороту об'єкта  $A_i$  в площині  $Oxy$ . При цьому  $z_i = \sum_{l=1}^k t_{l-1} + h'_i = \text{const}$ , якщо  $i \in I_+^k$ , та  $z_i = \sum_{l=1}^k t_l - h'_i = \text{const}$ , якщо  $i \in I_-^k$ , де  $h'_i = h_i$  для  $C_i, \mathbb{T}_i, \mathbb{K}_i$ ,  $h'_i = r_i$  для  $S_i$  і  $h'_i = h_i + l_i$  для  $S_{Ci}$ . Вектор змінних задачі  $BLP$  визначається так:  $(p, u) = (p, u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^{3n+1}$ ,  $p$  – змінна метрична характеристика контейнера  $\Omega$ .

Контейнер  $\Omega$  з упакованими об'єктами множини  $A$  утворює систему  $\Omega_A$ . Вважаємо, що початок  $O_S$  системи координат  $O_S XYZ$  для  $\Omega_A$  співпадає з її центром мас, при цьому  $O_S X \parallel Ox$ ,  $O_S Y \parallel Oy$ ,  $O_S Z \parallel Oz$  (рис. 3б).



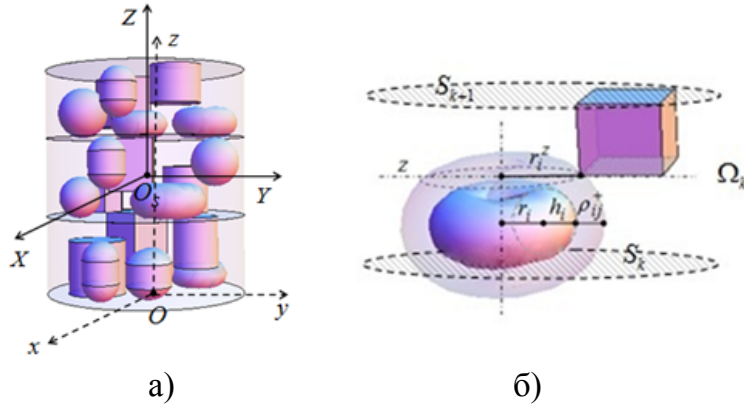


Рис. 3. а) приклад системи  $\Omega_A$ , б) розміщення пари об'єктів  $\mathbb{T}_i(u_i)$  і  $\mathbb{K}_j(u_j)$  на максимально допустимій відстані

На розміщення об'єктів можуть накладатися обмеження на мінімально та максимально допустимі відстані  $\rho_{ij}^-$  та  $\rho_{ij}^+$  між об'єктами  $A_i, A_j \in A^k$ ,  $i < j \in I^k$ , а також мінімально допустимі відстані  $\rho_i^-$  між об'єктом  $A_i \in A^k$  і боковою поверхнею підконтейнера  $\Omega^k$ ,  $i \in I^k$ . У випадку, якщо не задані мінімально допустимі відстані, вважаємо  $\rho_{ij}^- = 0$  ( $\rho_i^- = 0$ ), а якщо не задані максимально допустимі відстані, вважаємо  $\rho_{ij}^+ = \omega$ , де  $\omega$  – достатньо велике число,  $i < j \in I^k$ . Умова  $\rho_{ij}^- = \rho_{ij}^+$  гарантує розміщення об'єктів на заданій відстані.

В задачі *BLP* розглядаються такі види обмежень:

- обмеження розміщення (arrangement constraints), які поділяються на
  - обмеження неперетину (non-overlapping constraints) з урахуванням допустимих відстаней: об'єкти  $A_i, A_j$ ,  $i < j \in I^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , мають бути розміщені не ближче, ніж мінімально допустима відстань  $\rho_{ij}^-$  та не далі, ніж максимально допустима відстань  $\rho_{ij}^+$ , тобто  $\rho_{ij}^- \leq \text{dist}(A_i, A_j) \leq \rho_{ij}^+$ ,  $i < j \in I^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ;
  - обмеження включення (containment constraints) з урахуванням допустимих відстаней: об'єкти  $A_i$ ,  $i \in I^k$ , мають бути розміщені у контейнері  $\Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , з урахуванням заданих мінімально допустимих відстаней  $\rho_i^-$  до бокової поверхні підконтейнеру  $\Omega^k$ , тобто  $\text{dist}(A_i, \tilde{\Omega}^{k*}) \geq \rho_i^-$ ,  $i \in I^k$ ,  $\tilde{\Omega}^{k*} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \tilde{\Omega}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ;
- обмеження поведінки (behavior constraints)
  - обмеження рівноваги: відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від заданої точки не має перевищувати заданого допустимого значення;
  - обмеження моментів інерції: значення осьових моментів інерції системи  $\Omega_A$  не мають перевищувати заданих допустимих значень;
  - обмеження стійкості: значення відцентрових моментів інерції не мають перевищувати заданих допустимих значень.

В формуванні цільової функції  $F(p, u)$  беруть участь метричні характеристики контейнера  $\Omega$ , відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від заданої точки, осьові

моменти інерції системи  $\Omega_A$ .

Задача балансної компоновки (BLP) формулюється наступним чином: розмістити об'єкти підмножин  $A^k$  в підконтейнерах  $\Omega^k \subset \Omega$ ,  $k=1, \dots, m$ , так, щоб виконувались обмеження розміщення та обмеження поведінки, а задана функція цілі  $F(p, u)$  досягала свого екстремального значення.

Другий розділ дисертації присвячено математичному моделюванню обмежень розміщення задачі BLP з використанням методу *phi*-функцій Стояна. Наводяться визначення *phi*-функції і псевдонормалізованої *phi*-функції [2\*], квазі-*phi*-функції і псевдонормалізованої квазі-*phi*-функції [3\*] та їх основні властивості.

Будуються *phi*-функції, квазі-*phi*-функції, псевдонормалізовані *phi*-функції та псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції для розглянутих видів об'єктів і контейнерів з урахуванням особливостей задачі BLP (розміщення об'єктів на стелажах (під стелажми) контейнера, неперервні трансляції та обертання об'єктів відносно площини  $Oxy$ , обмеження на мінімально та максимально допустимі відстані).

В термінах *phi*-функцій, обмеження розміщення для задачі BLP можна сформулювати таким чином:

$$\bullet \text{dist}(A_i, A_j) \geq \rho_{ij}^- \Leftrightarrow \widehat{\Phi}_{ij}^-(u_i, u_j) \geq 0 \text{ (або } \max_{u'} \widehat{\Phi}_{ij}^-(u_i, u_j, u') \geq 0 \text{)}, \quad (1)$$

$$\bullet \text{dist}(A_i, A_j) \leq \rho_{ij}^+ \Leftrightarrow \widehat{\Phi}_{ij}^+(u_i, u_j) \geq 0 \text{ (або } \max_{u'} \widehat{\Phi}_{ij}^+(u_i, u_j, u') \geq 0 \text{)}, \quad (2)$$

$$i < j \in I^k, \quad k=1, \dots, m,$$

де  $\widehat{\Phi}_{ij}^-$  ( $\widehat{\Phi}_{ij}^+$ ) – псевдонормалізована *phi*-функція,  $\widehat{\Phi}_{ij}'^-$  ( $\widehat{\Phi}_{ij}'^+$ ) – псевдонормалізована квазі-*phi*-функція для моделювання обмежень на мінімально (максимально) допустимі відстані між об'єктами  $A_i$  і  $A_j$ ,  $i < j \in I^k$ ,  $u'$  – вектор додаткових змінних;

$$\bullet \text{dist}(A_i, \tilde{\Omega}^*) \geq \rho_i^- \Leftrightarrow \widehat{\Phi}_i^-(p, u_i) \geq 0, \quad i \in I_n, \quad (3)$$

де  $\widehat{\Phi}_i^-$  – псевдонормалізована *phi*-функція для моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані між об'єктом  $A_i$ ,  $i \in I_n$ , та боковою поверхнею контейнера  $\Omega$ ,  $\tilde{\Omega}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \tilde{\Omega}$ .

Доведено, що побудовані у роботі функції є псевдонормалізованими квазі-*phi*-функціями для відповідних форм об'єктів.

Наприклад, функція вигляду

$$\widehat{\Phi}_{ij}'^+(u_i, u_j, u' = p_j) = \min \{f_i(u_i, p_j), f_j(u_j, p_j)\}$$

є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією для тора  $\mathbb{T}_i(u_i)$  та прямої призми  $\mathbb{K}_j(u_j)$  при  $i < j \in I^k$  и  $|z_i - z_j| \leq h_i + h_j + \rho_{ij}^+$  (рис. 3б), де  $u_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_i = 0)$ ,  $u_j = (x_j, y_j, z_j, \theta_j)$ ,  $p_j = (x_{p_j}, y_{p_j})$ ,  $f_i(u_i, p_j) = -(x_i - x_{p_j})^2 - (y_i - y_{p_j})^2 + (r_i^z)^2$ ,  $f_j(u_j, p_j) = \min \{\chi'_{jl}(u_j, p_j), l=1, \dots, s_j\}$ ,  $\chi'_{jl}(u_j, p_j) = A'_{jl}(u_j)x_{p_j} - B'_{jl}(u_j)y_{p_j} + C'_{jl}(u_j)$

[2\*] Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – № 43 (5). – P. 535 - 553.

[3\*] Stoyan Y. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses / Y. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova // Journal of Global Optimization. – 2015. DOI: 10.1007/s10898-015-0331-2

$$A'_{jl}(u_j) = \tilde{y}'_{j(l+1)} - \tilde{y}'_{jl}, \quad B'_{jl}(u_j) = \tilde{x}'_{j(l+1)} - \tilde{x}'_{jl}, \quad C'_{jl}(u_j) = \tilde{y}'_{jl} \cdot \tilde{x}'_{j(l+1)} - \tilde{y}'_{j(l+1)} \cdot \tilde{x}'_{jl},$$

$$\tilde{x}'_{jl} = x_j + \tilde{x}_{jl} \cos \theta_j + \tilde{y}_{jl} \sin \theta_j, \quad \tilde{y}'_{jl} = y_j - \tilde{x}_{jl} \sin \theta_j + \tilde{y}_{jl} \cos \theta_j,$$

$$(\tilde{x}_{jl}, \tilde{y}_{jl}, 0), \quad l=1, \dots, s_j, \quad - \text{координати вершин основи призми } \mathbb{K}_j(u_j).$$

Слід зазначити, що  $r_i^z = r_i + h_i + \rho_{ij}^+$ , якщо  $|z_i - z_j| \leq h_j$ , та  $r_i^z = r_i + \sqrt{(h_i + \rho_{ij}^+)^2 - (|z_i - z_j| - h_j)^2}$ , якщо  $h_j < |z_i - z_j| < h_i + h_j + \rho_{ij}^+$ ,  $i < j \in I^k$ .

Обмеження (1)-(2) можна визначити таким чином:

$$\Upsilon_1(u, u') = \min \{ \Upsilon_{ij}^-(u, u'), (i, j) \in \Xi_-^k, \Upsilon_{ij}^+(u, u'), (i, j) \in \Xi_+^k, k=1, 2, \dots, m \} \geq 0, \quad (4)$$

$$\Xi_-^k = \{ (i, j) : |z_i - z_j| < h_i + h_j + \rho_{ij}^-, i < j \in I^k \}, \quad \Xi_+^k = \{ (i, j) : \rho_{ij}^+ < \varpi, i < j \in I^k \},$$

$$\Upsilon_{ij}^-(u, u') \in \{ \widehat{\Phi}_{ij}^-(u), \widehat{\Phi}'_{ij}^-(u, u') \}, (i, j) \in \Xi_-^k, \quad \Upsilon_{ij}^+(u, u') \in \{ \widehat{\Phi}_{ij}^+(u), \widehat{\Phi}'_{ij}^+(u, u') \}, (i, j) \in \Xi_+^k,$$

де  $u = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n)$  – вектор змінних параметрів розміщення об'єктів,  $u' = (u'_{ij}, (i, j) \in \Xi_-^k, u'_{ij}, (i, j) \in \Xi_+^k, k=1, \dots, m)$  – вектор додаткових змінних.

Обмеження (3) описуються нерівністю

$$\Upsilon_2(p, u) = \min \{ \widehat{\Phi}_i^-(p, u_i), i \in I_n \} \geq 0, \quad (5)$$

де  $p$  – вектор змінних метричних характеристик контейнера  $\Omega$ ;  $u_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_i)$  – вектор параметрів розміщення об'єктів  $A_i$ ,  $i \in I_n$ , у якому  $x_i, y_i, \theta_i$  – змінні.

Таким чином, враховуючи (4)-(5), обмеження розміщення мають вигляд

$$\Upsilon(p, u, u') = \min \{ \Upsilon_1(u, u'), \Upsilon_2(p, u) \} \geq 0. \quad (6)$$

У третьому розділі дисертації описуються обмеження поведінки для задачі BLP. Визначаються такі механічні характеристики, як центр мас, осьові і відцентрові моменти інерції для системи  $\Omega_A$ . Будуються функції для опису обмежень рівноваги, моментів інерції і стійкості.

Обмеження рівноваги в задачі BLP визначаються так:

$$\mu_1(p, u) = \min \{ \mu_{11}(p, u), \mu_{12}(p, u), \mu_{13}(p, u) \} \geq 0, \quad (7)$$

де

$$\mu_{11}(p, u) = \min \{ -(x_s - x_e) + \Delta x_e, (x_s - x_e) + \Delta x_e \},$$

$$\mu_{12}(p, u) = \min \{ -(y_s - y_e) + \Delta y_e, (y_s - y_e) + \Delta y_e \},$$

$$\mu_{13}(p, u) = \min \{ -(z_s - z_e) + \Delta z_e, (z_s - z_e) + \Delta z_e \},$$

$$x_s = \frac{\sum_{i=0}^n m_i x_i}{\sum_{i=0}^n m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=0}^n m_i y_i}{\sum_{i=0}^n m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=0}^n m_i z_i}{\sum_{i=0}^n m_i},$$

$x_s, y_s, z_s$  – координати центра мас  $O_s$  системи  $\Omega_A$ ;  $\Delta x_e, \Delta y_e, \Delta z_e$  – допустимі відхилення від координат деякої заданої точки  $(x_e, y_e, z_e)$ ;  $(x_0, y_0, z_0)$  – центр мас  $\Omega$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , значення  $z_0$  визначено для кожного виду контейнера  $\Omega$ .

Обмеження моментів інерції визначаються нерівністю

$$\mu_2(p, u) = \min \{ \mu_{21}(p, u), \mu_{22}(p, u), \mu_{23}(p, u) \} \geq 0, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{21}(p, u) &= -J_X(p, u) + \Delta J_X, \quad \mu_{22}(p, u) = -J_Y(p, u) + \Delta J_Y, \\ \mu_{23}(p, u) &= -J_Z(p, u) + \Delta J_Z, \end{aligned}$$

$J_X(p, u), J_Y(p, u), J_Z(p, u)$  – осьові моменти інерції системи  $\Omega_A$ , відносно відповідних осей системи координат  $O_SXYZ$ , що визначаються так:

$$\begin{aligned} J_X(p, u) &= J_{x_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \cos^2 \theta_i + J_{y_i} \sin^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - (y_s^2 + z_s^2) \sum_{i=0}^n m_i, \\ J_Y(p, u) &= J_{y_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \sin^2 \theta_i + J_{y_i} \cos^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i - (x_s^2 + z_s^2) \sum_{i=0}^n m_i, \\ J_Z(p, u) &= J_{z_0} + \sum_{i=1}^n J_{z_i} + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i - (x_s^2 + y_s^2) \sum_{i=0}^n m_i, \end{aligned}$$

$J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}$  – осьові моменти інерції контейнера  $\Omega$  відносно осей системи координат  $Oxyz$ , а  $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}, i \in I_n$ , – осьові моменти інерції об'єкта  $A_i$  відносно осей системи координат  $O_i x_i y_i z_i$ ,  $\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z$  – допустимі значення для функцій  $J_X(p, u), J_Y(p, u), J_Z(p, u)$ . Величини  $J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}$  та  $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}, i \in I_n$ , визначені для кожного виду контейнера  $\Omega$  і об'єкта  $A_i$ .

Обмеження стійкості визначаються нерівністю

$$\mu_3(p, u) = \min \{ \mu_{31}(p, u), \mu_{32}(p, u), \mu_{33}(p, u) \} \geq 0, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{31}(p, u) &= \min \{ -J_{XY}(p, u) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(p, u) + \Delta J_{XY} \}, \\ \mu_{32}(p, u) &= \min \{ -J_{YZ}(p, u) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(p, u) + \Delta J_{YZ} \}, \\ \mu_{33}(p, u) &= \min \{ -J_{XZ}(p, u) + \Delta J_{XZ}, J_{XZ}(p, u) + \Delta J_{XZ} \}, \end{aligned}$$

$J_{XY}(p, u), J_{YZ}(p, u), J_{XZ}(p, u)$  – відцентрові моменти інерції системи  $\Omega_A$  відносно осей системи координат  $O_SXYZ$ , які визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} J_{XY}(p, u) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{x_i} - J_{y_i}) \sin 2\theta_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - x_s y_s \sum_{i=0}^n m_i, \\ J_{XZ}(p, u) &= \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - x_s z_s \sum_{i=0}^n m_i, \quad J_{YZ}(p, u) = \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - y_s z_s \sum_{i=0}^n m_i, \end{aligned}$$

$\Delta J_{XY}, \Delta J_{YZ}, \Delta J_{XZ}$  – задані допустимі значення для  $J_{XY}(p, u), J_{YZ}(p, u), J_{XZ}(p, u)$ .

В формулах (7) - (9) вважаємо, що  $x_s = x_s(p, u), y_s = y_s(p, u), z_s = z_s(p, u)$ .

Таким чином, обмеження поведінки системи  $\Omega_A$  з урахуванням (7) - (9) можна визначити так:

$$\mu(p, u) = \min \{ \mu_1(p, u), \mu_2(p, u), \mu_3(p, u) \} \geq 0. \quad (10)$$

**В четвертому розділі** будується математична модель задачі *BLP* у вигляді задачі нелінійного програмування, досліджуються її особливості. Розглядаються основні реалізації математичної моделі.

Математична модель задачі балансної компоновки (*BLP*) може бути визначена таким чином:

$$\min_{(p,u,u') \in W} F(p,u), \quad (11)$$

$$W = \{(p,u,u') \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon(p,u,u') \geq 0, \mu(p,u) \geq 0, \zeta \geq 0\}, \quad (12)$$

де  $\xi$  – розмірність задачі; нерівність  $\Upsilon(p,u,u') \geq 0$  описує обмеження розміщення (6); нерівність  $\mu(p,u) \geq 0$  – обмеження поведінки (10);  $\zeta \geq 0$  – система додаткових обмежень на метричні характеристики та/або параметри розміщення контейнера та об'єктів.

Задача (11) - (12) – багатоекстремальна задача нелінійного програмування у загальному випадку з негладкими функціями.

Область допустимих розв'язків задачі (11) - (12) може бути подано у вигляді  $W = W_1 \cup \dots \cup W_s \cup \dots \cup W_\eta$ , де кожна  $W_s$  описується системою нерівностей з гладкими функціями.

Тоді задача (11) - (12) зводиться до такої оптимізаційної задачі:

$$\min \{F(p^{s*}, u^{s*}), s = 1, 2, \dots, \eta\}, \quad (13)$$

$$F(p^{s*}, u^{s*}) = \min F(p,u), (p,u,u') \in W_s \subset \mathbb{R}^\xi, s = 1, 2, \dots, \eta. \quad (14)$$

В роботі розглядаються такі основні реалізації математичної моделі (11) - (12):

- $F(p,u) = p$  s.t.  $(p,u,u') \in W \subset \mathbb{R}^\xi$ ,

$$W = \{(p,u,u') \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u,u') \geq 0, \Upsilon_2(p,u) \geq 0, \mu(p,u) \geq 0, \zeta \geq 0\};$$

- $F(u) = d$ ,  $(p,u,u') \in W \subset \mathbb{R}^\xi$ ,

$$d = (x_s(u) - x_e)^2 + (y_s(u) - y_e)^2 + (z_s(u) - z_e)^2,$$

$$W = \{(p,u,u') \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u,u') \geq 0, \Upsilon_2(p,u) \geq 0, \mu_2(p,u) \geq 0, \mu_3(p,u) \geq 0, \zeta \geq 0\};$$

- $F(p,u) = \kappa_1 p + \kappa_2 d$ ,  $(p,u,u') \in W \subset \mathbb{R}^\xi$ ,

$$W = \{(p,u,u') \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u,u') \geq 0, \Upsilon_2(p,u) \geq 0, \mu_2(p,u) \geq 0, \mu_3(p,u) \geq 0, \zeta \geq 0\};$$

- $F(p,u) = \kappa_1 J_X(p,u) + \kappa_2 J_Y(p,u) + \kappa_3 J_Z(p,u)$ ,  $(p,u,u') \in W \subset \mathbb{R}^\xi$ ,

$$W = \{(p,u,u') \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u,u') \geq 0, \Upsilon_2(p,u) \geq 0, \mu_1(p,u) \geq 0, \mu_3(p,u) \geq 0, \zeta \geq 0\},$$

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  – вагові коефіцієнти.

**У п'ятому розділі** пропонуються ефективні алгоритми розв'язання задачі (11) - (12) та її основних реалізацій з використанням методів нелінійного програмування, негладкої оптимізації та сучасних *NLP-солверів*. Залежно від виду псевдонормалізованих *phi*-функцій (чи псевдонормалізованих квазі-*phi*-функцій) в (12) розглядаються різні стратегії розв'язання задачі *BLP*.

Якщо область допустимих розв'язків (12) описується системою нерівностей з

негладкими функціями, то використовуються *стратегії* 1 та 2.

*Стратегія 1* реалізує прискорений перебір систем нерівностей з гладкими функціями, що відповідають вершинам дерева розв'язків задачі (13) - (14). З метою відсікання безперспективних вершин дерева розв'язків використовується набір ефективних правил відсікання, які ґрунтуються на врахуванні верхньої оцінки значення функції цілі та несумісності систем.

*Стратегія 2* полягає у виконанні таких процедур:

- побудова множини стартових точок  $\{u_0^s\}_\chi$  із області допустимих розв'язків  $W$  задачі (11) - (12);
- побудова підобласті  $W_s$  допустимих розв'язків для кожної стартової точки  $u_0^s \in W$ ,  $s = 1, 2, \dots, \chi$ , із застосуванням дерева розв'язку задачі (11) - (12);
- пошук локального екстремуму  $(p^{s*}, u^{s*})$  задачі (14) на кожній підобласті  $W_s, s = 1, 2, \dots, \chi$ ;
- пошук розв'язку задачі  $\min \{F(p^{s*}, u^{s*}), s = 1, 2, \dots, \chi\}$ .

Якщо область допустимих розв'язків (12) описується системою нерівностей з гладкими функціями, то використовуються *стратегії* 3 та 4.

*Стратегія 3* поєднує в собі такі етапи.

1. Генерування набору стартових точок із області  $W$  для задачі (14).
2. Пошук локального мінімуму цільової функції  $F(p, u)$  задачі (14), стартуючи з точок, отриманих на кроці 1.
3. Вибір кращого локального розв'язку з отриманих на кроці 2.

Для побудови стартової точки  $u^0 \in W$  запропоновано такий алгоритм під назвою *BSPA (Balanced Starting Point Algorithm)*.

Крок 1. Генеруємо випадковим чином множину точок  $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$ , що належать відповідним круговим перерізам контейнера  $\Omega$  радіусів  $R_i^z$ ,  $i \in I_n$ . Формуємо вектор  $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$ . Фіксуємо параметри повороту  $\theta_i^0 = \theta^0 = 0$ ,  $i \in I_n$ .

Крок 2. Нехай  $\lambda = \lambda_i$  – коефіцієнт гомотетії для об'єктів  $A_i$ ,  $i \in I_n$ . Виконуючи очевидні геометричні побудови, визначаємо вектор додаткових змінних  $u'^0$  розмірності  $\tau$ , такий, що кожна з квазі-*phi*-функцій (12) досягає свого максимального значення по додаткових змінних  $u'^0$  в точці  $(u_\lambda^0, u'^0)$ , де  $u_\lambda^0 = (v^0, \theta^0, \lambda^0)$ ,  $\lambda^0 = 0$ ,  $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$ ,  $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$ .

Крок 3. Визначаємо  $\alpha^0 = \min \{\Upsilon_1(u_\lambda^0, u'^0), \Upsilon_2(u_\lambda^0)\}$ . Якщо  $\alpha^0 < 0$ , то переходимо до кроку 4, в іншому випадку формуємо точку  $u_\alpha^* = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$  та переходимо до кроку 5.

Крок 4. Вважаємо, що  $\lambda = 0$ ,  $\theta_i = \theta_i^0 = 0$ ,  $i \in I_n$ , та використовуємо  $u_\alpha^0 = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$  як стартову точку для розв'язання такої оптимізаційної задачі:

$$\alpha^* = \max \alpha, \text{ s.t. } u_\alpha \in W_\alpha, \quad (15)$$

$$W_\alpha = \{u_\alpha \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') - \alpha \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) - \alpha \geq 0, -\alpha \geq 0\}. \quad (16)$$

Якщо  $\alpha^* = 0$ , то знайдена точка  $u_\alpha^* = (u_\lambda^*, u'^*, \alpha^*)$  є точкою глобального максимуму задачі (15) - (16), тоді переходимо до кроку 5. Якщо  $\alpha^* < 0$ , то допустима стартова точка для задачі (15) - (16) не знайдена, тобто не виконуються обмеження розміщення. В цьому випадку повертаємося до кроку 1.

**Крок 5.** Вважаємо, що значення  $\theta_i, i \in I_n$  – змінні. Генеруємо випадковим чином стартові значення параметрів  $\theta_i^* \in [0, 2\pi), i \in I_n$ , для вектора  $u_\alpha^*$ .

**Крок 6.** Формуємо допустиму стартову точку  $(u_\lambda^*, u'^*)$ , використовуючи  $u_\alpha^*$ , та розв'язуємо таку допоміжну задачу нелінійного програмування:

$$\lambda^* = \max \lambda, \text{ s.t. } (u_\lambda, u') \in W_\lambda, \quad (17)$$

$$W_\lambda = \{(u_\lambda, u') \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) \geq 0, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}. \quad (18)$$

Якщо  $\lambda^* = 1$ , то знайдена точка  $(u_\lambda^*, u'^*) = (v^*, \theta^*, \lambda^*, u'^*)$  є точкою глобального максимуму задачі (17) - (18), тоді переходимо до кроку 7. Якщо  $\lambda^* < 1$  – повертаємося до кроку 1.

**Крок 7.** Розраховуємо значення  $\mu(v^*, \theta^*)$ . Якщо  $\mu(v^*, \theta^*) < 0$ , переходимо до кроку 8, в іншому випадку – до кроку 9.

**Крок 8.** Стартуючи з точки  $u_\beta^0 = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^0 = \mu(u^*))$ , розв'язуємо таку допоміжну задачу нелінійного програмування:

$$\beta^* = \max \beta, \text{ s.t. } u_\beta \in W_\beta, \quad (19)$$

$$W_\beta = \{u_\beta \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Upsilon_1(u, u') \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0, \mu(u) - \beta \geq 0, -\beta \geq 0\}, \quad (20)$$

де  $\beta$  – допоміжна змінна,  $u_\beta = (u, u', \beta)$ ,  $u = (v, \theta)$ .

Якщо  $\beta^* = 0$ , то знайдена точка  $u_\beta^* = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^*)$  є точкою глобального максимуму задачі (19) - (20), тоді переходимо до кроку 9. Якщо  $\beta^* < 0$ , повертаємося до кроку 1.

**Крок 9.** Формуємо допустиму стартову точку  $u^0 = (v^*, \theta^*, u'^*) \in W$  для розв'язання задачі (11) - (12).

Для розв'язання задач нелінійного програмування при реалізації стратегій 1 - 3 використовується IPOPT (Interior Point OPTimizer, <https://projects.coin-or.org/Ipopt>) – бібліотека для пошуку локальних екстремумів неперервних задач нелінійного програмування з використанням методу внутрішньої точки та модифікація LOFRT процедури для задачі BLP, запропонованої для задачі упаковки еліпсів в [3\*]. Ця процедура дозволяє скоротити обчислювальні витрати завдяки зведенню задачі (14) до послідовності задач, в загальному випадку, меншої розмірності та з меншою кількістю нерівностей.

**Стратегія 4.** В основі цієї стратегії лежить метод мінімізації недиференційовних функцій –  $r(\alpha)$ -алгоритм Шора [4\*], який дозволяє за допомогою негладких штрафів зводити задачу (11) - (12) до задачі безумовної оптимізації вигляду

---

[4\*] Shor N. Z. Modified  $r$ -algorithm to find the global minimum of polynomial functions / N. Z. Shor, P. I. Stetsyuk // Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – № 33 (4). – P. 482-497.

$$f(p, u) = F(p, u) + P_1 \sum_{l=1}^{N_a} \max\{0, -\Phi_l\} + P_2 \sum_{k=1}^{N_b} \max\{0, -\mu_k\} + P_3 \max\{0, -p + p_{low}\}, \quad (21)$$

де  $P_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , – штрафні коефіцієнти;  $\Phi_l$ ,  $l=1, \dots, N_a$ , – функції із обмежень розміщення (4) і (5);  $\mu_k$ ,  $k=1, \dots, N_b$ , – функції із обмежень поведінки (10);  $p_{low}$  – нижня оцінка значення змінної метричної характеристики  $p$  контейнера  $\Omega$ .

Суть методу полягає в пошуку локальних мінімумів функції (21) для заданого набору стартових точок (необов'язково допустимих), згенерованих випадковим чином. Для пошуку локальних мінімумів майже-диференційовних функцій використовується програма *ralgb5* [4\*]. Даний підхід дозволяє отримувати ефективні локально оптимальні розв'язки для об'єктів, що мають форму кулі, циліндра, тора та сфероциліндра.

У шостому розділі наведено результати обчислювальних експериментів, виконаних за допомогою програмного забезпечення, побудованого із застосуванням запропонованих у роботі засобів моделювання, методів та алгоритмів.

*Приклад 1.* Розглядається задача рівноважної упаковки циліндрів в циліндричному контейнері з метою мінімізації радіуса контейнера. На рис. 4 а показано локально оптимальне розміщення об'єктів, що знайдене за допомогою *стратегії 4*.

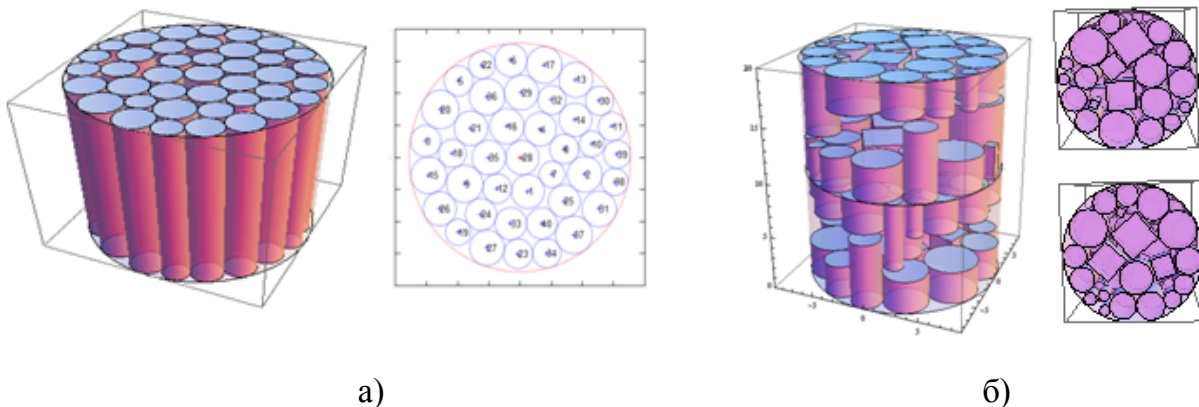


Рис. 4. Локально оптимальне розміщення об'єктів: а) система  $\Omega_A$  в *прикладі 1* та її вид зверху, б) система  $\Omega_A$  в *прикладі 2* та її вид зверху і знизу

*Приклад 2.* Розглядається задача рівноважної упаковки циліндрів і паралелепіпедів в циліндричному контейнері з метою мінімізації відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від заданої точки. На рис. 4 б зображено локально оптимальне розміщення об'єктів, що знайдене за допомогою *стратегії 2*.

*Приклад 3.* Розглядається задача розміщення циліндрів і паралелепіпедів на стелажах контейнера параболічної форми з урахуванням мінімально допустимих відстаней з метою мінімізації відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від заданої точки. Локально оптимальне розміщення об'єктів, що знайдене за допомогою *стратегії 1*, наводиться на рис. 5 а.

*Приклад 4.* Розглядається задача розміщення різних об'єктів (кулі, циліндри, тори, сфероциліндри, прямокутний паралелепіпед та правильна шестикутна призма) на стелажах усіченого конуса, враховуючи мінімально та максимально допустимі



відстані, з метою мінімізації відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від центра мас контейнера. На рис. 5 б показано локально оптимальне розміщення об'єктів, що отримане за допомогою *стратегії 3*.

*Приклад 5.* Розглядається задача компоновки різних об'єктів (кулі, циліндри, тори, сфероциліндри, прямокутні паралелепіпеди та правильна шестикутна призма) на стелажах циліндричного контейнера, враховуючи мінімально допустимі відстані, з метою мінімізації відхилення центра мас системи  $\Omega_A$  від центра мас контейнера. На рис. 5 в зображено локально оптимальне розміщення об'єктів, що знайдене за допомогою *стратегії 3*.

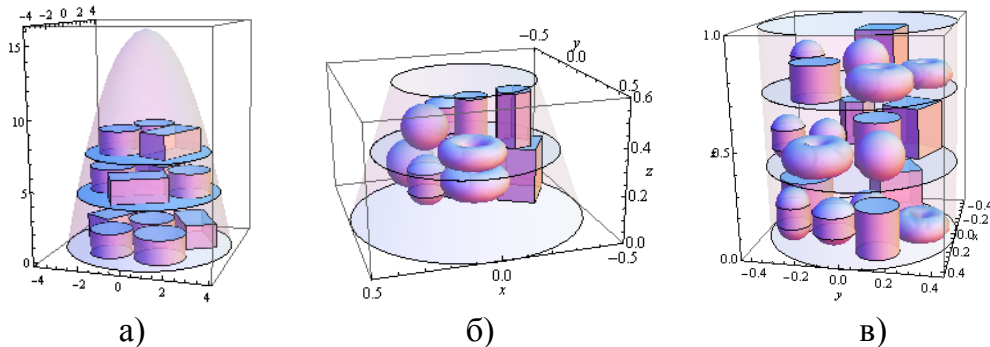


Рис. 5. Локально оптимальне розміщення об'єктів в *прикладі*: а) – 3, б) – 4, в) – 5

**Порівняння результатів роботи з відомими світовими аналогами.** Виконано порівняння результатів даного дослідження та відомих аналогів. Отримано найкраще значення цільової функції з використанням *стратегії 3* та *стратегії 4*.

1. Розглядається задача упаковки циліндрів в циліндричний контейнер мінімального радіуса при мінімальному відхиленні центра мас системи від заданої точки. Як цільова функція розглядається функція  $F(p, u) = \kappa_1 R + \kappa_2 d$ . В таблиці 1 наведено результати порівняння з аналогами, опублікованими у роботах [5\*]-[7\*].

Таблиця 1

Порівняння результатів роботи зі світовими аналогами [5\*]-[7\*]

Джерела	$n = 15$			$n = 20$		
	$f_1 = R$	$f_2 = d$	$t$ , сек.	$f_1 = R$	$f_2 = d$	$t$ , сек.
1. [5*] PSO	76.58	0.0002	31816	89.15	0.0002	47496
2. [6*] SA	68.77	0	8320	83.09	0	18431
3. [6*] PSO	67.65	0	8659	83.06	0	20035
4. [7*] CMPT	68.32	0	295	83.86	0	444
5. BSPA+IPOPT	<b>67.49</b>	<b>0</b>	<b>290</b>	<b>81.83</b>	<b>0</b>	<b>513</b>

PSO – Particle Swarm Optimization, SA – Simulated Annealing, CMPT – Centre-of-Mass-based Placing Technique, BSPA – Balanced Start Point Algorithm, IPOPT – Interior Point Optimizer

[5\*] Zhou C. Particle swarm optimization based algorithm for constrained layout optimization / C. Zhou, L. Gao, and H. Gao. // Control and Decision. – 2005. – № 20 (1). – P. 36 – 40.

[6\*] Xiao R. B. Two hybrid compaction algorithms for the layout optimization problem / R. B. Xiao, Yi C. Xu, and M. Amos. // BioSystems. – 2006. – № 90. – P. 560 – 567.

[7\*] Oliveira W. A. Nonidentical circle packing problem: multiple disks installed in a rotating circular container / W. A. Oliveira, L. L. Salles Neto, A. C. Moretti, E. F. Reis // International Transactions in Operational Research. – 2015.

2. Розглядається задача компоновки циліндрів в циліндричному контейнері мінімального радіуса з урахуванням обмежень рівноваги. В таблиці 2 наведено найкращі опубліковані результати для десяти тестових прикладів. Як функція цілі розглядається  $F(p, u) = R$ .

Таблиця 2

Порівняння результатів роботи зі світовими аналогами [8\*]-[10\*]

$n$	Джерело [8*], $R$	Джерело [9*], $R$	Джерело [10*], $R$	$r$ -алгоритм Шора, $R$	Поліпшення, %
10	61.21	60.61	60.41	<b>59.34</b>	<b>1.80-3.15</b>
15	69.32	67.58	67.49	<b>67.13</b>	<b>0.54-3.26</b>
20	85.08	82.22	82.63	<b>81.50</b>	<b>1.39-4.39</b>
25	84.57	83.12	83.74	<b>82.77</b>	<b>1.17-2.17</b>
30	101.23	99.40	99.78	<b>97.70</b>	<b>2.13-3.61</b>
35	104.99	102.29	103.56	<b>100.60</b>	<b>2.94-4.36</b>
40	119.11	114.26	116.17	<b>113.34</b>	<b>2.50-5.09</b>
45	120.85	119.66	119.02	<b>117.08</b>	<b>1.66-3.22</b>
50	125.62	125.14	124.91	<b>122.30</b>	<b>2.13-2.71</b>
55	139.17	137.49	137.52	<b>134.19</b>	<b>2.48- 3.71</b>

Програмна реалізація  $r(\alpha)$ -алгоритма Шора виконана засобами некомерційної мови GNU Octave [<http://www.octave.org>], програмна реалізація стратегій 1, 2 і 3, а також графічна візуалізація – засобами Microsoft Visual C++ і CAS *Wolfram Mathematica* 9.0.

Додатки дисертації містять: акт про впровадження в навчальний процес, свідоцтва про реєстрацію авторського права на програмний продукт; набори вихідних даних для обчислювальних експериментів, опис інтерфейсу і можливостей дослідницьких програм з використанням математичного забезпечення, розробленого під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

## ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано важливу наукову задачу балансної компоновки 3D-об'єктів на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, включаючи створення конструктивних засобів математичного моделювання, побудову нових математичних моделей, розробку ефективних методів розв'язання.

[8\*] Oliveira W.A. A heuristic for the nonidentical circle packing problem / W. A. Oliveira, L. L. Salles Neto, A. C. Moretti // Anais do CNMAC. – 2010. – № 3. – P. 626–632.

[9\*] Xu Y.-C. Ant Colony Algorithm for the Weighted Item Layout Optimization Problem / Y.-C. Xu, Dong F.-M., Liu Y., Xiao R.-B., Amos M. // arXiv preprint arXiv:1001.4099 (2010)

[10\*] Xu Y.-C. A Novel Algorithm for the Layout Optimization Problem / Y.-C. Xu, R.-B. Xiao, M. Amos // Proceedings of the 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC07), IEEE Press, 3938–3942 (2007)

Основні наукові результати дисертації:

- 1) розроблено засоби математичного моделювання відношень 3D-об'єктів в задачі *BLP* (неперервні обертання об'єктів, мінімально і максимально допустимі відстані, наявність стелажів в контейнері) у вигляді класів вільних від радикалів псевдонормалізованих *phi*-функцій та псевдонормалізованих квазі-*phi*-функцій;
- 2) формалізовано обмеження поведінки механічної системи у вигляді системи нелінійних нерівностей з гладкими функціями;
- 3) побудовано математичну модель задачі *BLP* та її основні реалізації у вигляді задач нелінійного програмування (*NLP-models*) з гладкими функціями;
- 4) розроблено стратегії розв'язання основних реалізацій задачі *BLP* із застосуванням методів нелінійного програмування та негладкої оптимізації;
- 5) розроблено алгоритми пошуку допустимих стартових точок та локально-оптимальних розв'язків для основних реалізацій задачі *BLP*;
- 6) створено програмне забезпечення для розв'язання основних реалізацій задачі *BLP* та отримано 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на програмний продукт;
- 7) виконано порівняння результатів даного дослідження та відомих світових аналогів, отримано найкращі значення цільової функції для усіх, та покращено час розв'язання – для багатьох тестових прикладів.

Отримані наукові результати являють собою подальший розвиток теорії математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Коваленко А. А. Размещение объектов в контейнере параболоидной формы с круговыми стеллажами с учетом ограничений поведения / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 2 (112). – С. 75-82.
2. Коваленко А. А. Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений поведения системы / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1 (111). – С. 126-134.
3. Романова Т. Е. *Phi*-функции для моделирования ограничений включения в оптимизационных задачах компоновки / Т. Е. Романова, А. А. Коваленко // Системи обробки інформації. – 2013. – Т. 1, № 117. – С. 228-133.
4. Коваленко А. А. Балансная компоновка цилиндрических объектов: математические модели и методы решения / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – № 4. – С. 70-79.
5. Коваленко А. А. Математическое моделирование ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния в задачах балансной компоновки / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2014. – № 169. – С. 54-62.
6. Панкратов А. В. Задача равновесной компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса / А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, А. А. Коваленко // Проблемы машиностроения. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 60-66.

7. Kovalenko A. A. Balance layout problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods / A. A. Kovalenko , T. E. Romanova , P. I. Stetsyuk // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol.51, № 4. – P. 556-565. – doi:10.1007/s10559-015-9746-5

8. Стецюк П. І. Комп'ютерна програма «Balance circular packing» / П. І. Стецюк, Т. Є. Романова, Г. А. Коваленко – Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 55689. Україна. Міністерство освіти і науки. Державна служба інтелектуальної власності. – 21.07.2014.

9. Стецюк П. І. Комп'ютерна програма «Рівноважна упаковка кругів»/ П. І. Стецюк, Т. Є. Романова, Г. А. Коваленко – Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 56609. Україна. Міністерство освіти і науки. Державна служба інтелектуальної власності. – 23.09.2014.

10. Коваленко А. А. Упаковка 3D-объектов в усеченном конусе с учетом специальных ограничений / А. А. Коваленко, М. А. Золотухина // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XVII междунар. молодежн. форума, Харьков: Харьков. нац. ун-т радиоэлектроники. – 2013. – С. 128-129.

11. Stetsyuk P. Optimal Packing Circular Cylinders into a Cylindrical Container Taking into Account Behavior Constraints / P. Stetsyuk, T. Romanova, A. Pankratov, A. Kovalenko // Proc. 10-th ESICUP Meeting, Lille (France). – 2013. – P. 21-22.

12. Коваленко А. А. Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL): тез. доп. XL міжнар. наук. конф., Кацивелі (Крим). – 2013. – С. 123.

13. Коваленко А. А. *Phi*-функции для моделирования ограничений включения в оптимизационных задачах компоновки / А. А. Коваленко, Т. Е. Романова // Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2013): тез. доп. XI Міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: Дніпр. нац. ун-т. – 2013. – С. 112.

14. Коваленко А. А. Математическое моделирование задач компоновки с учетом ограничений поведения / А. А. Коваленко, Т. Е. Романова // Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. IV Междунар. конф. Кишинев (Молдавия). – 2014.– С. 248-250.

15. Золотухина М. А. Компоновка 3D-объектов в контейнере параболоидной формы с учетом ограничений поведения / М. А. Золотухина, А. А. Коваленко // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XVII междунар. молодежн. форума, Харьков: Харьков. нац. ун-т радиоэлектроники. – 2014. – С. 84-85.

16. Romanova T. Optimal balanced circular packing problem / T. Romanova, P. Stetsyuk , A. Kovalenko // Optimization and Applications» (OPTIMA-2014): Proc. V International Conference on Optimization methods and Applications, Petrovac (Montenegro). – 2014. – P. 158-159.

17. Коваленко А. А. Модели и методы решения задач балансной компоновки цилиндров / А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк // Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014): тез. докл. XII междунар. науч.-практ. конф. Днепропетровск: Днепр. нац. ун-т. – 2014. – С.122-123.

18. Коваленко А. А. Задача балансной компоновки 3D-объектов: математическая модель и методы решения / А. А. Коваленко // Современные проблемы машино-

строения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов, Харьков: Ин-т. проблем машиностроения им. А. М. Подгорного НАН Украины. – 2014.– С. 24.

19. Коваленко А. А. Математическое моделирование ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния в задачах балансной компоновки / А. А. Коваленко // Информационные системы и технологии (ИСТ-2015): тез. докл. IV междунар. науч.-тех. конф., Харьков: Харьков. нац. ун-т радиозлектроники. – 2015. – С. 68-69.

20. Коваленко Г. А. Задача балансного компонования 3D об'єктів з урахуванням мінімально та максимально допустимих відстаней / Г. А. Коваленко, Т. Є. Романова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тез. доп. XXI всеукраїнської наук. конф., Львів, Львівський нац. ун-т ім. Івана Франка. – 2015. – С.176-178.

21. Kovalenko A. Optimal layout problems with behavior constraints/ A. Kovalenko, T. Romanova, A. Pankratov // Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015): тез. докл. XIII междунар. науч.-практ. конф. Днепропетровск: Днепр. нац. ун-т. – 2015. – С.96

22. Гребенник И. В. Комбинаторные особенности задачи балансной компоновки 3D-объектов / И. В. Гребенник, А. А. Коваленко, И. А. Урняева, С. Б. Шеховцов // Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015): тез. докл. XIII междунар. науч.-практ. конф. Днепропетровск: Днепр. нац. ун-т. – 2015. – С.52

23. Коваленко А. А. Задача компоновки 3D-объектов с учетом ограничений поведения / А. А. Коваленко // Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов, Харьков: Ин-т. проблем машиностроения им. А. М. Подгорного НАН Украины. – 2015.– С. 14.

## АНОТАЦІЯ

Коваленко Г. А. Задача балансної компоновки 3D-об'єктів: математичні моделі і методи розв'язання. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, м. Харків, 2015.

В дисертації досліджується задача балансної компоновки 3D-об'єктів (куль, прямих кругових циліндрів, торів, сфероциліндрів, прямих прямокутних паралелепіпедів, прямих правильних призм) в контейнері (прямому круговому циліндрі, параболоїді обертання або прямому усіченому круговому конусі) з круговими стелажками. В задачі враховуються задані мінімально і максимально допустимі відстані між об'єктами, а також обмеження поведінки механічної системи (обмеження рівноваги, моментів інерції, стійкості). Задача називається задачею *BLP* (*Balance Layout Problem*). Робота присвячена засобам, математичному моделюванню та методам розв'язання задачі *BLP*.

Конструктивні засоби математичного моделювання обмежень розміщення задачі *BLP* розробляються у вигляді нових класів псевдонормалізованих *phi*-функцій і

псевдонормалізованих квазі-*phi*-функцій. На основі цих засобів будується та досліджується адекватна математична модель (*NLP-model*) задачі *BLP*. Залежно від виду цільової функції, форми контейнера та об'єктів, різних комбінацій обмежень задачі *BLP* розглядаються основні реалізації математичної моделі. Пропонуються ефективні алгоритми розв'язання задачі з використанням методів нелінійного програмування і негладкої оптимізації. Це дозволяє знаходити локально оптимальні розв'язки задачі, найкращі за значенням цільової функції (порівняно з відомими опублікованими результатами).

Отримані результати використовуються у навчальному процесі. Крім того, отримані свідоцтва про реєстрацію авторського права на програмний продукт. Результати даного дослідження можуть використовуватись, наприклад, в логістиці, машинобудуванні, зокрема, в ракетно-космічному машинобудуванні при проектуванні складних космічних систем.

**Ключові слова:** балансна компоновка, обмеження поведінки, мінімально і максимально допустимі відстані, псевдонормалізовані *phi*-функції, псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції, математичне моделювання, нелінійне програмування

## АННОТАЦІЯ

Коваленко А. А. Задача балансной компоновки 3D-объектов: математические модели и методы решения. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, 2015.

Диссертация посвящена разработке конструктивных средств математического моделирования, математических моделей и методов локальной оптимизации для повышения эффективности решения оптимизационных задач балансной компоновки.

Получены следующие результаты. Сформулирована задача балансной компоновки (*BLP*), которая учитывает: реальные пространственные формы объектов (шар, цилиндр, тор, сфероцилиндр, параллелепипед, правильная призма) и контейнеров (цилиндр, параболоид вращения, усеченный конус) без предварительной их аппроксимации; особенности размещения объектов внутри контейнера (размещение объектов на стеллажах и/или под стеллажами непрерывные вращения объектов, минимально и максимально допустимые расстояния); равновесие, устойчивость и инертность системы при вращательном движении. Разработаны средства математического моделирования для задачи *BLP*, включая аналитическое описание ограничений размещения с учетом минимально и максимально допустимых расстояний и формализацию ограничений поведения (ограничения на центр масс, осевые и центробежные моменты инерции) с учетом пространственных форм объектов и контейнеров. Построена математическая модель задачи *BLP* и математические модели ее основных реализаций в виде задач нелинейного программирования (*NLP-models*). Разработана стратегия решения задачи *BLP* и алгоритмы поиска локально-оптимальных решений для основных ее реализаций, которые позволяют получать результаты, лучшие по значению функции цели по сравнению с мировыми аналогами. Создано программ-

ное обеспечение для решения задачи *BLP*. Проведен ряд вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных средств, моделей и методов.

Результаты работы используются в учебном процессе, что подтверждается актом внедрения. Получены свидетельства о регистрации авторского права на программный продукт. Результаты исследований могут быть использованы, например, в логистике при размещении грузов для их перевозки наземным, морским и воздушным транспортом, в машиностроении при компоновке сложных технических систем.

**Ключевые слова:** балансная компоновка, ограничения поведения, минимально и максимально допустимые расстояния, псевдонормализованные *phi*-функции, псевдонормализованные квази-*phi*-функции, математическая модель, нелинейное программирование

## ABSTRACT

Kovalenko A. A. Balance layout problem for 3D-objects: mathematical models and solution methods. – Manuscript.

A Thesis for a Candidate of Engineering Sciences degree in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – A. M. Pidgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2015.

The thesis studies the optimal layout problem for 3D-objects (solid spheres, straight circular cylinders, sphere-cylinders, torus, straight regular prisms and cuboids) into a container (a cylindrical, a parabolic, or a truncated conical shape) with circular racks. The problem takes into account the given minimal and maximal allowable distances between objects, as well as *behavior constraints* of the mechanical system (equilibrium, moments of inertia and stability constraints). The problem is called the *balance layout problem (BLP)*. The thesis is devoted to development of tools, mathematical models and solution methods for *BLP* problem.

Constructive tools of mathematical modeling of placement constraints in *BLP* problem are developed in the form of new classes of adjusted *phi*-functions and adjusted quasi-*phi*-functions. Based on the tools an exact mathematical model (*NLP-model*) of *BLP* problem is constructed and investigated. Mathematical models for its basic realizations are developed depending on the form of objective function, the type of container, shapes of objects, combinations of *behavior constraints*. The efficient algorithms are proposed for solving *BLP* problems, employing nonlinear programming and non-smooth optimization methods. This allows us to search for local-optimal solutions with the best value of the objective function (in comparison with the known published results).

The results are used in the educational process of technical universities. Developed software products are implemented and provided with appropriate references and certificates. They also can be used in logistics, machinery, in particular, in space engineering for rocketry design.

**Key words:** balance packing, behavior constraints, minimal and maximal allowable distances, adjusted *phi*-functions, adjusted quasi-*phi*-functions, mathematical modeling, nonlinear programming

Підписано до друку 08.02.2016р.

Формат 60 x 84 1/16. Папір офсетний.

Друк на різнографі. Умовн. друк. арк. 0,9. Тираж 100 прим. Зам. № 258

---

Надруковано у копії-центрі «МОДЕЛІСТ»

(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)

м. Харків, вул. Мистецтв, 3 літер Б-1

Тел. 7-170-354

**[www.modelist.in.ua](http://www.modelist.in.ua)**