

Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного

Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

_____ Хлуд Ольга Михайлівна _____

УДК 519.859

ДИСЕРТАЦІЯ

_____ Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів: _____
_____ математичні моделі та методи розв'язання _____
_____ 01.05.02 – математичне моделювання і обчислювальні методи _____
_____ технічні науки _____

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О.М. Хлуд _____

Науковий керівник (консультант) Романова Тетяна Євгеніївна,

доктор технічних наук, професор

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Хлуд О. М. «Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів: математичні моделі та методи розв’язання» – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків, 2018.

Задачі упаковки еліпсоїдів належать до класу NP-складних і мають широкий спектр наукових та практичних застосувань у сучасній біології, ядерній медицині, адитивних технологіях, робототехніці, в термодинаміці, під час розробки високоміцних керамічних матеріалів, вирощування кристалів, моделювання структури рідин, руху і пресування сипучих речовин, моделювання розміщення хромосом в ядрах людських клітин. У кожному з наведених вище застосувань розглядаються різні форми контейнерів, а еліпсоїди мають особливості метричних характеристик та довільну орієнтацію.

На цей час задача упаковки еліпсоїдів залишається недостатньо дослідженою, оскільки протягом тривалого періоду основна увага приділялась саме аналізу щільності упаковки еліпсоїдів або моделюванню відношень еліпсоїдів між собою, не обмежуючи їх контейнерами, тому оптимізаційна процедура не застосовувалася. Як правило, для розв’язання задач цього класу використовуються евристичні алгоритми. Деякі запропоновані математичні моделі задачі, що подані у вигляді задач нелінійного програмування, мають настільки велику розмірність, що сучасні програмні засоби глобальної оптимізації не здатні знайти навіть допустимі розв’язки за прийнятний час.

Найменш вивченим є практично значущий клас задач розміщення еліпсоїдів, що допускають неперервні обертання і трансляції, у опуклих контейнерах довільної просторової форми.

Основна проблема полягає у складності аналітичного опису обмежень розміщення, у тому числі обмежень неперетину еліпсоїдів і включення еліпсоїдів у контейнер, та обмежень на мінімально допустимі відстані.

Лише у двох нещодавніх роботах запропоновано математичні моделі задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів у вигляді задач нелінійного програмування. Однак розроблені алгоритми мають оцінку складності, яка є квадратичною відносно кількості еліпсоїдів. Окрім того, розглядається тільки два види контейнерів та не враховуються обмеження на мінімально допустимі відстані.

Таким чином, актуальними є побудова математичних моделей задач оптимальної упаковки еліпсоїдів у довільних опуклих контейнерах (у тому числі із урахуванням мінімально допустимих відстаней) у вигляді задач нелінійного програмування (NLP-models) та розробка методів їх розв'язання, що мають оцінку складності, яка є лінійною відносно кількості еліпсоїдів, що і визначило мету даної дисертаційної роботи.

Метою дисертаційної роботи є підвищення ефективності розв'язання оптимізаційних задач упаковки еліпсоїдів шляхом розробки конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання, математичних моделей у вигляді неперервних задач нелінійного програмування, оптимізаційних методів із застосуванням сучасних локальних та глобальних NLP-solvers (програмне забезпечення для розв'язання задач нелінійного програмування).

У роботі розглядається задача упаковки еліпсоїдів у такій постановці. Маємо набір еліпсоїдів, кожен з яких заданий розмірами півосей. Еліпсоїди можуть допускати неперервні трансляції та обертання.

Як контейнер розглядається довільна опукла область, границя якої формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами (зокрема прямокутний паралелепіпед, куля, еліпсоїд, опуклий багатогранник, круговий циліндр).

Базова задача оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP). Упакувати набір еліпсоїдів в опуклий контейнер так, щоб цільова функція (об'єм, коефіцієнт гомотетії або одна з метричних характеристик контейнера) досягала свого мінімального значення.

Залежно від форми контейнера (прямокутний паралелепіпед, куля, еліпсоїд, опуклий багатогранник, круговий циліндр, довільна опукла область), обмежень на

орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання), особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, сфероїди, довільні) у дисертаційній роботі виділено три реалізації базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів:

упаковка однаково орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів (3DHEP) в контейнер мінімального розміру (прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму, еліпсоїд мінімального коефіцієнта гомотетії);

упаковка неорієнтованих еліпсоїдів обертання (3DEP) в контейнер мінімального розміру (прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму, циліндр мінімального коефіцієнта гомотетії);

упаковка неорієнтованих еліпсоїдів (3DAEP) у опуклий контейнер (границя якого формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами, зокрема, прямокутний паралелепіпед, циліндр, опуклий багатогранник, куля, еліпсоїд) мінімальних розмірів з урахуванням мінімально допустимих відстаней.

В роботі вперше побудовані засоби математичного моделювання для задач упаковки еліпсоїдів у вигляді нових класів ρ -функцій (псевдонормалізованих ρ -функцій), квазі ρ -функцій (псевдонормалізованих квазі ρ -функцій), які дозволяють в аналітичному вигляді описувати відношення неперетину еліпсоїдів, обмеження на мінімально допустимі відстані між еліпсоїдами та включення еліпсоїдів в контейнер з урахуванням орієнтації еліпсоїдів, особливостей їх метричних характеристик і форми контейнера.

Вперше побудована математична модель базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DBEP та математичні моделі її основних реалізацій (3DHEP, 3DEP, 3DAEP) у вигляді неперервних задач нелінійного програмування.

Набули подальшого розвитку методи розв'язання задач геометричного проектування, які, на відміну від існуючих підходів, дозволяють отримувати локально-оптимальні розв'язки для основних реалізацій базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів за прийнятний час. Це, зокрема, методи генерації стартових точок з області допустимих розв'язків та методи пошуку допустимих

розв'язків і локальних екстремумів, що, в свою чергу, використовують метод декомпозиції. Останній дозволяє звести задачу розмірності $O(N^2)$ з числом нерівностей $O(N^2)$ до послідовності задач нелінійного програмування з числом змінних $O(N)$ (для задач 3DEP та 3DAEP) і числом нерівностей $O(N)$, де N – кількість еліпсоїдів, які необхідно розмістити.

Використовуючи запропоновані в роботі засоби математичного моделювання, математичні моделі, методи та алгоритми, розроблено програмне забезпечення для розв'язання основних реалізацій задачі 3DBEP та проведено відповідні обчислювальні експерименти, отримано допустимі та локально-оптимальні розв'язки для різних видів контейнера.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес в Харківському національному університеті радіоелектроніки у курсі «Математичне і комп'ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень», застосовувались у дипломному проектуванні; використовуються в ІТ компанії Cloud Works у програмному забезпеченні для розв'язання задач упаковки об'єктів та під час розробки комп'ютерних ігор, де потрібно відстежувати взаємодію об'єктів, що мають форму еліпсоїдів; у дослідницьких програмах Мексиканського національного університету Nuevo Leon State University «Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks» та «National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems».

Достовірність отриманих у роботі результатів підтверджується коректністю постановки задачі, доведеннями відповідних тверджень, застосуванням конструктивних засобів математичного моделювання, надійних методів нелінійної і негладкої оптимізації та NLP-solvers, а також результатами обчислювальних експериментів для задач 3DNEP, 3DEP та 3DAEP у різних контейнерах.

Ключові слова: оптимальна упаковка, еліпсоїди, опуклий контейнер, мінімально допустима відстань, метод ϕ -функцій, математичне моделювання, нелінійна оптимізація.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions in packing of ellipsoids. *Radioelectronics & Informatics*. 2015. No.1 (68). P. 37–41.
2. Хлуд О. М., Суббота И. А., Романова Т. Е. Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и информатика*. 2015. № 3. С. 14–20.
3. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of approximated ellipsoids. *Control, navigation and communication systems*. 2016. No.3(39). P. 62–66.
4. Хлуд О. М., Романова Т. Е., Стецюк П. И. О двух задачах оптимальной упаковки гомотетических эллипсоидов. *Бионика интеллекта*. 2017. №1(88). С.29–35.
5. Khlud O. M., Yaskov G. N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No.6(46). P.131–135.
6. Pankratova Yu. Ye., Khlud O. M., Patsuk V. M. Packing of ellipsoids in a convex container. *Control, navigation and communication systems*. 2018. No.1(47). P.80–83.
7. Khlud O., Pankratov O., Romanova T. Development of the mathematical model and the method to solve a problem on the optimization of packing the ellipsoids into a convex container. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No.4(94). P. 51–58.
8. Суббота І. О., Яськов Г. М., Хлуд О. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доп. XXI всеукр. наук. конф. Львів*. 2015. С. 302–303.
9. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions of ellipsoids. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро*. 2015. С. 164–165.
10. Хлуд О. М. Математическая модель задачи упаковки эллипсоидов с

использованием квази- ϕ -функций. *Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов*. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2015. С.19.

11. Романова Т. Е., Стецюк П. И., Хлуд О. М. Задача упаковки гомотетичных эллипсоидов. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф.* Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 373–377.

12. Pankratov A., Romanova T, Khlud O. Packing of approximated ellipsoids into a cuboid of minimal volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф.* Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 274–278.

13. Хлуд О. М., Старосельский Е. Е. Метод решения задачи оптимальной упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума*. Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2016. Т. 7. С. 128–129.

14. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Хлуд О. М. Упаковка эллипсоидов и нелинейная оптимизация. *Информационные системы и технологии ИСТ-2016: тез. докл. 5-й междунар. науч.-техн. конф.* Харьков – Коблево. 2016. Т. 5. С. 128–129.

15. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов*. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2016. С.34.

16. Хлуд О. М., Омеляненко С. С. Математическое и компьютерное моделирование в задаче оптимальной упаковки эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума* Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2017. Т. 7. С. 112–113.

17. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Optimal packing of ellipsoids. *Problem of decision making under uncertainties: тез. докл. XXX междунар. конф.*

Вильнюс, Литва. 2017. С. 71.

18. Romanova T., Pankratov A., Khlud O. Optimal packing of ellipses and ellipsoids. *The 14th ESICUP Meeting*: тез. докл. 14-й междунар. конф. Льеж, Бельгия. 2017. С. 24.

19. Gil N., Pankratov A., Romanova T., Khlud O., Patsuk V. The optimization problem of packing ellipsoids into a convex container. *7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE 2017)*: тез. докл. 7-й междунар. конф. София, Болгария. 2017. С. 23.

20. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи оптимальной упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения*: Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2018. С.19.

21. Хлуд О. М., Старосельский Є. Є. Математична модель та метод розв'язання задачі оптимальної упаковки гомотетичних еліпсоїдів. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тез. докл. XXII междунар. молодеж. форума. Харьков Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2018. Т. 7. С. 102–103.

22. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of ellipsoids in a cylindrical container of minimum volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*: 6-я междунар. науч. конф. Кишинев, Молдова. 2018. С.161–163.

ABSTRACT

Khlud O. M. “Optimal ellipsoid packing problem: mathematical models and solution methods” – Qualifying scientific work as manuscript copyright.

A Thesis for a Candidate of Technical Sciences degree in the specialty 01.05.02 mathematical modeling and computational methods. – A. M. Pidgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, A. M. Pidgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The ellipsoid packing problems are NP-hard and have a wide spectrum of scientific and practical applications. In particular, in the contemporary biology, nuclear medicine, additive technologies, robotic technologies, thermodynamics, during the development of high-strength ceramic materials, crystals growing, modeling the liquids structure, moving and pressing solids, modeling of chromosomes placement in the nuclei of human cells. In each of the applications, different forms of containers are considered, and the ellipsoids have metric characteristics features and arbitrary orientation.

Currently, the ellipsoid packing problem remains insufficiently studied, since for a long period of time, the focus was on analyzing the ellipsoid packing density or modeling the relationship of two ellipsoids, without limiting them by containers, so the optimization procedure was not employed. Typically, heuristic algorithms are used to solve these problems. Some proposed mathematical models presented in the form of nonlinear programming problems have a large dimension such that state of the art local and global NLP-solvers can not find even feasible solutions for a reasonable time.

The least studied is the practically significant class of packing problems of ellipsoids, that allow continuous translations and rotations, in an arbitrary shaped convex containers.

The main issue is the complexity of the analytical description of the placement constraints including the non-overlapping ellipsoids and the containment of ellipsoids into the container, taking into account the minimum allowable distances.

In the two very recent papers, mathematical models of optimal ellipsoids packing

problem in the form of nonlinear programming problems have been proposed. However, the algorithms developed have complexity evaluation which is quadratic relative to the number of ellipsoids. In addition, only two types of containers are considered and restrictions on the minimum allowable distances are not taken into account.

Thus, the construction of mathematical models of optimal ellipsoids packing problems in arbitrary convex containers (including taking into account the minimum allowable distances) in the form of nonlinear programming problems (NLP -models) is important, such as the development of methods for their solution, which have a complexity estimate that is linear in relation to the number of ellipsoids. This determined the purpose of this thesis work.

The purpose of this work is to enhance the efficiency of solving of the ellipsoid packing problem by developing constructive tools of mathematical and computer modeling, mathematical models in the form of continuous problems of nonlinear programming, optimization methods with the use state of the art local and global NLP-solvers (software for solving the nonlinear programming problems).

The ellipsoid packing problem is considered in this paper in the following statement. We have a set of ellipsoids. Each ellipsoid assigned by its semi-axes. The ellipsoids may permit continuous rotation and translation.

An arbitrary convex region is considered as a container, whose boundary is formed by spherical, cylindrical, elliptic surfaces and planes (in particular, a cuboid, a sphere, an ellipsoid, a convex polytope, a cylinder).

Basic ellipsoid packing problem (3DBEP). Pack the set of ellipsoids within a convex container so that the objective function (volume, coefficient of similitude, one of the metrical characteristics of a container) reaches its minimum value.

Depending on the container shape (a cuboid, a sphere, an ellipsoid, a convex polyhedron, a cylinder, an arbitrary convex container), the restrictions on the orientation of ellipsoids (equally oriented, continuously rotated), the features of metrical characteristics of ellipsoids (homothetic, spheroid, arbitrary) in the thesis work formulated three realizations of the basic ellipsoid packing problem:

packing of equally oriented homotetic ellipsoids (3DHEP) into a container of

minimal size (cuboid of minimal volume, ellipsoid of minimum coefficient of homothety);

packing of ellipsoids of revolution (spheroids) (3DEP) into a container of minimal size (cuboid of minimal volume, cylinder of minimum coefficient of homothety);

packaging of non-oriented ellipsoids (3DAEP) into a convex container (whose boundary is formed by spherical, cylindrical, elliptical surfaces and planes, in particular, it is a cuboid, a cylinder, a convex polytope, a sphere, an ellipsoid) of minimal size, taking into account the minimum allowable distances.

For the first time mathematical modeling tools for the basic ellipsoid packing problem have been developed in the work in the form of new classes of phi-functions (adjusted phi-functions), quasi phi-functions (adjusted quasi phi-functions) for analytical description of the non-overlapping and containment constraints, minimum allowable distances, taking into account the orientation of the ellipsoids, the features of their metric characteristics and the shape of the container.

The mathematical model of the 3DBEP ellipsoid packing problem and mathematical models of its realizations (3DHEP, 3DEP, 3DAEP) in the form of NLP-problems have been constructed for the first time.

The methods of solving problems of geometric design for ellipsoids packing were further developed which, in contrast to the existing approaches, allow obtaining local-optimal solutions for realizations of the basic ellipsoid packing problem for a reasonable time. This is, in particular, the methods for generating feasible starting points and searching for feasible solutions and local minima, which, in turn, uses a decomposition method. The latter allows us reducing the problem of $O(N^2)$ dimension with the number of nonlinear inequalities $O(N^2)$ to the sequence of nonlinear problems of a smaller dimension $O(N)$ (for 3DEP and 3DAEP problems) with a fewer non-linear inequalities $O(N)$, where N is the number of ellipsoids that need to be placed.

Using the mathematical modeling tools, mathematical models, methods and algorithms proposed in the work, software was developed for solving each realization of the 3DBEP problem and appropriate computing experiments were carried out, feasible

and local-optimal solutions were obtained for different container types.

The results of the thesis work are implemented in the educational process of Kharkiv National University of Radioelectronics in the course “Mathematical and Computer Modeling in Decision Support Systems”, they were also used in diploma designing; used by Cloud Works IT company for solving objects packing problems and for development of computer games where it is necessary to monitor the interaction of ellipsoid-shaped objects; in research projects of the Mexican National University of Nuevo Leon State University “Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks” and the National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems.

The reliability of the results obtained in the work is confirmed by the reasoned statement of the problem, proof of the corresponding statements, the use of constructive tools of mathematical modeling, reliable methods of nonlinear optimization and NLP-solvers, as well as the results of computational experiments for 3DHEP, 3DEP and 3DAEP problems in different containers.

Key words: optimal packing, ellipsoids, convex container, minimum allowable distance, method of phi-functions, mathematical modeling, nonlinear optimization.

List of publications of the applicant

1. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions in packing of ellipsoids. *Radioelectronics & Informatics*. 2015. No.1 (68). P. 37–41.
2. Хлуд О. М., Суббота И. А., Романова Т. Е. Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и информатика*. 2015. № 3. С. 14–20.
3. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of approximated ellipsoids. *Control, navigation and communication systems*. 2016. No.3(39). P. 62–66.
4. Хлуд О. М., Романова Т. Е., Стецюк П. И. О двух задачах оптимальной упаковки гомотетических эллипсоидов. *Бионика интеллекта*. 2017. №1(88). С.29–35.
5. Khlud O. M., Yaskov G. N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No.6(46). P.131–135.
6. Pankratova Yu. Ye., Khlud O. M., Patsuk V. M. Packing of ellipsoids in a convex container. *Control, navigation and communication systems*. 2018. No.1(47). P.80–83.
7. Khlud O., Pankratov O., Romanova T. Development of the mathematical model and the method to solve a problem on the optimization of packing the ellipsoids into a convex container. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No.4(94). P. 51–58.
8. Суббота І. О., Яськов Г. М., Хлуд О. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доп. XXI всеукр. наук. конф. Львів*. 2015. С. 302–303.
9. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions of ellipsoids. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро*. 2015. С. 164–165.
10. Хлуд О. М. Математическая модель задачи упаковки эллипсоидов с

использованием квази- ϕ -функций. *Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов*. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2015. С.19.

11. Романова Т. Е., Стецюк П. И., Хлуд О. М. Задача упаковки гомотетичных эллипсоидов. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф.* Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 373–377.

12. Pankratov A., Romanova T, Khlud O. Packing of approximated ellipsoids into a cuboid of minimal volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф.* Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 274–278.

13. Хлуд О. М., Старосельский Е. Е. Метод решения задачи оптимальной упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума*. Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2016. Т. 7. С. 128–129.

14. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Хлуд О. М. Упаковка эллипсоидов и нелинейная оптимизация. *Информационные системы и технологии ИСТ-2016: тез. докл. 5-й междунар. науч.-техн. конф.* Харьков – Коблево. 2016. Т. 5. С. 128–129.

15. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов*. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2016. С.34.

16. Хлуд О. М., Омеляненко С. С. Математическое и компьютерное моделирование в задаче оптимальной упаковки эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума* Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2017. Т. 7. С. 112–113.

17. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Optimal packing of ellipsoids. *Problem of decision making under uncertainties: тез. докл. XXX междунар. конф.*

Вильнюс, Литва. 2017. С. 71.

18. Romanova T., Pankratov A., Khlud O. Optimal packing of ellipses and ellipsoids. *The 14th ESICUP Meeting*: тез. докл. 14-й междунар. конф. Льеж, Бельгия. 2017. С. 24.

19. Gil N., Pankratov A., Romanova T., Khlud O., Patsuk V. The optimization problem of packing ellipsoids into a convex container. *7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE 2017)*: тез. докл. 7-й междунар. конф. София, Болгария. 2017. С. 23.

20. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи оптимальной упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения*: Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2018. С.19.

21. Хлуд О. М., Старосельский Є. Є. Математична модель та метод розв'язання задачі оптимальної упаковки гомотетичних еліпсоїдів. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тез. докл. XXII междунар. молодеж. форума. Харьков Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2018. Т. 7. С. 102–103.

22. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of ellipsoids in a cylindrical container of minimum volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*: 6-я междунар. науч. конф. Кишинев, Молдова. 2018. С.161–163.

ЗМІСТ

	Ст.
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	5
ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕНЬ	18
1.1 Огляд публікацій, присвячених задачам оптимального розміщення еліпсів і еліпсоїдів	18
1.2 Огляд публікацій в рамках теорії геометричного проектування	22
1.3 Висновки по розділу 1	24
РОЗДІЛ 2 СТАН ПРОБЛЕМИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ	26
2.1 Математичне моделювання в геометричному проектуванні	26
2.1.1 Поняття ϕ -функції	26
2.1.2 Поняття квазі ϕ -функції	29
2.2 Постановка задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DBEP та її основні реалізації (3DHEP, 3DEP, 3DAEP)	32
2.3 Математична модель задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP) та її особливості	35
2.4 Висновки по розділу 2	37
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ОДНАКОВО ОРІЄНТОВАНИХ ГОМОТЕТИЧНИХ ЕЛІПСОЇДІВ (3DHEP)	38
3.1 Φ -функції для моделювання обмежень розміщення задачі 3DHEP	39
3.2 Математична модель задачі 3DHEP	45
3.3 Метод розв'язання задачі 3DHEP	46
3.3.1 Метод розв'язання з використанням методу мултистарту і спеціальної оптимізаційної процедури	46
3.3.2 Метод розв'язання зі зведенням до задачі безумовної мінімізації	53

3.4 Метод «доупаковки»	57
3.5 Висновки по розділу 3	58
РОЗДІЛ 4 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ НЕОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ ОБЕРТАННЯ (3DEP)	59
4.1 Φ -функції та квазі ρ -функції для моделювання обмежень розміщення в задачі 3DEP	61
4.2 Математична модель задачі 3DEP	71
4.3 Метод розв'язання задачі 3DEP	72
4.3.1 Метод побудови стартових точок для задачі 3DEP	73
4.3.2 Метод локальної оптимізації (3DLOFRT) для задачі 3DEP	75
4.4 Висновки по розділу 4	80
РОЗДІЛ 5 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ НЕОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ У ОПУКЛИЙ КОНТЕЙНЕР МІНІМАЛЬНОГО ОБ'ЄМУ (3DAEP)	81
5.1 Засоби математичного моделювання обмежень розміщення в задачі 3DAEP	83
5.1.1 Φ -функції для моделювання обмежень включення із застосуванням апроксимації еліпсоїда кулями	84
5.1.2 Φ -функція для моделювання обмежень включення із застосуванням апроксимації еліпсоїда опуклими багатогранниками	91
5.1.3 Засоби моделювання обмежень неперетину еліпсоїдів у задачі 3DAEP	95
5.2 Математична модель задачі 3DAEP	98
5.3 Метод розв'язання задачі 3DAEP	99
5.3.1 Метод пошуку допустимих параметрів розміщення (3DFPPA_E) для задачі 3DAEP	100
5.3.2 Метод локальної оптимізації (3DLOFRT) для задачі 3DAEP	102

5.4 Висновки по розділу 5	103
6 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ	104
6.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DHER	104
6.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DER	108
6.3 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DAEP	112
6.4 Аналіз результатів, отриманих для різних реалізацій	119
6.5 Результати обчислювальних експериментів для прикладних задач	120
6.6 Висновки по розділу 6	122
ВИСНОВКИ	123
Додаток А Список публікацій здобувача	126
Додаток Б Акт про використання результатів дисертації в навчальному процесі ХНУРЕ, акт про використання результатів досліджень та програмного забезпечення в ІТ компанії Cloud Works, лист-рекомендація про використання результатів досліджень в мексиканському університеті Nuevo Leon State University	128
Додаток В Код дослідницької програми «Optimal packing of ellipsoids»	131
Додаток Д Результати обчислювальних експериментів з розділу 6	135
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	150

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

3DBEP – (Basic Ellipsoids Packing Problem) базова задача оптимальної упаковки еліпсоїдів

3DNEP – (Basic Ellipsoids Packing Problem) задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів

3DEP – (Basic Ellipsoids Packing Problem) задача оптимальної упаковки неорієнтованих еліпсоїдів

3DAEP – (Basic Ellipsoids Packing Problem) задача оптимальної упаковки неорієнтованих еліпсоїдів в довільний опуклий контейнер з використанням апроксимацій

NLP-модель – математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування

NLP-solver – (Nonlinear Programing) «вирішувач» задач нелінійного програмування

$\mathbb{R}^\sigma$ – арифметичний евклідів простір розмірності σ

P – півпростір

$\Omega = \Omega(p)$ – опуклий контейнер

p – вектор змінних метричних характеристик контейнера

S – контейнер, що має форму кулі

B – контейнер, що має форму прямокутного паралелепіпеда

C – контейнер, що має форму циліндра

E – контейнер, що має форму еліпсоїда

K – контейнер, що має форму опуклого багатогранника

Λ – довільний опуклий контейнер, границя якого формується циліндричними, сферичними, еліптичними поверхнями або площинами

γ – коефіцієнт гомотетії контейнера

$I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ – індексна множина, що містить індекси еліпсоїдів

$i \in I_N$ – індекси еліпсоїдів

N – кількість еліпсоїдів

a_i, b_i, c_i – півосі еліпсоїда E_i

$u_i = (v_i, \theta_i)$ – вектор параметрів розміщення еліпсоїда E_i

$v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції еліпсоїда E_i

$\Theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3)$ – вектор кутів повороту еліпсоїда E_i

$\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3$ – кути Ейлера

$M(\Theta_i)$ – матриця повороту еліпсоїда E_i

τ – вектор додаткових змінних для побудови квазі phi-функцій

$|\tau_1|$ – кількість додаткових змінних для квазі phi-функцій, що описують неперетин еліпсоїдів

$|\tau_2|$ – кількість додаткових змінних для квазі phi-функцій, що описують включення еліпсоїдів у контейнер

$\zeta(p, u_1, \dots, u_N) \geq 0$ – система обмежень на змінні метричні характеристики контейнера Ω

λ_i – коефіцієнт гомотетії еліпсоїда E_i

$\hat{E}_i(u_i)$ – об'єкт, що апроксимує еліпсоїд E_i кулями

S_{ik} – k -та куля, що бере участь у апроксимації еліпсоїда E_i

Δ – похибка апроксимації еліпсоїда E_i кулями

$\hat{E}_i(u_i)$ – опуклий багатогранник, який апроксимує еліпсоїд E_i

SPA – (Starting Point Algorithm) алгоритм пошуку допустимих стартових точок

FAPA_E – (Feasible Auxiliary Parameters Algorithm) алгоритм генерації допустимих параметрів розміщення в задачі 3DAEP

3DLOFRT – метод пошуку локально-оптимальних розв'язків з переходом від задачі великої розмірності (для задач 3DEP, 3DAEP) з великою кількістю квадратичних нерівностей до послідовності задач меншої розмірності (для задач 3DEP, 3DAEP) та меншою кількістю квадратичних нерівностей.

$F(u)$ – цільова функція

W – область допустимих розв'язків

Ω^* – доповнення до контейнера Ω

$\Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j)$ – phi-функція для опису неперетину еліпсоїдів

$\Phi^{E_i \Omega^*}(u_i)$ – phi-функція для гомотетичних еліпсоїдів і доповнення до контейнера, $\Omega \in \{\mathbf{B}, \mathbf{E}\}$

$\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij})$ – квазі phi-функція для неорієнтованих еліпсоїдів обертання

u'_{ij} – вектор додаткових змінних для побудови квазі phi-функції для неперетину еліпсоїдів

u'_i – вектор додаткових змінних для побудови квазі phi-функції для включення еліпсоїда в прямокутний паралелепіпед

ε – шаг ітерації у методі 3DLOFRT

Ξ_1^k – індексна множина, що містить індекси тих пар еліпсоїдів, чиї індивідуальні контейнери перетинаються.

Ξ_2^k – індексна множина, що містить індекси тих еліпсоїдів, чиї індивідуальні контейнери перетинаються з границею контейнера.

IPOPT – (Interior Point Optimization) солвер для пошуку локально-оптимальних розв’язків задач нелінійного програмування з використанням методу внутрішньої точки

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний світ потребує створення нових прогресивних технологій, що ґрунтуються на високому рівні математичного та комп'ютерного моделювання.

Теорія дослідження операцій, інформатика, комп'ютерні науки, менеджмент, математика – наукові інструменти, які мають важливе методологічне значення для моделювання реальних топологічних та економічних процесів під час створення технічних систем, пов'язаних з обробкою складної геометричної інформації. Фундаментальним дослідженням різних аспектів цих комплексних дисциплін, в тому числі методів оптимізації, математичного програмування, дискретної математики, штучного інтелекту, присвячені роботи відомих українських вчених: Михалевича В.С., Сергієнка І.В., Шора Н.З. Рвачова В.Л., Пшеничного Б.М., Єрмольєва Ю.М., Бублика Б.М., Стояна Ю.Г., Ющенко К.Л., Перевозчикової О.Л., Ляшенка І.М., Ляшка С.І., Крака Ю.В., Шевченка Г.М., Стецюка П.І., Жолткевича Г.М., Бідюка П.І., Кісельової О.М., Базилевича Р.П., Рубльова Б.В.

Теорія геометричного проектування вивчає ряд фундаментальних та прикладних проблем, які направлені на реалізацію ідеї математичного моделювання процесу розміщення реальних об'єктів та створення ефективних методів оптимізації цього процесу відповідно до заданих критеріїв оптимальності.

Задачі геометричного проектування виникають у багатьох різних сферах людської діяльності, галузях науки і техніки та полягають у пошуку оптимального розміщення багатьох геометричних об'єктів відносно області розміщення за наявності заданих технологічних обмежень та критеріїв якості розміщення.

Оптимізаційні задачі геометричного проектування належать до класу *NP*-повних задач. Зниження складності розв'язання задач даного класу через створення конструктивних засобів побудови адекватних математичних моделей у вигляді, що дозволяє застосувати до розв'язання задачі відомі методи локальної та глобальної оптимізації, є актуальною проблемою. Тому необхідно продовжувати дослідження в області створення нових сучасних засобів математичного моделювання відношень геометричних об'єктів.

Задачі упаковки належать до класу *NP*-складних та є предметом досліджень обчислювальної геометрії, в той час як методи їх розв'язання є досить новою галуззю теорії дослідження операцій.

Міжнародна організація ESICUP (EURO Special Interest Group on Cutting and Packing) об'єднує провідних учених всього світу, дослідження яких присвячено класу задач упаковки та розкрою, у тому числі слід відмітити Dyckhoff Н.,

Wascher G., Scheithauer G., Bortfeldt A. (Germany), Bennell J., Burke E., Kendall G. (UK), Oliveira J., Gomes M. (Portugal), Daniels K., Pinter J. (USA), Birgin E. (Brasil), Fasano G. (Italy), Alvarez-Valdes R. (Spain), Hifi M. (France).

Цей клас задач має широкий спектр наукових і практичних застосувань в сучасній біології, мінералогії, матеріалознавстві, нанотехнології, робототехніці, системах розпізнавання образів, в хімічній промисловості, машинобудуванні, будівництві тощо.

Задачі упаковки еліпсоїдів виникають під час розробки високоміцних керамічних матеріалів, вирощування кристалів, під час комп'ютерного моделювання структури рідин, кристалів і скла, руху і пресування сипучих речовин, у термодинаміці для моделювання процесу переходу рідин у кристалічну форму, в сучасній біології під час моделювання розміщення хромосом в ядрах людських клітин, у ядерній медицині для виробництва ліків, в адитивних технологіях (3D printing) з метою оптимізації геометрії промислових виробів, у робототехніці для моделювання руху та взаємодії частин роботів та у багатьох інших галузях науки і техніки.

На сьогодні задача оптимальної упаковки еліпсоїдів залишається недостатньо дослідженою, оскільки тривалий час основна увага приділялась аналізу щільності упаковки еліпсоїдів. Тому в процесі моделювання еліпсоїди не обмежували контейнерами, як наслідок, оптимізаційні процедури не застосовувалися.

В останні два десятиріччя з'явилися роботи Uhler C., Wright S.J., Kallrath J., Birgin E., Lobato R.D., Martinez J.M., Lind P.G., які присвячені задачам упаковки еліпсоїдів в контейнері, що оптимізується. Для розв'язання задач автори використовують як евристичні алгоритми, так і математичні моделі у вигляді задач нелінійного програмування (NLP-моделі).

Однак у публікаціях зазвичай розглядаються контейнери, які мають форму прямокутного паралелепіпеда або кулі, та не враховуються допустимі відстані між еліпсоїдами, що значно звужує клас практичних задач, що можуть бути успішно розв'язані з використанням сучасних комп'ютерних технологій. Крім того,

запропоновані оптимізаційні алгоритми мають оцінку, яка є квадратичною по відношенню до кількості еліпсоїдів, що часто призводить до неможливості застосування сучасних NLP-solvers (програмне забезпечення для розв'язання задач нелінійного програмування).

Наскільки відомо, тільки в трьох недавніх роботах формулюються задачі упаковки еліпсів як задачі нелінійного програмування. В роботі J. Kallrath, S. Rebennack запропонована модель нелінійного програмування, яка гарантує неперетин еліпсів за допомогою відокремлювальних прямих, розглянуто задачу мінімізації площі прямокутного контейнера, що вміщує заданий набір еліпсів, які допускають обертання. У роботі Стояна Ю.Г., Панкратова О.В., Романової Т.Є. розв'язується задача розміщення набору довільних еліпсів в прямокутному контейнері мінімальної площі. Задача упаковки максимального числа однакових еліпсів всередині прямокутника за умови, що осі еліпсів є паралельними сторонам прямокутника, розглянута в роботі Sh.I. Galiev, M.S. Lisafina.

Задача упаковки еліпсоїдів була сформульована у вигляді задачі нелінійного програмування лише у двох роботах: Kallrath J. (2017) та Birgin E. G., Lobato, R. D., Martinez J. M. (2016). Однак запропоновані методи мають оцінку, що є квадратичною по відношенню до кількості еліпсоїдів. Крім того, у роботах розглянуто лише контейнери, що мають форму прямокутного паралелепіпеда або кулі.

Отже, створення засобів математичного та комп'ютерного моделювання відношень еліпсоїдів, побудова NLP-моделей, що враховують орієнтацію та особливості метричних характеристик еліпсоїдів, форму контейнера і обмеження на допустимі відстані, та розробка ефективних алгоритмів розв'язання задач оптимальної упаковки еліпсоїдів, які дозволять отримувати локально-оптимальні та допустимі розв'язки за прийнятний час із застосуванням сучасних NLP-solvers, є актуальними.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень, які проводяться в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України і пов'язані з розробкою засобів і методів математичного та комп'ютерного

моделювання оптимальної упаковки неорієнтованих еліпсоїдів в контейнер. Зокрема, дана дисертаційна робота є розвитком на 3D-випадок засобів, моделей та методів, запропонованих у роботі [1] Суботи І. О. для еліпсів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в період з 2015 р. по 2018 р. у відділі математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України відповідно до планів науково-технічних робіт з держбюджетних тем «Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач розміщення об'єктів довільних просторових форм» (2012–2016 рр. № ДР 0112U002488), «Розробка математичних моделей та комп'ютерних технологій розв'язання оптимізаційних задач компонування тривимірних об'єктів» (2017–2018 рр. № ДР 0117U000877).

Мета і задача дослідження. Метою роботи є підвищення ефективності розв'язання задач оптимальної упаковки еліпсоїдів у опуклий контейнер завдяки розробці конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання, NLP-моделей, методів пошуку допустимих та локально-оптимальних розв'язків із застосуванням сучасних NLP-solvers.

Для досягнення цієї мети залежно від

- обмежень на орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання);
 - особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, еліпсоїди обертання (сфероїди), довільні);
 - форми контейнера, границя якого формується сферичними, еліптичними, циліндричними поверхнями та площинами (зокрема: прямокутний паралелепіпед, круговий циліндр, опуклий багатогранник, куля, еліпсоїд);
 - обмежень на допустимі відстані між еліпсоїдами;
- поставлені такі наукові задачі:

1) Сформулювати базову задачу оптимальної упаковки еліпсоїдів в довільний опуклий контейнер, границя якого формується сферичними, еліптичними, циліндричними поверхнями і площинами, з урахуванням обмежень на допустимі відстані між еліпсоїдами (надалі 3DBEP – Basic Ellipsoid Packing Problem).

2) Розробити засоби математичного моделювання обмежень розміщення (неперетин еліпсоїдів, включення еліпсоїдів в контейнер, мінімально допустимі відстані) у вигляді таких класів:

- а) ϕ -функцій (псевдонормалізованих ϕ -функцій);
- б) квазі ϕ -функцій (псевдонормалізованих квазі ϕ -функцій).

3) Побудувати математичну модель задачі 3DBEP та математичні моделі основних реалізацій базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів у вигляді NLP- задач в залежності від

- а) форми контейнера (опуклий, границя якого формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами, зокрема: прямокутний паралелепіпед, круговий циліндр, опуклий багатогранник, куля, еліпсоїд);
- б) обмежень на орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання);
- в) особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, еліпсоїди обертання, довільні);
- г) обмежень на мінімально допустимі відстані між еліпсоїдами.

4) Розробити стратегію розв'язання базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів та її основних реалізацій.

5) Розробити алгоритми пошуку допустимих стартових точок та локально-оптимальних розв'язків для задач упаковки:

- а) гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів в контейнер (прямокутний паралелепіпед, еліпсоїд) мінімального об'єму;
- б) неорієнтованих еліпсоїдів обертання в контейнер (прямокутний паралелепіпед, циліндр) мінімальних розмірів;

в) неорієнтованих еліпсоїдів у довільний опуклий контейнер мінімальних розмірів, границя якого формується сферичними, еліптичними, циліндричними поверхнями та площинами.

б) Створити програмне забезпечення для розв'язання основних реалізацій базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

Об'єкт дослідження – процес оптимальної упаковки еліпсоїдів з урахуванням їх неперервних обертань.

Предмет дослідження – засоби математичного моделювання, математичні моделі та методи розв'язання задач оптимальної упаковки еліпсоїдів.

Методи дослідження. У роботі для побудови ρ -функцій (псевдонормалізованих ρ -функцій), квазі ρ -функцій (псевдонормалізованих квазі ρ -функцій) використано аналітичну геометрію; для побудови математичних моделей – методи геометричного проектування; для розробки методів пошуку допустимих стартових точок та локально-оптимальних розв'язків – методи геометричного проектування, методи нелінійного програмування і негладкої оптимізації.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в такому:

Вперше побудовано засоби математичного моделювання для задач упаковки еліпсоїдів у вигляді нових класів ρ -функцій (псевдонормалізованих ρ -функцій), квазі ρ -функцій (псевдонормалізованих квазі ρ -функцій), які дозволяють в аналітичному вигляді описувати відношення неперетину еліпсоїдів, включення еліпсоїдів в контейнер з урахуванням форми контейнера, орієнтації еліпсоїдів, особливостей їх метричних характеристик та обмежень на мінімально допустимі відстані між еліпсоїдами:

– побудовано клас ρ -функцій для гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів обертання як засіб математичного моделювання відносин неперетину еліпсоїдів і включення еліпсоїдів в контейнер (прямокутний паралелепіпед, еліпсоїд);

– побудовано клас квазі ρ -функцій для аналітичного опису відношень неперетину еліпсоїдів обертання та їх включення в контейнер (прямокутний

паралелепіпед) з урахуванням неперервних обертань і гомотетичних перетворень еліпсоїдів;

- побудовано класи псевдонормалізованих ϕ -функцій та псевдонормалізованих квазі ϕ -функцій для аналітичного опису відношень неперетину неорієнтованих еліпсоїдів з урахуванням обмежень на мінімально допустимі відстані.

Вперше побудовано математичні моделі задач упаковки еліпсоїдів в контейнер (прямокутний паралелепіпед, опуклий багатогранник, куля, еліпсоїд, циліндр) мінімальних розмірів (відповідних метричних характеристик) у вигляді задач нелінійного програмування:

- побудована базова математична модель задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP) у вигляді задачі нелінійного програмування;

- побудована математична модель задачі упаковки однаково орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів обертання в контейнер (прямокутний паралелепіпед, еліпсоїд) мінімальних розмірів (об'єму, коефіцієнту гомотетії) у вигляді задачі нелінійного програмування;

- побудована математична модель задачі упаковки неорієнтованих еліпсоїдів обертання в контейнер (прямокутний паралелепіпед, циліндр) мінімальних розмірів (об'єму, коефіцієнту гомотетії) у вигляді задачі нелінійного програмування;

- побудована математична модель задачі упаковки неорієнтованих еліпсоїдів в довільний опуклий контейнер (границя якого формується сферичними, еліптичними, циліндричними поверхнями та площинами) мінімальних розмірів (об'єм, коефіцієнт гомотетії або одна з метричних характеристик контейнера) у вигляді задачі нелінійного програмування.

Набули подальшого розвитку методи розв'язання задач геометричного проектування для задачі 3DBEP з використанням методів нелінійного програмування і негладкої оптимізації, які, на відміну від існуючих підходів, дозволяють отримувати допустимі та локально-оптимальні розв'язки за прийнятний час:

- розроблені методи генерації стартових точок з області допустимих розв’язків для всіх реалізацій задачі 3DBEP;
- розроблені методи пошуку локально-оптимальних і допустимих розв’язків, що враховують обмеження на орієнтацію еліпсоїдів, особливості їх метричних характеристик і форму контейнера та мають оцінку, яка є лінійною відносно кількості еліпсоїдів.

Практичне значення отриманих результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання та обчислювальних методів в геометричному проектуванні. Створено нові засоби математичного та комп’ютерного моделювання, математичні моделі, розроблено ефективні методи та алгоритми розв’язання оптимізаційних задач упаковки еліпсоїдів, що дозволяє застосовувати для розв’язання розглянутого класу задач сучасні локальні і глобальні NLP-solvers та отримувати допустимі і локально-оптимальні розв’язки за прийнятний час.

Світовий рівень розроблених засобів математичного моделювання, моделей та методів розв’язання підтверджується публікаціями в міжнародних журналах та фахових виданнях України і апробацією на міжнародних конференціях.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки у курсі «Математичне і комп’ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень»; використовуються в ІТ компанії Cloud Works у програмному забезпеченні для розв’язання задач упаковки об’єктів та під час розробки комп’ютерних ігор, де потрібно відстежувати взаємодію об’єктів, що мають форму еліпсоїдів; у дослідницьких програмах Мексиканського державного університету Nuevo Leon State University «Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks» та «National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems» (дод. Б).

Моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, які запропоновано в дисертаційній роботі, використано в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під час

виконання держбюджетних тем у період з 2015р. по цей час.

Особистий внесок здобувача в роботах, які виконані в співавторстві: [3,6,9,12,14,20,22] – ϕ -функції для аналітичного опису відношень гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів, математична модель та метод розв’язання задачі упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів з використанням методів нелінійного програмування, обчислювальні експерименти; [5] – метод доупаковки для задачі оптимальної упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів, математична модель та методи розв’язання задачі з використанням нелінійного програмування та негладкої оптимізації; [2,10,15,17,18,19,20,23] – квазі ϕ -функція для аналітичного опису відношень неорієнтованих еліпсоїдів обертання; [2,10,15,17,18,19,20,23] – NLP-модель, методи пошуку допустимих стартових точок, метод декомпозиції для пошуку локально-оптимальних розв’язків задачі упаковки неорієнтованих еліпсоїдів обертання у прямокутний паралелепіпед або циліндр; [4,7,8,13,21] – ϕ -функції, псевдонормалізовані ϕ -функції, псевдонормалізовані квазі ϕ -функції для моделювання відношень неперетину неорієнтованих еліпсоїдів з урахуванням обмежень на мінімально допустимі відстані, відношень включення еліпсоїдів у довільний опуклий контейнер з використанням апроксимації еліпсоїдів опуклими багатогранниками або кулями, NLP-модель для задач упаковки неорієнтованих еліпсоїдів у довільний опуклий контейнер, метод генерації стартових точок, метод декомпозиції для пошуку допустимих розв’язків, обчислювальні експерименти.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися і отримали схвалення на міжнародних конференціях і наукових семінарах:

- конференції молодих учених і фахівців «Сучасні проблеми машинобудування» ІПМаш НАН України (Харків, Україна, 2015, 2016, 2018 рр.);
- міжнародному молодіжному форумі «Радіoeлектроніка і молодь в XXI столітті» (Харків, Україна, 2015, 2016, 2017, 2018 рр.);
- XXI всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми

прикладної математики та інформатики» (Львів, Україна, 2015 р.);

– XIII міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпро, Україна, 2015 р.);

– міжнародній науковій конференції «Математичне моделювання, оптимізація і інформаційні технології» (Кишинів, Молдова 2016, 2018 рр.);

– 5-й міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи і технології» (Коблеве, Україна, 2016 р.);

– 7-й міжнародній конференції «Застосування інформаційних і комунікаційних технологій і статистики в економіці і освіті» (Софія, Болгарія, 2017 р.);

– XXX міжнародній конференції «Проблеми ухвалення рішень в умовах невизначеності» (Вільнюс, Литва, 2017 р.);

– 14-й міжнародній конференції «ESICUP meeting» (Льєж, Бельгія, 2017 р.);

– семінарі відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, (Київ, 2018 р.).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 22 наукові праці, в тому числі: 7 статей у спеціалізованих виданнях, затверджених ДАК МОН України: [2–8], 15 тез доповідей на міжнародних і молодіжних наукових конференціях: [9–23].

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

В даному розділі проводиться аналіз літературних джерел, присвячених розв'язанню задач оптимального розміщення геометричних об'єктів. Проводиться детальний огляд публікацій, присвячених математичному моделюванню і методам розв'язання задач оптимального розміщення еліпсоїдів. Визначаються напрями досліджень.

1.1 Огляд публікацій, присвячених задачам оптимального розміщення еліпсів і еліпсоїдів

Задача упаковки еліпсоїдів є предметом інтенсивних теоретичних і практичних досліджень. Незважаючи на те, що у багатьох роботах розглядалась задача упаковки куль, наприклад [24–28], задачі упаковки еліпсоїдів приділялось більше уваги тільки в останні кілька років. Ця задача виникає у багатьох практичних додатках, таких, як розробка високоміцних керамічних матеріалів, вирощування кристалів [29, 30], моделювання структури рідин, кристалів і скла, моделювання руху і пресування сипучих речовин [31–33], у термодинаміці під час моделювання переходу рідин в кристалічну форму [34, 35], у нанотехнологіях, хімічній промисловості, сучасній біології під час моделювання розміщення хромосом в ядрах людських клітин [36], в ядерній медицині під час виробництва ліків, в адитивних технологіях з метою оптимізації геометрії промислових виробів, а також у робототехніці під час моделювання руху та взаємодії частин роботів та у багатьох інших галузях науки і техніки.

Щільність тривимірної упаковки еліпсоїдів аналізується в [37]. Експерименти проводилися безпосередньо в компанії M&M's Milk Chocolate

Candies (zareєстрована торгова марка Mars, Inc). У [38] запропоновано імітаційний метод, узагальнюючий алгоритм стиснення Lubachevsky-Stillinger. Обидва підходи дозволяють проводити експерименти з великою кількістю еліпсоїдів.

В роботах [38, 39] проведено моделювання випадкової упаковки еліпсоїдів і досліджується щільність упаковки. Показано, що щільність випадкової упаковки шоколадних цукерок M&Ms становить 68%, що на 4% більше щільності сферичної упаковки. Встановлено, що щільність упаковки залежить від співвідношення осей. Для еліпсоїдів з співвідношенням осей 1.25:1:0.5 щільність зазначеної упаковки наближається до щільності кристалічної. За допомогою комп'ютерного моделювання випадкових упаковок еліпсоїдів отримано упаковки з щільністю заповнення, що наближається до максимальної щільності сферичної упаковки, що приблизно дорівнює 74% простору. Автори припускають, що більш висока щільність безпосередньо пов'язана з більшою кількістю ступенів свободи і, відповідно, з більшою кількістю контактів частинок, необхідних для механічної стабілізації упаковки.

Відтоді як основним предметом дослідження став аналіз щільності “*jammed disordered packings*”, під час моделювання не обмежували еліпсоїди контейнером (тільки їх центри повинні належати певним областям). Через це оптимізаційні процедури не використовувалися. В [40] обґрунтовано метод комп'ютерного моделювання, узагальнюючий алгоритм “*force-biased*”, за допомогою якого статистично досліджується геометрична структура довільної упаковки сфероїдів. В роботі [41] розглянуто задачу моделювання колізії руху (зіткнення) еліпсоїдів.

Моделюванню відношення неперетину пари еліпсоїдів присвячена робота [42]. Автори розглядають апроксимацію еліпсоїда перетином двох куль та використовують дві прямі та чотири “анти-точки” для забезпечення неперетину пари апроксимованих об'єктів.

Задача, що пов'язана з розміщенням хромосом в ядрі людської клітини, належить до класу задач упаковки еліпсоїдів і розглядається в [36]. Задача полягає в мінімізації міри сумарного перекриття вхідного упорядкованого набору еліпсоїдів всередині заданого еліптичного контейнера. У роботі запропонована складна дворівнева програмна модель, в якій задачею нижнього рівня є задача напіввизначеного програмування. Особливістю цієї роботи є те, що оптимізаційна задача розв'язується для контейнера, що має форму еліпсоїда. Але у задачі не було розглянуто засобів моделювання, що дозволили б забезпечити аналітичний опис неперетину еліпсоїдів між собою.

У [43] розглядається задача послідовної упаковки еліпсоїдів з використанням варіаційних методів. Запропонований у роботі алгоритм включає дві варіаційні процедури, перша з яких реалізує переміщення орієнтованого еліпсоїда доки він не торкнеться іншого еліпсоїда, а друга застосовує обертання еліпсоїдів для пошуку точок контакту з сусідніми еліпсоїдами.

Аналіз публікацій показав, що тільки в п'яти недавніх роботах (2015–2017 рр.) задачі упаковки еліпсів та еліпсоїдів в прямокутний контейнер формуються у вигляді задач нелінійного програмування (NLP) і використовуються оптимізаційні алгоритми розв'язання.

Задача упаковки максимальної кількості однакових еліпсів всередині прямокутника за умови, що осі еліпсів паралельні сторонам прямокутника, розглянута в [44]. Довільним чином (за допомогою сітки) визначається набір точок $\{T\}$ і центри еліпсів поєднують з точками із $\{T\}$. У роботі розроблена змішана модель цілочисельного і лінійного програмування та запропоновано евристичний алгоритм. Наведено результати обчислювальних експериментів з кількістю до 45 еліпсів, які отримано за допомогою точного комерційного солвера.

Задача мінімізації площі прямокутного контейнера, що вміщує заданий

набір (не обов'язково однакових) еліпсів обертання, обговорюється в [45]. Запропоновано модель нелінійного програмування, яка гарантує неперетин еліпсів, визначаючи відокремлювальні прямі. З метою пошуку глобального мінімуму запропонованої моделі введено обмеження, що порушують симетрію (symmetry-breaking), та розроблено альтернативну змішану модель цілочисельного нелінійного програмування. Наведений в [45] аналіз обчислювальних експериментів дозволяє зробити висновок, що сучасні програмні засоби глобальної оптимізації BARON [46], LindoGlobal [47] і GloMIQO [48], доступні в GAMS, виявилися нездатними знайти глобальний розв'язок для прикладів з більш ніж 4 еліпсами (у разі обмеження процесорного часу 5 годин). Для прикладів в [45] запропоновано евристичний метод і наведено результати обчислювальних експериментів (до 100 еліпсів).

Задача розміщення заданого набору еліпсів в прямокутному контейнері мінімальної площі розглядається в [49]. Запропонована модель нелінійного програмування використовує квазі ϕ -функції, які є розширенням класу ϕ -функцій, що широко застосовується під час моделювання у багатьох задачах упаковки (наприклад, [25–28] і посилання в них). За допомогою комбінації методу мултистарту і локального NLP-солверу розв'язано приклади для значної кількості еліпсів (до 120).

У [50] підхід, запропонований в [25] для упаковки еліпсів в прямокутний контейнер мінімальної площі, розширено для розв'язання задачі упаковки еліпсоїдів в контейнер-паралелепіпед мінімального об'єму. Автор пропонує неопуклу NLP-модель, в основі якої лежать математичні підходи для опису руху (трансляції та обертання) еліпсоїдів. У роботі висунуто припущення, що елементи матриці обертання є змінними. Для того щоб впевнитися, що еліпсоїди не перетинаються, використано відокремлювальні гіперплощини. Наведено приклади для 100 еліпсоїдів, але, як і в двовимірному випадку [25], сучасні програмні засоби глобальної оптимізації, доступні всередині GAMS, не

здатні знайти оптимальні розв'язки, тому в роботі отримано тільки допустимі. У [50] розглянуто одну форму контейнера. До проблемної частини даної роботи можна віднести те, що кількість додаткових змінних в моделі є квадратичною відносно кількості еліпсоїдів.

В роботі [51] наведені неперервні та диференційовні моделі нелінійного програмування та алгоритми упаковки еліпсоїдів у n -вимірному просторі. Запропоновано дві моделі для опису обмежень неперетину еліпсоїдів та моделі для включення еліпсоїдів у кулю та прямокутний паралелепіпед. Стратегія мультистарту поєднується з програмними засобами для пошуку локальних розв'язків задач нелінійного програмування для двох видів контейнерів.

1.2 Огляд публікацій в рамках теорії геометричного проектування

Дисертаційна робота є продовженням досліджень, які проводяться у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України в рамках теорії геометричного проектування під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна. В роботі [52] наводиться детальний огляд історії та напрями розвитку теорії геометричного проектування.

В рамках теорії геометричного проектування для аналітичного опису взаємодії геометричних об'єктів в науковій школі професора Ю. Г. Стояна розроблено конструктивний математичний апарат функції щільного розміщення [53, 54]. В роботі [55] запропоновано поняття годографа функції щільного розміщення, який є основою методології послідовно-одиначного розміщення. Цей підхід в [56, 57] використано для знаходження наближення до локальних екстремумів в задачі нерегулярного розміщення об'єктів. Багатовимірність задачі викликала необхідність перебору одержуваних наближень [58]. Поняття геометричної інформації, метричні характеристики і

просторові форми геометричних об'єктів досліджено в роботах [59, 50]. В [61] введено поняття ϕ -об'єкта, який є алгебро-топологічною моделлю реальних об'єктів. Поняття ϕ -функції для пари ϕ -об'єктів дозволило побудувати математичну модель основної задачі геометричного проектування, формалізувати відношення взаємного неперетину пари геометричних об'єктів і відношення належності розміщеного об'єкта області розміщення. Це визначення поклало початок дослідженням в області математичного моделювання задач розміщення.

З появою апарату структур лінійних нерівностей стало можливим формулювання задачі розміщення як задачі математичного програмування [62]. Це дозволило використовувати розроблені в рамках теорії математичного програмування підходи як основу для розробки методів розв'язання. Застосування сучасних обчислювальних засобів розв'язання оптимізаційних задач теорії дослідження операцій до предметної області задач геометричного проектування стимулювало появу робіт, в яких, зокрема, розглядалися підходи до побудови аналітичних моделей задач розміщення неопуклих орієнтованих і неорієнтованих багатокутників [63, 64].

На сьогодні теорія ϕ -функцій отримала значного розвитку для 2D-об'єктів [65–74] і для 3D-об'єктів [75–79]. На базі побудованих засобів математичного моделювання відношень між геометричними об'єктами побудовано математичні моделі та запропоновано методи розв'язання 2D та 3D оптимізаційних задач розміщення [80–87].

Важливим кроком у розвитку теорії геометричного проектування є введення поняття квазі ϕ -функції [34, 89]. Універсальним способом побудови квазі ϕ -функції є використання відокремлювальних прямих [56, 90]. Застосування квазі ϕ -функцій дозволило спростити математичну модель і формалізувати відносини об'єктів, для яких не вдавалося побудувати ϕ -функції.

У рамках наукової школи Ю. Г. Стояна розробці математичних моделей та методів розв'язання задач упаковки та розкрою присвячено роботи багатьох його учнів, зокрема Гіля М. І., Комяк В. М., Яковлева С. Я., Ємця О. О., Новожилової М. В., Романової Т. Є., Панкратова О. В., Гребенніка І. В., Пацука В. М., Яськова Г. М., Чугая А. М. Оптимізаційним задачам упаковки еліпсів та еліпсоїдів присвячено публікації Гіля М. І., Панкратова О. В., Романової Т. Є., Комяк В. М., Пацука В. М., Суботи І. О.

Однак відкритим залишається питання розв'язання задач оптимальної упаковки еліпсоїдів у опуклий контейнер з урахуванням орієнтації еліпсоїдів, особливостей їх метричних характеристик та обмежень на мінімально допустимі відстані між еліпсоїдами, форми контейнера та виду цільової функції.

1.3 Висновки по розділу 1

Аналіз наукової літератури за темою дисертаційної роботи показав, що найменш вивченим є практично значущий клас задач упаковки еліпсоїдів з урахуванням їх гомотетичних перетворень, неперервних обертань і трансляцій, обмежень на допустимі відстані у опуклих контейнерах різної форми.

Для більшості практичних задач оптимального розміщення неорієнтованих еліпсоїдів, як правило, використовуються евристики, що робить неможливим застосування методів локальної та глобальної оптимізації для їх розв'язання. Деякі запропоновані математичні моделі задач, що наведені у вигляді задач нелінійного програмування, мають настільки велику розмірність, що сучасні програмні засоби глобальної оптимізації нездатні знайти навіть допустимі розв'язки за прийнятний час.

Отже, відкритим залишається питання розробки сучасних комп'ютерних технологій для оптимізації упаковки еліпсоїдів у довільних опуклих

контейнерах з урахуванням форми контейнера, обмежень на орієнтацію та особливостей метричних характеристик еліпсоїдів і обмежень на допустимі відстані. Через це виникла об'єктивна необхідність у розробці конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання відношень еліпсоїдів, побудові NLP-моделей та створенні ефективних методів розв'язання оптимізаційних задач упаковки еліпсоїдів (які мають оцінку, яка є лінійною щодо кількості еліпсоїдів), що і визначило тему дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

СТАН ПРОБЛЕМИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У другому розділі в рамках теорії геометричного проектування формулюються основні положення, необхідні для побудови конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання відношень між геометричними об'єктами, що виникають в задачах оптимальної упаковки еліпсоїдів. Розглядається визначення ϕ -функції і наводяться основні її властивості. Висвітлюється поняття квазі ϕ -функції. Обґрунтовується необхідність створення класів ϕ -функцій і квазі ϕ -функцій, необхідних для побудови математичних моделей задач оптимального розміщення еліпсоїдів. Формулюється базова задача оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DBEP та виділяються її основні реалізації. Будується математична модель базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів у вигляді задачі нелінійного програмування. Пропонується стратегія розв'язання базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

2.1 Математичне моделювання в геометричному проектуванні

2.1.1 П о н я т т я ϕ - ф у н к ц і ї. Як математичні моделі матеріальних об'єктів у класі задач геометричного проектування розглядаються ϕ -об'єкти [66] – непусти точкові множини $T \subset \mathbb{R}^3$, які задовольняють такі вимоги: T – канонічно замкнута множина [95]; в будь-якій точці $x \in \text{cl} T$ $U_x \subset \text{cl} T$, тобто $\text{int} U_x$ і $\text{cl} U_x$ мають один і той же гомотопічний тип; внутрішність і замикання множини T мають один і той же гомотопічний тип [96]. Подання інформації про ϕ -об'єкти як про математичні моделі матеріальних об'єктів в задачах геометричного проектування пов'язане з поняттям геометричної інформації [64], введеної як сукупність трьох елементів: просторової форми ϕ -об'єкта, що характеризує конфігурацію об'єкта; метричних характеристик, що визначають розміри ϕ -

об'єкта; параметрів розміщення, які задають місце розміщення phi-об'єкта у тривимірному арифметичному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Допускаються неперервні трансляції, повороти і гомотетичні перетворення об'єкта T . Таким чином, положення T визначає вектор $u = (v, \Theta, \lambda)$, де $v = (x, y, z)$ – вектор трансляції; $\Theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ – вектор кутів повороту; λ – коефіцієнт гомотетії об'єкта T .

Об'єкт T , помножений на коефіцієнт λ , повернений на кути $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ і трансльований на вектор v , позначається як $T(u)$, а кожна точка $(x_0, y_0, z_0) \in T$ перетворюється в такий спосіб: $(x', y', z') = v + \lambda M(\Theta) \cdot (x_0, y_0, z_0)$, де $M(\Theta)$ – стандартна матриця повороту, тоді

$$\begin{aligned} x' &= v + \lambda(x^0(\cos \theta^1 \cos \theta^3 - \cos \theta^1 \sin \theta^3) - \\ &- y^0(\cos \theta^1 \sin \theta^3 + \sin \theta^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3) - z^0 \cos \theta^1 \sin \theta^2), \\ y' &= v + \lambda(x^0(\sin \theta^1 \cos \theta^3 + \cos \theta^1 \cos \theta^2 \sin \theta^3) - \\ &- y^0(-\sin \theta^1 \sin \theta^3 + \cos \theta^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3) - z^0 \cos \theta^1 \sin \theta^2), \\ z' &= v + \lambda(x^0 \sin \theta^2 \sin \theta^3 + y^0(\sin \theta^2 \cos \theta^3) - z^0 \cos \theta^2). \end{aligned}$$

Нехай $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^3$ – обмежені замкнуті phi-об'єкти. Однією з найбільш важливих задач під час моделювання розміщення об'єктів є побудова функції, яка б описувала відношення між парою phi-об'єктів T_1 і T_2 .

Ця функція повинна враховувати такі ситуації: об'єкти T_1 і T_2 не мають спільних точок $clT_1 \cap clT_2 = \emptyset$, де $cl(T_1)$ – замикання об'єкта T_1 ; об'єкти T_1 і T_2 перетинаються, тобто $int T_1 \cap int T_2 \neq \emptyset$, де $int(T_1)$ – внутрішність об'єкта; об'єкти T_1 і T_2 дотикаються, тобто $fr T_1 \cap fr T_2 \neq \emptyset$ і $int T_1 \cap int T_2 = \emptyset$.

Визначення phi-функції та її властивості сформульовано в роботах [66, 70, 85].

Визначення 2.1. Неперервна, усюди визначена функція $\Phi(u_1, u_2)$ називається ϕ -функцією об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо вона задовольняє такі характеристичні властивості (рис. 2.1):

- $\Phi(u_1, u_2) > 0$, якщо $\text{cl } T_1(u_1) \cap \text{cl } T_2(u_2) = \emptyset$ (рис. 2.1а);
- $\Phi(u_1, u_2) = 0$, якщо $\text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) = \emptyset$ та $\text{fr } T_1(u_1) \cap \text{fr } T_2(u_2) \neq \emptyset$ (рис. 2.1б);
- $\Phi(u_1, u_2) < 0$, якщо $\text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) \neq \emptyset$ (рис. 2.1в).

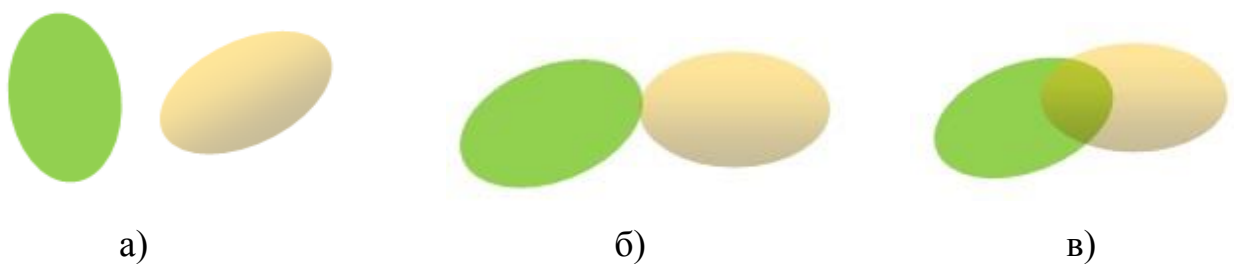


Рис. 2.1. Відношення об'єктів: а) об'єкти не перетинаються; б) об'єкти дотикаються; в) внутрішності об'єктів перетинаються

Нехай задана $\rho \geq 0$ – задана мінімально допустима відстань $\text{dist}(T_1, T_2) \leq \rho$ між об'єктами $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$ (рис. 2.2), де $\text{dist}(T_1, T_2) = \min_{t_1 \in T_1, t_2 \in T_2} d(t_1, t_2)$, $d(t_1, t_2)$ – евклідова відстань між точками t_1 і t_2 .

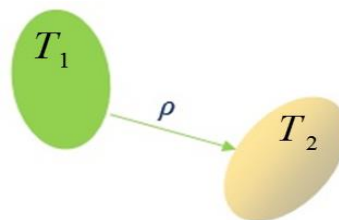


Рис. 2.2. Мінімально допустима відстань між об'єктами

Визначення 2.2. Φ -функція називається нормалізованою ϕ -функцією об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо її значення дорівнює евклідовій відстані між цими

об'єктами, за умови $\text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) = \emptyset$.

Таким чином,

$$\tilde{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) = \text{dist}(T_1, T_2), \text{ якщо } \text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) = \emptyset,$$

$$\tilde{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) \neq \emptyset.$$

Оскільки побудова нормалізованих ϕ -функцій для довільних ϕ -об'єктів є досить складною процедурою, для моделювання обмежень на допустимі відстані між об'єктами пропонується використовувати (в загальному випадку вільні від радикалів) псевдонормалізовані ϕ -функції.

Визначення 2.3. Неперервна усюди визначена функція $\hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2)$ називається псевдонормалізованою ϕ -функцією об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо вона задовольняє такі характеристичні властивості:

$$\hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) > \rho;$$

$$\hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) = 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) = \rho;$$

$$\hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) < \rho.$$

З зазначених властивостей випливає, що

$$\text{dist}(T_1, T_2) \geq \rho \Leftrightarrow \tilde{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) \geq \rho \Leftrightarrow \hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) = \rho \Leftrightarrow \hat{\Phi}^{T_1 T_2}(u_1, u_2) = 0.$$

2.1.2 П о н я т т я к в а з і ϕ - ф у н к ц і ї. Для математичного моделювання відношень опуклих об'єктів використовуються також квазі ϕ -функції [34, 93].

Визначення 2.4. Квазі ϕ -функцією для ϕ -об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$

називається всюди визначена і неперервна за всіма змінними функція $\Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$, для якої функція $\max_{u' \in U} \Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ є ϕ -функцією об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$. Тут u' – вектор додаткових змінних, який набуває значення в деякій області $U \subset \mathbb{R}^N$.

Квазі ϕ -функція $\Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ має низку важливих властивостей:

1. Якщо $\Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') \geq 0$ для деяких u' , то $\text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) = \emptyset$.
2. Якщо $\Phi^{T_1 P}(u_1, u_p)$ – ϕ -функція для $T_1(u_1)$ і $P(u_p)$, а $\Phi^{T_2 P^*}(u_2, u_p)$ – ϕ -функція для $T_2(u_2)$ і $P^*(u_p) = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } P(u_p)$, де $P(u_p) = \{(x, y, z) : \psi_p = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_p \geq 0\}$, $u_p = (\theta_{xp}, \theta_{yp}, \mu_p)$, $\alpha = \sin \theta_{yp}$, $\beta = -\sin \theta_{xp} \cdot \cos \theta_{yp}$, $\gamma = \cos \theta_{xp} \cdot \cos \theta_{yp}$, то функція, визначена у вигляді

$$\Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi^{T_1 P}(u_1, u_p), \Phi^{T_2 P^*}(u_2, u_p)\}, \quad (2.2)$$

є квазі ϕ -функцією для пари обмежених опуклих об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, $u' = u_p$.

3. Якщо $\Phi'^{T_1 P}(u_1, u_p, u'_1)$ – квазі ϕ -функція для $T_1(u_1)$ і $P(u_p)$, $\Phi'^{T_2 P^*}(u_2, u_p, u'_2)$ квазі ϕ -функція для $T_2(u_2)$ і $P^*(u_p)$, то функція

$$\Phi'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{T_1 P}(u_1, u_p, u'_1), \Phi'^{T_2 P^*}(u_2, u_p, u'_2)\}, \quad (2.3)$$

є квазі ϕ -функцією для пари обмежених об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$. Тут $u' = (u_p, u'_1, u'_2)$.

Для моделювання обмежень на допустимі відстані між об'єктами

використовуються нормалізовані та псевдонормалізовані квазі ϕ -функції.

Нехай задана мінімально допустима відстань між об'єктами $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$.

Визначення 2.5. Квазі ϕ -функція $\tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ називається нормалізованою квазі ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо функція $\max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ є нормалізованою ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$.

Отже,

$$\max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') \geq \rho \Leftrightarrow dist(T_1, T_2) \geq \rho,$$

$$\tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') \geq \rho \Rightarrow dist(T_1, T_2) \geq \rho.$$

Визначення 2.6. Функція $\hat{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ називається псевдонормалізованою квазі ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо функція $\max_{u' \in U} \hat{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u')$ є псевдонормалізованою ϕ -функцією.

Тоді

$$\max_{u' \in U} \hat{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') \geq 0 \Leftrightarrow dist(T_1, T_2) \geq \rho. \quad (2.4)$$

Нехай квазі ϕ -функція має вигляд

$$\tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\tilde{\Phi}'^{T_1 P}(u_1, u_P), \tilde{\Phi}'^{T_2 P^*}(u_2, u_P)\},$$

Тоді

$$\hat{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u'_H) = \tilde{\Phi}'^{T_1 T_2}(u_1, u_2, u'_H) - 0.5\rho, \quad (2.5)$$

є псевдонормалізованою квазі ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$.

2.2 Постановка задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DBEP та її основні реалізації (3DNEP, 3DEP, 3DAEP)

У даній роботі розглядається задача упаковки еліпсоїдів у такій постановці.

Маємо набір еліпсоїдів E_i , $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$. Кожен еліпсоїд заданий півосями a_i , b_i , c_i . Положення E_i в просторі $\mathbb{R}^3$ описується рівнянням $E(u_i) = \{u_i \in \mathbb{R}^3 : u_i = v_i + M(\Theta_i) \cdot u_i^0, \forall u_i^0 \in E_i^0\}$, та визначається вектором руху (v_i, Θ_i) , де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції; $\Theta_i = (\theta_i^3, \theta_i^2, \theta_i^1)$ – кути Ейлера; $M(\Theta_i)$ – стандартна матриця повороту.

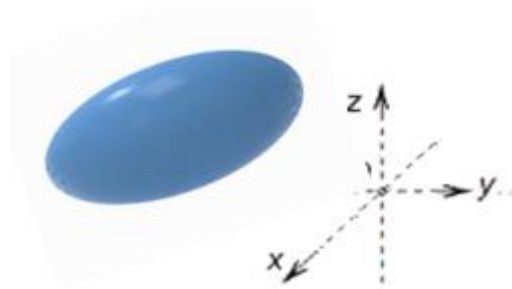


Рис. 2.3. Об'єкт розміщення: еліпсоїд

Надалі якщо допускаються неперервні повороти, то будемо говорити, що еліпсоїди неорієнтовані.

Нехай p – вектор змінних метричних характеристик контейнера Ω . У рамках даного дослідження розглянуто такі види контейнера: $\Omega \in \{B, C, S, K, E, \Lambda\}$, де B – прямокутний паралелепіпед змінних розмірів l , w і h , $p = (l, w, h)$; E – еліпсоїд зі розмірами півосей γa , γb , γc , де γ – змінний коефіцієнт гомотетії, $p = (\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma = 1$; S – куля змінного радіуса r , $p = (r)$; K – опуклий багатогранник, заданий перетином напівпросторів $\alpha_s \cdot x + \beta_s \cdot y + \delta_s \cdot z + \gamma \cdot \mu_s, s = 1, \dots, n_K$, зі змінним

коефіцієнтом гомотетії γ , $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$; C – циліндр з радіусом γr та висотою γh , де γ – змінний коефіцієнт гомотетії, $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$; $\Lambda(p)$ – довільна опукла область, границя якої формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами, $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$.

Залежно від виду контейнера розглядаються такі цільові функції:

$$F = l \cdot w \cdot h, \text{ якщо } \Omega \equiv B,$$

$$F = \gamma, \text{ якщо } \Omega \in \{E, C, K\},$$

$$F = r, \text{ якщо } \Omega \equiv S.$$

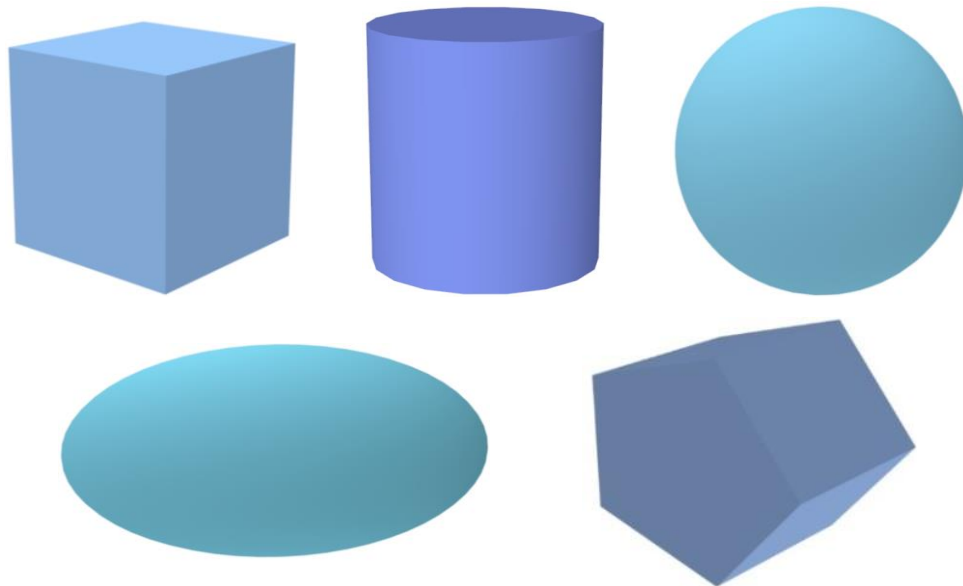


Рис. 2.4. Види контейнерів

Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів (ЗДБЕР). Упакувати набір еліпсоїдів $\{E_i(u_i), i \in I_N\}$ в контейнер $\Omega(p)$ так, щоб цільова функція F (об'єм, коефіцієнт гомотетії або одна з метричних характеристик контейнера) досягала свого мінімального значення.

Залежно від виду цільової функції, форми контейнера (прямокутний паралелепіпед, куля, еліпсоїд, багатогранник, циліндр, довільна опукла область,

границя якої формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами), обмеження на орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання) та мінімально допустимі відстані, особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, еліпсоїди обертання (сфероїди), довільні) виділяємо такі реалізації базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

– *3DHEP (Homothetic Ellipsoid Packing Problem)*: упаковка однаково орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів в контейнер (прямокутний паралелепіпед, еліпсоїд) мінімальних розмірів.

– *3DEP (Ellipsoid Packing Problem)*: упаковка неорієнтованих еліпсоїдів обертання у контейнер (прямокутний паралелепіпед, циліндр) мінімальних розмірів.

– *3DAEP (Approximated Ellipsoid Packing Problem)*: упаковка неорієнтованих еліпсоїдів у довільний опуклий контейнер (границя якого формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами) мінімальних розмірів з урахуванням мінімально допустимих відстаней.

Основними обмеженнями в задачі 3DBEP є:

– включення еліпсоїда E_i у контейнер Ω , тобто $E_i \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } E_i \cap \Omega^* = \emptyset$, $i \in I_N$, де $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega$ (рис.2.5 а);

– неперетин еліпсоїдів E_i та E_j , тобто, $\text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset$, $i, j \in I_N, i \neq j$ (рис.2.5 б);

– мінімально допустимі відстані між еліпсоїдами E_i і E_j , тобто $\text{dist}(E_i, E_j) \geq \rho_{ij}$, $i, j \in I_N, i \neq j$ (рис.2.5 в).

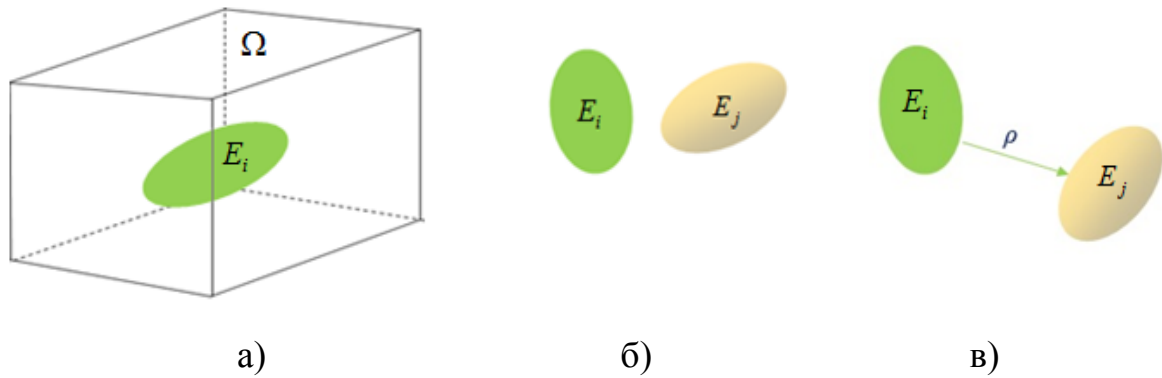


Рис. 2.5. Основні обмеження задачі: а) включення еліпсоїда E_i у контейнер Ω ;
 б) неперетин еліпсоїдів E_i та E_j ; в) мінімально допустимі відстані між
 еліпсоїдами E_i і E_j

2.3 Математична модель задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP) та її особливості

Математична модель базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів $\{E_i(u_i), i \in I_N\}$ має вигляд:

$$\min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u), \quad (2.6)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Upsilon_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij}) \geq 0, i < j \in I_N, \Upsilon_i(p, u_i, u'_i) \geq 0, i \in I_N, \quad (2.7)$$

$$\zeta(p, u_1, \dots, u_N) \geq 0\}$$

де $u = (p, u_1, \dots, u_N, \tau)$ – вектор змінних задачі, $u_i = (v_i, \Theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$,

p – вектор змінних метричних характеристик контейнера Ω ;

τ – вектор додаткових змінних для побудови квазі phi-функцій;

$\mathbb{R}^\sigma$ – арифметичний евклідів простір розмірності $\sigma = |p| + 6N + |\tau|$,

$|\tau| = 0.5N(N-1)|\tau_1| + N|\tau_2|$, $|\tau_1|$ – кількість додаткових змінних для квазі phi-

функцій, що описують неперетин еліпсоїдів, $|\tau_2|$ – кількість додаткових змінних

для квазі phi-функцій, що описують включення еліпсоїдів у контейнер;

$\Upsilon_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij}) \geq 0$ – описує умову $\text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset$ або обмеження

$$\text{dist}(E_i, E_j) \geq \rho, (\text{dist}(E_i, E_j) = \min_{e_i \in E_i, e_j \in E_j} d(e_i, e_j));$$

$\Upsilon_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij})$ – ϕ -функція (псевдонормалізована ϕ -функція, квазі ϕ -функція, псевдонормалізована квазі ϕ -функція) для еліпсоїдів E_i і E_j , $i < j \in I_N$;

$\Upsilon_i(p, u_i, u'_i) \geq 0$ – описує умову $E_i \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } E_i \cap \Omega^* = \emptyset$, $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega$, $i \in I_N$;

$\Upsilon_i(u)$ – ϕ -функція (квазі ϕ -функція) для еліпсоїда E_i і об'єкта Ω^* , $i \in I_N$;

$\zeta(p, u_1, \dots, u_N) \geq 0$ – система обмежень на змінні метричні характеристики Ω .

Система $\zeta(p, u_1, \dots, u_N) \geq 0$ – система обмежень на змінні метричні характеристики p контейнера Ω та додаткові обмеження на змінні параметри розміщення $u_1, \dots, u_N$ еліпсоїдів $E_i(u_i)$, $i \in I_N$.

Розмірність простору $\mathbb{R}^\sigma$ та вид функцій $\Upsilon_i(\Upsilon_{ij})$, залежать від: форми контейнера (прямокутний паралелепіпед, куля, еліпсоїд, багатогранник, циліндр), виду цільової функції, обмеження на орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання) та мінімально допустимі відстані, особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, сфероїди, довільні).

Запропоновано стратегію розв'язання задачі 3DBEP, яка включає три основних етапи (рис. 2.6): генерацію стартових точок з області допустимих розв'язків; пошук локальних мінімумів задачі 3DBEP для кожної стартової точки, отриманої на першому етапі; пошук найкращого локального екстремуму з отриманих на другому етапі.

Таким чином, для кожної реалізації 3DNEP, 3DEP, 3DAEP базової задачі упаковки еліпсоїдів необхідно побудувати засоби математичного моделювання, математичні моделі у вигляді задач нелінійного програмування (NLP-models), розробити методи та алгоритми для пошуку допустимих та локально-оптимальних розв'язків.

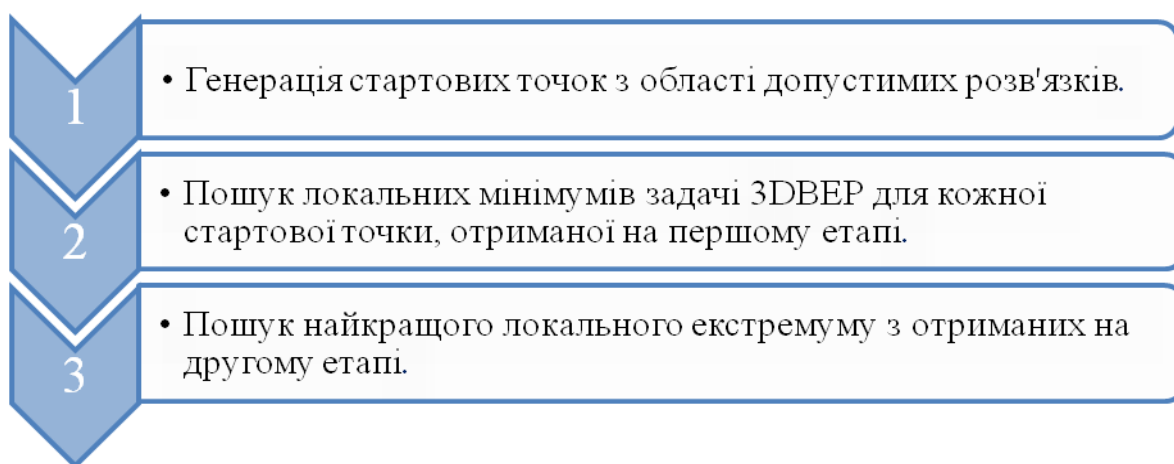


Рисунок 2.6. Стратегія розв'язання задачі 3DBEP

2.4 Висновки по розділу 2

У розділі 2 наведено визначення та основні властивості ϕ -функції як засобу моделювання відносин дотику, перетину, неперетину ϕ -об'єктів. Визначено поняття квазі ϕ -функції як засобу моделювання обмежень відношень торкання, перетину, неперетину неорієнтованих опуклих ϕ -об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Введено визначення нормалізованої ϕ -функції, псевдонормалізованої ϕ -функції та псевдонормалізованої квазі ϕ -функції як засобів моделювання обмежень на задані мінімально допустимі відстані між об'єктами. Сформульовано базову задачу оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP) і виділено її основні реалізації (3DNEP, 3DEP, 3DAEP) залежно від форми контейнера (прямокутний паралелепіпед, куля, еліпсоїд, багатогранник, циліндр, довільна опукла область, границя якої формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами), обмеження на орієнтацію еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання) та мінімально допустимі відстані, особливостей метричних характеристик еліпсоїдів (гомотетичні, еліпсоїди обертання (сфероїди), довільні). Побудовано математичну модель базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів у вигляді задач нелінійного програмування та наведено її характеристики. Запропоновано стратегію розв'язання базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

Наукові результати, наведені у розділі 2, опубліковано в роботах [2–23].

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ОДНАКОВО ОРІЄНТОВАНИХ ГОМОТЕТИЧНИХ ЕЛІПСОЇДІВ (3DHEP)

У третьому розділі формулюється задача упаковки однаково орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів обертання (сфероїдів) в контейнер, який може мати форму прямокутного паралелепіпеда або еліпсоїда, з метою мінімізації розмірів контейнера (3DHEP); будуються ϕ -функції, що описують умови неперетину еліпсоїдів і включення еліпсоїдів у відповідний контейнер; будуються математичні моделі; пропонуються методи та алгоритми розв'язання задачі 3DHEP.

Розглядається задача у такій постановці. Нехай еліпсоїд E заданий півосями $a, b, c = b$. Маємо набір еліпсоїдів $E_i, i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ як об'єкти розміщення. Кожен еліпсоїд заданий півосями $a_i, b_i, c_i = b_i$, тобто $a_i = \lambda_i a, b_i = \lambda_i b, c_i = \lambda_i b, \lambda_i > 0, i \in I_N$ – коефіцієнт гомотетії еліпсоїда E_i . Положення E_i в просторі $\mathbb{R}^3$ визначається вектором трансляції v_i , де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $u_i = (v_i, \theta^1 = \text{const}, \theta^2 = \text{const}), i \in I_N$. У даній реалізації базової задачі (3DBEP) розглядаються гомотетичні еліпсоїди ($E_i = \lambda_i E, \lambda_i$ – коефіцієнт гомотетії, $i \in I_N$), що є особливістю метричних характеристик еліпсоїдів.

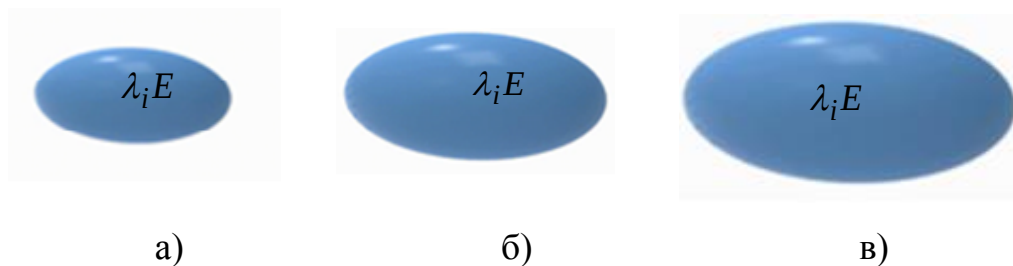


Рис. 3.1. Об'єкти розміщення: а) при $0 < \lambda_i < 1$; б) при $\lambda_i = 1$; в) при $\lambda_i > 1$

Як контейнер розглядається область $\Omega = \{\mathbf{B}, \mathbf{E}\}$, що характеризується вектором змінних метричних характеристик p , де $\mathbf{B}$ – паралелепіпед змінної довжини $2l$, ширини $2w$ та висоти $2h$, $p = (l, w, h)$ або еліпсоїд $\mathbf{E}$ зі змінними розмірами півосей γa , γb , γc , $p = (\gamma)$, де $\gamma > 0$ – змінний коефіцієнт гомотетії за умови початкового розміру контейнера при $\gamma = 1$, $\gamma > \max_{i \in I_N} \lambda_i$ у фіксованій системі координат $Oxyz$.

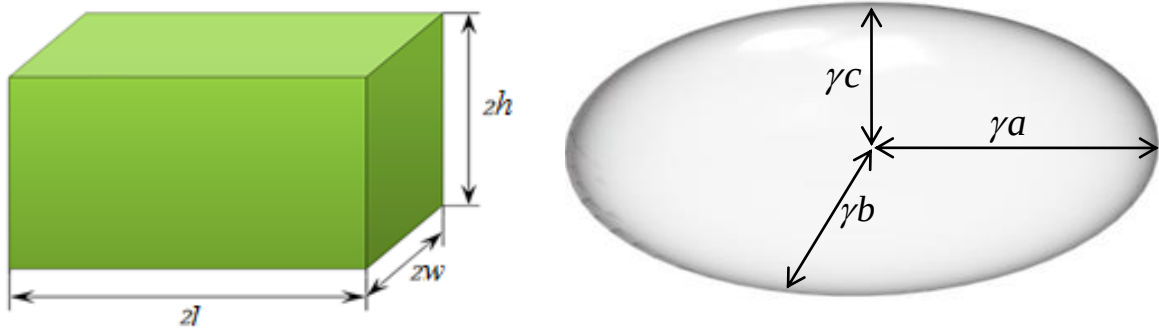


Рис. 3.2 Види контейнерів у задачі 3DHEP

Залежно від виду контейнера розглядаються такі цільові функції:

$$F(u) = l \cdot w \cdot h, \text{ якщо } \Omega \equiv \mathbf{B},$$

$$F(u) = \gamma, \text{ якщо } \Omega \equiv \mathbf{E}.$$

Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DHEP. Упакувати набір еліпсоїдів $\{E_i(v_i), i \in I_N\}$ в контейнер $\Omega(p)$ так, щоб цільова функція $F(u)$ досягала свого мінімального значення.

3.1 Phi-функції для моделювання обмежень розміщення задачі 3DHEP

Розглянемо гомотетичні еліпсоїди E_i і E_j .

Основними обмеженнями поставленої задачі є:

– обмеження неперетину

$$\text{int } E_i(v_i) \cap \text{int } E_j(v_j) = \emptyset, \quad i < j \in I_N, \quad (3.1)$$

– обмеження включення

$$E_i(v_i) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } E_i(v_i) \cap \text{int } \Omega^* = \emptyset, \quad i \in I_N, \quad (3.2)$$

де $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega$.

Нехай $a_i = \lambda_i a$, $b_i = \lambda_i b$, $c_i = \lambda_i b$ – розміри еліпсоїда E_i ; $(x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in E_i$,
 $a_j = \lambda_j a$, $b_j = \lambda_j b$, $c_j = \lambda_j b$ – розміри еліпсоїда E_j , $(x_j^0, y_j^0, z_j^0) \in E_j$, де $\lambda_i > 0$,
 $\lambda_i > 0$, $i \neq j \in I_N$, $v_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$ – вектор трансляції еліпсоїда E_i ,
 $v_j = (x'_j, y'_j, z'_j)$ – вектор трансляції E_j , $\theta_i^1 = \theta_j^1 = \theta^1 = \text{const}$,
 $\theta_i^2 = \theta_j^2 = \theta^2 = \text{const}$; $\Theta = (\theta^1, \theta^2)$ – вектор кутів повороту,
 $(x'_i, y'_i, z'_i) = v_i + \lambda_i M(\Theta) \cdot (x_i^0, y_i^0, z_i^0)$, $(x'_j, y'_j, z'_j) = v_j + \lambda_j M(\Theta) \cdot (x_j^0, y_j^0, z_j^0)$,
 тобто

$$x'_i = v_i + \lambda_i (x_i^0 \cos \theta^1 \cos \theta^2 - y_i^0 \sin \theta^1 - z_i^0 \cos \theta^1 \sin \theta^2),$$

$$y'_i = v_i + \lambda_i (x_i^0 \sin \theta^1 \cos \theta^2 + y_i^0 \cos \theta^1 - z_i^0 \sin \theta^1 \sin \theta^2),$$

$$z'_i = v_i + \lambda_i (-x_i^0 \sin \theta^2 + z_i^0 \cos \theta^2),$$

$$x'_j = v_j + \lambda_j (x_j^0 \cos \theta^1 \cos \theta^2 - y_j^0 \sin \theta^1 - z_j^0 \cos \theta^1 \sin \theta^2),$$

$$y'_j = v_j + \lambda_j (x_j^0 \sin \theta^1 \cos \theta^2 + y_j^0 \cos \theta^1 - z_j^0 \sin \theta^1 \sin \theta^2),$$

$$z'_j = v_j + \lambda_j (-x_j^0 \sin \theta^2 + z_j^0 \cos \theta^2),$$

де $M(\Theta)$ – матриця повороту вигляду

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta^1 \cdot \cos \theta^2 & -\sin \theta^1 & -\cos \theta^1 \cdot \sin \theta^2 \\ \sin \theta^1 \cdot \cos \theta^2 & \cos \theta^1 & -\sin \theta^1 \cdot \sin \theta^2 \\ -\sin \theta^2 & 0 & \cos \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Як відомо [93], конструктивним засобом математичного моделювання обмежень (3.1), (3.2) є метод ϕ -функцій Стояна [80]. У термінах ϕ -функцій обмеження (3.1) має вигляд $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) \geq 0$, де, з урахуванням особливостей метричних характеристик еліпсоїдів, функція $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j)$ набуває вигляду

$$\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) = \frac{(x'_j - x'_i)^2}{a^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} + \frac{(y'_j - y'_i)^2}{b^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} + \frac{(z'_j - z'_i)^2}{b^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} - 1.$$

Отже,

$$\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) = \frac{(x'_j - x'_i)^2}{(a_i + a_j)^2} + \frac{(y'_j - y'_i)^2}{(b_i + b_j)^2} + \frac{(z'_j - z'_i)^2}{(c_i + c_j)^2} - 1. \quad (3.3)$$

За умови $\theta^1 = \theta^2 = 0$ функція (3.3) набуває вигляду

$$\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) = \frac{(x_j - x_i)^2}{(a_i + a_j)^2} + \frac{(y_j - y_i)^2}{(b_i + b_j)^2} + \frac{(z_j - z_i)^2}{(c_i + c_j)^2} - 1.$$

Нехай $a_i = \lambda_i a$, $b_i = \lambda_i b$, $c_i = \lambda_i b$ – розміри еліпсоїда E_i , $(x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in E_i$,

де $\lambda_i > 0$, $i \in I_N$, $v_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$, $\theta_i^1 = \theta^1 = \text{const}$, $\theta_i^2 = \theta^2 = \text{const}$, $\Theta = (\theta^1, \theta^2)$,
 $(x'_i, y'_i, z'_i) = v_i + \lambda_i M(\Theta) \cdot (x_i^0, y_i^0, z_i^0)$.

Обмеження (3.2) при $\Omega \equiv \mathbf{B}$ описується нерівністю $\Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, l, w, h) \geq 0$,
де $\Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, l, w, h)$ – phi-функція для еліпсоїда E_i та об'єкта $\Omega^* \equiv \mathbf{B}^*$, яка має вигляд

$$\Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, l, w, h) = \min_{k=1, \dots, 6} \chi_k(v_i), \quad (3.4)$$

$$\chi_1(v_i) = -x'_i + l - \lambda_i a^*, \quad \chi_2(v_i) = -y'_i + w - \lambda_i b^*, \quad \chi_3(v_i) = y'_i + w - \lambda_i b^*$$

$$\chi_4(v_i) = x'_i + l - \lambda_i a^*, \quad \chi_5(v_i) = -z'_i + h - \lambda_i c^*, \quad \chi_6(v_i) = z'_i + h - \lambda_i c^*;$$

$$a^* = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta^1 + b^2 \sin^2 \theta^1}, \quad c^* = b^* = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta^1 + b^2 \cos^2 \theta^1},$$

Зокрема, якщо $\theta^1 = \theta^2 = 0$, маємо

$$\chi_1(v_i) = -x_i + l - \lambda_i a^*, \quad \chi_2(v_i) = -y_i + w - \lambda_i b^*, \quad \chi_3(v_i) = y_i + w - \lambda_i b^*$$

$$\chi_4(v_i) = x_i + l - \lambda_i a^*, \quad \chi_5(v_i) = -z_i + h - \lambda_i c^*, \quad \chi_6(v_i) = z_i + h - \lambda_i c^*;$$

$$a^* = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta^1 + b^2 \sin^2 \theta^1} = a, \quad c^* = b^* = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta^1 + b^2 \cos^2 \theta^1} = b.$$

Покажемо, що функція $\Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, p)$ вигляду (3.4) є phi-функцією для еліпсоїда $E_i(v_i)$ і об'єкта $\Omega^* \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$, $p = (l, w, h)$.

Нехай E_1 і E_2 проекції еліпсоїда E_i на відповідні грані контейнера: Ω_1 , що належить площині XOZ , і Ω_2 , що належить площині XOY . Тоді phi-функцією еліпсоїда $E_i(v_i)$ і об'єкта Ω^* буде функція

$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, p) = \min\{\Phi^{E_1\Omega_1^*}(v_i, p), \Phi^{E_2\Omega_2^*}(v_i, p)\}$, де $\Phi^{E_1\Omega_1^*}(v_i, p)$ – phi-функція для еліпса $E_1(a_1, b_1)$ і об'єкта $\Omega_1^* \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_1$, а $\Phi^{E_2\Omega_2^*}(v_i, p)$ – phi-функція для еліпса $E_2(a_2, b_2)$ та об'єкта $\Omega_2^* \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_2$

Визначимо розміри півосей проекцій еліпсоїда на дві грані прямокутного паралелепіпеда

$$E_1(a_1, b_1): a_1 = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\theta^1)}, b_1 = \lambda_i b$$

$$E_2(a_2, b_2): a_2 = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2(\theta^1)}, b_2 = \lambda_i b.$$

Тоді функція $\Phi^{E_1\Omega_1^*}(v_i, p) = \min\{-x'_i + l - \lambda_i a_1^*, x'_i + l - \lambda_i a_1^*, -y'_i + w - \lambda_i b_1^*, y'_i + w - \lambda_i b_1^*\}$ є phi-функцією для еліпса $E_1(a_1, b_1)$ і об'єкта Ω_1^* , що доведено у роботі [1], аналогічно, $\Phi^{E_2\Omega_2^*}(v_i, p) = \{-x'_i + l - \lambda_i a_2^*, x'_i + l - \lambda_i a_2^*, -z'_i + h - \lambda_i b_2^*, z'_i + h - \lambda_i b_2^*\}$, є phi-функцією для еліпса $E_2(a_2, b_2)$ та об'єкта Ω_2^* , де

$$\lambda_i a_1^* = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta^1 + b_1^2 \sin^2 \theta^1} = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta^1 \cos^2 \theta^1},$$

$$\lambda_i b_1^* = \sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta^1 + b_1^2 \cos^2 \theta^1} = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta^1 \sin^2 \theta^1},$$

$$\lambda_i a_2^* = \sqrt{a_2^2 \cos^2 \theta^1 + b_2^2 \sin^2 \theta^1} = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta^1 \cos^2 \theta^1},$$

$$\lambda_i b_2^* = \sqrt{a_2^2 \sin^2 \theta^1 + b_2^2 \cos^2 \theta^1} = \lambda_i \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta^1 \sin^2 \theta^1}.$$

Таким чином

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, p) = \min\{-x'_i + l - \lambda_i a_1^*, x'_i + l - \lambda_i a_1^*, -y'_i + w - \lambda_i b_1^*, \\ y'_i + w - \lambda_i b_1^*, -x'_i + l - \lambda_i a_2^*, x'_i + l - \lambda_i a_2^*, -z'_i + h - \lambda_i b_2^*, z'_i + h - \lambda_i b_2^*\}.$$

Оскільки $a_1^* = b_2^*$, маємо

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, p) = \min\{-x'_i + l - \lambda_i a_1^*, x'_i + l - \lambda_i a_1^*, -y'_i + w - \lambda_i b_1^*, \\ y'_i + w - \lambda_i b_1^*, -z'_i + h - \lambda_i b_2^*, z'_i + h - \lambda_i b_2^*\},$$

тобто

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, p) = \min\{\chi_k(v_i), k=1, \dots, 6\}.$$

Обмеження (3.2) при $\Omega \equiv \mathbf{E}$ описується нерівністю $\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, \gamma) \geq 0$, де $\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, \gamma)$ – Φ -функція для еліпсоїда E_i та об'єкта $\Omega^* \equiv \mathbf{E}^*$, яка з урахуванням особливостей метричних характеристик еліпсоїдів має вигляд

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, \gamma) = 1 - \frac{(x'_i)^2}{a^2(\gamma - \lambda_i)^2} - \frac{(y'_i)^2}{b^2(\gamma - \lambda_i)^2} - \frac{(z'_i)^2}{b^2(\gamma - \lambda_i)^2},$$

за умови, що E_i і $\mathbf{E}$ гомотетичні та контейнер $\mathbf{E}$ має орієнтацію, яка співпадає з орієнтацією еліпсоїда E_i , тобто $\theta_\Omega^1 = \theta^1, \theta_\Omega^2 = \theta^2$.

Отже,

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, \gamma) = 1 - \frac{(x'_i)^2}{(\gamma a - a_i)^2} - \frac{(y'_i)^2}{(\gamma b - b_i)^2} - \frac{(z'_i)^2}{(\gamma c - c_i)^2}. \quad (3.5)$$

Зокрема, при $\theta^1 = \theta^2 = 0$ функція (3.5) набуває вигляду

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(v_i, \gamma) = 1 - \frac{(x_i)^2}{(\gamma a - a_i)^2} - \frac{(y_i)^2}{(\gamma b - b_i)^2} - \frac{(z_i)^2}{(\gamma c - c_i)^2}.$$

3.2 Математична модель задачі 3DHEP

Математична модель задачі 3DHEP може бути подана у вигляді

$$\min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u), \quad (3.6)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) \geq 0, j > i \in I_N, \Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, p) \geq 0, i \in I_N, \zeta(p) \geq 0\}, \quad (3.7)$$

де $u = (p, v_1, \dots, v_N)$ – вектор змінних, p – вектор змінних метричних характеристик контейнера, $v_i = (x'_i, y'_i, z'_i), v_j = (x'_j, y'_j, z'_j), \theta_i^1 = \theta_j^1 = \theta^1 = \text{const}, \theta_i^2 = \theta_j^2 = \theta^2 = \text{const}, \Theta = (\theta^1, \theta^2), (x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in E_i, (x_j^0, y_j^0, z_j^0) \in E_j, (x'_i, y'_i, z'_i) = v_i + \lambda_i M(\Theta) \cdot (x_i^0, y_i^0, z_i^0), (x'_j, y'_j, z'_j) = v_j + \lambda_j M(\Theta) \cdot (x_j^0, y_j^0, z_j^0), \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j)$ – phi-функція, що описує відношення неперетину еліпсоїдів, $\Phi^{E_i \Omega^*}(v_i, p)$ – phi-функція, що описує відношення включення еліпсоїдів в контейнер, $\mathbb{R}^\sigma$ – арифметичний евклідов простір розмірності $\sigma, \sigma = 3N + 3$ при $\Omega \equiv \mathbf{B}$ та $\sigma = 3N + 1$ при $\Omega \equiv \mathbf{E}, \zeta(p) \geq 0$ – система додаткових обмежень на метричні характеристики контейнера Ω ($\gamma > 0$ при $\Omega \equiv \mathbf{E}, l > 0, w > 0, h > 0$ при $\Omega \equiv \mathbf{B}$).

Задача (3.6)–(3.7) є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування, де множина допустимих розв'язків (3.7), виходячи із вигляду

функцій (3.3), (3.4) і (3.5), описується системою нерівностей з гладкими функціями.

3.3 Метод розв'язання задачі 3DNEP

Для пошуку локальних мінімумів задачі (3.6)–(3.7) використовується два підходи. В основі першого – метод мультистарту і оптимізаційна процедура, що включає пошук допустимих стартових точок і локальну оптимізацію, яка є розвитком алгоритмів, запропонованих у статтях [94, 94]. Як локально-оптимальний розв'язок обирається найкращий з отриманих локальних екстремумів. Другий алгоритм ґрунтується на методі мультистарту та використанні τ -алгоритму Шора [96, 97]. Розглянемо кожен з методів докладніше.

3.3.1 Метод розв'язання з використанням методу мультистарту і спеціальної оптимізаційної процедури. *Метод побудови стартових допустимих розміщень.* Покладаємо достатньо великі стартові розміри контейнера Ω_0 , що гарантують розміщення еліпсоїдів E_i в Ω_0 . Для контейнера $\Omega \equiv \mathbf{B}$ обираємо $p_0 = (l_0, w_0, h_0)$ як стартові параметри, а для $\Omega \equiv \mathbf{E}$ – стартове значення коефіцієнта гомотетії $p_0 = (\gamma_0)$. Водночас, не втрачаючи загальності, вважаємо, що $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{N-1} \geq a_N$.

Нехай коефіцієнти гомотетії λ_i еліпсоїдів E_i , $i \in I_N$, є змінними. Тоді $u = (v, \lambda) \in \mathbb{R}^\sigma$ – вектор змінних, де $v = (v_1, \dots, v_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$.

Крок 1. Обираємо точку $u^{0(1)} = (v^0, \lambda^0)$, де $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in \Omega_0$ вибирається випадково, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_N^0)$, $\lambda_i^0 = 0$, $i \in I_N$.

Обираємо $u^{0(1)}$ як стартову точку для подальшої оптимізації та переходимо до кроку 2.

Крок 2. Розв'язуємо допоміжну задачу

$$\max_{u \in W' \subset \mathbb{R}^\sigma} \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i, \quad (3.8)$$

$$W' = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) \geq 0, j > i \in I_N, \Phi^{E_i \Omega^*}(v_i) \geq 0, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i \in I_N\}. \quad (3.9)$$

В результаті розв'язання задачі (3.8)–(3.9) отримуємо точку глобального максимуму $u^{0(2)} = (v^{0(2)}, \lambda^{0(2)})$. Глобальний екстремум задачі (3.8)–(3.9) забезпечує розміщення еліпсоїдів E_i у контейнері з розмірами p_0 з урахуванням умови неперетину еліпсоїдів.

Обираємо $u^{0(2)}$ як стартову точку для подальшої оптимізації та переходимо до кроку 3.

Крок 3. Розв'язуємо задачу (3.6)–(3.7). В результаті отримуємо точку локального мінімуму $u^{0(3)} = (p^{0(3)}, v^{0(3)})$.

Крок 4. Для поліпшення результату як стартову точку для подальшої оптимізації обираємо точку $u^{0(3)} = (v^{0(3)}, \lambda^{0(3)})$ за фіксованих розмірів контейнера та розв'язуємо допоміжну задачу

$$\max_{u \in W'' \subset \mathbb{R}^\sigma} \sum_{i=1}^N (a_i \lambda_i)^2, \quad (3.10)$$

$$W'' = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) \geq 0, j > i \in I_N, \Phi^{E_i \Omega^*}(v_i) \geq 0, \quad (3.11)$$

$$a^- \leq a_i \lambda_i \leq a^+, i \in I_N\},$$

$$a^- = \min\{a_i, i \in I_N\}, \quad a^+ = \max\{a_i, i \in I_N\}.$$

В результаті розв'язання задачі (3.10)–(3.11) отримуємо точку локального

максимуму $u^{0(4)} = (v^{0(4)}, \lambda^{0(4)})$.

Крок 5. Ранжуємо за спаданням $a_i = \lambda_i^{0(4)} a_i$, $i \in I_N$. Формуємо послідовність $(i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, i_N)$, таку, що $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_{N-1}} \geq a_{i_N}$.

Здійснюємо порівняння a_i і a_{i_j} : якщо $\lambda_i^{0(4)} \geq 1$, то вважаємо $\lambda_{i_j}^{0(5)} = 1$, якщо $\lambda_i^{0(4)} < 1$, то вважаємо $\lambda_{i_j}^{0(5)} = \lambda_i^{0(4)}$. Формуємо точку $u^{0(5)} = (v^{0(5)}, \lambda^{0(5)})$ і переходимо до наступного кроку.

Крок 6. Стартуючи з точки $u^{0(5)} = (v^{0(5)}, \lambda^{0(5)})$, розв'язуємо задачу (3.8)–(3.9). В результаті розв'язання отримуємо точку глобального максимуму $u^{0(6)} = (v^{0(6)}, \theta^{0(6)}, \lambda^{0(6)})$. Інакше переходимо до кроку 1.

Стартуючи з точки $u^{0(6)}$, розв'язуємо задачу (3.6)–(3.7) і отримуємо точку локального мінімуму $u'^{(6)} = (p'^{(6)}, v'^{(6)})$.

Крок 7. Генеруємо випадковим чином точку q_1 . Якщо $q_1 \notin E_i$, $i \in I_N$, $q_1 \in \Omega$, то як параметри розміщення додаткового еліпсоїда з півосями $a_{q_1} = a_1$, $b_{q_1} = b_1$, $c_{q_1} = c_1$ і коефіцієнтом гомотетії $\lambda_{q_1}^0 = \varepsilon$ обираємо точку q_1 .

Стартуючи з точки $u^{0(7)} = (v'^{(6)}, v_{q_1}^0, \lambda_{q_1}^0)$ за фіксованих розмірів контейнера розв'язуємо таку допоміжну задачу:

$$\max_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} a_{q_1} \lambda_{q_1}, \quad (3.12)$$

$$W_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \chi(u) \geq 0, 0 \leq \lambda_{q_1} \leq 1\}, \quad (3.13)$$

$$\chi(u) = \min\{\Phi_\tau(u), \Phi_l(u), \tau = 1, \dots, m, l \in I_N\},$$

де $u = (v, v_{q_1}, \lambda_{q_1}) \in \mathbb{R}^\sigma$, $v = (v_1, \dots, v_N)$, $m = 0.5 \cdot N \cdot (N + 1)$.

В результаті розв'язання задачі (3.12)–(3.13) отримуємо точку локального

максимуму $u^{0(7)} = (v^{0(7)}, v_{q_1}^{0(7)}, \lambda_{q_1}^{0(7)})$.

Здійснюємо пошук $a_j \leq \lambda_{q_1} a_{q_1}$, $b_j \leq \lambda_{q_1} b_{q_1}$, $j \in I_N$. Якщо еліпсоїд E_j існує, то приймаємо $v_j = v_{q_1}$, за аналогією з запропонованим у [25] алгоритмом.

Формуємо точку $u'^{(7)} = (p'^{(6)}, v'^{(7)})$. Стартуючи з точки $u'^{(7)} = (p'^{(6)}, v'^{(7)})$, розв'язуємо задачу (3.6)–(3.7). Отримуємо точку локального мінімуму $u''^{(7)} = (p''^{(7)}, v''^{(7)})$, причому $u^* = u''^{(7)} = (p^*, v^*, \theta^*)$.

З метою мінімізації числа нелінійних нерівностей, які формують область допустимих розв'язків у задачах нелінійного програмування (3.6)–(3.7) пропонується метод 3DLOFRT, який дозволяє значно скоротити обчислювальні ресурси (час і пам'ять).

Метод локальної оптимізації (3DLOFRT) для 3DHEP. В основі методу лежить ітераційна оптимізаційна процедура, яка є модифікацією LOFRT процедури, запропонованої в [95] для задачі оптимального розміщення еліпсів в прямокутному контейнері мінімальної площі, і полягає в такому.

Нехай $u^{(0)} \in W$ – допустима точка. Навколо кожного еліпсоїда E_i опишемо кулю S_i радіуса $a_i = \lambda_i a$, $i \in I_N$. Для кожної кулі S_i будується «індивідуальний» кубічний контейнер $\Omega_i \supset S_i \supset E_i$, довжина сторони якого становить $2 \cdot (a_i + \varepsilon)$, $i \in I_N$. S_i , E_i і Ω_i мають однаковий центр (x_i^0, y_i^0, z_i^0) , а сторони Ω_i паралельні відповідним сторонам Ω . Обирається $\varepsilon = \sum_{i=1}^N b_i / N$. Далі

фіксується положення кожного індивідуального контейнера Ω_i . Кожен еліпсоїд E_i може розміщуватися лише всередині Ω_i (рис. 3.3).

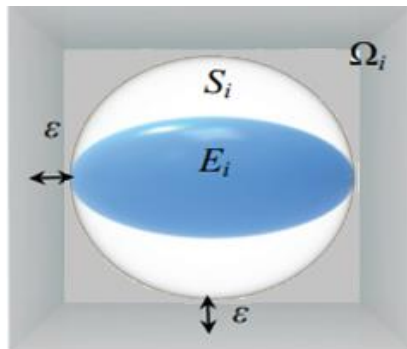


Рис. 3.3. Формування індивідуального контейнера

Далі необхідно визначити систему додаткових обмежень на вектор трансляції v_i для кожного еліпсоїда E_i у вигляді $\Phi^{S_i\Omega_{1i}^*}(v_i) \geq 0$, $i \in I_N$, де

$$\Phi^{S_i\Omega_{1i}^*}(v_i) = \min\{-x_i + x_i^0 + \varepsilon, -y_i + y_i^0 + \varepsilon, -z_i + z_i^0 + \varepsilon, x_i - x_i^0 + \varepsilon, \\ y_i - y_i^0 + \varepsilon, z_i - z_i^0 + \varepsilon\}$$

– Φ -функція для S_i і $\Omega_{1i}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega_{1i}$.

Слід зауважити, що нерівність $\Phi^{S_i\Omega_{1i}^*}(v_i) \geq 0$ є еквівалентною системі лінійних нерівностей $-x_i + x_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $-y_i + y_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $-z_i + z_i^0 + \varepsilon$, $x_i - x_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $y_i - y_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $z_i - z_i^0 + \varepsilon$.

Очевидно, що якщо контейнери Ω_i і Ω_j не мають спільних внутрішніх точок, тобто $\Phi^{\Omega_i\Omega_j}(v_i, v_j) \geq 0$, тоді не слід накладати обмеження на неперетин еліпсоїдів E_i та E_j . Наприклад, для еліпсоїдів E_1 і E_2 , E_4 і E_5 , E_1 і E_6 (рис. 3.4).

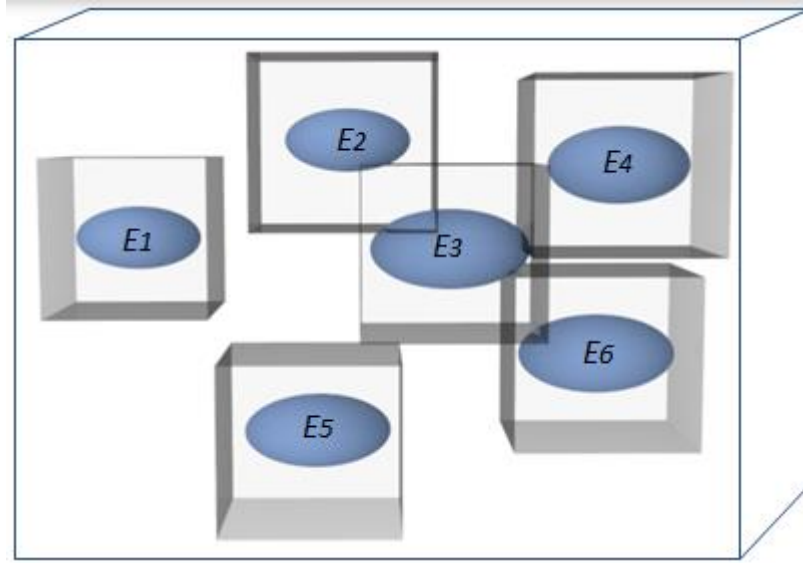


Рис. 3.4. Розміщення еліпсоїдів E_i та їх індивідуальних контейнерів Ω_i для $\Omega \equiv B$

Далі формуємо область допустимих розв'язків з урахуванням системи додаткових обмежень

$$W_1 = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j) \geq 0, (i, j) \in \Xi_1, \Phi^{E_i \Omega_i^*}(v_i), i \in \Xi_2, \Phi^{S_i \Omega_i^*}(v_i) \geq 0,$$

$$i \in I_N, f(p) \leq f(p^0) - \varepsilon\},$$

$$\Xi_1 = \{(i, j) : \Phi^{\Omega_i \Omega_j}(v_i, v_j) < 0, j > i \in I_N\}, \Xi_2 = \{i : \Phi^{\Omega_i^* \Omega_i}(v_i) < 0, i \in I_N\}.$$

Іншими словами, з системи, яка описує область W , виключаємо рiвнiвностi для тих пар еліпсоїдів, індивідуальні контейнери яких не перетинаються. Водночас додаємо допоміжні нерівності $\Phi^{S_i \Omega_i^*}(v_i) \geq 0$, що описують умову включення S_i до відповідного індивідуального контейнера Ω_i , $i \in I_N$.

Потім здійснюємо пошук точки локального мінімуму для підзадачі вигляду

$$\min_{u_{w_1} \in W_1 \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u_{w_1}).$$

Точка $u_{w_1}^*$ є стартовою точкою $u^{(1)}$ на другій ітерації оптимізаційної процедури. На даному етапі знову визначаються всі пари еліпсоїдів, індивідуальні контейнери яких не перетинаються, формується відповідна підобласть W_2 (аналогічно W_1) і обчислюється точка локального мінімуму $u_{w_2}^* \in W_2$, яка використовується як стартова точка $u^{(2)}$ на третій ітерації і т.д.

У загальному випадку, на k -му кроці, стартуючи з точки $u^{(k-1)}$, розв'язується задача вигляду

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u_{w_k}), \quad (3.14)$$

$$W_k = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi_{ij}^k(u_i, u_j) \geq 0, (i, j) \in \Xi_{k1}, \Phi_i^k(u_i) \geq 0, i \in \Xi_{k2}, \quad (3.15)$$

$$\Phi^{S_i \Omega_{ki}^*}(u_i) \geq 0, i \in I_N, f(p_{w_k}) \leq f(p_{w_{k-1}}) - \varepsilon\},$$

$$\Xi_{k1} = \{(i, j) : \Phi^{\Omega_{ki} \Omega_{kj}}(v_i, v_j) < 0, i > j \in I_N\}, \Xi_{k2} = \{i : \Phi^{\Omega_{ki} \Omega^*}(v_i) < 0, i \in I_N\}.$$

В (3.15) нерівність $f(p_{w_k}) \leq f(p_{w_{k-1}}) - \varepsilon$ означає:

$$\gamma_{w_k} a \leq \gamma_{w_{k-1}} a - \varepsilon, \gamma_{w_k} b \leq \gamma_{w_{k-1}} b - \varepsilon, \gamma_{w_k} c \leq \gamma_{w_{k-1}} c - \varepsilon \text{ при } \Omega \equiv E,$$

$$l_{w_k} \leq l_{w_{k-1}} - \varepsilon, w_{w_k} \leq w_{w_{k-1}} - \varepsilon, h_{w_{k-1}} \leq h_{w_{k-1}} - \varepsilon \text{ при } \Omega \equiv B.$$

Ітераційна процедура закінчується, коли $F(u_{w_k}^*) = F(u_{w_{k+1}}^*)$.

Точка $u^* = u^{(k)*} = u_{w_k}^* \in \mathbb{R}^\sigma$ є точкою локального мінімуму задачі (3.6)–

(3.7), де точка $u_{w_k}^* \in \mathbb{R}^\sigma$ є точкою локального мінімуму на останній ітерації.

Таким чином, для $O(N^2)$ пар еліпсоїдів в контейнері метод 3DLOFRT дозволяє здійснювати перевірку квадратичних ϕ -функцій для моделювання обмежень неперетину, в загальному випадку, тільки для $O(N)$ пар еліпсоїдів.

Параметр ε забезпечує баланс між кількістю нерівностей в кожній підзадачі нелінійного програмування (3.14)–(3.15) і числом підзадач, які необхідно розв'язати для пошуку локально-оптимального розв'язку задачі (3.6)–(3.7). Вибір значення параметра ε обґрунтовано у роботі [1].

Таким чином, запропонований метод дозволяє звести задачу (3.6)–(3.7) з кількістю нерівностей $O(N^2)$ до послідовності задач (3.14)–(3.15) з кількістю квадратичних нерівностей $O(N)$. Це приводить до значного скорочення обчислювальних ресурсів під час розв'язання задач нелінійного програмування, що підтверджують результати обчислювальних експериментів, які наведено у Розділі 6.

3.3.2 Метод розв'язання зі зведенням до задачі без умовної мінімізації. Задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів в прямокутному паралелепіпеді $\Omega \equiv \mathbf{B}$ відповідає така задача нелінійного програмування:

знайти

$$F^*(u) = \min_{l, w, h, x, y, z} l \cdot w \cdot h, \quad (3.16)$$

за обмежень

$$\frac{(x_i - x_j)^2}{a^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{b^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} + \frac{(z_i - z_j)^2}{c^2(\lambda_i + \lambda_j)^2} \geq 1, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (3.17)$$

$$-l \leq x_i - \lambda_i a, \quad x_i + \lambda_i a \leq l, \quad -w \leq y_i - \lambda_i b, \quad y_i + \lambda_i b \leq w, \quad (3.18)$$

$$-h \leq z_i - \lambda_i c, \quad z_i + \lambda_i c \leq h, \quad i = 1, \dots, N,$$

де $x=(x_1,...,x_N)$, $y=(y_1,...,y_N)$, $z=(z_1,...,z_N)$, $l>0$, $w>0$, $h>0$, $\lambda_i>0$, a , b , $c>0$ – константи, $\theta^1=\theta^2=0$.

За допомогою негладких штрафів задача (3.16)–(3.18) зводиться до задачі безумовної мінімізації негладкої функції

$$\min_{l,w,h,x,y,z} \{f(l,w,h,x,y,z)=l \cdot w \cdot h + \Phi_P(l,w,h,x,y,z)\}, \quad (3.19)$$

де штрафна негладка функція $\Phi_P(l,w,h,x,y,z)$ має вигляд

$$\Phi_P(l,w,h,x,y,z)=P_1F_1(x,y,z)+P_2F_2(l,w,h,x,y,z). \quad (3.20)$$

У (3.20) P_k – додатні штрафні коефіцієнти, $k=1,2$, а функції $F_1(x,y,z)$ і $F_2(l,w,h,x,y,z)$ визначаються так:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max\{0, -\frac{(x_i-x_j)^2}{a^2(\lambda_i+\lambda_j)^2} - \frac{(y_i-y_j)^2}{b^2(\lambda_i+\lambda_j)^2} - \frac{(z_i-z_j)^2}{c^2(\lambda_i+\lambda_j)^2} + 1\}, \\ F_2(l,w,h,x,y,z) &= \sum_{i=1}^N \max\{0, -x_i - l + \lambda_i a\} + \sum_{i=1}^N \max\{0, -y_i - w + \lambda_i b\} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \max\{0, -z_i - h + \lambda_i c\} + \sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - l + \lambda_i a\} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \max\{0, y_i - w + \lambda_i b\} + \sum_{i=1}^N \max\{0, z_i - h + \lambda_i c\}. \end{aligned}$$

Використання в (3.20) штрафних коефіцієнтів P_k , $k=1,2$, дозволяє врахувати більшу точність для виконання квадратичних обмежень (3.17) і меншу точність для виконання лінійних обмежень (3.18). Це дає можливість

раціонально керувати знаходженням близьких до граничних екстремальних точок з множини допустимих розв'язків в задачі (3.16)–(3.18).

Алгоритм пошуку найкращого розв'язку задачі (3.16)–(3.18) полягає в такому. Для заданого набору стартових точок здійснюється пошук локальних *мінімумів задачі (3.19) за допомогою модифікації r -алгоритму Шора [96]. Кращий з локальних мінімумів функції $f(l, w, h, x, y, z)$, для якого штрафна функція $\Phi_P(l, w, h, x, y, z)$ близька до нуля, приймається як $(l_r, w_r, h_r, x_r, y_r, z_r)$ – розв'язок задачі (3.16)–(3.18). Йому відповідає краще (рекордне) значення цільової функції $F_r = l_r \cdot w_r \cdot h_r$ – найменший об'єм контейнера, який реалізується для його довжини l_r , ширини w_r і висоти h_r . Стартові точки генеруються випадковим чином в контейнері розмірів (l_r, w_r, h_r) , які послідовно уточнюються у міру знаходження кращого локального мінімуму.

Задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів в еліпсоїді $\Omega \equiv E$ відповідає така задача нелінійного програмування:

знайти

$$F^* = \min_{\gamma, x, y, z} \gamma, \quad (3.21)$$

за обмежень

$$\frac{(x_i - x_j)^2}{(\lambda_i a + \lambda_j a)^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{(\lambda_i b + \lambda_j b)^2} + \frac{(z_i - z_j)^2}{(\lambda_i c + \lambda_j c)^2} \geq 1, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (3.22)$$

$$1 - \frac{(x_i)^2}{(\gamma a - \lambda_i a)^2} - \frac{(y_i)^2}{(\gamma b - \lambda_i b)^2} - \frac{(z_i)^2}{(\gamma c - \lambda_i c)^2} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.23)$$

де $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$, $z = (z_1, \dots, z_N)$, $\gamma > 0$, $\lambda_i > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

– константи, $\theta^1 = \theta^2 = 0$.

За допомогою негладких штрафів задача (3.21)–(3.23) зводиться до задачі безумовної мінімізації негладкої функції

$$\min_{\gamma, x, y, z} \{f(\gamma, x, y, z) = \gamma + \Phi_P(\gamma, x, y, z)\}, \quad (3.24)$$

де штрафна негладка функція $\Phi_P(\gamma, x, y, z)$ має вигляд

$$\Phi_P(\gamma, x, y, z) = P_1 F_1(x, y, z) + P_2 F_2(\gamma, x, y, z) + P_3 F_3(\gamma), \quad (3.25)$$

P_k – додатні штрафні коефіцієнти, $k = 1, 2, 3$ а функції $F_1(x, y, z)$, $F_2(\gamma, x, y, z)$ та $F_3(\gamma)$ визначаються так:

$$F_1(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max \left\{ 0, -\frac{(x_i - x_j)^2}{(\lambda_i a - \lambda_j a)^2} - \frac{(y_i - y_j)^2}{(\lambda_i b - \lambda_j b)^2} - \frac{(z_i - z_j)^2}{(\lambda_i b + \lambda_j b)^2} + 1 \right\},$$

$$F_2(\gamma, x, y, z) = \sum_{i=1}^N \max \left\{ 0, 1 - \frac{(x_i)^2}{(\gamma a - \lambda_i a)^2} - \frac{(y_i)^2}{(\gamma b - \lambda_i b)^2} - \frac{(z_i)^2}{(\gamma b - \lambda_i b)^2} \geq 0 \right\},$$

$$F_3(\gamma) = \max \{0, -\gamma\}.$$

Використання в (3.25) штрафних коефіцієнтів P_k , $k = 1, 2, 3$, дозволяє врахувати більшу точність для виконання квадратичних обмежень (3.22)–(3.23). Це дає можливість раціонально керувати знаходженням близьких до граничних екстремальних точок з множини допустимих розв'язків задачі (3.21)–(3.23).

Метод пошуку найкращого розв'язку задачі (3.21)–(3.23) полягає в такому. Для заданого набору стартових точок здійснюється пошук локальних мінімумів задачі (3.24) за допомогою модифікації r -алгоритму. Кращий з локальних мінімумів функції $f(\gamma, x, y, z)$, для якого штрафна функція близька до нуля, приймається як $(\gamma_r, x_r, y_r, z_r)$ – розв'язок задачі (3.21)–(3.23). Йому

відповідає краще (рекордне) значення цільової функції $F_r = \gamma_r$ найменший коефіцієнт гомотетії контейнера, який реалізується розмірами $(\gamma_r a, \gamma_r b, \gamma_r c)$, що послідовно уточнюються у міру знаходження кращого локального мінімуму.

Програмна реалізація алгоритму виконана на некомерційній мові GNU Octave [98]. Програма або знаходить один з локальних мінімумів в задачі (3.14)–(3.15), або повідомляє про неможливість знайти допустиму точку для системи обмежень (3.15). Ядром програми є octave-функція `ralgb5` [99], яка реалізує r -алгоритм з постійною величиною коефіцієнта розтягнення простору і адаптивним регулюванням кроку в напрямі нормованого антисубградієнта. Це регулювання спрямоване на збільшення точності під час пошуку мінімуму функції в процесі обчислень.

3.4 Метод «доупаковки»

У даному розділі запропоновано *метод «доупаковки»*, основна ідея якого полягає в такому.

Нехай отримано локально-оптимальний розв'язок задачі (3.6)–(3.7) для набору $\{E_i(v_i^*), i \in I_N\}$, що мають розміри $\lambda_i a, \lambda_i b, \lambda_i c, i \in I_N$. Відповідні параметри розміщення v_i^* еліпсоїдів $E_i, i \in I_N$, у контейнері Ω фіксуємо.

Задача «доупаковки». Необхідно заповнити вільний простір $\Omega \setminus \text{int} \bigcup_{i=1}^N E_i(v_i^*)$ усередині контейнера Ω однаково орієнтовними гомотетичними еліпсоїдами, які мають розміри $\lambda_i a, \lambda_i b, \lambda_i c, i \in I_N$, з метою максимізації коефіцієнта заповнення Ω .

В основі алгоритму лежить оптимізаційна процедура, кожна r -а ітерація якої включає розміщення додаткового еліпсоїда $E_r(v_r)$, що полягає у

розв'язанні задачі максимізації коефіцієнта гомотетії еліпсоїда E_r вигляду

$$\max_{v_r \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} \lambda_r,$$

$$W_\lambda = \{v_r \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{E_r E^*}(v_i^*, v_r) \geq 0, \Phi^{E_r \Omega^*}(v_r) \geq 0, \frac{a^-}{a^+} \leq \lambda_r \leq 1, i=1, \dots, N+r-1\},$$

за обмежень включення E_r у контейнер Ω та неперетину з розміщеними еліпсоїдами $\{E_i(v_i^*), i=1, \dots, N+r-1\}$.

Оптимізаційна процедура завершується, якщо $\frac{a^-}{a^+} > \lambda_r$, де λ_r – коефіцієнт гомотетії еліпсоїда E_r , $a^- = a \min\{\lambda_i, i=1, \dots, N+r-1\}$, $a^+ = a \max\{\lambda_i, i=1, \dots, N+r-1\}$ – найменше і найбільше значення великих півосей розміщених еліпсоїдів. Кількість додаткових еліпсоїдів може бути заданою.

3.5 Висновки по розділу 3

У розділі 3 розглянуто задачу упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів (3DHER) в прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму і в контейнер, що має форму еліпсоїда, з мінімальним коефіцієнтом гомотетії. Для аналітичного опису обмежень неперетину еліпсоїдів і включення еліпсоїдів в контейнер побудовано відповідні ϕ -функції. Побудовано математичні моделі у вигляді задач нелінійного програмування і негладкої оптимізації. Запропоновано ефективні методи пошуку допустимих та локально-оптимальних розв'язків задачі 3DHER. Розроблено метод «доупаковки», який дозволяє максимізувати коефіцієнт заповнення контейнера Ω .

Наукові результати, що наведені у розділі 3, опубліковано в таких роботах [3,5,6,9,12,14,20,21,22].

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ НЕОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ ОБЕРТАННЯ (ЗДЕР)

У розділі розглядається задача упаковки еліпсоїдів обертання (сфероїдів) у прямокутний паралелепіпед і циліндр мінімального розміру. Для аналітичного опису умов неперетину еліпсоїдів, що допускають неперервні обертання, і включення еліпсоїда в контейнер будуються вільні від радикалів квазі ρ -фнкції і ρ -функції. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Пропонується швидкий метод для пошуку стартових точок з області допустимих розв'язків та ефективний метод пошуку локальних екстремумів.

Розглядається задача упаковки в такій постановці. Нехай $\Omega \in \{B, C\}$, де B – прямокутний паралелепіпед змінної довжини l , змінної ширини w і змінної висоти h , а C – циліндр з радіусом r , висотою h та змінним коефіцієнтом гомотетії γ (рис. 4.1):

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w, 0 \leq z \leq h\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \gamma r, 0 \leq z \leq \gamma h, \gamma \geq 0\}.$$

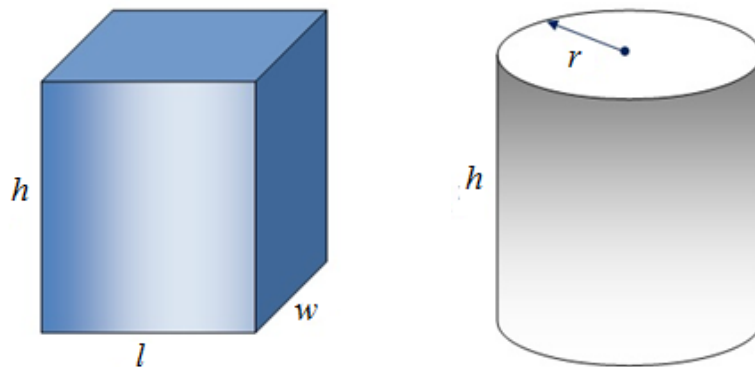


Рис. 4.1. Види розглянутих контейнерів

Маємо набір еліпсоїдів E_i , $i \in I_N$. Кожен еліпсоїд E_i (рис. 4.2) заданий розмірами півосей a_i , b_i і c_i , $c_i = b_i$. Поліус E_i співпадає з початком його власної системи координат, а межа еліпсоїда E_i описується в параметричному вигляді: $x_i = a_i \cos t_i$, $y = b_i \sin t_i \cos g_i$, $z = b_i \sin t_i \sin g_i$, $0 \leq t_i \leq 2\pi$, $0 \leq g_i \leq 2\pi$. Вважаємо, що еліпсоїди E_i , $i \in I_N$, повинні розміщуватися всередині області Ω без перетинів. Система координат контейнера Ω – фіксована. Положення еліпсоїда E_i описується так: $E(u_i) = \{u_i \in \mathbb{R}^3 : u_i = v_i + M(\Theta_i) \cdot u_i^0, \forall u_i^0 \in E_i^0\}$, де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ вектор трансляції, $\Theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)$, де θ_i^1, θ_i^2 кути Ейлера, а матриця повороту $M(\Theta_i)$ має вигляд

$$M(\Theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i^1 \cdot \cos \theta_i^2 & -\sin \theta_i^1 & -\cos \theta_i^1 \cdot \sin \theta_i^2 \\ \sin \theta_i^1 \cdot \cos \theta_i^2 & \cos \theta_i^1 & -\sin \theta_i^1 \cdot \sin \theta_i^2 \\ -\sin \theta_i^2 & 0 & \cos \theta_i^2 \end{pmatrix}.$$

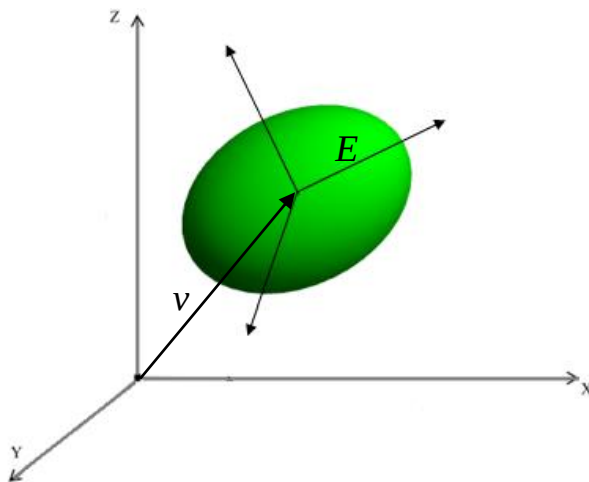


Рис. 4.2 Параметри розміщення еліпсоїда

Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DEP). Упакувати набір

еліпсоїдів $\{E_i, i \in I_N\}$, у контейнері $\Omega \in \{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ мінімальних розмірів (мінімального об'єму при $\Omega \equiv \mathbf{B}$, мінімального коефіцієнта гомотетії при $\Omega \equiv \mathbf{E}$).

4.1 Phi-функції та квазі phi-функції для моделювання обмежень розміщення в задачі 3DEP

Як ефективний засіб математичного моделювання відносин неорієнтованих phi-об'єктів, зі змінними метричними характеристиками використовується клас phi-функцій і квазі phi-функцій [88].

Нехай задано еліпсоїди (сфероїди) $E_i(u_i)$ і $E_j(u_j)$.

Твердження 4.1. Функція вигляду

$$\begin{aligned} \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) &= \min\{\chi(\Theta_i, \Theta_j, u'_{ij}), \chi_1^+(u_i, u_j, u'_{ij}), \\ &\chi_1^-(u_i, u_j, u'_{ij}), \chi_2^+(u_i, u_j, u'_{ij}), \chi_2^-(u_i, u_j, u'_{ij})\}, \\ \chi &= -\langle N'_1, N'_2 \rangle = -\alpha'_1 \alpha'_2 - \beta'_1 \beta'_2 - \gamma'_1 \gamma'_2, \\ \chi_k^\pm &= \alpha'_i (x_{jk}^\pm - x_i) + \beta'_i (y_{jk}^\pm - y_i) + \gamma'_i (z_{jk}^\pm - z_i) - 1, \\ (x'_i, y'_i, z'_i) &= v_i + M(\theta_i) \cdot (x_i^t, y_i^t, z_i^t) \\ (x_{j2}^\pm, y_{j2}^\pm, z_{j2}^\pm) &= v_j + M(\theta_j)(a_j \cos t_j, b_j \sin t_j, \sqrt{2a_j})^T, \\ \alpha_i &= \frac{\cos t_i}{a_i}, \beta_i = \frac{\sin t_i \cos g_i}{b_i}, \gamma_i = \frac{\sin t_i \sin g_i}{b_i}, \\ (\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i) &= M(\Theta_i)(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \end{aligned} \quad (4.1)$$

де $u'_{ij} = (t_i, g_i, t_j, g_j)$, є квазі phi-функцією для E_i і E_j .

В (4.1) $(x_{jk}^+, y_{jk}^+, z_{jk}^+)$ – координати точки q_{jk}^+ , а $(x_{jk}^-, y_{jk}^-, z_{jk}^-)$ –

координати точки q_{jk}^- (рис. 4.3).

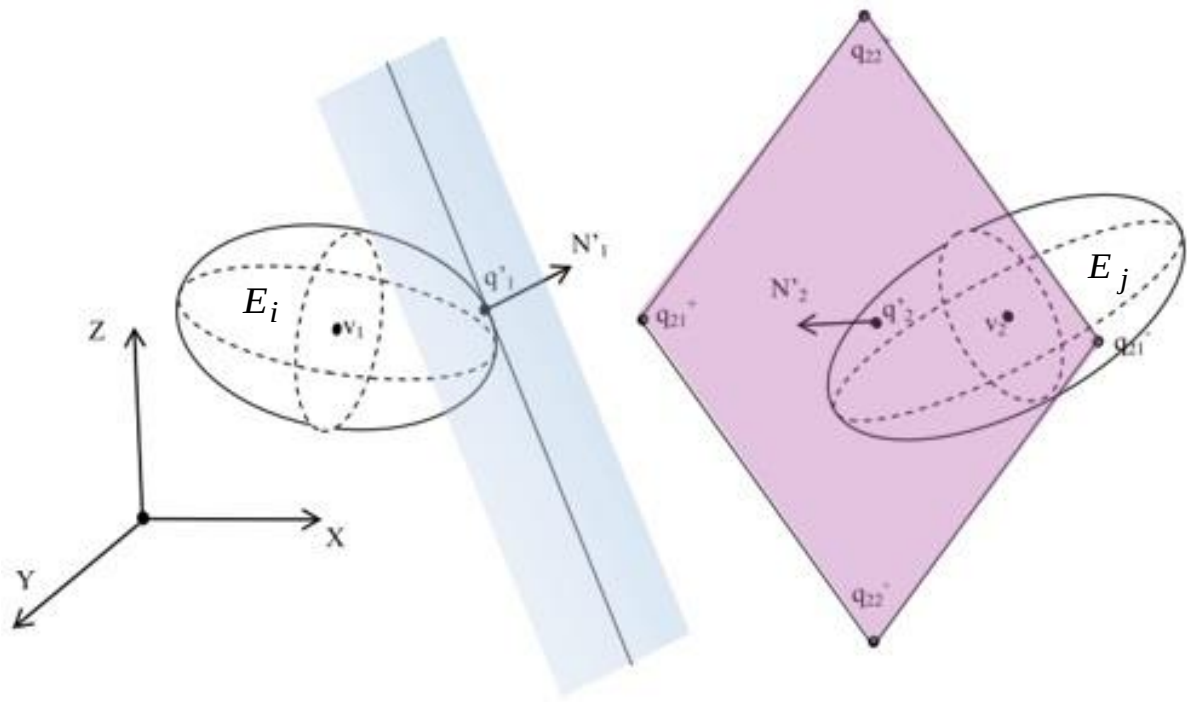


Рис. 4.3. Ілюстрація до побудови квазі ϕ -функції для еліпсоїдів E_i і E_j

Доведення. Очевидно, що $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij})$ всюди визначена і неперервна за всіма змінними функція.

Нехай еліпсоїди E_i і E_j мають спільні внутрішні точки. Тоді за будь-яких параметрів u'_{ij} вираз (4.1) від'ємний, тобто $\max_{u'_{ij}} \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) < 0$.

Нехай еліпсоїди E_i і E_j дотикаються. Тоді значення за будь-яких параметрів u'_{ij} вираз (4.1) є від'ємним або $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) = 0$. Як наслідок, $\max_{u'_{ij}} \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) = 0$.

Нехай еліпсоїди E_i і E_j не перетинаються. Тоді, відповідно до теореми про відокремлювальні гіперплощини [88], існує безліч таких u'_{ij} , за яких

$$\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) > 0 \Rightarrow \max_{u'_{ij}} \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) > 0.$$

Таким чином, розглянута функція задовольняє визначенню квазі ϕ -функції.

Квазі ϕ -функція для еліпсоїда і об'єкта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$. Нехай E – еліпсоїд зі змінними параметрами $u = (x, y, z, \Theta)$, а $\mathbf{B}$ – прямокутний паралелепіпед з відповідними вершинами $\{v_i, i = 1, \dots, 8\} = \{(0, w, 0), (l, w, 0), (l, 0, 0), (0, 0, 0), (0, w, h), (l, w, h), (l, 0, h), (0, 0, h)\}$.

Твердження 4.2. Функція вигляду

$$\Phi'^{E\Omega^*}(u, u') = \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)\} \quad (4.2)$$

є квазі ϕ -функцією для E і Ω^* , де $u' = (t'_1, t'_2, t'_3, g'_1, g'_2, g'_3)$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= \min\{\varphi_1(v_1), \varphi_1(v_2), \varphi_1(v_3), \varphi_1(v_4), \varphi_1(v_5), \varphi_1(v_6), \varphi_1(v_7), \varphi_1(v_8)\} \\ \varphi_2(u) &= \min\{\varphi_2(v_1), \varphi_2(v_4), \varphi_2(v_5), \varphi_2(v_8), \varphi_2(v_2), \varphi_2(v_3), \varphi_2(v_6), \varphi_2(v_7)\} \end{aligned}$$

$$\varphi_3(u) = \min\{\varphi_3(v_1), \varphi_3(v_2), \varphi_3(v_5), \varphi_3(v_6), \varphi_3(v_3), \varphi_3(v_4), \varphi_3(v_7), \varphi_3(v_8)\}$$

$$\varphi_{k1} = A_k x + B_k y + C_k z + D_k - 1, \quad \varphi_{k2} = -A_k x - B_k y - C_k z - D_k - 1$$

$$(A_k, B_k, C_k) = M(\Theta)(a \cos t_k, b \sin t_k \cos g_k, b \sin t_k \sin g_k)^T$$

$$D_k = -A_k x - B_k y - C_k z, \quad k = 1, 2, 3.$$

Доведення. Очевидно, що $\Phi'^{E\Omega^*}(u, u')$ всюди визначена і неперервна за всіма змінними.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* мають спільні внутрішні точки. Тоді за будь-яких значень u' хоча б одна з функцій $\varphi_k(u)$ матиме значення менше нуля, а отже, і функція (4.2) буде від'ємною.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* дотикаються, тоді існують такі значення u' , за яких у виразі (4.2) хоча б одна з функцій $\varphi_k(u)$ буде мати значення, що дорівнює нулю, а інші – більше нуля, отже, $\max_{u'} \Phi'^{E\Omega^*}(u, u') = 0$.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* не перетинаються. Тоді існує нескінченна множина значень u' , за яких $\Phi'^{E\Omega^*}(u, u') > 0$, отже, $\max_{u'} \Phi'^{E\Omega^*}(u, u') > 0$.

Таким чином, розглянута функція задовольняє визначенню квазі φ -функції.

φ -функція для еліпсоїда E і об'єкта $\Omega^ = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$.* Нехай E – еліпсоїд зі змінними параметрами, а $\mathbf{B}$ – прямокутний паралелепіпед заданих розмірів.

Твердження 4.3. Функція вигляду

$$\Phi^{E\Omega^*}(u) = \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)\} \quad (4.3)$$

є φ -функцією для еліпсоїда і об'єкта Ω^* , де $\varphi_i(u)$ – φ -функція для кожного еліпса E_k , $k=1, 2, 3$, і доповнення до прямокутника $\Omega_k^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_k$, E_k – відповідні проекції еліпсоїда E на сторони контейнера (рис. 4.4).

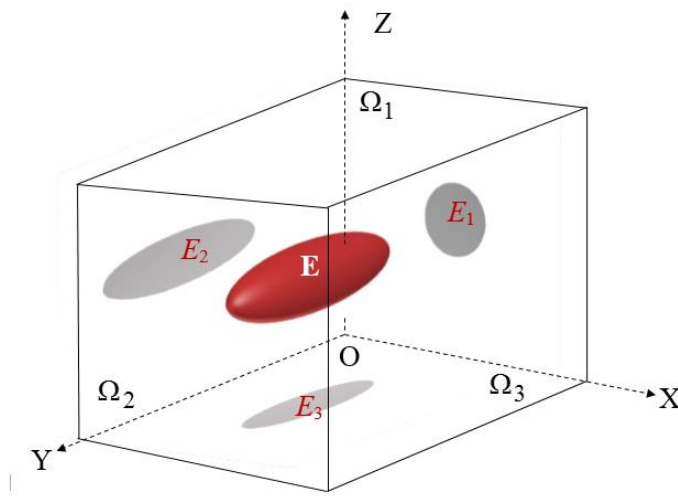


Рис. 4.4. Ілюстрація до побудови φ -функції для E і об'єкта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$

Phi-функція для еліпсоїда $E(u)$ і об'єкта $\Omega^ = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$. Нехай $E(u)$ – еліпсоїд обертання зі змінними параметрами $u = (x, y, z, \theta_1, \theta_2)$, а $\mathbf{B}$ – прямокутний паралелепіпед заданої довжини, ширини і висоти l, w, h . Тоді E_1 – еліпс, який є проекцією еліпсоїда $E(u)$ на площину Ω_1 ; E_2 – еліпс, який є проекцією еліпсоїда $E(u)$ на основу Ω_2 контейнера $\mathbf{B}$; $(x, y, \theta_1, \theta_2)$ – параметри розміщення еліпса E_2 (рис. 4.5).*

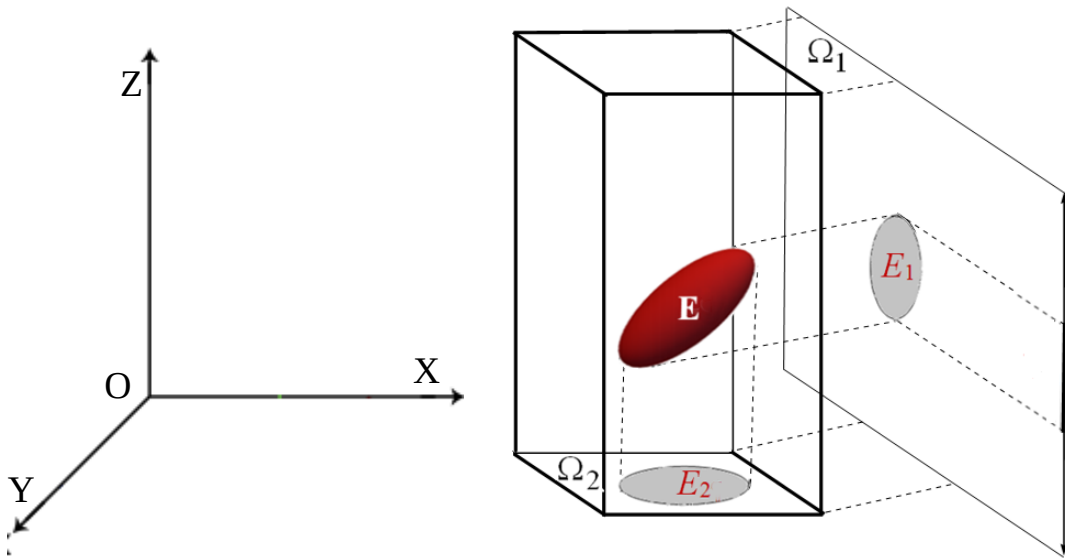


Рис. 4.5. Ілюстрація до побудови ϕ -функції для еліпсоїда E і об'єкта (доповнення до прямокутного паралелепіпеда) Ω^*

Твердження 4.4. Функція

$$\Phi^{E\Omega^*}(u) = \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\} \quad (4.4)$$

є ϕ -функцією для еліпсоїда E і доповнення до прямокутного паралелепіпеда $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \mathbf{B}$, де

$$\varphi_1(u) = \min\{z - a_1, h - z - a_1\}, \quad \varphi_2(u) = \min_{k=1, \dots, 4} f_k(u),$$

$$f_1(u) = x - a^*, \quad f_2(u) = y - b^*, \quad f_3(u) = l - x - a^*, \quad f_4(u) = w - y - b^*,$$

$$a^* = \sqrt{b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \cos^2 \theta_1}, \quad b^* = \sqrt{b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \theta_1},$$

а $\varphi_2(u)$ – φ -функція для еліпса, який є проекцією еліпсоїда E на основу Ω_2 прямокутного паралелепіпеда B і об'єкта $\Omega_2^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_2$, де Ω_2 – прямокутник.

Доведення. Нехай E_1 і E_2 – проекції еліпсоїда E на сторони контейнера Ω_1, Ω_2 (рис. 4.5).

Визначимо розміри півосей проекцій еліпсоїда на дві грані прямокутного паралелепіпеда для $E_1(a_1, b_1)$: $a_1 = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\theta_1)}$, $b_1 = b$, для $E_2(a_2, b_2)$: $a_2 = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2(\theta_1)}$, $b_2 = b$.

Очевидно, що $\Phi^{E\Omega^*}(u)$ всюди визначена і неперервна за всіма змінними.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* мають спільні внутрішні точки. Тоді за будь-яких значень u хоча б одна з функцій $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $f_k(u)$, $k=1, \dots, 4$, матиме значення менше нуля за визначенням φ -функції, отже, і функція (4.4) буде від'ємною.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* дотикаються, тоді існують такі значення u , за яких у виразі (4.4) хоча б одна з функцій $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $f_k(u)$, $k=1, \dots, 4$, буде мати значення, що дорівнює нулю за визначенням φ -функції, а інші більше нуля, отже, $\Phi^{E\Omega^*}(u) = 0$

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* не перетинаються. Тоді при будь-яких значеннях u кожна з функцій $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $f_k(u)$, $k=1, \dots, 4$, буде додатною,

тому $\Phi^{E\Omega^*}(u) > 0$.

Таким чином, функція (4.4) задовольняє визначенню ϕ -функції.

ϕ -функція для еліпсоїда обертання і об'єкта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} C$. Нехай $E(u)$ – еліпсоїд обертання зі змінними параметрами $u = (x, y, z, \theta_1, \theta_2)$, а C – циліндр заданої висоти h і радіуса r .

Твердження 4.5. Функція

$$\Phi^{E\Omega^*}(u) = \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\} \quad (4.5)$$

є ϕ -функцією для еліпсоїда E і об'єкта Ω^* , при

$$\varphi_1(u) = \min\{z - a_1, h - z - a_1\}, \quad \varphi_2(u) = \Phi^{E_2 C^*}(x, y, \theta_1, \theta_2). \quad (4.6)$$

$$\Phi^{E_2 C^*}(x, y, \theta_1, \theta_2) = \Phi^{C_2 E^*}(x, y, \theta_1, \theta_2)$$

де $\Phi^{E_2 \Omega_2^*}(u)$ ϕ -функція для еліпса $E_2(u)$ і об'єкта $\Omega_2^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int} \Omega_2$, де Ω_2 – коло з радіусом r і центром в точці $(0, 0, 0)$.

Доведення. Нехай еліпс E_1 з півосями (a_1, b_1) є проекцією еліпсоїда E на прямокутник Ω_1 , який належить площині, паралельній осі OZ ; еліпс E_2 з півосями (a_2, b_2) може бути отриманий як проекція еліпсоїда E на XOY (рис. 4.6).

Тоді розміри півосей еліпсів E_1 і E_2 становлять $a_1 = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\theta_1)}$, $b_1 = b$ для E_1 та $a_2 = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2(\theta_1)}$, $b_2 = b$ для E_2 .

Щоб визначити ϕ -функцію $\Phi^{E_2 \Omega_2^*}(u)$, використовуємо афінні

перетворення повороту і розтягнення простору, які трансформують еліпс $E_2(u)$ в коло C з радіусом b , а круговий контейнер Ω_2 – в еліптичний контейнер E_Ω з півсями $a^* = R$, $b^* = R \cdot \frac{b}{a}$.

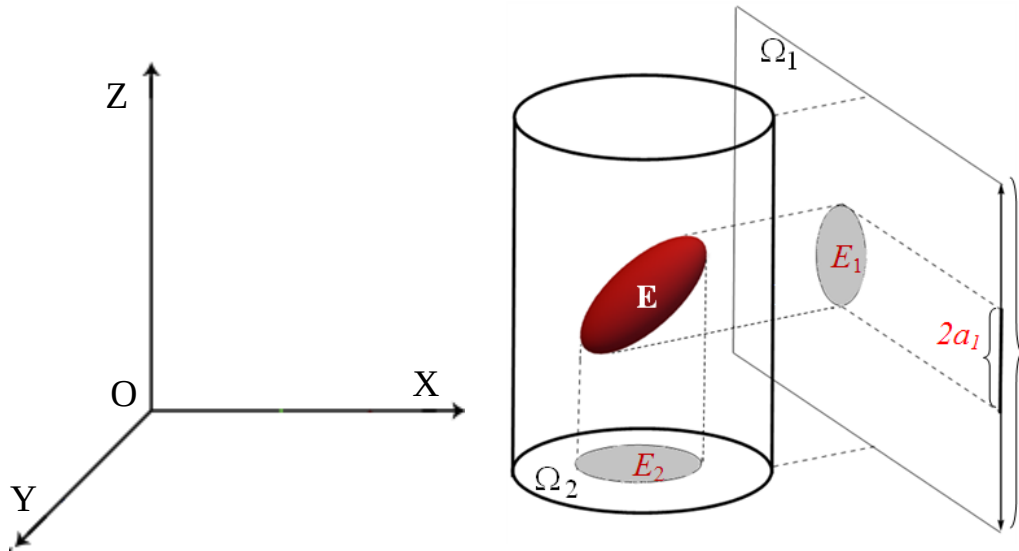


Рис. 4.6. Ілюстрація до побудови ϕ -функції для E і об'єкта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } C$

Спираючись на ідеї, поданій у роботі [51], обмеження включення $C(s, \varphi) \subset E_\Omega$ (рис. 4.7а) можуть бути наведені в такому вигляді:

$$\Lambda(s, \varphi) = (b^* - s) \sqrt{\frac{b^{*2}}{a^{*2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} - b, \quad (4.7)$$

де $E_\Omega = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} - 1 \leq 0\}$ і змінні $s \geq 0$, $\varphi \in R^1$ використовуються для параметричного опису E_Ω .

Щоб визначити ϕ -функцію для обмеження включення $C(x, y) \subset E_\Omega$, необхідно реалізувати такі перетворення.

Спершу визначити центральну точку $(x'(s, \varphi), y'(s, \varphi))$ кола $C(s, \varphi)$ у вигляді (рис. 4.7а)

$$x'(s, \varphi) = \frac{\cos \varphi}{a^*} (a^{*2} - b^{*2} + s \cdot b^*), \quad y'(s, \varphi) = s \sin \varphi.$$

Множина точок $(x'(s, \varphi), y'(s, \varphi))$ формує еліпс E_Ω з параметрами розміщення $(0, 0, 0)$, якщо $0 \leq s \leq b^*$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ і $(x'(s, \varphi), y'(s, \varphi)) \in \text{fr}E$, якщо $s = b^*$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, де $\text{fr}E$ є границею еліпсоїда E .

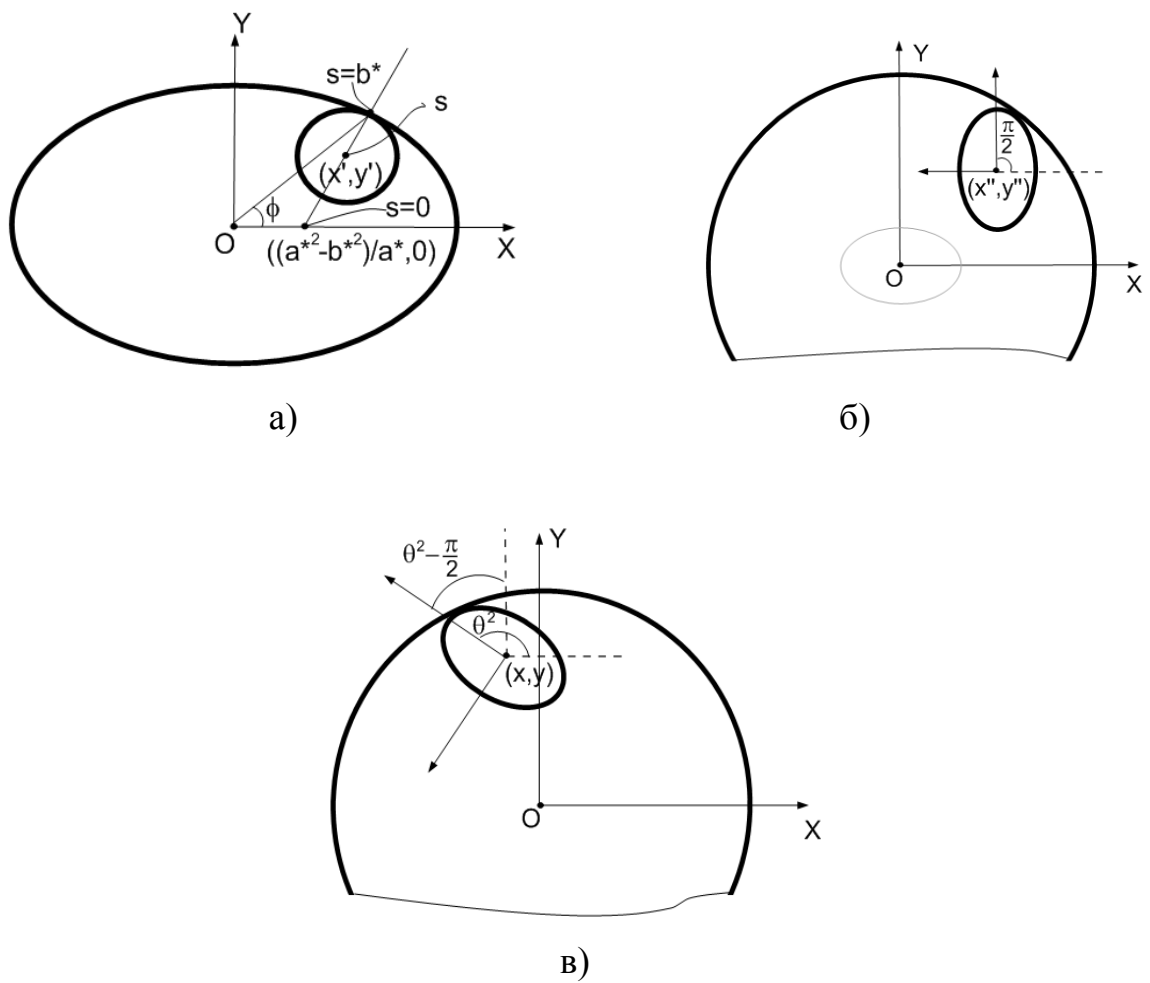


Рис. 4.7. Ілюстрація до побудови ρ -функції $\Phi^{E_2\Omega_2^*}$:

а) $C(x', y') \subset E_\Omega$, б) $E_2(x'', y'', \theta^{2''}) \subset \Omega_2$, в) $E_2(x, y, \theta^2) \subset \Omega_2$

Далі необхідно реалізувати розширення простору уздовж ОУ на $\frac{a}{b}$, щоб отримати еліпс $E_2(x'', y'', \theta_2'' = \frac{\pi}{2})$, який належить круговому контейнеру Ω_2 (рис. 4.7б), де $x''(s, \varphi) = x'(s, \varphi)$, $y''(s, \varphi) = y'(s, \varphi) \cdot b$.

На наступному кроці потрібно виконати обертання простору на кут $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$ відносно центру осей координат О, щоб отримати еліпс $E(x, y, \theta_2)$, який належить круговому контейнеру Ω_2 (рис. 4.7в).

Слід зазначити, що знак функції $\Lambda(s, \varphi)$ не змінюється при афінних перетвореннях.

Таким чином, функцію (4.7) можна розглядати як ϕ -функцію для кола C з параметрами розміщення $x(s, \varphi), y(s, \varphi)$ і об'єкта $E_{\Omega}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } E_{\Omega}$ з параметрами розміщення $(0, 0, 0)$.

Отже,

$$\Phi^{CE_{\Omega}^*}(u(s, \varphi)) = \Lambda(s, \varphi),$$

де $u(s, \varphi) = (x(s, \varphi), y(s, \varphi), \theta^1, \theta^2)$.

Тепер ми можемо визначити ϕ -функцію еліпса $E_2(x, y, \theta_2)$ і об'єкта Ω_2^* у вигляді

$$\Phi^{E_2\Omega_2^*}(u) = \Phi^{CE_{\Omega}^*}(u).$$

Таким чином, обмеження включення $E \subset C$, можна описати нерівністю $\Phi(u) \geq 0$, де $\Phi(u)$ – ϕ -функція (4.5) для еліпсоїда $E(u)$ і об'єкта Ω^* .

Очевидно, що $\Phi^{E\Omega^*}(u)$ всюди визначена і неперервна за всіма змінними.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* мають спільні внутрішні точки. Тоді за будь-яких значень u хоча б одна з функцій $\varphi_k(u)$ матиме значення менше нуля

за визначенням φ -функції, а отже, і функція (4.5) буде від'ємною.

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* дотикаються, тоді існують такі значення u , за яких у виразі (4.5) хоча б одна з функцій $\varphi_k(u)$ буде мати значення, що дорівнює нулю за визначенням φ -функції, а інші більше нуля, отже, $\Phi^{E\Omega^*}(u) = 0$

Нехай еліпсоїд E і об'єкт Ω^* не перетинаються. Тоді при будь-яких значеннях u кожна з функцій $\varphi_k(u)$, $k = 1, 2$, буде додатною, тому $\Phi^{E\Omega^*}(u) > 0$.

Таким чином, розглянута функція задовольняє визначенню φ -функції.

4.2 Математична модель задачі 3DEP

Визначимо вектор змінних задачі 3DEP. Фіксуємо коефіцієнт гомотетії λ_i еліпсоїда E_i , покладаючи $\lambda_i = 1$ для всіх $i \in I_N$.

Вектор змінних $u \in \mathbb{R}^\sigma$ визначається так: $u = (p, u_1, u_2, \dots, u_N, \tau) \in \mathbb{R}^\sigma$, де p – вектор метричних характеристик контейнера Ω , $u_i = (x_i, y_i, z_i, \Theta_i)$ – вектор параметрів розміщення еліпсоїда E_i , $i \in I_N$. Вектор додаткових змінних має вигляд $\tau = (t_1^1, g_1^1, t_2^1, g_2^1, \dots, t_1^m, g_1^m, t_2^m, g_2^m)$, де $t_1^k, g_1^k, t_2^k, g_2^k$ додаткові змінні для k -ї пари еліпсоїдів, відповідно до формули (4.1), $k = 1, \dots, m$, $m = \frac{(N-1)N}{2}$, $|\tau| = 4m$.

Математична модель задачі 3DEP може бути подана у вигляді

$$\min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u), \quad (4.8)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi'_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij}) \geq 0, j > i \in I_N, \gamma_i(p, u_i, u'_i) \geq 0, i \in I_N\}, \quad (4.9)$$

де $F(u)$ – цільова функція; $u = (p, u_1, \dots, u_N, \tau)$ – вектор змінних задачі; $u_i = (v_i, \Theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, p – вектор змінних метричних характеристик контейнера Ω ; $\tau = \{u'_i, u'_{ij}, i < j \in I_N\}$ – вектор додаткових змінних для побудови квазі ϕ -функцій; $\mathbb{R}^\sigma$ – арифметичний евклідів простір розмірності σ ; $\Phi'_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij})$ – квазі ϕ -функція (4.1) для еліпсоїдів E_i і E_j ; $i < j \in I_N$; $\Upsilon_i(p, u_i, u'_i)$ – ϕ -функція або квазі ϕ -функція для опису умови $E_i \subset \Omega$; $F(u) = l \cdot w \cdot h$, $\sigma = 5N + 3 + |\tau|$, $|\tau| = 2N(N - 1) + \eta$, $\eta = 0$ за умови, що $\Upsilon_i(p, u_i, u'_i)$ – ϕ -функція, $\eta = 6N$ за умови, що $\Upsilon_i(p, u_i, u'_i)$ – квазі ϕ -функція, якщо $\Omega \equiv \mathbf{B}$; $F(u) = \lambda$, $\sigma = 2N^2 + 2N + 1$, $|\tau| = 2N(N - 1)$, якщо $\Omega \equiv \mathbf{C}$.

Задача умовної оптимізації (4.8)–(4.9) є NP-складною задачею нелінійного програмування. Модель (4.8)–(4.9) є точною математичною моделлю задачі 3DEP, яка містить усі її глобально-оптимальні розв'язки. Кількість змінних та нерівностей у цій моделі має оцінку, що є квадратичною відносно кількості еліпсоїдів.

4.3 Метод розв'язання задачі 3DEP

Для розв'язання задачі 3DEP пропонується стратегія, що складається з таких етапів:

Етап 1. Генеруємо набір стартових точок з області допустимих розв'язків задачі (4.8)–(4.9), використовуючи метод, що описаний у Розділі 4.3.1.

Етап 2. Шукаємо локальний мінімум цільової функції $F(u)$ задачі (4.8)–(4.9), стартуючи з точок, отриманих на етапі 1, застосовуючи метод (3DLOFRT) локальної оптимізації з перетворенням області допустимих розв'язків, описану у Розділі 4.3.2.

Етап 3. Обираємо кращий локально-оптимальний розв'язок з отриманих на етапі 2 як розв'язок задачі (4.8)–(4.9).

Важливою частиною стратегії розв'язання є метод 3DLOFRT (етап 2), який дозволяє зменшити розмірність задачі і скоротити обчислювальні витрати.

4.3.1 Метод побудови стартових точок для задачі 3 D E P. Щоб побудувати стартову точку u^0 , що належить області допустимих розв'язків W , необхідно застосувати метод, в основі якого лежать гомотетичні перетворення еліпсоїдів. Вважаємо, що коефіцієнти гомотетії λ_i змінні, $\lambda_i = \lambda$ для $i \in I_N$ і $0 \leq \lambda \leq 1$.

Метод побудувати стартових точок включає такі етапи (рис. 4.8):

1. Задаємо початкові розміри контейнера Ω^0 досить великими, так, щоб гарантувати розміщення всіх заданих еліпсоїдів E_i , $i \in I_N$ в Ω^0 . Наприклад,

$$l = w = h = 2 \sum_{i=1}^N a_i,$$

при $\Omega \equiv B$.

2. Нехай $\lambda = \lambda^0 = \frac{\delta}{\max_i a_i}$, де $\delta = 0.01(\min_i b_i)$.

3. Генеруємо множину N куль радіуса δ , що не перетинаються, із випадково обраним центром $(x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in \Omega^0$.

4. Генеруємо множину випадково обраних параметрів обертання $\Theta_i^0 = (\theta_i^{01}, \theta_i^{02})$, $i \in I_N$.

5. Визначаємо стартові значення вектора додаткових змінних τ^0 за допомогою спеціальної процедури оптимізації, яка розв'язує допоміжну задачу пошуку $\max_{u'_i} \Phi'_i(u_i^0, u'_i)$ і $\max_{u'_{ij}} \Phi'_{ij}(u_i^0, u_j^0, u'_{ij})$ за фіксованих параметрів $u_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0, \Theta_i^0, \lambda^0)$ для $i \in I_N$.

Математична модель допоміжної задачі має такий вигляд:

$$\max_{(\mu, \tau) \in W_\mu} \mu, \quad (4.10)$$

$$W_\mu = \{(\mu, \tau) : \Phi'(\mu, \tau) \geq \mu\}, \quad (4.11)$$

де $\mu \in R^1$ – допоміжна змінна, τ – вектор додаткових змінних, а $u^0 = (p^0, u_1^0, \dots, u_N^0, \tau^0)$ – вектор фіксованих параметрів для квазі ρ -функції.

Таким чином, всі квазі ρ -функції в точці u^0 дають невід'ємні значення.

6. Розв'язуємо допоміжну задачу за фіксованих значень p^0

$$\max_{u_\lambda \in W_\lambda} \lambda, \quad (4.12)$$

$$W_\lambda = \{u_\lambda \in \mathbb{R}^{\sigma-|p|+1} : \Phi'_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij}, \lambda) \geq 0, i < j \in I_N, \Phi_i(p^0, u_i) \geq 0, \quad (4.13)$$

$$i \in I_N, 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

де $u_\lambda = (u, \lambda)$ – вектор змінних; $u = (u_1, u_2, \dots, u_N, \tau^0)$ – вектор змінних задачі (4.8)–(4.9); λ – змінний коефіцієнт гомотетії для всіх еліпсоїдів.

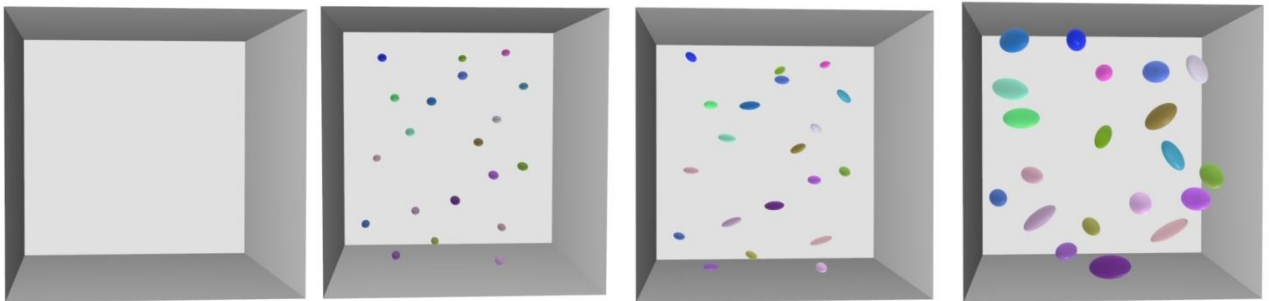


Рис. 4.8. Побудова стартових точок

7. Генеруємо точку $u^0 = (p^0, u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0, \tau^0)$ з області допустимих

розв'язків W задачі (4.8)–(4.9), на основі точки глобального максимуму задачі (4.12)–(4.13). Вектор u^0 розглядається як стартова точка для пошуку наступного локального мінімуму задачі (4.8)–(4.9)

4.3.2 Метод локальної оптимізації (3 D L O F R T) для 3 D E P. Нехай $u^{(0)} \in W$ – одна зі стартових точок, отриманих описаним вище методом. Основна ідея методу 3DLOFRT полягає в такому.

Перш за все навколо кожного еліпсоїда E_i опишемо кулю S_i радіуса a_i , $i \in I_N$.

Далі для кожної кулі S_i будуюмо «індивідуальний» прямокутний контейнер $\Omega_i \supset S_i \supset E_i$ з рівними сторонами півдовжини $a_i + \varepsilon$, $i \in I_N$, так, що S_i , E_i і Ω_i мають спільний центр в точці (x_i^0, y_i^0, z_i^0) за умови, що сторони Ω_i паралельні відповідним сторонам Ω (рис. 4.9). Тут ε – наперед задане додатне число.

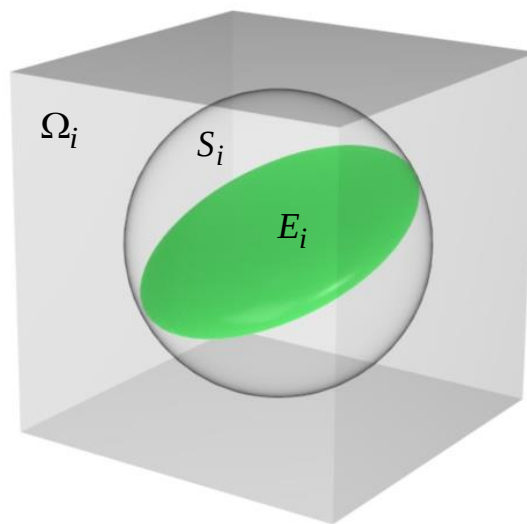


Рис. 4.9 Індивідуальні контейнер Ω_i еліпсоїда E_i

Будуємо область допустимих розв'язків для задачі оптимізації таким чином.

Визначаємо систему обмежень на вектор трансляції для кожного

еліпсоїда E_i у вигляді

$$\Phi^{S_i\Omega^*}(u_i) = \min\{-x_i + x_i^0 + \varepsilon, -y_i + y_i^0 + \varepsilon, -z_i + z_i^0 + \varepsilon, \\ x_i - x_i^0 + \varepsilon, y_i - y_i^0 + \varepsilon, z_i - z_i^0 + \varepsilon, i \in I_N\}.$$

Нерівність $\Phi^{S_i\Omega^*}(u_i) \geq 0$ еквівалентна системі з шести лінійних нерівностей

$$-x_i + x_i^0 + \varepsilon \geq 0, x_i - x_i^0 + \varepsilon \geq 0, -y_i + y_i^0 + \varepsilon \geq 0, y_i - y_i^0 + \varepsilon \geq 0, \\ -z_i + z_i^0 + \varepsilon \geq 0, z_i - z_i^0 + \varepsilon \geq 0.$$

Це означає, що кожна куля може перебувати тільки всередині відповідного контейнера Ω_i , $i \in I_N$.

Визначаємо систему нерівностей додаткових обмежень на розміри області розміщень

$$f(p) \leq f(p^0) - \varepsilon.$$

Далі формуємо область допустимих розв'язків вигляду

$$W_1 = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi'_{ij}(u_i, u_j, u_{ij}) \geq 0, (i, j) \in \Xi_1, \Phi_i(u_i, p) \geq 0, i \in \Xi_2,$$

$$\Phi^{S_i\Omega^*}(u_i) \geq 0, i \in I_N, f(p) \leq f(p^0) - \varepsilon\},$$

$$\Xi_1 = \{(i, j) : \Phi'^{\Omega_i\Omega_j}(u_i, u_j, u_{ij}) < 0, j > i \in I_N\}, \Xi_2 = \{i : \Phi^{\Omega^*\Omega_i}(u_i, p) < 0, i \in I_N\}.$$

Інакше кажучи, із системи, яка описує W , вилучаємо нерівності з квазі

ϕ -функціями для всіх пар еліпсоїдів, індивідуальні контейнери яких не перетинаються. При цьому додаємо допоміжні нерівності, що описують умову включення куль S_i у відповідний індивідуальний контейнер Ω_i , $i \in I_N$,

Таке перетворення дозволяє зменшити число допоміжних змінних вектора τ на σ_1 . Потім здійснюємо пошук точки локального мінімуму $u_{w_1}^*$ підзадачі

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset \mathbb{R}^{\sigma - \sigma_k}} F(u_{w_k}), \quad (4.14)$$

$$W_k = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi'_{ij}(u_i, u_j, u_{ij}) \geq 0, (i, j) \in \Xi_{k1}, \quad (4.15)$$

$$\Phi_i^k(u_i, p) \geq 0, i \in \Xi_{k2}, \Phi^{S_i \Omega_{ki}^*}(u_i, p) \geq 0, f(p) \leq f(p^0) - \varepsilon\},$$

$$\Xi_{k1} = \{(i, j) : \Phi'^{\Omega_{ki} \Omega_{kj}} < 0, i > j \in I_N\}, \Xi_{k2} = \{i : \Phi^{\Omega_{ki} \Omega^*} < 0, i \in I_N\},$$

де нерівність $f(p_{w_k}) \leq f(p_{w_{k-1}}) - \varepsilon$ означає

$$\gamma_{w_k} h \leq \gamma_{w_{k-1}} h - \varepsilon, \gamma_{w_k} r \leq \gamma_{w_{k-1}} r - \varepsilon \text{ при } \Omega \equiv C,$$

$$l_{w_k} \leq l_{w_{k-1}} - \varepsilon, w_{w_k} \leq w_{w_{k-1}} - \varepsilon, h_{w_{k-1}} \leq h_{w_{k-1}} - \varepsilon \text{ при } \Omega \equiv B.$$

Точка $u_{w_1}^*$ використовується під час побудови стартової точки $u^{(1)}$ для другої ітерації оптимізаційної процедури. Слід зауважити, що $u_{w_1}^*$ береться як центральна точка для нової підмножини

$$\begin{aligned} \Pi_k^\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^{\sigma - \sigma_k} : -x_i + x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, \\ -y_i + y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, -z_i + z_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, x_i - x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, \\ y_i - y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, z_i - z_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, i \in I_N\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Варто зауважити, що раніше вилучені допоміжні змінні повинні бути перевизначені за допомогою розв'язання допоміжної задачі (4.10)–(4.11). На даному етапі знову описуємо всі еліпсоїди індивідуальними контейнерами, що не перетинаються та формують відповідну підобласть W_2 (аналогічно W_1) і знаходимо точку локального мінімуму $u_{w_2}^* \in W_2$, яка використовується для побудови стартової точки $u^{(2)}$ для третьої ітерації, і т.д.

Ітераційна процедура методу 3DLOFRT закінчується, якщо точка локального мінімуму k -ї підзадачі не належить границі "штучної" підмножини Π_k^ε (4.16). Діаграма пошуку локального-оптимального розв'язку на послідовності підобластей W_k (4.15) показана на рис. 4.10.

Точка $u^* = u^{(k)*} = (u_{w_k}^*, \tau_k) \in \mathbb{R}^\sigma$ є точкою локального мінімуму задачі (4.14)–(4.15), де точка $u_{w_k}^* \in \mathbb{R}^{\sigma - \sigma_k}$ є точкою локального мінімуму на останній ітерації, а $\tau_k \in \mathbb{R}^{\sigma_k}$ – вектор вилучених раніше додаткових змінних. Це твердження випливає з того факту, що розміщення кожної пари еліпсоїдів E_i і E_j при $(i, j) \in \Xi \setminus \Xi_k$ та гарантує існування вектора τ_k додаткових змінних, за яких $\Phi'_{ij}(u_i, u_j, u') \geq 0, (i, j) \in W \setminus W_k$ в точці $u^{(k)*}$. Отже, значення додаткових змінних вектора τ_k не впливає на значення цільової функції, тобто $F(u_{w_k}^*) = F(u^{(k)*})$. У зв'язку з цим немає необхідності перевизначати значення додаткових змінних вектора τ_k на останній ітерації.

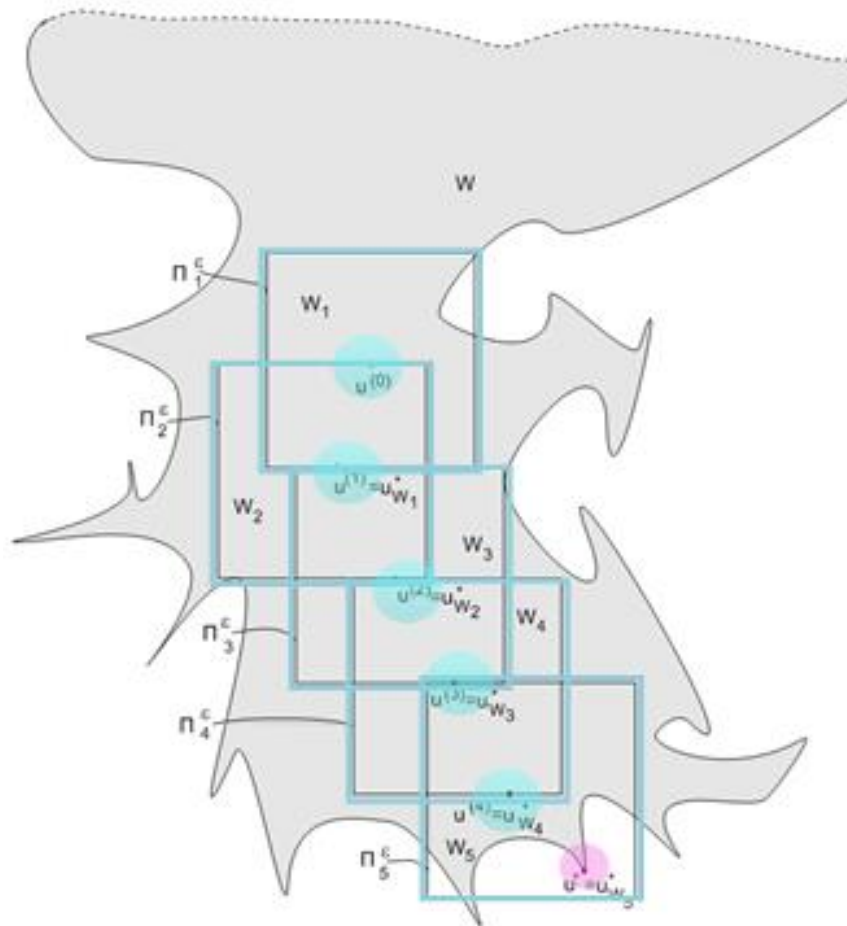


Рис. 4.10. Діаграма пошуку локального-оптимального розв'язку на послідовності підобластей

На швидкість виконання ітераційної процедури методу 3DLOFRT значний вплив має ε параметр, який відповідає за розміри індивідуальних контейнерів Ω_{ki} еліпсоїдів E_i , $i \in I_N$. Очевидно, що чим менше значення ε , тим менше квазі ρ -функцій беруть участь у формуванні нової підобласті W_k . Однак це призводить до зростання числа ітерацій, а отже, і збільшення числа підзадач нелінійного програмування вигляду (4.14)–(4.15). Збільшення параметра ε призводить до зменшення кількості ітерацій, однак розмірність підзадачі вигляду (4.14)–(4.15) збільшується і зростає число нерівностей, що описують підобласть допустимих розв'язків W_k вигляду (4.15).

Експериментально визначено, що оптимальна швидкість збіжності

методу 3DLOFRT досягається при $\varepsilon = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N b_i$.

Для $O(N^2)$ пар еліпсоїдів в контейнері метод перевіряє квазі ϕ -функції в загальному випадку тільки для $O(N)$ пар еліпсоїдів (це залежить від розмірів еліпсоїдів і величини ε). Отже, метод 3DLOFRT дозволяє звести задачу (4.5)–(4.6) з $O(N^2)$ нерівностями і множиною розв'язків W розмірності $O(N^2)$ до послідовності задач з $O(N)$ нерівностями і множиною розв'язків W_k розмірності $O(N)$. Це приводить до значного скорочення обчислювальних ресурсів при розв'язанні задач нелінійного програмування.

4.4 Висновки по розділу 4

У розділі 4 розглянуто задачу упаковки неорієнтованих еліпсоїдів (сфероїдів) в прямокутний паралелепіпед (мінімального об'єму) або циліндр (мінімального коефіцієнта гомотетії). Для аналітичного опису умов неперетину еліпсоїдів обертання, що допускають неперервні обертання, побудовано вільні від радикалів квазі ϕ -функції, для опису умови включення еліпсода в контейнер побудовано ϕ -функції і квазі ϕ -функції. Побудовано математичну модель задачі 3DEP у вигляді задачі нелінійного програмування. Запропоновано швидкий метод для пошуку стартових точок з області допустимих розв'язків і ефективний метод пошуку локальних екстремумів, який дозволяє значно зменшити розмірність задачі 3DEP та кількість квадратичних нерівностей, що формують область допустимих розв'язків.

Наукові результати розділу опубліковані в роботах [2, 10, 11, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23].

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ НЕОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ У ОПУКЛИЙ КОНТЕЙНЕР МІНІМАЛЬНОГО ОБ’ЄМУ (ЗДАЕР)

Розглядається задача оптимальної упаковки заданого набору еліпсоїдів у опуклому контейнері мінімального об’єму. Еліпсоїди задані розмірами півосей, допускають неперервні обертання і трансляції. Між еліпсоїдами можуть бути задані обмеження на мінімально допустимі відстані. Як контейнер може виступати довільна опукла область, що формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами, у тому числі, прямокутний паралелепіпед, циліндр, куля, еліпсоїд, опуклий багатогранник. Для аналітичного опису відношень неперетину еліпсоїдів та відношень включення використовуються квазі ρ -функції (псевдонормалізовані квазі ρ -функції) або ρ -функції (псевдонормалізовані ρ -функції) залежно від форми контейнера, типу апроксимації та обмежень на мінімально допустимі відстані. Використовуючи відповідні засоби моделювання, будується математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Пропонуються ефективні методи пошуку допустимих розв’язків.

Розглядається задача упаковки еліпсоїдів у такій постановці.

Нехай $\Lambda = \Lambda(p)$ – це опуклий контейнер зі змінними розмірами p ,

$$\Lambda = \{(x, y, z, p) \in \mathbb{R}^3 : \Psi(x, y, z, p) \geq 0\},$$

заданими у глобальній системі координат $OXYZ$, де $\Psi(x, y, z, p) = \min\{\Psi_s(x, y, z, p), s = 1, \dots, n_\Lambda\}$, $\Psi_s(x, y, z, p) = 0$ – описує сферичну, циліндричну, еліптичну поверхню або площину. Зокрема, розглянуто такі типи контейнерів (рис. 5.1):

– прямокутний паралелепіпед змінних розмірів l, w та h , $p=(l, w, h)$

$$\mathbf{B} = \{(x, y, z, l, w, h) \in \mathbb{R}^3 \mid \min\{x+l, -x+l, y+w, -y+w, z+h, -z+h\} \geq 0\};$$

– куля змінного радіуса r , $p=(r)$;

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z, r) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\};$$

– циліндр з радіусом γr та висотою γh , де γ – змінний коефіцієнт гомотетії, $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$

$$\mathbf{C} = \{(x, y, z, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \min\{(\gamma r)^2 - x^2 - y^2, z, \gamma h - z\} \geq 0\};$$

– еліпсоїд зі змінними розмірами півосей $\gamma a, \gamma b, \gamma c$, $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$

$$\mathbf{E} = \{(x, y, z, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0\};$$

– опуклий багатогранник зі змінним коефіцієнтом гомотетії γ , $p=(\gamma)$, за умови початкового розміру контейнера при $\gamma=1$

$$\mathbf{K} = \{(x, y, z, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \min\{\alpha_s \cdot x + \beta_s \cdot y + \delta_s \cdot z + \gamma \cdot \mu_s, s=1, \dots, n_K\} \geq 0\}.$$

Зауваження. Кожна метрична характеристика Λ може бути змінною сама по собі, тобто r та h – для циліндра, або a, b, c – для еліпсоїда.

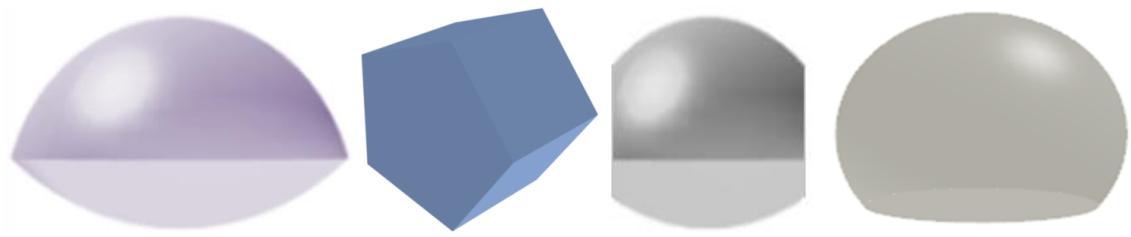


Рис. 5.1. Види контейнерів

Контейнер Λ має фіксовані параметри розміщення $(0, 0, 0)$ у глобальній системі координат.

Кожен еліпсоїд E_i , $i \in I_N = \{1, \dots, N\}$, заданий своїми півосями a_i , b_i , c_i та змінним вектором параметрів розміщення $u_i = (v_i, \Theta_i)$ у локальній системі координат, де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції, $M(\Theta_i)$ – матриця обертання має вигляд

$$\begin{pmatrix} \cos \theta^1 \cos \theta^3 - \sin \theta^1 \cos \theta^2 \sin \theta^3 & -\cos \theta^1 \sin \theta^3 - \sin \theta^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3 & \sin \theta^1 \sin \theta^2 \\ \sin \theta^1 \cos \theta^3 + \cos \theta^1 \cos \theta^2 \sin \theta^3 & -\sin \theta^1 \sin \theta^3 + \cos \theta^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3 & -\cos \theta^1 \sin \theta^2 \\ \sin \theta^2 \sin \theta^3 & \sin \theta^2 \cos \theta^3 & \cos \theta^2 \end{pmatrix},$$

$\Theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3)$ – вектор параметрів обертання, де $\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3$ – кути Ейлера.

Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів 3DAEP. Упакувати набір еліпсоїдів $\{E_i, i \in I_N\}$, у контейнері Λ мінімальних розмірів (відповідних метричних характеристик) з урахуванням допустимих відстаней між еліпсоїдами.

5. 1 Засоби математичного моделювання обмежень розміщення в задачі 3DAEP

У даному розділі для опису обмежень включення еліпсоїдів у контейнер $E_i(u_i) \subset \Lambda \Leftrightarrow \text{int } E_i(u_i) \cap \Lambda^* = \emptyset$ та неперетину еліпсоїдів

$\text{int } E_i(u_i) \cap \text{int } E_j(u_j) = \emptyset$ пропонується підхід, пов'язаний з побудовою ϕ -функції для об'єкта, що апроксимує еліпсоїд з заданою похибкою апроксимації Δ . Використано два типи зовнішньої апроксимації:

- апроксимація кожного еліпсоїда E_i опуклим багатогранником $\hat{E}_i(u_i)$, $E_i(u_i) \subset \hat{E}_i(u_i)$ заданим його вершинами p_j^i , $j = 1, \dots, m_i$, в локальній системі координат еліпсоїда $E_i(u_i)$;
- апроксимація кожного еліпсоїда $E_i(u_i)$ кулями S_{ki} , $\hat{E}_i(u_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} S_{ki}^k(u_i + u_i^k)$, $E_i(u_i) \subset \hat{E}_i(u_i)$, що задані радіусами r_i та векторами трансляції v_{si} в системі координат еліпсоїда E_i .

Розглянемо обмеження розміщення задачі ЗДАЕР:

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(u_i) \subset \Lambda &\Rightarrow E_i(u_i) \subset \Lambda, \quad \hat{E}_i(u_i) \subset \Lambda \Rightarrow E_i(u_i) \subset \Lambda, \\ \text{int } \hat{E}_i \cap \text{int } \hat{E}_j &= \emptyset \Rightarrow \text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset, \\ \text{int } \hat{E}_i \cap \text{int } \hat{E}_j &= \emptyset \Rightarrow \text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset. \end{aligned}$$

5.1.1. ϕ -функції для моделювання обмежень включення із застосуванням апроксимації еліпсоїда кулями. Щоб описати аналітично обмеження включення еліпсоїда в область Λ , $E_i(u_i) \subset \Lambda$, використано ϕ -функції для об'єкта, що апроксимує еліпсоїд. Подамо кожен еліпсоїд у вигляді об'єднання куль

$$E_i(u_i) \subset \hat{E}_i(u_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} S_{ik}(u_i)$$

із застосуванням такого методу.

Метод зовнішньої апроксимації еліпсоїда кулями. Вважаємо, що еліпсоїд

$\mathbf{E}$ заданий у фіксованій системі координат нерівністю $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$.

Для аналітичного опису обмежень неперетину еліпсоїдів і включення еліпсоїдів у контейнер використовується об'єкт $\hat{\mathbf{E}}$, який є зовнішньою апроксимацією сфероїда кінцевим набором куль, $\mathbf{E} \subset \hat{\mathbf{E}} = \bigcup_{k=0}^{2n} S_k$.

У зв'язку з цим виникає оптимізаційна задача апроксимації еліпсоїда кінцевим набором куль, яка полягає у пошуку мінімального значення похибки апроксимації при заданій кількості апроксимуючих куль.

В межах даного дослідження вважаємо, що центри $v_k = (x_k, y_k, z_k)$ куль S_k змінного радіуса r_k належать осі OX , тобто $\mathbf{E}^\Delta = \bigcup_{k=0}^{2n} S_k(x_k, 0, 0)$.

Нехай $E(0, 0)$ – еліпс з розмірами півосей a, b є проекцією еліпсоїда $\mathbf{E}$ на площину XOY .

Надалі буде використовуватись параметричний опис еліпса E [51]:

$$E(0, 0) = \{(x(s, t), y(s, t)) : 0 \leq s \leq b, 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

$$x(s, t) = \frac{\cos t}{a} (a^2 - b^2 + s \cdot b), \quad y(s, t) = s \cdot \sin t.$$

Слід зауважити, що при $s = 0$ точка $x(0, t) = \frac{\cos t}{a} (a^2 - b^2)$ належить осі OX .

Нехай $\hat{E}$ – об'єкт, який є проекцією об'єкта $\hat{\mathbf{E}}$ на площину XOY .

Тоді об'єкт $\hat{E}$ є зовнішньою апроксимацією E еліпса, тобто

$$\hat{E} = \bigcup_{k=0}^{2n} C_k(x_k, 0).$$

Очевидно, що пошук значень параметрів x_k, r_k куль $S_k(x_k, 0, 0)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, для формування об'єкта $\hat{E}$ зводиться до пошуку параметрів x_k, r_k кіл для формування об'єкта $\hat{E}$.

Зауваження. Вважаємо, що центр одного з апроксимуючих кіл зафіксований в точці $(0, 0, 0)$. Тоді, з огляду на симетрію, досить побудувати апроксимацію еліпса при $x \geq 0$ набором $n+1$ кіл $C_k(x_k, 0), k = 0, 1, \dots, n$, вважаючи, що $x_{k+1} > x_k$ (рис. 5.2).

Отже, розглядаємо задачу, яка полягає у пошуку мінімального значення похибки апроксимації Δ при заданій кількості $2n+1$ апроксимуючих кіл.

Фактично необхідно розв'язати задачу покриття $n+1$ кругом половини еліпса $E(0, 0)$ з півосями a і b .

Нехай E^Δ – еліпс з півосями $a_\Delta = a + \Delta$, $b_\Delta = b + \Delta$, гомотетичний еліпсу E (рис. 5.2).

Позначимо $p_k = (p_{kx}, p_{ky}) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – контрольні точки, такі, що, $p_k \in C_k$, $p_k \notin \text{int } E$, $p_{kx} \geq 0, p_{ky} \geq 0$, яку використовуються для «склеювання» кіл $C_k(x_k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Вважаємо, що $p_{nx} = a$, $p_{ny} = 0$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = x_0(0, t_0) = 0$, а

$x_k(0, t_k) = \frac{\cos t_k}{a_\Delta} \cdot (a_\Delta^2 - b_\Delta^2)$, $k = 1, 2, \dots, n$, де t_k – змінний кутовий параметр.

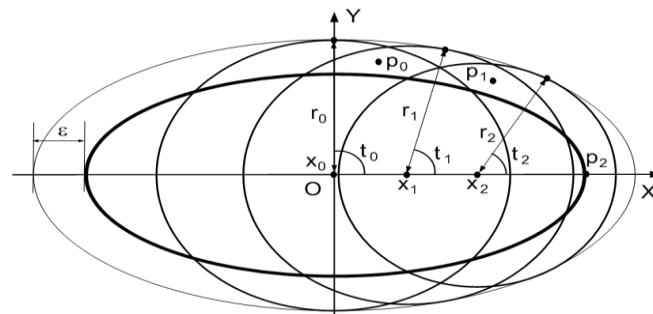


Рис. 5.2 Ілюстрація до методу апроксимації еліпсоїду кулями:
проекція на площину XOY

Математична модель задачі апроксимації еліпсоїда кулями може бути подана в такому вигляді:

$$\Delta^* = \min_{v \in V \subset \mathbb{R}^{4n+1}} \Delta,$$

де $v = (\Delta, t_k, k=1, 2, \dots, n, p_{kx}, p_{ky}, r_k, k=0, 1, 2, \dots, n)$ – вектор змінних, V – область допустимих розв’язків, яка описується системою нерівностей

$$\Delta > 0, r_0 \leq b + \Delta,$$

нерівність $r_0 \leq b + \Delta$ описує умову $C_0(0, 0) \subset E^\Delta$,

$$t_k \geq 0, t_k \leq t_{k-1}, k=1, 2, \dots, n,$$

(нерівність описує обмеження на значення кутового параметра t_k);

$$r_k \geq 0, k=0, 1, 2, \dots, n,$$

(нерівність описує обмеження на значення радіуса r_k кола C_k);

$$\frac{b_\Delta}{a_\Delta} \cdot \sqrt{b_\Delta^2 \cos^2 t_k + a_\Delta^2 \sin^2 t_k} - r_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n,$$

(нерівність описує умову $C_k \subset E^\Delta$);

$$p_{kx} \geq 0, p_{ky} \geq 0,$$

(нерівність описує умову належності p_k точки першому квадранту) ;

$$r_k^2 - (x_k - p_{kx})^2 - p_{ky}^2 \geq 0, \quad k=0,1,\dots,n,$$

$$r_{k+1}^2 - (x_{k+1} + p_{kx})^2 - p_{ky}^2 \geq 0, \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

(дві нерівності описують умови «склеювання» кіл C_k і C_{k+1} , тобто $p_k \in C_k \cap C_{k+1}$);

$$\frac{p_{xk}^2}{a^2} + \frac{p_{yk}^2}{b^2} - 1 \geq 0,$$

(нерівність описує умову $p_k \notin \text{int } E$).

Приклад. Нехай еліпсоїд E заданий розмірами півосей $a=2$, $b=1$.

На рис. 5.3 наведено ілюстрацію до результату розв'язання задачі апроксимації еліпсоїда кулями, де кількість апроксимуючих куль дорівнює 9, тобто, $E \subset \hat{E} = \bigcup_{k=0}^{2n=8} S_k(x_k, 0, 0)$, $k=0,\dots,5$. Отримано: похибку апроксимації

$\Delta^* = 0.022435$, координати центрів та радіуси апроксимуючих куль $x_k = (0, 0.366, 0.721, 1.055, 1.358)$, $r_k = (1.022, 0.999, 0.931, 0.814, 0.642)$.



Рис. 5.3. Об'єкт $\hat{E}$: апроксимація еліпсоїда 9 кулями

Щоб описати відношення включення еліпсоїда в контейнер, використовуємо ϕ -функцію для об'єктів $\hat{E}_i(u_i)$ і $\Lambda^* = R^3 \setminus \text{int } \Lambda$, що може

бути подана у вигляді

$$\Phi(u_i, p) = \min\{\Phi_1(u_i, p), \dots, \Phi_k(u_i, p), \dots, \Phi_{n_i}(u_i, p)\},$$

де $\Phi_k(u_i, p)$ – phi-функція для S_{ik} і Λ^* .

Розглянемо засоби математичного моделювання обмежень включення у вигляді phi-функцій для об'єкта $\hat{E}_i(u_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} S_{ik}(u_i)$ та $\Lambda^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Lambda$. Об'єкт

$\hat{E}_i(u_i)$ заданий змінним вектором параметрів розміщення $u_i = (v_i, \theta_i)$, де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції, $M(\theta_i)$ – матриця обертання, $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)$ – кути Ейлера. Кожна куля $S_{ik}(u_i)$ описується параметрами розміщення $(x_{ik}(u_i), y_{ik}(u_i), z_{ik}(u_i)) = (x_i, y_i, z_i) + (x_{ik}^0, 0, 0) \cdot M(\theta_i)$ та радіусом r_i^k .

Phi-функція для об'єктів $\hat{E}_i(u_i)$ і $\mathbf{S}^* = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{S}$:

$$\Phi^{\hat{E}_i \mathbf{S}^*}(u_i, r) = \min\{\varphi_i^k(u_i, r), k = 1, \dots, n_i, i \in I_N\},$$

$$\varphi_i^k(u_i, r_i^k) = (r + r_i^k)^2 - (x - x_i^k(u_i))^2 - (y - y_i^k(u_i))^2 - (z - z_i^k(u_i))^2,$$

де $\varphi_i^k(u_i, r_i^k)$ – phi-функція для кулі $S_{ik}(u_i)$ та об'єкта $\mathbf{S}^*$.

Phi-функція для еліпсоїда $E_i(u_i)$ і об'єкта $\mathbf{C}^* = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{C}$:

$$\Phi^{E_i \mathbf{C}^*}(u_i, \gamma) = \min\{\psi_1(u_i, \gamma), \psi_2(u_i, \gamma)\}$$

$$\psi_1(u_i, \gamma) = \min\{z_i - a_{i1}, \gamma h - z_i - a_{i1}\}, \psi_2(u_i, \gamma) = \Phi^{E_{i2} \Lambda_2^*}(u_i, \gamma)$$

$$\Phi^{E_{i2} \Lambda_2^*}(u_i, \gamma) = \Phi^{CE_\Lambda^*}(u_i, \gamma), \Phi^{CE_\Lambda^*}(u_i(s, \varphi), \gamma) = \Lambda_i(s, \varphi),$$

$$u_i(s, \varphi) = (x_i(s, \varphi), y_i(s, \varphi), \theta_i^1, \theta_i^2),$$

$$\Lambda_i(s, \varphi) = (b_i^* - s) \sqrt{\frac{b_i^{*2}}{a_i^{*2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} - b_i,$$

$$a_i^* = \gamma r, \quad b_i^* = \gamma r \cdot \frac{b_i}{a_i}, \quad a_{i1} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 \theta_i^2}, \quad b_{i1} = b_i,$$

$$a_{i2} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 \theta_i^2}, \quad b_{i2} = b_i.$$

Phi-функція для об'єктів $\hat{E}_i(u_i)$ і $\mathbf{C}^ = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{C}$:*

$$\Phi^{E_i \mathbf{C}^*}(u_i, \gamma) = \min \{\Phi_i^k(u_i, \gamma), k = 1, \dots, n_i\},$$

$$\Phi_i^k(u_i, \gamma) = \min \{\varphi_{1i}^k(u_i, \gamma), \varphi_{2i}^k(u_i, \gamma), \varphi_{3i}^k(u_i, \gamma)\},$$

$$\varphi_{1i}^k(u_i, \gamma) = (x_i^k(u_i))^2 + (y_i^k(u_i))^2 - (\gamma r - r_i^k)^2,$$

$$\varphi_{2i}^k(u_i, \gamma) = z_i^k(u_i) - r_i^k, \quad \varphi_{3i}^k(u_i, \gamma) = \gamma h - z_i^k(u_i) - r_i^k$$

де $\Phi_i^k(u_i, \gamma)$ – phi-функція для кулі $S_{ik}(u_i)$ та об'єкта $\mathbf{C}^*$.

Phi-функція для об'єкта $\hat{E}_i(u_i)$ і об'єкта $\mathbf{B}^ = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{B}$:*

$$\Phi^{\hat{E}_i \mathbf{B}^*}(u_i, l, h, w) = \min \{\Phi_s^{\hat{E}_i}(u_i, l, h, w), s = 1, \dots, 6\},$$

$$\Phi_s^{\hat{E}_i}(u_i, l, h, w) = \min \{\varphi_{ks}^i(u_i, l, h, w), k = 1, \dots, n_i\},$$

$$\varphi_{k1}^i(u_i, l, h, w) = x_k^i(u_i) - r_k^i, \quad \varphi_{k2}^i(u_i, l, h, w) = -x_k^i(u_i) - r_k^i + l,$$

$$\varphi_{k3}^i(u_i, l, h, w) = y_k^i(u_i) - r_k^i, \quad \varphi_{k4}^i(u_i, l, h, w) = -y_k^i(u_i) - r_k^i + w,$$

$$\varphi_{k5}^i(u_i, l, h, w) = z_k^i(u_i) - r_k^i, \quad \varphi_{k6}^i(u_i, l, h, w) = -z_k^i(u_i) - r_k^i + h.$$

Phi-функція для об'єкта $\hat{E}_i(u_i)$ і об'єкта $K^ = \mathbb{R}^3 / \text{int } K$:*

$$\Phi^{\hat{E}_i K^*}(u_i, \gamma) = \min\{\Phi_s^{\hat{E}_i}(u_i, \gamma), s = 1, \dots, n_K\},$$

$$\Phi_s^{\hat{E}_i}(u_i, \gamma) = \min\{\varphi_{ks}^i(u_i, \gamma), k = 1, \dots, n_i\},$$

$$\varphi(u_i, \gamma) = \alpha_s \cdot x + \beta_s \cdot y + \delta_s \cdot z + \gamma \cdot \mu_s - r_k, s = 1, \dots, n_K.$$

5.1.2 *Phi-функції для моделювання обмежень включення із застосуванням апроксимації еліпсоїда опуклими багатогранниками.* Щоб отримати обмеження на включення еліпсоїда в область, необхідно побудувати phi-функцію для об'єкта, що апроксимує еліпсоїд із заданою похибкою. В рамках дослідження кожен еліпсоїд E_i апроксимується опуклим багатогранником $\hat{E}_i$.

За основу методу апроксимації багатогранником, що запропоновано в даній роботі, взято перший метод уточнення зовнішніх оцінок, описаний в роботі [99].

Нехай задано розміри a, b, c півосей еліпсоїда E . Побудуємо апроксимацію еліпсоїда опуклим багатогранником, заданим 72 вершинами. Наближення будується таким чином. Розглянемо проекцію еліпсоїда на площину Oxy .

Крок 1. Описуємо навколо еліпса (проекція еліпсоїда E на Oxy) прямокутник, довжина і ширина якого дорівнюють відповідно $2a, 2b$. Центри їх симетрії співпадають.

Крок 2. Проводимо пряму через центр еліпса і одну з вершин прямокутника (рис. 5.4а).

Крок 3. Знаходимо координати точки (x', y') , в якій побудована пряма перетинає еліпс, з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0, \\ a \cdot y' = b \cdot x'. \end{cases}$$

Крок 4. Будуємо дотичну до еліпса, що проходить через точку (x', y') .

Крок 5. Знаходимо координати точок перетину дотичної зі сторонами прямокутника (x_1^0, y_1^0) і (x_2^0, y_2^0) із систем рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x_1^0 x'}{a^2} + \frac{y_1^0 y'}{b^2} - 1 = 0, \\ x_1^0 = a, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2^0 x'}{a^2} + \frac{y_2^0 y'}{b^2} - 1 = 0, \\ y_2^0 = b. \end{cases}$$

та відтинаємо частину прямокутника, що лежить вище дотичної (рис. 5.4б).

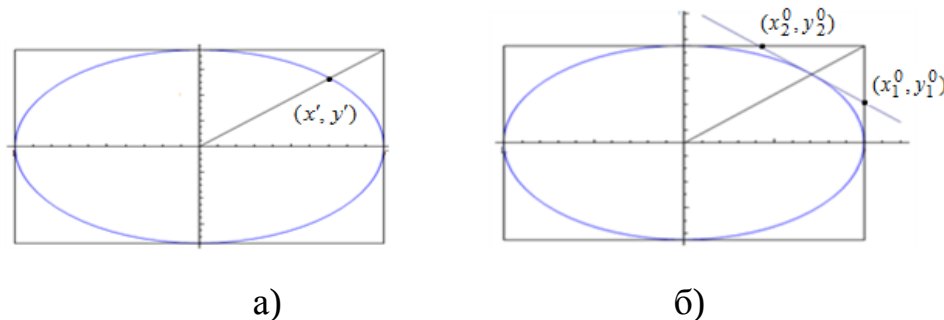


Рис. 5.4. Етапи побудови апроксимації: а) крок 2; б) крок 5

Крок 6. Дану процедуру повторюємо для інших вершин прямокутника. Координати вершин восьмикутника також можна отримати з (x_1^0, y_1^0) і (x_2^0, y_2^0) враховуючи симетрію вершин: $(x_3^0, y_3^0) = (-x_2^0, y_2^0)$, $(x_4^0, y_4^0) = (-x_1^0, y_1^0)$, $(x_5^0, y_5^0) = (-x_1^0, -y_1^0)$, $(x_6^0, y_6^0) = (-x_2^0, -y_2^0)$, $(x_7^0, y_7^0) = (x_2^0, -y_2^0)$, $(x_8^0, y_8^0) = (x_1^0, -y_1^0)$. У результаті отримаємо восьмикутник, що апроксимує еліпс (рис. 5.5).

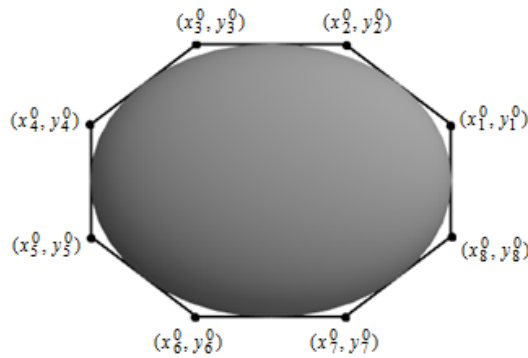


Рис. 5.5 Апроксимація проекції еліпсоїда

Крок 7. Далі розглядаємо проекції еліпсоїда на площину Oxy в перерізах $z = \frac{1}{8}c$, $z = -\frac{1}{8}c$, $z = \frac{5}{12}c$, $z = -\frac{5}{12}c$, $z = \frac{11}{16}c$, $z = -\frac{11}{16}c$, $z = \frac{31}{32}c$, $z = -\frac{31}{32}c$ (рис. 5.6).

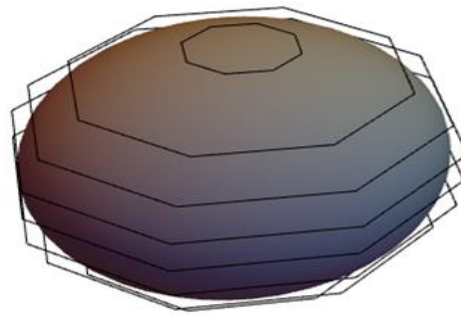


Рис. 5.6. Перерізи апроксимуючого багатогранника

Для кожного перерізу виконуємо кроки 1–6 і отримуємо по 8 точок.

Формуємо набір з 72 точок вигляду (x_i^k, y_i^k, z) : $(x_i^0, y_i^0, 0)$, $(x_i^{\pm \frac{1}{8}c}, y_i^{\pm \frac{1}{8}c}, \pm \frac{1}{4}c)$,

$(x_i^{\pm \frac{5}{12}c}, y_i^{\pm \frac{5}{12}c}, \pm \frac{1}{2}c)$, $(x_i^{\pm \frac{11}{16}c}, y_i^{\pm \frac{11}{16}c}, \pm \frac{3}{4}c)$, $(x_i^{\pm \frac{31}{32}c}, y_i^{\pm \frac{31}{32}c}, \pm c)$, де $i=1, \dots, 8$,

$j = \{-\frac{31}{32}c, -\frac{11}{16}c, -\frac{5}{12}c, -\frac{1}{8}c, 0, \frac{1}{8}c, \frac{5}{12}c, \frac{11}{16}c, \frac{31}{32}c\}$ відповідає перерізу, в

якому отримано точки.

Крок 8. Будуємо багатогранник, вершинами якого є отримані точки (рис. 5.7).

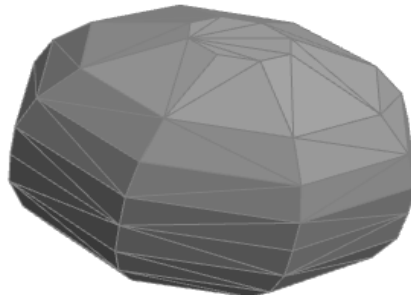


Рис. 5.7. Апроксимуючий багатогранник $\hat{E}_i$

Отриманий багатогранник апроксимує еліпсоїд. Апроксимація є зовнішньою для довільного еліпсоїда. Значення похибки апроксимації ε не перевищує 0.102 a .

За умови використання апроксимації кожного еліпсоїда E_i опуклим багатогранником $\hat{E}_i$ в залежності від форми контейнера використовуємо такі ϕ -функції для моделювання відношення включення.

ϕ -функція для опуклого багатогранника $\hat{E}_i(u_i)$ та об'єкта $S^* = \mathbb{R}^3 / \text{int } S$:

$$\Phi^{\hat{E}_i S^*}(u_i, r) = \Psi(u_i, r) = \min\{\varphi(p_k^i(u_i), r), k = 1, \dots, m_i\},$$

$$\varphi(p_k^i(u_i), r) = (r)^2 - (p_{kx}^i(u_i))^2 - (p_{ky}^i(u_i))^2 - (p_{kz}^i(u_i))^2.$$

ϕ -функція для опуклого багатогранника $\hat{E}_i(u_i)$ і об'єкта $C^* = \mathbb{R}^3 / \text{int } C$:

$$\Phi^{\hat{E}_i C^*}(u_i, \gamma) = \min\{\Psi_s(u_i, \gamma), s = 1, 2, 3\},$$

$$\Psi_s(u_i, \gamma) = \min\{\varphi_s(p_k^i(u_i), r), k = 1, \dots, m_i\},$$

$$\varphi_1(p_k^i(u_i), \gamma) = (\gamma r)^2 - (p_{xk}^i(u_i))^2 - (p_{yk}^i(u_i))^2,$$

$$\varphi_2(p_k^i(u_i), \gamma) = -p_{zk}^i(u_i) + \gamma h, \quad \varphi_3(p_k^i(u_i), \gamma) = p_{zk}^i(u_i).$$

Phi-функція для опуклого багатогранника $\hat{E}_i(u_i)$ і об'єкта $\mathbf{B}^ = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{B}$:*

$$\Phi^{\hat{E}_i \mathbf{B}^*}(u_i, l, h, w) = \min\{\Psi_s(u_i, l, h, w), s = 1, \dots, 6\},$$

$$\Psi_s(u_i, l, h, w) = \min\{\varphi_{ks}^i(u_i, l, h, w), k = 1, \dots, m_i\},$$

$$\varphi_{k1}^i(u_i, l, h, w) = p_{xk}^i(u_i), \quad \varphi_{k2}^i(u_i) = -p_{xk}^i(u_i) + l, \quad \varphi_{k3}^i(u_i, l, h, w) = p_{yk}^i(u_i),$$

$$\varphi_{k4}^i(u_i, l, h, w) = -p_{yk}^i(u_i) + w, \quad \varphi_{k5}^i(u_i, l, h, w) = p_{zk}^i(u_i),$$

$$\varphi_{k6}^i(u_i, l, h, w) = -p_{zk}^i(u_i) + h.$$

Phi-функція для опуклого багатогранника $\hat{E}_i(u_i)$ і об'єкта $\mathbf{E}^ = \mathbb{R}^3 / \text{int } \mathbf{E}$:*

$$\Phi^{\hat{E}_i \mathbf{E}^*}(u_i, \gamma) = \Psi(u_i, \gamma) = \min\{\varphi(p_k^i(u_i), \gamma), k = 1, \dots, m_i\},$$

$$\varphi(p_k^i(u_i), \gamma) = (\gamma)^2 - \frac{(p_{kx}^i(u_i))^2}{a^2} - \frac{(p_{ky}^i(u_i))^2}{b^2} - \frac{(p_{kz}^i(u_i))^2}{c^2}.$$

5.1.3 З а с о б и м о д е л ю в а н н я о б м е ж е н ь н е п е р е т и н у е л і п с о і д і в у з а д а ч і 3 D A E P. Для моделювання обмежень неперетину $\text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset$ в задачі 3DAEP може бути використаний один з таких засобів: квазі phi-функція (4.1) для еліпсоїдів E_i та E_j ; phi-функція (псевдонормалізована phi-функція) для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$, якщо розглядається

апроксимація кулями; квазі ϕ -функція (псевдонормалізована квазі ϕ -функція) для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$, що описана роботі [51], у разі апроксимації еліпсоїдів багатогранниками.

Нехай об'єкти $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ задані центрами апроксимуючих куль v_{iq} і v_{js} та їх радіусами r_{iq} і r_{js} відповідно.

ϕ -функція для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ може бути подана у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j) &= \min\{\Phi_{ij}^{kl}(u_i, u_j), k=1, \dots, n_i, l=1, \dots, n_j\}, \\ \Phi_{ij}^{kl}(u_i, u_j) &= (x_i^k - x_j^l)^2 + (y_i^k - y_j^l)^2 + (z_i^k - z_j^l)^2 - (r_i^k - r_j^l)^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

де $u_i = (v_i, \theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)$, $u_j = (v_j, \theta_j)$, $v_j = (x_j, y_j, z_j)$,

$\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2)$, $\hat{E}_i(u_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} S_{ik}(u_i)$, $\hat{E}_j(u_j) = \bigcup_{l=1}^{n_j} S_{jl}(u_j)$, $\Phi_{ij}^{kl}(u_i, u_j)$ – ϕ -функція для куль $S_{ik}(u_i)$ та $S_{jl}(u_j)$,

$$\begin{aligned} (x_{ik}(u_i), y_{ik}(u_i), z_{ik}(u_i)) &= (x_i, y_i, z_i) + (x_{ik}^0, 0, 0) \cdot M(\theta_i), \\ (x_{jl}(u_j), y_{jl}(u_j), z_{jl}(u_j)) &= (x_j, y_j, z_j) + (x_{jl}^0, 0, 0) \cdot M(\theta_j). \end{aligned}$$

Нехай об'єкти $\hat{E}_i$ і $\hat{E}_j$ задані своїми вершинами p_k^i , $k=1, \dots, m_i$, та p_k^j , $k=1, \dots, m_j$. А $P(u'_{ij}) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha_{ij} \cdot x + \beta_{ij} \cdot y + \gamma_{ij} \cdot z + \mu_{ij} \leq 0\}$ описує півплощину, де $\alpha_{ij} = \sin \theta_P^2$, $\beta_{ij} = -\sin \theta_P^1 \cdot \cos \theta_P^2$, $\gamma_{ij} = \cos \theta_P^1 \cdot \cos \theta_P^2$, $u'_{ij} = (\theta_P^1, \theta_P^2, \mu_P)$, θ_P^1 і θ_P^2 – відповідні змінні кути Ейлера.

Квазі ϕ -функція для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ має вигляд

$$\Phi'^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) = \min\{\Phi^{\hat{E}_i P}(u_i, u'_{ij}), \Phi^{\hat{E}_j P^*}(u_j, u'_{ij})\}, \quad (5.2)$$

де $u'_{ij} = (\theta_P^1, \theta_P^2, \mu_P)$, $\Phi^{\hat{E}_i P}(u_i, u'_{ij})$ – нормалізована ρ -функція для $\hat{E}_i(u_i)$ і півпростору $P(u'_{ij})$ [51], $\Phi^{\hat{E}_j P^*}(u_j, u'_{ij})$ – нормалізована ρ -функція для $\hat{E}_j(u_j)$ та $P^*(u'_{ij}) = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } P(u'_{ij})$,

$$\Phi^{\hat{E}_i P}(u_i, u'_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq m} \psi_P(p_k^i), \quad \Phi^{\hat{E}_j P^*}(u_j, u'_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq m} (-\psi_P(p_k^j)).$$

Якщо у задачі 3DAEP встановлене обмеження на розміщення у вигляді мінімально допустимої відстані між E_i і E_j , то для моделювання умови неперетину використовується псевдонормалізована ρ -функція (2.1) для об'єктів $\hat{E}_i$ і $\hat{E}_j$ або псевдонормалізована квазі ρ -функція (2.5) для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$.

Нехай задана мінімально допустима відстань ρ , $\text{dist}(E_i, E_j) \geq \rho$ між E_i і E_j . Тоді псевдонормалізована ρ -функція для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ може бути подана у вигляді

$$\Phi^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j) = \min\{\Phi_{ij}^k(u_i, u_j) - \rho, i < j \in I_N, k = 1, \dots, n_i\}, \quad (5.3)$$

$$\Phi_{ij}^k(u_i, u_j) = (x_i^k - x_j^k)^2 + (y_i^k - y_j^k)^2 + (z_i^k - z_j^k)^2 - (r_i^k + r_j^k + \rho)^2.$$

Псевдонормалізована квазі ρ -функція для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ має вигляд

$$\hat{\Phi}'^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) = \Phi'^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) - 0.5\rho. \quad (5.4)$$

де $\Phi'^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j, u'_{ij})$ – квазі ϕ -функція вигляду (5.2).

Виходячи з властивостей псевдонормалізованої квазі ϕ -функції (2.4) маємо

$$\max_{u'_{ij} \in U} \hat{\Phi}'^{\hat{E}_i \hat{E}_j}(u_i, u_j, u'_{ij}) \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(\hat{E}_i, \hat{E}_j) \geq \rho.$$

Слід зауважити, що використання апроксимацій для моделювання відношень неперетину залежить від певних вимог. Якщо отримання більш точних результатів є пріоритетним під час розв'язання задачі та розмірність задачі дозволяє отримати локально-оптимальний розв'язок за допомогою сучасних солверів, то слід використовувати квазі ϕ -функцію (4.1). Якщо ж необхідно отримати результат за оптимальний час, або задане обмеження на мінімально допустимі відстані, то для опису відношення неперетину застосовуються засоби моделювання для апроксимованих об'єктів.

5.2 Математична модель задачі 3DAEP

Вектор всіх змінних $u \in \mathbb{R}^\sigma$ може бути описаний таким чином:

$$u = (p, u_1, u_2, \dots, u_N, \tau),$$

де p – вектор змінних метричних характеристик опуклого контейнера Λ , а $u_i = (v_i, \Theta_i)$ – вектор параметрів розміщення еліпсоїда E_i , $i \in I_N$, де $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\Theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3)$. Вектор $\tau = (u'_{ij}, i < j \in I_n)$ є вектором

додаткових змінних (для квазі ρ -функції), де u'_{ij} визначено в (4.1).

Математична модель базової задачі упаковки тепер може бути подана у такому вигляді:

$$\min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u) \quad (5.5)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : Y_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij}) \geq 0, i < j \in I_N, \Phi_i(p, u_i) \geq 0, i \in I_N, \zeta(u) \geq 0, \} \quad (5.6)$$

де $u = (p, u_1, \dots, u_N, \tau)$, $u_i = (v_i, \Theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, p – вектор змінних метричних характеристик контейнера Λ ; $\tau = \{u'_{ij}, i < j \in I_N\}$ – вектор додаткових змінних для побудови квазі ρ -функцій; $F(u)$ – об'єм Ω або одна з метричних характеристик контейнера Λ , $Y_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij})$ – може бути квазі ρ -функцією (4.1) для еліпсоїдів E_i і E_j , ρ -функцією (псевдонормалізованою ρ -функцією) (5.1), (5.3) для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$ або квазі ρ -функцією (5.2) (псевдонормалізованою квазі ρ -функцією (5.4)) для об'єктів $\hat{E}_i$ та $\hat{E}_j$, $\Phi_i(u_i)$ – ρ -функція еліпсоїда E_i або для об'єкта $\hat{E}_i(\hat{E}_i)$ і контейнера Λ^* , $i \in I_N$, $\sigma = |p| + 6N + |\tau|$, $|\tau|$ залежить від виду функції $Y_{ij}(u_i, u_j, u'_{ij})$.

5.3. Метод розв'язання задачі 3DAEP

В основі методу розв'язання лежить стратегія мултистарту, яка включає такі етапи:

Етап 1. Генеруємо набір $\{\zeta^0\}$ векторів $\zeta^0 = (p^0, u_1^0, \dots, u_N^0)$ з допустимими параметрами розміщення $(u_1^0, \dots, u_N^0)$ еліпсоїдів, розміщених у контейнері Λ^0 з розмірами (p^0) для задачі (5.5)–(5.6). Для отримання допустимих параметрів розміщення використовується метод, описаний в

розділі 5.3.1.

Етап 2. Стартуючи з кожної точки набору $\{\zeta^0\}$, отриманому на етапі 1, виконуємо пошук локальних екстремумів для цільової функції $F(u)$ задачі (5.5)–(5.6). Для пошуку локальних екстремумів задачі (5.5)–(5.6) розроблено метод, описаний у розділі 5.3.2

Етап 3. Як розв’язок задачі (5.5)–(5.6) обираємо найкращий локальний екстремум з отриманих на етапі 2.

5.3.1. Метод пошуку допустимих параметрів розміщення (3 D F R P A _ E) для задачі 3 D A E P. Щоб знайти вектор допустимих параметрів розміщення еліпсоїдів, використано модифікацію методу FPPA, що описаний у [99] для задачі упакування багатогранників і базується на гомотетичних перетвореннях об’єктів. Метод складається з таких кроків (рис. 5.8).

Крок 1. Обираємо достатньо великі стартові розміри контейнера $\Lambda^0 = \Lambda(p^0)$, щоб забезпечити розміщення усіх куль S_i радіуса r_i , $i \in I_N$, всередині контейнера Λ^0 .

Крок 2. Генеруємо у контейнері Λ^0 набір з N випадково обраних центрів (x_i^0, y_i^0, z_i^0) куль S_i .

Крок 3. Збільшуємо кулі S_i радіуса βr_i , $i \in I_N$, починаючи з $\beta = 0$ до повного розміру ($\beta = 1$), центри S_i і коефіцієнт гомотетії β є змінними, $0 \leq \beta \leq 1$. Щоб здійснити цей крок, зафіксуємо $p = p^0$ та, почавши з точки $v^0 = (x_1^0, y_1^0, z_1^0, \dots, x_N^0, y_N^0, z_N^0, \beta^0 = 0)$, розв’язуємо таку підзадачу NLP:

$$\max_{v \in W_\beta} \beta, \quad (5.7)$$

$$W_\beta = \{v \in \mathbb{R}^{3N+1} : \Phi^{S_i S_j}(v_i, v_j, \beta) \geq 0, \Phi^{S_i \Lambda^*}(v_i, \beta) \geq 0, j > i \in I_N, 1 - \beta \geq 0, \beta \geq 0\}, \quad (5.8)$$

$$\Phi^{S_i S_j}(v_i, v_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - \beta^2(r_i + r_j)^2,$$

де $v = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \beta)$, $\Phi^{S_i \Lambda^*}(v_i, \beta)$ – phi-функція для кулі S_i радіуса βr_i і об'єкта $\Lambda^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Lambda$.

Позначимо точку глобального максимуму задачі (5.7)–(5.8) $v^* = (x_1^*, y_1^*, z_1^*, \dots, x_N^*, y_N^*, z_N^*, \beta^* = 1)$.

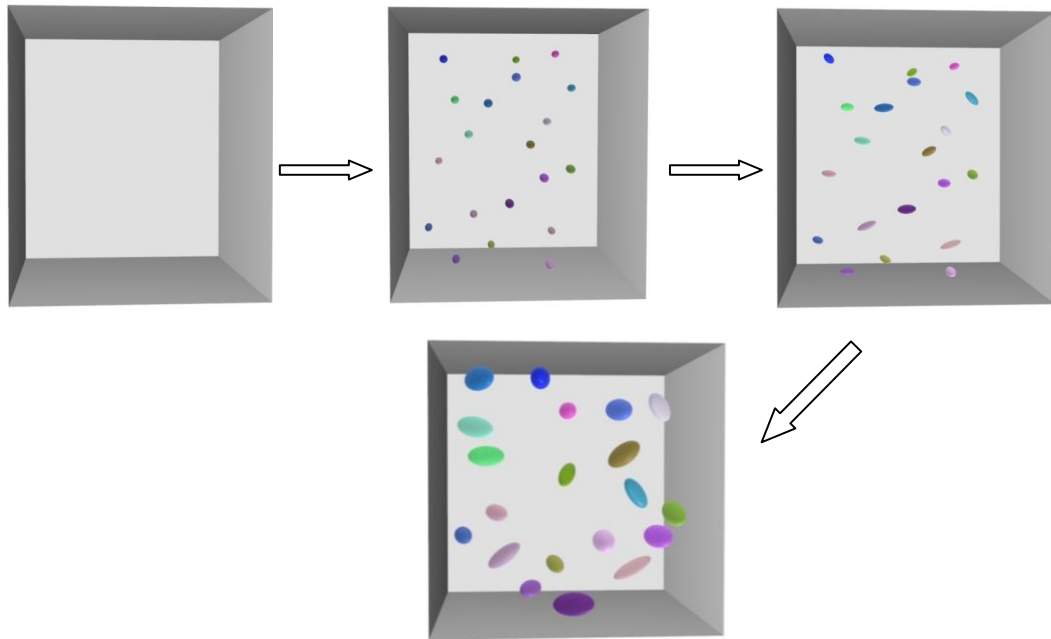


Рис.5. 8. Ілюстрація оптимізаційної процедури 3DFPPA_E для пошуку допустимих параметрів розміщення еліпсоїдів з використанням гомотетичних перетворень

Крок 4. Формуємо вектор допустимих параметрів $\zeta^0 = (p^0, u_1^0, \dots, u_N^0)$, покладаючи $u_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0, \Theta_i^0)$, $(x_i^0, y_i^0, z_i^0) = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, де Θ_i^0 – вектор згенерованих випадково параметрів обертання еліпсоїдів E_i , $i \in I_N$. Зазначимо, що глобальний розв'язок задачі (5.7)–(5.8) завжди може бути знайдений (за умови вибору достатньо великих початкових розмірів p^0 на першому кроці).

Крок 5. Для подальшого пошуку локального мінімуму задачі (5.5)–(5.6) будуємо на основі вектора ζ^0 стартову точку $u^0 = (\zeta^0, \tau^0)$. Для отримання вектора τ^0 використовується спеціальна оптимізаційна процедура під назвою Feasible Auxiliary Parameters Algorithm (FAPA_E).

5.3.2. М е т о д л о к а л ь н о ї о п т и м і з а ц і ї З Д Л О F R T для задачі З Д А Е Р. Метод перетворює задачу (5.5)–(5.6) з великою кількістю нерівностей та розмірністю $O(N^2)$ області допустимих значень W , визначену у (5.6), у послідовність підзадач нелінійного програмування, що мають меншу кількість нелінійних нерівностей ($O(N)$) і розмірність $O(N)$. Основна ідея методу полягає у виконанні таких кроків.

Крок 1. Для кожного вектора допустимих розміщень еліпсоїдів будуємо фіксований індивідуальний кубічний контейнер $\Lambda_{S_{ik}}$ навколо кожної кулі S_{ik} , що описує відповідний еліпсоїд (рис. 5.9).

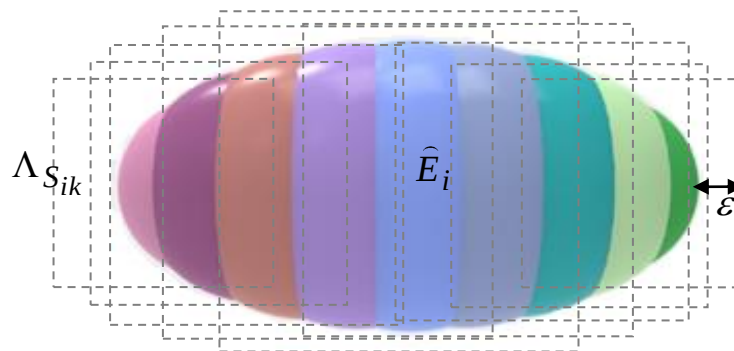


Рис. 5.9. Об'єкт $\hat{E}_i(u_i)$ та індивідуальні контейнери $\Lambda_{S_{ik}}$ апроксимуючих куль $S_{ik}, k=0,1,\dots,8$

Крок 2. Рух кожної кулі всередині відповідного індивідуального контейнера описуємо системою додаткових нерівностей.

Крок 3. Формуємо підмножину допустимих розв'язків W таким чином: додаємо $O(N)$ нерівностей (для усіх куль) у систему нерівностей (5.6), що

дозволяє нам відкинути $O(N^2)$ ϕ -нерівностей для тих пар еліпсоїдів, чії індивідуальні контейнери не перетинаються, та виключити деякі надлишкові обмеження для умови включення.

Крок 4. Виконуємо пошук локального мінімуму на підмножині розмірності $O(N)$. Підмножина описується $O(N)$ нелінійними нерівностями. Після цього використовуємо отриманий локальний мінімум як початкову точку для наступної ітерації. На останньому кроці ітераційної процедури метода 3DLOFRT знаходимо локальний мінімум задачі (5.5)–(5.6).

5.4 Висновки по розділу 5

У розділі побудовано засоби моделювання відносин дотику, неперетину та перетину еліпсоїдів або об'єктів, що їх апроксимують у вигляді класів ϕ -функцій та квазі ϕ -функцій. Для моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані побудовано псевдонормалізовані ϕ -функції та псевдонормалізовані квазі ϕ -функції. Як контейнер розглянуто довільну опуклу область, границя якої описується циліндричними, сферичними, еліптичними поверхнями та площинами, у тому числі розглянуто прямокутний паралелепіпед, циліндр, куля, еліпсоїд, опуклий багатогранник. Завдяки розробленим засобам побудована математична модель задачі 3DAEP у вигляді задачі нелінійного програмування. Розроблено ефективний метод пошуку допустимих розв'язків задачі 3DAEP, який дозволяє істотно зменшити витрату обчислювальних ресурсів під час пошуку локального екстремуму задачі.

Обмеженнями цього дослідження на сьогоднішній день є відсутність засобів моделювання обмежень розміщення для певних видів контейнерів, їх побудова може бути темою подальших досліджень.

Наукові результати, наведені в розділі 5, опубліковані в роботах [4, 7, 8, 13, 16, 21].

РОЗДІЛ 6

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

У розділі наводяться результати обчислювальних експериментів, отримані в ході тестування розроблених засобів математичного моделювання, побудованих математичних моделей і розроблених методів розв'язання. Наведено порівняльну характеристику розглянутих у дисертації реалізацій базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

Експерименти проводилися на комп'ютері Intel (R) Core (TM) i7-3630QM. Для пошуку локальних мінімумів задачі 3DNEP використовувався розв'язувач FindArgMin пакета Wolfram Mathematica 9 [102]. Пошук локальних-оптимальних та допустимих розв'язків задач 3DEP та 3DFEP здійснювався за допомогою IPOPT [103] (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>), що доступний у відкритому некомерційному програмному репозиторії. Результати обчислювальних експериментів наведено у додатку Д.

6.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DNEP

Вважаємо, що $E_i, i \in I_N$ – гомотетичні орієнтовані еліпсоїди, задані півосями a_i, b_i, c_i .

У перших двох прикладах розглядається $N = 20$ еліпсоїдів, що мають такі розміри: $(a_1, b_1, c_1) = (30, 10, 10)$, $(a_2, b_2, c_2) = (9, 3, 3)$, $(a_3, b_3, c_3) = (7.5, 2.5, 2.5)$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 4, \dots, 11\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 12, \dots, 20\}$.

Приклад 6.1. Розміщення еліпсоїдів в контейнері – прямокутному паралелепіпеді, що відповідає точці локального мінімуму u^* , наведено на рис. 6.1. Контейнер має об'єм $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 3213.92$ при $l^* = 30$, $w^* = 10.713$, $h^* = 10$.

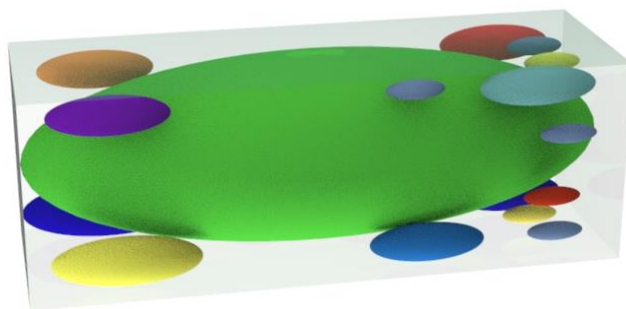


Рис. 6.1. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.1

Приклад 6.2. Розміщення еліпсоїдів в контейнері-еліпсоїді, відповідно точці локального мінімуму u^* , наведено на рис. 6.2. Контейнер має коефіцієнт гомотетії $\lambda^* = F(u^*) = 0,32099$ при стартових розмірах контейнера (еліпсоїда) $a = 121.5, b = 40.5, c = 40.5$.

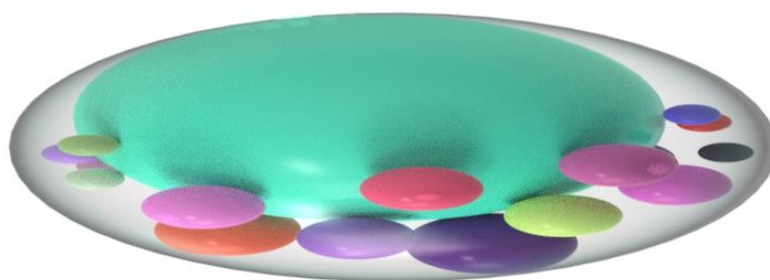


Рис. 6.2. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.2

Далі розглядається упаковка $N = 50$ еліпсоїдів, що мають такі розміри: $(a_1, b_1, c_1) = (60, 20, 20)$, $(a_2, b_2, c_2) = (30, 10, 10)$, $(a_3, b_3, c_3) = (18, 6, 6)$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (10.5, 3.5, 3.5), i = 4, \dots, 8\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 8, \dots, 13\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (8.25, 2.75, 2.75), i = 14, \dots, 17\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (7.5, 2.5, 2.5), i = 18, \dots, 24\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 25, \dots, 40\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 41, \dots, 50\}$.

Приклад 6.3. Розміщення еліпсоїдів в контейнері $\Omega \equiv \mathbf{B}$, відповідно точці локального мінімуму u^* , наведено на рис. 6.3. Контейнер має об'єм $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 33\,874.5$ при $l^* = 84.686$, $w^* = 20$, $h^* = 20$.

Використання 3DLOFRT процедури дозволило значно зменшити час розв'язання задачі. Зокрема, для прикладу 6.3 час розв'язання без використання алгоритму – 13 годин, з його застосуванням – 5 годин).

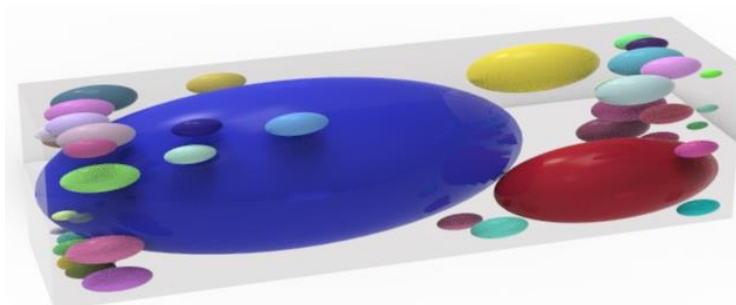


Рис. 6.3. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.3

Приклад 6.4. Розміщення еліпсоїдів в контейнері-еліпсоїді, відповідно точці локального мінімуму u^* , наведено на рис. 6.4. Контейнер має коефіцієнт гомотетії $\lambda^* = F(u^*) = 0,45775$ при стартових розмірах контейнера (еліпсоїда) $a = 160, b = 55, c = 55$.



Рис. 6.4. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.4

Приклад 6.5. Розглядається задача упаковки $N = 50$ еліпсоїдів, що мають розміри: $\{(a_i, b_i, c_i) = (30, 10, 10), i = 1, 2\}$, $(a_3, b_3, c_3) = (18, 6, 6)$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (10.5, 3.5, 3.5), i = 4, \dots, 8\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 8, \dots, 13\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (8.25, 2.75, 2.75), i = 14, \dots, 17\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (7.5, 2.5, 2.5), i = 18, \dots, 24\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 25, \dots, 40\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 41, \dots, 50\}$.

Розміщення еліпсоїдів в $\Omega \equiv \mathbf{B}$, що відповідає точці локального мінімуму u^* , наведено на рис. 6.5. Контейнер має об'єм $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 8030.25$ при $l^* = 80.3025$, $w^* = 10$, $h^* = 10$.

Використання алгоритму 3DLOFRT дозволило зменшити час розв'язання задачі для прикладу 6.5 на 10 годин (час розв'язання без використання алгоритму – 18 годин, з його застосуванням – 8 годин).

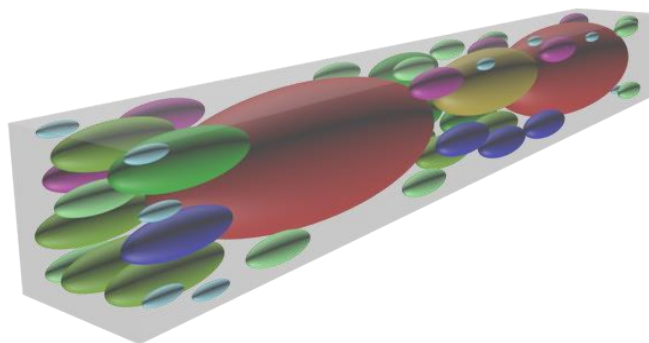


Рис. 6.5. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.5

Приклад 6.6 Розглядається упаковка $N = 75$ гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів у контейнер $\Omega \equiv \mathbf{B}$, що мають розміри: $\{(a_i, b_i, c_i) = (10.5, 3.5, 3.5), i = 1, \dots, 15\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 16, \dots, 30\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (7.5, 2.5, 2.5), i = 31, \dots, 45\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 46, \dots, 60\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 61, \dots, 75\}$. Контейнер має об'єм $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 4825.16$ при $l^* = 219.917$, $w^* = 3.5$, $h^* = 6.29$.

Приклад 6.7. Локально-оптимальне розміщення $N=640$ орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів у прямокутному паралелепіпеді. Об'єм контейнера становить $F^* = 33874.5$, а розміри $l^* = 84.6863$, $w^* = 20$, $h^* = 20$. Середній час пошуку локального мінімуму становить 836.70 с при кількості ітерацій 500 оптимізаційного методу солвера.

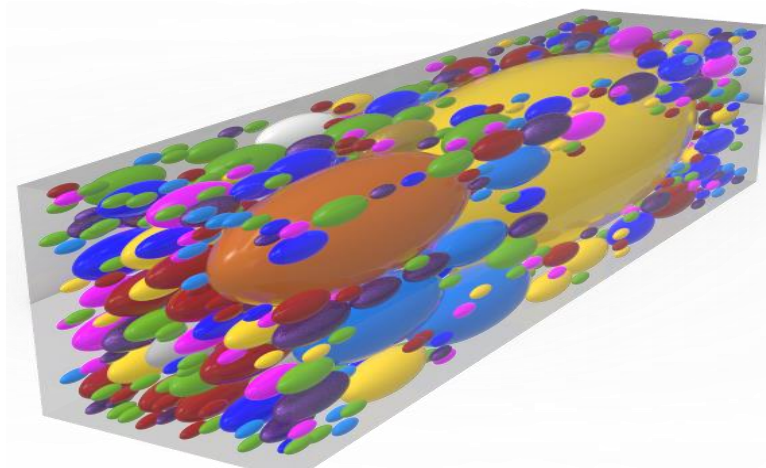


Рис. 6.6. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.7

6.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DEP

Розглянемо набір еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 12\} = \{(a_i, b_i, c_i), i=1, 2, \dots, 12\} = \{(5, 4, 4), (7, 5, 5), (6, 5, 5), (4, 3, 3), (5.5, 4.5, 4.5), (7.5, 5.5, 5.5), (6.5, 5.5, 5.5), (4.5, 3.5, 3.5), (5.3, 4.3, 4.3), (7.3, 5.3, 5.3), (6.3, 5.3, 5.3), (4.3, 3.3, 3.3)\}$ та контейнер $\Omega \equiv \mathbf{B}$ у прикладах 6.8-6.18.

Приклад 6.8. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, 2\}$ показано на рис. 6.7 а. Контейнер має об'єм $F^* = 2192.513985$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (10, 10.007, 21.91)$. Середній час на один локальний мінімум 2.09 с.

Приклад 6.9. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, 2, 3\}$ показано на рис. 6.7б. Контейнер має об'єм $F^* = 3385.01$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (10, 33.797, 10.017)$. Середній час на пошук одного локального мінімуму 5.89с.

Приклад 6.10. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 4\}$ показано на рис 6.7в. Контейнер має об'єм $F^* = 3539.283$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (18.274, 10.015, 19.3401)$. Середній час на один локальний мінімум 22.76 с.

Приклад 6.11. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 5\}$

показано на рис. 6.7г. Контейнер має об'єм $F^* = 3539.283378$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (18.273863, 10.014451, 19.340061)$. Середній час на один локальний мінімум 22.76 с.

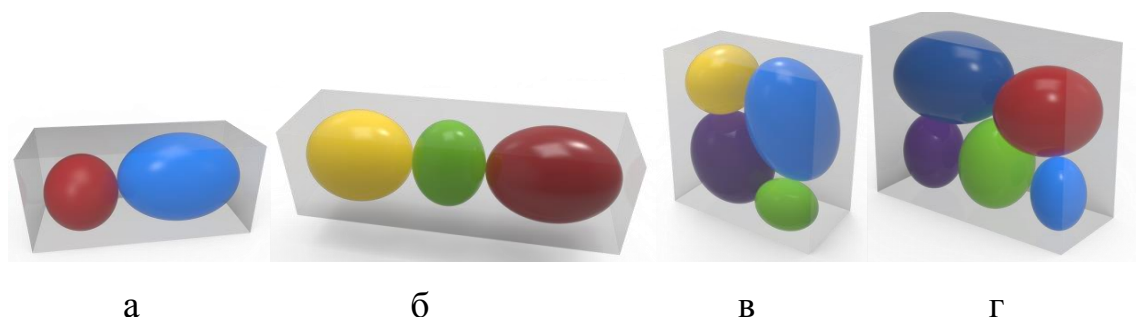


Рисунок 6.7 Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів у прикладах
а) – 6.8, б) – 6.9, в) – 6.10, г) – 6.11

Приклад 6.12. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i = 1, \dots, 6\}$ показано на рис. 6.8а. Контейнер має об'єм $F^* = 6312.237$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (27.244, 11.001, 21.062)$. Середній час на один локальний мінімум 126.02 с.

Приклад 6.13. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i = 1, \dots, 7\}$ показано на рис. 6.8б. Контейнер має об'єм $F^* = 7687.513$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (18.961, 19.723, 20.557)$. Середній час на один локальний мінімум 222.36 с.

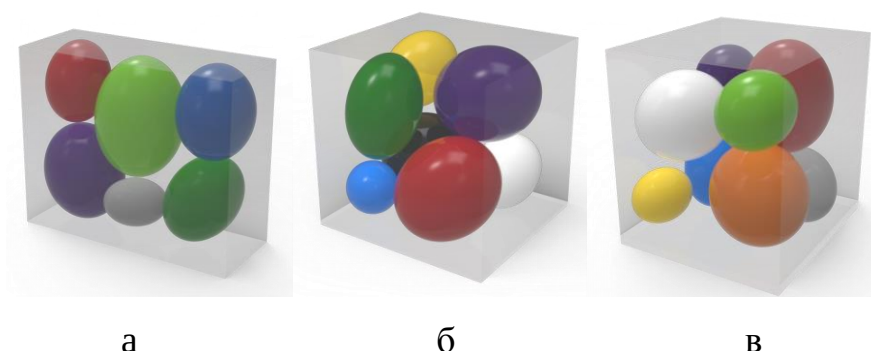


Рис. 6.8 Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів у прикладах
а) 6.12, б) 6.13, в) 6.14

Приклад 6.14. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 8\}$ показано на рис. 6.8в. Контейнер має об'єм $F^* = 6312.237$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (27.244, 11.001, 21.0624)$. Середній час на один локальний мінімум 126.02с.

Приклад 6.15. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 9\}$ показано на рис. 6.9а. Контейнер має об'єм $F^* = 7687.513$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (18.961, 19.723, 20.557)$. Середній час на один локальний мінімум 222.36 с.

Приклад 6.16. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 10\}$ показано на рис. 6.9б. Контейнер має об'єм $F^* = 10263.382$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (25.78004, 18.8938, 21.0711)$. Середній час на один локальний мінімум 371.23с.

Приклад 6.17. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 11\}$ показано на рис. 6.9в. Контейнер має об'єм $F^* = 11860.716557$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (21.945274, 27.902451, 19.369908)$. Середній час на один локальний мінімум 445.95с.

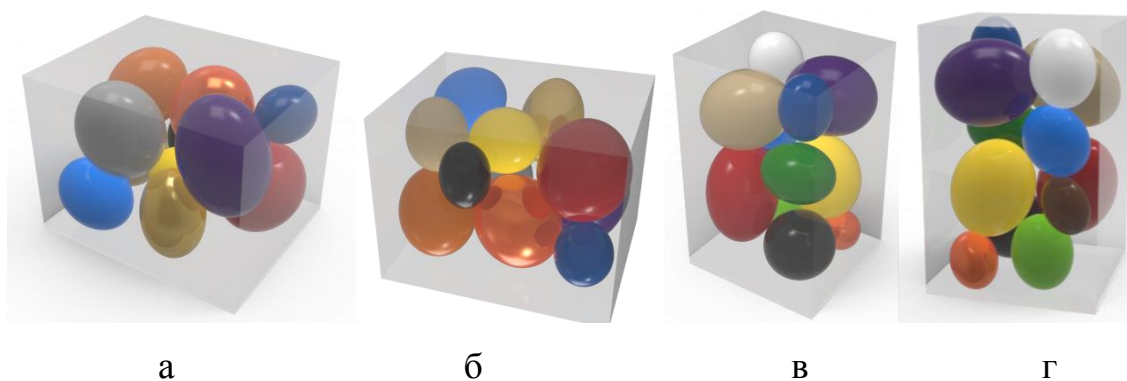


Рис. 6.9 Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів у прикладах
а) 6.14; б) 6.15; в) 6.17; г) 6.18

Приклад 6.18. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів

$\{E_i, i=1, \dots, 12\}$ показано на рис. 6.9г. Контейнер має об'єм $F^* = 11768.260385$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (19.327419, 19.558038, 31.132438)$. Середній час на один локальний мінімум 836.70 с.

Приклад 6.19. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 20\}$ у контейнері $\Omega \equiv \mathbf{B}$ показано на рис. 6.10. Контейнер має об'єм $F^* = 25546.353$ при розмірах $(28.618, 42.172, 19.33)$. Середній час на один локальний мінімум 6475.70 с.

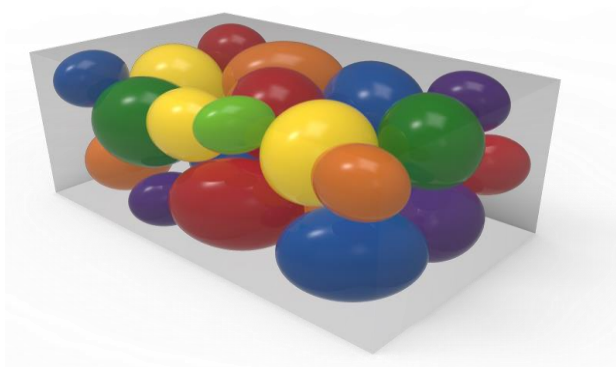


Рис. 6.10 Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.19

Приклад 6.20. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 20\}$ у контейнері $\Omega \equiv \mathbf{C}$ показано на рис. 6.11. Контейнер має розміри $(r^*, h^*) = (11.542, 60.491)$. Середній час на один локальний мінімум 8165.031 с.



Рис. 6.11. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.20

Приклад 6.21. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів обертання $\{E_i, i=1, \dots, 24\}$ з розмірами $(5, 4, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 5.3, 4.3, 7.3, 5.3, 6.3, 5.3, 4.3, 3.3, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5)$ у контейнері $\Omega \equiv C$ показано на рис.6.12. Контейнер має розміри $(r^*, h^*) = (60.492, 12.5)$. Середній час на один локальний мінімум 9465.41 с.



Рис. 6.12. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.21

6.3 Результати обчислювальних експериментів для задачі 3DAEP

Розглядається набір еліпсоїдів обертання $\{E_i, i=1, \dots, 12\} = \{(a_i, b_i, c_i), i=1, 2, \dots, 12\} = \{(5, 4), (7, 5), (6, 5), (4, 3), (5.5, 4.5), (7.5, 5.5), (6.5, 5.5), (4.5, 3.5), (5.3, 4.3), (7.3, 5.3), (6.3, 5.3), (4.3, 3.3)\}$ та контейнер $\Omega \equiv B$ у прикладах 6.22–6.32.

У прикладах 6.22–6.33 використовується апроксимація еліпсоїдів опуклими багатогранниками.

Приклад 6.22. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, 2\}$ показано на рис. 6.13а. Контейнер має об'єм $F^* = 2383.6203$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (10, 10.006950, 21.909912)$. Середній час на один локальний мінімум 16.91с.

Приклад 6.23. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, 2, 3\}$ показано на рис. 6.13б. Контейнер має об'єм $F^* = 3702.937$ при розмірах

$(l^*, w^*, h^*) = (19.4632, 11.1005, 11.0327)$. Середній час на пошук одного локального мінімуму 40.12с.

Приклад 6.24. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 4\}$ показано на рис. 6.13в. Контейнер має об'єм $F^* = 3705.367$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (18.782844, 10, 19.727405)$. Середній час на один локальний мінімум 22.76 с.

Приклад 6.25. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 5\}$ показано на рис. 6.13г. Контейнер має об'єм $F^* = 5032.523$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (19.4465, 19.3185, 13.39587)$. Середній час на один локальний мінімум 110.91с.

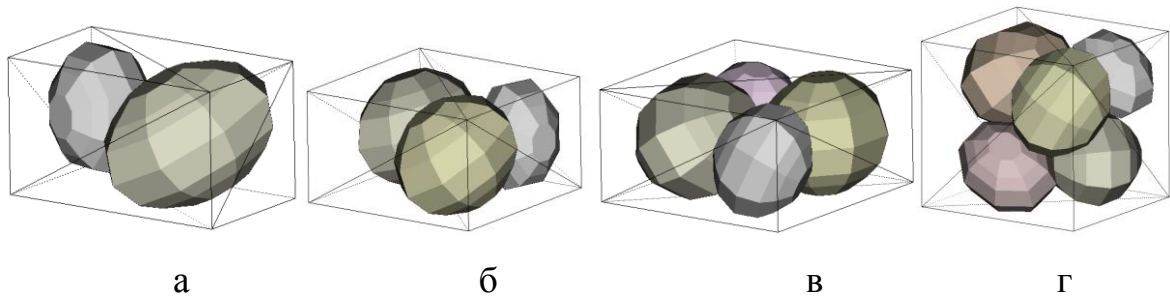


Рис.6.13 Допустиме розміщення еліпсоїдів у прикладах

а) 6.22; б) 6.23; в) 6.24; г) 6.25

Приклад 6.26. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 6\}$ показано на рис. 6.14а. Контейнер має об'єм $F^* = 6805.61282$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (19.9439, 18.4912, 18.45406)$. Середній час на один локальний мінімум 192.22 с.

Приклад 6.27. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 7\}$ показано на рис. 6.14б. Контейнер має об'єм $F^* = 8605.363136$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (22.04403, 20.3572, 19.17607)$. Середній час на один локальний мінімум 227.12с.

Приклад 6.28. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 8\}$ показано на рис. 6.14в. Контейнер має об'єм $F^* = 9027.867674$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (21.8615, 20.9416, 19.719)$. Середній час на один локальний мінімум 245.12 с.

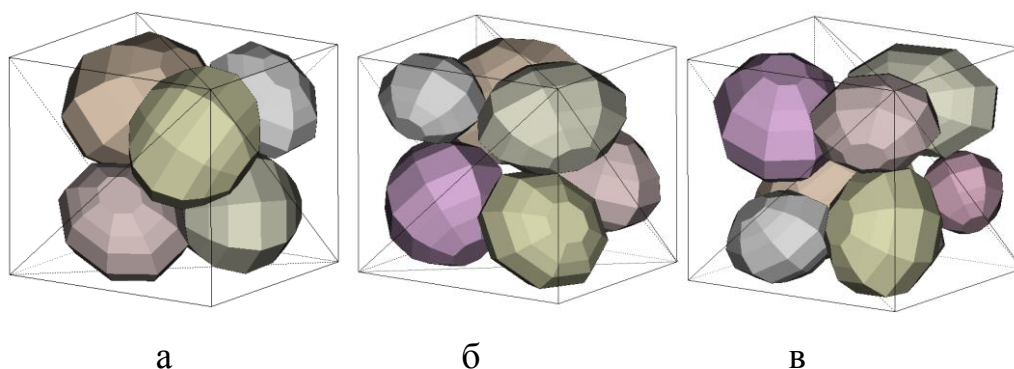


Рис.6.14 Допустиме розміщення еліпсоїдів у прикладах
а) 6.26; б) 6.27; в) 6.28

Приклад 6.29. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 9\}$ показано на рис. 6.15а. Контейнер має об'єм $F^* = 9339.275$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (22.3998, 19.59716, 21.2753)$. Середній час на один локальний мінімум 271.91с.

Приклад 6.30. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 10\}$ показано на рис. 6.15б. Контейнер має об'єм $F^* = 10861.416962$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (22.569, 21.434, 22.453)$. Середній час на один локальний мінімум 290.23с.

Приклад 6.31. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 11\}$ показано на рис. 6.15в. Контейнер має об'єм $F^* = 12298.4795$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (28.5423, 19.113, 22.54501)$. Середній час на один локальний мінімум 301.56с.

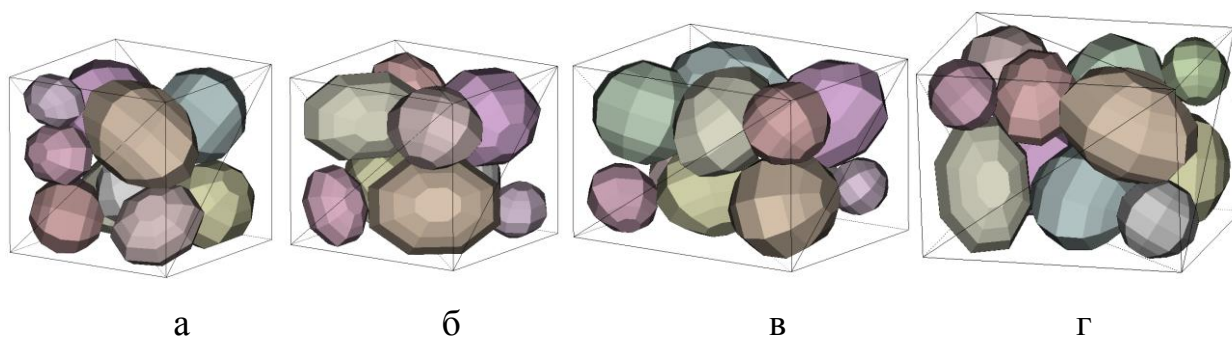


Рис.6.15 Допустиме розміщення еліпсоїдів у прикладах
а) 6.29; б) 6.30; в) 6.31; г) 6.32

Приклад 6.32. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 12\}$ показано на рис. 6.15г. Контейнер має об'єм $F^* = 12666.31$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (28.6766, 20.2593, 21.80209)$. Середній час на один локальний мінімум 366.05с.

Приклад 6.33. Допустиме розміщення $N=40$ еліпсоїдів у кулі наведено на рис. 6.16. Радіус контейнера $(r^*) = 2.9195$. Середній час пошуку локального мінімуму становить 34182.59 с. Без використання спеціальної оптимізаційної процедури результат не був отриманий протягом трьох діб.



Рис. 6.16. Допустиме розміщення еліпсоїдів у прикладі 6.33

У прикладах 6.34–6.42 використовується апроксимація еліпсоїдів кулями.

Приклад 6.34. Допустиме розміщення $N=20$ еліпсоїдів у циліндрі наведено на рис. 6.17а. Розміри контейнера $(r^*, h^*) = (30.3825, 16.2165)$. Середній час пошуку локального мінімуму становить 3418.59 с.

Приклад 6.35. Локально-оптимальне розміщення еліпсоїдів обертання $\{E_i, i=1, \dots, 24\}$ з розмірами $(5, 4, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 5.3, 4.3, 7.3, 5.3, 6.3, 5.3, 4.3, 3.3, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, 5.5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5, .5, 4.5, 7.5, 5.5, 6.5, 5.5, 4.5, 3.5)$ у $\Omega \equiv C$ показано на рис. 6.17б. Контейнер має розміри $(r^*, h^*) = (30.3825, 16.2165)$. Середній час на один локальний мінімум 9452.69 с.

Приклад 6.36. Розглядається набір еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 30\}$,

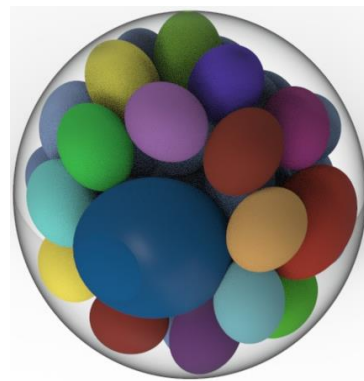
0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),
 (1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8)(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,
 0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,
 0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,
 0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,
 0.8),(1,0.8,0.8),(1,0.8,0.8),(1, 0.8,0.8),(1,0.8,0.8)}.

Приклад 6.37. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 50\}$ у циліндрі показано на рис. 6.18а. Контейнер має розміри $(r^*, h^*) = (3.284574, 7.898665)$. Середній час на один локальний мінімум 20549.57 с.

Приклад 6.38. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 50\}$ у кулі показано на рис. 6.18б. Контейнер має радіус $(r^*) = (4.193206)$. Середній час на один локальний мінімум 12874.867 с.



а



б

Рис. 6.18. Допустиме розміщення еліпсоїдів для прикладу
 а) 6.37; б) 6.38

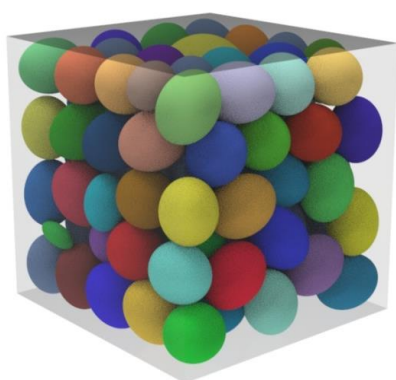
Приклад 6.39. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 60\}$ у правильному опуклому багатограннику (грані правильні п'ятикутники) показано на рис. 6.19. Радіус вписаної в контейнер кулі $(r^*) = (4.9872)$. Середній час на один локальний мінімум 25093.353 с.



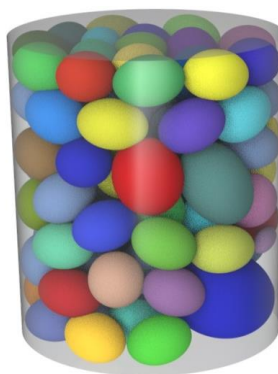
Рис. 6.19. Допустиме розміщення еліпсоїдів для прикладу 6.39

Приклад 6.40. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 100\}$ в контейнері $\Omega \equiv \mathbf{B}$ показано на рис. 6.20а. Контейнер має об'єм $F^* = 523.693$ при розмірах $(l^*, w^*, h^*) = (8.008, 7.801, 8.383)$. Середній час на один локальний мінімум 30389.62 с.

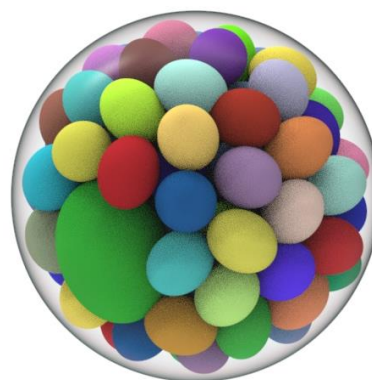
Приклад 6.41. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 100\}$ в контейнері $\Omega \equiv \mathbf{C}$ показано на рис. 6.20б. Контейнер має розміри $(r^*, h^*) = (3.9616, 10.5306)$. Середній час на один локальний мінімум 28962.94 с.



а



б



в

Рис. 6.20. Допустиме розміщення еліпсоїдів для прикладів

а) 6.40; б) 6.41; в) 6.42

Приклад 6.42. Допустиме розміщення еліпсоїдів $\{E_i, i=1, \dots, 100\}$ в контейнері $\Omega \equiv S$ показано на рис. 6.20в. Контейнер має розміри $(r^*) = (5.19954)$. Середній час на один локальний мінімум 40706.402 с.

На рисунках. 6.13-6.20 зображено локально-оптимальні розв'язки задачі упаковки апроксимованих еліпсоїдів, які відповідають допустимому розміщенню істинних еліпсоїдів.

6.4 Аналіз результатів, отриманих для різних реалізацій

У рамках розділу проведена порівняльна характеристика часу розв'язання задач 3DEP з використанням алгоритму декомпозиції 3DLOFRT та без його використання (рис. 6.21).

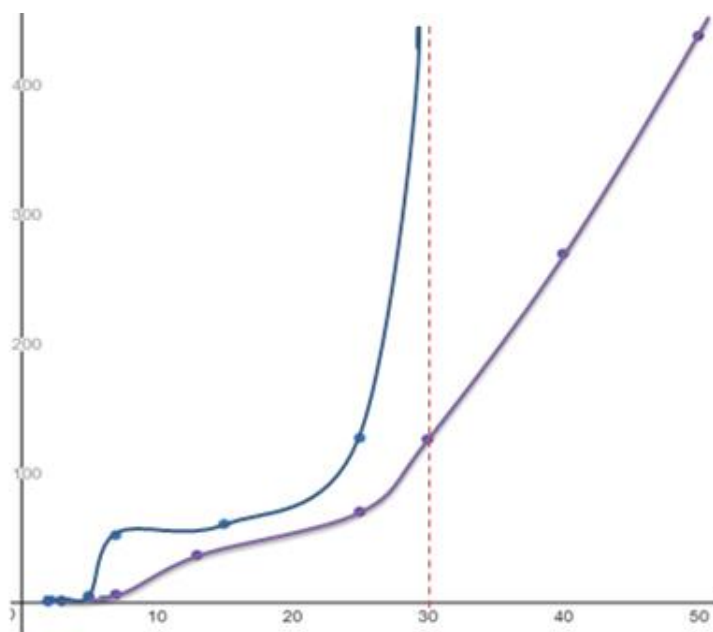


Рис. 6.21. Графік порівняння часу розв'язання:

- час розв'язання задачі 3DEP без використання алгоритму 3DLOFRT;
- час розв'язання задачі 3DEP з використанням алгоритму 3DLOFRT

Аналіз результатів порівняння встановив, що час розв'язання задачі 3DEP

з використанням алгоритму декомпозиції 3DLOFRT значно менший часу розв'язання цієї ж задачі без використання 3DLOFRT алгоритму при кількості еліпсоїдів до 30, для кількості понад 30 еліпсоїдів без використання алгоритму декомпозиції 3DLOFRT не вдалося отримати розв'язок за прийнятний час (більше 3 діб).

Аналіз результатів порівняння часу розв'язання однакових прикладів за допомогою реалізацій задач 3DEP та 3DAEP з використанням апроксимації багатогранниками для моделювання умов включення наведено на рисунку 6.22.

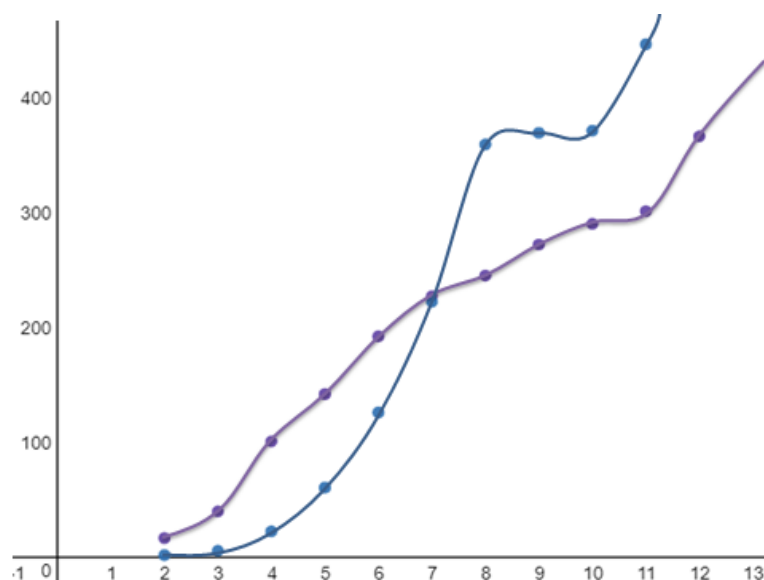


Рис. 6.22. Графік порівняння часу розв'язання задач 3DEP та 3DAEP:

- час пошуку локального мінімуму для задачі 3DEP;
- час пошуку локального мінімуму для задачі 3DAEP

З графіка видно, що, починаючи з кількості еліпсоїдів $N=7$, час розв'язання задачі 3DEP починає перевищувати час розв'язання задачі 3DAEP.

6.5 Результати обчислювальних експериментів для прикладних задач

Фармакологія. Розглянуто задачу щільної упаковки 100 вітамінів у циліндричному контейнері. Вдалося зменшити розміри контейнера на 17%

(рис. 6.23).



Рис. 6.23. Задача упаковки еліпсоїдів у фармакології

3D printing. Розглянуто задачу топологічної оптимізації промислових деталей. У результаті розв’язання задачі розміщення однаково орієнтованих еліпсоїдів з урахуванням мінімально допустимих відстаней всередині кулі маса деталі зменшилась на 29% (рис. 6.24).

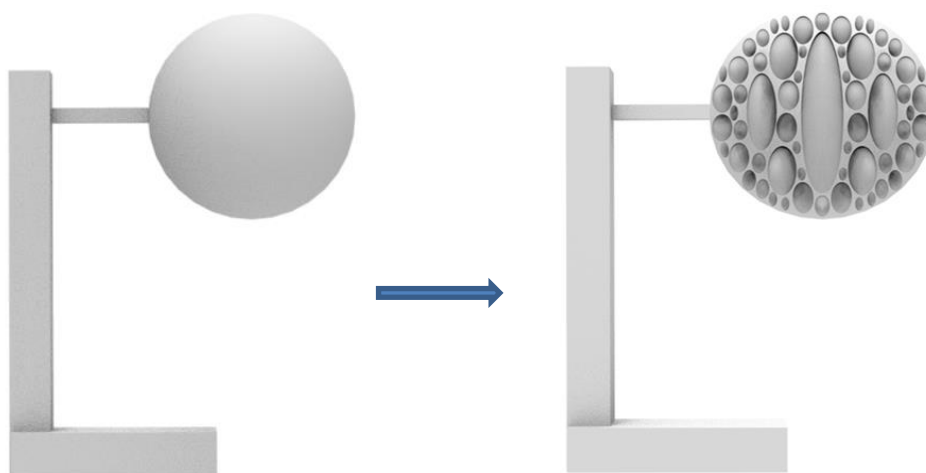


Рис. 6.24. Задача розміщення еліпсоїдів у адитивних технологіях

Комп’ютерні ігри. Моделювання відношень неперетину неорієнтованих еліпсоїдів використовується у комп’ютерних іграх для відстеження взаємодій частин об’єктів, наприклад, частин рук, що апроксимуються еліпсоїдами (рис. 6.25).

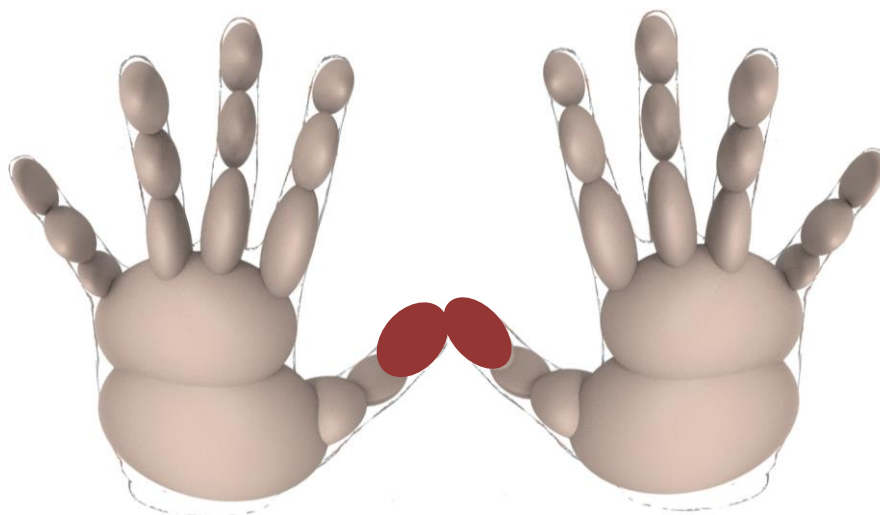


Рис. 6.25. Задача відстеження перетину еліпсоїдів у комп'ютерних іграх

6.6 Висновки по розділу 6

Проведені обчислювальні експерименти підтвердили конструктивність розроблених засобів математичного моделювання відношень еліпсоїдів в задачах 3DHER, 3DER, 3DAER, адекватність побудованої математичної моделі базової задачі та її реалізацій, ефективність запропонованих стратегій, методів побудови стартових точок і пошуку локально-оптимальних розв'язків для задач 3DHER, 3DER, 3DAER. Експерименти проводилися на комп'ютері Intel Core (TM) i7-3630QM. Для пошуку локальних мінімумів задачі 3DHER використовувався розв'язувач FindArgMin пакета Wolfram Mathematica 9. Пошук локальних-оптимальних та допустимих розв'язків задач 3DER та 3DFER здійснювався за допомогою IPOPT.

Аналіз результатів обчислювальних експериментів показав, що кожна із запропонованих стратегій може бути використана для пошуку ефективних розв'язків поставленої задачі, в залежності від її розмірності, вимог до точності і швидкодії, а також від залежно від форми контейнера, особливостей метричних характеристик і вимог до орієнтації еліпсоїдів, обмежень на допустимі відстані між еліпсоїдами.

Результати обчислювальних експериментів опубліковані в роботах [2–8].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено аналіз публікацій, присвячених розв'язанню задач оптимальної упаковки еліпсоїдів. На підставі аналізу можна зробити висновок, що даний клас задач мало вивчений. Для їх розв'язання, як правило, використовуються евристичні алгоритми. Деякі запропоновані математичні моделі, що подані у вигляді задач нелінійного програмування, мають настільки велику розмірність, що сучасні програмні засоби глобальної оптимізації не здатні знайти навіть допустимі розв'язки за прийнятний час. Через це актуальним є створення сучасних конструктивних засобів математичного моделювання, побудова адекватних математичних моделей і розробка ефективних методів розв'язання даного класу задач, які б враховували орієнтацію та особливості метричних характеристик еліпсоїдів, форму контейнера і обмеження на допустимі відстані.

У дисертації досліджено задачу оптимальної упаковки еліпсоїдів, що має багато прикладних та наукових застосувань, на підставі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів в області математичного моделювання та обчислювальних методів.

Основні наукові результати дисертації:

✓ Сформульовано базову задачу оптимальної упаковки еліпсоїдів в опуклий контейнер (3DBEP) та виділено її основні реалізації (3DHEP, 3DEP, 3DAEP).

✓ Розроблено засоби математичного моделювання відношень еліпсоїдів:

— вперше побудовано засоби математичного моделювання для задач упаковки еліпсоїдів у вигляді нових класів ϕ -функцій (псевдонормалізованих ϕ -функцій) та квазі ϕ -функцій (псевдонормалізованих квазі ϕ -функцій), які дозволяють у аналітичному

вигляді описати відношення неперетину еліпсоїдів, обмеження на мінімально допустимі відстані, включення еліпсоїдів у контейнер, з урахуванням орієнтації еліпсоїдів, особливостей їх метричних характеристик і форми контейнера;

– вперше побудовано математичні моделі базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів (3DBEP) та її основних реалізацій 3DHEP, 3DEP, 3DAEP у вигляді задач нелінійного програмування, залежно від виду контейнера (границя якого формується сферичними, циліндричними, еліптичними поверхнями та площинами, зокрема, прямокутний паралелепіпед, опуклий багатогранник, куля, еліпсоїд, циліндр), особливостей метричних характеристик (гомотетичні, еліпсоїди обертання, довільні) і вимог до орієнтації еліпсоїдів (однаково орієнтовані, допускаються неперервні обертання), обмежень на допустимі відстані між еліпсоїдами.

✓ Набули подальшого розвитку методи розв'язання задач геометричного проектування для упаковки еліпсоїдів з використанням нелінійного програмування і негладкої оптимізації, які, на відміну від існуючих підходів, дозволяють отримувати допустимі та локально-оптимальні розв'язки для основних реалізацій базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів, в тому числі:

– методи генерації стартових точок з області допустимих розв'язків задач 3DHEP, 3DEP, 3DAEP;

– методи пошуку допустимих і локально-оптимальних розв'язків задач 3DHEP, 3DEP, 3DAEP, які мають оцінку, що є лінійною по відношенню до кількості еліпсоїдів.

✓ Створено програмне забезпечення для розв'язання основних реалізацій (3DHEP, 3DEP, 3DAEP) базової задачі оптимальної упаковки еліпсоїдів.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки у курсі «Математичне і комп'ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень»; використовуються в ІТ компанії Cloud Works у програмному забезпеченні для розв'язання задач упаковки об'єктів та під час розробки комп'ютерних ігор, де потрібно відстежувати взаємодію об'єктів, що мають форму еліпсоїдів; у дослідницьких програмах Мексиканського державного університету Nuevo Leon State University «Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks» та «National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems»

Додаток А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions in packing of ellipsoids. *Radioelectronics & Informatics*. 2015. No.1 (68). P. 37–41.
2. Хлуд О. М., Суббота И. А., Романова Т. Е. Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и информатика*. 2015. № 3. С. 14–20.
3. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of approximated ellipsoids. *Control, navigation and communication systems*. 2016. No.3(39). P. 62–66.
4. Хлуд О. М., Романова Т. Е., Стецюк П. И. О двух задачах оптимальной упаковки гомотетических эллипсоидов. *Бионика интеллекта*. 2017. №1(88). С.29–35.
5. Khlud O. M., Yaskov G. N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No.6(46). P.131–135.
6. Pankratova Yu. Ye., Khlud O. M., Patsuk V. M. Packing of ellipsoids in a convex container. *Control, navigation and communication systems*. 2018. No.1(47). P.80–83.
7. Khlud O., Pankratov O., Romanova T. Development of the mathematical model and the method to solve a problem on the optimization of packing the ellipsoids into a convex container. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No.4(94). P. 51–58.
8. Суббота І. О., Яськов Г. М., Хлуд О. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доп. XXI всеукр. наук. конф. Львів*. 2015. С. 302–303.
9. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions of ellipsoids. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро*. 2015. С. 164–165.
10. Хлуд О. М. Математическая модель задачи упаковки эллипсоидов с использованием квази-phi-функций. *Современные проблемы машиностроения: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины*, 2015. С.19.
11. Романова Т. Е., Стецюк П. И., Хлуд О. М. Задача упаковки гомотетичних еліпсоїдів. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф. Кишинев, Молдова*. 2016. Т.2. С. 373–377.
12. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of approximated ellipsoids into a cuboid of minimal volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тез. докл. 5-й междунар. науч. конф. Кишинев, Молдова*. 2016. Т.2. С. 274–278.

13. Хлуд О. М., Старосельский Е. Е. Метод решения задачи оптимальной упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума. Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2016. Т. 7. С. 128–129.

14. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Хлуд О. М. Упаковка эллипсоидов и нелинейная оптимизация. *Информационные системы и технологии ИСТ-2016*: тез. докл. 5-й междунар. науч.-техн. конф. Харьков – Коблево. 2016. Т. 5. С. 128–129.

15. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения*: тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2016. С.34.

16. Хлуд О. М., Омеляненко С. С. Математическое и компьютерное моделирование в задаче оптимальной упаковки эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тез. докл. XX юбилейного междунар. молодеж. форума Харьков: Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2017. Т. 7. С. 112–113.

17. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Optimal packing of ellipsoids. *Problem of decision making under uncertainties*: тез. докл. XXX междунар. конф. Вильнюс, Литва. 2017. С. 71.

18. Romanova T., Pankratov A., Khlud O. Optimal packing of ellipses and ellipsoids. *The 14th ESICUP Meeting*: тез. докл. 14-й междунар. конф. Льеж, Бельгия. 2017. С. 24.

19. Gil N., Pankratov A., Romanova T., Khlud O., Patsuk V. The optimization problem of packing ellipsoids into a convex container. *7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE 2017)*: тез. докл. 7-й междунар. конф. София, Болгария. 2017. С. 23.

20. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи оптимальной упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения*: Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2018. С.19.

21. Хлуд О. М., Старосельский Є. Є. Математична модель та метод розв'язання задачі оптимальної упаковки гомотетичних еліпсоїдів. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тез. докл. XXII междунар. молодеж. форума. Харьков Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники, 2018. Т. 7. С. 102–103.

22. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of ellipsoids in a cylindrical container of minimum volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*: 6-я междунар. науч. конф. Кишинев, Молдова. 2018. С.161–163.

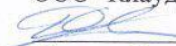
Додаток Б

Акт про використання результатів дисертаційної роботи

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор

ООО "Клауд Воркс"

 Д.С. Свербілов

«29» жовтня 2018р.

АКТ

**про використання результатів дисертаційної роботи
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Хлуд Ольги Михайлівни**

Комісія у складі голови комісії директора Свербілова Д.С., членів комісії програміста Луцка В.А. та програміста Горносталь О.А. склала даний акт про використання результатів дисертаційної роботи, виконаної Хлуд Ольгою Михайлівною.

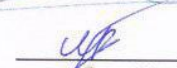
Засоби математичного моделювання, математичні моделі, алгоритми та програмне забезпечення, запропоновані Хлуд О.М., використовуються в ООО «Клауд Воркс» в програмному забезпеченні для розв'язання задач пакування, де у якості вантажу виступають об'єкти, що мають форму еліпсоїдів або можуть бути апроксимовані ними, при комп'ютерному моделюванні руху та пресування речовин або у програмах, де потрібно відстежувати взаємодію об'єктів, що апроксимуються еліпсоїдами.

Запропоноване Хлуд О.М. програмне забезпечення враховує особливості метричних характеристик еліпсоїдів, вимоги до їх орієнтації, форму контейнера та обмеження на відстань і є досить гнучким, що дозволяє врахувати, які функції краще застосовувати при необхідності отримати більш точні розрахунки, а які – коли пріоритетом є швидкість отримання розв'язку.

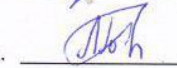
Голова комісії: Свербілов Д.С.



Члени комісії: Луцк В.А.



Горносталь О.А.



ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор
Харківського національного
університету радіоелектронікиВ.В. Семенець
«___» _____ 2018 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи
Хлуд Ольги Михайлівни «Задача оптимальної упаковки еліпсоїдів:
математичні моделі та методи розв'язання»

Ми, що нижче підписалися, начальник Навчального відділу ХНУРЕ Міхнова А.В., завідувач кафедри прикладної математики професор Тевяшев А.Д., професор кафедри прикладної математики Гусарова І.Г. склали цей акт про те, що результати кандидатської дисертаційної роботи Хлуд Ольги Михайлівни, щодо математичного і комп'ютерного моделювання та методів розв'язання задач оптимальної упаковки еліпсоїдів, впроваджені у навчальний процес на кафедрі прикладної математики в дисципліні «Математичне та комп'ютерне моделювання в системах підтримки прийняття рішень» (теми 4-5 робочої програми д.т.н, проф. Т.Є. Романової, О.М. Хлуд, Ю.Е. Стояна), а також у дипломному проектуванні. Комісія відзначає, що використання нових результатів в області математичного моделювання забезпечує поглиблене вивчення перспективних напрямків прикладної математики, а також знайомство студентів старших курсів з практичними аспектами застосування фундаментальних результатів при вирішенні прикладних та наукових задач.

Начальник Навчального відділу

А.В. Міхнова

Завідувач кафедри
прикладної математики

А.Д. Тевяшев

Професор кафедри
прикладної математики

І.Г. Гусарова



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
POSGRADO EN INGENIERIA DE SISTEMAS



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

To Whom It May Concern

Specialized Academic Council D 64.180.01
Institute for Mechanical Engineering Problems
of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Kharkiv, 61046, Ukraine

November 14, 2018

This letter is written in support of O.M. Khlud's research work on

The problem of optimal packing of ellipsoids: mathematical models and methods of solution.

In the work of Khlud mathematical models and solution techniques for optimized packing ellipsoids in a minimum volume convex container are proposed.

The author develops constructive tools for mathematical modeling of placement constraints in the packing problem for ellipsoids. Placement restrictions are presented in the form of quasi-phi-functions and phi-functions for non-overlapping and containment constraints, while adjusted phi-functions and quasi-phi-functions are used for distance constraints. Based on these tools an exact continuous nonlinear programming model for the basic packing problem is proposed. Variations of the basic model are developed to take into account different metrical characteristics and placement parameters of ellipsoids as well as different types of convex containers. In particular, in some formulations ellipsoids have to be sufficiently separated, i.e. the distances between ellipsoids have to be larger than a certain minimal threshold. Next, efficient algorithms are proposed to solve the packing problem. These are based on nonlinear programming and non-smooth optimization techniques.

The methodology and results obtained can be used, for example, in logistics and mineral industries, robotics and nuclear medicine, molecular dynamics and nanotechnology. We would like to incorporate the models and techniques proposed in the work of Khlud in our research projects "Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks" and "National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems" supported by Mexican National Scientific Foundation (CONACYT), grants #167019 and #280081.

I would like to express my strong support and recommendation of Khlud's research work.

Sincerely yours,

Igor Litvinchev, PhD, DSc. (Habilitation)
Professor at the Graduate Program in Systems Engineering
Nuevo Leon State University, Monterrey, Mexico
Member of Mexican Academy of Sciences and Russian Academy of Natural Sciences

Pedro de Alba s/n, Ciudad Universitaria, C.P. 66451,
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México,
Conm.: 8329-4020, Fax: 8332-0904, www.fime.uanl.mx



Додаток В

Код дослідницької програми «Optimal packing of homothetic oriented ellipsoids»

```

t1=SessionTime[]
El={{}};
h=3;
n=Length[El]

$$\epsilon = (\sum_{i=1}^n El[[i, 2]])/n$$

MaxIter=1000;
LocalMin={};

$$A0 = \sum_{i=1}^n El[[i, 1]]$$


$$B0 = \sum_{i=1}^n El[[i, 2]]$$


$$C0 = \sum_{i=1}^n El[[i, 3]]$$

U={Ax,By,Cz};
V=Table[{xi,yi,zi,1},{i,1,n}];
VG=Table[{xi,yi,zi,λi},{i,1,n}];
aMin=Min[Table[El[[i,1]],{i,1,Length[El]}]];
aMax=Max[Table[El[[i,1]],{i,1,Length[El]}]];
For[i=1,i<=Length[V],i++,
  AppendTo[U,V[[i,1]]];
  AppendTo[U,V[[i,2]]];
  AppendTo[U,V[[i,3]]];
]
constraintsMax[V_,A0_,B0_,C0_]:=Module[{constr={}},
  For[i=1,i<=n,i++,
    AppendTo[constr, V[[i,1]]+A0-El[[i,1]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,1]]+A0-El[[i,1]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, V[[i,2]]+B0-El[[i,2]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,2]]+B0-El[[i,2]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, V[[i,3]]+C0-El[[i,3]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,3]]+C0-El[[i,3]]*V[[i,4]]>=0];
  ];
  For[i=1,i<=n,i++,
    For[j=i+1,j<=n,j++,
      AppendTo[constr, (V[[i,1]]-V[[j,1]])^2/(El[[i,1]]*V[[i,4]]+El[[j,1]]*V[[j,4]])^2+(V[[i,2]]-V[[j,2]])^2/(El[[i,2]]*V[[i,4]]+El[[j,2]]*V[[j,4]])^2+(V[[i,3]]-V[[j,3]])^2/(El[[i,3]]*V[[i,4]]+El[[j,3]]*V[[j,4]])^2-1>=0];
    ];
  ];
  constr
];
startpoint[Ut_,U0_]:=Module[{p0={}},
  p0=Table[{Ut[[i]],U0[[i]]},{i,1,Length[Ut]}];

```

```

p0
];
constraintsMin[V_,A0_,B0_,C0_,uo_]:=Module[{constr={}},
  For[i=1,i<=n,i++,
    AppendTo[constr, V[[i,1]]+A0-El[[i,1]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,1]]+A0-El[[i,1]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, V[[i,2]]+B0-El[[i,2]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,2]]+B0-El[[i,2]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, V[[i,3]]+C0-El[[i,3]]*V[[i,4]]>=0];
    AppendTo[constr, -V[[i,3]]+C0-El[[i,3]]*V[[i,4]]>=0];
  ];
  For[i=1,i<=n,i++,
    AppendTo[constr, V[[i,1]]<=uo[[1+3*(i-1)]]+ϵ];
    AppendTo[constr, V[[i,1]]>= uo[[1+3*(i-1)]]-ϵ];
    AppendTo[constr, V[[i,2]]<=uo[[2+3*(i-1)]]+ϵ];
    AppendTo[constr, V[[i,2]]>=uo[[2+3*(i-1)]]-ϵ];
    AppendTo[constr, V[[i,3]]<=uo[[3+3*(i-1)]]+ϵ];
    AppendTo[constr, V[[i,3]]>=uo[[3+3*(i-1)]]-ϵ];
  ];
  For[i=1,i<n,i++,
    For[j=i+1, j<=n, j++,
      m=Min[2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]-(uo[[1+3*(j-1)]]-uo[[1+3*(i-1)]]),2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]-
      (uo[[2+3*(j-1)]]-uo[[2+3*(i-1)]]),2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]-(uo[[3+3*(j-1)]]-uo[[3+3*(i-
      1)]]),2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]+(uo[[1+3*(j-1)]]-uo[[1+3*(i-1)]]),2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]+(uo[[2+3*(j-
      1)]]-uo[[2+3*(i-1)]]),2*ϵ+El[[i,1]]+El[[j,1]]+(uo[[3+3*(j-1)]]-uo[[3+3*(i-1)]])];
      If[m>0,
        AppendTo[constr, (V[[i,1]]-V[[j,1]])^2/(El[[i,1]]*V[[i,4]]+El[[j,1]]*V[[j,4]])^2+(V[[i,2]]-
        V[[j,2]])^2/(El[[i,2]]*V[[i,4]]+El[[j,2]]*V[[j,4]])^2+(V[[i,3]]-
        V[[j,3]])^2/(El[[i,3]]*V[[i,4]]+El[[j,3]]*V[[j,4]])^2-1>= 0];
      ];
    constr];
boxMinimize[uo_,A_,B_,C_]:= Module[{minLocation={}},
  uStart=Flatten[Table[{uo[[i*3-2]],uo[[i*3-1]],uo[[i*3]]},{i,1,Length[uo]/3}]];
  PrependTo[uStart,C];
  PrependTo[uStart,B];
  PrependTo[uStart,A];
  U= Flatten[Prepend[DeleteCases[Flatten[V],_Integer],{Aa,Bb,Cc}]];

u=FindArgMin[Prepend[constraintsMin[V,Aa,Bb,Cc,uo],(Aa*Bb*Cc)],startpoint[U,uStart],MaxIterati
ons->MaxIter, Method->"InteriorPoint"];
  AppendTo[minLocation,u];
  len=Length[minLocation];
  Clear[uStart];
  Clear[u];
  u01=minLocation[[len]];
  u01=Delete[u01,1];
  u01=Delete[u01,1];
  u01=Delete[u01,1];
  uStart=Flatten[Table[{u01[[i*3+1]],u01[[i*3+2]],u01[[i*3+3]]},{i,0,Length[u01]/3-1}]];
  PrependTo[uStart,minLocation[[len,3]]];
  PrependTo[uStart,minLocation[[len,2]]];
  PrependTo[uStart,minLocation[[len,1]]];

```

```
u=FindArgMin[Prepend[constraintsMin[V,Aa,Bb,Cc,u01],(Aa*Bb*Cc)],startpoint[U,uStart],MaxIterations->MaxIter, Method->"InteriorPoint"];
```

```
Clear[u01];
AppendTo[minLocation,u];
len=Length[minLocation];
While [Floor[minLocation[[len-1,1]]*minLocation[[len-1,2]]*minLocation[[len-1,3]],0.0001]>
Floor[minLocation[[len,1]] *minLocation[[len,2]]*minLocation[[len,3]],0.0001],
Clear[uStart];
Clear[u];
u01=minLocation[[len]];
u01=Delete[u01,1];
u01=Delete[u01,1];
u01=Delete[u01,1];
uStart=Flatten[Table[{u01[[i*3+1]],u01[[i*3+2]],u01[[i*3+3]]},{i,0,Length[u01]/3-1}]];
PrependTo[uStart,minLocation[[len,3]]];
PrependTo[uStart,minLocation[[len,2]]];
PrependTo[uStart,minLocation[[len,1]]];
```

```
u=FindArgMin[Prepend[constraintsMin[V,Aa,Bb,Cc,u01],(Aa*Bb*Cc)],startpoint[U,uStart],MaxIterations->MaxIter, Method->"InteriorPoint"];
```

```
Clear[u01];
AppendTo[minLocation,u];
len=len+1;];
minLocation[[len]]];
LocalOpt[startPoint0_]:=Module[{LocMin={}},
(* 1 *)
cons= Flatten[Prepend[constraintsMax[V,A0,B0,C0],{ $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ ,Table[0< $\lambda_i$ <=1,{i,1,n}]}]];
u10=FindArgMin[cons,startpoint[Flatten[VG],startPoint0]];
(* 2 *)
u20=Flatten[Table[{u10[[i*4+1]],u10[[i*4+2]],u10[[i*4+3]]},{i,0,Length[u10]/4-1}]];
u2=boxMinimize[u20,A0,B0,C0];
(* 3 *)
```

```
u50=Flatten[Table[{u2[[i*3+4]],u2[[i*3+5]],u2[[i*3+6]],1},{i,0,n-1}]];
startpoint[Flatten[VG],u50];
con5 = Flatten[Prepend[constraintsMax[VG, u2[[1]], u2[[2]], u2[[3]]],{- $\sum_{i=1}^{\text{Length}[E1]} (E1[[i, 1]] * \lambda_i)^2$ },
Table[aMin<=El[[i,1]]* $\lambda_i$ <=aMax,{i,1,n}]}]];
u5=FindArgMin[con5,startpoint[Flatten[VG],u50],MaxIterations->MaxIter,Method->"InteriorPoint"];
```

```
(* 6 *)
ModEl=Table[{u5[[4i]]*El[[i,1]],u5[[4i]],u5[[4*(i-1)+1]],u5[[4*(i-1)+2]],u5[[4*(i-1)+3]]},{i,1,n}];
sortModEl=Sort[ModEl,#1[[1]]>#2[[1]]&];
u60={};
For[i=1, i<=n, i++,
AppendTo[u60,sortModEl[[i,3]]];
AppendTo[u60,sortModEl[[i,4]]];
AppendTo[u60,sortModEl[[i,5]]];
If[sortModEl[[i,1]]>= El[[i,1]],AppendTo[u60,1],AppendTo[u60,sortModEl[[i,1]]/ El[[i,1]]];
];
```

```

cons6 = Flatten[Prepend[constraintsMax[VG,u2[[1]],u2[[2]],u2[[3]]],{-

$$\sum_{i=1}^{\text{Length}[E1]} E1[[i, 1]] * \lambda_i$$

,Table[0< $\lambda_i$ <=1,{i,1,Length[E1]}]}]];
u6=FindArgMin[cons6,startpoint[Flatten[VG],u60],MaxIterations->MaxIter,Method-
>"InteriorPoint"];
(* 6 *)
u70=Flatten[Table[{u60[[i*4+1]],u60[[i*4+2]],u60[[i*4+3]]},{i,0,Length[u60]/4-1}]];
LocMin=boxMinimize[u70,u2[[1]],u2[[2]],u2[[3]]];
LocMin ];
If[Length[LocalMin]< 2,
    point0=Flatten[Table[{RandomReal[{-A0,A0}],RandomReal[{-B0,B0}],RandomReal[{-
C0,C0}],0.001},{i,1,n}]];
    AppendTo[LocalMin,LocalOpt[point0]];
StartPoint=Flatten[Table[{LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+1]],LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+2]
],LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+3]],0.001},{i,1,n}]];
    AppendTo[LocalMin,LocalOpt[StartPoint]];
];

If[LocalMin[[Length[LocalMin],1]]*LocalMin[[Length[LocalMin],2]]*LocalMin[[Length[Loc
alMin],3]]<LocalMin[[Length[LocalMin]-1,1]]*LocalMin[[Length[LocalMin]-
1,2]]*LocalMin[[Length[LocalMin]-1,3]],

StartPoint=Flatten[Table[{LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+1]],LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+2]
],LocalMin[[Length[LocalMin],i*3+3]],0.001},{i,1,n}]];
    AppendTo[LocalMin,LocalOpt[StartPoint]];
];

If[LocalMin[[Length[LocalMin],1]]*LocalMin[[Length[LocalMin],2]]*LocalMin[[Length[Loc
alMin],3]]>= LocalMin[[Length[LocalMin]-1,1]]*LocalMin[[Length[LocalMin]-
1,2]]*LocalMin[[Length[LocalMin]-1,3]],
    point0=Flatten[Table[{RandomReal[{-A0,A0}],RandomReal[{-B0,B0}],RandomReal[{-
C0,C0}],0.001},{i,1,n}]];
    AppendTo[LocalMin,LocalOpt[point0]];
];

];

volume={};
For[i=1, i<Length[LocalMin], i++,
    AppendTo[volume,LocalMin[[i,1]]*LocalMin[[i,2]]*LocalMin[[i,3]]];
    IndexMin=Flatten[Position[volume,Min[volume]],1];
];

GlobalMin=Flatten[LocalMin[[IndexMin]],1]
Print["a=",GlobalMin[[1]],", b=",GlobalMin[[2]], ", c=",GlobalMin[[3]] ,"V=", volume[[IndexMin]]];
gel=Table[Graphics3D[Scale[Sphere[{GlobalMin[[4+3*(i-1)]],GlobalMin[[5+3*(i-
1)]],GlobalMin[[6+3*(i-1)]]],El[[i]],{GlobalMin[[4+3*(i-1)]],GlobalMin[[5+3*(i-
1)]],GlobalMin[[6+3*(i-1)]]],BaseStyle->{Green,EdgeForm[{Thick}]},Axes->True],{i,1,n}];
gr=Graphics3D[Cuboid[{-GlobalMin[[1]],-GlobalMin[[2]],-
GlobalMin[[3]]},{GlobalMin[[1]],GlobalMin[[2]],GlobalMin[[3]]}],BaseStyle->{Blue,
Opacity[.4],EdgeForm[Thick]},Axes->True];
Show[gr,gel]

```


Додаток Д

Результати обчислювальних експериментів з розділу 6

Приклад 6.1. $u^* = (p, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$, $N = 20$, $u^* = (30, 10.7131, 10, 7.3506 \cdot 10^{-11}, 0.71308, 1.2245 \cdot 10^{-12}, -21, -7.7131, -7, -20.3596, -7.76297, 6.8444, 21.107, 8.04889, -7.492, 21.062, 8.14, 7.4854, -21.629, 7.987, -7.27111, -21.638, 8.0003, 7.256, 9.7648, -8.34217, -7.49399, 10.0353, -8.1951, 7.43803, 22.1265, -8.32573, -3.80295, 22.7857, -5.44416, -7.66695, 22.897, -3.88001, 8.17908, 23.0053, -8.77938, 1.38674, -4.69608, -8.5572, -7.5562, 24.0167, -8.60705, 6.55007, 24.0883, 8.9419, -2.81064, 24.0881, 8.95055, 2.76852, 24.2445, 2.99985, 8.25876, 8.26781, 8.80159, 8.03532, 24.3845, 2.12451, -8.29705).$

Приклад 6.2. $N = 20$, $u^* = (0.320992, -2.72072, 2.82788, 0.426239, 9.54252, -9.36739, -1.46208, -17.3638, -8.04673, -3.33787, 1.04058, -3.93756, 10.2654, -4.67496, -8.63122, 3.92838, -19.711, -5.60815, 6.81051, 28.0608, -3.62954, 1.18768, 6.73899, -2.06055, -10.5302, 24.373, -1.13186, -7.1892, 15.774, -6.53667, 4.99611, 20.5777, -1.77732, 8.41399, 29.0789, 3.13912, 4.04814, -30.7564, 0.0681121, 5.53018, -33.0715, -0.601496, -2.19809, -30.5362, -3.04049, 1.19797, -25.1653, 1.41929, -7.5978, 31.8438, 2.5996, -1.48369, -29.8401, -1.76074, -4.55388, 28.5022, -4.73969, -3.95341, 34.5392, -0.414872, -2.75635).$

Приклад 6.3. $N = 50$, $u^* = (84.6863, 20, 20, -24.6863, -1.70231 \cdot 10^{-13}, 1.18275 \cdot 10^{-13}, 54.6863, 10, -10, 43.3938, -12.8029, 12.6373, 58.6462, -14.6901, -14.7554, 67.2978, 7.39938, 15.2909, 67.4068, -1.80871, 6.60366, 69.2377, -15.2432, 1.79351, -67.331, -15.6033, 15.5898, -71.2374, -16.0346, -9.44045, 71.003, -3.20349, 16.0262, -71.8473, -8.73644, -15.9287, -50.4699, 16.0664, 15.5984, -71.3264, 11.032, 15.6317, -71.6601, 8.48125, -16.1257, -69.3021, 16.1275, -16.2031, -72.3013, -16.4237, 6.75516, -72.2755, -6.78283, 16.5149, 71.9132, -16.1347, -6.77211, 72.3003, 16.1667, 10.0951, -37.5676, -16.2774, 16.2802, 23.7452, 15.8695, -16.4325, -74.1372, -16.5759, -1.66389, 73.0282, -2.88814, -3.41193, -73.6668, 16.5546, -2.99356, -26.4061, -16.4531, -16.4564, 73.0845, -15.2477, 16.7632, -28.4686, 16.407, 16.4073, -73.1667, 16.5552, 10.124, 73.8944, 6.24228, 2.23973, 16.6676, 16.9156, -7.8937, -48.9107, -17.087, -13.4505, -73.7947, -16.4052, -16.8055, -74.3094, 16.0089, -9.61509, 74.9226, 1.48628, -17.1634, 72.9416, 16.578, 16.986, -75.0913, 16.1449, 3.64561, 73.3533, -16.3499, 10.3706, -51.5327, -12.4287, -17.2574, 76.3885, 17.2221, -17.2443,$

-76.7171, -10.3771, 10.8168, 77.1223, -2.609, -12.5248, 76.5108, 17.1369, 2.38959, -77.284, 5.44198, 17.1607, 77.0225, -8.84021, -17.4038, -77.2103, 0.458562, 16.635, 77.7591, 17.6757, -4.2378, -76.9196, -0.56853, -17.7453, -76.7876, 17.341, 17.566, -79.668, 0.849343, -11.9149, 77.6796, -17.4378, -17.0158).

Приклад 6.4. $N = 50$, $u^* = (0.546765, -8.3073, 3.35947, -8.99395, 14.8944, -7.16968, 18.012, 9.7725, 14.6956, 14.486, -40.7136, 2.84835, 15.5108, 55.5742, 5.79358, 8.66059, 57.075, -9.96724, 1.66808, -31.9799, -20.6825, -4.13119, 40.7509, -14.8897, -12.0622, -38.3054, -14.0616, 14.0464, 58.6278, 10.1849, -6.65772, -58.8515, -11.7441, 1.93948, 30.6301, -21.5134, 4.18062, -9.32964, 24.451, 2.6563, -5.59134, -21.1234, -13.8335, 53.7681, 17.8453, 2.30714, -68.9601, 9.24909, 3.70448, 74.4241, 0.803637, -1.8714, -56.8091, 17.4015, 4.05708, 6.92217, -16.294, -22.0262, -64.6037, -7.94334, 12.5108, -65.0804, 15.0059, -3.17487, -13.5186, 26.1504, -7.393, 21.2833, 6.69249, 25.2034, -47.3627, -20.8583, 5.79143, -54.0409, 15.4047, 12.1789, 50.6256, -20.4809, -3.45378, -76.5567, -2.89635, 2.65535, -72.9339, -1.47265, 9.85719, 73.751, -5.0659, -7.54423, -72.8532, -4.89432, -10.4838, -74.0738, 8.52025, -5.3634, -70.1557, -10.6447, -7.75605, -77.6876, 3.44493, -1.02406, -76.4136, -5.77478, -3.82176, 37.5601, 2.47645, -24.7883, -76.8303, 1.86571, -7.54912, -5.5764, 25.0579, -12.508, -73.2299, 5.23863, 10.3387, 75.6848, 2.18878, -9.35055, 24.2731, 0.598646, 26.7909, 53.9221, -5.40151, 20.9382, -30.3788, -11.4634, -24.5864, -2.84355, 21.2897, -19.7732, 79.3596, -5.00244, 7.45686, -81.9483, 2.28654, 5.66721, 82.0418, 3.38861, 4.99957, -83.295, -0.782031, -3.59426, 82.1, 6.42097, -1.60448, -78.2815, -9.05877, 6.12008, -49.5603, 10.584, 21.031).$

Приклад 6.5. $N = 50$, $u^* = (80.3025, 10, 10, -50.3025, -2.5503 \cdot 10^{-11}, -8.60662 \cdot 10^{-11}, 39.4973, 3.138 \cdot 10^{-11}, 3.467 \cdot 10^{-11}, -5.40262, 4, 4, 5.66041, -6.22654, 5.97095, -18.568, -6.21239, -6.21614, 3.52374, -6.25031, -2.19689, 69.7674, 6.25018, 6.44038, -14.2888, -6.29432, 1.91642, -14.957, 1.03265, -6.57207, 5.35281, 1.99912, -6.73809, 70.8237, 4.08551, -6.84176, 71.3025, -2.75736, -7., 71.3025, -7., -2.75736, 71.2134, -3.09243, 6.95668, -24.6071, 6.96994, -6.90989, -6.48412, 6.98295, -6.82175, 71.5447, 7.0721, -1.40166, 8.30226, 7.07902, -3.39131, -19.0534, -2.95254, 7.26576, -27.9645, 7.32101, 7.25049, 17.3659, 7.29554, 7.28692, 16.7875, -7.2468, -7.24861, 60.4274, -7.41505, 7.39852, -72.1309, -7.3011, 7.29837, 71.025, -7.38794, 3.18023, -29.9892, -7.59341, 7.4495, -71.0739, 7.58109, -7.22975, -71.0993, -7.57821, -7.21464, 21.1468, 7.60457, -7.65086, 55.8833, 7.75472, -7.71531, 56.0613, -7.72524, -7.72804, 23.1069, -7.74638, 7.73429, -11.6263, -7.6501, 7.72694, 72.7438, -7.85454, -7.85738, -1.56274, -$

7.72886, -7.72998, 74.1438, -3.18225, 1.36253, -64.7899, 7.88324, 7.82118, 11.2248, -0.92515, 7.81979, -73.9275, 4.93996, 7.80101, 3.90485, -3.40552, -7.67702, 74.7215, -8.38556, 8.44181, -43.5031, 8.10193, 8.10158, -74.5143, 3.38085, -8.08939, -74.515, -3.20284, -8.12858, -27.4266, 2.7879, 8.54112, 75.6144, 8.55872, -6.78145, 68.5188, 8.52764, -8.60258, 4.47064, 8.65611, 8.64795, 75.4996, 8.60482, 2.51441, 77.2779, 8.9918, 8.99138).

Приклад 6.6. $N = 75$, $u^* = (219.917, 3.5, 6.29108, -101.396, 1.34 \cdot 10^{-19}, 2.18028, -82.6279, 1.25 \cdot 10^{-14}, -2.2944, -195.196, -1.23 \cdot 10^{-14}, 2.35962, -122.315, -4.66 \cdot 10^{-15}, 2.79108, -44.0327, 1.524 \cdot 10^{-14}, -2.79108, 167.931, -5.51 \cdot 10^{-16}, -0.85588, 101.116, -6.998 \cdot 10^{-15}, 2.79108, -174.431, 1.57 \cdot 10^{-11}, -2.79108, -134.987, -3.272 \cdot 10^{-15}, -2.79108, 32.3122, -2.64 \cdot 10^{-15}, -2.79108, 4.50893, 1.063 \cdot 10^{-14}, 2.55053, -147.658, 4.81 \cdot 10^{-15}, 2.79108, -209.417, 7.16 \cdot 10^{-16}, -2.79108, 192.873, -3.985 \cdot 10^{-15}, -1.19222, 88.4447, -1.13 \cdot 10^{-14}, -2.79108, -154.909, -0.315509, -3.27398, -63.417, -0.5, -3.29108, -72.7677, 0.5, 3.29108, 23.8238, 0.5, 3.29108, 150.829, -0.5, 3.29108, 118.293, -0.5, -0.245005, 12.928, 0.5, -3.29108, -55.1706, -0.5, 2.52084, 41.5359, -0.5, 2.91393, -167.06, -0.5, 3.20585, -37.3195, -0.5, 3.29108, 149.913, 0.5, -3.29108, -115.602, 0.5, -3.29108, 63.4285, -0.5, -1.07481, 81.7315, 0.5, 3.29108, 106.209, 0.917348, -3.75041, -26.3122, -0.817666, -1.23881, -212.417, -1, 3.79108, -99.7988, -1, -3.79108, -2.87551, -1, -3.79108, 137.593, -1, 0.0456619, 205.556, 1, 3.791, 183.307, 1, 3.79108, 49.8051, 1, -3.79108, -191.924, -1, -3.79108, 57.19, 1, 3.791, -11.2656, 1, -0.160854, -21.4583, 1, 3.50747, 130.075, 1, -3.791, 129.671, 1, 3.79108, -86.6148, -1.44664, 4.23102, 208.676, 1.5, -0.692633, -180.417, 1.5, 4.29108, 116.339, 1.5, 4.29108, 68.3151, -1.5, 4.29108, -17.4298, 1.26697, -4.19261, 205.98, -1.5, -4.26827, 194.432, -1.5, 4.29108, 73.2214, 1.5, -4.29108, -10.4822, -1.5, 4.29108, 172.183, -1.5, 4.29108, 180.005, -1.5, -4.29108, 213.917, -1.5, 1.29452, 164.246, 1.5, 4.29108, 213.917, 1.5, -4.29108, 62.3125, 2.08542, -4.92148, -135.487, -1.95677, 4.8212, -146.106, 2.25775, -5.00942, 215.292, -2.01482, 4.94258, -209.012, 2.32174, 4.89206, -25.691, -2.29112, 4.94168, -164.5, -2.32417, -5.11618, -72.5469, 2.1966, -4.98431, 57.4226, -2.11759, -4.96172, -61.8768, 2.22691, 5.0313, 56.4089, -2.38524, 5.05877, -47.125, 2.16562, 4.90572, 216.249, 2.07834, 4.87393, 47.3625, 2.3516, 5.1229, 216.131, -2.12069, -4.7854).$

Приклад 6.22. $u^* = (p, x_1, y_1, z_1, \theta_1^1, \theta_1^2, \dots, x_N, y_N, z_N, \theta_N^1, \theta_N^2)$, $N = 2$, $u^* = (19.463, 11.1005, 11.0327, 3.8637, 6.03476, 4.2239, 1.5708, 2.879, -3.141593, 13.2993, 5.550235, 5.516346, -2.727019, -1.890560, 5.662936)$.

Приклад 6.23. $N=3$, $u^* = (18.9737, 10.6397, 18.3426, 14.3467, 5.3266, 3.8637, -4500009.466, -4500000.3, -4500007.89, 4.8296, 5.3198, 7.0169, 3.4036, -1.6141, 1.58240613.665626, 5.319867, 13.035035, -2.702373, -1.973083, -0.694739)$.

Приклад 6.24. $N=4$, $u^* = (18.782844, 10, 19.727405, 14.422478, 4.904575, 15.863703, -2.058583, -1.832597, 0, 5.251851, 5, 12.672991, 2.143510, -1.361999, 1.43938, 13.782844, 5, 6, -6.283185, -1.570796, -4.712389, 4.434285, 6.033572, 2.970720, 2.924730, 4.454439, -9.429179)$.

Приклад 6.25. $N=5$, $u^* = (19.446479, 19.318523, 13.395869, 4.674509, 5.542998, 9.532166, 2.279249, -1.832597, 0.00000013.884329, 4.829631, 6.697934, -1.289817, 1.203664, 1.46756914.013146, 14.488892, 7.490932, -4.429676, 1.188442, -1.6787603.506477, 3.703750, 2.963320, -10.287122, -1.414260, -6.283185, 4.678517, 13.315726, 4.458777, 4.221189, -2.283399, 0)$.

Приклад 6.26. $N=6$, $u^* = (19.943897, 18.49121, 18.454057, 15.169411, 13.9219, 3.89003, -3.854741, 1.3258, 3.142136, 13.613356, 5.00385, 5.79434, -1.5708, 0.654975, 4.712389, 14.74811, 12.59882, 13.189517, 4.137586, -1.81985, 2.446855, 3.2857, 3.658165, 4.750319, -2.66545, 1.48275, 1.46481, 8.2375, 4.68602, 14.01315, -0.47808, -0.88497, 3.141593, 5.49626, 13.0634, 7.5, 2.256626, 1.570796, -4.71239)$.

Приклад 6.27. $N=7$, $u^* = (22.04403, 20.35723, 19.17607, 5.21614, 16.268284, 14.886386, -0.143916, -2.531766, -0.191916, 16.6841, 15.422879, 12.26871, -2.30407, 1.90023, -1.85436, 16.66546, 5.25872, 13.809339, -1.205656, -1.123103, 0.712058, 7.597564, 3.671683, 3.866238, -5.109026, -2.085589, 7.018272, 16.805163, 8.066816, 4.498794, -0.317327, -1.59395, 3.141593, 7.226128, 14.253707, 5.31259, 0.452657, -1.308997, -3.14159, 5.690613, 6.098289, 13.36475, -2.39597, 1.77753, 2.439335)$.

Приклад 6.28. $N=8$, $u^* = (21.861481, 20.941682, 19.719416, 7.080743, 4.283912, 15.732, 0.490973, 2.183034, -0.00154914.879069, 16.096635, 5.369931, -3.739877, -2.838000, -6.90343516.967216, 5.893383, 14.338434, 0.801002, -0.449901, 0.82216713.874706, 2.898374, 6.883564, 17.547700, -1.355176, -14.19606816.634637, 16.183791, 15.035389, 0.566631, 0.618474, -3.6198316.100744, 6.590548, 6.132972, 0.380940, -0.926308, -2.4650215.703897, 14.990015, 13.789236, 2.847095, -1.863878, 0.78113418.108970, 7.522061, 3.758054, -2.451808, -1.257869, 0.661045)$.

Приклад 6.29. $N=9$, $u^* = (22.399841, 19.597158, 21.275273, 12.589207, 5.309804, 4.293675, -0.697499, -0.985668, 2.4668535.835740, 14.597158, 15.002638,$

-1.570797, 2.257746, -1.5707975.193014, 5.264420, 9.169827, -1491.427003, -1.700896, -1491.23967619.502061, 3.195563, 4.011801, -0.262200, -1.516015, -1.55610216.899841, 15.100222, 16.834363, 3.141593, 2.256625, 3.14159315.357609, 5.312592, 14.729379, 5.115329, -0.720876, -5.02229216.489994, 14.090681, 6.196727, 1.285550, 1.264121, -1.5707963.848931, 4.406831, 17.882189, 1.926943, 1.312263, -3.1413814.969423, 14.306685, 4.298287, -0.891367, -1.336103, 0.025524).

Приклад 6.30. $N=10$, $u^* = (22.399841, 19.597158, 21.275273, 12.589207, 5.309804, 4.293675, -0.697499, -0.985668, 2.4668535.835740, 14.597158, 15.002638, -1.570797, 2.257746, -1.5707975.193014, 5.264420, 9.169827, -1491.427003, -1.700896, -1491.23967619.502061, 3.195563, 4.011801, -0.262200, -1.516015, -1.55610216.899841, 15.100222, 16.834363, 3.141593, 2.256625, 3.14159315.357609, 5.312592, 14.729379, 5.115329, -0.720876, -5.02229216.489994, 14.090681, 6.196727, 1.285550, 1.264121, -1.5707963.848931, 4.406831, 17.882189, 1.926943, 1.312263, -3.1413814.969423, 14.306685, 4.298287, -0.891367, -1.336103, 0.025524).$

Приклад 6.31. $N=11$, $u^* = (22.568674, 21.433929, 22.4532, 11.1665, 7.9644, 12.8868, 12.9103, 5.34538, -4.91573, 6.479567, 5.341026, 5.50142, 0.71506, 1.268488, 2.52134317.572076, 4.934348, 6.042565, 2.256628, -1.570797, -1.5707964.132997, 18.426593, 19.016688, -3.754969, 2.782015, 2.4899, 17.81578, 4.733867, 17.338235, 12.159, -0.7707, -11.3625, 15.248005, 15.4033, 17.0254, -0.48845, -2.25663, -3.141592, 5.427782, 15.72041, 9.671556, -0.74069, 4.359926, 4.4066, 4.47762, 11.8332, 18.6044, 0.8071, -0.3037, 2.3425, 4.735907, 4.153486, 17.24345, 1.26798, 2.09061, 4.55843, 16.0958, 15.47648, 5.79883, -2.2827, 7.5564, 5.6552).$

Приклад 6.32. $N=12$, $u^* = (28.676637, 20.259273, 21.802086, 24.676842, 4.142693, 16.850842, -0.544786, -1.895030, -1.7614975.320593, 6.686374, 16.547495, -1.023333, 2.53678, -5.81835523.580186, 5.971952, 5.082972, -4.83285, 2.208146, -0.07190815.17472, 4.153599, 3.006503, -1.55231, 1.325014, 0.0070254.652385, 15.73192, 5.433617, -4.167647, -1.900265, 4.88963, 21.627998, 14.171563, 16.302086, 2.704467, -1.570796, 0, 6.458752, 5.736486, 5.703897, -2.544192, -1.852385, 0.702256, 3.68241, 16.805231, 17.356288, 5.45193, 1.221787, 4.409997, 10.34196, 15.53659, 13.038043, 2.981955, -2.144948, -1.67097815.772352, 5.243313, 13.725715, -1.805717, -1.479577, 1.62322516.686975, 14.458702, 5.479123, 1.348683, -0.686429, 2.44219125.435448, 16.504711, 4.112774, -2.913403, -0.980637, -1.699321).$

Приклад 6.33. $N = 40$, $u^* = ($ 2.919435, -0.760683, -1.628520, -0.819223, 3.790912, 4.444018, -5.722451-1.298325, -0.296308, -0.328012, 8.092013, -1.651973, 3.256202-2.073698, -0.058575, 0.766410, -0.436592, -2.453987, 4.5878190.889463, 2.147242, 0.584741, -6.675903, 1.817270, 0.534257-1.557113, 1.691963, -0.317482, 0.353703, 1.235312, -1.547648-0.088536, 1.321542, -0.338430, 3.322690, 2.070263, 2.414992-0.291547, 0.350758, -2.352804, 3.835064, -0.191479, -2.7373261.311352, 1.814643, -0.842042, -0.633199, 1.151414, 3.257799-2.290234, 0.465759, -0.530671, 1.370164, -1.794072, 1.736413-1.183665, 0.729028, 1.952222, 4.160353, 0.618793, -5.689718-1.095609, 0.953318, -1.533250, -12.342031, -0.474496, 13.5384431.673459, 0.920525, 1.447717, -4.209489, -2.219395, -4.124827-1.496047, -0.580718, -1.779979, 1.941062, -2.407904, -0.0642621.074654, -0.268070, -2.120109, -1.818260, 3.562984, -0.023200-0.144589, 0.045390, -0.083594, -0.679179, 4.684639, 2.5637410.909947, -0.035587, 1.073175, 1.280742, -2.472095, -1.823069-2.027515, -1.183296, -0.476512, 2.094430, 1.383354, 2.799801-1.518535, -0.946243, 1.594488, -4.155136, 2.298707, -1.4844190.845771, -1.049557, -0.084268, 0.549785, -1.612338, -0.3646930.630247, -1.747133, 1.104575, 0.881065, -0.912201, 2.6689250.234433, 0.722799, 2.239268, 9.753502, 0.245314, -14.489822-0.063447, -1.419282, -1.867085, 3.663243, -2.684868, -7.7896411.376334, -0.492241, 1.893413, 1.132952, -2.503222, -4.427306-0.587703, 0.051672, 1.280289, 4.077357, -2.134295, -7.5177290.245553, -2.358921, -0.344832, -3.037870, 4.568003, -1.290983-0.412068, -0.990975, 0.772946, -2.906256, 1.504963, -6.534015-0.128657, -0.335218, -1.331937, -3.353424, 0.510979, -3.0678991.419470, -1.297065, -1.179577, -2.137605, -2.864911, 0.217899-0.569427, 2.103256, 0.997890, -2.877194, 1.141340, 1.7281321.011381, 0.165804, -0.590646, 2.465566, -1.082455, 3.129096-0.951185, -2.102152, 0.648014, 2.716676, 1.844593, -1.221178-0.050985, -1.197848, 2.075157, 3.099055, 2.617690, 4.9214032.128644, 0.285018, -1.063652, 1.703902, -4.252537, 2.1311821.580029, -1.799289, 0.098909, 0.720606, -1.612077, -2.528026, -0.268664, 2.232418, -0.829364, 0.119770, -1.924162, -1.3852410.346727, 1.092315, 0.907786, -0.134055, 0.928455, 1.2856130.663190, 1.167565, -1.671314, -3.628662, -2.367489, -6.2645772.304735, -0.428588, 0.496088, 1.386301, 1.363662, -1.9884921.799581, 0.933486, 0.147892, -7.479763, -3.397423, -10.190225-1.386169, 1.101049, 0.643078, 0.342345, -2.285618, -2.32195).

Приклад 6.36. $N = 30$, $u^* = ($ 3.123431, 1.592148, 4.251796, 0.909009, 0.592852, 2.452673, 1.032109, 1.276642, 0.734195, 2.929688, 5.332919, 0.826160, 5.144805, 4.067452, 3.628511, 5.408150, 3.910778, 4.177002, 1.023438, -0.048565,

1.437815, 2.520451, 5.475001, 3.076319, -0.123205, 0.342088, 0.339392, 4.454507, -
 1.447901, 13.088577, 2.338928, 2.904506, 0.826160, -0.285129, 2.548627, 0.826160,
 3.853669, 3.153884, 1.856674, 3.070182, 0.826160, 3.853669, 5.122353, 1.161688,
 3.926991, 5.360017, 0.826160, 3.231718, 4.261300, 2.863948, 3.769538, 2.834064,
 2.321112, 0.567513, -0.019621, 0.829908, 3.849807, 1.111282, 4.584216, -2.049154,
 4.179606, 2.262118, 0.826160, 3.426722, 3.636315, 3.758057, 3.853669, 0.965512, -
 1.030222, 3.719857, 4.172563, 0.987303, 2.092837, -0.047411, 1.892901, 5.241207,
 0.826160, 0.831472, 0.308092, -0.299644, 5.393388, 2.625866, 5.276233, 0.285129,
 8.151466, 1.068991, 0.964247, 5.272651, -0.205059, 5.346451, 4.122227, 3.853669,
 5.119254, -1.195198, 3.727452, 5.243016, 3.853669, 2.480594, 2.810752, -
 1856.983237, 2.206702, 3.722903, 2.255461, -0.586393, 1.407921, 5.393388,
 3.662799, 0.826160, 0.234737, 4.986036, 1.037831, 2.369037, 2.460181, 3.397555, -
 0.224076, 0.826160, 2.338301, 4.169048, 3.020217, -1.858098, 0.826160, 0.826160,
 3.012344, 1.326449, 1.738918, 3.263556, 3.853669, 3.518837, -0.348372, 6.587100,
 0.826160, 2.034900, 0.826160, -0.271152, 4.630186, 2.474253, 3.753271, 5.184538,
 2.420266, 1.187234, 5.265218, 2.438750, 3.579173, -0.491703, 8.936893, 5.393388,
 2.132653, 1.960521, 3.198978, 4.998001).

Приклад 6.37. $N = 50$, $u^* = ($ 3.284574, 7.898665, -1.129691, -1.348729,
 4.653628, 5.598028, -13.392176, 1.755268, 0.725799, 5.362944, 3.672068, 0.705261,
 0.099074, -2.435349, 2.369472, 0.965515, 5.641129, 1.669870, 1.881327, 7.129614, -
 0.294554, -0.890479, -1.882613, 1.875203, 4.255383, -1.270388, 2.805580, 2.102924,
 2.048872, 4.701173, 2.290885, 11.787407, 2.199281, -1.098619, 5.600007, 0.907489,
 1.555183, -0.271525, 0.775616, 4.124695, 2.983428, 3.050752, -2.220125, -1.055864,
 0.826160, -0.017007, 1.837676, -0.879585, -0.091128, 0.875103, 3.646391, 1.802452,
 0.677397, 0.633757, 7.072505, -0.285129, -0.298468, 1.735416, -1.741302, 2.349550,
 0.610653, 3.612441, 2.312552, 0.834210, 0.826160, -0.248578, 2.166103, -1.765056,
 1.711250, 2.454353, 4.023367, 1.231306, -0.831657, -0.233814, 7.072505, 0.265392,
 1.801102, 2.456538, 0.096044, 7.072505, 3.329864, 1.846064, 0.986955, -2.251604,
 0.826160, 2.856470, 3.302063, 0.396745, 0.820614, 2.518745, -0.475215, -0.630449, -
 0.845043, -0.269365, 2.526801, 3.473076, 1.911699, 2.101341, 0.938875, 3.526236, -
 0.363724, 3.456063, -2.280937, 0.584512, 3.718478, -0.545741, 0.362960, -0.195437, -
 2.320048, 7.072505, 3.426721, 0.913859, 0.793947, 2.326682, 0.826160, 2.984957, -
 0.571332, 1.340051, -2.061084, 4.058867, 2.507300, 4.037923, 0.559979, -0.778564,
 6.222963, 5.246650, 1.509400, 0.827322, -2.315025, 5.677093, 2.936203, 0.588824, -

0.114330, 2.455755, 2.281520, -0.084193, 3.427565, -0.349211, 0.734739, 5.774680, 0.288949, 3.144134, -0.555928, 2.394733, 3.958154, 2.185345, -2.428473, -2.273990, 0.934222, 0.826160, 2.978157, -1.732537, -2.251015, 0.988298, 5.530981, 1.265437, 0.867283, -2.457065, -0.081437, 2.216596, 3.214843, 4.506369, 0.507271, -0.867305, 1.590213, 0.372681, 0.553691, 1.698361, 1.777462, 2.155967, 3.003311, -0.586452, -0.999362, 2.246125, 5.622446, -0.025234, 3.321884, -1.590601, 1.688291, 7.072505, 0.082722, 4.903077, 0.834789, 2.312343, 5.632509, 2.030766, 2.690707, 2.371712, -0.647135, 3.902574, 4.095507, 1.418364, 1.726404, -1.750237, 7.072505, 3.410435, 1.029542, -1.630010, -1.840345, 2.255674, 0.011388, -7.246297, -0.823095, -2.144936, 0.826160, -0.285129, 1.376070, 2.299081, -0.116279, 2.270168, -0.173769, 2.732033, -0.072219, 2.344792, 7.072505, 2.982570, 2.347942, -1.818246, -1.654625, 7.072505, -0.285129, -1.085121, -2.458215, 0.031292, 6.953408, 0.884613, 1.125808, 1.075516, 2.210671, 3.771951, -1.041082, 2.551837, -0.948747, 2.093082, 0.826160, 2.856464, -0.956953, 0.821085, -0.564164, 3.337924, 2.626856, -1.846672, 0.612042, 0.617965, 0.826160, -0.285129, -0.785672, 2.108171, -0.907035, 0.826160, 0.285129, -0.486412).

Приклад 6.38. $N = 50$, $u^* = (-0.436007, -2.066049, 1.277582, -2.267187, 0.561233, 2.769129, -1.027705, -0.263701, 0.204483, 1.113498, -1.091938, 0.789457, -0.987035, -0.296392, -1.722636, -0.887875, -1.040921, -1.024448, 2.586422, 2.053058, 0.331035, 3.167454, -1.089199, -0.973545, 3.098755, -0.455701, 1.454641, -3.300116, 0.100302, 3.121510, -2.979910, -0.145537, -1.062606, -0.897692, 1.591959, 0.737222, 3.031645, 0.543889, -0.431814, 3.047824, 1.152079, 0.742341, -2.855141, -0.133687, 2.850863, 1.688751, -1.979547, -1.805463, 3.323628, 3.790870, -0.817353, 2.710100, 1.420378, -1.195538, 1.012337, 0.245389, 0.516174, 1.663142, 0.087863, 1.418200, 1.520971, 1.526826, 0.988423, 2.543220, 3.950426, -0.937290, 1.208969, 0.740393, -0.890548, 0.876341, 2.278050, 1.374465, -1.717998, -0.391881, -3.909302, 0.576062, 2.233227, 2.170492, 2.248091, 1.235364, -1.009272, 2.972015, -0.422700, 0.504229, 0.116487, 1.567196, 0.908253, 2.597913, 0.788533, 3.080136, -1.818495, -2.331927, -1.133743, -0.115147, -0.353453, 0.321188, 1.785949, -0.488791, -0.904092, -3.598641, -2.789477, -1.484097, 0.215538, 3.417214, 2.026955, -3.081706, 0.531763, 0.500501, 2.160314, 2.077136, -2.540512, 1.582884, -1.034630, -0.564479, 0.684183, -2.267876, 1.082413, 1.927510, -0.241653, 1.295322, 1.425186, -0.401217, 0.849130, 0.022080, 1.557396, 0.831545, -1.050639, -2.869647, 3.133269, 1.210711, 2.411545, -0.335182, -2.025409, 2.445986, 3.500546, -0.661909, -1.878939, -2.462041, 2.260869, 1.721559, 1.546002, 0.361642, -0.637048, 2.450423, 4.785843, 0.046806, -2.940868, -1.174430, -$

0.579612, 0.597481, -1.088353, 2.122769, -2.083147, 4.243230, 2.048431, -2.481357, -0.880906, 1.759845, 3.665514, -1.185373, 0.239406, 0.024297, -1.653719, 3.192541, 1.516987, -1.361913, -0.325251, 2.840702, 3.538417, -1.087210, 1.337411, -2.867651, -0.134491, 7.374474, 4.241247, 1.891293, -0.779095, 2.417892, 3.175744, 4.032862, 0.754606, -1.325189, -0.609910, 3.569423, 0.847688, 2.830568, 0.365222, 1.372836, 3.295714, 1.600233, 0.356988, -0.217717, 3.139322, -0.012062, 2.441128, -0.791677, 1.313277, 2.771052, 2.387644, 2.142587, -0.003719, 0.054250, 0.015666, 9.601533, 4.323638, -2.283395, 2.136718, 0.500726, 3.110461, 3.753489, -1.904896, 0.703281, -2.430422, 2.276682, 0.134579, -1.661451, -0.277540, 0.259538, 7.541153, 0.415896, 2.096327, -2.017526, 1.251073, 0.163497, 0.881445, 1.785319, 2.537844, -0.634166, 2.097091, 8.701901, -0.505134, -0.113338, -3.124447, 3.535908, 3.856071, 2.884154, 1.308349, -0.007902, 0.790348, 1.636623, -2.020900, -0.965948, -2.238993, 2.123239, 0.735488, 0.632786, 2.202040, -2.186500, 7.091037, 0.250622).

Приклад 6.39. $N = 60$, $u^* = ($ 2.126715, -1.731793, 0.091315, 3.648066, 0.799312, -0.444458, -0.075267, 1.697654, 2.934158, 1.720349, -3.235588, -0.191476, 0.048637, 0.929432, 4.944643, 2.198105, 2.107291, 1.111627, 3.638394, -0.903886, -1.397051, 2.919821, -0.175918, 7.138316, 6.932322, 0.447134, 1.686136, 2.732229, 0.283352, 3.166040, 2.276317, -0.383928, -2.244807, -0.169069, 1.797669, -2.143246, -1.212193, -1.461706, -0.057760, 3.288159, 1.267426, 0.569051, -0.605528, -2.756024, -5.718346, 1.510250, 2.126226, -1.925192, -0.982437, 4.502501, -1.737760, 1.945157, 1.924737, 2.946958, 0.992981, 0.987848, -2.686789, 1.913409, 0.349183, 0.673084, -1.824385, 1.946803, -2.176554, 3.093550, 3.834898, -1.084285, -0.298282, -0.028021, -0.716684, 6.818097, 0.329555, 1.785488, 0.493673, 1.060582, -2.409256, -2.656514, -2.189650, 0.064634, 0.665605, 2.566727, 0.780871, 0.381336, -3.331762, 2.867706, -1.185734, 2.022272, 0.354847, 2.764111, -0.693589, 0.752189, 0.709710, 3.366927, -0.126203, 0.446562, 3.195445, 3.360075, 0.670431, 0.340924, -4.199011, 2.107104, 0.263107, 3.077752, 1.521193, 6.303534, 2.785499, 0.163876, -1.300744, -1.425713, 0.490923, -8.373291, -0.799606, -2.211107, -2.515441, 2.643949, 1.134900, -1.794435, 0.938813, -0.861952, -2.209930, 2.330977, 0.870390, -1.489205, -2.980017, 3.610304, 4.091865, -2.887484, 1.838925, 0.369595, -0.610158, 4.377412, -1.377694, -3.008837, -0.951140, 0.572943, -0.945651, -0.443703, 0.218229, -2.010884, 0.405331, -2.804227, 0.246748, -3.090484, -1.497943, 0.767860, -2.044407, -0.280621, 1.798472, -2.922766, 0.695652, 0.968932, 1.289466, 0.435217, 1.285363, -3.061925, -1.006374, 0.242926, -0.017400, 3.434603, 3.102497, -2.865534, -2.225930, -1.787962, 1.653657, 2.458899,

1.284629, 0.100732, -3.421245, 0.375164, 2.113843, 2.863168, 0.398134, -1.608816, 3.018114, 3.348497, 3.530910, -0.230203, 3.033816, -1.612072, -0.500437, -3.088476, -0.787551, -2.588014, 2.130202, 6.735672, 2.020368, -1.380313, 0.497362, 3.178005, 3.417134, 1.272471, -0.288104, 1.530514, -1.081577, -5.170716, -3.071945, -1.578432, 0.593881, -3.067281, -0.711721, 0.215202, -1.488321, -3.077710, 0.751636, -15.101425, -16.663874, 3.032288, 1.136818, -1.328618, 3.194507, 5.386099, -1.381167, -1.166042, 2.997512, 2.705751, 3.624450, 2.159220, -1.208140, 2.475988, -0.163928, 0.481665, -0.826617, -1.871734, 0.022516, 0.366621, 2.978748, -2.618911, -0.379491, 2.291210, 3.699887, 6.725297, -2.843958, 0.457092, -1.988798, 3.574262, 1.775991, -0.479045, -0.593432, -3.416241, -0.406539, 1.820934, 0.281885, -0.647413, 0.324828, 0.328653, 7.311690, -1.047606, 1.302341, 0.398231, 0.513094, 2.400380, -3.253947, 0.745261, 1.456207, 1.052622, -1.097502, 1.656877, -2.423662, -2.155168, 0.241479, 6.888489, 0.104192, -1.906645, 1.062915, -0.029667, 0.948773, 3.491187, -0.283616, -0.995361, -0.875240, -1.613125, -1.981200, 0.572861, 0.811447, 2.241882, 2.068498, 2.807041, 2.277399, -0.445081, 2.702556, 2.044410, -2.951154, 1.800066, -1.146551, -3.395355, 1.196384, 3.145601, -0.102120, 1.832714, 2.836549, 1.643275, -1.794734, -0.878298, -3.044938, 3.309733, -0.934362, -2.630213, 0.608850, 2.865657, -0.741211, -3.900558).

Приклад 6.40. $N=100$, $u^* = ($ 4.928073, 1.525406, 5.106691, 0.987253, 3.433915,, 6.973317, 6.326537, 2.596785, 3.360952, 1.738135,, 0.871400, 2.076928, 2.390407, 5.392699, 2.410595,, 2.514695, 2.145753, 5.282574, 0.502257, 0.204938,, 0.627392, 4.158195, 4.358904, 3.205875, 1.760388,, 0.371029, 5.571346, 6.508625, 1.812286, -1.755127,, 1.010449, 6.974931, 0.826160, -0.285129, 0.193033,, 5.586170, 3.740299, 2.990105, 3.438832, -2.723740,, 2.569558, 6.974931, 1.893763, -0.500372, -3.313439,, 3.956653, 3.590793, 4.541377, 0.953364, -3.462917,, 0.826160, 6.773702, 5.905612, 3.194763, 1.348459,, 7.181508, 5.875666, 5.866810, 2.010952, -1.015685,, 7.181508, 0.973890, 2.139354, 0.361555, 4.406938,, 4.956007, 6.974931, 2.123819, 0.025196, 3.175099,, 2.234418, 6.136421, 3.277505, 3.651613, 2.562416,, 7.181508, 0.983227, 3.791647, -0.236208, 1.277285,, 0.826160, 4.263122, 5.858629, 0.535576, 7.520769,, 2.532199, 6.974931, 4.723054, 0.471564, 3.412348,, 2.464896, 3.682249, 7.557253, 0.023093, 3.433066,, 3.927539, 2.512895, 7.557253, 3.426722, 2.326079,, 2.422606, 0.826160, 6.216419, 3.740078, 3.249908,, 5.376385, 2.265570, 0.826160, 0.245483, -2.908468,, 7.181508, 5.169310, 0.826160, -0.285129, -1.273312,, 3.825536, 6.824696, 0.826160, 0.244772, 4.336362,, 0.826160, 6.868763, 4.192472, 0.686927,

1.198464,, 5.494637, 0.826160, 2.487922, -0.986910, 2.606127,, 2.663058, 0.826160,
 4.398630, 0.246382, -3.193475,, 7.033814, 3.683646, 7.557253, 2.856464, 2.763657,,
 2.611171, 0.826160, 0.905304, 3.795754, -0.061198,, 3.216241, 2.223020, 3.589205, -
 0.430053, 4.001734,, 3.753077, 6.969513, 3.389244, 2.855390, 2.819495,, 0.849387,
 3.668764, 0.864552, 2.685985, 1.137160,, 2.408825, 2.979343, 2.361926, 0.638715,
 3.756718,, 5.381667, 0.826160, 7.557253, 0.285129, 2.844109,, 4.696707, 5.036580,
 3.690173, 2.814634, -10.967066,, 0.954225, 2.442900, 5.923325, 3.515226, -0.513909,,
 0.826160, 4.614984, 7.557253, 6.030381, -1.276031,, 6.029797, 3.938661, 0.826160,
 2.915364, -1.042494,, 4.094513, 5.017939, 0.826160, -0.285129, 3.926259,, 4.385284,
 6.842132, 4.986324, 3.214063, 2.157981,, 7.181508, 4.218325, 5.855037, 1.297904, -
 5.979934,, 0.826160, 6.821051, 7.557253, 0.285129, -1.868280,, 4.385445, 0.826160,
 0.982423, 1.954381, -0.681880,, 6.179387, 2.325177, 2.342611, 2.017644, -6.010643,,
 7.181508, 0.888357, 7.433157, -0.917921, -2.052212,, 3.284305, 5.528520, 4.453999, -
 0.801742, 1.028764,, 0.826160, 2.425541, 4.154093, 2.218581, 2.055724,, 1.863174,
 2.336803, 0.940812, 2.285489, 7.600960,, 5.706635, 3.559217, 6.202144, -0.382688, -
 0.948991,, 0.826160, 0.826160, 5.607241, 1.979905, 0.785398,, 3.004619, 6.060617,
 6.837270, -0.217845, 3.847367,, 2.212754, 3.926262, 3.943687, 2.634359, 1.544306,,
 0.826160, 5.379129, 1.212958, 1.451936, 2.591550,, 2.084442, 4.695476, 2.039209,
 2.811226, 3.657061,, 0.781395, 0.627392, 2.330774, 0.286977, 2.858945,, 3.687567,
 4.124501, 8.023292, 0.008450, 1.946049,, 7.181508, 6.974931, 7.371987, 1.979905,
 2.356194,, 7.181508, 3.954058, 2.010846, -0.745941, -1.177774,, 5.645955, 2.615736,
 7.557253, -0.243811, -1.458818,, 3.687373, 5.668309, 2.289516, 3.678542, 0.294775,,
 4.494651, 2.318789, 2.546778, 2.026126, 4.048437,, 1.001712, 0.836733, 7.517922,
 2.800961, -3.296340,, 0.923373, 6.860679, 2.472222, 2.791863, -2.210618,, 7.181508,
 3.073477, 3.422407, 3.011535, -1.283170,, 7.171339, 0.880768, 5.551633, 0.925590, -
 4.144741,, 7.181508, 2.568812, 4.995770, -0.470943, -1.249664,, 7.181508, 4.788930,
 4.000308, 1.856076, 3.173696,, 0.838426, 0.963157, 0.858209, 2.714985, 1.944087,,
 5.545731, 6.833268, 7.557253, 2.856464, 2.013857,, 7.181508, 2.461391, 0.826160,
 3.302089, -1.852078,, 5.849483, 6.974931, 5.939283, 3.295828, 3.430245,, 1.464703,
 5.484000, 4.828753, -0.160562, 0.226028,, 4.550960, 3.561662, 1.459463, -0.820222, -
 2.817771,, 5.570074, 6.974931, 3.831377, 2.052710, 3.793741,, 3.433916, 0.826160,
 7.544140, 3.483722, 3.432241,, 2.285484, 1.014726, 2.536487, 2.828909, 1.474263,,
 0.826160, 3.699795, 2.697676, 1.863684, -0.227456,, 4.833772, 4.395411, 7.557253,
 0.214165, -0.735841,, 7.181508, 6.955908, 4.578788, 2.045194, 5.375740,, 7.035451,

2.320915, 6.622845, -0.467894, 3.270341,, 7.034443, 6.972727, 0.843577, -0.361085,
 2.825968,, 5.969251, 3.836309, 4.594533, 3.473930, 1.680395,, 0.826160, 2.652752,
 7.557253, 2.856464, 1.273312,, 2.347023, 2.050872, 7.323002, 1.072447, 4.051988,,
 2.700520, 3.857414, 0.826160, 2.866189, 2.639264,, 5.343044, 5.154866, 2.171540,
 0.534771, 1.104798,, 0.826160, 5.276366, 3.192228, 1.863684, -0.227456,, 5.896030,
 5.648084, 4.760564, 1.825376, -1.132721,, 2.339126, 3.601101, 5.911727, 3.538883, -
 2.385678,, 5.528344, 6.127188, 0.826160, 2.883174, 2.572548,, 6.187715, 0.826160,
 0.826191, 2.856328, 0.297496,, 7.041434, 5.336987, 7.538352, 0.367653, 2.744048,,
 3.742333, 3.947267, 2.847839, -0.066691, 1.842856,, 3.992379, 3.626702, 6.338488, -
 0.301426, -7.418028,, 4.603450, 4.843727, 5.402752, 3.144878, 5.383522,, 5.687030,
 5.371594, 6.532960, 2.905362, -0.708783,, 2.426230, 5.721999, 0.826160, 0.250380, -
 0.776559,, 3.511564, 2.229372, 0.978619, 4.288762, 3.529344,, 0.956020, 0.826160,
 3.760043, 2.616291, 0.331134,, 3.884566, 0.826160, 2.907351, 4.557160, 10.116967).

Приклад 6.41. $N=100$, $u^* = ($ 2.096565, -1.241136, 1.725079, 3.799600,
 0.892071, 0.011777, -2.820050, 6.476547, 1.071766, 1.379540, 0.265251, -1.565945,
 4.874994, 1.795525, 8.369460, -3.030715, 0.513296, 9.761501, 2.847038, 2.746449, -
 1.307707, 1.133826, 9.903159, -0.248455, 4.516720, 3.607528, 0.343745, 6.903540,
 1.918585, 4.850671, -1.613350, -2.496193, 9.704392, 0.248133, -5.115782, 1.617791,
 0.368590, 7.686209, -1.048779, -1.688602, -0.939782, -2.991315, 3.011804, 1.865799,
 4.666622, 0.482060, 1.426814, 3.910828, 2.601945, -0.170937, -0.158519, -1.380432,
 9.648867, 2.605432, -1.748283, -1.601117, -2.695845, 0.826160, 3.426722, 5.484969, -
 3.018640, 0.847920, 5.958018, 1.900740, -16.507245, 1.547145, 2.727178, 2.613834,
 2.485162, 2.290981, 2.780176, 1.406966, 7.035998, 0.069054, 1.703660, -1.261290,
 1.112011, 8.450513, 0.333997, -2.608823, -2.386210, -1.794968, 5.482477, 2.692140,
 0.699517, 1.070434, 2.947088, 4.180533, 0.086066, 6.184327, 1.438723, 2.785899,
 7.303657, 0.380518, 2.565173, 0.502001, 1.602188, 7.975624, -0.640752, 3.413016, -
 0.754740, 3.043275, 4.487032, 1.927166, -0.531274, -1.474947, -0.408423, 9.420011, -
 1.394382, 2.126398, -0.348424, 1.495680, 0.826160, 0.204313, -2.863974, 1.555784,
 0.612177, 4.866674, 2.435618, 5.824751, -2.110703, 2.318640, 5.633073, 0.646356,
 3.548656, -1.573037, 0.198565, 5.490336, 2.619955, 3.884619, -3.100156, 0.469244,
 1.287513, 4.587004, 2.034464, -2.895557, -1.202875, 9.704392, -0.131854, -4.067439,
 2.037456, 2.383260, 0.973859, 1.101583, -0.049560, 2.069665, -2.355343, 3.799095,
 3.160796, 0.472561, 0.047097, 1.669509, 9.615726, 2.436825, -2.105367, -2.434595,
 1.975829, 9.537149, 1.133202, 3.316946, -2.449755, -1.957002, 3.839350, -0.231557, -

0.639331, 0.083503, -3.134355, 9.704392, 2.856464, -0.235644, 1.244081, 0.757433, 0.826160, 0.285129, 0.916544, 1.029674, 1.430540, 6.418240, -0.000653, 2.333837, 3.134886, 0.060405, 8.263794, 0.158156, -1.448266, -0.775091, -1.365751, 8.067362, 0.701610, 3.404896, 0.251653, -3.125352, 0.892124, 0.587163, 2.907352, 1.904125, -2.491077, 9.704392, 3.298932, 0.733216, -3.098806, -0.478075, 4.783793, 4.905816, 5.148190, -2.332542, 1.857798, 0.826160, 3.426722, 2.154497, 0.586765, 3.080075, 5.754870, 3.784759, 0.142195, -1.565401, 0.059022, 0.826160, 0.285129, 1.615913, -1.307819, 1.426387, 6.818321, 3.388679, -18.584607, -1.738971, 2.609049, 7.939771, 1.009923, 0.136164, 1.403676, -0.968551, 9.302368, 1.730894, 6.110663, -0.940828, 2.990986, 9.704392, 2.856463, -2.778270, -1.621280, -0.129618, 7.277395, 1.692643, 3.304078, -0.050800, 0.056146, 4.863700, 1.199692, -0.898399, -1.907538, 1.348626, 3.268893, -0.890378, 0.225180, 1.924651, -2.214321, 6.030146, 1.953540, 3.482556, -3.068136, -0.646295, 2.774045, 1.628774, 2.547737, 1.557938, -0.895513, 4.188616, 1.578746, -2.625322, -0.156310, 0.203140, 9.903159, 0.118943, 2.820599, 3.394192, -1.183376, 3.624640, 2.927350, 1.192778, -0.526517, 1.674058, 5.383614, 3.956477, 0.474436, 0.602548, 1.425596, 2.204855, 2.965367, 8.341588, 3.120228, 0.308762, 3.829690, 0.962976, -1.968103, 1.355962, 0.662421, 9.562775, -1.048696, 1.771034, 2.243156, 1.997561, 8.512611, 0.048518, 7.629706, -0.083272, 0.253733, 6.744791, 0.873841, 106.717040, 0.457008, -0.048593, 3.167385, -0.015012, 3.196151, -0.805750, 3.030169, 6.642884, 2.498427, 3.071045, 2.618123, -1.725279, 8.203081, 0.731155, 10.085492, 3.004701, -0.896064, 9.704392, 0.285129, 1.543252, 0.024884, 3.135369, 8.371458, 0.595993, 0.308988, -3.022305, -0.834764, 6.667192, 2.475982, 2.177812, 3.064400, 0.663785, 5.538667, 2.469932, 1.444589, 0.694944, -3.057484, 2.614488, 0.682593, 0.566702, 2.952780, -1.054632, 5.012727, 1.961411, -7.557523, 0.529316, 3.090466, 1.004141, 1.227419, -9700.425834, 0.997672, -1.228177, 7.563980, -0.290285, 2.329344, 2.163918, 2.269056, 5.557694, 2.586357, 2.105016, 1.227698, -0.496755, 6.066081, 0.154426, 0.558113, -1.111409, 2.931881, 1.118288, 4.425110, 2.932413, 2.926563, -0.657477, 6.790225, 2.994589, -0.791378, 3.016419, 0.855788, 0.826160, 2.856464, 5.2511, -0.0989, -0.00699, 1.61195, -0.32781, 5.38737, -0.03141, -1.61236, 2.95243, 1.9958, 0.2911, -1.23361, -0.901, 4.208484, 2.7743, 1.794833, 1.235133, -2.881944, 8.178192, 0.689059, 3.201050, 2.401679, 1.787438, 3.9951, 3.545097, 6.5702, -1.221463, -2.741435, 4.7913, 3.42616, 3.76154, -0.923144, -2.996491, 8.288547, 2.980760, -3.474283, 0.438206, -3.104695, 4.298371, -0.677634, 3.432387, -2.998916, -0.238110, 8.283850, 0.608724, 0.267211, 2.959024, 1.036982,

9.704392, 0.270255, 2.168688, -0.131287, 3.086876, 2.699774, 0.913673, 11.744393, -2.812574, -1.166326, 0.826160, 2.856464, 5.830820, 2.591558, 1.290610, 2.430734, 0.019037, 6.497167, -1.341040, -0.791361, 2.368448, 4.580203, 7.307394, -2.312736, -2.117170, 2.200530, 2.912788, 2.569279, -2.834412, 1.340621, 7.824822, 1.706510, 6.779746, -1.760135, -2.440867, 6.868479, -0.064693, 4.746927, -2.508715, -1.880826, 8.248063, 2.469805, 2.553681, -0.815773, -1.159001, 6.163428, 1.2223, -6.225719, -0.4439, -1.5164, 0.8261, -0.2851, -0.4366, 1.3768, 2.81701, 9.70439, 3.4267, -0.7168, 0.1224, -0.014669, 8.493318, -0.219618, 2.980747).

Приклад 6.42. $N=100$, $u^* = ($ 3.308718, -0.987296, -0.177044, -3.165071, 1.422837, -2.097037, 1.062162, -2.599111, 3.788950, -0.440502, -1.679376, 1.900269, -0.148703, 1.976285, 3.713373, 0.951966, -4.107977, -0.266426, 2.824590, -2.668872, -3.786081, 0.717644, 1.669863, 3.722788, -3.170432, -1.074848, 2.979109, 3.422069, 0.411563, -2.163132, -3.742757, 1.747599, 0.557690, 1.761642, 4.990158, 1.625595, -1.270206, -3.621792, 3.048651, 0.642172, 0.107211, 4.164728, -0.130026, 4.416459, 1.766084, 1.174190, -2.158681, -0.687459, 2.403219, 1.451126, -3.720542, 0.118584, -1.875331, 0.715017, -21.404831, -2.727096, 0.598765, -0.479446, 4.340996, 1.564918, -1.703167, -1.950673, -0.517615, -1.141036, 4.311188, 1.587049, 0.354349, 3.837847, -0.315693, 1.705940, 2.405774, -1.064865, 3.124312, -0.403838, 1.702101, 3.749769, 1.803346, -0.246026, -1.249844, 3.756208, 0.010072, -0.788511, -3.927331, -1.057244, -1.438712, -1.504750, -1.918990, -3.380319, 0.830656, 3.536916, -4.157665, 0.180410, 0.233727, 5.111430, 8.578332, -2.377507, -2.148031, 1.247301, 0.731295, 3.009786, 2.140226, 1.524681, 0.002723, 2.320051, -1.037373, 0.669951, 1.868296, -3.475557, 4.227959, 3.812663, -0.296219, -1.859437, -1.379202, 3.765937, 1.698952, 3.698769, 1.255728, 1.454515, 2.406475, -1.273030, -2.603482, 2.830630, 1.117438, 0.023199, -0.824940, -2.843384, -1.061658, -2.628847, 2.699385, 3.903974, -0.939468, 0.385398, 2.508586, 0.437774, -0.639243, -2.902090, 1.810114, 2.382167, 3.978857, 0.250960, 0.553983, 0.977947, 0.625327, 0.293446, 2.927902, -1.293229, 3.669252, -0.934524, 3.524306, 5.258168, 2.130622, 0.696704, 1.433128, 3.321872, 2.235571, 2.719392, 2.579063, -1.424722, 0.013930, 4.017171, 3.570572, 1.039963, -1.882245, 3.151079, 2.138551, 1.602706, -2.611774, -2.575878, -0.959298, 5.110571, -0.044308, 3.647817, -2.016141, 0.811560, 0.172697, -0.004607, 3.773617, 1.770070, -0.875807, 1.314967, -0.333875, -3.074538, -0.194193, 2.344172, 0.018917, -3.535260, 1.694730, -1.415338, -0.660363, 0.637296, -1.514385, -0.360474, 3.866530, 0.227450, 1.185870, -2.440513, -0.630924, 0.595698, 2.933282, -0.432214, -0.952775, -3.192139, -2.389618, 2.658483,

-0.679515, -0.482586, 0.835725, -4.054877, 0.446032, 2.753722, -0.047580, 2.523763, -0.014113, -0.826151, 3.681159, 0.873405, -1.005381, -2.174644, 2.617823, -3.192377, -2.874951, 2.966985, -0.552281, 3.721852, 10.415682, -1.276793, 3.730282, 0.716586, 2.975948, 5.386490, 2.942954, -2.242265, 1.919538, 0.755415, 1.014522, 2.789393, 3.090677, 0.200905, 4.008245, -1.201508, 1.458269, 3.803785, 0.882058, 1.500040, 0.314332, 0.924540, 1.739174, -1.095577, 2.988902, -2.087355, 0.370044, -1.257773, 1.330157, 0.235644, 0.192286, -0.837979, 0.192474, -0.634305, 0.003125, 1.037361, 0.132572, -0.419445, 3.985747, 1.891527, -0.041147, 0.158428, 1.174577, 3.929844, 4.174525, 0.801025, 1.174025, 3.342246, 2.553606, 0.885140, 3.314428, -2.988603, -1.151508, 3.350823, -0.410848, 2.433856, 2.322434, 1.639107, -3.048440, 5.655433, 3.929270, -1.717183, -3.694669, -0.879807, 3.793434, -0.949904, 3.581321, -0.424796, 2.089747, 6.359155, 1.389296, 2.536446, 2.694144, 1.918694, -0.285673, 1.918273, -2.692841, -2.545418, -1.908615, 0.736366, -2.932712, 1.516936, -3.181421, 2.225044, 0.598378, 1.136271, 1.511837, 3.591799, -0.928402, 0.481316, 4.535639, -3.852647, -1.539746, 0.399559, 3.739431, 5.471602, -2.015011, 0.866373, 1.149966, 3.430744, -3.662064, -1.712190, -2.730554, 2.643073, 3.926435, 2.219847, 0.954806, 2.342539, 1.466391, -0.709762, -0.284144, -1.437913, 1.518143, 3.603393, -0.777768, 2.052461, 2.276482, -3.273970, -1.213303, 2.518661, 0.557677, -3.610886, -0.871064, 1.891061, 0.446995, -1.406851, 1.078489, -0.203329, -0.648559, -0.023335, -1.292413, -0.871285, 2.429571, -3.272828, 3.532697, 0.773980, 2.153730, -3.324141, 0.678567, 0.026051, -0.551240, 1.434740, 2.882294, -2.418643, 0.457408, 3.651388, 0.651414, 0.910666, 2.333183, 3.648450, 5.678639, -1.745133, -0.331539, -3.770670, 0.168688, 3.073408, 0.119270, -4.020937, 1.091417, 0.372736, 12.995896, 1.208926, 0.342390, -3.809135, -1.925008, 10.932542, -0.654863, 2.089934, -1.666315, 3.721989, -3.545874, -2.952991, -2.940447, -0.083509, 2.374826, 1.998772, -0.134551, 2.444243, 3.009621, 0.486222, 1.142716, -1.034686, -0.730398, -2.333192, -0.586030, 0.551093, -1.605195, -3.670004, 0.950436, 3.938839, 0.797614, -2.118567, 2.872350, -2.152820, -0.286701, 0.517097, 1.922164, 0.627043, -1.801318, -0.951337, 3.490616, 0.139845, -2.302897, -3.279292, 1.816364, -1.482449, -2.019951, -0.952030, 2.329842, -0.668724, 1.331888, 2.806811, 1.035764, 2.902130, -0.039092, 7.803760, 1.008639, -1.869444, 3.586249, 3.746228, 1.311262, -2.832923, 0.297255, 3.042949, 3.624017, 0.763765, 2.837069, -1.524908, -2.417040, 3.244934, 2.663364, -3.060364, -1.133755, -0.992424, 3.376372, 0.715398, 2.806709, 0.028129, -3.081388, -0.976354, 2.830812, 0.569498, -3.577436, -1.721397, 3.058313, -1.283879, -0.641397, -1.805494, 3.527488, -2.116365, 5.231711, 0.131958, 0.588890, -2.250695, 0.715674, 5.657956, 1.461311, 2.060720, 3.200133, 4.991611, 0.112005, -0.754909, 1.920138, 1.440998, 2.693459, -4.596000, -1.549331, 3.059494, 2.369056, -0.488355, 1.268753, -0.072190, -3.193632, 2.677472, 1.040998, 0.862396).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Субота І.О. Задача оптимальної упаковки еліпсів: математичні моделі і методи розв'язання: дис. канд. техн. наук: 01.05.02. Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. 2015.
2. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Quasi-phi-functions in packing of ellipsoids. *Radioelectronics & Informatics*. 2015. No.1 (68). P. 37–41.
3. Хлуд О. М., Суббота И. А., Романова Т. Е. Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и информатика*. 2015. № 3. С. 14–20.
4. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of approximated ellipsoids. *Control, navigation and communication systems*. 2016. No.3(39). P. 62–66.
5. Хлуд О. М., Романова Т.Е., Стецюк П. И. О двух задачах оптимальной упаковки гомотетических эллипсоидов. *Бионика интеллекта*. 2017. №1(88). С.29–35.
6. Khlud O. M., Yaskov G. N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No.6(46). P.131–135.
7. Pankratova Yu. Ye., Khlud O. M., Patsuk V. M. Packing of ellipsoids in a convex container. *Control, navigation and communication systems*. 2018. No. No.1(47). P.80–83.
8. Khlud O., Pankratov O., Romanova T. Development of the mathematical model and the method to solve a problem on the optimization of packing the ellipsoids into a convex container. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No.4(94). P. 51–58.
9. Субота І. О., Яськов Г. М., Хлуд О. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: тези доповідей XXI Всеукраїнської наукової конференції. Львів.

2015. С. 302–303.

10. Pankratov A., Romanova T, Khlud O. Quasi-phi-functions of ellipsoids. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIII міжнародної науково-практичної конференції*. Дніпро. 2015. С. 164–165.

11. Хлуд О. М. Математическая модель задачи упаковки эллипсоидов с использованием квази-phi-функций. *Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов*. Харьков: Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2015. С.19.

12. Романова Т. Е., Стецюк П. И., Хлуд О. М. Задача упаковки гомотетичных эллипсоидов. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тезисы докладов 5-ой международной научной конференции*. Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 373–377.

13. Pankratov A., Romanova T, Khlud O. Packing of approximated ellipsoids into a cuboid of minimal volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тезисы докладов 5-ой международной научной конференции*. Кишинев, Молдова. 2016. Т.2. С. 274–278.

14. Хлуд О. М., Старосельский Е. Е. Метод решения задачи оптимальной упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезисы докладов XX юбилейного международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский. национальный университет радиоэлектроники. 2016. Т. 7. С. 128–129.

15. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Хлуд О. М. Упаковка эллипсоидов и нелинейная оптимизация. *Информационные системы и технологии ИСТ-2016: тез. докл. 5-ой междунар. науч.-техн. конф.* Харьков Коблево. 2016. Т. 5. С. 128–129.

16. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов*. Харьков: Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. 2016. С.34.

17. Хлуд О. М., Омеляненко С. С. Математическое и компьютерное моделирование в задаче оптимальной упаковки эллипсоидов. *Радиоэлектроника и*

молодежь в XXI веке: тезисы докладов XX юбилейного международного молодежного форума Харьков: Харьковский. национальный университет радиоэлектроники. 2017. Т. 7. С. 112–113.

18. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Optimal packing of ellipsoids. *Problem of decision making under uncertainties: тезисы докладов XXX международной конференции*, Вильнюс, Литва. 2017. С. 71.

19. Romanova T., Pankratov A., Khlud O. Optimal packing of ellipses and ellipsoids. *The 14th ESICUP Meeting: тезисы докладов 14-ой международной конференции*, Льеж, Бельгия. 2017. С. 24.

20. Gil N., Pankratov A., Romanova T., Khlud O., Patsuk V. The optimization problem of packing ellipsoids into a convex container. *7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE 2017): тезисы докладов 7-ой международной конференции*. София, Болгария. 2017. С. 23.

21. Хлуд О. М. Математические модели и методы решения задачи оптимальной упаковки эллипсоидов. *Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов*. Харьков: Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, 2018. С.19.

22. Хлуд О. М., Старосельский Є. Є. Математична модель та метод розв'язання задачі оптимальної упаковки гомотетичних еліпсоїдів. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезисы докладов XXII международного молодежного форума* Харьков: Харьковский. национальный университет радиоэлектроники, 2018. Т. 7. С. 102–103.

23. Pankratov A., Romanova T., Khlud O. Packing of ellipsoids in a cylindrical container of minimum volume. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: тезисы докладов 6-й международной научной конференции*. Кишинев, Молдова. 2018. С.161–163.

24. J. Kallrath. Cutting circles and polygons from area-minimizing rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2009. Vol.43(2-3). P.299–328.

25. Y. G. Stoyan, G. Yas'kov. A mathematical model and a solution method for

the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol.156(3). P.590–600.

26. Y. G. Stoyan, G. Yas'kov. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol.52(4). P.855–868.

27. Y. G. Stoyan, G. Yas'kov. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89(10). P.1355–1369.

28. Y. G. Stoyan, M. V. Zlotnik, and A. Chugay. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region. *Journal of the Operational Research Society*. 2012. Vol.63(3). P.379–391.

29. Z. D. Cheng, W. B. Russell, and P. M. Chaikin. Controlled growth of hard-sphere colloidal crystals. *Nature*. 1999. Vol.401(6756). P.893–895.

30. M. D. Rintoul and S. Torquato. Metastability and crystallization in hard-sphere systems. *Physical Review Letters*. 1996. Vol.77(20). P.4198–4201.

31. S. F. Edwards. The Role of Entropy in the Specification of a Powder. In A. Mehta, editor, *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, New York, Springer Verlag. 1994. P.121–140.

32. H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Science*. 1992. Vol.255(5051). P.1523–1531.

33. H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*. 1996. Vol.68(4). P.1259–1273.

34. P. Chaikin. Thermodynamics and hydrodynamics of hard spheres: the role of gravity. In M. E. Cates and M. R. Evans, editor, *Soft and Fragile Matter: Nonequilibrium Dynamics, Metastability and Flow*, Institute of Physics Publishing. 2000. Vol. 53. P.315–348.

35. W. S. Jodrey, E. M. Tory. Computer simulation of close random packings of equal spheres. *Physical Review A*. 1985. Vol.32(4). P.2347–2351.

36. C. Uhler, S. J. Wright. Packing Ellipsoids with Overlap. *SIAM Review*. 2013. Vol.55(4). P.671–706.

37. A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S.

Torquato, and P. M. Chaikin. Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids. *Science*. 2004. Vol.303(5660). P.990–993.

38. B. D. Lubachevsky, F. H. Stillinger. Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics*. 1990. Vol. 60(5-6). P.561–583.

39. L.-Z. Lu and C. E. M. Pearce. Some new bounds for singular values and eigenvalues of matrix products. *Annals of Operations Research*. 2000. Vol.98(1). P.141–148.

40. A. Bezrukov and D. Stoyan. Simulation and statistical analysis of random packings of ellipsoids. *Particle & Particle Systems Characterization*. 2007. Vol. 23. P.388–398.

41. Yi-King Choi, Jung-Woo Chang, Wenping Wang, Myung-Soo Kim, and Gershon Elber. Continuous collision detection for ellipsoids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2009. Vol. 15(2). P.311–324.

42. Baule A., Mari R., Bo L., Portal L., Makse H.A. Mean-field theory of random close packings of axisymmetric particles. *Nature Communications*. 2013. Vol. 2194. P. 1–11.

43. Pedro G. Lind. Sequential random packings of spheres and ellipsoids. *AIP Conference Proceedings*. 2009. Vol. 1145. P. 219.

44. Sh. I. Galiev and M. S. Lisafina. Numerical optimization methods for packing equal orthogonally oriented ellipses in a rectangular domain. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013. Vol. 53(11). P.1748–1762.

45. J. Kallrath and S. Rebennack. Cutting ellipses from area-minimizing rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2014. Vol. 59(2-3). P.405–437.

46. N. V. Sahinidis. *BARON 14.3.1: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Program. User's Manual*. 2014.

47. Y. Lin and L. Schrage. The global solver in the LINDO API. *Optimization Methods and Software*. 2009. Vol.24(4-5). P.657–668.

48. R. Misener and C. A. Floudas. GloMIQO: Global mixed-integer quadratic optimizer. *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 57(1). P.3–50.

49. Y. G. Stoyan, A. Pankratov, and T. Romanova. Quasi-phi-functions and

optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2018. doi:10.1007/s10898-015-0331-2.

50. J. Kallrath. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes. *Journal of Global Optimization*. 2017. Vol. 67. Issue 1–2. P. 151–185. doi:10.1007/s10898-015-0348-6.

51. Birgin E. G., Lobato R. D., Martínez J. M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65, Issue 4. P. 709–743. doi: <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0395-z>.

52. Романова Т.Е. Средства построения математических моделей оптимизационных задач размещения геометрических объектов и их применение. *Дис. д-ра техн. наук*, 01.05.02, Харьков. 2003. 324 с.

53. Стоян Ю.Г. Свойства и способы реализации функции плотного размещения. Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. *Препр. АН Украины. Ин-т кибернетики*; 18. К.: 1972. 46 с.

54. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. Стоян Ю.Г. К.: *Наук, думка*. 1975. 239 с.

55. Стоян Ю.Г. Сумма Минковского и годограф вектор-функции плотного размещения. Ю.Г. Стоян, Л.Д. Пономаренко. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1977. №10. С. 888-890.

56. Stoyan Yu.G. Automation of arrangement design of engine systems of block design. Mathematical model. Yu.G. Stoyan, A.F. Loiko. *Engineering simulation*. 1998. № 15. P. 815-825.

57. Гиль Н.И. Математическое моделирование нерегулярного размещения плоских геометрических объектов в системах автомата (теоретические основы, методы, приложения). *Автореф. дис. д-ра техн. наук*: 05.12.13. Ин-т техн. кибернетики АН БССР. Минск. 1990. 32.

58. Стоян Ю.Г. Метод асимптотического перебора локальных экстремумов. Ю.Г. Стоян, Н.И.. *Препр. АН УССР*. Ин-т пробл. машиностроения; 1-74. Харьков. 1974. 48 с.

59. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы

геометрического проектирования. Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. К.: Наук. думка, 1986. 267 с.

60. Романова Т.Е. Система построения математической модели класса $E_k(R_2)$ -задач размещения. *Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук*: 05.13.16, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. К.:1990. 16 с.

61. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения. *Доклады АН УССР*. 1980. № 8. С. 70-74.

62. Магас С.Л. Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов на полосе. *Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук*: 01.05.03, ВЦ АН СССР. М.:1984. 20 с.

63. Стоян Ю.Г. Метод поиска локального экстремума в задаче размещения многоугольников в полосе. Ю.Г. Стоян, М.В. Новожилова. *Препр. АН УССР*. Ин-т пробл. машиностроения; 263. Харьков. 1987. 24 с.

64. Пандорин А.К. Методы и алгоритмы построения раскладок в системах управления раскроем изотропных материалов. *Автореф. дис. канд. техн. наук*: 01.05.03, Харьковский ин-т радиоэлектроники. Харьков. 1988. 17 с.

65. Chernov N. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs. N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov. *Advances in Operations Research*. 2012. doi:10.1155/2012/346358.

66. Stoyan Y. Phi-functions for complex 2D objects. Y. Stoyan, N. Gil, T. Romanova, G. Scheithauer. *4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*. Vol. 2(1). 2004. P. 69-84.

67. Романова Т.Е. Математическое моделирование взаимодействия отрезка прямой и базовых геометрических объектов. Т.Е.Романова, Е.А.Ступак. Радиоэлектрони Панкратов А.В. Математические модели, методы и информационные технологии решения оптимизационных задач размещения геометрических объектов: *дис. док. техн. наук*: 01.05.02 Х., 2013. 413 с.ка и информатика. 2006. №2. С. 12-15.

68. Романова Т.Е. Полный класс Ф-Функций для круговых сегментов и базовых объектов. Т.Е.Романова, Е.А.Ступак. *Штучний інтелек*. 2006. №4. С. 232-

242.

69. Stoyan Y. Phi-function technique in object packing problems. Y. Stoyan, T. Romanova, N. Chernov. в мат. 3-ей Международной научной конференции "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии", Кишинэу, 19-23 марта 2012. С. 169-172.

70. Y. Stoyan Φ -function and its basic properties. Докл. АН Украины. Сер. А. 2001. №8. С. 112-117.

71. Y. Stoyan Analytical description of interactions of point sets. *Journal of mechanical engineering*. 2001. №1-2, Vol. 4. С. 77-88.

72. Scheithauer G. Φ -functions for circular segments. G. Scheithauer, Y. Stoyan, N. Gil, T. Romanova. *Prepr. Technische Univarsitat Dresden; MATH-NM-7-2003. Dresden*. 2003. 27 p.

73. Stoyan Y. Mathematical modeling of interaction of circular segments and their combinations. Y. Stoyan, G. Schethauer. *Proc. Workshop on Cutting Stock Problems. Miercurea-Ciuc(Romania)*. 2005. P. 14.

74. Bennell J. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems. J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova. *J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands*. 2010. Vol. 179 I.1. P. 343-368.

75. Scheithauer G. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova. *Cybernet. Systems Anal.* 2005. V.41,3. P.332-342.

76. Stoyan Y. Construction of a Φ -function for two convex polytopes. Y. Stoyan, J. Terno, M. Gil, T. Romanova, G. Scheithauer. *Applicationes Mathematicae*. 2002. Vol.2, №29. P. 199-218.

77. Стоян Ю.Г. Φ -функции параллелепипедов и цилиндров. Ю.Г. Стоян, Д.И. Придатко, Т.Е. Романова, М.А. Уварова. Докл. НАН Украины. 2002. № 10. С. 68-72.

78. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Φ -функции для шара и неориентированного многогранника. *Доповіді НАН України*. 2011. №12. С. 44-50.

79. Семкин В.В. Нормализованная Φ -функция сферических сегментов. В.В.

Семкин, А.М. Чугай. *Доповіді НАН України*. 2012. №12. С.41-48.

80. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova. *Computational Geometry: Theory and Applications*. 2010. Vol. 43(5). P. 535-553.

81. Stoyan Yu.G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with jump algorithm. Yu. Stoyan, G. Yaskov. *Optimization Letters*. 2013. DOI10.1007/s 11590-013-0646-1, Online ISSN 1862-4480.

82. Комяк В.М. Моделирование размещения геометрических объектов в областях произвольной пространственной формы. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДАТОХ. 2002. Вип.1. С. 46-50.

83. Чугай А.М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. №1. С. 58-63.

84. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D объектов. А. Панкратов. *Системи обробки інформації*. 2013. № 1(108). С. 82-186.

85. Stoyan Yu. Packing of circles, rotating circular segments and polygons. Yu. Stoyan, T. Romanova, M. Zlotnik, G. Scheithauer, E. Stupak. *Проблеми машиностроения*. 2008. №1(11). С. 56-62.

86. Stoyan Yu. Packing of circles, rotating circular segments and polygons. Yu. Stoyan, T. Romanova, M. Zlotnik, G. Scheithauer, E. Stupak. *Journal of mechanical engineering*. 2008. V.11, №1. P.56-62.

87. Стоян Ю.Г. Оптимизация компоновки трехмерных объектов в многосвязной области с учетом кратчайших расстояний. Ю.Г. Стоян, В.В. Семкин, А.М. Чугай. *Кибернетика и системный анализ*. 2014 №3. С.58-70.

88. Стоян Ю.Г. Квази- ϕ -функции для математического моделирования отношений геометрических объектов. Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, Н.И.Чернов. *Доповіді НАН України*. 2014. Т.9. С. 49-54.

89. Дж. фон Нейман Теория игр и экономическое поведение. Дж. фон Нейман, О. Моргинштерн. Пер. с англ. под ред. и с доб. Н.Н. Воробьева. - М. : Наука. *Главная*

редакция физико-математической литературы, 1970. С. 708.

90. Куратовский К. Топология. Т.1.. Москва: Мир. 1966. 594 с.

91. Кроуэлл Р. Введение в теорию узлов.. Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Москва: Мир. 1967. 348 с.

92. Панкратов А.В. Математические модели, методы и информационные технологии решения оптимизационных задач размещения геометрических объектов: дис. док. техн. наук: 01.05.02 Х., 2013. 413 с.

93. Bennell J.A., Oliveira J.F. A tutorial in irregular shape packing problem. *Journal of the Operational Research Society*. 2009. 60:93–105.

94. Стецюк П.І., Романова Т.Є., Субота І.О. NLP-задача упаковки гомотетичних еліпсів у прямокутний контейнер. *Теорія оптимальних рішень*: зб. наук. пр. Київ: Ін. кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. 2014. С. 139-146.

95. Stoyan Y, Pankratov A, Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2015. DOI:10.1007/s10898-015-0331-2.

96. Шор Н.З. Использование модификации г-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций. Н.З. Шор, П.И. Стецюк. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 4. С. 28-49.

97. Octave . – <http://www.octave.org>.

98. Stetsyuk, Petr Ivanovich: Subgradient methods ralgb5 and ralgb4 for minimization of ravine-like convex functions (2017)

99. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН. 2010. 118 с.

100. Romanova, T., Bennell, J., Stoyan, Y., Pankratov, A. (2018). Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimisation. *European Journal of Operational Research*/ V.268(1). P.37–53. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.025>

101. Romanova, T., Bennell, J., Stoyan, Y., Pankratov, A. (2018). Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimisation. *European Journal of Operational Research*. 268 (1), 37–53. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.025>.

102. Ipopt home page. URL: <https://projects.coin-or.org/Ipopt>

103. Wolfram Language & System Documentation Center. URL:
<http://reference.wolfram.com/language/ref/FindArgMin.html>