НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ім. А. М. ПІДГОРНОГО

Плаксій Катерина Юріївна

УДК 517.928:534

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЗОНАНСНОЇ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання і обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Міхлін Юрій Володимирович,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
професор кафедри прикладної математики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Хусаінов Денис Яхьєвич,
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка, професор кафедри моделювання складних систем

кандидат фізико-математичних наук,
Кузенков Олександр Олександрович,
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики

Захист відбудеться «8» червня 2017 р. о 16.00 години на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.0 при Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий « 05 » травня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради О.О. Стрельникова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми досліджень. Проблема резонансу є однією з ключових проблем науки, як у недавньому минулому, так і в теперішній час. Складна поведінка нелінійних систем поблизу резонансу привертає увагу багатьох дослідників. Велика кількість реальних конструкцій, сучасної техніки та приладів працюють в умовах, коли можливим є попадання в резонанс. За умови резонансу, внутрішнього чи зовнішнього, чиниться суттєве ускладнення поведінки системи. Так, спостерігається небажане зростання амплітуд коливань пружних елементів системи, зміна стійкості режимів руху, поява нових режимів руху внаслідок біфуркації тощо. Перекачка енергії між підсистемами та локалізація енергії в одній із підсистем в режимі резонансу використовуються, наприклад, в задачі віброгасіння коливань. Але наявність локалізації може призводити і до руйнування системи. Таким чином, на сьогодні моделювання резонансної динаміки нелінійних коливальних систем є математичною основою багатьох теоретичних досліджень та важливим етапом розв'язання широкого загалу прикладних задач. При цьому важливим є побудування таких математичних моделей, що в повній мірі відповідали б вимогам коректності. Оскільки в реальних системах завжди присутня нелінійність та дисипація, практичний інтерес має задача моделювання резонансної динаміки саме дисипативних нелінійних систем. Наявність дисипації вносить додаткове ускладнення в процес моделювання, адже такі важливі характеристики поведінки системи, як стійкість форм коливань та їх число змінюються з плином часу. На сьогодні не існує єдиного підходу до моделювання резонансної динаміки таких систем, а існуючі методи та підходи в основному є чисельними, достатньо громіздкими та не завжди гарантують повноту та адекватність результатів. З огляду на вищенаведене, створення, дослідження та теоретичне обґрунтування класу спрощених математичних моделей нелінійних дисипативних систем в околі резонансу та розроблення ефективного і водночас універсального чисельно-аналітичного методу для моделювання резонансної динаміки таких систем є актуальною та затребуваною задачею як для теорії, так і для проектування та подальшого застосування конструкцій та різноманітних технічних засобів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відповідності до держбюджетної теми «Розробка теоретичних та експериментальних методів підвищення точності інерціальних та інерціально-супутникових навігаційних систем для рухомих об'єктів шляхом визначення та алгоритмічної компенсації похибок первинних вимірів» (у відповідності з координаційним планом Міністерства освіти і науки України, ДР № 0115U000541, 2015-2016 р.).

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є удосконалення математичного моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем за рахунок узагальнення чисельно-аналітичного методу, який базується на отриманні спрощених математичних моделей у формі редукованих систем.

Поставлена мета досягається вирішенням наступних задач:

– створення класу математичних моделей нелінійних дисипативних систем в околі резонансу у вигляді редукованих систем;

– узагальнення чисельно-аналітичного методу моделювання резонансної динаміки на основі редукованих систем для нелінійних систем з дисипацією енергії та зовнішнім збуренням;

– узагальнення визначення нелінійної нормальної форми Каудерера-Розенберга для систем з малою дисипацією енергії;

– створення чисельних процедур мовою С++, які є частиною реалізації чисельно-аналітичної методу зведення до редукованої системи та дозволяють моделювати стійкість форм коливань та біфуркації внаслідок резонансу;

– підтвердження застосовності узагальненого чисельно-аналітичного методу моделювання резонансної динаміки на основі редукованих систем та узагальненої концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга для певних різновидів нелінійних систем;

– підтвердження достовірності отриманих результатів шляхом проведення додаткового моделювання стійкості форм коливань;

– перевірка збіжності результатів моделювання на основі узагальненого методу редукованих систем з чисельними розв'язками шляхом проведення комп'ютерного моделювання за допомогою розрахункових програм, створених мовою С++.

Об'єкт дослідження – резонансна динаміка нелінійних дисипативних коливальних систем.

Предмет дослідження – моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних коливальних систем з використанням апарату теорії нелінійних нормальних форм.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі для моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем використовується узагальнений для дисипативних систем метод, що базується на отриманні математичних моделей у формі редукованих систем. Для побудування редукованих систем використовується метод багатьох масштабів із введенням розладу частот. Для побудування траєкторій редукованих систем використано розроблену мовою програмування С++ чисельну процедуру на основі методу Рунге-Кутта 4-го порядку. Для додаткового моделювання стійкості коливань використаний підхід із зведенням рівнянь у варіаціях до рівняння Матьє. Для аналізу резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем використовується концепція нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга, яка узагальнюється для систем з малою дисипацією.

Наукова новизна одержаних результатів.

– Вперше розроблено та досліджено клас спрощених математичних моделей нелінійних дисипативних систем у формі редукованих систем. Отримано теоретичне обґрунтування коректності та застосовності такого класу математичних моделей у вигляді сформульованих та доведених теорем.

– Вперше для моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем запропоновано узагальнення чисельно-аналітичного методу, що базується на побудуванні математичної моделі у формі редукованої системи. Були розроблені спеціальні чисельні процедури мовою програмування С++, що є частиною реалізації методу. Розширено область застосування даного методу. Доведено застосовність узагальненого методу редукованих систем до різних типів нелінійних дисипативних систем та збіжність результатів з результатами чисельного моделювання.

– Вперше виявлено важливі особливості застосування даного методу для моделювання поведінки характерних різновидів нелінійних дисипативних систем.

– Вперше запропоновано розширення та використання концепції нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга для моделювання резонансної динаміки систем з малою дисипацією енергії.

За допомогою застосування узагальненого методу редукованих систем та узагальненої концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга:

– вперше шляхом моделювання резонансної поведінки нелінійних дисипативних систем отримані нові наукові результати щодо стійкості та умов біфуркацій нелінійних нормальних форм, а також впливу дисипації енергії на біфуркаційні умови та стійкість рухів в резонансному околі;

– вперше змодельовано перехідний процес в околі резонансів для нелінійної дисипативної системи з неідеальним джерелом енергії.

– вперше виявлено принципово новий вид нелінійної нормальної форми коливань, що була названа перехідною нелінійною формою коливань.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати можуть бути використані для чисельно-аналітичного моделювання резонансної динаміки конструкцій, машин та приладів, що мають коливальні елементи. Зокрема, отримані нові результати моделювання резонансної поведінки дисипативних коливальних систем, що мають прикладний характер та можуть бути використані в задачах віброгасіння. Також отримані результати мають науково-теоретичне значення, а саме: вперше побудовано клас математичних моделей дисипативних систем в околі резонансів у формі редукованих систем, узагальнено для дисипативних систем чисельно-аналітичний метод моделювання резонансної динаміки на основі побудованих математичних моделей. Даний підхід дозволив отримати у роботі новий науковий результат, що має фундаментальне значення, – відкриття нової специфічної форми коливань, що була названа перехідною нелінійною формою. Результати роботи впроваджені в навчальний процес кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем НТУ «ХПІ».

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Проведення аналітичного дослідження, розробка програмного забезпечення та проведення чисельних та чисельно-аналітичних експериментів, інтерпретація отриманих результатів виконана автором особисто. Вибір теми, постановка задачі та обговорення роботи виконані разом з науковим керівником [1-4, 6-9, 11-17, 20-26]. У роботах [5,10] здобувачу належить моделювання резонансної динаміки нелінійної дисипативної системи з неідеальним джерелом енергії та пружним віброгасником, визначення стійкості, біфуркацій та біфуркаційних умов, дослідження нестаціонарних режимів коливань.

Апробація результатів. Основні положення роботи та отримані результати були представлені на наступних Міжнародних конференціях: "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. Micro-CAD" (Харків, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016); "Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012" (Севастополь); "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2013); IV Міжнародній конференції "Nonlinear dynamics" (Севастополь, 2013); "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях " (Харків, 2014); "Дифференциальные уравнения, вычислительная математика, теория функций и математические методы механики" (Київ, 2014); "8th European Nonlinear Dynamics Conference" (Austria, Vienna, 2014); "Тараповские чтения. Современные проблемы математики, механики и информатики" та "Тараповские чтения. Современные проблемы естественных наук " (Харків, 2014, 2016); "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (Рівне, 2015); "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2015, Київ); "International Conference of Young Mathematicians" (Київ, 2015); у рамках семінару "Seminar über Fragen der Mechanik" (Friedrich-Alexander Universität Erlangen Nürnberg, Німеччина, 2015); 6th International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer (Belgium, Liege, 2016); 5th International Conference, dedicated to the 90th anniversary of Academician V. L. Rvachev (Nonlinear Dynamics–2016, Харків).

Публікації. Основні результати роботи опубліковані у 26 друкованих працях [1-26]: 4 статті у наукових виданнях, включених до переліку фахових за спеціальністю, 2 статті у зарубіжних наукових журналах з імпакт-фактором, 1 стаття у науково-технічному журналі, 4 статті у працях міжнародних наукових конференцій, 15 тез доповідей на міжнародних науково-практичних конференціях.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та п’яти додатків. Повний обсяг друкованого тексту становить 183 сторінки, з них 99 рисунки по тексту, список використаних джерел з 179 найменувань на 17 сторінках, додатки на 17 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми, визначається зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, формулюється мета і задачі дослідження, наукова новизна одержаних результатів та їх практичне і теоретичне значення, наводяться дані про апробацію та публікації результатів роботи.

У **першому розділі** проведено огляд основних публікацій з питань математичного моделювання, існуючих чисельних та аналітичних методів моделювання стаціонарної та резонансної динаміки нелінійних коливальних систем. Відзначено, що вагомий внесок в теорію нелінійних форм коливань внесли такі вчені як О.М. Ляпунов, Г. Каудерер, Р. Розенберг, Р. Ренд, Л.І. Маневич, Ю.В. Міхлін, С. Шоу, К. Пьєр, В.М. Пилипчук, О. Вакакіс, М. Кінг, К.В. Аврамов, О.В. Гендельман, Г. Чечін. Зокрема, Каудерером та Розенбергом і Шоу та П’єром були розроблені дві основні концепції нелінійних нормальних форм коливань. Розроблення найвідоміших методів аналізу та моделювання динаміки нелінійних систем належить наступним вченим: А. Пуанкаре, А. Ліштедту, О.М. Ляпунову, Г. Дуффінгу, Б. Ван дер Полю, Дж. Хіллу, О.М. Крилову, М.М. Боголюбову, О.О. Андронову, Ю.О. Митропольському, В.М. Старжинському, І.Г. Малкіну, Мельникову, А.Х. Найфе, Ю.І. Неймарку. Зроблено висновок, що не існує ефективного чисельно-аналітичного методу моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних системи та таких спрощених математичних моделей, які б забезпечували отримання коректних та повних результатів в області резонансів. У дисертаційній роботі розроблено новий клас математичних моделей нелінійних дисипативних систем у формі редукованих систем і узагальнено чисельно-аналітичний метод моделювання резонансної динаміки на основі таких моделей для з малою дисипацією енергії і малим зовнішнім збуренням. Даний метод був розроблений і дотепер застосовувався тільки для консервативних систем.

Запропоновано узагальнення даного методу. Початкова математична модель нелінійної дисипативної системи може бути представлена у загальному вигляді

$$D^2(\bar{y}) + L(\bar{y}) + \varepsilon D^1(\bar{y}) + \varepsilon N(\bar{y}) = \varepsilon \bar{f}(\overline{\Omega}, t), \tag{1}$$

де $\bar{y}$ – вектор координат, D^1, D^2– диференціальні оператори першого і другого порядку, L і N – деякі лінійний та нелінійний оператори, а ε – малий параметр.

Перший етап представляє собою отримання спрощеної математичної моделі системи (1) в околі резонансу у формі редукованої системи відносно нових змінних: параметра K, що характеризує повну енергію редукованої системи, ψ – арктангенса відношення амплітуд, φ – різниця фаз розв'язку. Такі змінні характеризують нелінійні нормальні форми динамічної системи. Для побудування редукованих систем використовується метод багатьох масштабів із введенням розладу для частот.

Другий етап – це аналітичний аналіз редукованої систем, який дозволяє оцінити кількість нелінійних нормальних форм та отримати біфуркаційні умови.

На третьому етапі оцінюється стійкість нелінійних нормальних форм за допомогою побудування та аналізу траєкторій редукованої системи. Для цього у дисертаційній роботі була розроблена спеціальна чисельна процедура, що реалізована програмно мовою програмування С++.

Аналіз резонансної динаміки ґрунтований на узагальненні концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга, що запропоноване у роботі.

У **другому розділі** показано, що узагальнений метод редукованих систем може бути успішно застосований для моделювання резонансної динаміки квазілінійних дисипативних автономних систем. Розглянута пружинно-масова система, рівняння руху якої мають вигляд

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x} + \varepsilon k_x x + \varepsilon^2 q x^3 + \varepsilon \cdot 2\eta_x \dot{x} = \varepsilon \gamma_1 y, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y + \varepsilon k_y y + \varepsilon \cdot 2\eta_y \dot{y} = \varepsilon k_y x. \end{cases} \tag{2}$$

У системі (2) існують дві узагальнені нелінійні нормальні форми Каудерера-Розенберга: нелокалізована форма зв'язаних коливань обох мас та локалізована форма коливань малої маси, коли коливання більшої маси є нехтовними.

До рівнянь коливань (2) був застосований метод багатьох масштабів і отримане перше наближення аналітичного розв'язку, який використаний для дослідження перехідних процесів системи (2). Були отримані умови підходу до внутрішнього резонансу. Для моделювання динаміки системи (2) в околі внутрішнього резонансну була отримана математична модель у формі наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = (-\frac{L}{R}\cos^2\psi + \frac{D}{F}\sin^2\psi)K - K^3\cos^2\psi\sin^2\psi[\frac{I}{F}\sin(2\varphi) - \frac{E}{F}\cos(2\varphi)] \\ \psi' = (\frac{L}{R} + \frac{D}{F})\cos\psi\sin\psi - K^2\sin\psi\cos^3\psi[\frac{I}{F}\sin(2\varphi) - \frac{E}{F}\cos(2\varphi)] \\ \varphi' = -\frac{S}{R} + \frac{P}{F} - K^2\cos^2\psi[\frac{Q}{F} + \frac{I}{F}\cos(2\varphi) + \frac{E}{F}\sin(2\varphi)]. \end{cases} \tag{3}$$

Редукована система (3) проаналізована аналітично на рівноважні розв'язки, що відповідають нелінійним нормальним формам системи (2). Отримано, що у системі (3) існують два положення рівноваги. Перше положення відповідає локалізованим коливанням малої маси m. Воно лежить на прямій $\psi = \pi/2$ і існує для будь-яких рівнів енергії та значень параметрів системи (2). Даному положенню відповідає рівняння відносно параметра енергії $K' = D/F \cdot K$, тобто його енергія збільшується, і воно є таким, що притягує. А значить, відповідна йому локалізована форма коливань є стійка в околі резонансу. Друге положення рівноваги відповідає формі зв'язаних коливань, воно існує в області параметрів $1 \le \dfrac{-SF/R+P}{K^2\sqrt{I^2+E^2}} \le 3$ і рухається у часі уздовж прямої $\psi = 0$. Йому відповідає рівняння відносно параметра енергії $K' = -L/R \cdot K$, тобто його енергія зменшується, а відповідна йому форма зв'язаних коливань є нестійкою в околі резонансу.

Траєкторії редукованої системи (3) у просторі (ψ, φ) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою C++, та представлені на рис. 1. Траєкторії на рис. 1 віддаляються від прямої $\psi = 0$ і з плином часу наближуються до прямої $\psi = \pi/2$. Таким чином, підтверджено, що в околі резонансу зв'язані коливання втрачають стійкість, а локалізовані на координаті x залишаються стійкими незалежно від вибору значень параметрів системи та початкових умов, відмічається перехід від зв'язаних коливань до локалізованих.

Збіжність результатів моделювання резонансної динаміки системи (2) з розв'язками системи підтверджена чисельним моделюванням за допомогою розробленої розрахункової програми мовою C++. На рис. 2 наведені залежності координат системи (2) у конфігураційному просторі для локалізованої форми коливань. Можна зробити висновок: локалізована форма коливань залишається стійкою в околі резонансу, оскільки амплітуди по координаті y нехтовно менші, ніж по координаті x.

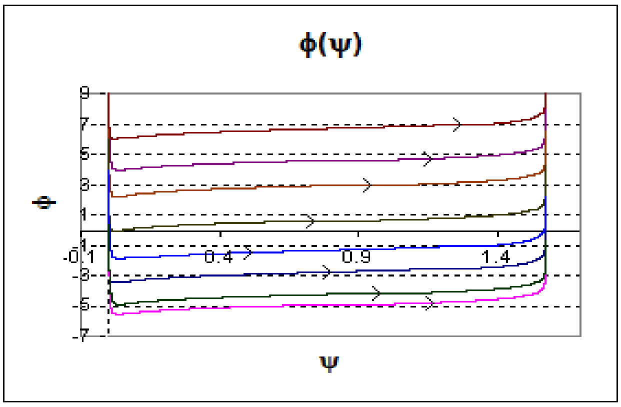

Рис.1. Траєкторії $\varphi(\psi)$

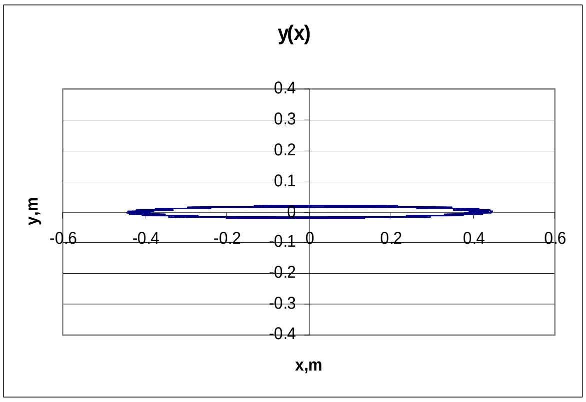

Рис. 2. Локалізована форма

Була виявлена особливість застосування запропонованого методу до квазілінійних дисипативних автономних систем: аналітичний аналіз редукованої системи дозволяє у повній мірі оцінити стійкість рухів динамічної системи вже за функцією параметру енергії, а аналіз траєкторій у просторі (ψ, φ) тільки підтверджує отриманий результат.

У **третьому розділі** перевірено застосовність узагальненого методу редукованих систем для моделювання резонансної динаміки суттєво нелінійних дисипативних автономних систем. Розглянута пружинно-маятникова система, рівняння руху якої мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x} + p^2 x + 2\varepsilon\eta_x \dot{x} - \alpha(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\varepsilon\eta_\theta\dot{\theta} + \sin\theta - \ddot{x}\sin\theta = 0. \end{cases} \tag{4}$$

У системі (4) існують дві узагальнені нелінійні нормальні форми Каудерера-Розенберга: форма вертикальних коливань – $x = x(t)$, $\theta = 0$ – з локалізацією енергії на координаті x, та нелокалізована форма зв'язаних коливань – $x = x(t)$, $\theta = \theta(t)$.

Для моделювання динаміки системи (4) в околі внутрішнього резонансну була отримана математична модель у формі наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = -K(\eta_x \cos^2\psi + \eta_\theta \sin^2\psi), \\ \psi' = \sin\psi(-\sqrt{\alpha}K\sin\varphi + (\eta_x - \eta_\theta)\cos\psi), \\ \varphi' = \sqrt{\alpha}K(\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} - 2\cos\psi)\cos\varphi + \dfrac{\Delta}{4}. \end{cases} \tag{5}$$

Була сформульована та доведена **Теорема 1**: *в редукованій системі існує, в залежності від рівня енергії системи, два або три положення рівноваги, які відповідають нелінійним нормальним формам коливань дисипативної системи. А саме, достатньо малим рівням енергії відповідають два положення рівноваги, достатньо великим – три положення рівноваги.*

Система (5) була проаналізована аналітично. Отримано, що у системі існують наступні положення рівноваги: перше положення відповідає формі локалізованих коливань пружини, воно лежить на прямій $\psi = 0$ та існує для будь-яких рівнів енергії та параметрів системи. Два інших положення рівноваги відповідають двом формам зв'язаних коливань та одночасно існують в області параметрів $\left|\dfrac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}K}\right| < 1$. Таким чином, отримано умову виникнення біфуркації, що залежить від рівня енергії: при замалих початкових значеннях енергії система потраплятиме в область де біфуркація не відбувається і існує лише одне з положень рівноваги, а при достатньому початковому значенні енергії система потрапить в область, де існують обидва положення (біфуркація). Коли енергія системи спаде, відбудеться вихід з області біфуркації.

На рис. 3 представлені траєкторії редукованої системи (5) у просторі (ψ, φ), побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою C++, для випадку, коли біфуркація відбувається. На рис. 3 показано одночасне існування двох положень рівноваги, що відповідають двом формам зв'язаних коливань, які існують сумісно з локалізованою формою (наявна біфуркація). Дані положення рухаються з плином часу вздовж прямих $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$. Траєкторії залишаються поблизу цих прямих, і не залишаються поблизу прямої $\psi = 0$, яка відповідає локалізованим коливанням. Отже, зв'язані коливання є стійкими в області, де відбувається біфуркація, тоді як локалізовані втрачають стійкість. При цьому перехід траєкторії від нижнього положення до верхнього відповідає моменту виходу з області біфуркації: нижнє положення перестає існувати, тоді як верхнє продовжує існувати.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (4) перевірена чисельним моделюванням за допомогою розробленої розрахункової програми мовою C++, яке представлене на рис. 4. На рис. 4 спостерігається втрата стійкості локалізованої форми коливань та перехід до двох стійких в околі резонансу форм зв'язаних коливань.

Виявлено наступну особливість застосування запропонованого методу до суттєво нелінійних дисипативних систем: для таких систем неможливо оцінити стійкість рухів лише за функцією параметру енергії – для визначення стійкості рухів обов'язковим є аналіз характеру траєкторій редукованої системи у просторі (ψ, φ).

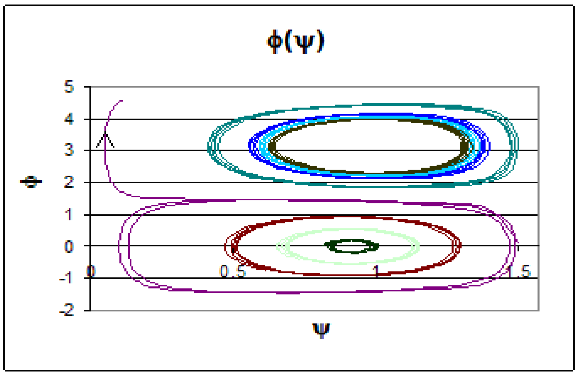

Рис. 3. Траєкторії $\varphi(\psi)$

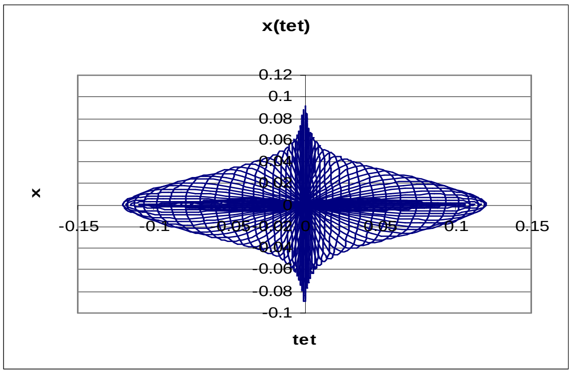

Рис. 4. Локалізована форма

Додаткове дослідження стійкості локалізованої форми вертикальних коливань проведено на основі рівняння у варіаціях відносно малого відхилення по куту θ. Застосування метода багатьох масштабів та метода малого параметра показало, що рівняння у масштабі часу T_0 може бути приведене до рівняння Матьє, границі стійкості розв’язку якого є відомі. Моделювання границь стійкості проведено у пакеті Matlab для різних значень безрозмірного часу τ та підтверджує, що стійкість вертикальних коливань залежить від часу.

У **четвертому розділі** показано застосовність узагальненого методу редукованих систем для моделювання резонансної динаміки квазілінійних дисипативних неавтономних систем. Розглянута пружна коливальна система з нелінійним віброгасником під впливом зовнішнього гармонічного збурення, рівняння коливань якої мають вигляд

$$\begin{cases} M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx + c_2(x-y) + \gamma(x-y)^3 = r\sin\Omega t, \\ m\ddot{y} + \beta\dot{y} - c_2(x-y) - \gamma(x-y)^3 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Динаміка системи (6) змодельована для випадків зовнішніх резонансів з власними частотами та випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів, для чого система була приведена до головних координат z_1, z_2.

Для моделювання динаміки системи (6) в околі зовнішнього резонансу була отримана математична модель у формі наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = \dfrac{L}{2\Omega}K\sin^2\psi + \dfrac{S}{2\omega_2}K\cos^2\psi - \dfrac{N}{2\Omega}\cos b_1\sin\psi, \\ \psi' = \left(\dfrac{L}{2\Omega} - \dfrac{S}{2\omega_2}\right)\sin\psi\cos\psi - \dfrac{N}{2\Omega K}\cos\psi\cos b_1, \\ b_1' = -\dfrac{\Delta}{2\Omega} + \dfrac{M}{2\Omega}K^2\sin^2\psi + \dfrac{P}{2\Omega}K^2\cos^2\psi + \dfrac{N}{2\Omega K\sin\psi}\sin b_1, \\ b_2' = -\dfrac{R}{2\omega_2}K^2\cos^2\psi - \dfrac{T}{2\omega_2}K^2\sin^2\psi, \end{cases} \qquad (7)$$

Була сформульована і доведена **Теорема 2**: *для редукованої системи існує таке значення параметра енергії* K, *при якому існують чотири положення рівноваги редукованої системи, при цьому два з них відповідають локалізованим формам дисипативної системи, а два – перехідним зв’язаним формам. Для усіх інших значень параметра* K *у редукованій системі існують тільки два положення рівноваги, що відповідають локалізованим формам дисипативної системи.*

Аналітичний аналіз системи (7) показав: положення рівноваги, відповідне формі локалізації енергії на координаті z_1, знаходиться на прямій $\psi = \pi/2$. Показано, що стійкість даної форми коливань не може бути визначена з рівняння відносно параметра енергії. Положення рівноваги, відповідне формі локалізації енергії на координаті z_2, знаходиться на прямій $\psi = 0$, і йому відповідає рівняння відносно параметра енергії $K' = \dfrac{S}{2\omega_2} K$ ($S < 0$ для будь-яких параметрів системи). Енергія даного положення є спадаючою, отже дана форма коливань нестійка в околі резонансу. Отримана умова біфуркації, що реалізується лише для одного рівня енергії: $\left| \dfrac{N\omega_2}{K(L\omega_2 - S\Omega)} \right| = 1$. Доведено, що для цього значення енергії завжди існують два положення рівноваги, що відповідають двом перехідним формам зв'язаних коливань (*transient nonlinear normal vibration mode*). Таким чином, вперше було виявлено новий вид нелінійної нормальної форми: такі форми існують лише для дискретних значень часу (тобто для локальних рівнів енергії системи). В околі цих значень часу ці режими коливань є такими, що притягують, отже, рухи системи стають близькими до перехідної форми коливань. З'являючись під час перехідного процесу, такі режими вносять додаткову нестійкість у перехідний процес та подовжують його.

Траєкторії редукованої системи (7) у просторі (ψ, φ) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою С++ та представлені на рис. 6. Траєкторії на рис. 6 не залишаються поблизу прямої $\psi = 0$, а з часом наближуються до прямої $\psi = \pi/2$, тобто локалізовані на координаті z_1 коливання залишаються стійкими в околі резонансу, тоді як локалізовані на координаті z_2 коливання втрачають стійкість. Деякі траєкторії під час перехідного процесу наближуються до положень рівноваги, які відповідають двом перехідним формам зв'язаних коливань, та роблять виток навколо даних положень.

Результати моделювання збігаються з чисельним моделюванням динаміки системи (6) на основі розробленої розрахункової програми мовою С++. На рис. 7 представлено залежність головних координат системи (6) у конфігураційному просторі для форми локалізації енергії на координаті z_2. В околі резонансу спостерігається втрата стійкості даної форми коливань і перехід до стійкої форми локалізації на координаті z_1: траєкторії на рис. 7 з часом згущуються вздовж осі Oz_1. Також зафіксовано появу двох перехідних форм зв'язаних коливань.

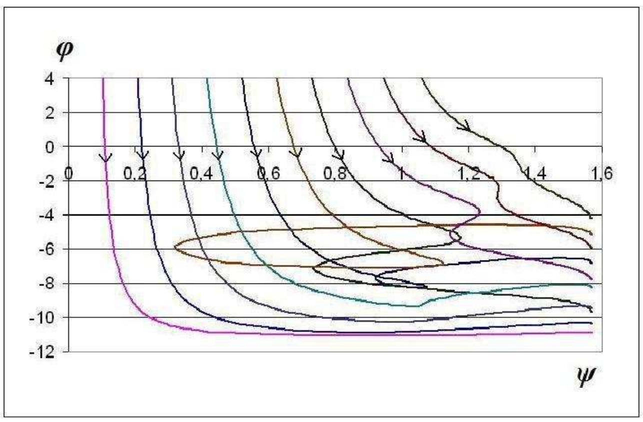

Рис. 6. Траєкторії $\varphi(\psi)$

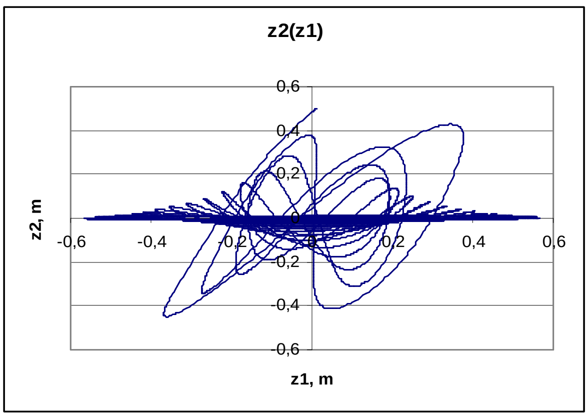

Рис. 7. Форма локалізації на z_2

Динаміка системи (6) була змодельована за допомогою методу редукованих систем також для випадку зовнішнього резонансу на власній частоті ω_2. Була отримана відповідна редукована система, що для неї виконується Теорема 2. Було отримано, що локалізовані на координаті z_2 коливання спочатку втрачають стійкість, і з'являються дві перехідні форми зв'язаних коливань. Коли вони перестають існувати, локалізована на координаті z_2 форма стає стійкою і притягує інші рухи.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (6) була підтверджена за допомогою чисельного моделювання резонансної динаміки системи (6) на основі розробленої розрахункової програми мовою С++.

Моделювання динаміки системи (6) було проведене для випадку одночасних зовнішнього та внутрішнього резонансів. Отримана відповідна редукована система, для якої була сформульована та доведена **Теорема 3**: *для редукованої системи існують такі значення параметра енергії K, при яких існуватимуть положення рівноваги, що відповідають перехідним локалізованим формам дисипативної системи. Для усіх інших значень параметра K у редукованій системі існують лише два положення рівноваги, що відповідають звичайним формам зв'язаних коливань, причому одне з них відповідає нестійкій формі, а інше стійкій.*

Аналітичний аналіз редукованої системи показав, що обидві локалізовані форми існують лише для дискретних значень параметра енергії K, що задовольняють рівнянням $\Omega^2 K^2 N_1^2 + K^6 P_1^2 F^2 - \delta^2 = 0$ та $\Omega^2 K^2 N_2^2 + K^6 P_2^2 A^2 - \delta^2 = 0$. Показано, що для кожного рівняння завжди можна знайти хоча б один дійсний розв'язок. Таким чином, обидві локалізовані форми є перехідними в околі резонансу. Для усіх інших значень параметра K локалізації не спостерігається.

Траєкторії редукованої системи у просторі (ψ, φ) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою С++, та представлені на рис. 8. На рис. 8 показано існування двох положень рівноваги редукованої системи, що відповідають двом нелінійним нормальним формам зв'язаних коливань і знаходяться на прямих $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$. Має місце біфуркація: в околі резонансу з'являються форми зв'язаних коливань. Траєкторії з часом віддаляються від верхнього положення рівноваги та наближуються до нижнього положення, тобто верхнє положення відповідає нестійкій формі, а нижнє – стійкій. Траєкторії не наближуються до прямих $\psi = 0$ і $\psi = \pi/2$, що відповідають локалізованим формам коливань.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (6) перевірена за допомогою чисельного моделювання на основі розрахункової програми мовою С++. На рис. 9 представлені результати чисельного моделювання для форми локалізації енергії на координаті z_1: спостерігається швидка втрата стійкості локалізованої форми та перехід до стійкої в околі резонансну форми зв'язаних коливань.

Виявлено особливість застосування методу редукованих систем до неавтономних дисипативних систем: для таких систем не вдається виконати повну редукцію через наявність у правих частинах рівнянь членів від зовнішнього збурення, але при цьому рівняння відносно різниці фаз може бути записане формально, і його аналіз залишається успішним.

Обговорено можливість локалізації енергії у системі (6) на віброгаснику. Виявлено, що найсприятливішим для віброгасіння є випадок зовнішнього резонансу на частоті ω_1. Випадок одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу є найнесприятливішим для віброгасіння.

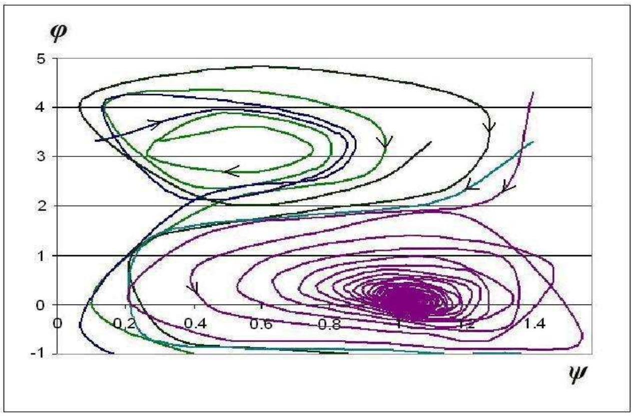

Рис. 8. Траєкторії $\varphi(\psi)$

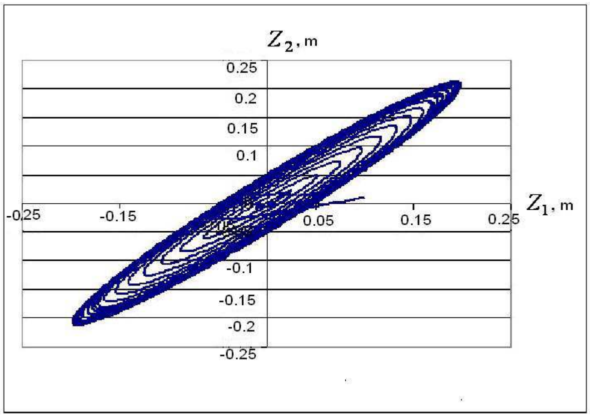

Рис. 9. Форма локалізації на z_1

У **п'ятому розділі** перевірена застосовність узагальненого методу редукованих систем для моделювання перехідних процесів в режимі резонансу для динамічних систем, в яких присутній зворотній зв'язок. Розглянута система з джерелом енергії обмеженої дії та нелінійним віброгасником, рівняння руху якої мають вигляд:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) + c_1 r(x - r\sin\varphi)\cos\varphi, \\ M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx + c_2(x-y) + \gamma(x-y)^3 = c_1 r\sin\varphi, \\ m\ddot{y} + \beta\dot{y} - c_2(x-y) - \gamma(x-y)^3 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де I – момент інерції мас, що обертаються, $H(\dot{\varphi}) = d\dot{\varphi}$ – момент сил опору обертання ротора, $L = a + b\dot{\varphi}$ – рушійний момент джерела енергії (характеристика двигуна).

Динаміка системи моделювалася в умовах неусталеного режиму обертання ротора для трьох випадків резонансів у пружній підсистемі. Був здійснений перехід до головних координат z_1 і z_2. Для моделювання динаміки системи (8) у випадку зовнішнього резонансу на власній частоті ω_1 була отримана математична модель у формі відповідної редукованої системи, для якої сформульована та доведена **Теорема 4**: *для редукованої системи можуть існувати такі значення параметра* K, *при яких існують положення рівноваги редукованої системи, що відповідають перехідним формам зв'язаних коливань дисипативної системи.*

Аналітичний аналіз редукованої системи показав наступне: перше положення рівноваги редукованої системи відповідає формі локалізації енергії на координаті z_1 і лежить на прямій $\psi = \pi/2$. Стійкість даної форми коливань не може бути визначена за видом рівняння відносно параметра енергії. Друге положення рівноваги відповідає формі локалізації енергії на координаті z_2 і лежить на прямій $\psi = 0$. Йому відповідає рівняння відносно параметра енергії $\dfrac{\partial K}{\partial T_1} = \dfrac{S}{2\omega_2}K$ ($S < 0$), тобто його енергія спадаюча, а відповідна форма коливань є нестійкою. Також отримані аналітичні умови виникнення біфуркації, що реалізується лише для дискретних рівнів енергії. Показано, що для цих рівнів енергії існують положення рівноваги редукованої системи, що відповідають перехідним формам зв'язаних коливань.

Траєкторії редукованої системи у просторі (ψ, ξ) (де ξ – різниця фаз) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою С++, та представлені на рис. 10. Траєкторії на рис. 10 не залишаються поблизу прямої $\psi = 0$ і з часом наближуються до прямої $\psi = \pi/2$, тобто локалізована на узагальненій координаті z_1 форма є стійкою в околі резонансу, тоді як локалізована на координаті z_2 форма втрачають стійкість. Також деякі траєкторії наближуються до положень рівноваги, які відповідають перехідним формам зв'язаних коливань, та залишаються біля них, поки дані положення існують.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (8) підтверджена чисельним моделюванням на основі розробленої розрахункової програми мовою C++ . На рис. 11 зображено перехід від нестійкої в околі резонансу форми локалізації на координаті z_2 до стійкої форми локалізації на координаті z_1, при цьому зафіксовано появу двох перехідних форм зв'язаних коливань.

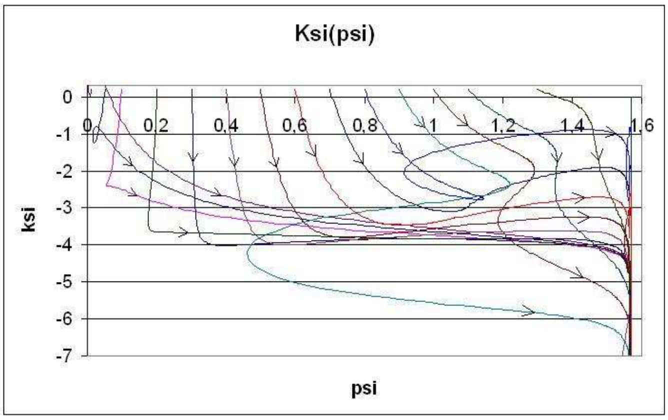

Рис. 10. Траєкторії $\xi(\psi)$

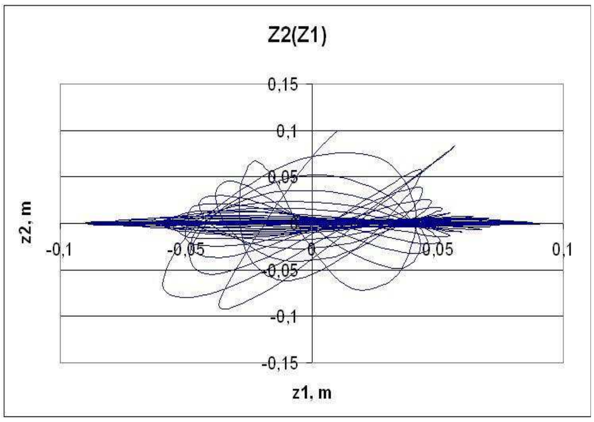

Рис.11. Форма локалізації на z_2

Динаміка системи (8) була змодельована також для випадку зовнішнього резонансу на власній частоті ω_1, для чого була отримана математична модель у формі відповідної редукованої системи. Показано, що для отриманої системи виконується Теорема 4. Отримано, що локалізована на узагальненій координаті z_1 форма втрачає стійкість, тоді як локалізована на координаті z_2 форма залишається стійкою в околі резонансу. Також зафіксовано появу двох перехідних форм зв'язаних коливань. Збіжність отриманих результатів моделювання з розв'язками системи (8) перевірена за допомогою чисельного моделювання на основі розрахункової програми мовою C++.

Моделювання динаміки системи (8) проведене також для випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу у пружній підсистемі. Була отримана математична модель у формі відповідної редукованої системи. Показано, що для редукованої системи виконується Теорема 3. Отримано, що положення рівноваги співпадають з положеннями рівноваги системи (6), раніше отриманими для випадку одночасних зовнішнього та внутрішнього резонансів. Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (8) підтверджено за допомогою чисельного моделювання на основі розробленої розрахункової програми мовою C++ .

Змодельовані випадки резонансів були проаналізовані на сприятливість для віброгасіння. Результати співпали з результатами для системи (6).

У **шостому розділі** показано, що застосування узагальненого методу редукованих систем дозволяє отримати якісні результати щодо резонансної динаміки суттєво нелінійних дисипативних неавтономних систем. Розглядається пружинно-маятникова система під дією зовнішнього періодичного збурення, рівняння руху якої мають вигляд

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_u^2 x + \varepsilon\eta_u \dot{u} - \mu(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = \varepsilon^2 f\cos\tau \\ \ddot{\theta} + \varepsilon\eta_\theta\dot{\theta} + p^2\sin\theta - \ddot{u}\sin\theta = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Динаміка система були змодельована для випадків зовнішніх та одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів у системі. Для випадку зовнішнього резонансу на власній частоті ω_u отримано математичну модель у формі наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = -K(\frac{\eta_u}{2}\cos^2\psi + \frac{\eta_\theta}{2}\sin^2\psi) - \frac{f}{4}\sin\beta_u\cos\psi, \\ \psi' = \sin\psi(\frac{\eta_u - \eta_\theta}{2}\cos\psi + \frac{f}{4K}\sin\beta_u), \\ \beta_u' = \frac{\Delta}{2} - \frac{f}{4K\cos\psi}\cos\beta_u, \\ \beta_\theta' = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Для системи (10) сформульована та доведена **Теорема 5**: *у редукованій системі в залежності від рівня енергії може існувати одне або два положення рівноваги, причому більш високим рівням енергії відповідають два положення рівноваги, а більш низьким – одне.*

Отримано, що перше положення рівноваги редукованої системи, що відповідає локалізованій формі коливань пружини, лежить на прямій $\psi = 0$ та існує для будь-яких рівнів енергії системи. Стійкість даної форми коливань не може бути визначена з рівняння відносно параметра енергії. Показано, що локалізація енергії на маятнику не може бути реалізована. Отримані умови біфуркації, що реалізується тільки для високих рівнів енергії: $\left|\frac{f}{2K\sqrt{(\eta_u - \eta_\theta)^2 + \Delta^2}}\right| \le 1$. Для цих рівнів енергії існує положення рівноваги, що відповідає формі зв'язаних коливань.

Траєкторії редукованої системи у просторі (ψ, φ) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою С++. Аналіз траєкторій показав, форма локалізованих коливань пружини є стійкою в резонансному околі, а форма зв'язаних коливань є нестійка. Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (9) підтверджена чисельним моделюванням на основі розробленої розрахункової програми мовою С++.

Математична модель для випадку одночасних зовнішнього та внутрішнього резонансів була отримана у формі наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = -K(\frac{\eta_u}{2}\cos^2\psi + \frac{\eta_\theta}{2}\sin^2\psi) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}}\sin\beta_u\cos\psi, \\ \psi' = \sin\psi(\frac{\sqrt{\mu}}{2}K\sin(2\beta_\theta - \beta_u) + \frac{\eta_u - \eta_\theta}{2}\cos\psi + \frac{f}{2\sqrt{\mu}K}\sin\beta_u), \\ \beta_u' = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\frac{K\sin^2\psi}{\cos\psi}\cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}K\cos\psi}\cos\beta_u, \\ \beta_\theta' = \Delta_2 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}K\cos\psi\cos(2\beta_\theta - \beta_u). \end{cases} \qquad (11)$$

Для системи (11) сформульована та доведена **Теорема 6**: *у редукованій системі існують три положення рівноваги, причому одне відповідає локалізованій формі коливань дисипативної системи, а два інших відповідають формам зв'язаних коливань, одна з яких є перехідною, а інша звичайною стійкою нелінійною нормальною формою.*

Отримано, що положення рівноваги редукованої системи, яке відповідає локалізованій формі коливань пружини, визначається такими ж умовами, як і у попередньому випадку. Проаналізовані аналітичні умови існування двох положень рівноваги, що відповідають формам зв'язаних коливань.

Траєкторії редукованої системи у просторі (ψ,φ) були побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою C++, та представлені на рис. 12. Траєкторії на рис. 12 наближуються до положення рівноваги, що відповідає звичайній, стійкій в околі резонансу, нелінійній нормальній формі зв'язаних коливань, роблячи на шляху виток навколо квазі-положення рівноваги, яке відповідає перехідній формі зв'язаних коливань.

Перевірка збіжності результатів моделювання з розв'язками системи (9) проведена за допомогою чисельного моделювання на основі розробленої розрахункової програми мовою C++. На рис. 13 зображено перехід від нестійкої форми локалізації енергії на пружині до стійкої форми зв'язаних коливань, зафіксовано появу перехідної форми зв'язаних коливань з траєкторією у формі параболи з рогами вниз.

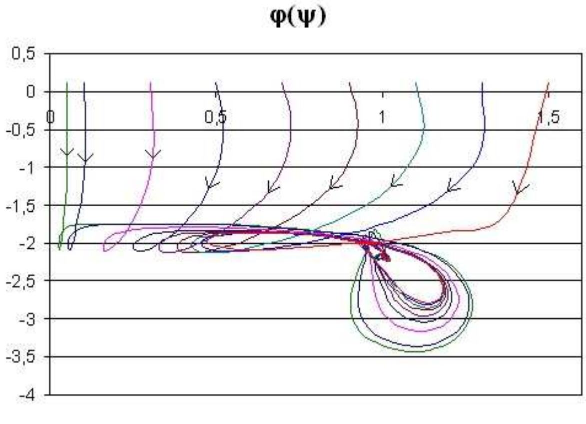

Рис. 12. Залежність $\varphi(\psi)$

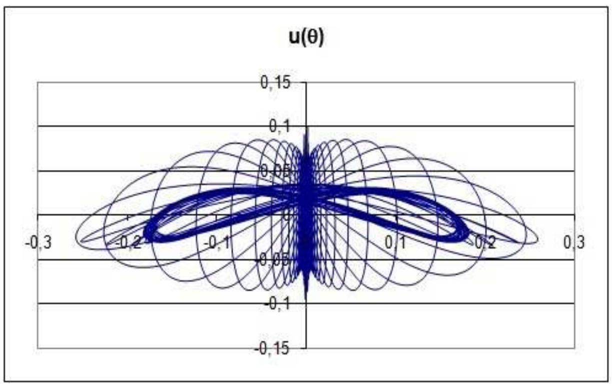

Рис. 13. Залежність $u(\theta)$

Для випадку зовнішнього резонансу на власній частоті ω_θ була отримана математична модель у формі редукованої системи наступного вигляду:

$$\begin{cases} K' = -K(\dfrac{\eta_u}{2}\cos^2\psi + \dfrac{\eta_\theta}{2}\sin^2\psi)\dfrac{f}{2(\omega_u^2-1)}\sin^2\psi\sin 2\beta_\theta, \\ \psi' = \sin\psi\cos\psi(\dfrac{\eta_u-\eta_\theta}{2} + \dfrac{f}{2(\omega_u^2-1)}\sin 2\beta_\theta), \\ \beta_u' = 0_u, \\ \beta_\theta' = \dfrac{f}{2(\omega_u^2-1)}\cos 2\beta_\theta + \Delta. \end{cases} \quad (12)$$

Для системи (12) сформульована та доведена **Теорема 7**: *для редукованої системи в залежності від величини параметра f можуть існувати одне або два положення рівноваги, що відповідатимуть локалізованим формам коливань дисипати-*

вної. Зокрема, для достатньо великих значень параметра f існуватимуть два положення рівноваги, а для замалих значень даного параметра лише одне.

Аналітичний аналіз показав, що в області параметрів $\left|-\frac{2\Delta(\omega_u^2-1)}{f}\right|\le 1$ крім положення, що відповідає локалізованій формі коливань пружини, існує положення рівноваги, що лежить на прямій $\psi=\pi/2$ і відповідає режиму розкачки маятника.

Траєкторії редукованої системи у просторі (ψ,φ) побудовані за допомогою розробленої чисельної процедури, реалізованої програмно мовою С++, та представлені на рис. 14. Траєкторії на рис. 14 наближуються до прямої $\psi=0$, при цьому положення рівноваги, що відповідає формі зв'язаних коливань, не є таким, що притягує. Отже, форма локалізованих коливань пружини є стійкою в резонансному околі, а форма зв'язаних коливань є нестійка.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками системи (9) підтверджена за допомогою чисельного моделювання на основі розробленої розрахункової програми мовою С++. Результати представлені на рис. 15, де зображено втрату стійкості локалізованої форми коливань пружини та перехід до режиму розкачки маятника.

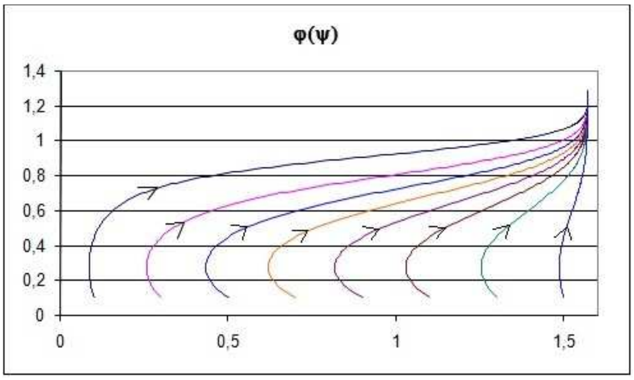

Рис. 13. Траєкторії $\varphi(\psi)$

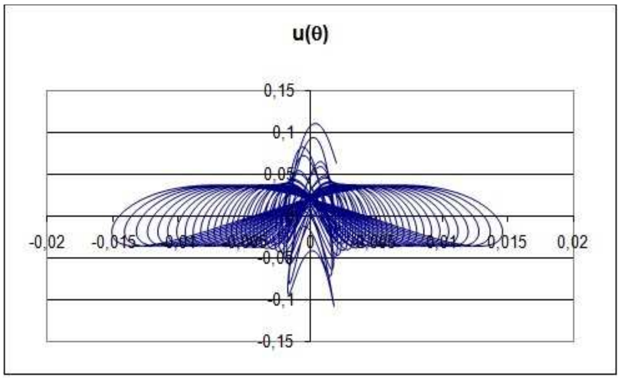

Рис. 14. Розкачка маятника

ВИСНОВКИ

1. У дисертаційній роботі вперше розроблено та досліджено клас спрощених математичних моделей нелінійних дисипативних систем у формі так званих редукованих систем. Підтверджено коректність застосування даного класу математичних моделей до моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем різних типів. Отримано теоретичне обґрунтування використання такого класу математичних моделей шляхом доведення сформульованих теорем.

2. Вперше запропоновано узагальнення чисельно-аналітичного методу моделювання резонансної динаміки для дисипативних та неавтономних систем, який базується на використанні математичних моделей у формі редукованих систем. Зокрема, розроблено та реалізовано мовою програмування С++ чисельну процедуру, що є частиною реалізації даного методу. Даний метод був початково розроблений для консервативних систем і не застосовувався раніше для систем з дисипацією або зовнішнім збуренням. Отже, розширено область застосування даного методу. Перевірено та доведено ефективність методу для моделювання резонансної динаміки нелі-

нійних дисипативних систем різних типів. Як результат, виявлено важливі особливості застосування даного методу для різних типів нелінійних дисипативних систем.

3. У роботі вперше узагальнено для дисипативних систем концепцію нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга. Дана концепція була сформульована для консервативних систем і раніше була розширена лише для неавтономних та автоколивальних систем. Показано, що використання узагальненої концепції Каудерера-Розенберга для дисипативних систем дозволяє проводити адекватний аналіз їхньої резонансної поведінки.

4. Вперше шляхом математичного моделювання резонансної поведінки отримано нові результати щодо стійкості та умов біфуркацій нелінійних нормальних форм дисипативних систем, а також впливу дисипації енергії на біфуркаційні умови та стійкість рухів в резонансному околі.

5. Вперше завдяки узагальненню методу редукованих систем та концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга на дисипативні системи вдалося виявити принципово новий вид нелінійної нормальної форми коливань, що була названа перехідною нелінійною нормальною формою.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance // Journal of Sound and Vibration. 2015. Vol. 334. P. 319-337.

2. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Resonance behavior of the limited power-supply system coupled with the nonlinear absorber // Journal MESA. 2015. Vol.6. №3. P. 475-495.

3. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Дослідження поведінки нелінійних дисипативних систем з двома степенями свободи в околі внутрішнього резонансу// Динамические системы. 2012. Т.2(30), №3-4. С. 293-308.

4. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Дослідження поведінки пружної коливальної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу // Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка: зб. наук. праць. Запоріжжя: ЗНУ, 2014. №2. С. 116-125.

5. Михлин Ю.В., Клименко А.А., Плаксий Е.Ю. Резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, которая содержит гаситель колебаний // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. №2. С. 136-142.

6. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Вимушені резонансні коливання дисипативної пружинно-маятникової системи // Вісник Харківського національного університету. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: зб. наук. праць. Харків: ХНУ. 2016. Том 30. С. 69-83.

7. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Стійкість нелінійних нормальних форм коливань пружинно-маятникової системи та процес зриву вертикальної форми // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. «Математичне моделювання в техніці та технологіях»: зб. н. пр. Харків: НТУ «ХПІ», 2012. №27. С. 167–182.

8. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Dynamics of nonlinear dissipative systems in vicinity of internal resonance// The fourth international conference "Nonlinear dynamics", June 19-22: proc. Sevastopol. 2013. P. 164-170.

9. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Nonlinear Dissipative Systems in Vicinity of Internal and Forced Resonances // ENOC 2014: Proc. of 8th European Nonlinear Dynamics Conference, July 6-11. 2014. Vienna. 2014. P. 33-38.

10. Mikhlin Y.V., Klimenko A.A., Plaksiy K.Y. Nonlinear Normal Modes and their Interaction in Non-ideal Systems with Vibration Absorber // ENOC 2014: Proc. of 8th European Nonlinear Dynamics Conference, July 6-11, 2014. Vienna, 2014. P. 24-29.

11. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Resonance Behavior of the Forced Dissipative Spring-Pendulum System // Nonlinear Dynamics–2016 (ND-KhPI2016) : Proceedings of 5th International Conference, dedicated to the 90th anniversary of Academician V. L. Rvachev, September 27-30. 2016 .Kharkov: NTU "KhPI". 2016. P. 192-199.

12. Plaksiy K.Y., Mikhlin Y.V. Nonlinear normal modes and their interaction in nonlinear dissipative systems under resonance conditions// 6th International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer, July 04-08. Liege. 2016. P. 35-36.

13. Міхлін Ю.В., Плаксій К.Ю. Дослідження динаміки пружної дисипативної системи в околі резонансу // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Матеріали XXII міжнар. наук.-практ. конф., 15-17 жовтня 2014. Ч.1. Харків: НТУ «ХПІ», 2014. С.65.

14. Міхлін Ю.В., Плаксій К.Ю. Дослідження перехідних процесів та руху пружинно-маятникової системи в околі внутрішнього резонансу // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Матеріали XX міжнар. наук.-практ. конф., 15-17 травня 2012 р. Ч.1. Харків: НТУ «ХПІ». 2012. С.68.

15. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Дослідження резонансної поведінки нелінійних дисипативних систем // Сучасні проблеми механіки та математики: Міжнар. наук. конф, 21-25 травня 2013. В 3-х т. Львів. С. 73.

16. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Динаміка неідеальної дисипативної системи в околі резонансу//Дифференциальные уравнения, вычислительная математика, теория функций и математические методы механики: Междунар. математ. конф., 23-24 апреля, 2014. Киев, 2014. С. 15-16.

17. Міхлін Ю.В., Плаксій К.Ю. Дослідження динаміки пружинно-маятникової системи з тертям в околі внутрішнього резонансу// Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: матеріали XXI міжнар. наук.-практ. конф., 29-31 травня 2013 р.: у 4 ч. Ч.1. Харків: НТУ «ХПІ», 2013. С.48.

18. Плаксій К.Ю. Динаміка пружної дисипативної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов IX международной конференции для молодых ученых, 25-26 апреля 2014. Харків, 2014. С.50-51.

19. Плаксій К.Ю. Резонансна динаміка дисипативної системи з обмеженим збуренням та нелінійним віброгасником // International Conference of Young Mathematicians: Міжнар. конф., 3-6 червня 2015р. Київ, 2015. С. 87.

20. Плаксий Е.Ю., Михлин Ю.В. Резонансное взаимодействие нелинейных форм колебаний динамических систем // Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012: Междунар. конф., 10-14 сент.2012г.: Тезисы докл. Севастополь, 2012. С.139.

21. Плаксий Е. Ю., Михлин Ю.В. Динамика нелинейных колебательных систем с трением в окрестности резонанса // Современные проблемы математики, ме-

ханики и информатики, 19 сент.- 4 окт. 2013г: Тезисы докладов международной школы-конференции "Тараповские чтения". Харьков, 2013. С. 60-61.

22. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Резонансна динаміка неідеальної дисипативної системи з нелінійним віброгасником // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: Міжнар. наук. конф., 19-22 лютого 2015 р. Рівне, 2015. С. 134.

23. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Дослідження динаміки неідеальної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу// Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2015): XVII міжнар. конф.,-Київ, 2015. С. 185-186.

24. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Дослідження динаміки неідеальної дисипативної системи в околі резонансу // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Матеріали XXIII міжнар. наук.-практ. конф., 20-22 травня 2015. Харків: НТУ «ХПІ»: у 4 ч. Ч.1. С. 62.

25. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Резонансна динаміка дисипативної пружинно-маятникової системи // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Матеріали XXIV міжнар. наук.-практ. конф., 18-20 травня 2016 р. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. у 4 ч. Ч.1. С.75.

26. Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. Нелінійні нормальні форми та їх резонансна взаємодія у дисипативній пружинно-маятниковій системі // Тезисы докладов Международной конференции Современные проблемы естественных наук «Тараповские чтения – 2016». Харьков: ХНУ. 2016. С. 95-96.

АНОТАЦІЯ

Плаксій К.Ю. Математичне моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання і обчислювальні методи. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2017.

Дисертаційна робота присвячена удосконаленню математичного моделювання резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем. Для моделювання динаміки таких систем в околі внутрішніх та зовнішніх резонансів був узагальнений для випадку малої дисипації та малого зовнішнього збурення чисельно-аналітичний метод, який використовує спрощену математичну модель. Розроблено та досліджено клас спрощених математичних моделей дисипативних систем в околі резонансів у формі редукованих систем. Для отримання редукованих систем застосований метод багатьох масштабів із введенням розладу для частот коливань. Отримано теоретичне обґрунтування використання таких математичних моделей на основі сформульованих та доведених теорем. Розроблено спеціальні чисельні процедури мовою програмування С++, які є невід'ємною частиною реалізації запропонованого чисельно-аналітичного методу. Перевірено та доведено ефективність методу для моделювання резонансної поведінки нелінійних дисипативних систем різних типів та виявлено особливості його застосування.

Для аналізу резонансної динаміки нелінійних дисипативних систем використана концепція нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга, яка була узагальнена для систем з малою дисипацією енергії. Шляхом математичного моделю-

вання отримано нові результати щодо стійкості та біфуркацій нелінійних нормальних форм дисипативних систем, впливу дисипації енергії на біфуркаційні умови та стійкість рухів в резонансному околі та виявлено новий вид нелінійної нормальної форми коливань, що була названа перехідною нелінійною нормальною формою.

Збіжність результатів моделювання з розв'язками розглянутих дисипативних систем та достовірність усіх отриманих результатів перевірена за допомогою чисельного моделювання резонансної поведінки та шляхом порівняння з результатами додаткових чисельно-аналітичних досліджень.

Ключові слова: *спрощена математична модель, редукована система, метод багатьох масштабів, нелінійні нормальні форми, біфуркація, резонанс, стійкість.*

АННОТАЦИЯ

Плаксий Е.Ю. Математическое моделирование резонансной динамики нелинейных диссипативных систем. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2017.

Диссертационная работа посвящена усовершенствованию математического моделирования резонансной динамики нелинейных диссипативных систем. Для моделирования динамики таких систем в окрестности внутренних и внешних резонансов был обобщен для случая малой диссипации и малого внешнего воздействия численно-аналитический метод, который предусматривает использование упрощенных математических моделей. Для этого был разработан и исследован класс упрощенных математических моделей диссипативных систем в окрестности резонансов в форме редуцированных систем. Для получения редуцированных систем применен метод многих масштабов с введением расстройки для частот колебаний. Редуцированная система записывается относительно переменных, характеризующих нелинейные нормальные формы колебаний, и в общем случае позволяет понизить порядок исследуемой динамической системы. Получено теоретическое обоснование использования математических моделей в форме редуцированных систем на основе сформулированных и доказанных теорем. Для построения траекторий редуцированных систем разработано специальные численные процедуры на языке программирования С++, которые являются неотъемлемой частью реализации предложенного численно-аналитического метода. Анализ редуцированной системы и ее траекторий позволяет оценить устойчивость и бифуркации нелинейных нормальных форм колебаний, получить аналитические бифуркационные условия любой сложности. Проверено и доказано эффективность метода для моделирования резонансного поведения нелинейных диссипативных систем различных типов (квазилинейных и существенно нелинейных, автономных и неавтономных, систем с обратной связью), обнаружено особенности применения данного метода для некоторых типов нелинейных диссипативных систем.

Для анализа резонансной динамики нелинейных диссипативных систем использована концепция нелинейных нормальных форм Каудерера-Розенберга, которая была обобщена для систем с малой диссипацией энергии. Путем математического моделирования резонансного поведения получено новые результаты относитель-

но устойчивости и условий бифуркаций нелинейных нормальных форм диссипативных систем, влияния диссипации энергии на бифуркационные условия и устойчивость движений в резонансной окрестности, а также обнаружено принципиально новый вид нелинейной нормальной формы колебаний, которая была названа переходной нелинейной нормальной формой. Такие режимы колебаний могут появляться в диссипативных системах при переходном процессе и существуют только для дискретных значений времени (для дискретных уровней энергии системы), являясь притягивающими движения динамической системы в окрестности этих значений. Появление таких режимов колебаний вносит дополнительную неустойчивость в поведение динамической системы и увеличивает время переходного процесса.

Сходимость результатов моделирования к решениям рассмотренных диссипативных систем и достоверность всех полученных результатов проверена с помощью численного моделирования резонансного поведения рассмотренных диссипативных систем и путем сравнения с результатами дополнительных численно-аналитических исследований.

Ключевые слова: *упрощенная математическая модель, редуцированная система, метод многих масштабов, нелинейные нормальные формы, резонанс, устойчивость.*

ABSTRACT

Plaksiy K.Y. Mathematical modeling of nonlinear dissipative systems resonance dynamics. – Manuscript.

Thesis for Candidate Degree (PhD) of Physico-Mathematical Science on speciality 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. – A.N. Podgorny Institute for Mathematical Engineering problems NAS Ukraine, Kharkov, 2017.

The thesis is devoted to mathematical modeling of nonlinear dissipative systems resonance dynamics. A numerical-analytical method for resonance dynamics modeling, using a simplified mathematical model, is generalized for cases of small dissipation and small external excitation. A class of simplified mathematical models in the form of reduced systems is developed and investigated. The multiple time scales method is used for the reduced systems obtaining. Theoretical justification is received on the base of formulated and proved theorems. Special numerical procedures in the C++, which are an essential part of the proposed numerical-analytical method, are developed. The effectiveness of the method for nonlinear dissipative systems resonance dynamics modeling are checked and proved, the features of the method application are revealed.

The nonlinear normal modes concept of Kauderer and Rosenberg is used for nonlinear dissipative systems resonance dynamics analysis and generalized for systems with small energy dissipation. New results concerning stability and bifurcations of nonlinear normal modes, influence of dissipation on stability and bifurcation conditions in resonance vicinity are obtained by mathematical modeling, the new type of nonlinear normal mode, called as transient normal vibration mode, is reviled.

The convergence of the modeling results to considered systems solutions and reliability of all obtained results is checked by resonance dynamics numerical modeling and by comparison with additional numerical-analytical investigations results.

Keywords: *simplified mathematical model, reduced system, multiple time scales method, nonlinear normal modes, resonance, stability.*