НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ім. А.М.ПІДГОРНОГО

ОСЕТРОВ Андрій Олександрович

УДК 539.3

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗГИНУ ТА КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ І СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України, м. Харків.

Науковий керівник доктор технічних наук, професор
Курпа Лідія Василівна,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
завідувач кафедри прикладної математики

Офіційні опоненти доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Сметанкіна Наталя Володимирівна,
Інститут проблем машинобудування
ім А.М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу міцності та оптимізації конструкцій

доктор фізико-математичних наук, професор
Лоза Ігор Андрійович,
Національний транспортний університет МОН України,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки

Захист відбудеться « 17 » березня 2016 р. о 16 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий «15» лютого 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор технічних наук, професор О.О. Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Тонкостінні конструктивні елементи широко використовуються в багатьох галузях промисловості і, перш за все, в авіаційній, машинобудівній, при будівництві споруд, дорожніх покрить, космічній техніці та інших. В останній час для виготовлення цих елементів інтенсивно застосовуються композитні та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), які забезпечують їх міцність та суттєво зменшують вагу. Як моделі багатьох тонкостінних елементів зазвичай приймаються багатошарові пластини та оболонки, статична та динамічна поведінка яких описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розв'язання таких систем в загальному випадку може бути виконане тільки наближеними методами. Серед сучасних методів, які дозволяють розв'язувати подібні системи в областях довільної геометричної форми, найбільш універсальним та поширеним є чисельний метод скінченних елементів (МСЕ). Але треба відзначити, що, як і інші наближені методи, цей метод має не тільки великі переваги в порівнянні з іншими, але і ряд незручностей, наприклад, при розрахунку оболонок змінної товщини, при розв'язанні деяких нелінійних задач чи аналізі оболонок з ФГМ, механічні характеристики котрих залежать від координат. Альтернативним МСЕ є чисельно-аналітичний метод R-функцій (RFM). Цей метод було застосовано для багатьох крайових задач математичної фізики, доведено його ефективність, універсальність та алгоритмічність. В останні роки він активно застосовувався до розв'язання лінійних та геометрично нелінійних задач теорії багатошарових пластин та оболонок. Але аналіз результатів для цього класу задач показує, що при застосуванні поліноміальної апроксимації за наявності багатьох невідомих функцій та складної геометричної форми оболонок, особливо з отворами та технологічними вирізами, дуже складно одержати стійкі результати при збільшенні розмірності апроксимаційного простору. Тому виникла необхідність розробки методу R-функцій в поєднанні з двовимірними сплайнами для визначення напружено-деформованого стану (НДС) та спектра власних частот елементів тонкостінних конструкцій, що є важливою проблемою при проектуванні сучасних тонкостінних елементів, яка залишається актуальною для сучасної механіки. Саме цій задачі присвячена дана робота, тобто розробці ефективного чисельно-аналітичного методу розв'язання задач згину та коливань багатошарових та ФГ пластин та оболонок, який базується на теорії R-функцій та сплайн-апроксимації, а також його програмній реалізації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ") в період з 2006 р. по 2015 р. та проводилась відповідно до:

- держбюджетної теми «Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних та нелінійних задач механіки для композитних пластин та пологих оболонок» згідно з наказом Міністерства науки та освіти України (№960 від 22.12.2004), ДР № 0105U000573 (в період з 2006 р. по 2008 р.);
- держбюджетної теми «Створення на базі теорії R-функцій методів розв'язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом

Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.);

- держбюджетної теми «Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багатошарових пластин та пологих оболонок» згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1177, від 30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розвиток методу R-функцій в поєднанні зі сплайн-апроксимацією для розв'язання задач згину та коливань пластинчато-оболонкових елементів тонкостінних конструкцій, що моделюються багатошаровими композитними чи ФГ оболонками та пластинами, а також створення відповідного програмного забезпечення.

Реалізація даної мети полягає у розв'язанні таких задач:

- виконати варіаційну постановку задач згину та власних коливань багатошарових, а також функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин в межах класичної та уточненої теорій;
- розробити алгоритми, що реалізують спільне використання RFM та сплайн-апроксимацію, включаючи алгоритми обчислення подвійних інтегралів для заповнення матриці Рітца та зберігання елементів у випадку розрідженої матриці; алгоритми розв'язання СЛАР та задач на власні значення для розріджених матриць;
- виконати систематизацію відомих структур розв'язання та побудувати нові структурні формули, що задовольняють заданим граничним умовам у випадку складної геометричної форми плану багатошарової оболонки;
- створити програмний комплекс з використанням мови програмування С++ та ряду функцій математичного пакету, що реалізує розроблений метод та відповідні алгоритми;
- провести тестування і розв'язати нові задачі на власні коливання та згин багатошарових та ФГ пологих оболонок та пластин некласичних форм у плані за допомогою розробленого підходу та створеного програмного забезпечення.
- дослідити вплив різних геометричних та механічних факторів на параметри НДС та динамічні характеристики оболонок;
- провести аналіз ефективності застосування сплайн-апроксимації в порівнянні з поліноміальною та іншими методами (наприклад МСЕ), а також проілюструвати застосування розробленого підходу для розв'язання практичних задач.

Об'єкт дослідження – згин та власні коливання тонкостінних пружних елементів багатошарових та ФГ конструкцій, котрі моделюються пологими оболонками чи пластинами, з різною геометричною формою в плані.

Предмет дослідження – параметри НДС та спектр власних коливань пологих багатошарових та ФГ оболонок та пластин із складною формою в плані та різними видами граничних умов.

Методи дослідження. Запропоновані методи базуються на спільному використанні теорії R-функцій, варіаційних методів, сплайн-апроксимації, методів Гаусса-Зейделя та Ланцоша для розв'язання СЛАР та задач на власні значення у випадку розріджених матриць.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:

- вперше на базі сплайн-апроксимації, теорії R-функцій та варіаційних методів розроблено чисельно-аналітичний метод для дослідження на згин та коливання багатошарових пластинчато-оболонкових елементів тонкостінних конструкцій, який дозволяє одержувати більш точні розв'язки для оболонок з технологічними врізами та вирізами. При цьому суттєво покращується збіжність результатів в порівнянні з застосуванням поліноміальної апроксимації. Метод реалізовано як для класичної теорії багатошарових пологих оболонок, так і для уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації зсуву (теорії типу Тимошенка);

- розроблений метод вперше застосовано для розв'язання задач про власні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок, що дозволило аналізувати динамічну поведінку оболонок складної форми в плані в залежності від характеру розподілення об'ємних складових частин суміші вздовж товщини оболонки;
- вперше при комплексному застосуванні двовимірних сплайнів та RFM розроблено методику формування матриці Рітца для багатокомпонентних задач, яка базується на розроблених в роботі алгоритмах обчислення подвійних інтегралів у випадку областей складної форми;
- з допомогою розробленого методу та створеного програмного забезпечення вперше розв'язані задачі згину та коливань багатошарових та ФГ оболонок різної кривини, з жорстко закріпленими та шарнірно опертими отворами, що дозволило дослідити вплив геометричних (форми плану оболонки, розмірів врізів та вирізів, граничних умов) та механічних (виду матеріалу, способу укладки шарів та кутів їх армування) факторів на НДС та динамічні характеристики пологих оболонок.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що запропоновані методи реалізовані у вигляді алгоритмів та універсального набору програм, використання котрих дозволяє досліджувати статичну та динамічну поведінку багатошарових та ФГ тонкостінних елементів конструкцій з різною геометричною формою та різними способами закріплення.

Набір нових чисельних результатів, оформлених у вигляді графіків та таблиць, що отримані завдяки чисельним експериментам, можуть бути використані як довідниковий матеріал при проектуванні пластинчато-оболонкових елементів. Також результати розв'язання задач дослідження поведінки конкретних елементів тонкостінних конструкцій можуть бути використані у практиці інженерів-механіків.

Запропоновані методи використовуються в учбовому процесі кафедри прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" при викладанні дисципліни "Варіаційне числення та рівняння математичної фізики" для студентів спеціальностей комп'ютерна механіка та прикладна математика як сучасні ефективні методи дослідження статичних та динамічних задач теорії багатошарових пологих оболонок та пластин, про що свідчить відповідний акт про впровадження (Додаток А). Також метод розглядається як перевірний при проектуванні багатошарових тонкостінних елементів авіаційних конструкцій на Харківському державному авіаційному виробничому підприємстві, про що свідчить відповідний акт (Додаток Б).

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертації опубліковано в 24 роботах [1-24]. Основні результати за темою дисертації отримані здобувачем самостійно. Серед них 8 статей [1-8] та 16 тез конференцій [9-24]. В спеціалізованих виданнях України опубліковано 7 статей [1-6,8] та одна стаття на англійській мові [7] - у міжнародному журналі, що включений до міжнародної наукометричної бази з імпакт фактором. В роботах, надрукованих у співавторстві з науковим керівником [1,2,5,7,9-12,14-16], внесок здобувача полягає в розробці RFM та сплайн-апроксимації для досліджень згину та власних коливань пологих багатошарових оболонок складної форми, а також розробці та програмній реалізації чисельних алгоритмів, виконанні тестувань та участі в аналізі отриманих нових результатів. У роботах [6,22] внесок здобувача полягає в отриманні спектра власних частот та форм розглянутих оболонок із застосуванням сплайн-апроксимації та участі в аналізі нових результатів. У свою чергу, в роботах [8,23] внесок здобувача полягає у виконанні варіаційної постановки задачі коливань пологих оболонок з ФГМ, отриманні спектра власних частот і форм оболонок складної форми з застосуванням сплайн-апроксимації та участі в аналізі нових результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися на XII, XVI-XX, XXII міжнародних науково-практичних конференціях "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я" (Харків, 2004, 2008–2012, 2014 рр.); на міжнародній конференції «Актуальні проблеми прикладної математики та механіки», присвяченій 80-річчю з дня народження академіка НАН України Рвачова Володимира Логвиновича (Харків, жовтень 2006 р.), на міжнародній науково-технічній конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільної середи та міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, жовтень 2007 р.), на міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2008 р.), на 9-му міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків (МСУІМЛ-9) (Львів, 2009), на міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» (Львів, 2009), на XIII міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010), на 3-й міжнародній конференції «Нелінійна динаміка» (Харків, 2010), на міждержавній науково-методичній конференції «Проблеми математичного моделювання» (Дніпродзержинськ, 2013), на IX міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 15-19 вересня 2014 р.); на наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ «ХПІ»). Дисертаційна робота в повному обсязі обговорювалася на розширеному засіданні кафедри прикладної математики під керівництвом д.т.н., проф. Бреславського Д. В. (НТУ «ХПІ», Харків, 2015 р.) та на науково-технічній проблемній раді Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом д.т.н., проф. Шульженка М. Г. (Харків, 2015 р.).

Публікації. Основні матеріли за темою поданої дисертації викладені у 24 друкованих роботах автора у вигляді 7 статей – у фахових виданнях, які входять до переліку фахових ДАК МОН України, 1 статті – у міжнародному науковому журналі на англійській мові та 16 тез доповідей на науково-технічних конференціях та симпозіумах.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 299 найменувань на 31 сторінці, двох додатків на 2 сторінках. Повний обсяг дисертації складає 189 сторінок, основний текст 156 сторінок, серед них 26 рисунків за текстом, 57 таблиць за текстом, з них 1 таблиця на 1 сторінці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність дисертаційної роботи, сформульовано мету, задачі досліджень, визначено об'єкт, предмет та методи досліджень, наукову новизну і практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі проведено аналіз методів дослідження динамічної та статичної поведінки тонкостінних елементів конструкцій, що моделюються пологими оболонками та пластинами. Відзначено, що визначну роль у розробці теорії тонких пластин та оболонок та методів дослідження відіграли праці таких вчених як С. О. Амбарцумян, О. М. Андреєв, В. В. Болотін, П. М. Варвак, А. Т. Василенко, І. Н. Векуа, В. З. Власов, А. С. Вольмір, Й. І. Ворович, К. З. Галімов, О. Л. Гольденвейзер, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, О. М. Гузь, В. І. Гуляєв, Л. Г. Донелл, М. О. Кільчевський, Г. Кірхгоф, М. С. Корнішин, В. І. Корольов, В. Д. Кубенко, Г. М. Куліков, А. Ляв, Р. Д. Міндлін, Х. М. Муштарі, Ю. В. Немировський, В. В. Новожилов, П. М. Огібалов, В. М. Паймушин, Б. Л. Пелех, В. Г. Піскунов, О. О. Расказов, В. Л. Рвачов, Е. Рейснер, І. Г. Терегулов, С. П. Тимошенко, А. П. Філіппов, Л. А. Фільштинський, П. П. Чулков та ін.

Значний внесок у розвиток методів дослідження поведінки пластин та оболонок зробили І. В. Андріанов, Ю. С. Воробйов, О. Я. Григоренко, В. З. Грищак, С. О. Калоєров, Б. Я. Кантор, М. С. Корнішин, В. А. Крисько, Л. В. Курпа, В. В. Лобода, І. А. Лоза, М. В. Марчук, В. К. Опанасович, Н. Д. Панкратова, В. І. Сторожев, Н. В. Сметанкіна, О. О. Стрельнікова, Г. Т. Сулім, Ю. М. Тамуров, О. М. Шупіков, Є. Г. Янютін, H. Altenbach, M. Amabili, J. Awrejcewicz, T. Belytshko, E. Carrera, J. Crossland, J. Fan, A. A. Kheider, Sk. Latifa, L. Librescu, J. N. Reddy, P. K. Sinha та ін.

Розвитку теорії R-функцій та її застосуванню до різноманітних задач присвячені роботи таких вчених, як В. Ф. Кравченко, Л. В. Курпа, О. М. Литвин, К. В. Максименко-Шейко, Г. П. Манько, Ш. А. Назіров, В. С. Проценко, М. С. Синєкоп, І. Б. Сіроджа, С. М. Склепус, А. П. Слесаренко, Ю. Г. Стоян, І. Г. Суворова, А. Н. Шевченко, Т. І. Шейко та ін.

Суттєвий внесок у появу та розвиток фінітних (сплайн) функцій зробили Дж. Алберг, В. О. Василенко, В. Л. Великін, О. І. Гребенніков, Ю. С. Зав'ялов, Б. І. Квасов, А. М. Колмогоров, М. П. Корнійчук, В. Л. Мірошниченко, Е. Нільсон, С. Б. Стечкін, Ю. Н. Суботін, Дж. Уолш, С. В. Фомін, І. Шенберг, M. Atteia, C. de Boor, R. Courant, G. Fix, M. Shulz та ін.

Аналізу методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь присвячені роботи Х. Д. Ікрамова, В. О. Іл'їна, О. І. Кострикіна, П. Ланкастера, А. І. Мальцева, К. Молера, І. В. Проскурякова, Дж. Райса, Г. Стренга, Дж. Форсайта, M. Benzi, A. George, E. Cuthill та ін. У свою чергу, розв'язанням задач на власні значення займалися В. І. Кулбановська, Б. Парлет, D. Calvetti, J. G. F. Francis, G. H. Golub, R. G. Grimes, M. T. Jones, C. Lanczos, R. von Mises, H. Simon, D. C. Sorensen, K. Wu та ін.

На основі виконаного огляду опублікованих робіт зроблено висновок про актуальність подальшої розробки нових чисельно-аналітичних ефективних методів дослідження задач згину та коливань багатошарових пологих оболонок та оболонок з ФГМ складної форми за різних типів граничних умов. Відзначено, що до ефективних та універсальних методів належить метод R-функцій. Але при дослідженні багатошарових оболонок складної геометричної форми, особливо за наявності отворів різної геометричної форми та різних граничних умов на них, використання поліномів для апроксимації невизначених компонент призводить до нестійкості та недостатньої точності чисельних результатів через погану обумовленість щільно заповнених матриць. Тому для більш ефективного застосування теорії R-функцій з великими її можливостями необхідно розробити підходи для спільного використання теорії R-функцій та сплайн-апроксимації. Особливо це стосується багатокомпонентних задач, до яких належать задачі згину та коливань багатошарових та ФГ оболонок.

У другому розділі надано математичне формулювання задач згину та власних коливань багатошарових пологих оболонок у рамках класичної теорії та уточненої першого порядку, що враховує деформацію зсуву. Вважається, що багатошарова полога оболонка товщини h складена із скінченної кількості однорідних шарів постійної товщини з незмінними головними кривинами серединної поверхні $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$. При цьому підкреслюється, що шари жорстко зв'язані один з одним та між ними відсутнє будь яке розшарування.

Згідно з класичною теорією пологих оболонок система рівнянь руху з урахуванням дії поперечного навантаження q має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial N_{21}}{\partial y} + k_1 Q_1 = C_\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \dfrac{\partial N_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial N_{21}}{\partial x} + k_2 Q_2 = C_\rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_2}{\partial y} - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} = q + C_\rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{1}$$

У рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка, що враховує кути повороту нормалі ψ_1, ψ_2 відносно осей *Oy* та *Ox*, система рівнянь руху має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial N_{12}}{\partial y} - C_\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \dfrac{\partial N_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial N_{12}}{\partial x} - C_\rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_2}{\partial y} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - q = C_\rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial M_{12}}{\partial y} = Q_1 + I \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}; \quad \dfrac{\partial M_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial M_{12}}{\partial x} = Q_2 + I \dfrac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Вирази для зусиль та моментів $N_{ij}, M_{ij}, (i, j) = \overline{1,2}$ у системах рівнянь (1-2) разом з перерізуючими силами Q_1, Q_2 для обраної координатної поверхні знаходяться за формулами

$$\langle N\rangle = \langle N_{11} \quad N_{22} \quad N_{12}\rangle^T = [C]\langle\varepsilon\rangle + [K]\langle\chi\rangle;\ \langle M\rangle = \langle M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}\rangle^T = [K]\langle\varepsilon\rangle + [D]\langle\chi\rangle;$$

$$Q_1 = (1-\alpha)\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}\right) + \alpha\left(C_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1\right) + C_{54}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2\right)\right);$$

$$Q_2 = (1-\alpha)\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y}\right) + \alpha\left(C_{45}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1\right) + C_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2\right)\right),$$

де

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}\rangle^T;\ \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w;\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w;\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\langle\chi\rangle = \langle\chi_{11} \quad \chi_{22} \quad \chi_{12}\rangle^T;\ \chi_{11} = -(1-\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial x};\ \chi_{22} = -(1-\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial\psi_2}{\partial y};$$

$$\chi_{12} = -2(1-\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{21}}{\partial x}\right).$$

Значення параметра α приймається нульовим для класичної теорії та одиничним, якщо розглядається уточнена теорія.

У свою чергу, матриці $[C],[K],[D]$ мають вигляд

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти жорсткості C_{ij}, K_{ij}, D_{ij} разом з C_ρ, I є наведеними характеристиками *n*-шарової оболонки та можуть бути отримані за допомогою механічних характеристик B_{ij}^l, ρ_l окремих шарів таким чином:

$$\left(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}\right) = \sum_{l=1}^{n}\int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l(1, z, z^2)dz, \{(ij)\} = \{(11),(22),(12),(16),(26),(66)\};$$

$$C_{ij} = k_s^2\sum_{l=1}^{n}\int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l dz, \{(ij)\} = \{(44),(45),(54),(55)\};\ C_\rho = \sum_{l=1}^{n}\int_{h_{l-1}}^{h_l}\rho_l dz; I = \sum_{l=1}^{n}\int_{h_{l-1}}^{h_l} z^2\rho_l dz, \quad (3)$$

де h_l - координата верхньої границі *l*-го шару оболонки по осі *Oz*, а k_s^2 - коефіцієнт урахування зсувних деформацій, що найчастіше дорівнює 5/6.

У свою чергу, для функціонально-градієнтних пологих оболонок постійної товщини h, що виготовлені з суміші кераміки та металу, де верхня поверхня оболонки $z = h/2$ - керамічна, а нижня $z = -h/2$ - металічна, механічні властивості оболонки P, такі, як модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν, щільність ρ, можуть бути подані за формулою

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) - P_m = (P_c - P_m)(z/h + 1/2)^k - P_m, \quad (4)$$

де $V_c(z)$ - об'ємна доля кераміки, яку часто обирають у вигляді $V_c(z) = (z/h + 1/2)^k$, а P_c, P_m - відповідні характеристики кераміки та металу. У формулі (4) коефіцієнт k може змінюватись у діапазоні $0 \le k < \infty$. Система рівнянь руху у рамках уточненої теорії має вигляд (2), а матриці $[C],[K],[D]$, що входять до виразів зусиль та моментів, за умови рівності коефіцієнтів Пуассона металу та кераміки $\nu_m = \nu_c = \nu$, можуть бути обчислені за формулами

$$[C]=\frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 \end{bmatrix},[K]=\frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 \end{bmatrix},$$

$$[D]=\frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & E_3(1-\nu)/2 \end{bmatrix},$$

де

$$E_1=\left(E_m+\frac{E_c-E_m}{k+1}\right)h,\quad E_2=\frac{(E_c-E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3=\left(\frac{E_m}{12}+(E_c-E_m)\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{4(k+4)}\right)\right)h^3,$$

E_c та E_m - модулі пружності кераміки та метала відповідно.

Перерізні сили Q_1,Q_2 визначаються рівностями

$$Q_1=k_s^2\frac{E_1h}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_1\right),\quad Q_2=k_s^2\frac{E_1h}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\psi_2\right).$$

Системи рівнянь руху (1) та (2) доповнюються відповідними граничними умовами, а за необхідності проведення розрахунків на згин системи рівнянь руху перетворюється на системи рівнянь рівноваги шляхом занулення елементів, що включають похідні за часом.

У третьому розділі подано використані та запропоновані у роботі методи розв’язання поставленої задачі, що базуються на спільному використанні сплайн-аппроксимації, варіаційних методів та RFM. Згідно з методом RFM, перш за все, необхідно подати варіаційне формулювання задачі.

В роботі варіаційні постановки лінійних задач згину та коливань багатошарових та ФГ пологих оболонок одержано за допомогою принципу Лагранжа. Варіаційне формулювання задачі згину пологих оболонок за класичною чи уточненою теорією зводиться до мінімізації функціоналу вигляду

$$\delta U=\delta(V-A). \tag{5}$$

У функціоналі (5) під виразами V та A розуміють потенціальну енергію та роботу зовнішніх сил відповідно, що обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} V=&\frac{1}{2}\iint_\Omega(N_{11}\varepsilon_{11}+N_{22}\varepsilon_{22}+N_{12}\varepsilon_{12}+M_{11}\chi_{11}+M_{22}\chi_{22}+M_{12}\chi_{12})d\Omega+\\ &+\frac{\alpha}{2}\iint_\Omega\left(Q_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_1\right)+Q_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\psi_2\right)\right)d\Omega;\quad A=\iint_\Omega qwd\Omega, \end{aligned} \tag{6}$$

де Ω - проекція оболонки на площину XOY.

Варіаційне формулювання задач про вільні коливання оболонки має вигляд

$$\delta(V-T)=0, \tag{7}$$

де V - потенціальна енергія (6); T - кінетична енергія

$$T=\frac{\lambda^2\rho}{2}\iint_\Omega h\left(u^2+v^2+w^2+\alpha\frac{h^2}{12}(\psi_1^2+\psi_2^2)\right)d\Omega .$$

Для розв'язання варіаційних задач (5) чи (7) за методом Рітца необхідно побудувати такі послідовності координатних функцій, які б враховували хоча б головні граничні умови. Використання варіаційно-структурного методу дозволяє будувати такі послідовності невідомих функцій для майже довільних форм областей Ω та граничних умов. Так, в рамках уточненої теорії, наприклад, для жорсткого закріплення, що зводиться до умови $u = v = w = \psi_1 = \psi_2 = 0$, структура розв'язку, що враховує крайові умови, має вигляд

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_1 = \omega\Phi_4, \psi_2 = \omega\Phi_5, \qquad (8)$$

де $\omega = 0$ - рівняння границі області Ω.

Невідомі компоненти Φ_i в структурних формулах можливо апроксимувати будь-якою повною системою функцій. Найбільш простою для чисельної реалізації є система степеневих поліномів. Саме степеневі поліноми було застосовано в попередніх роботах, присвячених розв'язанню задач теорії пологих оболонок за допомогою RFM.

Особливою відзнакою даної роботи є те, що ці компоненти пропонується апроксимувати двовимірними кубічними сплайнами Шенберга.

У випадку однієї змінної цей сплайн визначається таким чином:

$$B_3(t) = \frac{1}{4}\left((t+2)^3\eta(t+2) - 4(t+1)^3\eta(t+1) + 6t^3\eta(t) - 4(t-1)^3\eta(t-1) + (t-2)^3\eta(t-2)\right), \qquad (9)$$

де $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

Графічно одновимірний сплайн (9) має вигляд, зображений на рис. 1. Для отримання двовимірного кубічного сплайну (див. рис. 2), достатньо провести операцію множення двох сплайнів по відповідних координатах $B_3(x)B_3(y)$. Для побудови апроксимуючої сітки сплайнів задамо координати прямокутника, оточуючого область Ω, у вигляді координат нижньої лівої та верхньої правої вершин (a,c) та (b,d) відповідно та щільність сітки по обох координатних напрямах N_x, N_y.

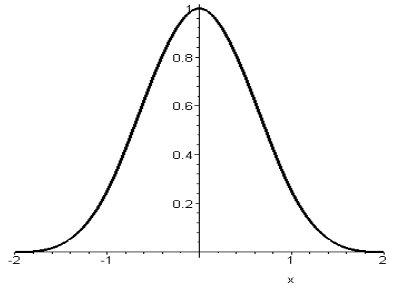

Рис. 1. Одновимірний кубічний сплайн Шенберга

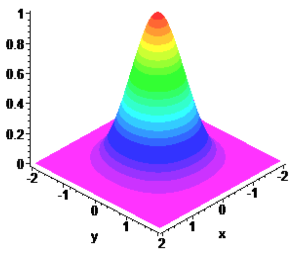

Рис. 2. Двовимірний кубічний сплайн Шенберга

Тоді невизначені компоненти структури розв'язку, які апроксимуються двовимірними сплайнами, можуть бути подані у вигляді

$$\Phi = \sum_{i=-1}^{N_x+1}\sum_{j=-1}^{N_y+1} C_{ij} B_3\left(\frac{N_x(x-a)}{b-a} - i\right) B_3\left(\frac{N_y(y-c)}{d-c} - j\right). \qquad (10)$$

Одна із складних проблем, яка виникає в процесі реалізації методу Рітца, пов'язана з необхідністю обчислення подвійних інтегралів по областях складної форми від досить складних підінтегральних функцій. В роботі запропоновано та чисельно реалізовано алгоритм, який базується на чисельному інтегруванні за допомогою квадратур Гаусса на кожному фінітному носії. При цьому перед самим інтегруванням область Ω попередньо розбивається на підобласті відповідно до сітки сплайнів, що зображено на рис. 3. Далі у кожному носії обираються вузли Гаусса.

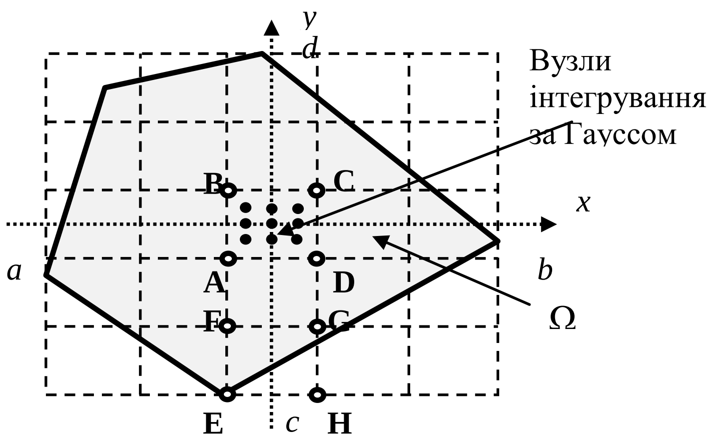

Рис. 3. Область інтегрування з сіткою

Слід зауважити, що прямокутні підобласті (носії фінітних функцій) можуть як повністю належати області Ω, так і частково. Так, на рис. 3 прямокутник ABCD повністю належить Ω, і вузли інтегрування можуть бути знайдені без зайвих зусиль, а у випадку прямокутника EFGH виникає необхідність урахування границі області Ω при обчисленні координат вузлів Гаусса. Врахування границі області Ω в EFGH проводиться шляхом розв’язання рівняння вигляду $\omega(x, y) = 0$ вздовж прямої $x = const$ за допомогою чисельного методу дихотомії.

Фінітність сплайнів призводить до того, що в процесі інтегрування деякі елементи матриці Рітца дорівнюють нулю. Розроблений алгоритм враховує цей факт, тобто не виконуються зайві операції інтегрування для сплайнів, що не перетинаються. В результаті формування матриці Рітца при використанні сплайн-апроксимації одержано розріджену матрицю. Так, наприклад, топологія типової розрідженої матриці, що виникає в процесі дослідження на згин чи власні коливання пологої оболонки в рамках класичної теорії (з урахуванням 3 невідомих функцій) при щільності сітки сплайнів $N_x = N_y = 10$, має вигляд, зображений на рис. 4.

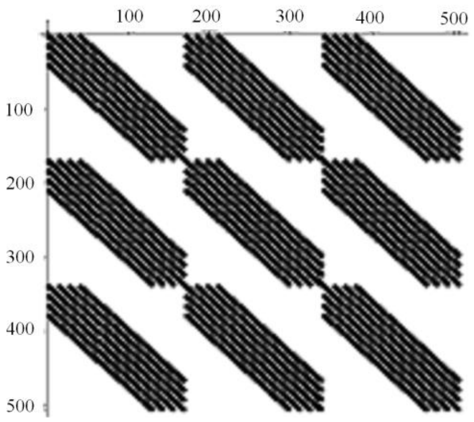

Рис. 4. Розріджена матриця

Однією з найбільших переваг розріджених матриць у порівнянні з щільно заповненими є можливість суттєвої економії пам’яті для їх зберігання. В нашому випадку матриці також являються симетричними, що дозволяє додатково зменшити необхідний обсяг пам’яті для зберігання майже вдвічі. Такий метод зберігання матриці найчастіше називають розрідженим рядковим, і саме його реалізовано в розробленому програмному комплексі.

Для розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають при застосуванні методу Рітца сумісно зі сплайн-апроксимацією, використано ітеративні методи, які є найбільш вживаними за наявності розріджених матриць. В роботі запропоновано використання методу SSOR, що є подальшим розвитком методу Гаусса-Зейделя для симетричних матриць, та наведено відповідні алгоритми. Для розв'язання задачі на власні значення вибрано метод Ланцоша, що виявляється особливо ефективним у випадку розріджених матриць. В роботі виконана комп'ютерна реалізація запропонованих методів та наведених алгоритмів з використанням математичного пакету та додаткових модулів на мові С++.

У четвертому розділі містяться чисельні результати, що були отримані за допомогою запропонованого методу та створеного програмного комплексу. З метою перевірки достовірності одержаних результатів було розв'язано низку тестових задач та проведено їх порівняння з відомими в літературі, а також з результатами, отриманими за допомогою інших методів.

Задача 1. Як тестова розглянута задача згину сферичної багатошарової ортогонально-армованої пологої оболонки квадратної форми в плані $(a = b)$ постійної товщини h, що знаходиться під дією синусоїдально розподіленого $q(x, y) = q_0 \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$ навантаження. Головні граничні умови є такими: $u = w = \psi_x = 0$, для $y = \pm b$; $v = w = \psi_y = 0$, для $x = \pm a$.

Механічні характеристики шарів обрані такими: $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$, $G_{23}/E_2 = 0.2$, $\nu_{12} = 0.25$. Порівняння результатів для центрального прогину $w = 10^3 wE_2h^3/q_0a^4$ з результатами інших авторів, які були отримані за допомогою методу скінченних елементів FEM [*] та за допомогою аналітичного підходу [**, ***], наведено в табл. 1.

В таблиці наведена також збіжність результатів, одержаних при застосуванні сплайн-апроксимації з використанням різної щільності сітки сплайнів, починаючи з 4х4 (RFM, S4) до 20х20 (RFM, S20). Слід зазначити, що результати сплайн-апроксимації стабілізуються у четвертій значущій цифрі, починаючи з сітки 8х8 (RFM, S8). Аналіз порівняння результатів табл. 1 показує, що розбіжність з результатами, відомими в літературі, у більшості випадків не перевищує 2%, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

Як було відзначено раніше, на практиці часто використовуються елементи, які містять отвори, технологічні вирізи та складну геометричну форму. У літературі зазвичай при розгляданні оболонок з отворами припускається, що на границі отвору оболонка вільна, але на практиці виникають різні ситуації, що приводять до розглядання різних граничних умов. Нижче наведено розв'язок однієї з таких задач.

Задача 2. Розглянуто згин п'ятишарової сферичної оболонки симетричної будови з формою, зображеною на рис. 5, під дією рівномірного поперечного навантаження інтенсивністю q_0. Розглянемо 2 види граничних умов: І тип (СС) – оболонка жорстко закріплена по всій границі області та ІІ тип (FC) – оболонка жорстко закріплена тільки по внутрішньому контуру та вільна на зовнішньому.

---

[*]. Latifa Sk. Improved finite element analysis of multilayered, doubly curved composite shells / Sk. Latifa, P.K. Sinha // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – Vol. 24. – No.4/2005. – P. 385 – 404.

[**]. Reddy J.N. Exact solutions of moderately thick laminated shells / J.N. Reddy // J. eng. Mech. Div. ASCE 1984;110:794-809.

[***]. Sheikh A.H. A high precision element with shear deformation for the analysis of isotropic and composite shells/Intern / A.H. Sheikh, S. Haldar, D. Sengurta // Journal of Computational Engineering Science. – Vol.3. – No 3(2002). – P. 277 – 290.

Таблиця 1

Безрозмірний центральний прогин $\overline{w}$ сферичної оболонки під дією синусоїдального навантаження

$\frac{R}{a}$	Метод	$0^\circ/90^\circ$		$0^\circ/90^\circ/0^\circ$		$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$		$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$	
		$\frac{h}{a}=0.01$	$\frac{h}{a}=0.1$	$\frac{h}{a}=0.01$	$\frac{h}{a}=0.1$	$\frac{h}{a}=0.01$	$\frac{h}{a}=0.1$	$\frac{h}{a}=0.01$	$\frac{h}{a}=0.1$
Пл.	RFM,S4	10.60	12.39	4.324	6.704	4.328	6.638	5.074	6.813
	RFM,S6	10.65	12.38	4.341	6.698	4.341	6.632	5.087	6.807
	RFM,S8	10.66	12.38	4.341	6.698	4.340	6.632	5.087	6.807
	RFM,S20	10.66	12.38	4.340	6.697	4.340	6.631	5.087	6.806
	[***]	10.65	12.37	4.337	6.693	4.337	6.627	–	–
	[**]	10.65	12.37	4.337	6.694	4.337	6.628	–	–
	[*]	10.65	12.37	4.337	6.693	4.337	6.627	5.083	6.802
10	RFM,S8	3.574	12.106	2.409	6.616	2.401	6.551	2.614	6.722
	[***]	3.574	12.10	2.408	6.612	2.401	6.546	–	–
	[**]	3.576	12.12	2.411	6.625	2.403	–	–	–
	[*]	3.576	12.14	2.412	6.631	2.403	6.566	2.616	6.738

Шари приймаються однакової товщини $h/5$, при цьому $h/(2a)=0.1$. Геометричні параметри обрані такими: $a/b=1$, $a_1/b_1=1$, $a_1/a=0.3$, $h/(2a)=0.1$. Механічні характеристики шарів: $E_1/E_2=25$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.2$, $\nu_{12}=0.25$. Структура шарів обрана перехресно армованою $(\theta,-\theta,\theta,-\theta,\theta)$, де кут θ набуває значення: $30^0, 45^0, 60^0$.

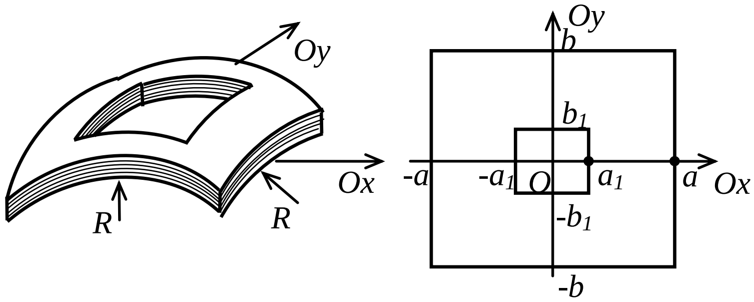

Рис. 5. Форма п'ятишарової оболонки в просторі та її план

Для доведення достовірності одержаних результатів задачу в роботі розв'язано також за допомогою МСЕ.

Результати дослідження НДС п'ятишарових пластин на базі уточненої теорії у вигляді безрозмірного максимального прогину $\overline{w}=wh^3E_2 10^3/q_0(2a)^4$ та напружень $(\overline{\sigma}_x,\overline{\sigma}_y)=(\sigma_x,\sigma_y)/(q_0(2a)^2)$ на верхній $\overline{\sigma}_x^+,\overline{\sigma}_y^+$ та нижній $\overline{\sigma}_x^-,\overline{\sigma}_y^-$ поверхнях пластини відповідно для різних кутів θ із застосуванням сіток сплайнів від 40х40 до 60х60 та 8-вузлового елементу в МСЕ наведені у табл. 2,3. Аналіз збіжності результатів RFM для сплайн-апроксимації та МСЕ показує, що для кутів $\theta=30^0,60^0$ максимальний прогин $\overline{w}$ відрізняється на 3%, тоді як напруження $\overline{\sigma}_x$ - на 8%, а $\overline{\sigma}_y$ - 20%. В свою чергу, для кута $\theta=45^0$ максимальні прогнозовані прогини відрізняються на 8%, а $\overline{\sigma}_x$

та $\bar{\sigma}_y$ - на 14 та 20% відповідно.

Таблиця 2

Максимальний прогин $\bar{w}$ та напруження $\bar{\sigma}_x;\bar{\sigma}_y$ пластин (FC)

Метод	$\bar{w}_{\max}$	$\bar{\sigma}_x^+(a_1;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_x^-(a_1;0)$	$\bar{\sigma}_x^+(a;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_x^-(a;0)$	$\bar{\sigma}_y^+(a_1;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_y^-(a_1;0)$	$\bar{\sigma}_y^+(a;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_y^-(a;0)$
$\theta^0 = 30^0, 60^0$					
RFM 60	27.21	$-59.94^{+}\vert 59.94^{-}$	$0.363^{+}\vert -0.363^{-}$	$-83.79^{+}\vert 83.79^{-}$	$-3.055^{+}\vert 3.055^{-}$
$MCE^8$60	27.63	$-61.22^{+}\vert 61.22^{-}$	$0.400^{+}\vert -0.400^{-}$	$-88.72^{+}\vert 88.72^{-}$	$-3.116^{+}\vert 3.116^{-}$
$\theta^0 = 45^0$					
RFM 60	19.44	$-51.42^{+}\vert 51.42^{-}$	$0.918^{+}\vert -0.918^{-}$	$-39.25^{+}\vert 39.25^{-}$	$-5.365^{+}\vert 5.365^{-}$
$MCE^8$60	19.85	$-53.20^{+}\vert 53.20^{-}$	$0.950^{+}\vert -0.950^{-}$	$-41.27^{+}\vert 41.27^{-}$	$-5.333^{+}\vert 5.333^{-}$

Таблиця 3

Максимальний прогин $\bar{w}$ та напруження $\bar{\sigma}_x;\bar{\sigma}_y$ (CC)

Метод	$\bar{w}_{\max}$	$\bar{\sigma}_x^+(a_1;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_x^-(a_1;0)$	$\bar{\sigma}_x^+(a;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_x^-(a;0)$	$\bar{\sigma}_y^+(a_1;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_y^-(a_1;0)$	$\bar{\sigma}_y^+(a;0)\,\vert\,\bar{\sigma}_y^-(a;0)$
$\theta^0 = 30^0, 60^0$					
RFM 40	0.919	$-5.222^{+}\vert 5.222^{-}$	$-5.079^{+}\vert 5.079^{-}$	$-6.494^{+}\vert 6.494^{-}$	$-6.420^{+}\vert 6.420^{-}$
RFM 60	0.920	$-5.231^{+}\vert 5.231^{-}$	$-5.081^{+}\vert 5.081^{-}$	$-6.506^{+}\vert 6.506^{-}$	$-6.423^{+}\vert 6.423^{-}$
$MCE^8$40	0.948	$-5.509^{+}\vert 5.509^{-}$	$-5.498^{+}\vert 5.498^{-}$	$-7.655^{+}\vert 7.655^{-}$	$-7.901^{+}\vert 7.901^{-}$
$MCE^8$60	0.948	$-5.528^{+}\vert 5.528^{-}$	$-5.511^{+}\vert 5.511^{-}$	$-7.674^{+}\vert 7.674^{-}$	$-7.916^{+}\vert 7.916^{-}$
$\theta^0 = 45^0$					
RFM 40	0.780	$-5.109^{+}\vert 5.109^{-}$	$-5.518^{+}\vert 5.518^{-}$	$-3.755^{+}\vert 3.755^{-}$	$-4.123^{+}\vert 4.123^{-}$
RFM 60	0.781	$-5.123^{+}\vert 5.123^{-}$	$-5.520^{+}\vert 5.520^{-}$	$-3.765^{+}\vert 3.765^{-}$	$-4.125^{+}\vert 4.125^{-}$
$MCE^8$40	0.836	$-5.545^{+}\vert 5.545^{-}$	$-6.276^{+}\vert 6.276^{-}$	$-4.291^{+}\vert 4.291^{-}$	$-4.988^{+}\vert 4.988^{-}$
$MCE^8$60	0.838	$-5.561^{+}\vert 5.561^{-}$	$-6.288^{+}\vert 6.288^{-}$	$-4.302^{+}\vert 4.302^{-}$	$-4.996^{+}\vert 4.996^{-}$

Також слід відзначити, що збіжність результатів RFM виявляється в ряді випадків кращою, ніж для MCE. Результати, отримані за допомогою RFM та FEM при максимальних розглянутих сітках (60x60) у табл. 2, демонструють, що вони збігаються значно краще, ніж результати табл. 3 для повністю жорстко закріплених пластин (CC). Так, різниця між максимальними прогинами не перевищує 2%, а напруження у розглянутих точках різняться від 1 до 10%. Також в задачі проведено аналіз впливу типу граничних умов та кута θ на НДС оболонок та пластин. Результати, отримані в роботі для п'ятишарових сферичних оболонок (рис. 5) з кривиною $k_1 = k_2 = 0.2/(2a)$ для розглянутої задачі та граничних умов типу II (FC) наведені у розрізі $y = 0$ на рис. 6. Відзначено також, що збіжність результатів для MCE суттєво гірша для оболонок порівняно з пластинами.

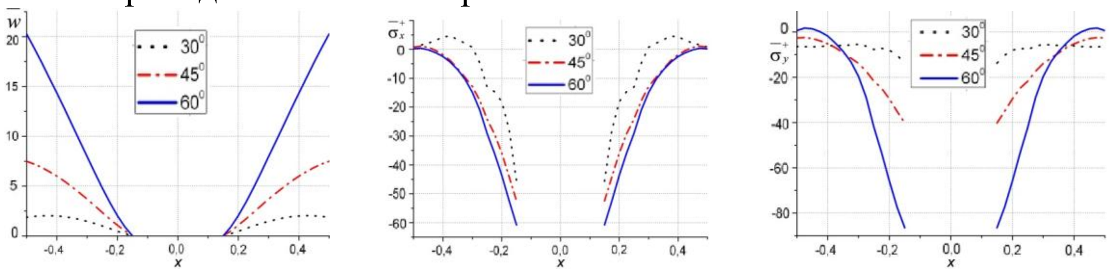

Рис. 6. Значення прогину $\bar{w}$ та напружень $\bar{\sigma}_x^+;\bar{\sigma}_y^+$ при різних кутах шарів θ

Виходячи з результатів (рис. 6), можна зробити висновок що, максимальні значення напружень в розрізі $y = 0$ досягаються симетрично відносно осі Ox та мають найбільші значення у розглянутій характерній точці з координатами $(a_1, 0)$ для кута $\theta^0 = 60^0$, а найменші - для $\theta^0 = 30^0$. Наприклад, абсолютне значення $\bar{\sigma}_y^+$ для $\theta^0 = 60^0$ в 8 разів перевищує відповідне для $\theta^0 = 30^0$ у точці $(0.3a;0)$.

Як було відзначено, поряд з композитними багатошаровими оболонками в роботі вперше запропоновано метод дослідження функціонально-градієнтних пологих оболонок. В дисертації розв’язано ряд нових задач про вільні коливання пологих ФГ оболонок, досліджено вплив геометричних та механічних параметрів, а також вплив функції розподілення об’ємної долі кераміки на спектр власних коливань. Нижче наведено одну із цих задач.

*Задача 3. Д*ослідити власні коливання та знайти спектр власних частот функціонально-градієнтної оболонки Al / Al_2O_3, що спирається на план, поданий на рис. 7, в залежності від граничних умов, кривини оболонки та показника k розподілення об’ємних долів кераміки та металу.

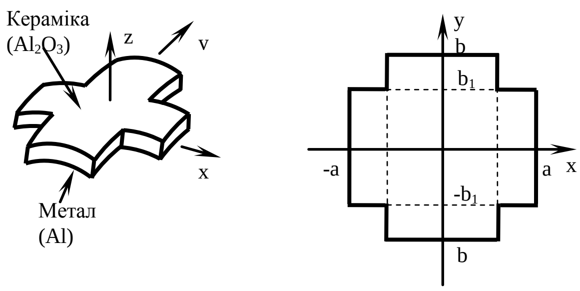

Рис. 7. Форма оболонки з ФГМ

Як граничні умови приймається нерухомий у тангенціальному напрямі шарнір чи жорстке закріплення. Геометричні параметри оболонки обрані такими: $h/2a = 0.2$, $b/a = 1$, $b_1/a_1 = 1$, $b_1/2a = 0.3$. Результати досліджень впливу показника степеня k на значення основної частоти $\Omega = \omega h\sqrt{\rho_c/E_c}$ подані на рис. 8 для умов жорсткого закріплення (Cl) та шарнірного спирання (Sh). Дослідження проведене для таких значень кривин: $k_1 = k_2 = 0$ (пластина), $k_1 = k_2 = 0.5$ (сферична оболонка), $k_1 = 0; k_2 = 0.5$ (циліндрична оболонка), $k_1 = 0.5; k_2 = -0.5$ (гіперболічна оболонка). З аналізу графіків випливають такі висновки: при зростанні k, незалежно від типу граничних умов, значення основної частоти зменшуються; частоти «асимптотично» наближаються до відповідних значень частот металевих оболонок та пластин, при цьому вплив кривини оболонок при зміні k виявляється несуттєвим. Варто зазначити, що як для жорсткого закріплення, так і для шарнірного спирання в межах усього діапазону значень величини $k, k \in [0,20]$ найбільші величини основних частот спостерігаються для випадку сферичних оболонок, а найменші - для пластин.

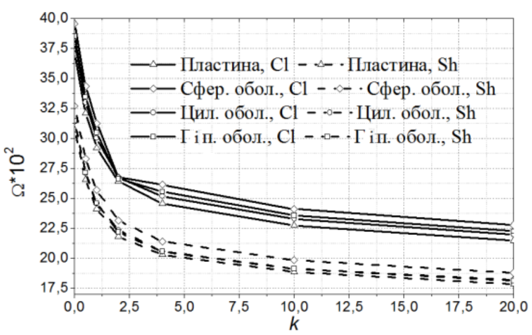

Рис. 8. Залежність параметра Ω від k

У четвертому розділі також наведені приклади застосування розробленого методу до розв’язання практичних задач, таких, як знаходження спектра власних частот та форм коливань арки дамби та композитної лопатки турбіни.

У **додатку А** до дисертації наведено акт про використання результатів дисертаційної роботи в навчальному процесі та наукових дослідженнях НТУ «ХПІ», а у **додатку Б** – акт про те, що метод розглядається як перевірний при проектуванні багатошарових тонкостінних елементів авіаційних конструкцій на Харківському державному авіаційному виробничому підприємстві.

ВИСНОВКИ

За результатами даної дисертаційної роботи можна зробити такі висновки:

1. Розроблено ефективний чисельно-аналітичний метод для дослідження на згин та власні коливання багатошарових та функціонально-градієнтних оболонкових елементів тонкостінних конструкцій складної форми як в рамках класичної теорії багатошарових оболонок, так і уточненої теорії першого порядку, що враховує деформації зсуву. Метод базується на використанні двовимірних сплайнів, теорії R-функцій та варіаційних методах.
2. На базі запропонованого методу розроблено методику розрахунку частот та форм вільних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок складної форми при різних умовах закріплення. Побудовані варіаційні постановки в межах класичної та уточненої теорій ФГ оболонок та відповідні структури розв'язку, які задовольняють заданим граничним умовам незалежно від геометричної форми плану оболонки.
3. Створено програмне забезпечення у межах математичного пакету та засобів мови С++, яке реалізує запропонований метод та містить в собі:
   - розроблені нові алгоритми формування матриці Рітца при застосуванні двовимірних сплайнів, а також алгоритми обчислення подвійних інтегралів у випадку областей складної форми, що є елементами цієї матриці;
   - розроблені алгоритми розв'язання СЛАР та задач на власні значення за умови розрідженості матриці Рітца.
4. З метою підтвердження вірогідності розробленого методу розв'язано низку тестових задач для багатошарових та ФГ пологих оболонок і проведено порівняння результатів з відомими в літературі. Виконано порівняння з результатами, отриманими за допомогою поліноміальної апроксимації, а також з використанням МСЕ. Тестування показало, що для оболонок з прямокутним планом та різними крайовими умовами розбіжність результатів з відомими в літературі у більшості випадків не перевищує 1-4%, що підтверджує вірогідність отриманих результатів.
5. Розв'язано нові задачі згину та вільних коливань багатошарових і ФГ пологих оболонок та пластин складної форми, а саме, досліджено оболонки з отворами квадратної та прямокутної форми, з технологічними вирізами а також перфоровані оболонки. При цьому розглянуто не тільки вільні отвори, а також жорстко закріплені і шарнірно сперті. Проведено аналіз впливу геометричних та механічних параметрів на НДС та спектр власних частот оболонок. Нові результати, які одержані за допомогою запропонованого методу, співставлені з результатами, отриманими в даній роботі методом скінченних елементів, що дозволило виділити ситуації, при яких збіжність результатів МСЕ гірша, ніж за запропонованою методикою, і рекомендувати використання в таких випадках саме запропонованого методу.

6. Метод застосовано для розв'язання деяких практичних задач, а саме, знаходження спектра власних частот та форм арки дамби та композитної лопаті турбіни.
7. Надано рекомендації про доцільність застосування сплайн-апроксимації при використанні теорії R-функцій для багатошарових пластин і оболонок з отворами прямокутної форми або за наявності великої їх кількості, а також у разі складної геометричної форми та змішаних граничних умов.
8. Результати дисертації застосовуються в наукових дослідженнях НТУ «ХПІ» та в учбовому процесі кафедри прикладної математики при викладанні курсу «Варіаційне числення та рівняння математичної фізики» для студентів спеціальностей комп'ютерна механіка та прикладна математика, про що свідчить акт, наданий у додатку А. Також метод розглядається як перевірний при проектуванні багатошарових тонкостінних елементів авіаційних конструкцій на Харківському державному авіаційному виробничому підприємстві, про що свідчить акт, наданий у додатку Б.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Курпа Л.В. Розв'язок задач вигину тришарових пластин з використанням методу R-функцій та сплайн-апроксимації / Л.В. Курпа, А.О. Осетров // Вісник національного технічного університету "ХПІ": зб. наук. пр. : темат. вип. / Харківський політехнічний ін-т, нац. техн. ун-т. - Х. : НТУ "ХПИ", 2005. - Вып. 21: Динаміка і міцність машин. - С. 67-72.
2. Курпа Л.В. Исследование собственных колебаний пологих оболочек с использованием метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л.В. Курпа, А.А. Осетров // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2007. – 50, № 4. – С. 83 - 93.
3. Осетров А.А. Применение RFM и сплайн-аппроксимации к исследованию задач изгиба многослойных пологих оболочек / А.А. Осетров // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. Збірник наукових праць. – 2008. - №47. - С. 151 - 157.
4. Осетров А.А. Применение вариационно-структурного метода и сплайн-аппроксимации к исследованию собственных частот пологих оболочек с вырезами / А.А. Осетров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. - Вип. 14. - С. 278 - 287.
5. Курпа Л.В. Решение задач изгиба многослойных пологих оболочек с применением метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л.В. Курпа, А.А. Осетров // Проблемы машиностроения. – 2010. - Т. 13, № 2. - С. 38-50.
6. Бездетко Е.О. Применение RFM к задачам о колебаниях пластин с разрезами при полиноминальной и сплайн-аппроксимации / Е.О. Бездетко, А.А. Осетров // Вісник національного технічного університету "ХПІ": зб. наук. пр. : темат. вип. / Харківський політехнічний ін-т, нац. техн. ун-т. - Х. : НТУ "ХПИ", 2010. - Вып. 69: Динаміка і міцність машин. - С. 18-26.
7. Awrejcewicz J. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, A.

Osetrov // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 1 – 10 (2011) / DOI 10.1002/zamm.201000164.
8. Курпа Л.В. Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л.В. Курпа, А.А. Осетров, Т.В. Шматко // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – №6 (1049). – С. 99 – 111.
9. Курпа Л.В. Вигин тришарових пластин складної форми / Л.В. Курпа, А.О. Осетров, Е.С. Венцель // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Анотації доповідей міжнародної науково-практичної конференції 20-21 травня 2004, Харків, С. 70.
10. Курпа Л.В. Сплайн-аппроксимация и метод R-функций для решения задач о колебаниях пологих оболочек со сложной формой плана / Л.В. Курпа, А.А. Осетров // Тезисы докладов Международной конференции АППММ'06, ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины. – Харьков. – 2006. – С. 72.
11. Курпа Л.В. Решение задач изгиба многослойных пологих оболочек с использованием метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л.В. Курпа, А.А. Осетров // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського. – Дніпр-к: ДНУ, 2007. - С. 197.
12. Курпа Л. Применение метода R-функций и сплайн-аппроксимации для решения задач изгиба многослойных пологих оболочек / Л. Курпа, А. Осетров // Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики»: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т.1. – С. 173-174.
13. Осетров А.О. Розв'язок задач згину багатошарових пологих оболонок з використанням теорії R-функцій та сплайн-апроксимації // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: матеріали XVI міжнар. наук.-практ. конф., 4-6 червня 2008р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ "ХПІ", 2008. - С.67.
14. Курпа Л. Дослідження НДС багатошарових пологих оболонок з використанням методу R-функцій та сплайн-апроксимації / Л. Курпа, А. Осетров // МСУІМЛ-9. Праці. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2009. – С. 46.
15. Курпа Л. Метод розв'язку задач згину багатошарових пологих оболонок на базі теорії R-функцій та сплайн-апроксимації / Л. Курпа, А. Осетров // Сучасні проблеми механіки : тези доп. міжнар. наук. конф., 7–9 груд. 2009 р., Львів / НАН України, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Ін-т прик. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. – Львів, 2009. – С. 89.
16. Курпа Л.В. Применение теории R-функций и сплайн-аппроксимации в задачах изгиба пологих многослойных оболочек / Л.В. Курпа, А.А. Осетров // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: матеріали XVII міжнар. наук.-практ. конф., 19–22 травня 2009р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ "ХПІ", 2009. – С. 67.
17. Осетров А.А. Анализ собственных частот и форм колебаний многослойных пологих оболочек сложной формы в плане с применением теории R-функций и сплайн-аппроксимации // XIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 206.

18. Osetrov A.A. Application of the R-functions theory and spline-approximation to finding eigen functions as basic ones for meshless discretization of the laminated shallow shells / A.A. Osetrov // Proceedings of the 3rd International Conference “Nonlinear Dynamics – 2010”, Sept. 21-24, 2010, Kharkov. – P. 377.
19. Осетров А.О. Застосування сплайн-апроксимації та методу R-функцій при дослідженні власних коливань лопаток / А.О. Осетров // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: матеріали XVIII міжнар. наук.-практ. конф., 12-14 травня 2010р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2010. – С.80.
20. Осетров А.О. Отримання власних частот і форм коливань багатошарових пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій та сплайн-апроксимації на основі класичної та уточненої теорій / А.О. Осетров // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: матеріали XIX міжнар. наук.-практ. конф., 1-3 червня 2011р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2011. – С.65.
21. Осетров А.О. Використання класичної та уточненої теорії для розрахунку динамічних характеристик багатошарових пологих оболонок за умови некласичної геометрії оболонки в плані / А.О. Осетров // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: матеріали XX міжнар. наук.-практ. конф., 15-17 травня 2012р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2012. – С.73.
22. Осетров А.О. Використання теорії R–функцій для розв’язку динамічних задач багатошарових пологих оболонок складної форми у плані на базі уточненої теорії першого порядку / А.О. Осетров, Г.М. Тимченко // Тези міжнар. наук.-метод. конф. "Проблеми математичного моделювання", 5–7 черв. 2013 р. – Дніпродзержинськ : ДДТУ. – 2013. – С. 62.
23. Осетров А.О. Дослідження спектру власних частот функціонально-градієнтних пологих оболонок з використанням методу R-функцій та сплайн-аппроксимації / А.О. Осетров, Т.В. Шматко // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: матеріали XXII міжнар. наук.-практ. конф., 15-16 жовтня 2014р. Харків. – ч. 1. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2014. – С.71.
24. Осетров А. Визначення власних частот та форм коливань перфорованих пологих оболонок та пластин методом R-функцій з використанням сплайн-аппроксимації / А. Осетров // IX міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 15-19 вересня 2014 р.). НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики. – Львів: ІППММ, 2014. - С.382-383.

АНОТАЦІЯ

Осетров А.О. Методи розв’язання задач згину та коливань пологих оболонок на основі теорії R-функцій і сплайн-апроксимації. На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2015.

Дисертація присвячена розробці чисельно-аналітичного методу розв’язання задач згину та власних коливань багатошарових і функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин складної форми. Особливістю запропонованого

методу є те, що в основі його лежить спільне використання двовимірних сплайнів, варіаційного методу Рітца та теорії R-функцій, що дозволило досліджувати з високою мірою достовірності параметри НДС та спектр власних коливань оболонок різної геометричної форми, включаючи оболонки з отворами та врізами різної конфігурації. Розроблений метод вперше було застосовано для дослідження оболонок, виготовлених з сучасних функціонально-градієнтних матеріалів, механічні характеристики яких (модуль пружності, щільність, коефіцієнт Пуассона) неперервно змінюються вздовж товщини оболонки. Запропонований метод реалізовано у вигляді комплексу програм, які містять в собі алгоритми чисельного інтегрування для областей складної форми з урахуванням фінітності сплайн-функцій, а також алгоритми розв’язання СЛАР і узагальненої задачі на власні значення для розріджених матриць. Для обгрунтування достовірності отриманих результатів було проведено широке тестування запропонованих алгоритмів і реалізованого програмного забезпечення шляхом їх порівняння з відомими в літературі, а також з результатами, отриманими в цій роботі з використанням МСЕ.

У роботі даються рекомендації з доцільності застосування сплайн-апроксимації при застосуванні теорії R-функцій. Завдяки створеному математичному забезпеченню виконано обчислюваний експеримент, який дозволив вивчити вплив багатьох геометричних і механічних параметрів на спектр власних коливань і параметри НДС оболонок.

Ключові слова: прогин, власні коливання, багатошарові пологі оболонки, ФГМ, класична теорія, уточнена теорія першого порядку, теорія R-функцій, сплайн-апроксимація, НДС, спектр власних коливань.

АННОТАЦИЯ

Осетров А.А. Методы решения задач изгиба и колебаний пологих оболочек на основе теории R-функций и сплайн-аппроксимации. На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2015.

Диссертация посвящена разработке численно-аналитического метода решения задач изгиба и собственных колебаний многослойных и функционально-градиентных пологих оболочек и пластин сложной формы. Отличительной особенностью предложенного метода является совместное использование сплайн-аппроксимации и теории R-функций, что позволило исследовать с высокой степенью достоверности параметры НДС и спектр собственных частот оболочек различной геометрической формы, в том числе оболочек с одним или несколькими отверстиями. Разработанный метод впервые применен к исследованию оболочек, выполненных из современных функционально-градиентных материалов, механические характеристики которых (модуль упругости, плотность, коэффициент Пуассона) непрерывно изменяются вдоль толщины оболочки. Предложенный метод реализован в виде комплекса программ, которые содержат алгоритмы численного интегрирования в рамках областей сложной формы с учетом финитности сплайн-

функций, а также рассмотрены алгоритмы решения СЛАУ и обобщенной задачи на собственные значения для разреженных матриц. Для обоснования достоверности полученных результатов было проведено всестороннее тестирование предложенных алгоритмов и реализованного программного обеспечения путем их сравнения с известными в литературе, а также с результатами, полученными в данной работе с использованием МКЭ.

В работе даны рекомендации по целесообразности применения сплайн-аппроксимации при использовании теории R-функций. Благодаря созданному математическому обеспечению проведен численный эксперимент, который позволил исследовать влияние геометрических и механических параметров на спектр собственных колебаний и параметры НДС оболочек.

Ключевые слова: изгиб, собственные колебания, многослойные пологие оболочки, ФГМ, классическая теория, уточненная теория первого порядка, теория R-функций, сплайн-аппроксимация, НДС, спектр собственных колебаний.

ABSTRACT

Osetrov A.A. Method of bending and vibration problems of shallow shells solution based on R-functions theory and spline-approximation. Manuscript.

The thesis is presented for scientific degree of candidate of technical sciences, speciality 01.02.04 – mechanics of deformable solid. – A.N. Podgorny Institute for mechanical engineering problems of the NAS of Ukraine, Kharkov, 2015.

The thesis is devoted to development of numerically-analytical method of solution for bending and natural vibration problems of multilayered and functionally-graded shallow shells and plates with complex plan-form. The distinctive feature of an offered method is that it's based on a combined usage of spline-approximation and R-functions theory, that allowed investigating the parameters of a stress-strained state and frequencies of shells with different geometrical shapes. The elaborated method was at first applied to investigation of the shells, made from modern functionally-graded materials (FGM). An offered method is performed as a complex of programs. The algorithms of numerical integration within the complex shape of domains are offered in the thesis, taking properties of spline-functions in account. The algorithms of linear algebraic systems and generalized eigenproblems solution for sparse matrices are considered. The analysis of influence of geometrical and mechanical parameters on the natural vibration spectrum and parameters of the stress-strained state of shells is presented. To back up the authenticity of the obtained results the all-round testing the offered algorithms and realized software was conducted by their comparing to well-known in literature, and also with the results obtained using FEM.

The thesis contains recommendations on spline-approximation usability along with polynomial approximation, illustrated on the examples of the certain tasks, considered within the framework of classic and refined theories.

Keywords: bending, natural vibration, multilayered shallow shells, FGM, classic theory, refined theory of the first order, R-functions theory, spline-approximation, stress-strained state, spectrum of natural vibrations.

Підписано до друку 08.02.2016р.
Формат 60 х 84 1/16. Папір офсетний.
Друк на різографі. Умовн. друк. арк. 0,9. Тираж 100 прим. Зам. № 145

Надруковано у копі-центрі «МОДЕЛІСТ»
(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)
м. Харків, вул. Мистецтв, 3 літер Б-1
Тел. 7-170-354
www.modelist.in.ua