UDC 531.391.1

K.S. Krasnikov, Cand. Sci. (Tech.)

Dniprovskyi State Technical University
(Kamianske, Ukraine, kir_kras@ukr.net)

MATHEMATICAL MODELING OF REMAINING BENDING STRAINS IN CORED WIRE INJECTED INTO ARGON-STIRRED MELT

A cored wire is used in the secondary metallurgy to accurately refine molten steel before casting. An adding of cored wire is costly, so its length needs to be minimized, however it is very precise method to achieve high quality product. Mathematical modeling helps to find rational parameters of mentioned process, such as injection speed and placement of cored wire. To make modifications metallurgists get additional details about the process using mathematical modeling, because melt has high temperature and opaqueness.

Today a mathematical model can be powered by modern computer technologies, which accelerate and scale it. The one of the further steps of research is to formulate kinetic and potential energies, as well as hydrodynamic drag force acting on cored wire during its movement in melt.

There are many published articles about mathematical description of wire dynamics. Ussually authors use stiff equations to predict wire`s motion with assumption that it is inextensible. In our case a cored wire lost its rigidity and elasticity with temperature growth. In his chapter [1] the author uses Kirchhoff's rod theory to solve various problems involving elastic rod, which includes bending and twisting phenomenon. After developing the reduced dynamical system he simulated behavior of a spiral spring using a helix curve.

A part of cored wire, which exits from directing tube above molten steel, is sufficiently thin relatively to its length. That part is represented by elastic string or a material 3D-curve of length L with mass per length M. Mathematically the curve is defined in space and time by vector-function $\overline{p}(l,t)$, which is need to be found to render the curve on a screen. At any point of this curve there is mechanical energy, which includes kinetic energy K and potential energy P.

Kinetic energy of a material curve includes a translational part and a rotational one, where a rotation around a center line of the curve is neglected (can be taken into account in the future). They are defined using velocities $\overline{v}(l,t)$ of mass points:

To obtain equations of motion a material curve is virtually divided by N equal sections. Each section i has the start point p_{i-1} and the end point p_i. A speed and coordinates of zero point p_0 are determined from initial conditions.

1. O'Reilly O.M. Kirchhoff's Rod Theory. Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer, Cham, 2017. P. 187–268. https://doi.org/10.1007/978-3-319-50598-5_5

UDC 681.5, 621.382, 621.373.5, 519.6

I.P. Storozhenko, Dr. Sci., Prof.

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture
V. Karazin National University of Kharkov
(Kharkiv, Ukraine, prof.igor.storozhenko@gmail.com)

SIMULATION OF OPERATION OF TRANSFER ELECTRON DEVICES ON BASED GRADED-GAP NITRIDE SEMICONDUCTORS FOR TERAHERTZ ACTIVE CONTROL SYSTEMS

The main advantages and scenarios for the development of the terahertz electromagnetic waves usage are mostly clear and of great interest in mechanical engineering. During the last two decades a number of spectacular achievements were presented which pushed forward terahertz technology and science. The relatively cheap, small-sized and effective means of generation, emission, registration and signal processing in the terahertz range are of great demand to implement terahertz technologies in mechanical engineering. Looking through terahertz techniques, one can easily notice the essential difference in availability, diversity and price between detectors and sources of terahertz radiation. The sources of terahertz range are few. When someone thinks of usage the direct current sources, it turns out that existing devices are large or very expensive, or both. In the lower part of the THz range, the researchers' efforts are mainly aimed to create high-frequency transistors of nanometer size. However, traditional millimeter-wave devices remain attractive for the role of such active elements. For example, devices based on the effect of intervalley electron transfer have a number of good characteristics making them suitable and attractive for the submillimeter frequencies.

In the last decade, semiconductor nitrides have attracted attention of many researchers due to a number of outstanding properties [1]. Such materials include BN, GaN, AlN, InN and their alloys. These materials are recognized as technologically important for both electronic and optoelectronic devices [2, 3]. However, the practical RF generation of GaN and InN Gunn diodes remains unrealized [4]. There are two difficulties [2]: (i) the removal of heat from the active region of the device; and (ii) the effective heating of the electron gas at the cathode contact. The techniques that were used in GaAs diodes were found to be ineffective for nitride semiconductors. Achievement of the negative differential mobility (NDM) threshold necessitates not only several hundred times greater DC power, which must be removed from the device, but also creation of conditions near the cathode for rapid electron energy increase necessary for their transfer to the side valleys of the conduction band. The hope is given by graded-gap semiconductors, which can significantly reduce the heating time of the electron gas near the cathode. The existing researches [5-7] show an increase in the RF power of the Gunn diodes based on graded semiconductor. It should be added that the problems that play a key role in the RF generation of Gunn diodes such as doping level and profile, cathode contact and technological design with an efficient heat removal method remain completely unexplored for nitride semiconductors.

In this paper, I use a temperature hydrodynamic model of the graded-gap Gunn diode to simulate a micron device based on graded III-nitrides operating at the terahertz frequencies. I propose to use a smooth change in the composition of the semiconductor as a mean to stimulate the generation of drifting domains, in which the energy gap between the Γ-valley and the side valleys grows in the direction from the cathode to the anode. In this paper, I show that the usage of graded nitride semiconductors not only increases the RF power of the fundamental mode at the frequencies above 300 GHz, but also reduces the DC power compared to similar GaN and InN.

The diodes with doping profile n^+–n–n^+ based on graded $B_{x(z)}In_{1-x(z)}N$, $Ga_{x(z)}In_{1-x(z)}N$ and $Al_{x(z)}In_{1-x(z)}N$ alloys are simulated with the following parameters: transit region length was 1.0 μm; ionized donor concentration therein was 9×10^{16} cm^{-3}; length of the cathode and anode was 0.4 μm; ionized donor concentration therein was 10^{18} cm^{-3}. I used the Γ-A-ML levels model for semiconductor nitride.

Composition fractions in $B_{x(z)}In_{1-x(z)}N$, $Ga_{x(z)}In_{1-x(z)}N$ and $Al_{x(z)}In_{1-x(z)}N$ is given by S-dependence [6, 7]. The change in the composition of the semiconductor along the transit region occurs in the way that the minimum energy gap between the Γ and sides valleys is an increasing function of the coordinate [7]. In this research the length of transition layer l_g=0.87 μm almost coincides with the length of diode transit region, because under this condition the highest efficiency of the device can be expected [6], the center point of transit region is z_0=0.86 μm. Diode has a cross section of S=20×20 μm^2. Crystal lattice temperature T_0 was considered to be constant and equaled to 300 K. My task was to investigate the operation of diodes based on different graded-gap nitride semiconductors and obtained their power spectrum for different voltages during a 320 ps pulse.

The actual research has been carried out by means of three-level model of intervalley electron transfer effect in the graded-gap semiconductors based on the solution of the Boltzmann equation for the case of a displaced Maxwellian distribution of electrons [7].

The applied DC voltage U and the parameters of semiconductors are input data. Output data are the dynamic distributions of carrier concentration, of their energy, of current density, of the electric field strength, the dependences of the average current density flowing in the diode and of the voltage drop across the diode on time $V(t)=\int_0^l E(z,t)dz$. I investigated the spectrum of average power of self-oscillations. The average power of k harmonic is $P_k = 0.5 J_k V_k S \cos(\Delta\Theta_k)$, where J_k and V_k are amplitudes of oscillations of current density and voltage drop across the diode of k harmonic; $\Delta\Theta_k$ is the phase difference between current density and voltage of k harmonic; k=1, 2, 3. The average DC power is $P_0 = J_0 V_0$.

Starting my research was the current oscillations in Gunn diodes based on GaN, InN, AlN. The research shows that the continues self-oscillations don't occur in GaN and AlN diodes and do occur in InN diode. The concentration of electrons in the transit zone is insufficient for the occurrence of current oscillations for GaN and AlN diodes. As for the InN diode, then it’s the maximum oscillation power is 14 mW at a frequency of 371.6 GHz, if the voltage applied to the diode is 18V. In this case, the DC power is 53.7 W. Current oscillations in such diode starts at a voltage of about 13 V.

Then I have researched the processes in graded-gap Gunn diodes based on InN, GaN and AlN. In BInN – InN diode the transit region consists of graded $B_{x(z)}In_{1-x(z)}N$ alloy. If we increase BN fraction in the cathode and do not change of the composition semiconductor in the anode the processes occurring in the diode change in the following way. Increase in BN fraction leads to the energy gap reduction between Γ-valley and M-L and A side valleys in BInN. There are heterogeneities of electron mobility and of electron concentration in the side valleys due to the inhomogeneity of the energy gap between the valleys. The direct current in the diode decreases. The amplitude of current oscillations increases, and their frequency decreases. If BN fraction is greater than 0.30, then a static domain is formed in BInN – InN diode and current oscillations are stopped. The frequency of current oscillations in InN diode and diode based on graded BInN – InN decreases for any BN fraction if the voltage applied to the diode grows. The oscillation power in graded-gap BInN – InN diode has maximum when the applied voltage is optimal, which is from 18 to 19 V. The oscillation power in diode based on graded BInN – InN is maximum when BN fraction is 0.06. The fundamental mode power is 28.9 mW at a frequency of 340.6 GHz. It is more 2 times than the power of InN diode. $B_{0.06}In_{0.94}N$ – InN diode has clearly distinguishable at least the second and third harmonics while the InN diode has only the second harmonic. The power of third harmonic of $B_{0.06}In_{0.94}N$ – InN diode is 19.7 μW. At the same time, the DC power in $B_{0.06}In_{0.94}N$ – InN diode is 44.7 W which is 17 % less than in the InN diode.

Let's consider the processes in the diodes based on graded GaInN – InN and AlInN – InN alloys. Such diodes are analogous to the diode based on graded BInN – InN alloy from the point of view of their properties and output characteristics. The mechanism for improving the conditions for the occurrence of current oscillations remains the same. The oscillation power of GaInN – InN diode is maximal when GaN fraction is about 0.20. The optimal voltage equal about 20 V for this semiconductor composition. The fundamental mode power of such oscillation is 40.7 mW at a frequency of 358.4 GHz. It is the biggest RF power in this research and it is more almost 3 times than the power of InN diode. The power of second harmonic of $Ga_{0.80}In_{0.20}N$ – InN diode is 767 μW and of third harmonic is 26.6 μW. The DC power in such diode is 44.1 W.

The oscillation power of AlInN – InN diode is maximal when AlN fraction is about 0.12. The optimal voltage equal about 19 V for this alloy composition. The fundamental mode power is 25.3 mW at a frequency of 368.0 GHz. The power of second harmonic is 114.2 μW and of third harmonic is 6.7 μW. The DC power in such diode is 50.5 W.

At the same time, I found that continuous Gunn oscillations do not occur in diodes based on graded alloys of GaN and AlN due to the insufficient electron concentration in the transit zone.

Thus, my research has shown that continues self-oscillations don't occur in Gunn diode based on GaN, AlN and graded alloys based on them, i.e. BGaN – GaN, InN – GaN, AlN – GaN and BAlN – AlN graded alloys. However, in graded-gap diodes based on InN the domain drift mode of can be implemented and efficient generation of continues current oscillations. The BInN – InN, GaInN – InN and AlInN – InN graded alloys increase the oscillations power of the Gunn diode in comparison with InN (Table 1). The diode based on graded $Ga_{0.8}In_{0.2}N$ – InN has the highest oscillation power for the first three harmonics. The power of the fundamental mode of such diode is 40.7 mW (102 MW/m^2) at a frequency 358.4 GHz. It is almost 3 times greater than in InN diode. DC power equals to 44.1 W, which is 17% less than in the InN diode. Let's compare these results with RF power generated by InP diode presented in [8]. The InP devices had transite-time zone with a graded doping profile of length 1.1 µm length and diameters of 25–40 µm and were all mounted on diamond heat sinks. The highest third-harmonic frequency observed was 455 GHz at an output power of 23 µW (0.018 MW/m^2) and second-harmonic frequency was 300.5 GHz at an output power of 3 mW (2.39 MW/m^2). The fundamental harmonic frequency of $Ga_{0.8}In_{0.2}N$ – InN diode is higher than second-harmonic frequency of InP diode on about 17 % with at approximately equalled RF powers. To sum up my research I positively can say that THz generation by Gunn diodes based on semiconductor nitrides can be achieved by graded alloys usage.

Table 1. Power spectrum peaks

Material	Fraction x	U, V	f_1, GHz	P_1, mW	P_2, µW	P_3, µW	P_0, W
InN	-	18	371.6	14.25	16.0	-	53.7
BInN – InN	0.06	19	340.6	28.90	337.5	19.7	44.7
AlInN – InN	0.12	19	368.0	25.30	114.2	6.7	50.5
GaInN – InN	0.20	20	358.4	40.74	767.0	26.6	44.1

Findings of this study extend the knowledge about the physical processes of carrier transfer in complex semiconductor structures and can be used for technological designing of new high-speed devices based on semiconductor nitrides in mechanical engineering.

1. Dobrinsky A., Simin G., Gaska R., Shur M. III-Nitride Materials and Devices for Power Electronics. *ECS Transactions.* 2013. Vol. 58. No. 4. P. 129–143. https://doi.org/10.1149/05804.0129ecst

2. Storozhenko I.P., Arkusha Yu.V. Respective for using Gunn diodes on the base GaN, AlN and InN. *Radiophysics and Electronics*. 2011. Vol. 16. No. 1. P. 58–63.

3. Ying Wang, Liu-An Li, Jin-Ping Ao, Yue Hao Physical-Based Simulation of the GaN-Based Grooved-Anode Planar Gunn Diode. *Micromachines*. 2020. Vol. 11. No. 1. P. 97–109. https://doi.org/10.3390/mi11010097

4. Hajo A.S., Yilmazoglu O., Samodi B., Dadgar A., Kuppers F., Kussorow T. A new approach to achieve Gunn effect for GaN based THz sources with high power. *Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMWTHz)*. Proc. the 44th Intern. Conference (Paris, 2019), 2019. P. 1–2. https://doi.org/10.1109/IRMMW-THz.2019.8873720

5. Linan Yang, Wei Mao, Qingyang Yao, Qi Liu et al Temperature effect on the submicron AlGaN/GaN Gunn diodes for terahertz frequency. *J. Appl. Phys.* 2011. Vol. 109. P. 024503. https://doi.org/10.1063/1.3533984

6. Storozhenko I. P., Yaroshenko A. N., Arkusha Yu. V. InBN and GaBN Graded-Gap Gunn Diodes. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2014. Vol. 43. No. 16. P. 1461–1470. https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v73.i16.60

7. Storozhenko I. Gunn Diodes Based on Graded-Gap GaInPAs. *Journal of nano- and electronic physics.* 2020. Vol. 12. No. 1. P. 01015-1–01015-9. https://doi.org/10.21272/jnep.12(1).01015

8. Heribert Eisele Third-Harmonic Power Extraction From InP Gunn Devices up to 455 GHz. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2020. Vol. 19. No 6. P. 416–418. https://doi.org/10.1109/LMWC.2009.2020044

UDC 519.859

Yu. Stoyan, Corr. Member of NAS of Ukraine
G. Yaskov, Dr. Tech. Sci., Assoc. Prof.
T. Romanova, Dr. Tech. Sci., Prof.

A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine
(Kharkiv, Ukraine, yaskov@ukr.net)

OPTIMIZED PACKING HYPERSPHERES INTO A HYPERSPHERE WITH PROHIBITED ZONES

Hypersphere packing problem consists in placing a number of hyperspheres in a larger hypersphere (container) without overlapping. The hypersphere packing problem of different dimensions appears in different practical applications [1–5], e.g., space engineering, spatial organization of chromosomes in cell nucleus and neurons, arrangement of ganglion cell receptive fields on retinal surface, planning radio-surgical treatment of tumors, retinal laser coagulation, cable bundling problems and topology optimization in additive manufacturing, packing fuel elements in nuclear reactors and heat exchangers, studying structure of nanomateralials, crystals, concrete and granular materials, casting techniques, packing catalysts in chemical reactors or columns for gas distillation and absorption coding theory.

There is a long list of publications devoted to 2D&3D sphere packing problems (see, e.g. [5–11]). However, the multidimensional (with dimension $d > 3$) hypersphere packing problems [12, 13] are much less investigated and still of great interest. We deal with the packing problem for containers with prohibited zones composed by hyperspheres. In addition, minimal allowable distances between hyperspheres are given.

According to the typology of Cutting & Packing [14], the following main types of hypersphere packing problem are met: Open Dimension Problem (ODP), Placement Problem, Knapsack Problem, Identical Item Placement Problem. We discuss here the ODP formulation of the hypersphere packing problem.

Let a collection of n hyperspheres

$$S_i(u_i) = \{X = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d : \|X - u_i\|^2 \le r_i^2\},\ i \in I_n = \{1, 2, ..., n\}$$

be given. Here r_i is the radius of $S_i(u_i)$, $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{id})$ denotes a vector of variable centers of $S_i(u_i)$ for $i \in I_n$.

We define a placement domain in the form

$$C(r) = S(r) \setminus \mathrm{int}(\cup_{l \in I_p} P_l),$$

where $S(r)=\{X\in\mathbf{R}^d:\|X\|^2\le r^2\}$ is a hyperspherical container with variable radius r, $P_l=\{X\in\mathbf{R}^d:\left\|X-u_l^{inh}\right\|^2\le(r_l^{inh})^2\}$ is a fixed hyperspherical prohibited zone with the center u_l^{inh} and the radius r_l^{inh}, $l\in I_p=\{1,2,...,n_p\}$.

The hyperspheres $S_i(u_i)$, $i\in I_n$, have to be packed inside the hyperspherical container $S(r)$ providing restrictions on the prohibited zones P_l, $l\in I_p$, and the minimum allowable distances ρ_{ij} between hyperspheres $S_i(u_i)$ and $S_j(u_j)$, $i<j\in I_n$, so that the sizes of the container will be minimized.

A mathematical model of the problem (ODP) can be formulated as the following nonlinear programming problem:

$$\min_{(u,r)\in W\subset\mathbf{R}^{nd+1}}\kappa(u,r),\tag{1}$$

$$W=\{(u,r)\in\mathbf{R}^{nd+1}:\ \widehat{\Phi}_{ij}(u_i,u_j)\ge 0,\ i>j\in I,\ \Phi_i(u_i,r)\ge 0,\ i\in I_n\},\tag{2}$$

where $\kappa(u,r)=r$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$, $\widehat{\Phi}_{ij}(u_i,u_j)$ is the adjusted phi-function of the hyperspheres $S_i(u_i)$ and $S_i(u_i)$, $\Phi_i(u_i,r)$ is the phi-function of the hypersphere $S_i(u_i)$ and the object $C^*(r)=\mathbf{R}^{d+1}\setminus\operatorname{int}C(r)$.

The main features of ODP are:

• the number of variables of the problem is $nd+1$ and the number of inequalities is $n+C_n^2$;

• the Jacobian and Hessian matrices describing the constraints of the problem are highly sparse;

• the minimum of the linear objective function is found at the extreme points of W. Each extreme point is a solution of the system of $nd+1$ equations specifying the frontier of W.

The following strategy is used to solve the problem (1)–(2).

The radii are supposed to be variable. Feasible starting points are constructed based on the starting point algorithm and the residual optimization method presented in [15]. The corresponding local minima are found by the decomposition method [16] combined with IPOPT [17]. Using the auxiliary NLP subproblems, hyperspheres radii are redistributed filling up the container volume.

New instances of packing unequal hyperspheres into hyperspheres of minimum radii with prohibited zones for $d>3$ are provided.

1. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere packings, lattices and groups. Springer Science & Business Media, 2013. 682 p.

2. Klarreich E. Sphere Packing Solved in Higher Dimensions. *Quanta Magazine*. 2016. Available from: https://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/

3. Burtseva L., Valdez Salas B., Werner F., Petranovskii V. Packing of monosized spheres in a cylindrical container: models and approaches. *Rev. Mex. Fís.* 2015. Vol. 61. P. 20–27.

4. Burtseva L., Valdez Salas B., Romero R., Werner F. Recent advances on modelling of structures of multi-component mixtures using a sphere packing approach. *International Journal of Nanotechnology*. 2016. Vol. 13. P. 44–59. https://doi.org/10.1504/IJNT.2016.074522

5. Yanchevskyi I., Lachmayer R., Mozgova I., Lippert R-B., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I. Circular packing for support-free structures. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. P. 1–10. https://doi.org/10.4108/eai.13-7-2018.164561

6. López C.O., Beasley J.E. Packing a fixed number of identical circles in a circular container with circular prohibited areas. *Optim Lett*. 2019. Vol. 13. P. 1449–1468. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1351-x

7. Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optim Lett.* 2016. Vol. 10. P. 1347–1360. https://doi.org/10.1007/s11590-015-0937-9

8. Hifi M., Yousef L. A local search-based method for sphere packing problems, *European Journal of Operational Research*. 2019. Vol. 274. P. 482–500. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.10.016

9. Specht E. www.packomania.com. 2018. Available from: http://packomania.com

10. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal Spheres into Various Containers. *Cybern Syst Anal*. 2016. Vol. 52. P. 419–426. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9842-1

11. PACKMOL. Initial configurations for Molecular Dynamics Simulations by packing optimization, Institute of Chemistry and Institute of Mathematics, University of Campinas, Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo. 2020. Available from: http://m3g.iqm.unicamp.br/packmol/home.shtml

12. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere, *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. P. 855–868. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9716-z

13. Yaskov G.N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Journal of Mechanical Engineering*. 2014. Vol. 17. P. 48–53.

14. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.12.047

15. Yaskov G.M. Optimization problems of packing hyperspheres: mathematical models, methods, applications. The thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences in speciality 01.05.02 Mathematical modeling and computational methods, A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv, 2019.

16. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J. A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. In P. Vasant, I. Zelinka, & G. W. Weber (Eds.), Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, Intelligent Computing and Optimization. Springer, 2020. Vol. 1072. P. 214–221. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4_21

17. Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106. P. 25–57. https://doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y

УДК 621.43

А.Н. Авраменко, канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, an0100@ukr.net)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ ДИЗЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ И ФОРМИРОВАНИЕ МАССИВА ДАННЫХ ДЛЯ МОДИФИКАЦИИ ПРОГРАММЫ ЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследование и доводка показателей рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания (ДВС) связана со значительными затратами ресурсов.

Использование методов численного эксперимента – компьютерного 3D моделирования рабочих процессов ДВС – позволяет значительно уменьшить объем натурных экспериментов.

В работе рассмотрены пути сокращения объема натурных экспериментальных исследований по совершенствованию показателей рабочего процесса транспортного дизельного двигателя.

Цель работы – разработка метода проведения численных экспериментов для исследования и совершенствования показателей дизельного двигателя.

Комплектуемые заводом-изготовителем программы для блока управления транспортных ДВС, как правило, рассчитаны на использование двигателем штатных топлив и определенных режимов работы.

Эффективная модификация этих программ связана с определенными сложностями, в первую очередь, с необходимостью проведения длительных экспериментальных исследований.

Применение метода численного эксперимента с использованием технологии вычислительной аэрогидродинамики позволяет провести расчетный анализ показателей рабочего процесса дизельного двигателя на эксплуатационных режимах и различных видах топлива. Далее эти данные подвергаются анализу и формируется массив данных для корректировки штатной программы управления дизельным двигателем. После модификации характеристических 3D карт программы управления двигателем, они могут быть записаны в память электронного блока управления, как основная программа (вместо штатной) или, как дополнительная (для версий с двух или много-режимными программами управления ДВС).

Проведены численные и экспериментальные исследования показателей дизельного двигателя при работе по нагрузочной характеристике.

Полученные данные после анализа и обобщения в дальнейшем можно использовать для корректировки характеристических карт программы управления ДВС, повысив тем самым эффективность его работы, особенно при использовании альтернативных топлив. Предложенный метод позволяет свести к минимуму объем натурных экспериментальных исследований и сократить затраты на доводку двигателя.

УДК 621.039.584

С.В. Альохіна[1,2], д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
І.В. Корягіна[2]

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України*
[2]*Харківський національній університет імені В.Н. Каразіна*
(Харків, Україна, alyokhina @ipmach.kharkov.ua)

НАУКОВІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ ТЕПЛОВОЇ БЕЗПЕКИ СУХОГО ЗБЕРІГАННЯ ВІДПРАЦЬОВАННОГО ЯДЕРНОГО ПАЛИВА

Україна має більш ніж 15-річний досвід зберігання відпрацьованого ядерного палива (ВЯП) енергетичних реакторів. З 2001 року, коли на платформі зберігання був розміщений перший контейнер з ВЯП, здійснюється тепловий моніторинг стану контейнерів шляхом вимірювання температури вентиляційного повітря [1].

Тривала і безпечна експлуатація будь-якого ядерного об'єкта неможлива без його наукового супроводу. А саме: глибокого і системного аналізу фізичних процесів при експлуатації установки з виявленням і структуруванням факторів впливу на стан ВЯП, а також розробки методів ефективного контролю і підвищення безпеки. Традиційним підходом в аналізі теплової безпеки є поодинокі теплові розрахунки на стадії розробки основного обладнання. Розрахунки мають багато спрощень і узагальнень для забезпечення достатнього запасу міцності при експлуатації. Всі дослідження по тепловій безпеці сухого сховища ВЯП, як правило, до недавнього часу проводилися за трьома основними напрямами: вивчення нормальних і аварійних умов експлуатації, а також дослідження, спрямовані на вдосконалення обладнання сховища.

Мета роботи – створення наукових основ аналізу теплових процесів на майданчику сухого сховища ВЯП.

Специфіка контейнерів з ВЯП не дозволяє проводити фізичні досліди та визначати їх тепловий стан [1]. Для числового моделювання задля зменшення використання комп’ютерних ресурсів потрібно розділити розрахункову область на частини, розв’язати теплові задачі для кожної з частин, а потім з'єднати результати [2].

За результатами аналізу числових досліджень та вимірів температури на майданчику сховища були визначені фактори впливу на тепловий стан ВЯП протягом усього терміну його зберігання. Всі фактори впливу класифікували за їх характером. Частина цих факторів з'являється при аварійних умовах, інша – за нормальних умов експлуатації. Наступні фактори впливу пропонується для дослідження: антропогенно-техногенні, погодно-кліматичні, конструктивні, фізичні. Перші два важливі при аналізі аварійних режимів експлуатації, інші – при нормальних умовах експлуатації; при цьому погодно-кліматичні можна віднести до обох категорій [3].

Аналіз результатів моделювання дозволив виявити функціональні залежності максимальної температури в контейнері сховища і температури атмосферного повітря від залишкового тепла розпаду і температури атмосферного повітря.

Наукове забезпечення є важливою частиною експлуатації сховища ВЯП. Отримані результати мають важливе значення для аналізу безпеки і дозволяють на науковій основі розробити процес оцінки безпеки з урахуванням фізичної природи процесів.

1. Safety Analysis report for Dry Spent Nuclear Fuel Storage Facility of Zaporizhska NPP. Version 3.01.1. 2008. 624 p.

2. Alyokhina S., Goloshchapov V., Kostikov A., Matsevity Yu. Simulation of thermal state of containers with spent nuclear fuel: multistage approach. *International Journal of Energy Research*. 2015. P. 1917–1924. https://doi.org/10.1002/er.3387

3. Alyokhina S., Kostikov A., Koriahina I. Scientific Basis of Thermal Safety Analysis of Dry Storage of Spent Nuclear Fuel on Zaporizhska NPP. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2020. No. 2 (126). P. 81–84.

УДК 539.374

М.О. Бабешко, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.
В.Г. Савченко, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
(Київ, Україн, plast@inmech.kiev.ua)

МЕТОДИКА УРАХУВАННЯ ВТОРИННИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ РОЗВАНТАЖЕННІ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ПРИ СКЛАДНОМУ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Пропонуються різні підходи урахування вторинних пластичних деформацій при дослідженні неосесиметричного термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій у вигляді осесиметричних тіл в процесах складного неізотермічного навантаження.

У циліндричній системі координат розглядається складене (шарувате) тіло обертання, виготовлене з ізотропних матеріалів при неізотермічному навантаженні об'ємними і поверхневими силами з заданими умовами теплового впливу. Передбачається, що в початковий момент часу тіло знаходиться при початковій температурі. Під складеним тілом мається на увазі дискретно однорідне тіло обертання, всі складові частини якого також є тілами обертання із загальною віссю обертання. Навантаження тіла здійснюється таким чином, що дослідження напружено-деформованого стану можна розглядати в квазістатичній постановці.

Методика побудована на використанні експериментально обґрунтованих визначальних рівнянь [1], що описують процеси непружного деформування ізотропних матеріалів вздовж траєкторій малої кривизни з урахуванням виду напруженого стану. Як параметр виду напруженого стану використовується кут виду напруженого стану, який обчислюється через другий і третій інваріанти девіатора напружень і показує орієнтацію октаедричного дотичного напруження в октаедричній площині відносно проекції на цю площину головної осі, вздовж якої діє максимальне напруження.

При розв’язуванні задачі термопластичності процес навантаження і нагрівання тіла розбивається на ряд етапів таким чином, щоб ламана крива досить точно апроксимувала траєкторію деформування, а моменти часу, що розмежовують етапи, як можна краще збігалися з моментами переходу окремих елементів тіла зі стану активного навантаження до розвантаження та навпаки. На кожному з етапів послідовно розв’язуються задача нестаціонарної теплопровідності по визначенню температури при заданих умовах теплообміну з навколишнім середовищем та задача термопластичності по визначенню переміщень, деформацій і напружень для фіксованих моментів часу при заданих умовах навантаження та закріплення. Для цього використовується варіаційна постановка задач теплопровідності і термопластичності та напіваналітичний метод скінченних елементів. Для лінеаризації визначальних рівнянь використовуються методи послідовних лінійних наближень, в результаті чого в кожному наближенні розв’язування початково нелінійної задачі зводиться до одержання розв’язку лінійних задач теорії пружності з додатковим навантаженням, величина якого визначається з використанням результатів в попередньому наближенні.

Експерименти показують, що для конкретизації залежності між другими інваріантами девіаторів напружень, повних та пластичних деформацій і температурою при різних значеннях кута виду напруженого стану досить знати діаграми активного навантаження зразків і значення межі текучості при стисканні після попереднього розтягування в залежності від досягнутої пластичної деформації при різних значеннях температури (або при початковому стиску і наступному розтягуванні). При цьому виявляється, що межа текучості при стисканні для багатьох матеріалів виявляється на 10–15 відсотків нижче, ніж при розтягуванні. Ця різниця багато в чому залежить від попередньої пластичної деформації.

При відсутності експериментів про залежність меж текучості від пластичної деформації для опису розвантаження і процесу навантаження елементів тіла навантаженням протилежного знаку використовується одне з наступних модельних уявлень про поведінку матеріалу [2]: пружне розвантаження; модель ізотропного зміцнення; ідеальний ефект Баушінгера.

Як показали експерименти, приведені моделі поведінки матеріалу охоплюють діапазон, в якому лежать криві розвантаження і повторного навантаження більшості матеріалів. Це дозволяє шляхом серії розрахунків дати оцінку напружено - деформованого стану елементів конструкцій, відповідно до реальних кривих з урахуванням розвантаження і повторного навантаження.

На конкретних прикладах проілюстровано залежність результатів розв’язання задачі від моделі поведінки матеріалу при розвантаженні. Враховуючи, що справжня діаграма розвантаження і повторного навантаження лежить між кривими, які відповідають матеріалу з ізотропним зміцненням і матеріалу з ідеальним ефектом Баушінгера, то розрахунки НДС стану досліджуваних елементів конструкції за цими двома моделями визначають той діапазон, в якому будуть знаходитися значення компонентів напружень, що відповідають реальним властивостям матеріалу.

1. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Approximate description of the inelastic deformation of an isotropic material with allowance for the stress mode. *Int. Appl. Mech.* 2010. Vol. 46. No. 2. P. 139–148. https://doi.org/10.1007/s10778-010-0291-7

2. Савченко В.Г., Бабешко М.Е. Методика учета пластических деформаций при разгрузке в задачах термопластичности для осесимметричных тел. *Прикладная механика*. 2019. Т. 55. № 6. С. 46–55.

УДК 539.3

В.В. Бабуров
Д.В. Клименко, канд. техн. наук
Д.В. Акимов, канд. техн. наук
И.Ф. Ларионов, канд. техн. наук

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»
(Днепр, Украина, klymenko_dv@hotmail.com, akimoff2017@gmail.com, literator11@i.ua)

СРАВНЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ГЛАДКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

В настоящее время при расчетах на прочность активно применяется метод конечных элементов и основанные на нем программные комплексы ANSYS и NASTRAN. Проведение расчетов с использованием данных комплексов требует построения адекватной конечно-элементной (КЭ) модели. При построении КЭ-модели перед расчетчиком стоит задача выбора типа используемых конечных элементов для решения поставленной задачи с учетом возможностей имеющейся вычислительной техники и срока выполнения расчета. В работе рассмотрена актуальная задача выбора типа конечного элемента применительно к типовым силовым элементам конструкции ракетной технике. Характерным элементом конструкции является гладкая оболочка, широко применяемая в конструкциях баков, переходных отсеков и головных частях ракетной техники. Конечной целью работы являлось проведение анализа и определение особенностей применения различных типов элементов при моделировании.

Рассмотрим решение данной задачи на примере гладкой цилиндрической оболочки средней длины. Определяющим критерием обеспечения ее прочности является устойчивость.

Проведен сравнительный анализ результатов расчета устойчивости оболочки при действии осевой сжимающей силы, полученных при моделировании [1, 2] оболочечными элементами (Plate), твердотельными объемными элементами в форме параллелепипеда (Solid Hexa), твердотельными объемными элементами в форме тетраэдра (Solid Tetra) и инженерным методом расчета [3], апробированным в ходе многочисленных экспериментов. При расчете методом конечных элементов использовался программный комплекс MSC.NASTRAN.

Цилиндрическая оболочка радиусом 120 см, высотой 600 см и толщиной 1 см, выполненная из алюминиевого сплава 2219-T851, закреплялась по нижнему торцу (шарнирное опирание), а к верхнему торцу через жесткий элемент (Rigid) прикладывалась осевая сжимающая сила (1 кгс).

Для расчета устойчивости методом конечных элементов и оценки влияния условий разбиения были построены следующие конечно-элементные модели:

– модель с использованием конечных элементов типа Plate, стороны элемента больше его толщины в ≈ 10 раз, «КЭ модель Plate вариант 1»;

– модель с использованием типов элементов Plate, стороны элемента сопоставимы с его толщиной, «КЭ модель Plate вариант 2»;

– модель с использованием конечных элементов типа Solid Hexa, стороны элемента больше его толщины в ≈ 10 раз, «КЭ модель Solid Hexa вариант 1»;

– модель с использованием конечных элементов типа Solid Hexa, стороны элемента сопоставимы с его толщиной, «КЭ модель Solid Hexa вариант 2»;

– модель с использованием конечных элементов типа Solid Tetra, стороны элемента больше его толщины в ≈ 10 раз, «КЭ модель Solid Tetra вариант 1»;

– модель с использованием конечных элементов типа Solid Tetra, стороны элемента сопоставимы с его толщиной, «КЭ модель Solid Tetra вариант 2»;

– модель с использованием конечных элементов типа Beam «КЭ модель Beam».

Для корректного анализа полученных результатов коэффициент устойчивости *k* принимался 0,605, что соответствует идеальной оболочке [3].

Результаты расчета устойчивости приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты расчета устойчивости

Метод расчета		*n*	T_{kr}, тс	σ^p, кгс/см^2		K_{cx}
				σ_{max}^p	σ_{cp}^p	
Инженерный метод	Оболочка	–	2833,509	–	0,00133	–
	Стержень**	–	21158,160	–	0,00133	–
КЭ модель Plate	вариант 1	4001	2855,176	0,00145	0,00133	1,008
	вариант 2	480001	2813,439	0,00150	0,00133	0,993
КЭ модель Solid Hexa	вариант 1	4001	3067,148	0,00135	0,00133	1,082
	вариант 2	480001	2826,560	0,00134	0,00133	0,998
КЭ модель Solid Tetra* вариант 1		42961	24498,388	0,00133	0,00133	8,646
КЭ модель Solid Tetra вариант 2		5693121	3822,662	0,00161	0,00133	1,349
КЭ модель Beam**		50	21819,300	–	0,00133	1,031
Примечание – в таблице приняты следующие обозначения: n – количество элементов в модели;						

T_{kr} – критические значения осевой сжимающей силы;
$\sigma_{max}^{р}$ – максимальные расчетные напряжения по Мизесу в районе торцов оболочки;
$\sigma_{ср}^{р}$ – расчетные напряжения возникающие в середине оболочки (в сечении равноудаленном от торцов);
$K_{сх}$ – коэффициент сходимости результатов расчета различными методами, определяющийся по формуле:

$$K_{сх} = T_{kr}^{i}/T_{kr}^{ин.}, \text{ где}$$

T_{kr}^{i} – критические значения осевой сжимающей силы в i-том расчете;
$T_{kr}^{ин.}$ – критические значения осевой сжимающей силы, полученные с использованием инженерного метода расчета;
* – результаты расчета устойчивости в случае «КЭ модель Solid Tetra» показали, что расчет проводился для сжатого стержня (задача Эйлера).
** – сравнение и анализ результатов расчета, полученных по «КЭ модель Beam» проводится с аналитическим расчетом стержня [4].

Анализ результатов расчета показал:

1. Расчетные напряжения в середине оболочки (в сечении равноудаленном от торцов) одинаковы для всех вариантов расчета.
2. Построение расчетной модели с использованием конечных элементов типа Plate приводит к удовлетворительной сходимости результатов расчета устойчивости (погрешность менее 1%). При сопоставимом соотношении сторон элемента к его толщине отмечено:
   - увеличение напряжений в районе торцов оболочки на 3%;
   - изменение формы потери устойчивости с осесимметричной на несимметричную.
3. Построение расчетной модели с использованием конечных элементов типа Solid Hexa приводит к удовлетворительной сходимости результатов расчета устойчивости (погрешность менее 1%) при сопоставимом соотношении сторон элемента к его толщине, и завышению значения критической силы (погрешность ≈ 8%) при соотношении ≈ 10. Форма потери устойчивости несимметричная.
4. Построение расчетной модели с использованием конечных элементов типа Solid Tetra приводит к неудовлетворительной сходимости результатов расчета устойчивости. При сопоставимом соотношении сторон элемента к его толщине:
   - завышение значения критической силы составляет ≈ 35%;
   - форма потери устойчивости не соответствует классической, приведенной в [3];
   - значения напряжений в районе торцов незначительно отличаются (7–11%) от напряжений полученных при расчете с использованием элементов Plate, что не дает возможности обнаружить степень неточности конечно-элементной сетки по результату расчета прочности.

5. Применение расчетной модели с использованием конечных элементов типа Solid Tetra, при соотношении сторон элемента к его толщине ≈ 10 расчет приводит к расчету сжатого стержня в Эйлеровской постановке.

Выводы

Наиболее удовлетворительная сходимость результатов расчета устойчивости достигается с применением элементов конечно-элементного анализа типа Plate. Влияние соотношения стороны элемента к его толщине незначительно, что позволяет использовать меньшее количество элементов при построении конечно-элементной модели и соответственно требует меньше вычислительных мощностей и времени на расчет.

Построение расчетной модели с использованием конечных элементов типа Solid Hexa также приводит к удовлетворительной сходимости результатов расчета устойчивости, при условии сопоставимого соотношения сторон элемента к его толщине. При не соблюдении данного условия рекомендуется проводить дополнительный расчет устойчивости с использованием инженерных методов расчета.

В дальнейшем, рекомендуется провести дополнительный анализ влияния соотношения сторон элемента к его толщине в диапазоне от 1 до 10 для элементов типа Solid Hexa.

Применение расчетной модели, построенной с использованием конечных элементов типа Solid Tetra, для расчета устойчивости нецелесообразно. Для расчета устойчивости рекомендуется построить дополнительную расчетную модель с использованием конечных элементов типа Plate или провести расчет по инженерным методам.

Следует отметить, что конструкторские 3-D модели (построенные в среде Autodesk Inventor и т.д.) не позволяют напрямую перейти к конечно-элементному разбиению другими типами конечно-элементного анализа, кроме как Solid Tetra. Для использования элементов типа Plate и Solid Hexa необходима подготовка расчетной модели.

1. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. Москва: ДМК Пресс, 2013. 784 с.
2. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. Москва: ДМК Пресс, 2003. 448 с.
3. Лизин В.Т, Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. Москва: «Машиностроение», 1976. 408 с.
4. Моссаковский В.И., Макаренков А.Г., Никитин П.И., Саввин Ю.И., Спиридонов И.Н. Прочность ракетных конструкций. Москва: «Высшая школа», 1990. 359 с.

УДК 539.3

Е.И. Беспалова, д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
Н.П. Борейко, канд. физ.-мат. наук

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
(Киев, Украина, nataliya.petrivna@ukr.net)

ВЛИЯНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Предметом исследования в данном сообщении являются колебания упругих систем, составленных из оболочек вращения разной геометрии и структуры, которые находятся в поле различного рода осесимметричных статических воздействий. Такие системы служат расчетными схемами многих современных конструкций – аппаратов подводного погружения и ракетно-космической техники, защитных покрытий ядерных реакторов, емкостей для хранения и перевозки жидкостей и пр. Эксплуатационные нагрузки на эти объекты в виде, например, температурных полей, силовых нагрузок, радиационного излучения, агрессивных сред, вносят свои коррективы в изменение их частотного спектра, пренебрежение которыми может пагубно отразиться на функциональной пригодности конкретной конструкции при работе в условиях динамического воздействия.

В большинстве работ этого направления наличие статических нагрузок при исследовании колебаний учитывалось и учитывается преимущественно для отдельных оболочек простых геометрических форм – пластин, цилиндров, конусов, сферических сегментов и пр. (см., например, [1–3]). Для составных оболочек, несмотря на все расширяющиеся запросы расчетной практики различных областей современной техники, количество такого рода исследований весьма ограничено. Связано это с необходимостью формулировки неформализованных условий сопряжения отдельных разнородных оболочек в единую систему и созданием рациональных методик их реализации с учетом действующих статических нагрузок.

Следует отметить, что современные численные подходы к решению стационарных задач механики рассматриваемого класса объектов при чете их специфики, как систем из сопряженных оболочек вращения, достигли высокой степени завершенности в работах школы академика Я.М. Григоренко. Решены задачи стационарной динамики для оболочек различных геометрических форм, структур по толщине, используемым традиционным и композитным материалам, применяемым моделям деформирования и пр. (см., например, [4–7]). В данной работе используется общая методология этих подходов, распространенная на исследование колебаний составных упругих систем при наличии статических воздействий [5].

Исследование колебаний рассматриваемых систем из состыкованных соосных оболочек вращения (см., например, рис. 1) в поле стационарных нагрузок проводится при следующих исходных предпосылках:

– основное предварительное напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочечной системы, обусловленное наличием разных осесимметричных статических нагрузок, рассматривается для каждой из них в докритической стадии деформирования, вплоть до их предельных значений;

– колебания системы рассматриваются как малые незатухающие возмущения ее основного НДС;

– при всех видах и величинах действующих нагрузок материал составляющих оболочек является ортотропным (изотропным), линейно упругим и подчиняется обобщенному закону Гука;

– на линиях сопряжения соседних оболочек принимаются условия равенства кинематических и условия равновесия статических характеристик НДС в общей для всех оболочек системе координат $r0z$;

– механико-математическая модель исследования строится на основе геометрически нелинейной теории среднего изгиба в рамках классической теории Кирхгоффа–Лява и уточненной теории Тимошенко с учетом температурных напряжений по гипотезе Дюгамеля–Неймана и учетом инерционных сил по принципу Даламбера.

На основе предположения о малости колебаний оболочечной системы относительно основного НДС исходная нелинейная двумерной краевая задача может быть приближенно разделена на две следующие: одномерную нелинейную краевую задачу о предварительно напряженном состоянии при заданных осесимметричных нагрузках и двумерную линейную однородную краевую задачу о малых незатухающих колебаниях оболочек относительно основного состояния, полученную в результате линеаризации исходной задачи (задача на собственные значения).

Для решения полученных задач – нелинейной и задачи на собственные значения – разработана численно-аналитическая методика, основанная на их рациональном сведении с помощью аналитических процедур к линейным одномерным краевым задачам, решаемых численно методом ортогональной прогонки. Для такого сведения здесь использованы: процедура линеаризации в форме Ньютона–Канторовича–Рафсона (метод квазилинеаризации), отделение переменных по методу Фурье, метод последовательных приближений в варианте обратной итерации и метод пошагового поиска [5].

В качестве примера применения разработанной методики рассматривается система из 4-ех оболочек: двух цилиндров cyl1, cyl2 с радиусами $R_1 = 0,2$ *м*, $R_2 = 0,6$ *м*, длинами $L_1 = 0,2$ *м*, $L_2 = 0,3$ *м* и двух торосферических оболочек ts1, ts2 с одинаковыми радиусами $r_s = 0,2$ *м*, одинаковыми длинами $l_s = 0,31416$ *м* и одинаковыми расстояниями центров их окружностей $r_0 = R_1 + r_s$ до оси вращения $0z$ (рис. 1, штриховыми нанесены линии сопряжения отдельных оболочек). Все оболочки имеют одинаковую постоянную толщину $h = 0,003$ *м* и выполнены из изотропного материала майлара с модулем упругости $E = 5,0285 \cdot 10^9$ Па коэффициентом Пуассона $\mu = 0,33$ и плотностью $\rho = \rho_0$. Левый торец системы жестко закреплен, а на правом принимаются условия шарнирного опирания или жесткого защемления.

Рассматриваются такие варианты статических воздействий:

– отсутствие нагрузок (свободные колебания);

– равномерное нормальное давление интенсивности q (внутреннее $q>0$, наружное $q<0$);

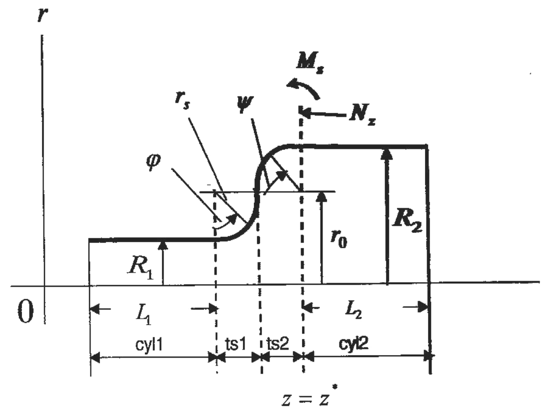


Рис. 1. Образующая – меридиан упругой системы

– осевое усилие $N_z < 0$ и изгибающий момент $M_s > 0$, действующие на линии сопряжения 3-его и 4-ого элементов системы $z = z^* = 0,8м$.

В случае нормального давления правый торец системы принимается шарнирно опертым, в остальных случаях оба ее граничные контуры жестко закреплены.

Результаты исследований колебаний в виде традиционной для оболочек вращения зависимости $\hat{f} = \hat{f}(k)$ представлены на рис. 2 и рис. 3 (f, k – параметры частоты и формы волнообразования в окружном направлении).

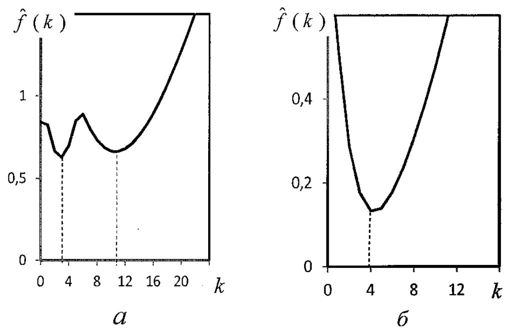


Рис. 2. Зависимость $\hat{f} = \hat{f}(k)$: а – для системы; б – для отдельного цилиндра

Влияния собственно геометрической формы составной системы (рис. 2, а) на ее частотные характеристики особенно наглядно проявляется при сравнении с соответствующими результатами для отдельного цилиндра (рис. 2, б) в случае свободных колебаний. В случае цилиндра кривая $\hat{f} = \hat{f}(k)$ имеет традиционный вид с одним минимумом $\{k;m\} = \{4;1\}$, для составной системы эта кривая имеет качественно другой характер с несколькими локальными минимумами, в данном случае их два – $\{k;\ m\} = \{3;\ 4\}$ и $\{k;\ m\} = \{11;\ 5\}$ (k, m – число волн по окружности и число полуволн по образующей). Данная особенность низших собственных частот оболочечных систем разнообразных конфигураций детально обсуждалась в [8].

При равномерном давлении (рис. 3, а) исследуемая зависимость $\hat{f} = \hat{f}(k)$ имеет разный характер при внутреннем $q > 0$ и наружном $q < 0$ давлениях. При внутреннем давлении значения низших частот несколько выше, чем при его отсутствии $q = 0$, а при некотором значении наружного давлении $q = q^*$ для отдельного $k=k^*$ могут возникнуть частоты весьма близкие к нулю $f(k^*)\approx 0$. Аналогичная картина имеет место и при действии на линии сопряжения осевого усилия и изгибающего момента (рис. 3, б). Эти значения воздействий согласно динамическому критерию устойчивости принимаются за критические.

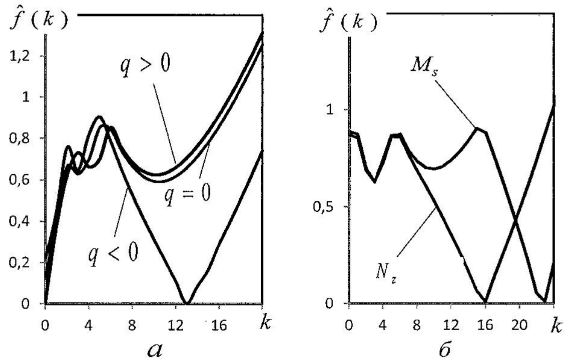


Рис. 3. Зависимость $\hat{f}=\hat{f}(k)$*:*
а – при равномерном давлении;
б – при осевом усилии N_z *и изгибающем моменте* M_s

Таким образом, построенный спектральный портрет оболочечной системы содержит полную информацию о ее геометрических и структурных особенностях, условиях на торцевых контурах, характере, распределении и величинах действующих нагрузок. Эта информация позволяет отследить резонансные частоты системы на случай действия динамических полей, а также прогнозировать возможность потери устойчивости ее равновесных состояний при заданных статических нагрузках.

1. Kumar P., Srinivasa C.V. On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells: A review. *J. of Thermoplastic Composite Materials*. 2018. No. 11. P. 1–27.

2. Sofiyev A.H., Kuruoglu N. Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures. *Thin-Walled Structures.* 2014. Vol. 78. P. 121–130. https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.01.009

3. Shekari A. et al. Free Damped Vibration of Rotating Truncated Conical Sandwich Shells Using an Improved High-Order Theory. *Latin American Journal of Solids and Structures.* 2017. Vol. 14. P. 2291–2323. https://doi.org/10.1590/1679-78253977

4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981. 554 с.

5. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 172 с.

6. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. *Math. Sci.* 2018. Vol. 228. No. 1. P. 80–89. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3607-x

7. Bespalova E.I., Boreiko N.P. Determining the natural frequencies of compound anisotropic shell systems based on various deformation models. *Int. Appl. Mech.* 2019. Vol. 55. No. 1. P. 44–59. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00932-8

8. Bespalova E., Urusova G. Vibrations of compound shells of revolution with elliptical toroidal members. *Thin-Walled Struct*. 2018. Vol. 123. P. 185–194. https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.024

УДК 539.3

А. В. Воропай, д-р техн. наук, проф.

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Харьков, Украина, voropay.alexey@gmail.com)

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

При моделировании нестационарного деформирования реальных элементов конструкций в ряде случаев ярко выражены вязкоупругие эффекты, и потому необходимо учитывать диссипацию энергии [1]. Классический подход учета влияния внутреннего трения основан на использовании дифференциальных операторов [2, 3], которые вводятся в системы дифференциальных уравнений, описывающих процессы деформирования.

Однако, целесообразно воспользоваться огромным количеством полученных к настоящему времени в рамках теории упругости аналитических решений, например [4]. Можно выделить два подхода, которые позволяют учитывать диссипативные свойства материала на базе имеющегося «упругого» аналитического решения.

Первый подход (на базе дифференциальных операторов и теории функций комплексного переменного) сводится к модификации аналитических соотношений для соответствующих ядер интегралов и частот, которые могут быть найдены из решения соответствующих характеристических уравнений, записанных для различных моделей трения.

Второй использует интегральные операторы и может быть применен для любых решений в рамках теории упругости, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки с ядрами Коши [5]:

$$u(t) = \int_0^t K(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau , \qquad (1)$$

где $u(t)$ – перемещения или деформации исследуемого объекта в некоторой точке, $P(t)$ – внешняя нестационарная нагрузка, вызывающая колебания или деформирование, $K(t)$ – ядро интеграла, несущее, по существу, всю информацию об объекте ($K_0(t)$ – об упруго деформируемом).

Для случая внутреннего трения в статьях [6, 7] с учетом известной теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения [8, 9] доказано, что «упругие» ядра $K_0(t)$ и «вязкоупругие» $K_\eta(t)$ (для внутреннего вязкого трения согласно модели Кельвина–Фойгта) и $K_\gamma(t)$ (для гистерезисного трения согласно модели Бока–Шлиппе–Колара) связаны соотношением:

$$K(t) = \int_0^\infty \Psi(t,\tau) \cdot K_0(\tau) d\tau , \qquad (2)$$

где $\Psi(t,\tau)$ – специальная функция (корректирующее ядро), подлежащая идентификации и зависящая от выбранной модели внутреннего трения. Укажем, что получение корректирующих ядер $\Psi_\eta(t,\tau)$ и $\Psi_\gamma(t,\tau)$ также описано в [6, 7].

В операторном виде выражение (2) для модели внутреннего вязкого трения Кельвина–Фойгта можно записать в виде:

$$K_\eta(t) = \mathbf{G}_\eta[K_0(t)], \tag{3}$$

где $\mathcal{G}_\eta[.]$ – сглаживающий интегральный линейный оператор – ОКФ (оператор Кельвина–Фойгта).

Сглаживающие интегральные операторы позволяют рассчитывать «вязкие» ядра для различных измененных коэффициентов трения. Так как при расчетах интегралов выполняется дискретизация, то можно воспользоваться предложенной в работе модификацией ядер согласно процедуре Эфроса, причем эта модификация осуществляется за счет умножения исходных ядер на специальным образом полученные матрицы (подробнее можно ознакомиться в [10]).

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность подхода, использующего интегральные операторы, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума, и, следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.). Благодаря чему, этот подход удается использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента. Также, на основе интегральных операторов, могут быть созданы специальные вычислительные процедуры, позволяющие модифицировать с учетом различных моделей внешнего и внутреннего трения даже готовые численные решения.

На основе полученных сглаживающих линейных интегральных операторов ОКФ и ОБШК (оператора Бока – Шлиппе – Колара) возможно построение обратных операторов. Обратный оператор не является сглаживающим, наоборот, после его действия размах колебаний возрастает.

Описанный подход позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую упругую составляющую и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициентов диссипации, что, например, отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Возможности разработанного подхода проиллюстрированы на примере вынужденных нестационарных колебаний двумерного континуума – прямоугольной пластины.

Обратный оператор можно искать как сумму следующего ряда:

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_\eta^{-1}[.] = [\mathcal{I}[.] - (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])]^{-1} = \\ = \mathcal{I}[.] + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.]) + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])^2 + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])^3 + \ldots,\end{gathered} \tag{4}$$

Если коэффициент трения η мал, то разность между функциями $K(t)$ и $\mathcal{G}_\eta[K(t)]$ также мала, поэтому в сумме (4) можно оставить только два или три первых слагаемых, и мы получим приближенные формулы для обратного оператора:

$$\mathcal{G}_\eta^{-1}[.] \approx 2\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.] \text{ или } \mathcal{G}_\eta^{-1}[.] \approx 3\mathcal{I}[.] - 3\mathcal{G}_\eta[.] + \mathcal{G}_{2\eta}[.]. \qquad (5)$$

Поясним, зачем нужен обратный оператор. Предположим, что ядро $K_\eta(t)$, показанное на рисунке, получено не путем прямых вычислений $K_0(t)$ по известным аналитическим соотношениям, а при выполнении лабораторных исследований, то есть формы и частоты собственных колебаний неизвестны. Известно [1], что коэффициенты внутреннего трения сильно зависят от температуры (значительно сильнее, чем модули упругости и сдвига). Требуется оценить, как изменится ядро $K_\eta(t)$ (и все другие характеристики, которые зависят от этого ядра), если в результате снижения температуры декремент затухания d_0 уменьшится в 2 раза. Для решения этой задачи должна быть выполнена обратная корректировка ядра, то есть, применен обратный ОКФ. Применение формул (5) для поставленной задачи проиллюстрировано на рис. 1.

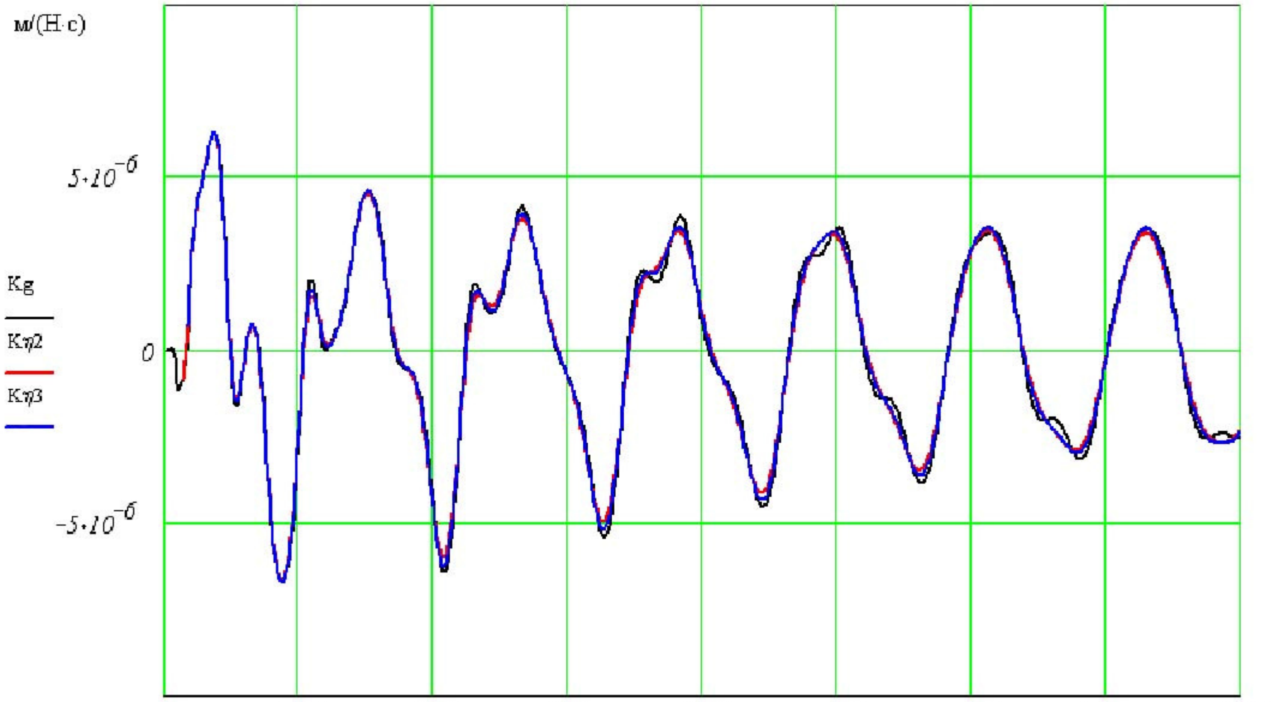


Рис. 1 Пример применения обратного ОКФ в форме начального отрезка ряда (5):
$Kg(t)$ – точное ядро, $K\eta 2(t)$ – первое приближение (2 слагаемых ряда), $K\eta 3(t)$ – второе приближение (3 слагаемых)

Ядро $Kg(t)$ получено как результат действия прямого ОКФ на $K_0(t)$, а ядра $K\eta 2(t)$ и $K\eta 3(t)$ – как результат последовательного действия прямого (с удвоенным декрементом) и обратного ОКФ:

$$Kg(t) = \mathcal{G}_{\eta}[K_0(t)]; \quad K\eta(t) = \mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\mathcal{G}_{2\eta}[K_0(t)]].$$

На рисунке расхождение между графиками мало, что подтверждает эффективность метода построения обратного оператора.

Описанный в работе подход, использующий интегральные операторы, может быть применен для любых решений, полученных в рамках теории упругости, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки с ядрами Коши. Главным достоинством подхода является то, что он не использует информацию о структуре решения (о частотах и формах свободных колебаний континуума) и не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования.

Указанный подход позволяет моделировать нестационарное деформирование реальных элементов конструкций с учётом диссипации энергии для моделей внутреннего вязкого трения Кельвина–Фойгта и гистерезисного трения Бока–Шлиппе–Колара.

Подход позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую упругую составляющую и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициентов диссипации.

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.

2. Василенко Н.В. Теория колебаний. Киев: Вища школа, 1992. 430с.

3. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. Киев: Вища школа, 2004. 525с.

4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 734 с.

5. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций: Монография. Харьков: ХНАДУ, 2004. 392 с.

6. Воропай А.В., Григорьев А.Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций. *Вестник НТУ «ХПИ»*. Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. 2017. № 6 (1228). С. 29–44.

7. Воропай А.В., Григорьев А.Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций. *Механика и машиностроение.* 2018. № 1. С. 3–22.

8. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 524 с.

9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1981. 305 с.

10. Воропай А.В. Использование операторного метода и преобразования Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2019. №3 (94). С. 84–91.

УДК 519.85

Н.И. Гиль, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.
В.Н. Пацук, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, patsuk@ipmach.kharkov.ua)

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ Ф-ФУНКЦИЙ ДЛЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ УКЛАДКИ КРУГОВ В ЭЛЛИПСЕ

Ф-функции описывают теоретико-множественные отношения геометрических объектов [1].

Ряд задач, включающих эллипсы и другие кривые второго порядка исследован в работах [2, 3, 4], в которых применяются подходы с преобразованиями координат, построением Ф-функций и квази-Ф-функций непересечения и включения в область. Такие объекты являются частным случаем объектов с гладкой границей, для которых возможно построение системы уравнений в общем виде для нахождения Ф-функции пары объектов.

Объекты с гладкой границей могут задаваться следующим образом.

I. В неявном виде. Граница $\mathrm{fr}\, S_k$ объекта S_k задаётся уравнением $F_k(\mathbf{u}) = F_k^{[k]}(\mathbf{u})$, $k \in \{i, j\}$. При этом объект S_k описывается неравенством $S_k = \{\mathbf{u} \mid F_k(\mathbf{u}) \le 0\}$. Верхний индекс показывает, в системе координат какого объекта записано выражение.

II. В неявном виде. Граница $\mathrm{fr}\, S_k$ объекта S_k задаётся параметрически следующим образом. В собственной системе координат объекта S_k: $\mathbf{w}_k(t) = \mathbf{w}_k^{[k]}(t) = (\xi_k(t), \eta_k(t)) = (\xi_k^{[k]}(t), \eta_k^{[k]}(t))$, $t \in T_\circ = [0, 2\pi]$, $k \in \{i, j\}$. В системе координат другого объекта: $\mathbf{w}_j^{[i]}(t) = \mathbf{w}_j^{[j]}(t) + (\Delta\mathbf{o})_{ij}$, где $(\Delta\mathbf{o})_{ij} = (\Delta o_{xij}, \Delta o_{yij})$ – разность центров собственных координатных систем объектов S_j и S_i.

Нахождение Ф-функции включения для пары объектов можно осуществить, используя решение системы уравнений. Для построения такой системы можно использовать неявное задание обоих объектов, параметрическое задание обоих объектов, либо неявное задание одного из объектов и параметрическое задание второго. В последнем случае один из способов нахождения Ф-функции включения S_j в S_i заключается в следующем.

Пусть $\xi(t) = \xi_j(t) + \Delta o_{xij}$, $\eta_{\Delta_+}(t) = \eta_j(t) + \Delta o_{yij}$.

Построим функцию $F_{ij}(t) = F_i^{[i]}(\mathbf{w}_j^{[i]}(t)) = F_i^{[i]}(\mathbf{w}_i^{[i]}(t) + (\Delta\mathbf{o})_{ij})$.

Пусть $\mathbf{k}_j^{[i]}(t) = \dfrac{d\mathbf{w}_j^{[i]}(t)}{dt}$, $\mathbf{k}_{N\,j}^{[i]}(t) = \dfrac{\mathbf{k}_j^{[i]}(t)}{\left\|\mathbf{k}_j^{[i]}(t)\right\|}$. Обозначим $\mathbf{n}_j^{[i]}(t) = \mathbf{R}_{-\pi/2} \circ \mathbf{k}_{N\,j}^{[i]}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \circ \mathbf{k}_{N\,j}^{[i]}(t)$ – нормаль к контуру второго объекта в точке t.

Найдём $t_* = \arg\min F_{ij}(t)$. Запишем необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial F(\xi_{\Delta_+}, \eta_{\Delta_+})}{\partial \xi_{\Delta_+}} \frac{d\xi_j(t)}{dt} + \frac{\partial F(\xi_{\Delta_+}, \eta_{\Delta_+})}{\partial \eta_{\Delta_+}} \frac{d\eta_j(t)}{dt} = 0.$$

Решение найдём из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(\xi_{\Delta_+}, \eta_{\Delta_+})}{\partial \xi_{\Delta_+}} \dfrac{d\xi_j(t)}{dt} + \dfrac{\partial F(\xi_{\Delta_+}, \eta_{\Delta_+})}{\partial \eta_{\Delta_+}} \dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = 0, \\ (\nabla F_i^{[i]}(\mathbf{w}_j^{[i]}(t)), \mathbf{n}_j^{[i]}(t)) < 0. \end{cases}$$

Перейдём к кривым второго порядка на примере эллипсов и кругов. Для построения математической модели задачи укладки кругов в эллипсе с минимизацией размеров эллипса нам, кроме известной Ф-функции непересечения кругов [5], потребуется Ф-функция включения круга в эллипс.

Пусть S_i – круг. Его уравнение

$$F_i(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

S_j – эллипс с уравнением

$$\mathbf{w}_j^{[i]}(t) = (a\cos t + \Delta o_{xij}, b\sin t + \Delta o_{yij}),\ t \in T_\circ = [0, 2\pi].$$

Тогда вышеприведенная функция $F_{ij}(t)$ примет вид

$$F_{ij}(t) = (a\cos t + \Delta o_{xij})^2 + (b\sin t + \Delta o_{yij})^2 - r^2.$$

Уравнение для поиска экстремального значения t:

$$F_{ij}'(t) = 2((b^2 - a^2)\sin t\cos t + b\Delta o_{yij}\cos t - a\Delta o_{xij}\sin t) = 0.$$

Заменяя $\cos t = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\tau}{1+\mathrm{tg}^2\tau} = \dfrac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$, $\sin t = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\tau}{1+\mathrm{tg}^2\tau} = \dfrac{2\zeta}{1+\zeta^2}$, полученное уравнение $F_{ij}'(t)=0$ сведём к уравнению

$$-b\Delta o_{yij}\zeta^4 + 2(a^2 - a\Delta o_{xij} - b^2)\zeta^3 - 2(a^2 - a\Delta o_{xij} - b^2)\zeta + b\Delta o_{yij} = 0.$$

Реализованы методы расчёта Ф-функции как с использованием точного решения приведенного выше уравнения четвёртой степени, так и численного решения.

Для поиска решения задачи укладки кругов в эллипсе формировалась задача НЛП с ограничениями, включающими полученные Ф-функции.

При решении использовалась библиотека IPOpt. Получен ряд решений, в частности, для задачи с 25 кругами в эллипсе.

Был также разработан метод построения Ф-функции непересечения и включения для двух эллипсов. Получено уравнение одной переменной, допускающее численное решение.

Для решения задач упаковки эллипсов в эллипсе был применен метод возможных направлений, предполагающий сведение к решению задачи ЛП на каждом шаге, для чего использовалась библиотека BPMPD [6–8].

1. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pinter J, Stoian Y.E., Chugay A. Optimized Packings in Space Engineering Applications: Part I. *Springer Optimization and Its Applications*. 2019. Vol. 5. P. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15.

2. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *J. Global Optimization*. 2016. Vol. 65. Iss. 2. P. 283–307. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2.

3. Birgin E., Bustamante L., Callisaya H., Martnez J. Packing circles within ellipses. *Intern. Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20. No. 3. P. 365–389. https://doi.org/10.1111/itor.12006.

4. Hil M.I., Patsuk V.M. Construction of both geometric relationships of ellipses and parabola-bounded regions in geometric placement problems. *J. of Mech. Eng*. 2020. Vol. 23. No. 2. P. 52–60. https://doi.org/10.15407/pmach2020.02.052

5. Стоян Ю.Г., Яськов Г.Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді Національної академії наук України*. 2013. № 5. С. 44–50.

6. Andersen E., Gondzio J., Mészáros C., Xu X. Implementation of interior point methods for large scale linear programs In: Terlaky, T. (ed.). *Interior Point Methods of Mathematical Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. P. 189–252. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3449-1_6

7. Mészáros, C. On numerical issues of interior point methods. *SIAM J on Matrix Analysis*. 2008. Vol. 30 (1). P. 223–235. https://doi.org/10.1137/050633354

8. The bpmpd interior point solver for convex quadratically constrained quadratic programming problems. *Large-scale scientific computing*: 7th International Conference, LSSC 2009 (Sozopol, Bulgaria, June 4–8), Revised Papers, Springer, 2010. P. 813–820. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12535-5_97

УДК 519.688:519.6:514.752

С.И. Гоменюк, д-р техн. наук, проф.
С.Н. Гребенюк, д-р техн. наук, доц.
В.З. Грищак, д-р техн. наук, проф.
А.В. Кудин, канд. физ.-мат. наук
С.В. Чопоров, д-р техн. наук, доц.

Запорожский национальный университет
(Запорожье, Украина, gserega71@gmail.com)

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

В настоящее время в связи с широким внедрением в практику новых конструктивных материалов (полимеров, эластомеров, композитов и т. п.) для повышения конкурентоспособности машиностроительных предприятий остро встал вопрос о замене разрушающих физических испытаний виртуальным компьютерным экспериментом. Для исследования несущей способности конструкций необходимо создание математического и программного обеспечения численного анализа процесса их деформирования, а также оценки параметров напряженно-деформированного состояния согласно некоторым наперед заданным критериям исчерпания несущей способности (критериев разрушения).

В Запорожском национальном университете для решения таких задач был разработан ряд соответствующих программных продуктов: библиотеки конечно-элементного анализа задач механики МІРЕЛА+ [1] и QFEM [2], а также полнофункциональная САПР qzCAD [3], реализующая функции препроцессора, процессора и постпроцессора.

Важнейшим элементом любой программы конечноэлементного анализа является сеточный генератор (препроцессор). qZCAD позволяет пользователю на специальном входном языке описывать топологию практически произвольной области в виде R-функции. После чего можно выполнить ее дискретизацию на конечные элементы заданной формы (треугольники, четырехугольники, тетраэдры или четырехугольные шестигранники) (рис. 1).

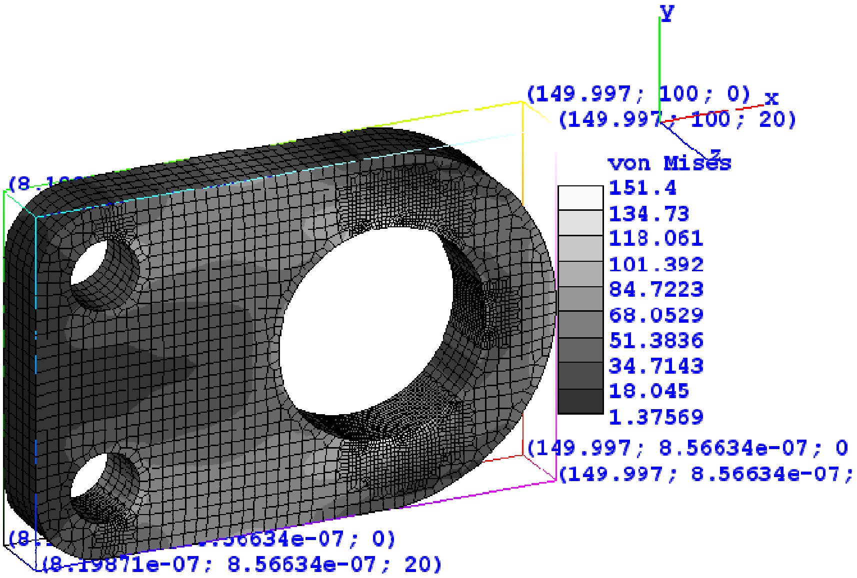


Рис. 1. Пример дискретизации в системе qzCAD

Важной отличительной особенностью данного препроцессора является возможность построения адаптивной сетки, когда количество элементов автоматически сгущается в областях с наибольшим градиентом фазового параметра.

Для тестирования разработанного математического и программного обеспечения был выполнен нелинейный упругопластический расчет напряженно-деформированного состояния топливного бака летательного аппарата, находящегося под действием внутреннего давления. Его дискретная модель, состоящая из 12781 узлов и 25620 треугольных оболочечных элементов, приведена на рис. 2.

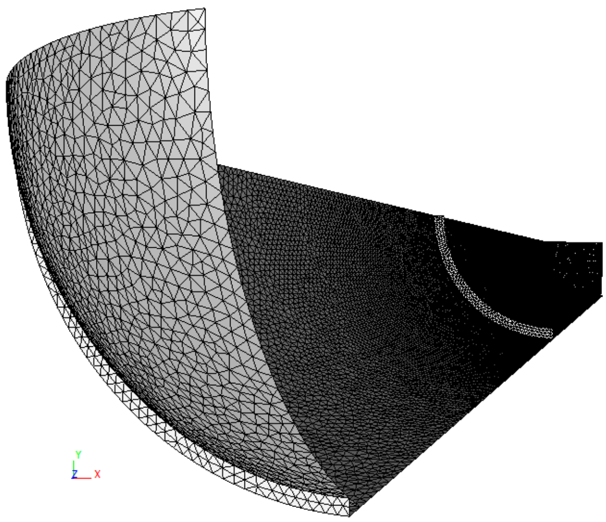


Рис. 2. Дискретная модель топливного бака летательного аппарата

На рис. 3 приведено распределение интенсивности напряжений, полученное в результате расчета.

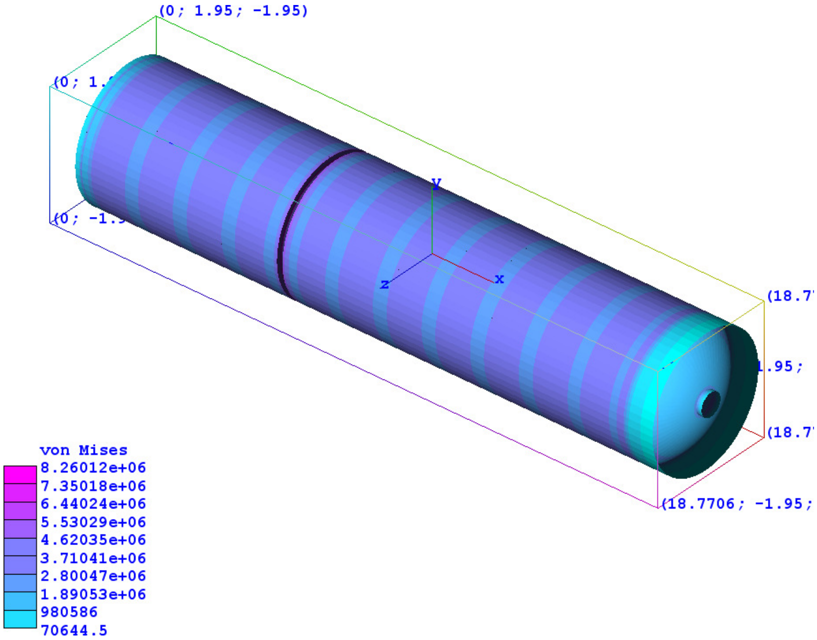


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений по конструкции

Аналогичный расчет выполнялся и для дискретной модели, состоящей из 110790 узлов и 334236 конечных элементов в форме линейного (4-х узлового) тетраэдра. Расхождение результатов расчета составило менее 4%, что подтверждает точность полученных результатов.

В результате расчетов было получено значение критической нагрузки, а также выявлены потенциальные зоны разрушения, что позволяет выполнять оптимизацию конструкции на этапе ее проектирования без дорогостоящего разрушающего эксперимента (или, как минимум, минимизировать их количество).

1. Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г., Гоменюк С.И., Киричевский Р.В., Гребенюк С.Н. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+». Киев: Наукова думка, 2005. 350 с.

2. QFEM – The Simple FEM Solver. URL: https://github.com/SeregaGomen/QFEM

3. qzCAD. URL: https://github.com/qzcad

УДК 539.3

Я.М. Григоренко[1], академік НАН України
О.Я. Григоренко[1], д-р фіз.-мат. наук, проф.
Л.С. Рожок[2], д-р фіз.-мат. наук, доц.

[1]*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*
(Київ, Україна, ayagrigorenko1991@gmail.com)
[2]*Національний транспортний університет*
(Київ, Україна, r.l.s@ua.fm)

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНИХ ПО ТОВЩИНІ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Інтенсивний розвиток багатьох галузей техніки зумовлює широке використання конструкцій у вигляді оболонок різної товщини та форми поперечного перерізу. Однією з характерних особливостей розвитку на сучасному етапі є використання оболонкових конструкцій в умовах зростаючого рівня інтенсивності зовнішнього впливу, серед яких високий та надвисокий тиск, екстремальна температура, тощо. Нетонкі циліндричні оболонки знайшли своє застосування в машинобудуванні у якості сосудів високого тиску, в кріогенній техніці, при будуванні двигунів та ін. З іншого боку, останнім часом велика увага приділяється використанню матеріалів, що мають неперервно-змінні вздовж певного напрямку механічні властивості, так званих, функціонально-градієнтних матеріалів [1–3].

У просторовій постановці розглянуто задачу про напружений стан нетонких еліптичних циліндричних оболонок, що виготовлені з двокомпонентного неперервно-неоднорідного матеріалу, для якого пружні властивості, що характеризують модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона, можуть бути визначені за допомогою концентрації матеріалів композиції вздовж товщини. Оболонки знаходяться під дією внутрішнього рівномірного вздовж напрямної тиску $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$ $(q_0 = 10)$, за умов простого обпирання торців. Зв'язок між модулем пружності E та коефіцієнтом Пуассона ν з відповідними параметрами матеріалів, що входять в композицію визначаються таким чином [4]

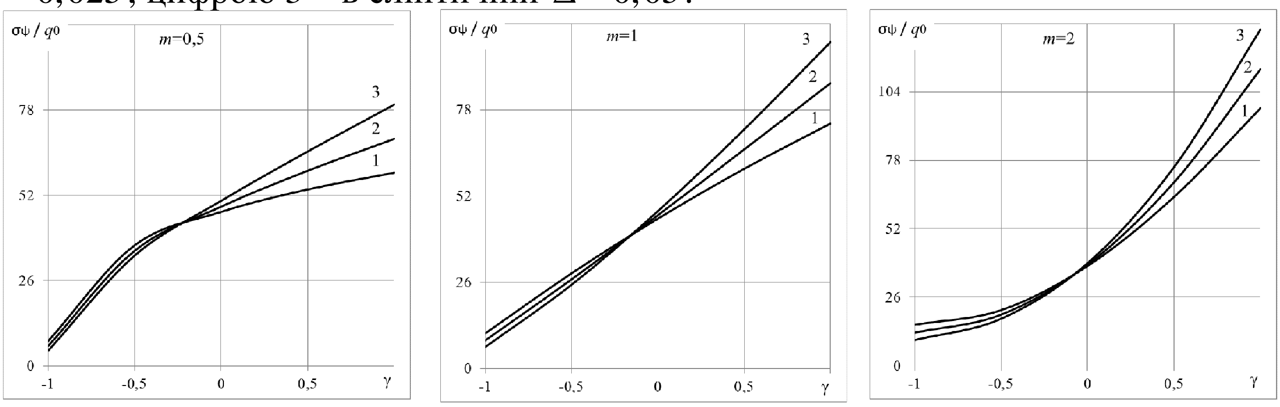
$$E = (E_2 - E_1)V + E_1;\ \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1,$$

де E_1, E_2, ν_1, ν_2 – механічні параметри першого та другого матеріалів, V – концентрація другого матеріалу, в залежності від координати товщини $-h/2 \le \gamma \le h/2$. При розрахунках прийнято степеневий закон зміни пружних властивостей $V = (\gamma/h + 0{,}5)^m$. Механічні властивості матеріалів композиції: Алюміній: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0{,}3$; SiC: $E = 427$ ГПа, $\nu = 0{,}17$. Для параметра степеня m обрано значення $m = 0{,}5;\ 1;\ 2$.

Розглядаються оболонки, для яких периметр поперечного перерізу поверхні відліку дорівнює довжині кола радіуса R [5]. Для геометричних параметрів оболонок обрано: довжина $L = 20$, товщина $h = 2$, радіус вихідного кола $R = 10$, степінь еліптичності $\Delta = 0; 0{,}025; 0{,}05$.

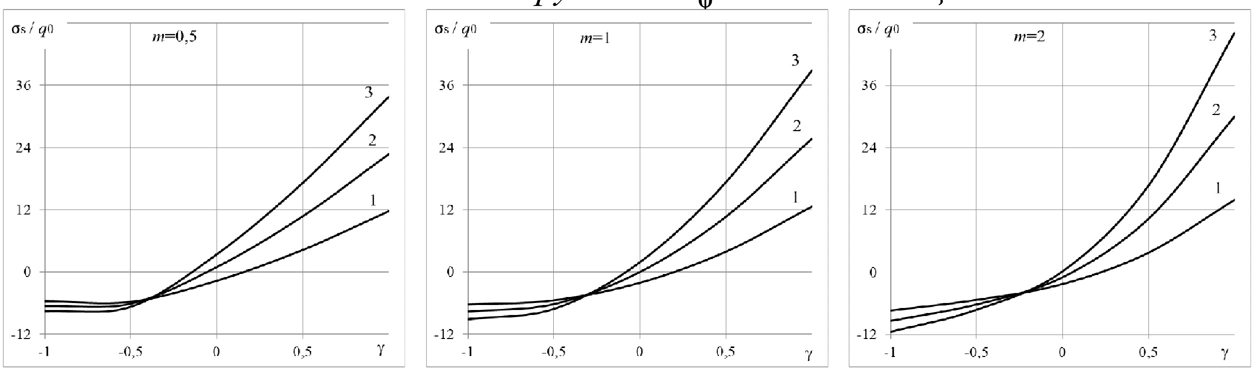
Задачу розв'язано на основі підходу, що базується на відокремленні змінних в двох координатних напрямках з використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, внаслідок чого вихідна тривимірна крайова задача, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами зводиться до одномірної, яку розв'язано із використанням стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації вздовж координати товщини [5].

Результати розв'язання задачі наведено в середньому перерізі довжини для значень напружень σ_ψ (рис. 1) та σ_s (рис. 2) вздовж товщини для різних значень степеня $m = 0{,}5$ (рис. 2, а, рис. 3, а), $m = 1$ (рис. 2, б, рис. 3, б) та $m = 2$ (рис. 2, с, рис. 3, с) в залежності від степеня еліптичності в зоні меншої жорсткості, де вони приймають свої максимальні значення. Цифрою 1 позначені криві напружень в круговій оболонці $\Delta = 0$; цифрою 2 – в еліптичній $\Delta = 0{,}025$; цифрою 3 – в еліптичній $\Delta = 0{,}05$.



а *б* *в*

Рис. 1. Розподіл полів напружень σ_ψ вздовж товщини оболонки

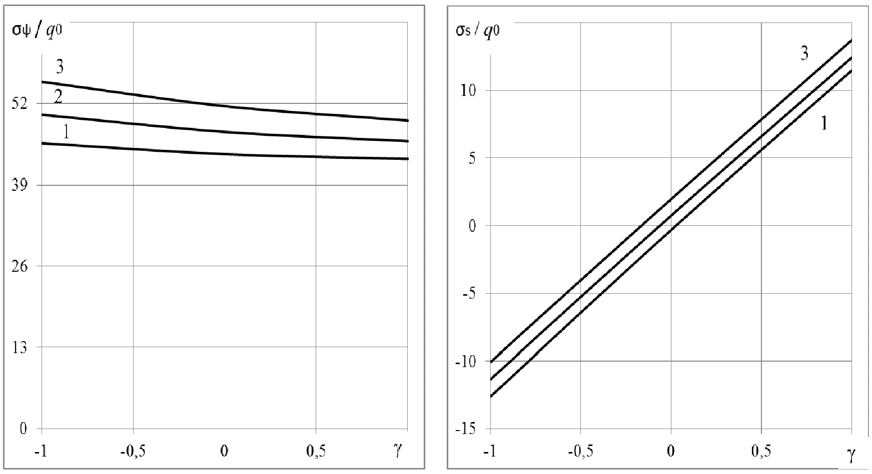


а *б* *в*

Рис. 2. Розподіл полів напружень σ_s вздовж товщини оболонки

На рис. 3 наведено графіки розподілу напружень σ_ψ (рис. 3, а) та σ_s (рис. 3, б) у тих самих перерізах для оболонок, виготовлених з ізотропного матеріалу.

З наведених на рис. 1–3 графіків видно, що у випадку ізотропного матеріалу (рис. 3) має місце майже лінійний закон розподілу напружень σ_ψ та σ_s вздовж товщини, як для кругової оболонки, так і для еліптичних. Тоді як, у випадку неоднорідного матеріалу лінійний закон розподілу має місце для полів напружень σ_ψ за лінійного закону зміни пружних властивостей при $m = 1$ (рис. 1, б).



а *б*

Рис. 3. Розподіл напружень в ізотропній оболонці

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової впливає на перерозподіл величини напружень на зовнішній поверхні для усіх значень параметра m. При цьому, для кожного значення параметра m збільшення величини степеня еліптичності призводить до збільшення величини напружень σ_ψ приблизно в 1,2 рази для $\Delta = 0{,}025$ і в 1,4 рази для $\Delta = 0{,}05$. Напруження σ_s зі збільшенням степеня еліптичності збільшуються в такому порядку: для $\Delta = 0{,}025$ – в 2 рази, для $\Delta = 0{,}05$ – в 3 рази.

У межах однієї форми поперечного перерізу зміна характеру закону розподілу пружних властивостей матеріалу призводить до зменшення величини напружень σ_ψ для $m = 0{,}5$ на 23–25 % та для напружень σ_s на 8–15 %, порівняно з відповідними напруженнями для параметра $m = 1$ і до збільшення їх величини на 19–32 % при $m = 0{,}5$ для напружень σ_ψ та на 10–19 % при $m = 1$ для напружень σ_s.

1. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells under Combined Loading. *Mech. Compos. Mater*. 2019. Vol. 55. P. 349–362. https://doi.org/10.1007/s11029-019-09817-w

2. Gholami R., Darvizeh A., Ansari R., Pourashraf T. Analytical Treatment of the Size-Dependent Nonlinear Postbuckling of Functionally Graded Circular Cylindrical Micro-Nano-Shells. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng*. 2018. Vol. 42. P. 85–97. https://doi.org/10.1007/s40997-017-0080-6

3. Kushnir R.M., Zhydyk U.V. Temperature Stresses in a Functionally Graded Cylindrical Shell. *Mater. Sci*. 2019. Vol. 54. P. 666–677. https://doi.org/10.1007/s11003-019-00231-0

4. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Коротких Ю.А. Осесимметричные свободные колебания цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов. *Прикл. механика*. 2015. Т. 51. № 6. С. 61–71.

5. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. *Int. App. Mech.* 2014. Vol. 50. No. 2. P. 105–127. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0616-z

УДК 539.3

В.И. Гуляев, д-р техн. наук, проф.
Е.Н. Андрусенко, канд. техн. наук, доц.
Н.В. Шлюнь, канд. техн. наук

Национальный транспортный университет
(Киев, Украина, valery@gulyayev.com.ua, a.andrusenko@gmail.com, nataliyashlyun@gmail.com)

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ГЛУБОКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СКВАЖИН

Применение методов теории оптимального проектирования и управления может обеспечить существенные преимущества при оптимальной трассировке траекторий нефтяных и газовых скважин [1–4]. В настоящее время мы являемся свидетелями того, какие сложные проблемы возникают в нефтегазовой промышленности в связи с вопросами добычи и перераспределения нефтегазовых ресурсов. Они во многом заостряются из-за того, что наметилось их исчерпание и осложнением условий их добычи. Сейчас, как правило, бурение скважин происходит на больших глубинах и при предельных значениях скоростей, гидростатических давлений и температур, а также параметров прочности и изнашивания материалов бурильных колонн под существенным влиянием фрикционных явлений [5, 6], эффектов интенсивных колебаний и неустойчивости всей системы. При этом на эффективность процесса бурения и дальнейшую производительность скважины, а также риски возникновения нештатных и аварийных ситуаций большее влияние имеет геометрическое очертание траектории скважины [7, 8], которое в свою очередь, зависит от структуры нефтегазового месторождения, и примыкающих геологических пород, а также их механических свойств.

Траектория скважины, а в этой связи и трудозатраты на ее проходку, длина и стоимость в значительной степени определяются взаимным расположением бурильной установки и нефтегазоносного резервуара. Поэтому координаты этой установки на поверхности земли или моря, то есть параметры ее позиционирования, могут быть одними из управляющих параметров в проблеме оптимизации траектории.

1. Bertsekas D.P. Nonlinear Programming (Third ed.). Cambridge, Massachussets: Athena Scientific, 2016. 880 p.

2. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming (2nd ed.). Philadelphia, Pennsylvania: SIAM Press, 2016. 451 p.

3. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming. The University of Texas, Austin, Texas: Mc Graw-Hill Book Company, 1972. 498 p.

4. Brinkhuis J., Tikhomirov V. Optimization: Insights and Applications. Princeton University Press, 2005. 680 p. https://doi.org/10.1515/9781400829361

5. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.Л. Методы оптимизации в строительной механике. Киев: УМКВО, 1989. 192 с.

6. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes. *Interaction and Multiscale Mechanics.* 2011. Vol. 4. No. 1. P. 1–16. https://doi.org/10.12989/imm.2011.4.1.001

7. Gulyayev V., Glazunov S., Glushakova O., Vashchilina E., Shevchuk L., Shlyun N., Andrusenko E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 512 p.

8. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Theoretic simulation geometrical imperfection influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2013. Vol. 112. P. 170–177. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2013.11.001

УДК 534.1

А.Г. Дем'яненко, канд. техн. наук, проф.
В.О. Гурідова
Д.В. Клюшник

Дніпровський державний аграрно-економічний університет
(Дніпро, Україна, anatdem@ukr.net)

МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕКЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

З дня виникнення проблеми дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, приводом до чого було руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року, минуло понад 170 років. За цей період розглянуто і досліджено багато задач з урахуванням впливу рухомих навантажень різних за природою і характером дії на найрізноманітніші конструкції, системи і споруди. У динамічному XX-XXI сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи в свою чергу появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач у рамках певних аналогій можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підіймальних машин [1, 2]. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різні варіанти постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [3–5]. Найбільш складним з точки зору дослідження є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції так і сили інерції рухомого навантаження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху таких об'єктів зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w=L_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot q(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими та початковими умовами, де при сталій швидкості руху

$$q(x,t) = -\frac{q_0 + q_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x} - \frac{q_1 v^2}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q(x, t)$, який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить, як від інтенсивности $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x, y, t)$, причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x, y, t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x, y, t)$ та зміни кривизни пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x, y, t)$, тобто в такого роду системах силова дія не є заздалегідь визначеною, а обумовлена поточним деформованим станом системи і є слідкуючою за ним. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє выдокремити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора (2) зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу, причому швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50–80 м/с, газів 200–250 м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60 % від загальної кількості відмов [6]. Задачі динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та суттєву значимість для практики, складають самостійний напрямок у будівельній механіці МТДТ. У зв'язку з неможливістю безпосереднього застосування методу Фур'є до цих задач у загальному випадку зроблені спроби його модифікації та узагальнення [7]. Саме в розвиток цього напрямку професор Горошко О.О. започаткував метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена у роботі [8]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, що дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки [1–3], загальний розв'язок диференціального рівняння руху (1) отримуємо у вигляді суми двох рядів $w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_n \varphi_n(x)\cos(\omega_n t + \beta_n) + \sum a_n \psi_n(x)\sin(\omega_n t + \beta_n)$, один з яких представляє собою класичну частину розв'язку, а другий – ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, а саме інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названо власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження або інших чинників системи [1, 2]. Згодом розвиток таких методів з практичної площини перейшов у фізико-математичну та набув узагальнень у працях школи Каленюка П.І. [9, 10], які знаходять і, без сумніву, знайдуть своє подальше застосування. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню цього класу задач динаміки пружних систем методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології, чого не було раніше, не кажучи вже про часи G.W. Housner, Я.Г. Пановко та інших. У доповіді наведено результати досліджень методом двохвильового подання руху деяких задач динаміки пружних об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження. Як приклад, розглянуто коливання балки Тимошенко за дії рухомого розподіленого інерційного навантаження, де математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки у основному операторі диференціального рівняння руху, а і у крайових умовах [2, 3]. Математична модель задачі побудована на основі уточненої механічної моделі балки з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів та деформацій зсуву, сил інерції рухомого навантаження, дії пружної основи, зовнішнього опору та осьової стискуючої сили. Для чисельної реалізації алгоритму методу двохвильового подання при дослідженні динаміки балки за дії рухомого інерційного навантаження була складена програма для ПЕОМ. Метою чисельного експерименту було з'ясування залежності між власними частотами поперечних коливань балки та швидкістю руху. Аналіз чисельного експерименту показав, що існують два критичних значення швидкості. При досягенні v_1^* відбуваються статична втрата стійкості, тобто з'являється нова рівноважна форма, відносно якої в подальшому відбуваються коливання. При досягненні значення швидкості v_2^* відбувається динамічна втрата стійкості, при якому дві власні частоти співпадають або близькі до цього. Зауважимо, що такий результат якісної поведінки балки не вдається отримати наближеними методами та при розгляді спрощених механічних моделей без урахування сил інерції Коріоліса.

1. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1973. С. 32–40.

2. Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах. Київ: Либідь, 1991. С. 83–94.

3. Дем'яненко А.Г. Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2014. № 2 (74). С. 12–22.

4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва: Наука, 1987. С. 277–294.

5. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наук.думка, 1974. 176 с.

6. Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем. Харьков: Основа, 1998. С. 10–15.

7. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics. Trans ASME.* 1952. Vol. 19. No. 2. P. 205–209.

8. Горошко О.А. Собственные и сопровождающие колебания в системах с подвижными инерционными нагрузками. Тр. V междунар. конф. по нелинейным колебаниям. 1970. Т. 3. С. 215–220.

9. Каленюк П.І., Скоробогатько В.Я. Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. Київ, 1977. 122 с.

10. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. 292 с.

УДК 681.3/621.74

В.С. Дорошенко, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины
(Киев, Украина, doro55v@gmail.com)

ВИРТУАЛЬНЫЙ ИНЖИНИРИНГ КАК СОВРЕМЕННАЯ ТРАКТОВКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ПУСКО-НАЛАДКИ ПРОЦЕССА ЛИТЬЯ

Создание высокотехнологичных изделий и производств представляет собой взаимосвязанный комплекс научных, проектно-конструкторских, технологических и производственных работ, известных в литературе как «инжиниринг». Инжиниринг – это подготовка технико-экономических обоснований и проектов; проектирование новой технологии; техническое содействие при проведении специализированных работ; строительный, инвесторский и технический надзор; консультационные услуги; проведение испытаний и проверки оборудования и машин; переработка сырья заказчика с использованием оригинальной технологии [1]. Инжиниринг составляет инфраструктуру инновационных процессов. В последние годы все шире используется термин «виртуальный инжиниринг», а в ряде технических университетов читают предмет «Инжиниринг литейных технологий» (ИЛТ). Под виртуальным ИЛТ подразумевают [2] использование компьютерных средств для разработки технологий изготовления отливок, проектирования цехов и литейного оборудования с применением программ моделирования и инженерных расчетов для комплексной оценки, оптимизации, анализа затрат и планирования, чтобы инструменты, основанные на знаниях, интегрировать в техпроцессы и производственные комплексы. По данным Национальной палаты инженеров (http://npirf.ru/), инжиниринг состоит из проектных работ: подготовка технического задания, прединвестиционные исследования, разработка проектной документации, разработка рабочей документации; а также включает функции проектировщика по реализации проекта: сбор исходных данных и обследования, авторский надзор, выбор оборудования, подготовка технологических регламентов, участие в пуско-наладочных работах, подготовка документации «как построено», ввод в эксплуатацию и обучение персонала заказчика. Виртуальный ИЛТ процесса литья металла по газифицируемым моделям, выполняемый во ФТИМС НАНУ, также включает проектирование модельной оснастки и очистное оборудование при проведении экологического мониторинга при пуско-наладке внедряемого процесса литья.

1. Михайлова Л.В. Інжиніринг, як складова функціонування інтелектуальної власності. *Вісник ПДАБА*. 2018. № 6. С. 110–115.

2. Бекетова Ю.А., Ведерников М.В. Виртуальный инжиниринг литейных технологий в подготовке бакалавров профессионального обучения. *Наука. Информатизация. Технологии. Образование.* Екатеринбург, 26.02–02.03.2018. С. 311–317.

УДК 621.744.072.2

В.С. Дорошенко, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.

Фізико-технологічний інститут металів та сплавів НАН України
(Київ, Україна, doro55v@gmail.com)

ОСНОВНІ СПОСОБИ АДИТИВНОГО ВИРОБНИЦТВА МОДЕЛЕЙ ТА ПІЩАНИХ ФОРМ ДЛЯ ВИГОТОВЛЕННЯ МЕТАЛЕВИХ ВИЛИВКІВ

Адитивне виробництво (АВ) пошарово нарощує – 3D-друкує виріб, що управляється програмою комп'ютера. Основні переваги АВ: 1) скорочення витрат матеріалу (до 75%); 2) можливість випуску виробів складної геометрії та 3) без додаткової обробки; 4) на порядок коротше час технологічної підготовки виробництва та мінімум технологічної оснастки. Впровадження 3D-друку з металу в Україні перешкоджає відсутність ДСТУ для «узаконення» випущених деталей. Якщо зараз у світі традиційними способами виливають ~70% (за тоннажем) чавунного литва (з двома десятками марок чавуну) і ~10% сталевого (до сотні марок литої сталі), то за продукцією АВ – моделями і піщаними формами вже сьогодні можна випускати виливки з таких же стандартизованих в Україні марок чавуну і сталі, особливо з високоміцного чавуну (який сягає ~35% світового об’єму литва). Основні схеми АВ ливарних моделей і разових піщаних форм наведено за даними ТОВ «3Д Техно», Україна (рис. 1).

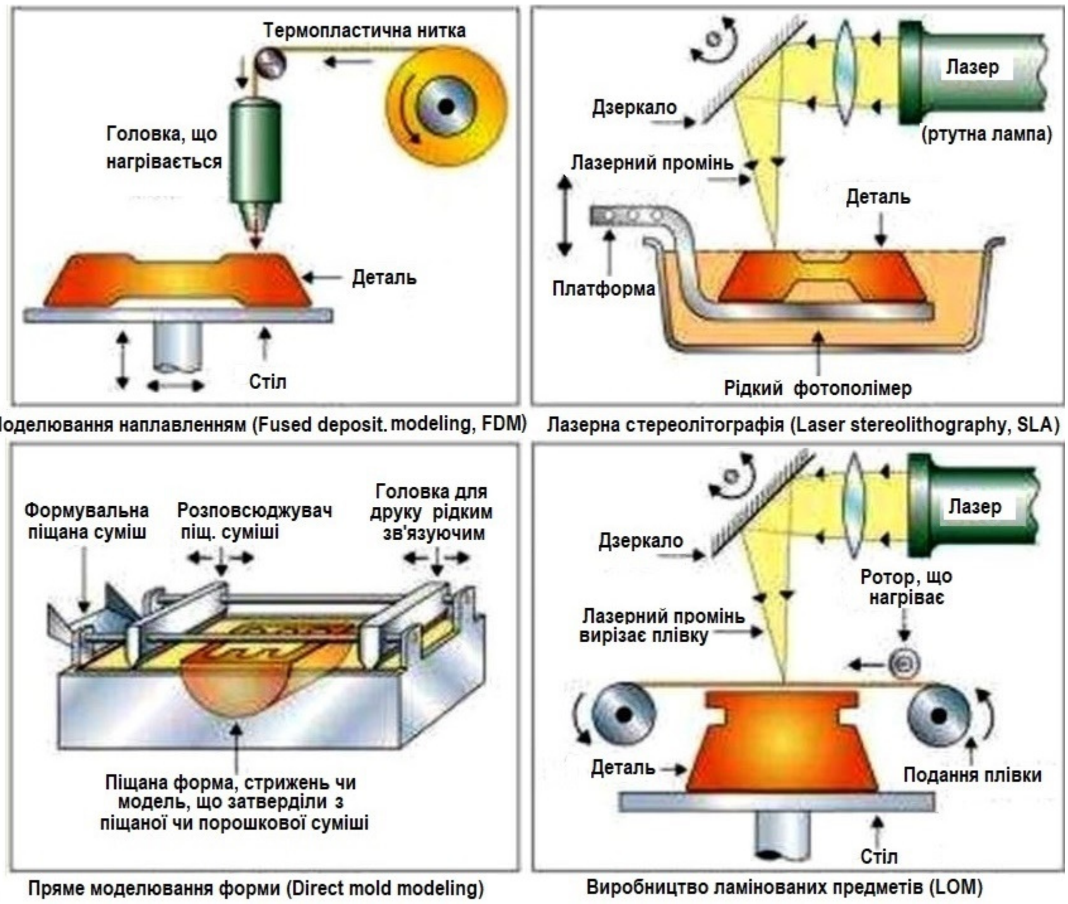


Рис. 1. Основні схеми АВ ливарних моделей і піщаних форм

УДК 681.3/621.74

В.С. Дорошенко, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины
(Киев, Украина, doro55v@gmail.com)

ЦИФРОВОЙ ДВОЙНИК ТОЧНОЙ ЛИТОЙ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИИ

Сегодня тема цифровых двойников (ЦД) – на повестке дня многих мировых компаний. Содержание ЦД изделия (отливки) определяется тем, что следует оптимизировать в отношении характеристик изделия или технологии его производства, а конструкторы и технологи получают возможность передавать его эксплуатационные данные в симуляционную модель, чтобы верифицировать свои расчетные модели и уточнить различные параметры [1]. Разработчики получают дополнительные данные о работе изделий в условиях реального мира, что позволяет им улучшить изделие, повысить его надежность, качество. С изделия (металлоконструкции) с помощью датчиков и сенсоров (возможны виртуальные датчики и сенсоры, где установка физических датчиков и сенсоров невозможна) получают данные и отправляют среду-платформу, которая их обрабатывает, анализирует и, при наличии достаточного инструментария аналитических или статистических методов, дает предиктивные заключения о состоянии изделия, предлагает способы его производства [1]. Такая платформа - Industrial Internet of Things (IIoT). Если платформа IIoT не может дать такой информации для сложных технических изделий, тогда в работу вступает мультифизическая симуляция, которая может не только фиксировать поведение реального изделия, но и выполнять такие операции, как, поиск причин проблем, реализация сценариев «что, если...», установка дополнительных виртуальных датчиков и сенсоров с целью получения дополнительных данных, и многое другое (рис. 1). Отсюда, ЦД - виртуальная реплика реального физического изделия в виде интегрированной мультидоменной системы симуляции, которая отражает условия его эксплуатации и производства [1].

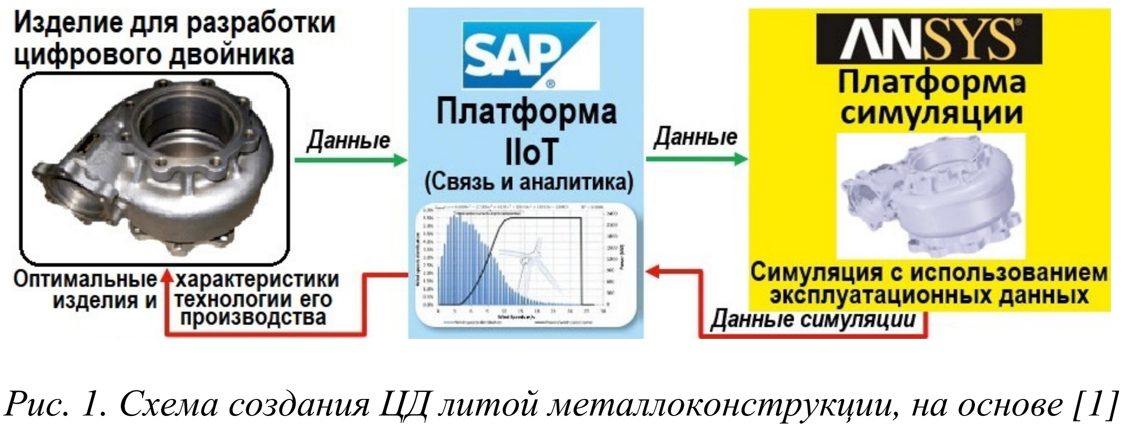


Рис. 1. Схема создания ЦД литой металлоконструкции, на основе [1]

1. Брук П. Цифровые двойники, основанные на симуляции мультифизических процессов. *САПР и графика.* 2019. № 7. С. 24–26.

УДК 681.3/621.74

В.С. Дорошенко, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
В.П. Кравченко, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Фізико-технологічний інститут металів та сплавів НАН України
(Київ, Україна, doro55v@gmail.com, sary942@ukr.net)

ПЕРЕДУМОВИ СТВОРЕННЯ ЦИФРОВОГО ДВІЙНИКА ТЕХПРОЦЕСУ ЛИТТЯ МЕТАЛУ ЗА МОДЕЛЯМИ, ЩО ГАЗИФІКУЮТЬСЯ

Сучасний розвиток цифрових технологій дозволив значно збільшити обчислювальні потужності, включно з хмарними платформами дата-центрів, і знизити вартість їх використання, що дало можливість провідним компаніям об'єднувати інформаційні технології з операційними процесами для створення цифрових двійників (ЦД, Digital Twin) технологічних процесів. ЦД ливарного процесу за моделями, що газифікуються (ЛГМ), нами розглядається як цифрова копія для оптимізації його ефективності. Концепція ЦД є частиною четвертою промислової революції, що покликана допомогти підприємствам швидше виявляти технологічні, економічні і екологічні проблеми, точніше прогнозувати результати їх вирішення і виробляти більш якісну продукцію [1, 2].

Проведений в інституті ФТІМС НАНУ цикл досліджень під керівництвом проф. Шинського О. Й. зі створення методології дистанційного моніторингу ливарних процесів, розгортання та експлуатації багаторівневої інтегрованої комп’ютерної мережі оперативного моніторингу станів об’єктів обладнання, оснащення та оброблюваних матеріалів на прикладі ЛГМ-процесу [3, 4] з оперативним контролем показників та параметрів поточного виробництва і їх підтримкою в оптимальних межах на всіх етапах до отримання готової продукції дозволив створити підґрунтя для цифрового представлення – ЦД ливарного процесу, що сполучає в собі відомості про цифровий макет процесу, отримує дані з поточного моніторингу, які тісно інтегровані з інженерними аналітичними і чисельними методами розрахунків, що реалізуються наближеними, але адекватними до реальності математичними моделями на всіх стадіях функціонування даного ливарного процесу з метою його оптимізації.

1. Michael W. Grieves Digital Twin: Manufacturing Excellence through Virtual Factory Replication. *LLC*. 2014, 7 p.

2. Гусев М.П., Анисимов К.Н., Зарубин С.В., Лонгинов А.М., Ужинский И.К. Концепт цифрового двойника процесса непрерывного литья слитков. *XV междунар. конгр. сталеплавильщиков и производителей металла – ISCON 2018*: сб. трудов. (Тула, 15–19 окт. 2018). Москва–Тула, 2019. ООО «РПК ПринтАП». С. 452–456.

3. Шалевская И.А., Дорошенко В.С. Экологический мониторинг выбросов при литье по газифицируемым моделям. *Екологія підприємства*. 2016. № 3. С. 38–45.

4. Дорошенко В.С., Кравченко В.П., Шевчук Б.М. Дистанційний моніторинг параметрів технологічних процесів ливарного цеху. *Strategy of Quality and Education.* VII Int. Conf. (Varna, Bulgaria, 3–10.06.2011). Acta Universitatis pontica Euxinus. Sp. iss. Varna, 2011. Vol. 1. P. 526–528.

УДК 51-72:621.914.1

С.Н. Задорожный[1]
С.И. Планковский[2], д-р техн. наук, проф.
Е.В. Цегельник[2], канд. техн. наук
В.Б. Минтюк[2], канд. техн. наук
В.В. Комбаров[2]

[1]*Харьковское государственное авиационное производственное предприятие*
[2]*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*
(Харьков, Украина, y.tsegelnyk@khai.edu)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Возникающие при фрезеровании тонкостенных заготовок проблемы связаны с их малой изгибной жесткостью. Эти проблемы делятся на две категории: статические и динамические. Статические возникают в результате изгиба детали от усилий, вызванных действием режущего инструмента, в результате чего реальный контур поверхности отличается от предполагаемого. Динамические проблемы заключаются в наличии низких собственных частот колебаний и их плотного спектра и, как следствие, появлению вибрации. Это приводит к увеличению шероховатости изделий, износу инструмента и даже к выходу из строя деталей станков. Одним из подходов к решению этих проблем является так называемый модельный. Этот подход заключается в модификации траекторий инструмента, скорости подачи, глубины резания и т.п. на основе предварительного моделирования. Моделирование процессов выполняется, как правило, методом конечных элементов (МКЭ), что влечет за собой недостатки, присущие этому методу.

В данном исследовании решение статической проблемы деформирования тонкостенной конструкции и ее колебаний получено в аналитическом виде. При построении решения использован метод идентификации краевых условий, согласно которому:

а) из тонкостенной конструкции выделен обрабатываемый элемент;

б) определены условия его упругого взаимодействия с остальной частью конструкции;

в) получены аналитические решения соответствующих задач для выделенного упруго опертого элемента.

Сравнение полученных аналитических решений с МКЭ-решениями показало совпадение результатов с погрешностью менее 1%, при этом затраты на получение аналитического решения несравненно меньше, чем МКЭ-решения. Выполнен ряд параметрических исследований.

УДК 629.764:534.64

О.М. Іванов

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Дніпро, Україна, info@yuzhnoye.com)

МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ ГАЗОВОГО ДЕМПФЕРА ПОВЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ ЗА ЧАСОМ ПОЛЬОТУ РАКЕТИ

Газові демпфери повздовжніх коливань застосовуються у ракетній техніці для забезпечення поздовжньої усталеності ракети-носія. Втрата усталеності виникає у разі збігу власних частот коливань корпусу ступеня ракети і рідини у трубопроводі подачі компонента палива у двигун. Установка демпфера в трубопроводі змінює власну частоту коливань рідини у трубопроводі так, що за час польоту ракети власні частоти коливань корпусу ракети та рідини не збігаються.

Газові демпфери широко застосовуються у ракетній техніці [1].

Газовий демпфер уявляє собою порожнину навколо трубопроводу, яка з'єднана з трубопроводом системою отворів та має систему наддування та дренажу для підтримки необхідного об'єму газу у робочій порожнині.

За час польоту змінюється тиск у витратній магістралі, поздовжнє прискорення ракети, тиск навколишнього середовища, витрати компонента на двигуни, тиск у балонах наддування, з яких використовується газ для наддування демпферу. Ці параметри впливають на потрібний запас газу наддування і компонента, що потрібні для роботи демпфера.

Відомі методи розрахунку характеристик демпфера застосовують адіабатичну модель для опису процесів у газовій порожнині [2, 3], що некоректно при наявності системи наддування.

Проведено дослідження робочого процесу у газовому демпфері за часом польоту ракети. Демпфер мав сферичну форму діаметром 400 мм, на трубопроводі діаметром 185 мм, система отворів складалась з 20 отворів діаметром 12 мм.

На основі термодинаміки газу змінної маси розроблена математична модель газового демпфера. Модель враховує зміну за часом зовнішніх параметрів, енергію газу наддування, втрати енергії при перетіканні рідини через отвори, витрати газу та рідини через дренаж.

Чисельне моделювання показує зміну рівня рідини, тиску та температури газу у демпфері, витрату газу наддування, витрати газу та рідини через дренаж за час польоту. Математична модель дозволяє визначити амплітудно-частотні характеристики демпфера, межі працездатності демпфера при варіюванні площинами поперечного перетину трубопроводів наддування і дренажу, та при падінні тиску у балонах наддування.

1. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД. Москва: Машиностроение, 1975. 172 с.

2. Беляев Е.Н., Чванов В.К., Черваков В.В. Математическое моделирование рабочего процесса жидкостных ракетных двигателей. Москва: Издательство МАИ, 1999. 228 с.

3. Одиноков Д.А., Гмадиев А. Г. Частотные характеристики коаксиального газового демпфера для топливной магистрали ракеты-носителя. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2017. Т. 16 № 1. С. 62–74.

УДК 539.3

О.І. Кирилова, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В.Г. Попов, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Національний університет «Одеська морська академія»
(Одеса, Україна, olga.i.kyrylova@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРА З СИСТЕМОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ЗА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Деталі сучасних машин та будівельних конструкцій досить часто містять технологічні дефекти і підкріплюючі елементи, які можуть розглядатися як тонкі жорсткі включення. Але подібні включення є джерелом локальної концентрації напружень, яка може викликати утворення тріщин і руйнування. Математичне моделювання напруженого стану в пружних тілах, що містять тонкі жорсткі включення, особливо актуально в умовах динамічного, зокрема, гармонічного навантаження. Це пов’язано з тим, що в стані резонансу концентрація напружень в околі дефекту значно посилюється. Для розв’язання таких задач за традиційною схемою методом граничних інтегральних рівнянь отримуємо систему зв’язаних інтегральних рівнянь і на поверхнях дефектів, і на межі тіла, що значно ускладнює числову реалізацію цього методу, особливо у випадку великої кількості дефектів і неоднозв’язних областей. У подальшій роботі для визначення напруженого стану в порожнинному циліндрі довільного поперечного перерізу з системою тонких жорстких включень пропонується підхід, розглянутий в [1] для аналогічного циліндра з системою тріщин.

Розглядається порожнинний циліндр з твірними, паралельними осі Oz, переріз якого площиною xOz являє собою двозв’язну плоску область, що обмежена довільними замкненими гладкими кривими (Рис. 1). Ці криві в полярній системі координат з полюсом у точці O і віссю Oz, визначаються рівняннями:

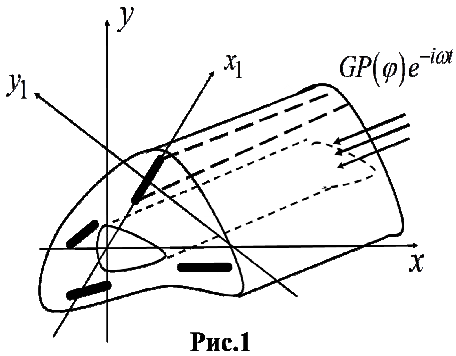


Рис.1

$r = r_0\psi_0(\varphi)$ – зовнішня, $r = r_1\psi_1(\varphi)$ – внутрішня границі, $0 \le \varphi < 2\pi$.

У циліндрі міститься N наскрізних тонких жорстких включень у вигляді пластин малої товщини h, що у площині xOy не виходять за межі перерізу і займають відрізки $2a_i, i = \overline{1, N}$. Зовнішня поверхня циліндра знаходиться під дією зсувного вздовж осі Oz навантаження $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, внаслідок чого в ньому відбуваються коливання повздовжнього зсуву. Множник $e^{-i\omega t}$ всюди далі опущений. При таких умовах відмінною від нуля є тільки z-компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівнянню Гельмгольца:

$$\Delta w+\kappa_2^2 w=0;\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{1}$$

де $\kappa_2=\dfrac{\omega}{c_2}$; $c_2=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$; $\rho-$густина матеріалу циліндра.

Зовнішня поверхня циліндра вважається завантаженою:

$$\tau_{\bar{n}z}\left(r_0\psi_0(\varphi),\varphi\right)=GP(\varphi),\ 0\le\varphi<2\pi\,, \tag{2}$$

внутрішня$-$нерухомою:

$$w\left(r_1\psi_1(\varphi),\varphi\right)=0,\ 0\le\varphi<2\pi \tag{3}$$

Для формулювання граничних умов на включеннях з кожним із них пов'язується локальна система координат $x_k O_k y_k$, $k=\overline{1,N}$ (рис.1). Вважається, що між тілом та включеннями відбуваються умови повного зчеплення:

$$w_k\left(x_k,\pm 0\right)=d_k,\quad \left|x_k\right|<a_k\,. \tag{4}$$

Також на поверхнях включень розривні дотичні напруження зі стрибками

$$\left\langle \tau_{zy_k}^k\right\rangle=G\left(\tau_{zy_k}\left(x_k,+0\right)-\tau_{zy_k}\left(x_k,-0\right)\right)=\chi_k\left(x_k\right). \tag{5}$$

У рівності (4) d_k-амплітуди поздовжніх коливань включень, що визначаються з рівняння руху включення як жорсткого тіла:

$$-m_k d_k\omega^2=F_k+\int_{-a_k}^{a_k}\chi_k(\eta)\,d\eta,\quad m_k=2a_k h_k\rho_k,$$

Таким же чином, як і в [1], переміщення подається у вигляді:

$$w(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{N} w_k(r,\varphi)+w_0(r,\varphi)\,,$$

де $w_k(r,\varphi)-$розривні розв'язки рівняння (1) зі стрибками (5) після переходу до полярних координат, $w_0(r,\varphi)-$деяка невідома функція, яка є розв'язком (1) і за рахунок якої будуть задовольнятися умови (2), (3) на поверхнях циліндра. Далі ця функція подається у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівняння Гельмгольца (1). Це дає можливість спершу задовольнити умови на включеннях, що приводить до сукупності систем інтегральних рівнянь, які відрізняються лише правими частинами. Наближені розв'язки цих систем отримано методом механічних квадратур з використанням спеціальної квадратурної формули для інтегралів з логарифмічною особливістю. Після цього з умов (2), (3) методом колокації визначаються невідомі коефіцієнти лінійної комбінації.

У результаті отримано наближені формули для розрахунку КІН, за допомогою яких здійснено порівняльний аналіз впливу типу дефекту на особливості напруженого стану і значення резонансних частот.

1. Kyrylova O.I., Popov V.H. Stressed State of a Hollow Cylinder with a System of Cracks under Longitudinal Shear Harmonic Oscillations. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 16–24. https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.016

Д.В. Клименко, канд. техн. наук
В.В. Бабуров
И.Ф. Ларионов, канд. техн. наук

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»
(Днепр, Украина, klymenko_dv@hotmail.com, literator11@i.ua)

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

В настоящее время расчеты на прочность активно проводятся с учетом формоизменения конструкции при действии нагрузки на каждом шаге нагружения (геометрическая нелинейность) и диаграммы деформирования материала (физическая нелинейность). Учет геометрической и физической нелинейности позволяет получить более полное напряженно-деформированное состояние (НДС) исследуемой конструкции. Широко применяется для данных расчетов метод конечных элементов и основанные на нем программные комплексы ANSYS и NASTRAN. Типовой упрощенный алгоритм проведения расчета на прочность выглядит следующим образом:

анализ конструкции → выбор расчетной схемы → построение расчетной модели → определение НДС → сравнение расчетных напряжений с допускаемыми → определение коэффициента запаса прочности → вывод о достаточности прочности.

Однако при расчете на прочность с учетом геометрической и физической нелинейности возможны большие перемещения в конструкции. В работе рассмотрена актуальная задача анализа полученных результатов и поведения конструкции не только с точки зрения прочности, но и с учетом работоспособности конструкции. Конечной целью работы являлось проведение расчета на прочность и анализ полученных результатов с учетом требования работоспособности конструкции.

Рассмотрим решение данной задачи на примере оси, которая является составной частью сложного механизма. Работоспособность данного механизма зависит от сохранения контактных связей между элементами его системы. Расчет прочности проводился методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC.NASTRAN.

Ось диаметром 4 мм и длиной 129 мм выполненная из пластичной стали марки 12Х18Н10Т вставляется в проушины корпуса и может перемещаться в продольном направлении. К оси приложены поперечные силы, составляющие $N_1 = 32$ кгс и $N_2 = 149$ кгс. Температура оси 100 °С.

Механические характеристики применяемой стали марки 12Х18Н10Т при нормальной температуре составляют: предел прочности $\sigma_в = 52$ кгс/мм^2, условный предел текучести $\sigma_{02} = 20$ кгс/мм^2, относительное удлинение на разрыв $\delta = 61$ %.

Конечно-элементная модель, условия нагружения и закрепления представлены на рис. 1. Деформированное состояние оси представлено на рис. 2.

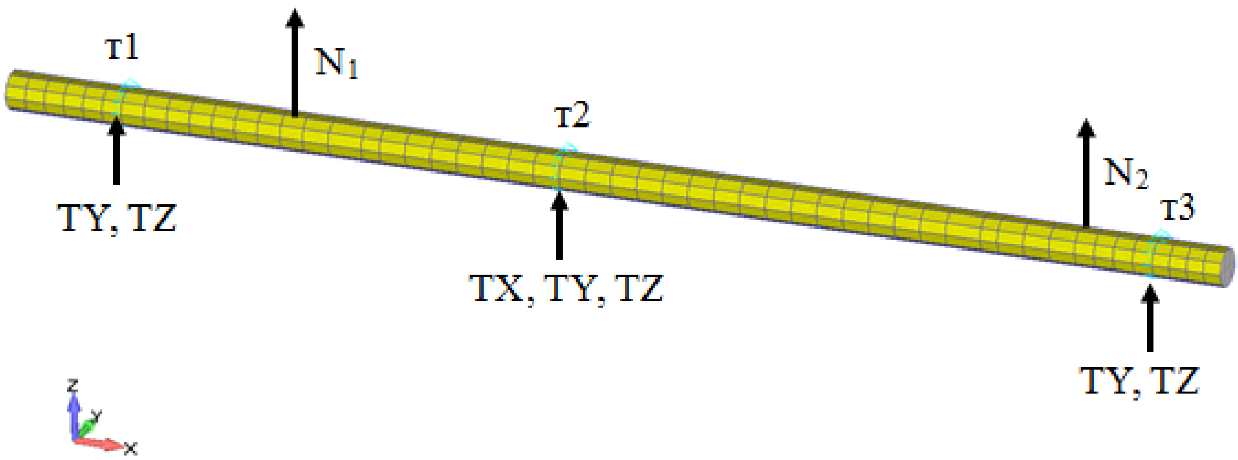


Рис. 1. Конечно-элементная модель, условия нагружения и закрепления

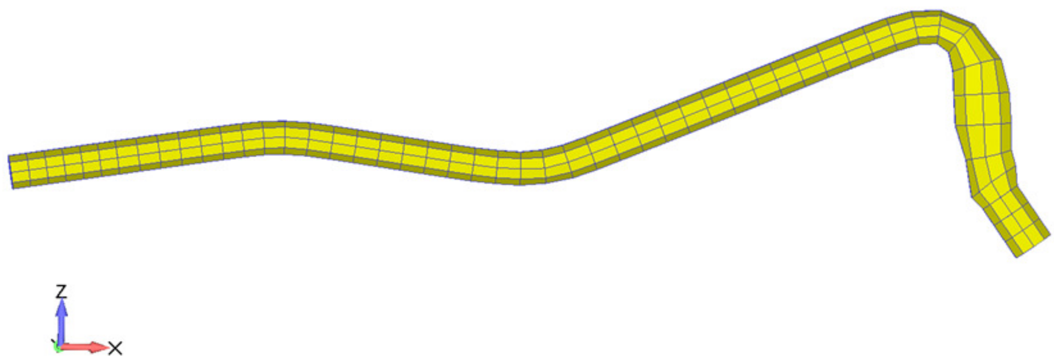


Рис. 2. Деформированное состояние оси

Анализ результатов расчета показал:

1. Продольная реакция по оси $X\approx0$, соответственно точка т2 при нагружении конструкции не перемещается, что подтверждает правильность выбранной расчетной схемы.

2. Прочность оси при заданных нагрузках обеспечивается.

3. Максимальные действующие напряжения в оси находятся в области больших пластических деформаций.

4. Максимальные перемещения в направлении действия силы составляют ≈8,7 мм, что приводит к большим перемещениям конструктивно зависимых от оси элементов и как следствие может привести к нештатной работе конструкции.

5. Максимальные перемещения края оси в районе точки т3 составляют ≈7,4 мм, что может привести к «вытягиванию» оси из проушины корпуса.

6. Полученные результаты обусловлены использованием пластичного материала оси.

7. Несмотря на обеспечение прочности оси, наличие больших деформаций может привести к нештатной работе конструктивно зависимых от оси элементов конструкции и, как следствие, нештатной работе конструкции в целом.

8. Требование работоспособности данного механизма – сохранение контактных связей между элементами его системы не обеспечивается.

Выводы

Результаты проведенного анализа показали, что при расчете на прочность с учетом геометрической и физической нелинейности необходимо оценивать напряженно-деформированное состояние, поведение конструкции и возникающие в ней перемещения. Для проведения данной оценки рекомендуется проводить два расчета:

– расчет на прочность при действии расчетных нагрузок с учетом коэффициента безопасности;

– определение напряженно-деформированного состояния и перемещений конструкции при действии эксплуатационных нагрузок без учета коэффициента безопасности.

Поскольку ось является составной частью сложного механизма целесообразно обеспечить ее работу в упругой области или области малых упруго-пластических деформаций.

Для проведения дальнейших расчетов целесообразно выполнить ось из высокопрочной стали 10Х17Н13М2Т с механическими характеристиками не ниже: предел прочности $\sigma_в = 105$ кгс/мм^2, условный предел текучести $\sigma_{02} = 83{,}5$ кгс/мм^2, относительное удлинение на разрыв $\delta = 12$ %. А также рекомендуется увеличить диаметр оси до 4,5 мм.

УДК 539.3

Д.В. Клименко[1], канд. техн. наук
А.М. Тонконоженко[1]
О.О. Стрельнікова[2], д-р техн. наук, проф.
В.І. Гнітько[2], канд. техн. наук
К.Г. Дегтярьов[2]
Н. Чоудхари[3], проф.

[1]Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Дніпро, Україна, stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net)
[2]Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, estrel@ipmach.kharkov.ua)
[3]Університет Беннета (Велика Нойда, Республіка Індія, neelam.choudhary@bennett.edu.in)

КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПАЛИВНИХ БАКІВ РАКЕТОНОСІЇВ НА РІЗНИХ СТАДІЯХ ПОЛЬОТУ

Розроблені ефективні сучасні методи для розрахунку на міцність оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, з урахуванням плескань, явищ гідропружності, можливості зміни рівня заповнювача, перевантажень та мікрогравітації.

Базуючись на оригінальних розробках авторів, дослідженнях в галузі створення ефективних обчислювальних схем і методів скінченних та граничних елементів у поєднанні з аналітичними засадами та теоретичному обґрунтуванні розроблених схем, створені нові чисельно-аналітичні методи та комп’ютерна технологія для аналізу вільних та вимушених коливань складених паливних баків ракетоносіїв на різних стадіях польоту: при перевантаженнях та в умовах мікрогравітації, з урахуванням плескань рідини та пружності стінок баків. У порівнянні з відомими аналогами та існуючими програмними комплексами метод, що пропонується, має значні переваги, оскільки він дозволяє здійснити більш точний та кваліфікований аналіз коливань паливних баків, врахувати вплив пружних деформацій стінок баків та зміну протягом польоту рівня заповнення баків, форми вільної поверхні, наявність пружних та жорстких внутрішніх перегородок, зміну прискорення сили тяжіння.

Методологію буде засновано на сумісному використанні редукованих методів скінченних (МСЕ) і граничних елементів (МГЕ) та аналітичних методів.

Розроблено сучасні обчислювальні методи для моделювання гідро-пружної взаємодії для застосування при симуляції вільних та вимушених оболонок обертання, частково заповнених рідиною [1].

Новизна запропонованого методу полягає у можливості дослідження як пружних так і жорстких перегородок в заповнених рідиною резервуарах у формі оболонок обертання з довільним профілем меридіану. Метод дозволяє з’ясовувати залежності частот коливань від рівня заповнення при різних значеннях прискорення вільного падіння, з урахуванням різних значень числа Бонда, що відображає різні рівні поверхневого натягу. Комп'ютерне моделювання здійснювалось як для вибору оптимального місця розташування перегородки так і для визначення її розмірів.

На першому етапі створено уточнену математичну модель для визначення частот та форм вільних коливань резервуару, частково заповненого рідиною, за наявністю внутрішніх перегородок. Якщо частота сили збудження близька до власної частоти коливань резервуару, то на його стінки діє високий тиск, який може призвести до руйнування всієї конструкції, тому визначення власних частот і форм конструкції має велике значення [2].

Розроблено методику дослідження вільних та вимушених коливань пружної оболонки обертання з довільним меридіаном при частковому заповненні ідеальною нестисливою рідиною [3, 4].

Розв'язання зазначеної проблеми вільних коливань пружної оболонки обертання з урахуванням плескань рідини вимагає побудови трьох систем базисних функцій, а саме визначення форм коливань рідини в жорсткому резервуарі під дією сили тяжіння, форм коливань незаповненої оболонки, власних форм коливань пружної оболонки без врахування сили тяжіння. Таким чином, розв'язання проблеми, що розглядається, включає такі стадії. На першому етапі визначаються частоти і форми коливань рідини в резервуарі в припущенні жорсткості стінок. На другому – обчислюються частоти і форми власних коливань незаповненого пружного баку. Використано теорію оболонок Кіргхофа-Лява внаслідок того, що розглядаються тонкі оболонки. Але може буде використана і будь-яка інша теорія. На третьому етапі визначаються частоти і форми коливань пружного резервуару з рідиною без урахування явищ плескань. Остаточно, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для дослідження коливань оболонок у зв'язаному формулюванні. Чисельний розв'язок цих рівнянь буде здійснено з застосуванням методів скінченних та граничних елементів і методів Рунге-Кутта.

Для міцнісних розрахунків, розрахунків на вибухові або імпульсні навантаження використано поєднання методів одновимірних граничних і скінченних елементів, що дозволить істотно зменшити обчислювальні витрати.

Розроблено нову методику досліджень впливу внутрішніх перегородок на рівень плескань вільної поверхні рідини при вибухових та імпульсних впливах. Це дасть змогу з'ясувати місця розташування внутрішніх перегородок та їх розміри, які б приводили до найбільш суттєвого зменшення рівня плескань рідини, з метою запобігання виплеску небезпечної та легкозаймистої рідини [3].

Плескання рідини в контейнерах при вибухових впливах мають суттєво нелінійний характер. Тому запропоновано методику визначення форми вільної поверхні рідини та її змінювання в процесі дії динамічних імпульсних навантаженьу нелінійному формулюванні.

Головним результатом виконання проекту буде розроблення ефективного методу та комп'ютерної технології для числової симуляції міцності та коливань резервуарів з перегородками різної форми та з можливістю їх довільного розташування в баках при різних умовах експлуатації. Це дасть змогу регулювати розміри та місця розташування перегородок з метою зниження рівня небезпеки при використанні вибухонебезпечних та отруйних речовин шляхом комп’ютерного експерименту.

Буде проведено комп’ютерне дослідження впливу внутрішніх перегородок на частоти та форми вільних коливань резервуарів та розроблено методики досліджень впливу внутрішніх перегородок на рівень плескань вільної поверхні рідини при вибухових та імпульсних впливах з метою з’ясування таких місць розташування перегородок та їх розмірів, що дадуть найбільш суттєве зменшення рівня плескань рідини, що сприятиме запобіганню виплеску небезпечної та легкозаймистої рідини в екстремальних ситуаціях.

Розроблений метод та комп’ютерна технологія дозволять вивчити як повздовжні, так і поперечні коливання систем «оболонка-рідина». Крім застосування в аерокосмічній техніці, впровадження запропонованого методу і комп’ютерних програм дозволить забезпечити новий технічний рівень розв'язання важливих прикладних задач, де застосовуються тонкостінні елементи конструкцій, зниження рівня аварійного ризику і екологічних наслідків при експлуатації потенційно небезпечних оболонкових конструкцій, заповнених агресивною рідиною, в умовах критичних впливів та форс-мажорних обставин (аварійні ситуації при експлуатації, транспортуванні, катастрофах, землетрусах, терористичних актах та ін.).

Отримані в ході дослідження результати дозволять надати рекомендації з модернізації резервуарів шляхом встановлення внутрішніх перегородок або кришок, інших адсорберів та суттєво скоротити витрати на дорогі натурні експерименти.

1. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P. 3–13. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1

2. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. P. 78–87. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008

3. Gnitko V.I., Degtyariov K.G., Karaiev A.O., Strelnikova E.A. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. *WIT Trans. Eng. Sci.* 2019. Vol. 126. P. 189–200. https://doi.org/10.2495/BE420171

4. Choudhary N. Liquid sloshing in a circular cylindrical container containing a two-layer fluid. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 8 (4). P. 240–248. https://doi.org/10.1007/s12572-016-0176-z

УДК 539.3

О.П. Козачок, канд. фіз.-мат. наук
Р.М. Мартиняк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Б.С. Слободян, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Львів, Україна, labmtd@iapmm.lviv.ua)

ЗНОСО-КОНТАКТ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ ІЗ СИСТЕМОЮ ПЕРІОДИЧНИХ ВИСТУПІВ

Розглянемо взаємодію двох ізотропних пружних півнескінченних тіл D_1 і D_2 з однакових матеріалів, одне з яких (D_2) має регулярний рельєф у вигляді пологих гладких виступів однакової форми $r(x) = A\left(1 - tg^2(\pi x/d)/tg^2(\pi b/d)\right)^{3/2}$, розташованих з періодом d вздовж смуг ширини $2b$ (рис. 1). Тіла взаємно притискаються під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^∞, за якого відбувається повний контакт спряжених поверхонь. Одне з тіл нерухоме, а інше рухається зі швидкістю V в напрямі твірної виступів. Сили тертя на поверхні спряження τ підпорядковані закону Амонтона: $\tau = \tau_{yz} = fP$, де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування поверхні з виступами, виходячи з моделі фрикційного втомного руйнування [1, 2], згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де сила тертя τ перевищує порогове значення τ_0. Вважаємо навантаження таким, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується лише на деякій частині кожного виступу, де виникає найбільший контактний тиск. Ширина періодично розташованих смуг локального зношування $2a(t)$ зростатиме з часом внаслідок зміни геометрії виступів.

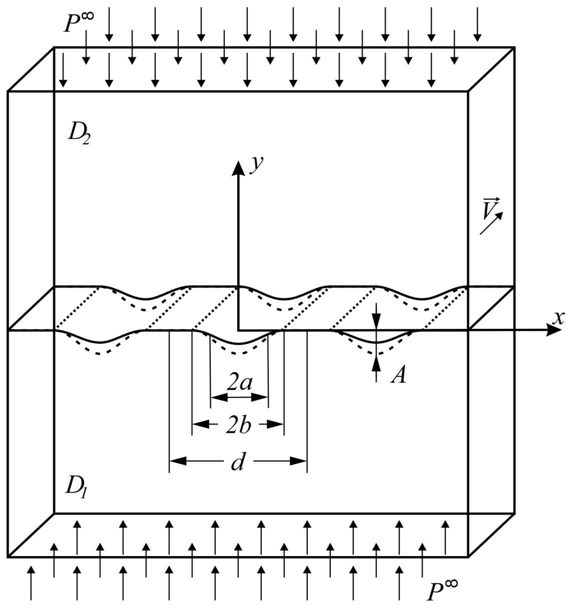


Рис. 1

Швидкість зношування описуватимемо рівнянням [1]

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = BV\left[fP(x,t) - \tau_0\right],$$

де $h(x)$ – товщина спрацьованого матеріалу, B – стала.

Контактні умови сформульованої плоскої зносоконтактної задачі на основній смузі періодів $-d/2 \le x \le d/2$ мають вигляд

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0, \quad |x| \le d/2;$$

$$v^+ = v^-, \quad b < |x| \le d/2;$$

$$v^{+}+r(x)=v^{-}, \quad a(t)<|x|\le b;$$
$$v^{+}+r(x)+h(x,t)=v^{-}, \quad |x|\le a(t).$$

Використовуючи розвинутий у працях [3–6] метод, таку контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференційного рівняння з ядром Гільберта відносно функції зношування $h(x,t)$:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}-\frac{2AfV}{dK}\int\limits_{L_0(t)} h'(s,t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{d}ds = AfVR(x), \quad x\in L_0(t), \tag{1}$$

де $h'(x,t)=\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$, $R(x)=\dfrac{2}{dK}\int\limits_{-b}^{b} r'(s)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi(s-x)}{d}ds+P^{\infty}-\dfrac{\tau_0}{f}$, $K=\dfrac{1+\kappa}{G}$, $L_0(t)=\left[-a(t);a(t)\right]$.

Функція $h(x,t)$ задовольняє умови:

$$h(x,0)=0, \quad x\in\left[-a(0);a(0)\right], \tag{2}$$

$$h(\pm a(t),t)=0, \quad h'(a(t),t)=0, \quad t>0. \tag{3}$$

Після припрацювання $(t\to\infty)$ контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним τ_0/f і зношення припиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t\to 0$ при $t\to\infty$. Врахувавши цю асимптотичну поведінку і здійснивши в рівнянні (1) граничний перехід при $t\to\infty$, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x,\infty)$:

$$\frac{2}{dK}\int\limits_{L_0(\infty)} h'_s(s,\infty)\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{d}ds=-R(x), \quad x\in L_0(\infty). \tag{4}$$

Умови (3) при $t\to\infty$ набувають вигляду

$$h(\pm a_{\infty},\infty)=0, \quad h'_x(\pm a_{\infty},\infty)=0, \tag{5}$$

де $a_{\infty}=a(\infty)$.

Після заміни змінних $\xi=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{d}\right)$, $\eta=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi s}{d}\right)$, $\gamma=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi b}{d}\right)$, $\alpha=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi a_{\infty}}{d}\right)$ СІР (4) з ядром Гільберта трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta,t)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{d}{2\left(1+\xi^2\right)}K\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)-\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\frac{r'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta, \quad |\xi|\le\alpha, \tag{6}$$

а умови (5) запишемо у вигляді

$$h(\pm\alpha,\infty)=0, \quad h'(\pm\alpha,\infty)=0. \tag{7}$$

Згідно з другою умовою (7), визначаємо обмежений розв'язок СІР (6):

$$h'(\xi,\infty)=\frac{dK\left(\dfrac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{2\pi\sqrt{\alpha^2+1}}\frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)}-\frac{3A}{\gamma^3}\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}. \tag{8}$$

Проінтегрувавши функцію (8) з урахуванням першої умови (7), знайдемо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h(\xi)=\frac{dK}{2\pi}\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)\left[\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)\right]+\frac{A}{\gamma^3}\left(\alpha^2-\xi^2\right)^{3/2}, \quad |\xi|\le\alpha. \tag{9}$$

З умови існування обмеженого розв'язку рівняння (6), що накладається на праву його частину, отримано рівняння для визначення ширини ділянки, де відбулося припрацювання:

$$\frac{3A\pi}{\gamma d}\left[\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right]+\frac{K\frac{\tau_0}{f}-KP^{\infty}}{\sqrt{\alpha^2+1}}=0\,. \qquad (10)$$

Контактний тиск поверхонь після припрацювання матиме вигляд:

$$P(\xi,\infty)=\frac{\tau_0}{f}, \qquad |\xi|\le\alpha\,; \qquad (11)$$

$$P(\xi,\infty)=P^{\infty}+\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\right]+\frac{\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\left[\sqrt{\alpha^2+1}-1-\xi^2\right], \qquad \alpha<|\xi|\le\gamma\,; \qquad (12)$$

$$P(\xi,\infty)=\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\gamma^2}-|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\gamma^2}{2}\right]+$$

$$+P^{\infty}+\frac{\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2+1}-1-\xi^2\right], \qquad |\xi|>\gamma\,. \qquad (13)$$

На основі аналізу отриманого розв’язку було встановлено такі закономірності: зі збільшенням навантаження зростають ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу; що більше порогове значення сили тертя, то менша товщина зношеного матеріалу; після припрацювання розподіл контактного тиску стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним значеннями тиску.

1. Андрейкив А.Е., Панасюк В.В., Чернец М.В. К теории износа материалов при сухом трении. *Физ.-хим. механика материалов*. 1981. Т. 17. № 2. С. 99–104.

2. Андрейкив А.Е., Чернец М.В. Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. Киев: Наукова думка, 1991. 160 с.

3. Мартиняк Р.М. Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2000. Т. 43. № 1. С. 102–108.

4. Мартиняк Р.М., Швець Р.М., Глод А.В. Припрацювання рухомих півпросторів за часткового зношування виступу на поверхні контакту. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2003. Т. 39. № 1. С. 51–58.

5. Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів: Растр-7, 2018. 200 с.

6. Kozachok O.P., Martynyak R.M. Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 24. Iss. 11. P. 3381–3393. https://doi.org/10.1177/1081286518781679

УДК 539.3

Д.В. Крютченко

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, wollydenis@gmail.com)

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ ПІД ДІЄЮ ВЕРТИКАЛЬНИХ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Розглянемо жорстку циліндричну оболонку, частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Нехай L – висота оболонки, H – рівень заповнення оболонки рідиною, R – радіус оболонки. З оболонкою зв'яжемо декартову систему координат, що зображено на рис. 1. Тоді рівняння вільної поверхні буде мати вигляд $z=H$.

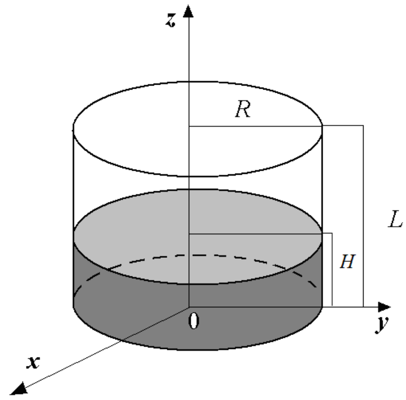


Рис. 1. Циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною

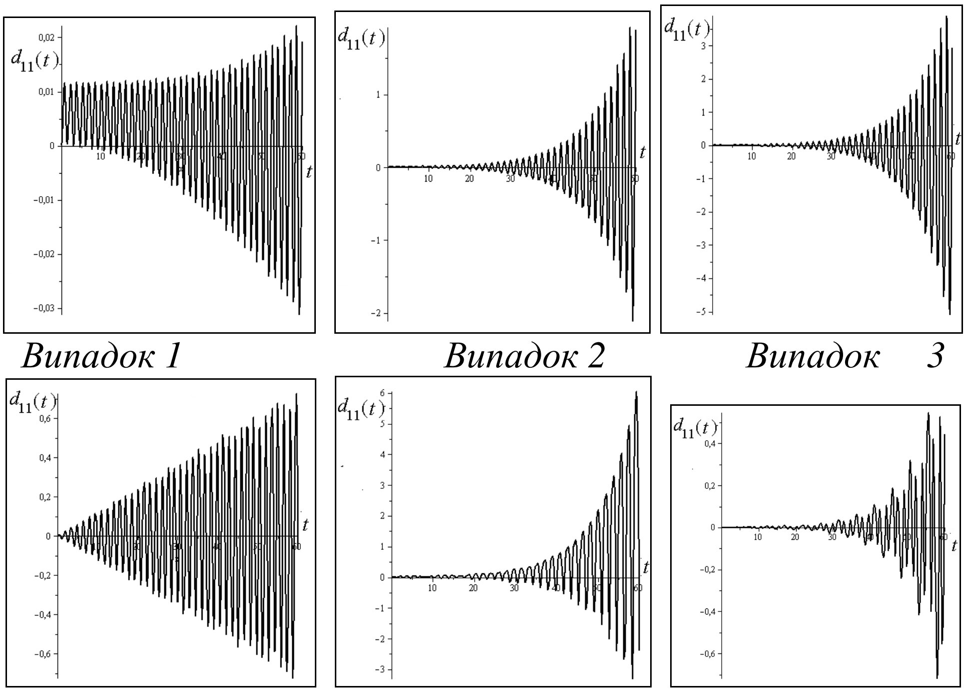
Опишемо одночасні дії горизонтальних і вертикальних збуджень. Обидва збудження вважаються гармонічними та будуть мати вид

$$a_x(t) = a_h \cos\omega_h t\,,\ a_z(t) = a_v \cos\omega_v t\,.$$

Початкові умови, необхідні для цього моделювання, – нульові [1, 2]. Первісне збурення не потрібно в разі чистого вертикального збудження, оскільки горизонтальне гармонічне збудження створює збурення, необхідні для реакції на вертикальне збудження. В основних рівняннях у цьому випадку відповідний ненульовий доданок з'являється в правій частині через горизонтальне збудження, тобто маємо

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2\left(1 + \frac{a_z(t)}{g}\right)d_{1k} + a_x(t)F_{1k} = 0, \quad F_{1k} = \frac{(r,\varphi_{1k})}{(\varphi_{1k},\varphi_{1k})}, \quad k = 1,\overline{M}\,. \tag{1}$$

Рівняння (1) – неоднорідне рівняння Матьє–Хілла. Як було показано в [3], діаграма стійкості рівняння Матьє–Хілла не залежить від правої частини. Діаграма стійкості [3] застосовна і в цьому випадку, але на реакцію вільної поверхні впливає наявність горизонтального навантаження. Наявність цього горизонтального навантаження може спричинити резонанс, який виявляється в лінійному зростанні вільної висоти поверхні в часі. При чистому горизонтальному збудженні, коли частота зовнішнього збудження дорівнює основній частоті ковзання, вільна поверхня піддається резонансу. У разі чистого горизонтального збудження наповнена рідиною жорстка оболонка має єдиний резонанс, але при комбінованому вертикально-горизонтальному русі система має нескінченні резонансні частоти [2–3]. Якщо частота горизонтального збудження ω_h близька до основної частоти плескань χ_{11}, або коли сума чи різниця горизонтальних і вертикальних частот ω_h, ω_v близька до цієї фундаментальної частоти, відбувається резонанс. На рис. 2 зображено зміну рівня вільної поверхні за часом при сумісних горизонтальних і вертикальних збудженнях для різних випадків. Випадки 1 і 2 відповідають нестабільній області діаграми Інса–Стретта. У цих випадках ємність з рідиною вертикально збуджується на частоті, близькій до подвоєної частоти власних коливань, і це призводить до нескінченного збільшення підйому вільної поверхні.



Випадок 1 *Випадок 2* *Випадок 3*

Випадок 4 *Випадок 5* *Випадок 6*

Рис. 2: Підйом вільної поверхні за часом при зв'язаних горизонтально-вертикальних збудженнях

Випадок 3 відповідає вертикальному збудженню ємності на частоті, що дорівнює власній частоті коливань, де відбувається такий же ефект. У випадку 4 частота горизонтального збудження близька до першої природної частоти. У випадках 5 і 6 сума і різниця горизонтальних і вертикальних частот ω_h, ω_v близькі до цієї основної частоти, відповідно. У випадках 1–6 спостерігається нестабільність руху.

1. Ibrahim R. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2005. 998 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656

2. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences.* 2016. Vol. 1. No. 1. P. 14–27.

3. Butikov E. Analytical expressions for stability regions in the Ince–Strutt diagram of Mathieu equation. *American Journal of Physics*. 2018. Vol. 86. P. 257–267. https://doi.org/10.1119/1.5021895

УДК 621.039.584

Д.И. Лунёв[1]
С.В. Алёхина[1,2], д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

[1]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина Учебно-научный институт компьютерной физики и энергетики*
[2]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, d.lunev21@gmail.com)*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ КОНТЕЙНЕРА ХРАНЕНИЯ ОТРАБОТАВШЕГО ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА В АВАРИЙНЫХ УСЛОВИЯХ

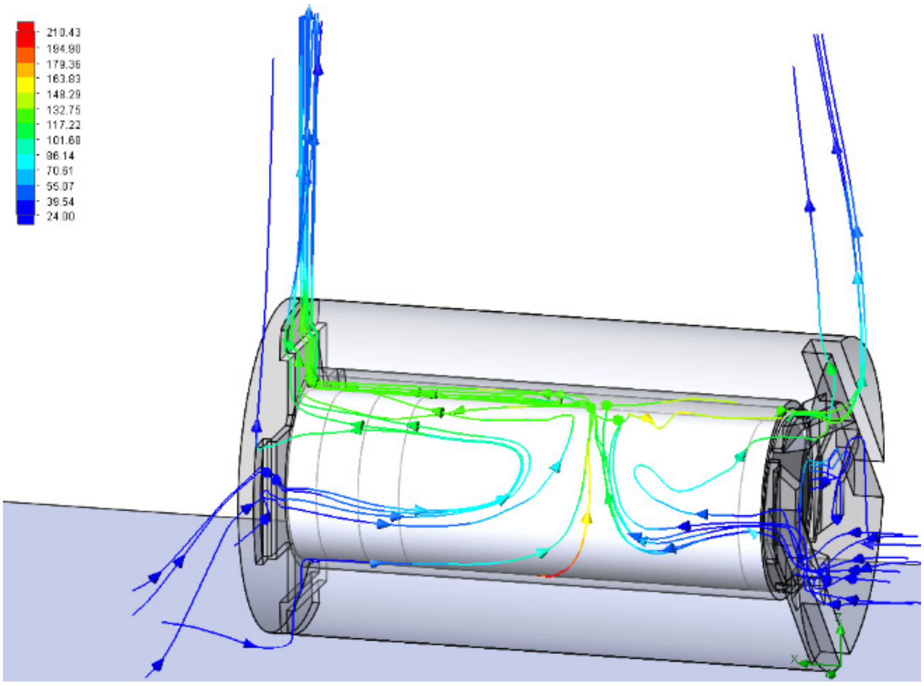
Сегодня хранение отработавшего ядерного топлива осуществляется на Запорожской АЭС в вентилируемых контейнерах на открытой площадке. Возникновение чрезвычайных ситуаций на площадке хранения, например, падение самолёта или мощный взрыв, может привести к различным аварийным ситуациям и изменить тепловые условия хранения. В данной работе рассматривается такой вид аварийной ситуации как падение контейнера на его боковую поверхность.

Поскольку герметичная корзина с отработавшего ядерного топлива не закреплена внутри контейнера, при рассматриваемых вариантах падения произойдёт ее смещение внутри контейнера хранения и частичное перекрытие воздуховодов и кольцевого вентиляционного канала внутри контейнера. Перекрытие вентиляционного тракта, как следствие, приведет к снижению расхода воздуха вследствие образования застойных зон и перераспределения воздушных токов (рис. 1, а), что может, в свою очередь, существенно повлиять на тепловое состояние корзины (рис. 1, б) и хранящегося в ней отработавшего ядерного топлива.

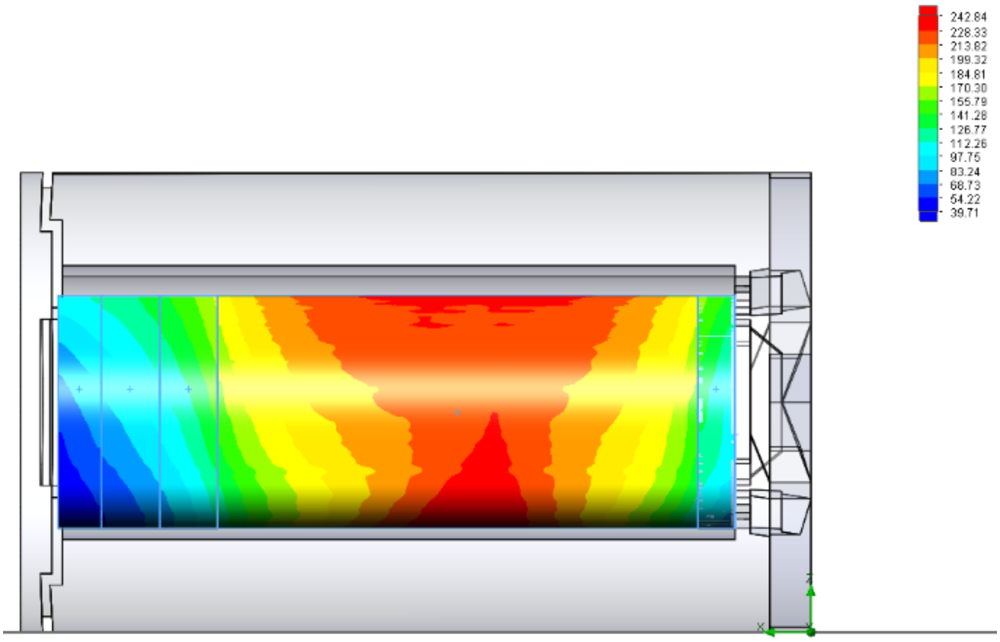
Возможны различные варианты падения контейнера хранения отработавшего ядерного топлива. В работе рассматриваются три из них: падение контейнера на средину верхнего вентиляционного канала, а также два варианта падения, когда контейнер касается поверхностью по средине между двумя входами в нижние каналы.

Моделирование теплового состояния контейнера хранения осуществлялось с использованием численных методов путем решения сопряженных задач теплообмена. Детально метод изложен в [1].

Для рассмотренных вариантов падения по результатам численного моделирования получены температурные поля контейнера и корзины хранения, а также структура движения вентиляционного воздуха (рис. 1).



а



б

Рис. 1. Результаты теплового моделирования падения контейнера:
а – температура и линии тока вентиляционного воздуха;
б – температура поверхности корзины

Определено, что при падении контейнера максимальная температура отработавшего ядерного топлива может превышать установленный критерий безопасности, т.е. 350 °С. Таким образом, последствия аварий, связанных с падением контейнера, должны быть ликвидированы в первую очередь.

1. Alyokhina S., Goloshchapov V., Kostikov A., Matsevity Yu. Simulation of thermal state of containers with spent nuclear fuel: multistage approach. *International Journal of Energy Research.* 2015. Vol. 39. Iss. 14. P. 1917–1924. https://doi.org/10.1002/er.3387

УДК 516.3, 516.65

Лушпенко С.Ф., д-р техн. наук, ст. науч. сотр.
Абеленцева К.В.

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
(Харьков, Украина, kseniyaabelentseva@gmail.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СОЛНЕЧНОГО КОЛЛЕКТОРА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Сегодня, в условиях энергетического кризиса, диверсификация источников энергии приобретает особое значение. На украинском энергорынке, где особенно большим является процент традиционной энергетики, перспективными для развития могут стать разновидности так называемой альтернативной энергетики. В частности, солнечная энергетика, доля которой в общей добыче энергии в Украине составляет около 1 %, может развиваться в направлении применения новых устройств для генерации тепла. В этом ключе в последнее время получили широкую известность «трехмерные» солнечные коллекторы. Особенность их заключается в том, что с целью повышения эффективности работы устройства в течение солнечных суток, светопоглощающую поверхность делают не плоской, а несколько изменённой в соответствии с техническими условиями, предъявляемыми к устройству. В качестве примера можно привести такие запатентованные устройства, как сферические, полусферические, конические солнечные коллекторы [1, 2]. Изобретателями заявлена высокая эффективность этих новых видов коллекторов, но, к сожалению, отсутствует детальное описание теплофизических процессов, имеющих в них место. Целью этой работы является численное исследование процессов тепломассопереноса для выявления наиболее эффективного устройства и оптимальных условий его эксплуатации.

В связи с тем, что предложенная конструкция является новой (рис. 1), исследования ее проводились многочисленными методами с применением стандартных расчетных конечно-элементных программных кодов. В работе проанализировано движение рабочей среды (воды) сквозь сферический и плоский солнечные коллекторы, конструкция которых не предусматривает применения дополнительных устройств для интенсификации движения рабочей среды. Путем решения серии сопряженных задач тепломассообмена определены температурные поля, поля давления и скоростей рабочей среды в коллекторе. На основе сравнения полученных результатов определен оптимальный угол наклона сферического коллектора для региона Харьковской области.

Результаты работы перспективны для применения в отраслях малой энергетики или сферах жилищно-коммунального сектора.

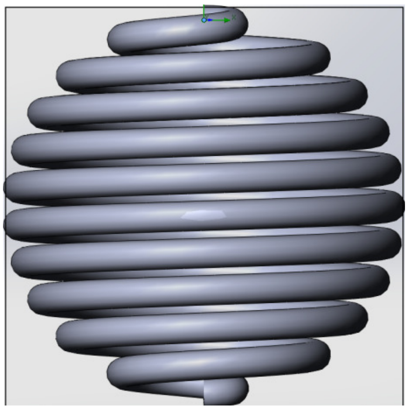


Рис. 1.

1. Мацевитый Ю.М., Ценципер А.И., Сафонов Н.А., Лушпенко С.Ф. К построению сферического солнечного коллектора. *Проблемы машиностроения*. 2011. Т. 14. № 2. С. 46–51.

2. Мацевитый Ю.М., Ценципер А.И., Сафонов Н.А, Лушпенко С.Ф. К созданию спирально-винтового трубчатого солнечногоколлектора. *Проблемы машиностроения.* 2011. Т. 14. № 5. С. 31–37.

УДК 536.24

Ю.М. Мацевитый[1], академик НАН Украины
В.О. Повгородний[2], канд. техн. наук
Н.А. Сафонов[1], канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.

[1]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, matsevit@ipmach.kharkov.ua)*
[2]*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»*
(Харьков, Украина, povgorod@ukr.net)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Методы теории упругости и термоупругости позволяют решать прямые задачи по определению напряженно-деформированного состояния при заданных внешних нагрузках. Для решения таких задач используется современный математический аппарат теории упругости [1]. При уточнении математической модели по априорно заданным допускаемым напряжениям определяются параметры, обеспечивающие прочность деталей машин и элементов проектируемых конструкций, т. е. фактически решаются обратные задачи упругости или термоупругости.

Этим проблемам посвящена и термомеханика – наука об исследовании напряжённо-деформированного состояния тел в условиях тепловых нагрузок. Если теория термоупругости исследует термонапряженное состояние, т. е. решает прямые задачи термомеханики, то науку, включающую решение обратных задач термомеханики, называют «прикладной термомеханикой». В рамках этой науки разрабатываются приближенные методы решения этих задач.

Как известно, обратные задачи относятся к классу некорректно поставленных задач. Они обычно нелинейны. Их решения не обладают свойством единственности и, как правило, не являются устойчивыми. Поэтому при решении некорректной обратной задачи ее либо сводят к условно-корректной, и тогда не проводится регуляризация, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации.

Рассмотрим математическую модель явления термоупругости [2, 3] для закреплённого на конце $x = l_1$ упругого стержня, первоначально ненапряжённого и нагретого внутренними источниками тепла заданной интенсивности f, включающую в себя следующие уравнения:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f = 0, \quad l_1 < x < l_2, \tag{1}$$

$$T(l_1) = T_1; \quad -k\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_{\text{T}}(T - T_{\text{c}}), \; x = l_2, \tag{2}$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad l_1 < x < l_2, \tag{3}$$

$$u(l_1) = 0; \quad \sigma(l_2) = 0, \tag{4}$$

где T, T_1, T_c – температура стержня, его конца и среды соответственно, u – перемещение, f – мощность распределённого источника тепла, k – коэффициент теплопроводности, α_T – коэффициент теплоотдачи, λ, μ – коэффициенты Ламе, α – коэффициент линейного температурного расширения, σ – напряжение.

Обратная задача термоупругости формулируется следующим образом: по измеренному на конце стержня $x = l_2$ перемещению

$$u_{\exp} = u(l_2)(1 + \delta), \quad \delta > 0 \tag{5}$$

найти коэффициент теплоотдачи α_T на этом же конце стержня.

Поскольку задача (1)–(5) относится к классу некорректно поставленных задач, для получения её решения используем регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова [4] совместно с методом функций влияния [5]. Функционал, используемый для решения поставленной задачи, имеет следующий вид

$$J = \left(u - u_{\exp}\right)^2 + \xi\left(k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l_2} + Q\right)^2,$$

где первое слагаемое, согласно методу наименьших квадратов, есть квадрат отклонения экспериментально измеренного $u_{\exp}$ от расчётного перемещения u на границе $x = l_2$, а второе – стабилизатор с параметром регуляризации ξ в виде множителя. Q – тепловой поток на конце стержня $x = l_2$, определив который, найдём и коэффициент теплоотдачи α_T по формуле

$$\alpha_T = \frac{Q}{T_2 - T_c},$$

где T_2 – температура на конце $x = l_2$.

Решалась тестовая задача, т. е. вместо экспериментальных величин использовались результаты решения прямой задачи.

Для решения поставленной задачи были приняты следующие исходные данные: $\lambda = 12.4053 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 8.2669 \cdot 10^4$ МПа, $\alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$, $k = 30.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, $T_1 = 10^\circ\text{C}$, $T_c = 50^\circ\text{C}$. Значение коэффициента теплоотдачи при решении прямой задачи $\alpha_T = 50.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$. При $f = 0$ задавалось значение теплового потока при решении прямой задачи $Q = -750.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, а при $f = 1000.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ – $Q = -437.50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

В первой колонке обеих табл.1 и 2 представлена погрешность «измерения» перемещений δ, во второй колонке – значения теплового потока Q, в третьей – коэффициента теплоотдачи α_T, в четвёртой – отклонение идентифицированного α_T от заданного.

Таблица 1. Результаты идентификации теплового потока и коэффициента теплоотдачи при отсутствии мощности источников теплоты f=0

δ	$Q, \frac{Вт}{м^2}$	$\alpha_T, \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$	$\Delta\alpha_T$
0,01	–749,873	49,976	0,024
0,03	–748,792	49,785	0,215
0,05	–746,631	49,404	0,596
0,07	–743,392	48,841	1,159
0,1	–736,496	47,668	2,332

Таблица 2. Результаты идентификации теплового потока и коэффициента теплоотдачи при мощности источников теплоты f=1000,0 $\frac{Вт}{м^3}$

δ	$Q, \frac{Вт}{м^2}$	$\alpha_T, \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$	$\Delta\alpha_T$
0,01	–437,24	49,975	0,025
0,03	–436,061	49,620	0,438
0,05	–433,332	48,748	1,252
0,07	–429,241	47,558	2,442
0.1	–420,550	45,146	4,854

Применение представленного метода дает возможность идентифицировать тепловой поток и коэффициент теплоотдачи на границе тела при определённой погрешности измерения перемещения. Преимущества данного метода: слабая чувствительность к погрешностям измерений; возможность использования экспериментальной информации как от одного, так и от нескольких датчиков; применимость для неоднородных сред; одновременное восстановление теплового потока на разных частях поверхности конструктивного элемента; простота программирования с возможностью распараллеливания вычислительного процесса, что отвечает современным требованиям, предъявляемым к методам и алгоритмам решения прямых и обратных задач. К недостаткам предлагаемого метода можно отнести возрастание погрешности идентификации при увеличении величины δ.

1. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 688 с.

2. Тимошенко С.П. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 560 с.

3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.

4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.

5. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. Киев: Наук. думка, 2002-2003. Т. 1: Методология. 408 с.; Т. 2: Приложения. 392 с.

УДК 536.24

Ю.М. Мацевитый, академик НАН Украины
Н.А. Сафонов, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
И.В. Гроза

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, matsevit@ipmach.kharkov.ua)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ ПУТЁМ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для идентификации параметров математических моделей тепловых процессов решение обратных задач теплопроводности (ОЗТ) имеет особое значение, как важный этап обеспечения адекватности их при наличии экспериментальной информации об исследуемом процессе. При этом в отличие от решения прямых задач, определяются причины по следствиям, известным из теплофизического эксперимента, или по температурам, полученным при решении прямой задачи.

В данной работе линейная граничная обратная задача теплопроводности состоит в определении зависимости мощности источника энергии в теле по измерениям температуры в одной или нескольких внутренних точках при известных граничных условиях. Эта задача, как и любая ОЗТ, в силу нарушения причинно-следственной связи является некорректной задачей по Адамару, т. е она не имеет единственного решения или её решение неустойчиво. Это означает, что при минимальном изменении исходных данных решение может как угодно отличаться от точного решения. Для решения такой некорректной задачи ее либо сводят к условно-корректной, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [1–6].

Рассмотрим тепловой процесс в однородном стержне, который характеризуется следующими уравнениями:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+F(x)=0,\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha_0(T-T_0),\ x=0, \tag{2}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha_l(T-T_l),\ x=l, \tag{3}$$

$$T(x_k)=T_k^{экс},\ \ k=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где T – температура в стержне; λ – коэффициент теплопроводности стержня; l – длина стержня; T_0,T_l – температура среды и α_0,α_l – коэффициенты теплоотдачи при $x=0$ и $x=l$ соответственно; $F(x)$ – мощность источника тепла; $T_k^{экс}$, $k=\overline{1,m}$ – температуры, полученные в результате теплофизического эксперимента с погрешностью $\delta\xi$, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией; m – количество измерений температуры.

Для решения внутренней ОЗТ (1)–(4) использовался принцип регуляризации А.Н. Тихонова [5] совместно с методом функций влияния [2] при следующих исходных данных:

$$\lambda = 50.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}},\ \alpha_0 = 75.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}},\ T_0 = 10.0^\circ\text{C},\ \alpha_l = 50.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}, T_l = 25.0^\circ\text{C}$$

Значения температуры $T_k^{экс}$, $k = \overline{1,m}$ (4) получены путём решения прямой задачи (1) – (3) с распределённым по длине стержня источником тепла в виде полинома второй степени $F(x) = -100.0x^2 + 700.0x - 1200.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$, т. е. решалась тестовая задача.

На рис. 1 приведены графики заданной и идентифицированной мощности распределённого источника энергии. При этом заданная температура (4) в качестве полученной из теплофизического эксперимента определялась путём решения прямой задачи (1)–(3) $T_k^{экс} = T(x_k)(1 + \delta\xi)$, $k = \overline{1,m}$, где ξ – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

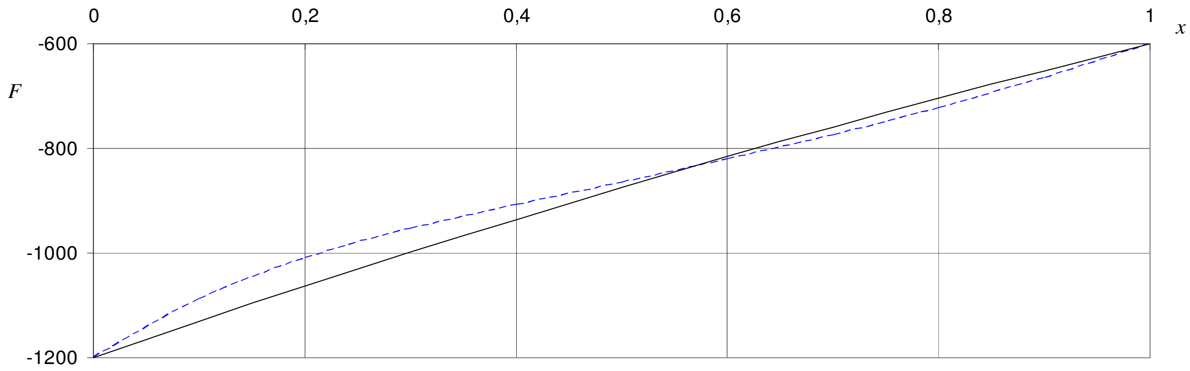


Рис. 1 Мощность распределённого источника энергии: сплошная линия – заданная, т. е. полученная при решении прямой задачи;пунктирная – полученная путём решения ОЗТ при погрешности измерения температуры $\delta = 0{,}02$

Проведенные исследования при различных δ, показали, что чем больше погрешность измерения температуры, тем больше отличается идентифицированная мощность источника тепла от заданной.

Представленный метод решения ОЗТ особенно успешно может быть применён при наличии априорной информации об искомой функции и при идентификации других параметров математических моделей.

1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. Москва: Мир, 1989. 312 с.

2. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Киев: Наук. думка. Т. 1: Методология. 2002. 408 с.; Т. 2: Приложения. 2003. 392 с.

3. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка, 1982. 360 с.

4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988. 288 с.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.

6. Мацевитый Ю.М., Слесаренко А.П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. Киев: Наукова думка, 2014. 292 с.

УДК 539.3

В.Ф. Мейш[1]**,** д-р физ.-мат. наук, проф.
Ю.А. Мейш[2], д-р техн. наук, доц.

[1]*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины*
(Киев, Украина, vfmeish@gmail.com)
[2]*Национальный транспортный университет*
(Киев, Украина, juliameish@gmail.com)

ОБ УЧЕТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

В работе представлены результаты расчетов динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек согласно нескольких прикладных теорий: теория трехслойных цилиндрических оболочек с привлечением независимых гипотез к каждому слою [1], теории оболочек с привлечением единых гипотез ко всему пакету слоев (модель С.П. Тимошенко и модель Кирхгофа–Лява). В основу расчетов положен алгоритм решения динамических задач теории оболочек, базирующийся на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственной координате и явной разностной аппроксимации по временной координате [2].

Известно, что влияние геометрически нелинейных составляющих при внутреннем распределенном нагружении проявляется незначительно (разница согласно линейной и нелинейной теорий достигает порядка 10%). Другая картина наблюдается при продольном краевом нагружении. Учет геометрически нелинейных факторов для теорий неоднородных оболочек по толщине в рамках пакета проявляется, начиная с $R/h = 200$, и разница по максимальным величинам прогибов достигает порядка 20%, большие значения прогибов наблюдаются для нелинейной теории. Согласно теории с использованием гипотез к каждому слою [1], учет геометрически нелинейных факторов начинается с $R/h = 100$. Разница по максимальным значениям прогибов согласно линейной и нелинейной теорий при $R/h = 100$ достигает порядка 30%, а при $R/h = 200$ максимальное значение прогиба по нелинейной теории в два раза больше от соответствующего значения согласно линейной теории. Для нелинейной теории наблюдается более густое волнообразование, максимальные значения напряжения σ_{22} в срединной поверхности заполнителя также в два раза больше, чем соответствующие значения напряжений σ_{22} согласно линейной теории.

1. Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Сравнительный анализ динамического поведения трехслойных оболочек в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях. *Прикладная механика.* 2003. Т. 39. № 7. С. 123–130.

2. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.; под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография. Киев: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. 541 с.

УДК 539.3

М.М. Микитин
Р.М. Мартиняк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Х.І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Львів, Україна, labmtd@iapmm.lviv.ua)

ПОВНИЙ КОНТАКТ І РОЗШАРУВАННЯ МІЖ ПІВПРОСТОРОМ І ОСНОВОЮ ЗА ПІДПОВЕРХНЕВОГО КРУГОВОГО СТОКУ ТЕПЛА

При взаємодії тіл з узгодженими поверхнями теплові чинники можуть зумовити появу між ними зазорів. Раніше було розв'язано плоскі задачі термопружності про розшарування півпросторів в межах ділянки неідеального теплового контакту між ними за дії нормального до поверхні спряження однорідного теплового потоку [1–3] та осесиметричні задачі про порушення контакту між тілами по круговій і кільцевій ділянках за дії в одному з тіл точкового і колового стоків тепла [4–6]

Тут запропоновано математичну модель контактної взаємодії пружного теплопровідного півпростору та жорсткої термоізольованої основи під дією прикладеного на безмежності однорідного тиску p та стоку тепла, рівномірно розподіленого по плоскій круговій області радіуса R, розташованій у півпросторі на відстані d від його поверхні (рис.). Вважаємо, що між тілами реалізується односторонній безфрикційний контакт, за якого через поверхню спряження передаються лише стискальні нормальні напруження. Задача сформульована в раках лінійної теорії термопружності.

Спочатку розглянуто задачу про повний контакт тіл. Для побудови її розв'язку кругову область, по якій розподілений стік тепла, розбиваємо на кільця. Теплову дію кожного кільця моделюємо термічно еквівалентним колом, вздовж якого діють рівномірно розподілені стоки тепла, загальна потужність яких дорівнює загальній потужності тепла, що виділяється по відповідному кільцю. Наближений аналітичний розв'язок задачі подаємо як суму розв'язків задач для всіх колових стоків тепла, використовуючи отримані у праці [5] залежності для одного колового стоку тепла.

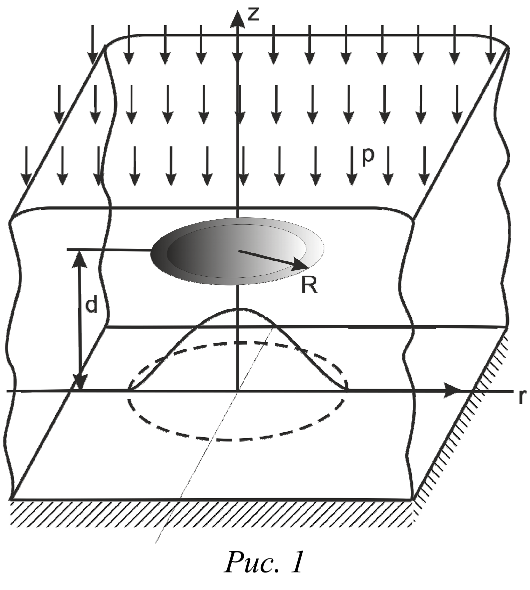


Рис. 1

Проаналізовано залежність контактного тиску між півпростором і основою від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Виявлено, що за певних значень цих параметрів контактний тиск на деякій круговій ділянці під стоком може набувати від'ємних значень. Це свідчить про можливість локальної втрати прямого контакту (розшарування) між тілами. Визначено критичне значення інтенсивності стоку тепла, за якої розпочинається таке порушення контакту.

Далі сформульовано задачу про виникнення кругового розшарування (зазору) між півпростором і основою під дією стоку тепла (рис. 1). Записано крайові умови на ділянці контакту та на березі зазору. Розв'язок задачі подано у вигляді суми розв'язків задачі про повний контакт та задачі про збурення напружено-деформованого стану, зумовлене локальним відшаруванням по кругу, радіус якого a наперед не відомий.

Для задачі з розшаруванням побудовано аналітичний розв'язок, використовуючи методику [4, 6], що базується на інтегральному перетворенні Ганкеля, зведенні задачі до інтегрального рівняння Абеля та застосуванні формули його обернення. Для визначення радіуса зазору використано умови плавного змикання його берегів .

Проаналізовано залежності форми зазору і нормальних контактних напружень від інтенсивності стоку тепла та глибини його залягання у півпросторі. Показано, що висота і радіус зазору зростають зі збільшенням інтенсивності стоку тепла та зменшуються зі збільшенням відстані від стоку до поверхні півпростору. Нормальні контактні напруження ззовні зазору за віддалення від нього монотонно спадають до напружень, прикладених на нескінченності.

1. Krishtafovich A.A., Martynyak R.M. Thermoelastic contact of anisotropic half-spaces with thermal resistance. *International Applied Mechanics.* 1998. Vol. 34. No. 7. P. 629–634. https://doi.org/10.1007/BF02702067

2. Krishtafovich A.A., Martynyak R.M. Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance. *International Applied Mechanics*. 1999. Vol. 35. No. 2. P. 159–164. https://doi.org/10.1007/BF02682149

3. Martynyak R.M., Chumak K.A. Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap. *Materials Science*. 2009. Vol. 45. No. 4. P. 513–522. https://doi.org/10.1007/s11003-010-9209-0

4. Monastyrskyy B.Ye., Mykytyn M.M. Axially symmetric problem of local separation of an elastic half-space from a rigid base due to a point source of cooling. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 178. No. 5. P. 467–480. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0563-8

5. Микитин М.М., Середницька Х.І., Монастирський Б.Є., Мартиняк Р.М. Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* 2017. Вип. 26. С. 55–62.

6. Середницька Х.І., Микитин М.М., Мартиняк Р.М. Порушення контакту пружного півпростору та жорсткої основи на круговій ділянці під дією колового стоку тепла. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2019. Вип. 55. № 3. С. 24–29.

УДК 621.454.2.046.4:662.75

О.М. Мінай
І.В. Сєдих

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Дніпро, Україна, info@yuzhnoye.com)

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАЛИШКІВ КОМПОНЕНТІВ ПАЛИВА З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Забірні пристрої є одним із найважливіших елементів паливних баків та системи подачі компонентів палива до рідинної ракетної рушійної установки. Вони забезпечують максимальне вироблення компонентів палива з баків без порушення суцільності потоку [1].

Кількість компонентів палива, що залишається в баку на момент прориву газу надуву до витратної магістралі, має назву гідравлічного залишку [1]. Його зменшення є суттєвим удосконаленням пневмогідравлічної системи подачі, оскільки сприяє збільшенню дальності льоту та збільшенню маси корисного навантаження.

Традиційна методика розрахунку гідравлічних залишків у динамічних умовах спирається на експериментальні праці, які проводились різноманітними конструкторсько-проектними закладами на гідродинамічних стендах із використанням натурних та масштабних моделей баків [1, 2]. Однак, отримані з дослідних даних емпіричні залежності можуть бути використані лише для рішення певного кола задач, умови яких (початкові й граничні) подібні до тих, для яких були отримані дані залежності.

Тому розрахункові значення динамічного гідравлічного залишку повинні бути підтверджені в ході експериментального відпрацювання на повномасштабних або масштабних моделях баків.

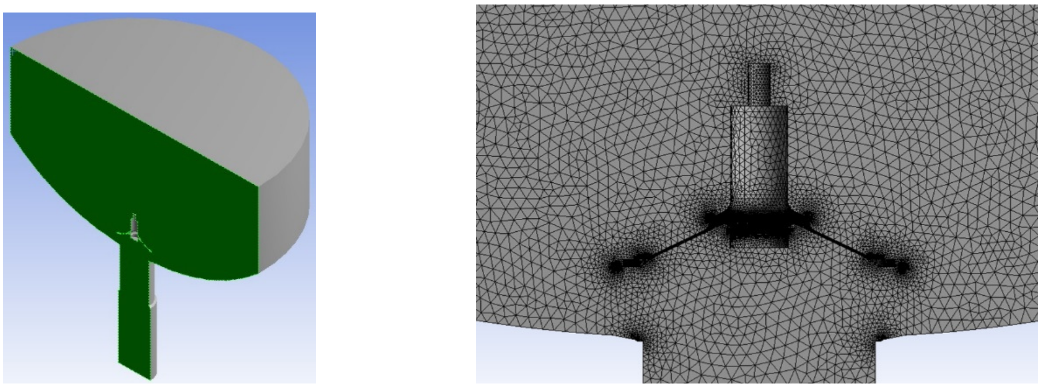
Скорочення об’єму експериментального відпрацювання та кількості дослідних конструкцій можливе при заміні фізичного експерименту чисельним моделюванням.

У роботі описано процес виконання чисельного моделювання, що базується на використанні у якості початкових даних результатів фізичного експерименту з подальшим порівнянням отриманих результатів між собою.

Для проведення чисельного моделювання була побудована геометрична 3D модель розрахункової області течії.

Ураховуючи наявність елементів складної геометрії й малорозмірних деталей у дослідних конструкціях, для виключення побудови занадто складної розрахункової сітки, геометрія розрахункової області течії 3D моделі будувалась з припущеннями, вплив котрих на моделювання процесів витікання рідини й формування залишку в динамічних умовах завідомо незначний.

На рис. 1 наведено загальний вигляд прийнятої розрахункової області 3D моделі (рис. 1, а) та розрахункової сітки (рис. 1, б).



а б

Рис. 1. Загальний вигляд розрахункової області 3D моделі та розрахункової сітки

Розрахункова сітка для 3D моделі – тетрагональна. Розмір елементів розрахункової сітки – 2 мм. Кількість вузлів розрахункової сітки – 1382948, кількість елементів розрахункової сітки – 7533752.

Процеси руху газорідинної суміші описуються системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних – рівняннями Навьє-Стокса з урахуванням кожної фази, які в загальному випадку включають до себе: рівняння нерозривності, руху, енергії та дифузії [3]. Тому для чисельного моделювання використовувалось спеціалізоване програмне забезпечення, що дозволяє вирішувати задачі обчислювальної гідродинаміки. За його допомогою початкові диференційні рівняння у частинних похідних були замінені системою алгебраїчних рівнянь, які при використанні методу скінчених об’ємів зв’язують між собою значення змінних у групах вузлових точок. Скінченноелементна сітка з вузловими точками, побудована при чисельному моделюванні, розподіляється по всій обчислювальній області в часі й просторі [4–6].

Для розрахунків була вибрана Ейлерова модель, яка використовується для моделювання багатофазної течії з чіткими границями розділу фаз при спорожненні ємкості та руху великих пузирів газу у рідині.

Чисельні розрахунки для визначення динамічного гідравлічного залишку компонентів палива проводились для різноманітних величин амплітуд бокових прискорень.

Результатом чисельного моделювання було визначення динамічного гідравлічного залишку в момент, коли суцільність потоку у розрахунковому розтині падала нижче 100 %.

Критерієм достовірності результатів чисельного моделювання є підтвердження збіжності отриманого значення залишку для математичної моделі та результатів, отриманих при експериментальному відпрацюванні [7].

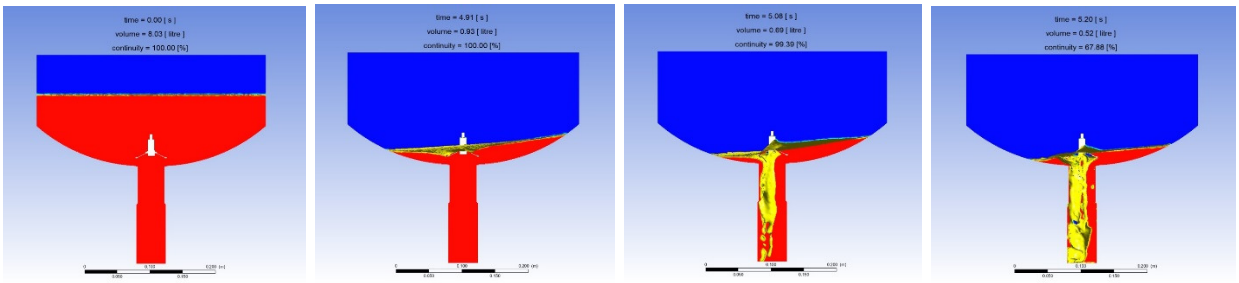
На рис. 2–4 наведена форма вільної поверхні рідини в дослідній конструкції (при мінімальній, номінальній та максимальній амплітуді бокових прискорень), отримана при чисельному моделюванні, для характерних моментів часу:

а) початковий рівень модельної рідини (суцільність 100 %);

б) воронка провалу рівня досягає площини зрізу тарелі забірного пристрою (суцільність 100 %);

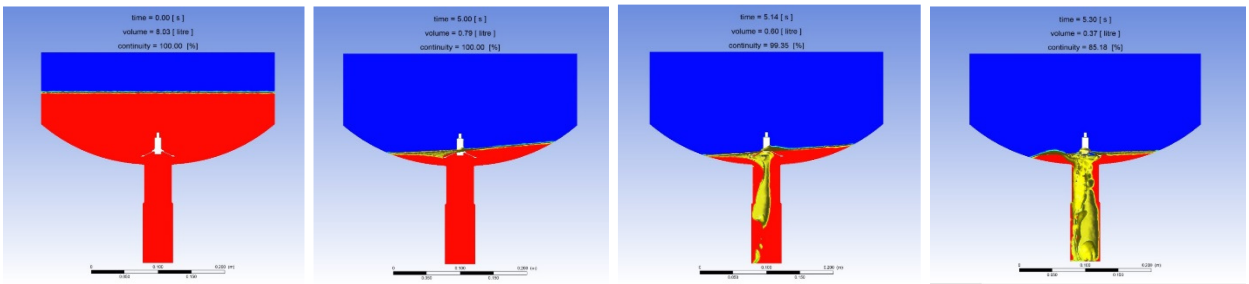
в) одиничний пузир газових включень досягає площини закінчення витратної магістралі (суцільність ~ 99 %);

г) масовий фронт газових включень досягає площини закінчення витратної магістралі (суцільність < 85 %).



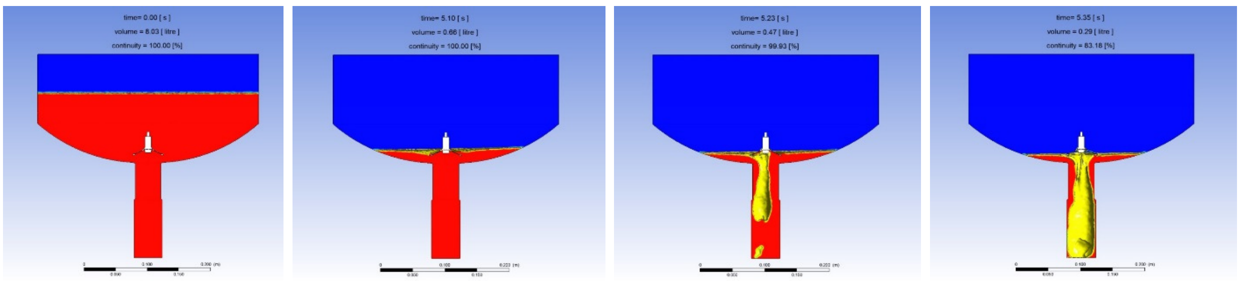
а *б* *в* *г*

Рис. 2. Форма вільної поверхні рідини в дослідній конструкції при максимальній амплітуді бокових прискорень



а *б* *в* *г*

Рис. 3. Форма вільної поверхні рідини в дослідній конструкції при номінальній амплітуді бокових прискоренń



а *б* *в* *г*

Рис. 4. Форма вільної поверхні рідини в дослідній конструкції при мінімальній амплітуді бокових прискорень

Після обробки даних, наведених на рис. 2–4, отримано, що при досягненні одиничним пузирем газових включень площини закінчення магістралі (суцільність 99,99 %) значення гідравлічного залишку зменшуються зі зменшенням амплітуди бокових коливань, що складають у нашому випадку 0,69, 0,60 та 0,47 дм^3 відповідно.

Порівняння результатів чисельного моделювання з результатами фізичного експерименту показало, що вони мають добру збіжність. Похибка результатів чисельного моделювання складає мінус 13 %, що менше допустимих ±25 %.

Це говорить про дотримання гідродинамічної подібності при 3D моделюванні, подібності модельних гідродинамічних процесів натурним («автомодельності») у відпрацьованому діапазоні початкових умов та коректності виконання поставлених задач по:

– побудові 3D - моделі розрахункової області;
– створенню розрахункової сітки;
– вибору математичної моделі розрахунку;
– заданню властивостей матеріалів;
– заданню початкових та граничних умов;
– заданню параметрів обчислювача;
– вибору часового кроку (для нестаціонарного розрахунку);
– процесу комп’ютерного обчислення.

Вказане дає можливість використовувати відпрацьовану математичну 3D модель для визначення динамічного гідравлічного залишку при різноманітних початкових та граничних умовах, а також використовувати розроблену розрахунково-математичну модель для інших ракет-носіїв з аналогічною конструкцією забірних пристроїв і нижніх днищ баків.

Проведення чисельного моделювання з використанням математичних 3D моделей дозволяє вже на початковому етапі розробки оптимізувати параметри забірних пристроїв, зменшити об’єм необхідного експериментального відпрацювання та знизити часові та матеріально-технічні витрати на її проведення.

1. Беляев Н.М. Расчет пневмогидравлических систем ракеты. Москва: Машиностроение, 1983. 223 с.

2. Шевченко Б.А. Расчетный и экспериментальный метод разработки средств забора компонентов топлива из баков летательных аппаратов с жидкостным ракетным двигателем дис. … канд. тех. наук : 05.07.02 / Шевченко Борис Алексеевич. Днепропетровск, 1990. 209 с.

3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. Т. 1. Основные положения и общие методы. Москва: Мир, 1991. 504 с.

4. Бруяка В.А., Фокин В.Г., Солдусова В.А., Глазунова Н.А., Адеянов И.Е. Инженерный анализ в ANSYS Workbench. :учеб. пособие. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. 271 с.

5. Baiges J., Codina R., Pont A., Castillo E. An adaptive fixed-mesh ale method for free surface flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*. 2017. No. 313. P. 159–188. https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.041

6. Battaglia L., Cruchaga M., Storti M., D’Elía J.,. Aedo J. N, Reinoso R.. Numerical modelling of 3D sloshing experiments in rectangular tanks. *Appl. Math. Modell.* 2018. No. 59. P. 357–378. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.01.033

УДК 539.3

О.А. Овчаренко, канд. техн. наук, доц.

Луганський національний аграрний університет
(Старобільськ, Україна)

МОДЕЛЮВАННЯ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА СИСТЕМОЮ СТРИЖНІВ

Сучасний розвиток технологій не можливий без використання ефективних моделей середовищ. Найбільш поширеним методом для моделювання різноманітних середовищ є метод скінченних елементів. Свою популярність він отримав завдяки універсальності та значним можливостям. Але й у нього є обмеження. Наприклад, він погано реагує на руйнування середовища та створення нових тіл, що контактують між собою. Разом з тим існує велика кількість задач, які потребують розв’язання не лише до межі міцності, але й після неї. Прикладом такої задачі є моделювання роботи машин для обробітку ґрунту або контрольованого руйнування будівель.

Отже, для розв’язання задач за межами міцності потрібен новий підхід, не пов’язаний з розв’язанням диференційних рівнянь теорії пружності, як це відбувається у методі скінченних елементів. Такий підхід для вирішення статичних задач у 1956 році запропонував О.Р. Ржаніцин [1]. Його модель суцільного середовища складається з плоскої шарнірно-стрижневої конструкції.

На цю модель покладалося завдання чисельного розрахунку переміщень точок тіла під дією складних навантажень. Але саме такий розрахунок з більшою точністю забезпечував метод скінченних елементів. Тому стрижньова апроксимація континуального тіла, не зважаючи на простоту її розрахунку, не знаходила широкої популярності. Підхід О.Р. Ржаніцина набув значного розвитку лише в останній час, коли з’явився попит на більш швидкі алгоритми, які можна реалізовувати у реальному часі для використанні у комп’ютерних іграх. При цьому розв’язується вже задача динаміки. Маса тіла зосереджується у вузлах конструкції у вигляді матеріальних точок, які з’єднуються за допомогою пружин [2]. Саме таку модель можна використовувати для розрахунку процесів в умовах руйнування. Для цього достатньо знищувати окремі стрижні, постійно контролюючи можливі колізії вузлів, які розміщені всередині сферичних коллайдерів. Але, основний критерій, за яким йде розвиток цієї моделі – швидкість розрахунків. Точність результатів вважається задовільною, якщо візуальний результат близький до вигляду реального руху та деформації пружного тіла. Механічні властивості матеріалів, які в значній мірі відповідають за кінцевий результат, приймаються інтуїтивно без теоретичного обґрунтуваннях [3]. Докладно зв’язок між властивостями континуального тіла і стрижнів дискретного середовища виклав О.Р. Ржаніцин [4], але при використанні цих залежностей результат має значні похибки.

Розглянемо стискання квадратного стрижня силою $2P$ (рис. 1, а). Апроксимуємо його шарнірно-стрижневою конструкцією такого ж розміру (рис. 2, б) та визначимо параметри стрижнів, при яких ця конструкція буде подібна до початкового квадратного пружного середовища. В якості критерія подібності приймемо переміщення вузлів стрижневої конструкції.

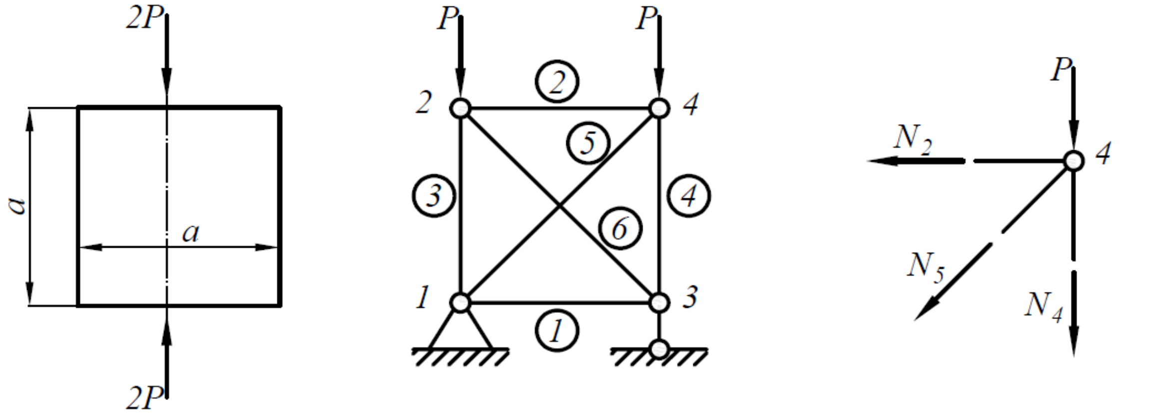


Рис. 1. Стержньова апроксимація тіла, що стискається: а – стрижень, що стискається; б – подібна шарнірно-стрижнева конструкція; в – вирізаний вузол 4

Нижню грань тіла будемо вважати нерухомою, тоді точне значення вертикального переміщення точок верхньої грані знайдемо за формулою закону Гука

$$v = -\frac{2Pa}{EA} \tag{1}$$

де E – модуль пружності матеріалу тіла; A – площа поперечного перерізу тіла; EA – жорсткість тіла.

Перейдемо до моделі тіла, шарнірно-стрижневої конструкції. Оскільки вона симетрична, вертикальне переміщення точок 2 і 4 рівні між собою. Виріжемо вузол 4 (рис. 2) та розглянемо його рівновагу.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \quad -N_2 - N_5 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0; \\ \sum Y = 0; \quad -N_4 - N_5 \dfrac{1}{\sqrt{2}} - P = 0. \end{cases} \tag{2}$$

де N_2, N_3, N_5 – внутрішні зусилля відповідних стрижнів:

$$N_2 = u\frac{E_1 A_1}{a}; \quad N_4 = v\frac{E_1 A_1}{a}; \quad N_5 = \left(u\frac{1}{\sqrt{2}} - v\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{E_1 A_2}{a\sqrt{2}}, \tag{3}$$

де E_1 – модуль пружності матеріалу стрижня; A_1 – площа перерізу горизонтальних та вертикальних стрижнів; A_2 – площа перерізу похилих стрижнів; E_1A_1 – жорсткість горизонтальних та вертикальних стрижнів; E_1A_2 – жорсткість похилих стрижнів; u – горизонтальне переміщення вузла 4; v –вертикальне переміщення вузла 4.

Введемо позначення

$$\eta = \frac{A_2}{A_1}, \quad \text{тоді} \quad A_2 = \eta A_1 \tag{4}$$

Розв'язуючи сумісно (2) и (3), враховуючи (4), знайдемо переміщення

$$u = \frac{0{,}5\eta}{\eta + \sqrt{2}} \frac{Pa}{E_1 A_1}; \quad v = -\frac{0{,}5\eta + \sqrt{2}}{\eta + \sqrt{2}} \frac{Pa}{E_1 A_1} \tag{5}$$

Шарнірно-стрижнева конструкція адекватно описуватиме задане тіло, якщо вертикальні переміщення будуть однакові

$$v = -\frac{2Pa}{EA} = -\frac{0{,}5\eta + \sqrt{2}}{\eta + \sqrt{2}} \frac{Pa}{E_1 A_1} \quad \text{або} \quad E_1 A_1 = \frac{0{,}5\eta + \sqrt{2}}{2\eta + \sqrt{2}} EA \tag{6}$$

Коефіцієнт Пуассона моделі дорівнюватиме

$$\mu = \frac{\eta}{\eta + 2\sqrt{2}} \tag{7}$$

Розглянута задача – це лише окремий випадок, тому отримані залежності властиві лише для моделювання квадратного стиснутого тіла. В реальних задачах є необхідність збільшувати дискретизацію моделі для отримання більш докладного результату. В цьому випадку, ми пропонуємо розглянуту конструкцію вважати окремим кластером – складовою дискретної моделі на кшталт скінченного елемента у методі скінченних елементів (рис. 2).

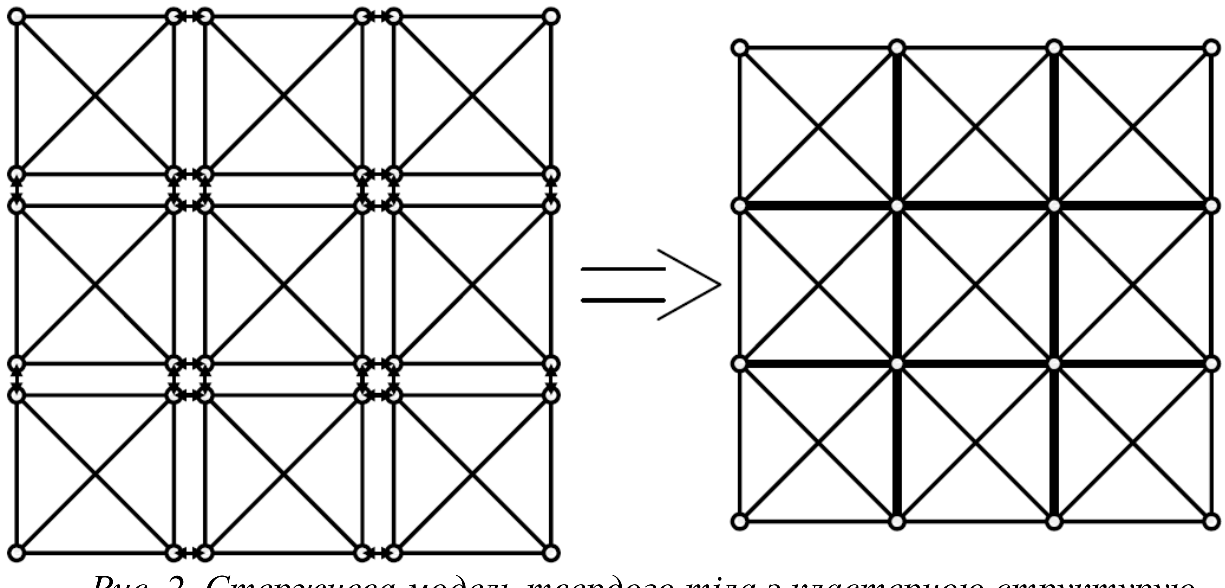


Рис. 2. Стержнева модель твердого тіла з кластерною структурую

В кластерній структурі моделі твердого тіла жорсткості вертикальних та горизонтальних стрижнів, якими з'єднуються кластери подвоюються.

Оцінимо якість отриманих залежностей. Для цього порівняємо результати розрахунку стиснутого тіла, отримані за допомогою закону Гука (точне рішення), стрижневої апроксимації О.Р. Ржаніцина та запропонованої нами кластерної структури. Стискатимемо тіло з площею поперечного перерізу $A = 0{,}2$ м^2, модулем пружності E = 2 10^7 Н/м^2 і висотою 0,4 м. Горизонтальні, вертикальні та похилі стрижні при стрижневій апроксимації мають однакову жорсткість (η = 1). Критерій збіжності – сумарна сила, що необхідна для стискання тіла на величину v = 15 мм. Результати розрахунків зведені до табл. 1.

Таблиця 1. Визначення точності отриманих залежностей

Розмірність сітки	Розмір однієї комірки, м	Жорсткість, $\times 10^6$ Н			Сумарна сила, кН			Похибка розрахунків, %	
		заданого тіла, Н	стрижня по О. Р. Ржаніцину,	стрижня в кластері (наші дослідження)	по Гуку (точне рішення)	по О.Р. Ржаніцину	кластерної структури (наші дослідження)	по О.Р. Ржаніцину	кластерної структури (наші дослідження)
1x2	0,2	$4\cdot10^6$	2,83	1,59		261,14	150,00	74,1	0
2x4	0,1	$4\cdot10^6$	1,41	0,79		205,80	150,00	37,2	0
4x8	0,05	$4\cdot10^6$	0,71	0,40	150,00	178,09	150,00	18,7	0
8x16	0,025	$4\cdot10^6$	0,35	0,20		164,15	150,00	9,4	0
16x32	0,0125	$4\cdot10^6$	0,18	0,10		157,12	150,00	4,7	0

Розрахунки показали, що результати стрижневої апроксимації О.Р. Ржаніцина залежать від розмірності сітки та асимптотично наближаються до точного значення. При цьому похибка знаходиться у лінійній залежності від розміру комірки. Однак, використання запропонованої нами кластерної структури забезпечує точний результат при мінімальній кількості кластерів та в подальшому дає точне значення для будь-якої розмірності.

1. Ржаницын А.Р. Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы. Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. Под. ред. А.Р. Ржаницына. Москва: Стройиздат, 1956. С. 84–96.

2. Nealen A., Muller M., Keiser R., Boxerman E., Carlson M. Physically Based Deformable Models in Computer Graphics. *Computer Graphics Forum.* 2006. Vol. 25. No. 4. P. 809–836. https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x

3. Muller M., Gross M. Interactive virtual materials. In Balakrishnan, R., Heidrich, W., eds.: Proceedings of Graphics Interface 2004, Waterloo, Canada, Canadian Human-Computer Communications Society. 2004. P. 239–246.

4. Ржаницын А.Р. Строительная механика: Учеб. пособие для вузов. Москва: Высшая школа, 1982. 400 с.

УДК 539.3

І.В. Ориняк, д-р техн. наук, проф.
Ю.П. Бай, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
(Київ, Україна, orynyak.iv@gmail.com)

ВИКОРИСТАННЯ ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ В МЕТОДІ ГАЛЬОРКІНА НА ПРИКЛАДІ АНАЛІЗУ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ЗАЩЕМЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ

Вступ

Останнім часом найбільш поширеними підходами для розв'язання задач статики і динаміки пластин є а) використання аналітичного представлення [1], що йде від класичної роботи Фойгта 1890 р. та б) метод Гальоркіна-Рітца [2]. Точність останнього методу залежить від вибору пробних функцій. Найбільш популярними функціями, що використовуються в якості пробних в методі Гальоркіна, є так звані балочні функції, що описують власні коливання балки, а також поліноміальні, гармонійні функції та їх комбінації, sinc-функції та інші. Детальне дослідження точності і ефективності використання різних наборів пробних функцій для аналізу коливань прямокутної защемленої пластини проведено в роботі [2].

Метою даної роботи є дослідження ефективності спеціально сконструйованих наборів послідовних експоненційних функцій щодо їх використання в задачах динаміки пластин. Результати представлено для задачі про вільні коливання прямокутної защемленої пластини, оскільки вона не має аналітичного розв'язку і вважається найбільш показовою для демонстрації ефективності наближених методів.

Постановка задачі

Рівняння, що описує вільні коливання прямокутної ізотропної пластини $|x| \le a, |y| \le b$ товщини h, має вигляд:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \omega^2 w, \qquad (1)$$

де $w(x, y, t) = w(x, y)\sin \omega_1 t$ – функція прогинів серединної площини пластини; $\omega^2 = \omega_1{}^2 \rho h / D$ – умовна частота, що підлягає визначенню; D – жорсткість пластини при згині; ρh – маса одиниці площі пластини; t – час.

Задача про визначення власних частот та форм власних коливань защемленої по контуру пластини зводиться до визначення функції $w(x, y)$, що задовольняє рівнянню (1) та граничним умовам на контурі пластини:

$$w(x=\pm a, y)=0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x=\pm a, y)=0\,, \tag{2}$$

$$w(x, y=\pm b)=0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(x, y=\pm b)=0\,. \tag{3}$$

Застосування методу Гальоркіна

Для зручності введемо в розгляд наступні позначення експоненціальних функцій:

$$\Gamma_k(x, L_x)=\exp\left(kx/L_x\right), \qquad \Gamma_m(y, L_y)=\exp\left(my/L_y\right), \tag{4}$$

де $k, m \in \mathrm{Z}$, L_x, L_y – параметри масштабування, значення яких співставні з характерними розмірами пластини. Наступним кроком пропонованої методики є побудова базисних (пробних) функцій $\Phi_k(x)$, $\Phi_m(y)$ методу Гальоркіна. Враховуючи, що кожна пробна функція повинна задовольняти 4 граничним умовам, оберемо їх як суму п'яти послідовних експоненціальних функцій у такій формі:

$$\Phi_k(x)=\sum_{i=0}^{4}\alpha_{k,i}\Gamma_{2+k-i}(x, L_x) \tag{5}$$

Аналогічно:

$$\Phi_m(y)=\sum_{j=0}^{4}\gamma_{m,j}\Gamma_{2+m-j}(y, L_y)\,, \tag{6}$$

Коефіцієнти $\alpha_{k,0}$. $\gamma_{m,0}$ $\left(k, m=\overline{1,4}\right)$ покладаються рівним 1, а коефіцієнти $\alpha_{k,i}$, $\gamma_{m,j}$ $\left(k, i, m, j=\overline{1,4}\right)$ визначаються з граничних умов (2), (3).

Наступним кроком вводиться множина двовимірних базисних функцій:

$$\Psi_{k,m}(x, y)=\Phi_k(x, L_x)\cdot\Phi_m(y, L_y) \tag{7}$$

Відповідно до методу Гальоркіна, функція прогинів розшукується у вигляді:

$$w(x, y)=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}\beta_{k,m}\Phi_k(x, L_x)\cdot\Phi_m(y, L_y) \tag{8}$$

де $\beta_{k,m}$ – невідомі коефіцієнти. Підставляючи (5), (6) в (7), (8), одержимо:

$$w(x, y)=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}\beta_{k,m}\sum_{i=0}^{i=4}\alpha_{k,i}\sum_{j=0}^{j=4}\gamma_{m,j}\Gamma_{2+k-i}(x, L_x)\cdot\Gamma_{2+m-j}(y, L_y) \tag{9}$$

Підстановка представлень (9) в постановочне рівняння (1) і врахування властивостей функцій $\Gamma_k(x, L_x)$, $\Gamma_m(y, L_y)$ дозволяє одержати нев'язки $\Omega_{k,m}(x, y)$ у вигляді:

$$\Omega_{k,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}\chi_{k,m}^{i,j}\Gamma_{2+k-i}(x,L_x)\cdot\Gamma_{2+m-j}(y,L_y), \tag{10}$$

де

$$\chi_{k,m}^{i,j}=\alpha_{k,i}\gamma_{m,j}\left(\left(\left(\frac{2+k-i}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2+m-j}{L_y}\right)^2\right)^2-\omega^2\right)=\lambda_{k,m}^{i,j}-\alpha_{k,i}\gamma_{m,j}\omega^2 . \tag{11}$$

Відповідно до методу Гальоркіна, мінімізація проводиться по функціях, утворених як добуток пробних функцій по координатах x, y:

$$\Psi_Y(x,y)=\Phi_r(x)\Phi_q(y). \tag{12}$$

Помножимо нев'язки (10) на кожну із функцій (12) і проінтегруємо по всій площі пластини. Одержимо систему рівнянь:

$$\varphi_{k,m}^{r,q}\beta_{k,m}=\varphi_Z^Y\beta_Z=0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{k,m}^{r,q}=\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\Bigg(&\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}\lambda_{k,m}^{i,j}\Gamma_{2+k-i}(x,L_x)\cdot\Gamma_{2+m-j}(y,L_y)\times\\ &\times\sum_{s=0}^{4}\alpha_{r,s}\Gamma_{2+r-s}(x,L_x)\sum_{t=0}^{4}\gamma_{m,t}\Gamma_{2+q-t}(y,L_y)\Bigg)dxdy\end{aligned} \tag{14}$$

Система (13) може бути подана у вигляді:

$$\begin{pmatrix}\varphi0_1^1-\omega^2\cdot\varphi1_1^1 & \varphi0_2^1-\omega^2\cdot\varphi1_2^1 & \dots & \varphi0_{(2N+1)^2}^1-\omega^2\cdot\varphi1_{(2N+1)^2}^1\\ \varphi0_1^2-\omega^2\cdot\varphi1_1^2 & \varphi0_2^2-\omega^2\cdot\varphi1_2^2 & \dots & \varphi0_{(2N+1)^2}^2-\omega^2\cdot\varphi1_{(2N+1)^2}^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \varphi0_{(2N+1)^2}^{(2N+1)^2}-\omega^2\cdot\varphi1_{(2N+1)^2}^{(2N+1)^2}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_{(2N+1)^2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\ \dots\\0\end{Bmatrix} \tag{15}$$

Шукані власні частоти визначаються з умови рівності нулю детермінанта однорідної системи (15). Після визначення власних частот відповідні їм форми власних коливань знаходяться за звичайними процедурами.

Результати числових досліджень

Чисельний розрахунок власних частот прямокутної защемленої пластини проведено для $N=\overline{0,4}$. Результати розрахунків для $N=2$ (25 рівнянь в системі (15)), $N=3$ (49 рівнянь) та $N=4$ (81 рівняння), а також найбільш відомі в літературі аналогічні результати представлено в табл. 1.

Використання 25 рівнянь не дозволило визначити 9-у та 10-у частоти. Всі інші частоти визначено з хорошою точністю. Використання 81 рівняння для перших восьми частот дає результати, що відрізняються від аналогічних для 49 рівнянь менш, ніж на 0,003%, в той час, як для 12-ої частоти похибка становить 0,5%. Порівняння з результатами інших авторів [3-6] показує незначну різницю.

Відносна похибка для перших чотирьох частот в порівнянні із класичною роботою Leissa A. [3]. становить менше, ніж 0,03%. В роботі El-Gamel M., [6], в якій використовувалось $N \approx 150$ членів (тобто N^2 рівнянь), наведено лише перші чотири власні частоти. Найбільша відносна похибка (для четвертої частоти), в порівнянні з одержаними в даній роботі результатами, менша, ніж 0,0002%. Отже, можна стверджувати про надзвичайну точність пропонованого підходу при відносно невеликій кількості використовуваних рівнянь.

Таблиця 1. Безрозмірні власні частоти для квадратної защемленої пластини

№	Пропонований підхід			El-Gamel M., [6]	Blevins R. [5]	Leissa A., [3]	Gorman D., [4]
	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$				
1	35,9855	35,985217	35,985193	35,985191	35,9915	35,992	35,984
2	73,4137	73,394121	73,393877	73,393857	73,413	73,413	73,40
3	73,4137	73,394121	73,393877	73,393878	73,413	73,413	73,40
4	108,2589	108,217880	108,216711	108,216517	108,269	108,27	108,20
5	131,7900	131,582561	131,580782	-	131,641	131,64	131,92
6	132,4211	132,207247	132,204900	-	132,243	132,24	131,92
7	165,2058	165,003733	165,000815	-	165,158^{e}	-	165,00
8	165,2058	165,003733	165,000815	-	165,158^{e}	-	165,00
9	-	211,772117	210,547862	-	-	-	210,52
10	-	211,772117	210,547862	-	-	-	210,52
11	220,3309	220,035401	220,033243	-	-	-	220,04
12	231,7419	243,192875	242,172416	-	-	-	242,28

Висновки

У даній роботі для задачі про власні коливання прямокутної защемленої пластини застосовано метод Гальоркіна на основі спеціально сконструйованих наборів послідовних експоненційних функцій. Запропонований підхід продемонстрував надзвичайну точність при відносно невеликій кількості рівнянь.

1. Banerjee R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case. *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 342. P. 177–199. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.12.031

2. Moreno-García P., Araújo dos Santos J.V., Lopes H. A review and study on Ritz method admissible functions with emphasis on buckling and free vibration of isotropic and anisotropic beams and plates. *Arch Computat Methods Eng*. 2018. Vol. 25. P. 785–815. https://doi.org/10.1007/s11831-017-9214-7

3. Leissa A.W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973. Vol. 31. No. 3. P. 257–293. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2

4. Gorman D.J. Free vibration analysis of rectangular plates. NY: Elsevier, 1982. 321 p.

5. Blevins R.D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. Ch. 5: Natural Frequency of Plates and Shells. John Wiley and Sons, 2016. P. 203–259. https://doi.org/10.1002/9781119038122.ch5

6. El-Gamel M., Mohsen A., Abdrabou A. Sinc-Galerkin solution to the clamped plate eigenvalue problem. *SeMA Journal*. 2017. Vol. 74. P. 165–180. https://doi.org/10.1007/s40324-016-0086-9

УДК 621.454.2

Р.М. Петренко
Д.Ю. Кривовичев

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»
(Днепр, Украина, info@yuzhnoye.com)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ КРИОГЕННОГО ТОПЛИВА В БАКАХ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Изменение температуры жидкого топлива в баках двигательной установки (ДУ) оказывает существенное влияние на её работу и на энергетику ракеты-носителя (РН) в целом. Непосредственное влияние нагрева топлива проявляется в работе системы наддува (СН), так как динамика изменения температуры свободной поверхности топлива определяет интенсивность теплопередачи, формирующий характер изменения давления в баке по времени полёта и температуру топлива на входе в ДУ.

Известен метод расчёта температурной стратификации жидкого топлива по времени полёта РН с учётом аэродинамического нагрева и других влияющих факторов (работы горячей системы наддува и двигательной установки). Однако, она апробирована только на ДУ с высококипящими компонентами топлива, и при этом не позволяет в полной мере моделировать стратификацию криогенной жидкости, в которой возможно вскипание части её объёма. Также в данном методе отсутствует учёт ряда физических процессов, сопровождающих стратификацию жидкого топлива в баках ДУ.

Предложен доработанный метод расчёта температурной стратификации жидкого топлива, апробированный для полукриогенной ДУ. Определено, что стратификация переохлаждённой криогенной жидкости удовлетворительно аппроксимируется этим методом расчёта. Для моделирования нагрева кипящей криогенной жидкости в метод внесено ряд изменений, эффективность которых показана удовлетворительной сходимостью расчётных и экспериментальных данных. Применение разработанного метода позволяет в комплексе существенно повысить точность расчётов (в части давления и температуры топлива на входе в ДУ), в том числе повысить энергетические характеристики РН на этапе её проектирования.

УДК 519.85:621.78

С.И. Планковский[1], д-р техн. наук, проф.
Ю.Г. Стоян[2], чл.-корр. НАН Украины
О.В. Шипуль[1], канд. техн. наук, доц.
Е.В. Цегельник[1], канд. техн. наук
Т.Е. Романова[2], д-р техн. наук, проф.
А.В. Панкратов[2], д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

[1]*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» (Харьков, Украина, s.plank@khai.edu)*
[2]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, tarom27@yahoo.com)*

ДИСПЕРСНАЯ КОМПОНОВКА 3D ОБЪЕКТОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ТЕРМОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Необходимость балансной компоновки 3D объектов возникает при обработке деталей термоэнергетическим методом (ТЕМ) [1]. ТЕМ применяется как для удаления заусенцев с различных деталей машин, полученных с помощью механической обработки [2], так и для очистки деталей сложной формы, полученных с помощью аддитивных технологий (3D-печать), от частиц неспеченного порошка [3]. Неликвиды (заусенцы, частицы неспеченного порошка) удаляются за счет химической реакции между материалом и смесью горючего газа и кислорода. Для этого детали размещаются на специальном приспособлении в цилиндрической камере сгорания (контейнер). Все рабочее пространство разделено на субконтейнеры горизонтальными круглыми «полками», жестко закрепленными на тонком центральном стержне. Расстояние между полками зависит от высоты деталей, размещаемых на конкретной полке.

Суть метода ТЕМ заключается в следующем. Камера предварительно заполняется газовой смесью с избытком кислорода, с последующим искровым поджогом, в результате чего температура последующего сгорания находится в диапазоне от 2500 до 3300 °С. Неликвид достигает температуры воспламенения и вступает в реакцию с избытком кислорода внутри камеры, что приводит к его полному сгоранию за несколько миллисекунд [4]. Возникающие при взрывном горении газовой смеси в камере из-за ударных волн тепловые потоки, действующие на поверхности деталей, могут существенно различаться [5]. Для равномерного распределения тепловых и энергетических воздействий необходимо выдерживать достаточно большие расстояния как между самими деталями (объектами), так и между объектом и контейнером. Подобно двумерному случаю [6, 7], сложные трехмерные части могут быть представлены объединениями более простых выпуклых форм, например цилиндры, призмы, кубоиды, многогранники, конусы.

В данном исследовании рассматривается новый класс задач – дисперсная упаковка 3D объектов. В отличие от плотной упаковки, сводящей к минимуму неиспользуемое пространство контейнера (и, таким образом, в большинстве случаев располагая детали как можно ближе), дисперсная упаковка направлена на то, чтобы разместить детали в контейнере как можно дальше. В частности, минимальное эвклидово расстояние между объектами, а также между объектами и границей контейнера максимизируется, чтобы обеспечить равномерное распределение тепловых и энергетических воздействий.

Предлагаются новые средства математического моделирования для аналитического описания технологических ограничений при дисперсной компоновке составных 3D объектов, которые могут свободно перемещаться и вращаться на полках, с учетом условий баланса.

Строится точная математическая модель в виде задачи нелинейного программирования, используя метод phi-функций [8, 9].

Предлагается алгоритм поиска локальных максимумов для задачи дисперсной компоновки 3D объектов. Приводятся результаты численных экспериментов.

1. Benedict G. F. Thermal energy method: deburring (TEM). In *Nontraditional Manufacturing Processes*. Boca Raton: CRC Press, 2017. P. 349–361.

2. Jin S.Y., Pramanik A., Basak A.K., Prakash C., Shankar S., Debnath S. Burr formation and its treatments – a review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2020. Vol. 107. Iss. 5–6. P. 2189–2210. https://doi.org/10.1007/s00170-020-05203-2

3. Sibanda P.S., Carr P., Ryan M., Bigot S. State of the art in surface finish of metal additive manufactured parts. In *Advances in Transdisciplinary Engineering: Vol. 9. Advances in Manufacturing Technology XXXIII*; Y. Jin, M. Price (Eds.). Amsterdam: IOS Press, 2019. P. 221–225. https://doi.org/10.3233/ATDE190039

4. Lamikiz A., Ukar E., Tabernero I., Martinez S. Thermal advanced machining processes. In *Modern Machining Technology*; J. P. Davim (Eds.). Oxford: Woodhead Publishing, 2011. P. 335–372. https://doi.org/10.1533/9780857094940.335

5. Plankovskyy S., Teodorczyk A., Shypul O., Tryfonov O., Brega D. Determination of detonable gas mixture heat fluxes at thermal deburring. *Acta Polytechnica*. 2019. Vol. 59. No. 2. P. 162–169. https://doi.org/10.14311/AP.2019.59.0162

6. Plankovskyy S., Nikolaev A., Shypul O., Litvinchev I., Pankratov A., Romanova T. Balance layout problem with the optimized distances between objects. In *EAI/Springer Innovations in Communication and Computing. Data Analysis and Optimization for Engineering and Computing Problems* ; P. Vasant et al. (Eds.). Cham: Springer, 2020. P. 85–93. https://doi.org/10.1007/978-3-030-48149-0_7

7. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Plankovskyy S., Tsegelnyk Y., Shypul O. Sparsest packing of two-dimensional objects. *International Journal of Production Research.* 2020. https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1755471

8. Stoyan Y., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation: two-and three-dimensional problems and applications. In *Springer Optimization and Its Applications: Vol. 73. Modeling and Optimization in Space Engineering*; G. Fasano, & J. Pintér (Eds.). Cham: Springer, 2012. P. 363–388. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5_15

9. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. In *Springer Optimization and Its Applications:* Vol. 114. *Space Engineering*; G. Fasano, & J. Pintér (Eds.). Cham: Springer, 2016. P. 369–400. https://doi.org/10.1007/978-3-319-41508-6_14

УДК 539.3

В.П. Ревенко, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Львів, Україна, victorrev@ukr.net)

ПОБУДОВА НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТОВСТИХ ПЛАСТИН

При вивчені пружної рівноваги елементів конструкцій за умов дії силових та температурних навантажень виникає потреба використовувати розв'язки рівнянь термопружності у найбільш простому вигляді. Розглянемо тривимірну статичну термопружну задачу для товстої пластини товщини h, серединна поверхня якої займає область S і збігається з площиною Oxy декартової системи координат $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Припустимо, що на обох поверхнях пластини ($z = h_j$, $h_1 = h/2$, $h_2 = -h/2$) відсутні нормальні і дотичні навантаження, а задані тільки температури $\mathrm{T}^- = T^+$, де знаки “+”, “–” відповідно описують функції на верхній $z = h_1$, або нижній $z = -h_1$ поверхнях. Вважатимемо, що функція $\mathrm{T(x,y,z)}$ відома, а на контурі області S задані відповідні навантаження. У праці [1] дано методику розв’язку таких тривимірних задач. Загальну задачу розділено на дві задачі: симетричний згин і симетричний стиск пластини

$$u_i(x,y,-z) = u_i(x,y,z),\ i = \overline{1,2},\ \ u_3(x,y,-z) = -u_3(x,y,z),$$

де u_i – переміщення у напрямку відповідних осей. Із цих умов випливає, що нормальні напруження σ_j, $j = \overline{1,3}$ симетричні відносно серединної поверхні S. Термопружні напруження виразимо через деформації [2]

$$\sigma_k = 2G[\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T], \quad \tau_{kj} = G\gamma_{kj}, k \neq j, \tag{1}$$

де $e = \dfrac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T$ – об'ємне розширення, $\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Співвідношення (1) підставимо у рівняння рівноваги і запишемо рівняння стаціонарної термопружності в переміщеннях [2]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k},\ \ k = \overline{1,3}, \tag{2}$$

$$\nabla^2 T = 0, \tag{3}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт теплового розширення.

Якщо використати розв’язок рівнянь Ляме [1, 3], в якому не врахована температура, і додати до нього термопружний потенціал [2], то загальний розв’язок рівнянь (2), (3) можна подати у такому вигляді:

$$u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \tag{4}$$

де $P = z(\Phi + \beta\Omega) + \Psi$; Φ, Ψ, Q – тривимірні гармонічні функції переміщень, Ω, T – відомі гармонічні функції, $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = T$, $\beta = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha$, ν – коефіцієнт Пуассона. Бігармонічна функція P задовольняє рівняння

$$\Delta P + \frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 2\frac{\partial}{\partial z}(\Phi + \beta\Omega), \tag{5}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

Використаємо подання переміщень (4) і знайдемо деформації, а згідно формул (1) визначимо загальний вираз нормальних

$$\sigma_j = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\nu\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T\right], \; j = \overline{1,2},$$

$$\sigma_3 = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T\right], \; e = -2(1-2\nu)\frac{\partial}{\partial z}\Phi + 2\beta T \tag{6}$$

та дотичних

$$\tau_{12} = G\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right],$$

$$\tau_{j3} = G\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi\right] - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right], \quad j = \overline{1,2} \tag{7}$$

напружень, де $G = E/2(1+\nu)$, E – модулі зсуву і Юнга. Врахувавши, що нормальні напруження σ_3 є незначними і $\sigma_3 = 0$, коли $z = \pm h_1$, із рівнянь (6) одержимо

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = 2(2-\nu)\Phi^+ + 2\beta\Omega^+. \tag{8}$$

Використаємо співвідношення (7) і запишемо умови відсутності дотичних навантажень на бічних поверхнях пластини

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial P^+}{\partial x_3} - 2(1-\nu)\Phi^+\right] - \frac{(-1)^j}{2}\frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3} = 0, \quad j = \overline{1,2}. \tag{9}$$

Врахуємо співвідношення (8) і спростимо рівняння (9)

$$4\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi^+ + \beta\Omega^+) = (-1)^j \frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3}, \quad j = \overline{1,2}. \tag{10}$$

Із рівнянь (10) випливають такі умови гармонічності на введені функції:

$$\Delta(\Phi^{+}+\beta\Omega^{+})=0\,,\quad \Delta\frac{\partial Q^{+}}{\partial z}=0\,. \tag{11}$$

Отже, функції $\Phi^{+}+\beta\Omega^{+}$, $\frac{\partial Q^{+}}{\partial x_3}$ – гармонічні, якщо знаємо Φ^{+}, то знаємо $\frac{\partial Q^{+}}{\partial x_3}$.

Використаємо знайдені співвідношення і побудуємо термопружний плоский напружений стан товстої пластини. Для цього підставимо у відомі вирази нормальних і дотичних зусиль в пластині [4] подання напруження (6), (7) і одержимо:

$$T_1=2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x\partial y}-4\nu\Phi^{+}-4\beta\Omega^{+}\right],\ T_2=2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x\partial y}-4\nu\Phi^{+}-4\beta\Omega^{+}\right],$$

$$S_{12}=S_{21}=2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x^2}\right)\right], \tag{12}$$

де $\tilde{P}=\int_{-h_1}^{h_1}Pdz$, $\tilde{Q}=\int_{-h_1}^{h_1}Qdz$. Після інтегрування рівняння (5), врахування гармонічності функцій і умови (8) запишемо базові рівняння теорії пластин

$$\Delta\tilde{P}=-4(1-\nu)\Phi^{+},\ \ \Delta\tilde{Q}=-2\frac{\partial}{\partial z}Q^{+}. \tag{13}$$

Знаходження напружень в термопружних пластинах за допомогою введених гармонічних і бігармонічних функцій та визначальних рівнянь (11), (13). Використаємо рівняння (11) і виразимо функцію Φ^{+}

$$\Phi^{+}=-\mathrm{h}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi+\beta\omega), \tag{14}$$

де φ – невідома гармонічна функція, $\Omega^{+}=\frac{\partial^2\omega(x,y)}{\partial y^2}$. Використаємо вираз (14), співвідношення (10) між гармонічними функціями та одержимо залежність:

$$\frac{\partial Q^{+}}{\partial z}=4h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \tag{15}$$

Врахуємо подання (14), (15) і запишемо загальний розв’язок рівнянь (13):

$$\tilde{P}=2(1-\nu)hy\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+\beta\omega_1)+hg_1(x,y),\ \tilde{Q}=-4yh\frac{\partial\varphi}{\partial x}+hg_2(x,y), \tag{16}$$

де ω_1 – частковий розв'язок рівняння $\Delta(y\omega_1)=2\Omega^{+}$, g_j – гармонічні функції, які можна подати:

$$g_1=(1+\nu)h[\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}],\quad g_2=(1+\nu)h[\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}], \tag{17}$$

де ϕ, ψ – гармонічні функції.

Підставимо функції (14), (16), (17) у співвідношення (12), виразимо зусилля через введені функції і побачимо, що функція ϕ не входить у подання зусиль (18), так що її можна не враховувати.

Отже функції (16) можна подати

$$\tilde{P}=2(1-\nu)hy\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-(1+\nu)h\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\tilde{Q}=-4hy\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(1+\nu)h\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \Phi^+=-\mathrm{h}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2},$$

де $\varphi_1=\varphi+\beta\omega$, $\varphi_2=\varphi+\beta\omega_1$. Запишемо напруження, які виражаються через знайдені зусилля

$$\sigma_x=2G\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}2(1-\nu)y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+4\nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\frac{4\beta}{h}\Omega^+\right]+2E\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\sigma_y=2G\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+4\nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\frac{4\beta}{h}\Omega^+\right]+2E\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3},$$

$$\tau_{xy}=4G\left[(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+2(y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y})\right]-2E\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}. \tag{18}$$

Переміщення і деформації в пластині розрахуємо після усереднення формул (4).

Одержані в доповіді вирази напружень, деформацій і переміщень та розроблений в працях [1, 3] аналітично-числовий метод дозволяють розв'язувати різноманітні крайові задачі для термопружних пластин за дії силових та температурних навантажень.

Висновки. На основі тривимірної теорії пружності побудована, без використання гіпотез про нульові дотичні напруження в середині пластини, двовимірна теорія тонких і товстих пластин, навантажених тільки на сторонах симетрично і паралельно серединній поверхні. Встановлено: що знайдені напруження і переміщення точно дорівнюють відповідним усередненим тривимірної теорії пружності; із одержаних формул випливають подання напружень плоскої задачі теорії пружності.

1. Revenko V.P. Reduction of a three-dimensional problem of the theory of bending of thick plates to the solution of two two-dimensional problems. *Materials Science*. 2015. Vol. 51. No. 4. P. 785–792. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9903-7

2. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва: ГИФМЛ, 1958. 168 с.

3. Revenko V.P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45. No. 7. P. 730–741. https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4

4. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Москва: Наука, 1982. 568 с.

УДК 669.017.3

С.П. Романюк, канд. техн. наук

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко
(Харьков, Украина, romaniuk.khntusg@gmail.com)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ УПРОЧНЯЮЩИХ НАНОПОКРЫТИЙ

Несмотря на то, что в настоящее время существует множество технологий по нанесению покрытий для значительного улучшения свойств поверхностного слоя, все еще остаются актуальными вопросы по повышению долговечности и защите металла от воздействия внешних факторов, например, от коррозии упрочненных деталей. Данное явление наблюдается неравномерно по рабочей поверхности с покрытием. Коррозионная повреждаемость формируется только в определенных зонах упрочненного слоя, в которых формируются трещины и происходит деградация покрытия. Такие виды дефектов отличаются малыми размерами, но при этом влияют на физические и механические свойства упрочняющего, защитного покрытия и существенно их ухудшают.

Для получения информации о микроструктуре покрытий используются аналитические методы, такие как рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия, малоугловое рассеяние рентгеновских лучей, вторично - ионная масс-спектрометрия и др. [1, 2]. Однако эти методы предоставляют ограниченные возможности как визуально, так и качественно характеризовать морфологию поверхности на микро- и наноуровне.

Для выявления дефектных областей с наличием пор и трещин, а также установления связи микроструктуры с характеристиками покрытий требуется комплекс методик и новых подходов к оценке структурной изменчивости покрытий при эксплуатации. Для исследований использовали традиционные методы: металлографический – оптической и электронной микроскопии; локальный спектральный анализ, термоэлектронной эмиссии распределения компонентов; магнитного параметра – коэрцитивной силы [3]. К числу разработанных методов относится оптико-математический способ описания изменений структуры с оценкой ее неоднородности [4, 5]. Данный метод основан на анализе пикселей изображений структуры покрытий, полученных на оптическом или электронном микроскопах.

Изменчивость структурообразования исследовали на металлографических изображениях по показателям неоднородности и оценивали по зависимостям, которые включали положительные и отрицательные степени в горизонтальном и вертикальном направлениях с разбивкой на 19 интервалов. Они характеризовали изменчивость степени формируемой неоднородности от максимального до минимального показателя.

Оценку формируемой степени неоднородности фаз осуществляли при различном количестве анализируемых пикселей (точек) изображений структуры покрытий – 2, 6, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Установлено, что минимальная степень неоднородности формируемого покрытия соответствует близким к показателям при оценке зон по количеству точек 20, 25 и 30. Любое выбранное их число для определения этого показателя, будет стабильно отражать достигнутое состояние структуры покрытия. Вместе с тем, по минимальному числу точек можно получить представление о возможных локальных отклонениях в степени неоднородности структурообразования.

С помощью разработанного нового математического метода проведены статистические исследования тонкостенного режущего инструмента из стали 65Г, упрочненного наноструктурным многослойным покрытием TiN. В условиях промышленного производства стойкость 50 экспериментальных ножей изменяется в широких пределах от 10 до 210 смен. В процессе эксплуатации упрочняющее покрытие TiN толщиною 3,3 мкм полностью не изнашивается.

В результате проведенного комплексного анализа структурных изменений на поверхности трения ножей выявлен характер развития их повреждаемости на основе формирования зон с разной плотностью чередующихся фрагментов. Существенное повышение локальных напряжений в упрочненном тонкостенном режущем инструменте способствует формированию микронадрывов и повреждаемости.

Из сопоставительного анализа следует, что упрочненный нож, который был снят с эксплуатации после 10 смен использования, отличался максимальными интервалами неоднородности, что связано с интенсивной структуризацией поверхности трения, четким выявлением полос сжатия и разряжения.

Анализом степени неоднородности режущего инструмента с покрытием TiN после 210 смен эксплуатации установлено, что она проявляется в меньшей мере, что можно объяснить более значительным износом упрочненной рабочей поверхности.

1. Анализ поверхности методами Оже- и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. Под ред. Д. Бриггса, М.П. Сиха. Москва, 1987. 600 с.

2. Lüth H. Solid Surfaces, Interfaces and Thin Films. Leipzig, 2001. 559 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04352-3

3. Skoblo T.S., Romaniuk S.P., Sidashenko A.I., Garkusha I.E., Taran V.S., Taran A.V., Pilgui N.N. Strengthening method for thin-walled knives with multi-layer nanocoatings and quality assessment by non-destructive method. *Journal of Advanced Microscopy Research.* 2018. Vol. 13. No. 3. P. 333–338. https://doi.org/10.1166/jamr.2018.1399

4. Romaniuk S.P. New Comprehensive Approach to Mathematical Modeling of Metallographic Images of Tool Structures. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 67–73. https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.067

5. Skoblo T.S., Romaniuk S.P., Sidashenko A.I., Taran V.S., Taran A.V., Dorozhko I.I., Pilgui N.N. Complex evaluation of structural state degree of strengthening nanocoatings. *Problems of atomic science and technology.* Series: Plasma Physics. 2019. № 1 (25). P. 225–228.

УДК 621.454.2.046.4:53.04

І.В. Сєдих
О.М. Мінай

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Дніпро, Україна, info@yuzhnoye.com)

ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ЧИСЛА БОНДА НА РУХ РІДИНИ ПРИ ВИКОНАННІ МАНЕВРУ ПЕРЕОРІЄНТАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Дослідження поведінки поверхні розділу «газ-рідина» під дією збурення від прискорення можливо розділити на дві фази: перша – це дослідження збурень від прискорення менше критичної величини, при якій порушується стабільність поверхні розділу, друга – дослідження збурень від прискорення більше критичної величини.

Є велика кількість літератури [1–9], починаючи з робіт Максвелла [1] й закінчуючи роботами Ламба [2] по гідродинаміці та Тейлора [3, 4] по стабільності поверхні, які можна використовувати для визначення поведінки поверхні розділу під впливом збурень від прискорення. Більша частина літератури присвячена випадку, коли прискорення направлене перпендикулярно до поверхні розділу. Межа стійкості розділу рідини, тобто величина прискорення, при якому поверхня розділу буде руйнуватись, визначається числом Бонда, а конкретна отримана величина має назву критичного числа Бонда. Величина критичного числа Бонда, отримана Максвеллом, знаходилась у діапазоні 0,6–58,72. В. Масіка [5–7] виміряв критичне число Бонда в циліндричних трубках, використовуючи в якості збурюючого прискорення поле нормальної гравітації. Отримана ним величина критичного значення числа Бонда дорівнює 3,36. Ця величина критичного числа Бонда, збігається з величиною, отриманою Бретертоном [8] та Хатторі [9], при однакових конфігураціях й напрямку прискорення. У вказаних роботах число Бонда *Bo* визначалось як

$$Bo = \frac{\rho \cdot a \cdot l^2}{\sigma},$$

де ρ – густина рідини; a –прискорення, перпендикулярне до поверхні розділу; l – деякий характерний розділ (для циліндричних труб – діаметр); σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

Величина числа Бонда визначає також і характер руху вільної поверхні рідини при виконанні маневру переорієнтації.

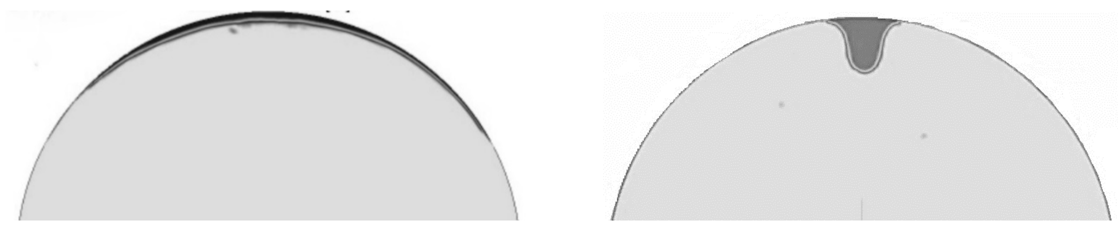
В табл. 1 приведена якісна залежність характеру руху рідини від значення числа Бонда *Bo* [1–9].

Згідно з табл. 1, режим руху рідини залежить від величини числа Бонда, і при збільшенні цієї величини певним чином змінюється режим руху рідини.

Але, використовуючи табл. 1, не можна знайти коректне значення точної величини числа Бонда, при якій буде змінено режим руху. Тому розглянемо поведінку рідини в залежності від числа Бонда, змінюючи параметри, що входять до цього числа.

Таблиця 1. Характер руху рідини в баку

Число *Bo*	0…3,37	3,37…10^3	10^3…10^6	>>10^6
Характер руху рідини в баку	Нерухомий стан	Стікання зосередженою масою по стінках бака	Утворення й рух відокремлених крапель рідини	Рух рідини як твердого тіла



а *б*

Рис. 1. Характер течії рідини:
а – рух рідини зосередженою масою по стінках бака;
б – перехідний режим, утворення відокремлених крапель рідини

Основними параметрами, з яких складається число Бонда і які впливають на його величину, є:

– фізико-хімічні властивості (густина й поверхневий натяг) рідини;

– діаметр поперечно розтину дзеркала рідини;

– прискорення.

Для виконання даних розрахунків, з метою кореляції та верифікації їх результатів, в якості модельної рідини було вибрано тетраоксид діазоту. Тому відповідно були використані фізико-хімічні властивості цієї рідини.

Досліди виконувались для рівня заправки h = 200 мм, діаметр дзеркала рідини при цьому рівні заправки дорівнює D = 1,22 м.

Для зручності проведення розрахунків ці початкові дані були використані в якості сталих, а зміна величини числа Бонда відбувалась за рахунок зміни величини прискорення.

В якості дослідного об’єкту було використано плоску 2D модель сферичного бака окислювача 3-го ступеня РН «Циклон-4», для забезпечення більш точного визначення впливу числа Бонда на рідину, модель бака була створена пустою, тобто без відтворення внутрішньо бакових елементів.

На рис. 2 наведено загальний вигляд прийнятої розрахункової області (зліва) та загальний вигляд розрахункової сітки (справа).

Розрахункова сітка – чотирикутна, розмір елементів сітки – 9 мм. Кількість вузлів розрахункової сітки – 55027, кількість елементів – 54723.

Розглянемо більш докладно поведінку рідини при різних величинах прискорення і, внаслідок цього, при різних величинах числа Бонда. Фактично, спираючись на форму поверхні рідини, що рухається, можна визначити 3 характерні проміжки, в яких режим руху суттєво залежить від числа Бонда.

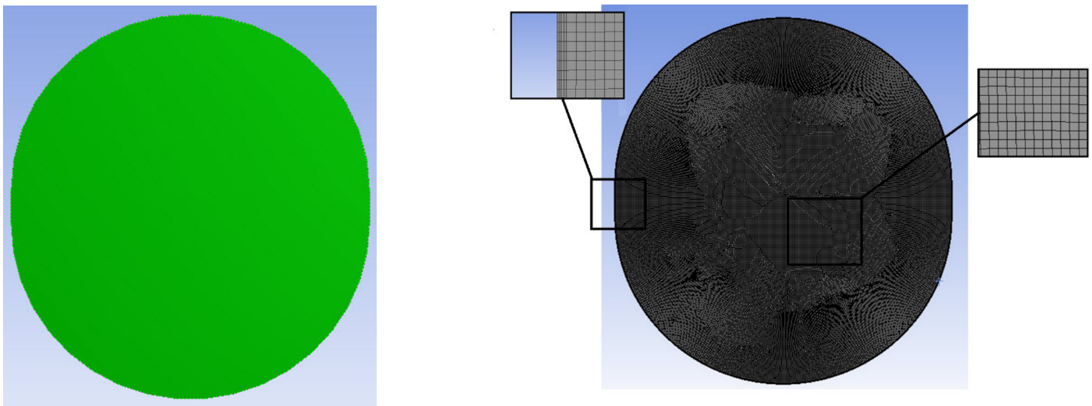


Рис. 2. Загальний вигляд прийнятої розрахункової області (зліва) та загальний вигляд розрахункової сітки (справа)

Перший проміжок (наведено на рис. 3) – це коли капілярні сили значно перевищують гравітаційні сили, й рідина рухається вздовж стінки бака. Цю картину ми можемо спостерігати при величинах числа Бонда, менших ніж ~260.

Наступний проміжок (наведено на рис. 4) спостерігається в діапазоні, коли величина числа Бонда починає перевищувати ~260, і ця картина зберігається впритул до величини числа Бонда ~427. В цьому проміжку величина гравітаційних сил, які діють на рідину, наближається до капілярних сил, що приводить до нерівномірного руйнування поверхневого шару «газ–рідина» і, тим самим, до несиметричного переміщення рідини вздовж стінок бака.

На останньому розглянутому проміжку (наведено на рис. 5), коли число Бонда стає більшим, ніж ~427, величина гравітаційної сили, яка діє на рідину, стає більшою, ніж капілярні сили, що приводить до розділення рідини на декілька відокремлених об’ємів. Одна частина рідини переміщується вздовж стінок бака, а інша (розташована на поздовжній осі бака) відривається та переміщується в напрямку нижнього полюса бака.

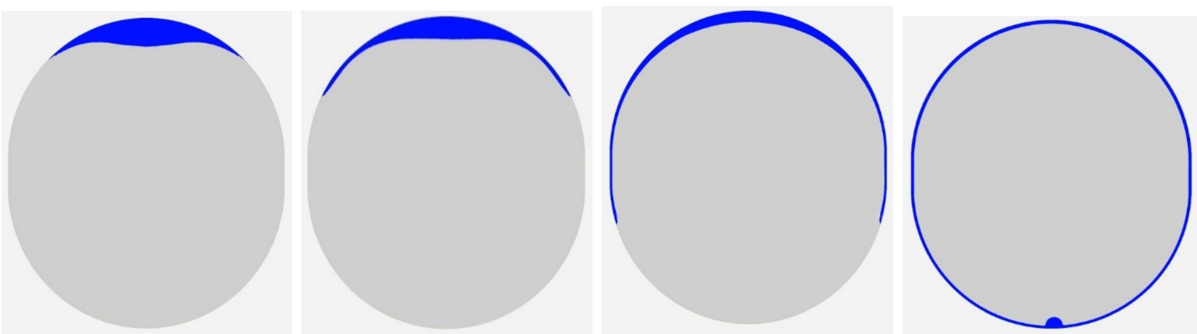


Рис. 3. Рух рідини вздовж стінок бака, числа Бонда менші, ніж ~260

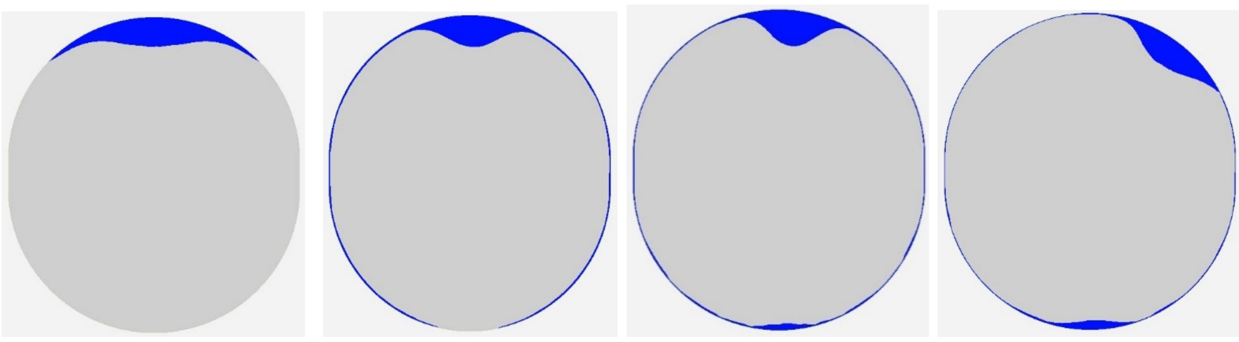


Рис. 4. Рух рідини вздовж однієї з стінок бака, число Бонда ~260…427

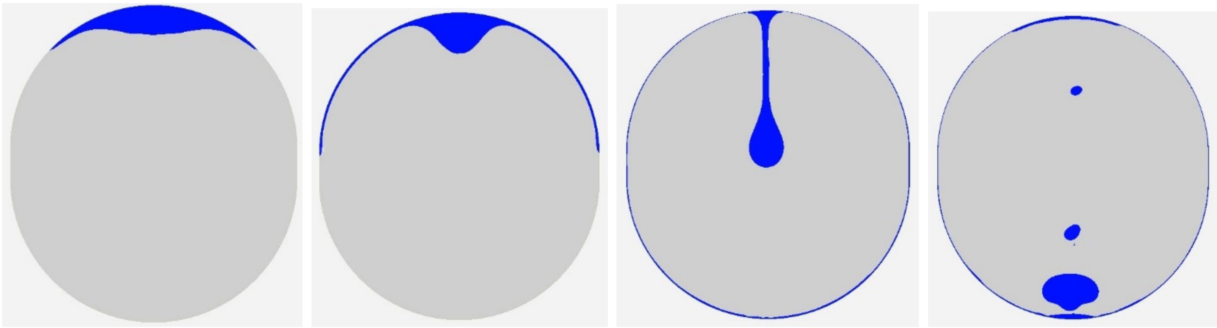


Рис. 5. Рух рідини вздовж поздовжньої осі бака, число Бонда більше ніж ~427

Таким чином, результати чисельних експериментів показують, що характер переміщення рідини від верхнього до нижнього днища бака змінюється в залежності від числа Бонда й має наступні характерні признаки:

1. При числі Бонда до ~260 рух рідини відбувається рівномірно вздовж стінки бака;

2. При числі Бонда від ~260 до ~427 реалізується перехідний режим, коли рідині не досягає прискорення для відриву від стінки, і руйнування поверхневого шару відбувається не симетрично;

3. При числі Бонда від ~427 і вище рідина, що переміщується, розділяється на декілька відокремлених об'ємів, одна частина переміщується вздовж стінки бака, а інша відривається від верхнього полюса бака і падає в напрямку нижнього полюса.

1. Maxwell J.C. The scientific Papers. 1927. Vol. 2. P. 585–587.

2. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947. 929 с.

3. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. L. Proc. Pay. Soc. London, ser. A. 201. 1950. No. 1065. P. 192–196. https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0052

4. Taylor G.I., Michael D.H. On making holes in a sheet of fluid. *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 58. No. 4. P. 625–639. https://doi.org/10.1017/S0022112073002375

5. Masica W.J., Petrash D.A. Motion of Liquid-Vapor Interface in response to imposed acceleration. Lewis Research Center. NASA TN D-3005, 1965. 24 p.

6. Masica W.J., Petrash D.A., Otto E.W. Hydrostatic stability of liquid-vapor interface in a gravitational field. Lewis Research Center. NASA TN D-2267, 1964. 18 p.

7. Salzman J.A., Masica W.J. Experimental investigation of Liquid-propellant reorientation. NASA TN X-1959, 1967. 20 p.

8. Bretherton F.P. The Motion of Long Bublles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*. 1961. Vol. 1. P. 166–188. https://doi.org/10.1017/S0022112061000160

9. Hattori S. On the motion of cylindrical bubble in a tube and its application to the measurement of the surface tension of liquid. Aeronautical research institute, Tokyo, report. 1935. No. 115. P. 161–193.

УДК 539.3

В.П. Силованюк, д-р техн. наук, проф.
Н.А. Івантишин, канд. техн. наук

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України
(Львів, Україна, n.ivantyshyn@gmail.com)

РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ З ДИСПЕРСНИМИ МІКРОЧАСТИНКАМИ

У комплексі сучасних досліджень міцності матеріалів та конструкцій, все більша увага звертається на аспект моделювання. Питання адекватного моделювання неоднорідних структур стають усе більш актуальними як у теоретичному відношенні, так і в прикладному аспекті, оскільки з'ясування поведінки досліджуваних структур безпосередньо впливає на ефективність та безпеку експлуатації як окремих матеріалів та конструкцій, так і цілих природно-техногенних комплексів. Механічні та експлуатаційні властивості конструкційних матеріалів суттєво залежать від неметалевих включень, які завжди присутні у їх структурі. Цей вплив залежно від природи та розмірів включень може мати якісно різний характер. Проведений аналіз напружено-деформованого стану тіл з включеннями [1, 2] дає підстави стверджувати, що у чавунах та вторинних алюмінієвих сплавах в умовах розтягу відбувається множинне розтріскування включень. Утворені на їх місці мікротріщини розміром 30...100 μm (в таких межах змінюються розміри графітових включень в чавунах та інтерметалідних включень у вторинних алюмінієвих сплавах) кожне, зокрема, не може впливати, згідно енергетичної та силової концепцій механіки руйнування, на міцність матеріалу. Результати експериментів показують, що кількість дефектів однорідної структури має вплив на міцнісні характеристики неоднорідного матеріалу, які містять однакові дефекти структури (графітові включення), але в різних кількостях. Логічним в цих випадках є припущення, що вплив мікродефектів на міцність, які не здатні за критеріями лінійної механіки руйнування самостійно поширюватись, може відбуватись через їх взаємодію. Дослідимо цей вплив, прийнявши найбільш несприятливу з точки зору міцності схему розміщення дефектів та навантаження, а саме: в рамках плоскої задачі теорії пружності розглянемо періодичну систему колінеарних тріщин в тілі (рис. 1). Похибка, яка виникає внаслідок нехтування дефектами в паралельних площинах піде в запас міцності.

З огляду на малі розміри тріщин концепція коефіцієнтів інтенсивності напружень тут незастосовна, тому скористаємось розв'язком цієї задачі в рамках моделі Леонова–Панасюка, що отримана в роботах [3, 4].

Розв'язок цієї задачі містить співвідношення, що зв'язує розмір тріщини a, відстань між центрами тріщин d і діюче навантаження p:

$$cos\left(\frac{\pi p}{2\sigma_0}\right)=\frac{sin\left(\pi a/2d\right)}{sin\left(\pi l/2d\right)}. \qquad (1)$$

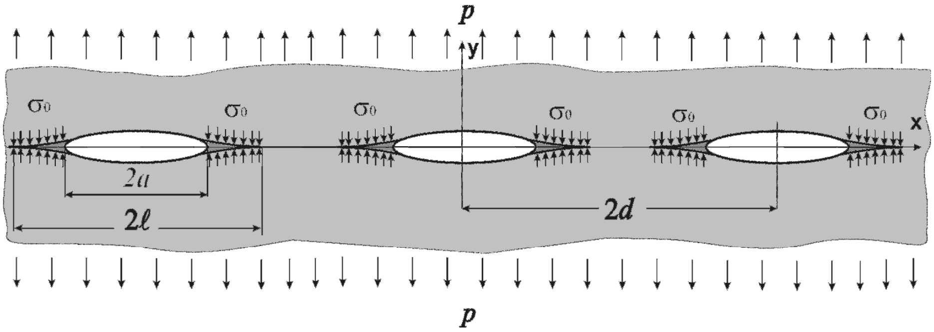


Рис. 1. Періодична система колінеарних тріщин

Якщо за критерій руйнування тіла із періодичною системою тріщин прийняти умову злиття зон передруйнування в околі тріщин, то із (1) отримуємо наступну залежність для розрахунку міцності тіла з тріщинами

$$\sigma_в = \sigma_в^M \left(1 - \frac{a}{d}\right) \quad (2)$$

На рис. 2 графічно зображено вплив нормованої відстані між включеннями *d/a* на міцність структурно неоднорідного матеріалу. Точками позначені результати експериментів для вторинного алюмінієвого сплаву АК8М3 з інтеметалідними включеннями.

Із наведених результатів випливає, що при віддалі між включеннями *d*>6*a*, міцність матеріалу практично не залежить від присутності дисперсної другої фази і наближається до міцності чистого (без домішок) матеріалу.

На основі співвідношення (3) отримаємо залежність міцності матеріалу від форми та об'ємного вмісту включень. Якщо прийняти форму включень еліптичною з півосями *a* і *b* (*a* > *b*), розміри тріщин, що утворюються в тілі за розтягу, будуть змінюватися в межах від 2*a* до 2*b*. Для розрахунків приймемо більший розмір тріщин 2*a*.

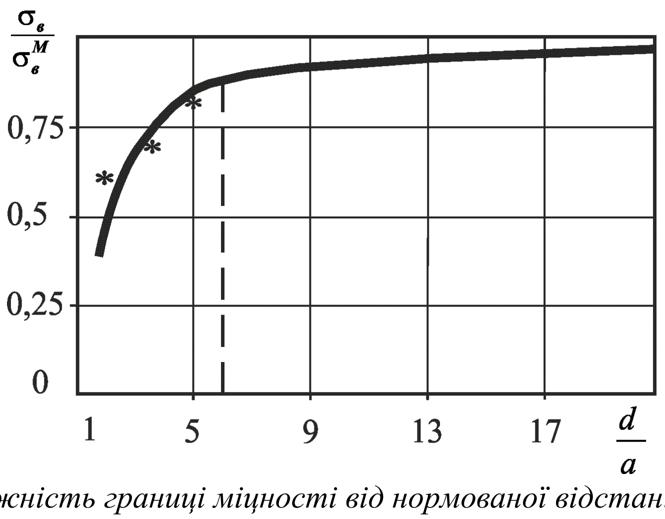


Рис. 2. Залежність границі міцності від нормованої відстані між включеннями

На основі методів кількісної металографії середня відстань між центрами дисперсних включень у двохфазній системі встановлюється залежністю [5]

$$d = \frac{a\,(2 - f_p)}{3\, f_p \sqrt{\lambda}}. \quad (3)$$

Тут f_p – об'ємний вміст включень; $\lambda = a/b$ – параметр форми включень.

На основі співвідношень (2), (3) отримана залежність для встановлення міцності неоднорідного матеріалу, коли відомі форма і об’ємний вміст частинок другої фази

$$\sigma_в = \sigma_в^M \left(1 - \frac{3 f_p \sqrt{\lambda}}{2 + f_p} \right). \qquad (4)$$

Тут $\sigma_в^M = \sigma_0$ – границя міцності матриці.

На рис. 3–5 наведені розрахункові криві, що відображають зростання міцності чавунів і графітизованих сталей при зміні форми включень від пластинчастої до глобулярної та їх об’ємного вмісту.

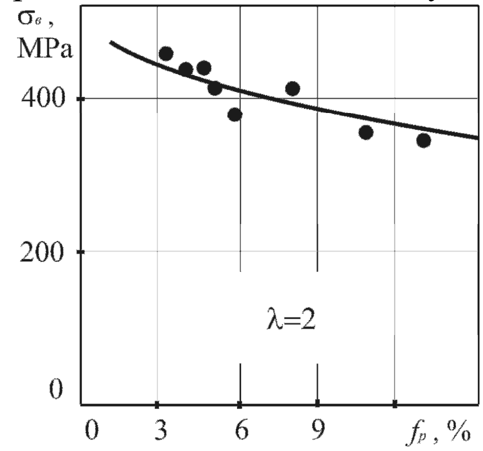


Рис. 3. Залежність границі міцності чавуну і графітизованої сталі від об’ємного вмісту графітових включень

Точками позначені дані експериментальних досліджень [6]. Як видно, теоретичний прогноз зміни міцності залізо-вуглецевих сплавів від зміни форми графітових включень достатньо добре відображає основну тенденцію встановлену експериментально.

На рис. 6 наведені графіки залежності міцності вторинних алюмінієвих сплавів від форми інтерметалідних включень при різних їх концентраціях в матеріалі. Як випливає із наведених результатів при об’ємному вмісті меншому від 3 % міцність алюмінієвого сплаву практично не залежить від присутності домішок довільної форми. За більших об’ємних вмістів включень для покращення міцнісних характеристик необхідно проводити модифікацію форми включень з пластинчастої до глобулярної.

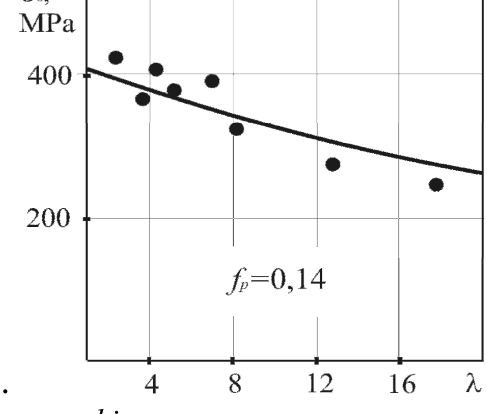


Рис. 4. Вплив форми графітових включень на границю міцності чавуну

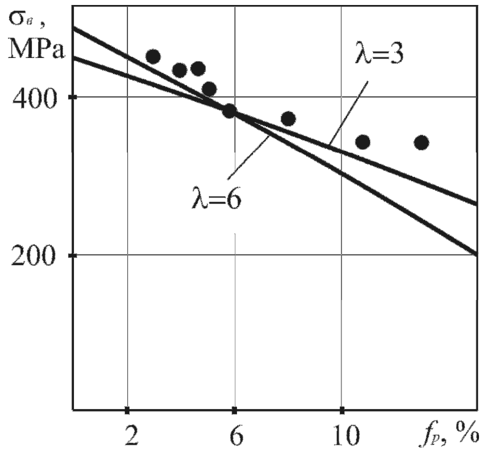


Рис. 5. Залежність границі міцності залізо-вуглецевих сплавів з різними параметрами форми графітових включень від їх об'ємного вмісту

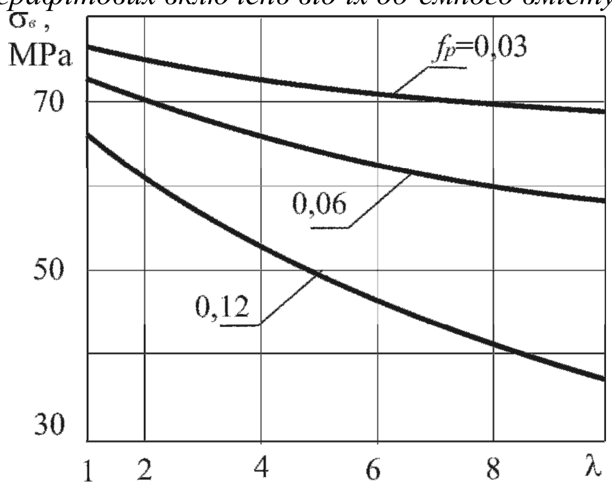


Рис. 6. Залежність границі міцності алюмінієвого сплаву від форми інтерметалідних включень

1. Панасюк В.В, Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. Киев: Наук. думка, 1986. 214 с.

2. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл з дефектами. Львів: Національна академія наук України. Фізико-механічний інститут ім. Г.В Карпенка, 2000. 300 с.

3. Витвицький П.М. Пружнопластична рівновага пластинки з періодичною системою щілин. *Доп. АН УРСР*. Сер. А. 1970. № 6. С. 524–527.

4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1977. 640 с.

5. Ervin E. Underwood Quantitative stereology. Underwood Addison-Wesley Pub. Co.,1970. 274 p.

6. Осташ О.П., Волчок І.П., Колотілкін О.Б., Андрейко І.М., Стадник М.М., Силованюк В.П., Слинько Г.І. Структура та опір руйнуванню залізовуглецевих сплавів. Львів: Національна академія наук України. Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2001. 272 с.

УДК 669.1.017: 51-74

Т.С. Скобло, д-р техн. наук, проф.
О.Ю. Клочко, д-р техн. наук
А.С. Вялін

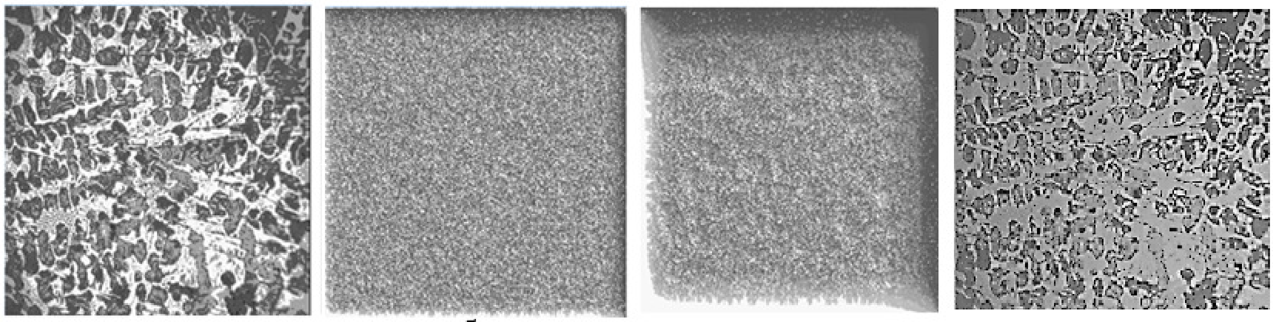
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка
(Харків, Україна, klochko.hntysh@gmail.com)

МОДЕЛЮВАННЯ СТРУКТУРОУТВОРЕННЯ У ГЕТЕРОГЕННИХ СПЛАВАХ

Найважливішим завданням при розробці нових прогресивних технологій є використання матеріалів з необхідним комплексом властивостей, досягти який можливо шляхом реалізації певного структурно-фазового стану об'єкта. Для досягнення поставленої задачі необхідно адекватне розуміння впливу складних процесів структуроутворення на властивості з урахуванням умов експлуатації. Одним із шляхів отримання цієї інформації є попереднє моделювання та експериментальне дослідження такого впливу, в тому числі, на основі побудови моделей при мінливості металографічних структур, які враховують вплив різних зовнішніх факторів, наприклад, технологічних параметрів виробництва, таких як, температурні параметри кристалізації і термообробки. Від точності побудови і аналізу таких моделей залежить достовірність і об'єктивність вирішення завдань контролю і управління технологічними процесами і параметрами виплавки, кристалізації і зміцнення металу для підвищення експлуатаційної стійкості готових виробів.

Для прогнозування структуроутворення в гетерогенних сплавах розглянуті різні підходи до пошуку оптимальних методів побудови комп'ютерних моделей металографічних структур на основі аналітичного та статистичного аналізів (наприклад, рис. 1), які можуть досить надійно враховувати процеси, що протікають при кристалізації і термообробці в умовах розвитку дифузії, а також вплив інших факторів. При побудові таких моделей різними способами аналізували розподіл умовних кольорів таким чином, щоб вони з високою точністю збігалися з розподілом аналогічних фаз металографічного зображення оригінальної структури.

У роботах [1–3] використовували металографічні фотографії мікроструктур валкових високохромистих (16-18%Cr, 2.7-3.0%C) та хромонікелевих (1.5-1.9%Cr, 3.9-4.5%Ni, 2.86-3.77%C) чавунів. Основними структурними складовими легованих чавунів можуть бути ферит, аустеніт і продукти його розпаду, а також карбіди типу Me_3C, $Me_{23}C_6$, Me_7C_3 і Me_xC_y.



а *б* *в* *г*

Рис. 1. Моделі мікроструктури хромонікелевого чавуну (а), отримані при статистичному моделюванні шляхом незалежної колективної перестановки трьох сусідніх фрагментів зображення розміром 2×2 пікселя способом «відштовхування» сусідніх фрагментів з однаковим середнім умовним кольором після 50 (б), 100 (в) і 150 (г) ітерацій

Для отримання гістограм розподілу умовних кольорів реального металографічного зображення, був застосований підхід з використанням розробленої методики оптико-математичного аналізу фаз при числовій обробці фотографій [4]. Ця методика заснована на гідродинамічних аналогіях із застосуванням рівнянь Нав'є-Стокса, для опису формування фаз (за рахунок дисипації енергії в результаті дифузійних процесів, зміни їх щільності [5–7]).

Оцінку проводили, відповідно до розташування обчислюваних значень, на зображенні металографічної структури, цифрованому в формат*.pgm*. Для більшої наочності та зменшення машинного часу оцінки використовували двовимірну модель. Значення лапласіана розраховували відповідно [4], шляхом вирішення рівняння Пуассона – еліптичного диференціального рівняння функції потоку в частинних похідних:

$$L(x, y) \equiv \Delta = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}.$$

Обчислення проводили, використовуючи метод скінченних різниць. Досліджуване зображення розбивали на фрагменти розміром $n \times l$ пікселя, де в кожній точці $C(x,y)$ (x та y – координати розглянутої точки) обчислювали значення лапласіану і дивергенції. Наприклад, для фрагмента розміром 3×3 пікселя $C(x,y)$ в скінчене-різницевому поданні матриця має вигляд:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} c_{i-1, j-1} & c_{i-1, j} & c_{i-1, j+1} \\ c_{i, j-1} & c_{i, j} & c_{i, j+1} \\ c_{i+1, j-1} & c_{i+1, j} & c_{i+1, j+1} \end{pmatrix}$$

В якості елемента матриці було використано піксель зображення $c_{m,n}$, що є кодом умовного кольору при оцифруванні фотографії ($m = i-1,\ i,\ i+1$ – номер рядка, $n = j-1,\ j,\ j+1$ – номер стовпця). Обробку такої матриці виконували шляхом послідовного сканування кожного пікселя, задаючи його як середню точку $c_{i,j}$, що знаходиться всередині фрагмента заданого розміру

(3x3). *D(x,y)* –дивергенція и *L(x,y)* – лапласіан в двовимірному скінченно-різницевому поданні мають вигляд:

$$D(x,y) \equiv \operatorname{div} C(x,y) = \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \approx \frac{\Delta c}{\Delta x} + \frac{\Delta c}{\Delta y} =$$

$$D_{i,j} = c_{i,j-1} + c_{i-1,j} - 2c_{i,j},$$

$$L(x,y) \equiv \Delta C(x,y) = \frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 c}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 c}{\Delta y^2} =$$

$$= L_{i,j} = c_{i,j-1} + c_{i-1,j} + c_{i,j+1} + c_{i+1,j} - 4c_{i,j},$$

де крок за координатами на цифровому зображенні $\Delta x = \Delta y = 1$.

Так, при моделюванні гетерогенної структури хромонікелевого чавуну в результаті оптико-математичного аналізу було виявлено 16 інтервалів умовних кольорів. Результат моделювання був дуже близький до реальної структури. Розроблені алгоритми побудови таких моделей включали визначення текстури на основі формованої анізотропії металу. Отримані моделі загального випадку металографічної структури можуть бути модифіковані з урахуванням різних експериментальних умов, що вносяться змінами технологічних параметрів виробництва і термічної обробки із завданням конкретних граничних умов.

1. Скобло Т.С., Клочко О.Ю., Белкин Е.Л. Методика моделирования структуры металлов с помощью перестановки пикселей изображения. *Вісник ХНТУСГ*. 2011. Вип. 115. С. 10–21.

2. Клочко О.Ю. Математичне моделювання металографічного зображення за допомогою рішення граничних задач для рівняння Лапласа. *Математичне моделювання*. 2018. № 1(38). С. 124–133. https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(38)2018.129040

3. Skoblo T.S., Klochko O.Yu., Belkin E.L., Sidashenko A.I. New Approaches in Study of Inhomogeneity of Heterogeneous Structures, Metallofiz. *Noveishie Tekhnol.* 2018. Vol. 40. No. 2. P. 255–280. https://doi.org/10.15407/mfint.40.02.0255

4. Белкин Е.Л., Скобло Т.С., Клочко О.Ю. Обоснование применения понятий уравнений гидродинамики Навье-Стокса для анализа металлографических изображений. Materialy VII Miedzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji: Europejska nauka XXI powieka. Przemyšl, 2011. Vol. 21. P. 94–96.

5. Roache P.J. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Publisher: Hermosa Pub, 1998. 648 p.

6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542 с.

7. Скобло Т.С., Клочко О.Ю., Сидашенко О.І., Белкин Е.Л. Теоретические и экспериментальные основы прогнозирования структурообразования, свойств высокоуглеродистых легированных сплавов. Монографія. Харьков: Діса плюс, 2019. 278 с.

УДК 539.3:614.872:631.362

Н.В. Сметанкіна[1], д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
В.В. Бредихін[2], канд. техн. наук, доц.
С.Р. Тікунов[2]
В.О. Мезенцев[3]

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, nsmetankina@ukr.net)*
[2]*Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка (Харків, Україна, vadimbr76@ukr.net, stas.tickunov@gmail.com)*
[3]*Приватне акціонерне товариство «Харківський комбікормовий завод» (Харків, Україна, vladmezencev1980@ukr.net)*

РАЦІОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ РЕШІТ СЕПАРАТОРІВ ІЗ ЗАМКНЕНИМ ПЕРЕРІЗОМ ОТВОРУ

На офіційному сайті міжнародного форуму технічного розвитку «Технопром 2013» опубліковано схему шести технологічних укладів. У схемі наведено технологічні уклади, які сформовані раніше, а також укладу, в який людству ще належить вступити. Шостий технологічний уклад в перспективі розвитку з 2010 по 2060 ріки є укладом майбутнього [1]. Перехід на новий уклад є можливим за рахунок різкого зниження енергоємності та матеріаломісткості.

На сьогоднішній день для сепарації сипких сумішей використовуються решета, які являють собою перфоровані плоскі пластини з круглими отворами. Коефіцієнт корисної дії решет з такою геометрією отворів є невеликим за рахунок низького коефіцієнта живого перетину. У той же час, енергоємність машин, на яких встановлені такі пластини, є високою.

У цьому дослідженні пропонується вирішення проблеми зниження енергоємності та матеріаломісткості завдяки використанню перфорованих площин з отворами у формі овалу Кассіні [2]. Застосування таких пластин на всіх етапах сепарації сипких сумішей дозволить знизити енергоємність процесу очищення за рахунок збільшення коефіцієнта живого перетину. Крім того, на виготовлення такої пластини потрібно менша кількість металу, тому матеріаломісткість знижується.

Овал Кассіні – це геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є сталий і дорівнює квадрату деякого числа a. Окремим випадком овалу Кассіні при фокусній відстані рівній $2a$ є лемніската Бернуллі. Сам овал є лемніскатою з двома фокусами.

Овал Кассіні описується рівнянням кривої четвертого порядку

$$\left(x^2+y^2\right)-2c^2\left(x^2-y^2\right)=a^4-c^4, \tag{1}$$

де c – відстань до фокусу.

Якщо перейти до полярної системи координат, то рівняння (1) набуває вигляду

$$r^2(\theta) = c^2\left(\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \left(\lambda^4 - 1\right)}\right), \tag{2}$$

де $\lambda = a/c$ – параметр, який визначає форму овалу Кассіні.

У випадку, коли параметр $\lambda = 5$, форма овалу Кассіні наближається до форми кола. Якщо $\lambda < 1{,}4$ середні точки овалу на осі Oy зближуються (талія шийки кривої зменшується). Коли $\lambda = 1\,(a = c)$ одержуємо лемніскату Бернулі. При $\lambda < 1$ овал Кассіні розпадається на дві замкнені симетрично розміщені криві.

При проектуванні форми отвору решета у вигляді овалу Кассіні важливо, щоб внутрішня форма отвору не мала кутових точок, які можуть призвести до забивання отворів пластини. Таке можливо, якщо значення параметрів отворів відповідають нерівностям

$$1 < \lambda < \sqrt{2}\,,\ c < a < \sqrt{2}c\,.$$

Оптимальне значення λ дорівнює 1,05 (λ=1,05), що повністю відповідає відсутності кутових точок периметру.

У ПрАТ «Харківський комбікормовий завод» проведено практичне дослідження роботи решіт з отворами вигляді овалу Кассіні [3], яке підтвердило високу продуктивність очищення зернових сумішей порівняно з решетами з круглими отворами.

1. Nefiodow L., Nefiodow S. The sixth Kondratieff. The new long wave in the global economy. Rhein-Sieg-Verlag: Sankt Augustin, 2014. 238 p.

2. Иванов В.Н. Овал Кассини, лемниската и лемнискатные поверхности. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 3–9.

3. Пат. № 133625 Україна, МПК (2006.01) B07B 1/46. Решето для очистки зернового вороху з отворами у вигляді овалу Кассіні / винахідники: Бредихін В.В., Сметанкіна Н.В., Мезенцев В.О., Черняєв О.О., Тікунов С.Р.; власники: Мезенцев В.О., Бредихін В.В., Сметанкіна Н.В., Черняєв О.О., Тікунов С.Р. № u 2018 12181; заявл. 10.12.2018; опубл. 10.04.2019, Бюл. № 7. 4 с.

УДК 539.3

Н.В. Сметанкіна, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
О.В. Постний

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, nsmetankina@ukr.net)

РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Пропонується метод розв’язання задачі статичної термопружності шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану.

Задана оболонка складної форми з довільними граничними умовами розширюється до оболонки з канонічною формою [1]. Найпростіший розв’язок задачі в аналітичному вигляді можна отримати, коли цю роль виконує шарнірно оперта оболонка прямокутної форми у плані з тією ж композицією шарів. Умови навантаження допоміжної конструкції збігаються з умовами навантаження вихідної конструкції. Для забезпечення виконання заданих граничних умов до допоміжної конструкції додаються додаткові компенсуючі навантаження, що розподілені вздовж контуру вихідної конструкції. Інтенсивності компенсуючих навантажень визначаються з системи інтегральних рівнянь, в основі якої лежать вихідні граничні умови. Розв’язок системи одержано шляхом розвинення шуканих функцій у тригонометричні ряди у допоміжній області і вздовж контуру вихідної конструкції та подальшого розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розвинень. Після обчислення інтенсивностей компенсуючих навантажень визначаються переміщення та напруження у шарах вихідної конструкції.

Деформації шарів оболонок описуються у рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву й обтиснення по товщині у кожному шарі. Рівняння термопружної рівноваги та граничні умови одержані з принципу можливих переміщень.

Досліджено термонапружений стан шаруватих оболонок під впливом температурних полів, одержаних з розв’язку задачі теплопровідності [2]. Результати розрахунку добре узгоджуються з даними, одержаними методом скінченних елементів та інтегрально-різницевим методом. Запропонований підхід буде застосований при проектуванні систем обігріву шаруватого скління різних транспортних засобів.

1. Сметанкіна Н.В. Коливання шаруватих ортотропних оболонок складної форми при ударному навантаженні. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2016. № 2 (82). С. 77–84.

2. Smetankina N., Postnyi O. Nonstationary heat conduction in multilayer glazing subjected to distributed sources. *Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochromie Srodowiska*. 2020. Vol. 10. No. 2. P. 28–31. https://doi.org/10.35784/iapgos.930

УДК 539.3

О.О. Стрельнікова[1], д-р техн. наук, проф.
А.М. Тонконоженко[2]
М.Л. Мироненко[1]
Д.В. Крютченко[1]

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, estrel@ipmach.kharkov.ua, mariamyronenko87@gmail.com, wollydenis@gmail.com)*
[2]*Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» (Дніпро, Україна, stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net)*

МЕТОДИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ ПРИ РІЗНИХ РІВНЯХ ЗАПОВНЕННЯ

Плескання рідини (особливо вибухонебезпечних та отруйних речовин) можуть призвести до негативних наслідків при експлуатації оболонкових конструкцій (паливних баків ракетоносіїв, резервуарів та сховищ для збереження рідких та зріджених хімічних речовин тощо). Ця проблема є загальною для баків автомобілів, літаків, ракетоносіїв, кораблів та танкерів та призводить до втрати стійкості, порушення при маневруванні і навіть руйнування ракетоносіїв; особливо негативних наслідків викликає плескання рідини в резервуарах з нафтою, тощо. Тому важливо виконувати аналіз руху резервуарів з врахуванням динамічних складових зусиль, викликаних плесканнями при різноманітних маневрах. Ось чому дослідження явищ плескань в резервуарах та паливних баках є актуальними.

Зменшення негативного впливу від плескань можливо за допомогою демпферів та інших пристроїв, ефективність яких в більшості випадків оцінюється після проведення дорогих натурних експериментів, інколи навіть нездійснених за різних обставин. Таким чином, комп'ютерний експеримент на основі сучасних обчислювальних методів стає головним засобом при проектуванні відповідальних конструктивних елементів з урахуванням їх впливу на динамічну поведінку оболонкових систем з рідиною.

Аналіз комп'ютерних програм показує нехтування більшістю з них ефектами плескань рідини при розрахунках оболонкових конструкцій на міцність. Сучасні програмні комплекси мають в основі методи скінченних елементів, що призводить до великої вимірності вирішуваних задач, оскільки дискретизації піддається як пружне тіло, так і весь об'єм рідини. Застосування методу граничних інтегральних рівнянь дозволяє дискретизувати лише границі.

На сьогодні не існує високоточних та надійних методів та комп'ютерних програм для проведення аналізу сумісної взаємодії пружності стінок та плескань рідини в баках. Дослідження [1–6] показують якісно нові результати найнижчих частот коливань у системі «оболонка-рідина» при сумісному врахуванні пружності стінок та плескань рідини у резервуарі. Динамічна поведінка оболонкових конструкцій з рідиною матиме найбільш суттєві зміни при врахуванні впливу плаваючих кришок, демпферів, пружності днища або стінок резервуару. Тому створення комп'ютерної технології та розробка нових математичних моделей і методів для дослідження і прогнозування експлуатаційного стану відповідальних оболонкових систем, заповнених рідиною, дозволить ефективно вирішувати задачі моделювання явищ, що виникають в оболонкових конструкціях з відсіками, частково заповненими рідиною, при різних умовах експлуатації та в широкому діапазоні конструктивних параметрів і зовнішніх впливів. Головною метою є розробка ефективних сучасних методів і програмного комплексу для розрахунку на міцність оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, з урахуванням плескань, явищ гідропружності, можливості зміни рівня заповнювача, перевантажень та мікрогравітації.

В якості основи для створення математичної моделі використовувались класичний метод граничних елементів та метод граничних елементів з підобластями, а також методи, розроблені авторами [1–9]. Методологію засновано на сумісному використанні редукованих методів скінченних (МСЕ) і граничних елементів (МГЕ) та аналітичних методів. Використано технологію, засновану на поєднанні методів граничних та скінченних елементів для дослідження вільних та вимушених коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

Новизна запропонованого методу полягає у можливості дослідження як пружних так і жорстких перегородок в заповнених рідиною резервуарах у формі оболонок обертання з довільним профілем меридіану. Метод дозволяє з’ясовувати залежності частот коливань від рівню заповнення при різних значеннях прискорення вільного падіння, з урахуванням різних значень числа Бонда, що відображає різні рівні поверхневого натягу. Комп’ютерне моделювання буде здійснюватись як для вибору оптимального місця розташування перегородки так і для визначення її розмірів.

Створено уточнену математичну модель для визначення частот та форм вільних коливань резервуару, частково заповненого рідиною, за наявністю внутрішніх перегородок та плавучої кришки.

Розв’язання проблеми вільних коливань пружної оболонки обертання з урахуванням плескань рідини вимагає побудови трьох систем базисних функцій, а саме визначення форм коливань рідини в жорсткому резервуарі під дією сили тяжіння, форм коливань незаповненої оболонки, власних форм коливань пружної оболонки без врахування сили тяжіння. Таким чином, розв’язання даної задачі включає такі стадії. На першому етапі визначаються частоти і форми коливань рідини в резервуарі в припущенні жорсткості стінок. По-друге, обчислюються частоти і форми власних коливань незаповненого пружного баку. Використано теорію оболонок Кіргхофа-Лява внаслідок того, що розглядаються тонкі оболонки. Але може буде використана і будь-яка інша теорія. На третьому етапі визначаються частоти і форми коливань пружного резервуару з рідиною без урахування явищ плескань. Отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для дослідження коливань оболонок у зв’язаному формулюванні. Чисельний розв’язок цих рівнянь буде здійснено з застосуванням методів скінченних та граничних елементів і методів Рунге-Кутта.

Для розрахунків на міцність, вибухові або імпульсні навантаження використано поєднання методів одновимірних граничних і скінченних елементів, що дозволить істотно зменшити обчислювальні витрати.

Розроблено нову методику досліджень впливу внутрішніх перегородок на рівень плескань вільної поверхні рідини при вибухових та імпульсних впливах. Це дає можливість визначати місця розташування внутрішніх перегородок та їх розміри, які б приводили до найбільш суттєвого зменшення рівня плескань рідини, з метою запобігання виплеску небезпечної та легкозаймистої рідини.

Плескання рідини в контейнерах при вибухових впливах мають суттєво нелінійний характер. Тому запропоновано методику визначення форми вільної поверхні рідини та її змінювання в процесі дії динамічних імпульсних навантажень в нелінійному формулюванні.

Метод, що пропонується, має значні переваги, оскільки він дозволяє здійснити більш точний та кваліфікований аналіз коливань паливних баків, врахувати вплив пружних деформацій стінок баків та зміну протягом польоту рівня заповнення баків, форми вільної поверхні, наявність пружних та жорстких внутрішніх перегородок, зміну прискорення сили тяжіння. Це дає змогу регулювати розміри та місця розташування перегородок з метою зниження рівня небезпеки при використанні вибухонебезпечних та отруйних речовин шляхом комп’ютерного експерименту.

Розроблення ефективного методу та комп’ютерної технології для числової симуляції міцності та коливань резервуарів з перегородками різної форми та з можливістю їх довільного розташування в баках при різних умовах експлуатації дає змогу регулювати розміри та місця розташування перегородок з метою зниження рівня небезпеки при використанні вибухонебезпечних та отруйних речовин шляхом комп’ютерного експерименту. Це дозволить розв’язувати важливі прикладні задачі при використанні тонкостінних елементів конструкцій не лише в аерокосмічній техніці, а і для зниження рівня аварійного ризику і екологічних наслідків при експлуатації потенційно небезпечних оболонкових конструкцій, заповнених агресивною рідиною, в умовах критичних впливів та форс-мажорних обставин (аварійні ситуації при експлуатації, транспортуванні, катастрофах, землетрусах, терористичних актах та ін.).

1. Gnitko V.I., Degtyariov K.G., Naumenko V.V., Strelnikova E.A. Coupled BEM and FEM Analysis of Fluid-structure Interaction in Dual Compartment Tanks. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. No. 6. P. 976–988. https://doi.org/10.2495/CMEM-V6-N6-976-988

2. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22 (4). P. 867–881. https://doi.org/10.1515/ijame-2017-0056

3. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *International Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. No. 1. P. 14–27.

4. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P. 3–13. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1

5. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. P. 78–87. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008

6. Gnitko V.I., Degtyariov K.G., Karaiev A.O., Strelnikova E.A. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. *WIT Trans. Eng. Sci.* 2019. Vol. 126. P. 189–200. https://doi.org/10.2495/BE420171

7. Choudhary N. Liquid sloshing in a circular cylindrical container containing a two-layer fluid. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 8. P. 240–248. https://doi.org/10.1007/s12572-016-0176-z

8. Choudhary N., Bora S.N. Linear sloshing in a vertical circular cylinder with curved bottom in the presence of a rigid baffle. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*. 2014. Vol. 6(4). P. 29–45. https://doi.org/10.5373/jaram.1982.022514

9. Choudhary S.N. Bora Linear sloshing frequencies in the annular region of a circular cylindrical container in presence of baffle. *Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences*. 2017. Vol. 42. P. 805–815. https://doi.org/10.1007/s12046-017-0642-8

УДК 539.01

И.А. Токмакова

Национальный технический институт «Харьковский политехнический унивеситет»
(Харьков, Украина, tokmakova.irina58@gmail.com)

КОНЕЧНО-ШАГОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ГИРОТЕОДОЛИТА

Рассматривается задача ориентации твёрдого тела с помощью гиротеодолита на торсионном подвесе. Такие гиротеодолиты имеют широкое применение в современной технике. При их работе возникает задача идентификации положения равновесия. Она может решаться многими способами. Предложен метод идентификации равновесного положения гиротеодолита, который имеет ряд преимуществ перед другими известными классическими методами (методом наименьших квадратов, фильтром Калмана и другими).

В настоящее время большинство задач идентификации параметров систем ориентации по результатам измерений решаются по алгоритмам, в основе которых лежат какие-либо численные методы. Разработка конкурентного численного метода должна обеспечить для соответствующего алгоритма выполнение ряда требований, которые вытекают из особенностей практической задачи. Особенно существенно выполнение следующих требований при идентификации равновесного положения гиротеодолита:

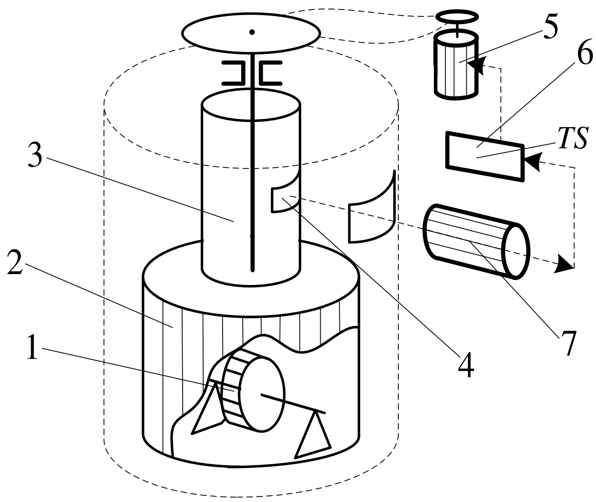


Рис. 1. Модель гиротеодолита

– обеспечение точности идентификации;
– наименьший объём измерений;
– быстродействие задачи;
– устойчивость вычислительного процесса;
– простота алгоритма;
– малая чувствительность к помехам.

Гиротеодолит предназначен для определения азимутов направлений на земной поверхности и конструктивно представляет собой угломерный инструмент, в котором объединены гироскоп, который является в приборе датчиком направления истинного меридиана, и теодолит [1].

С задачей определения азимута встречаются в разных областях: в навигации летательных аппаратов, кораблей, подводных лодок, при проведении топогеодезических работ, прокладке тоннелей, шахт и т.д. Для выполнения этой задачи широко применяются гироскопические приборы азимутального ориентирования, имеющие по сравнению с астрономическими, магнитными и другими методами ряд существенных достоинств: способность работать в любое время года и суток, в закрытых объектах и помещениях в том числе [2].

Большинство существующих моделей гиротеодолитов имеет в качестве чувствительного элемента, непосредственно определяющего плоскость истинного меридиана, маятниковый гироскоп с торсионным подвесом и автоматической системой слежения (рис. 1).

Ротор гидромотора 1 заключён в кожух 2, который подвешен на гибкой ленте – торсионе 3. Чтобы уменьшить вредный момент, обусловленный упругими моментами торсиона (закруткой торсиона), вводят следящую систему или систему разгрузки торсиона, который поворачивает элемент крепления верхнего конца торсиона вслед за движением чувствительного элемента. Следящая система состоит из зеркала 4, датчика рассогласования 7, усилителя 6 и привода 5, соединённого с элементом крепления верхнего конца торсиона 3 [2].

При отклонении главной оси от плоскости горизонта гироскоп прецессирует с такой же угловой скоростью, с которой вращается плоскость меридиана. Однако, в действительности имеют место колебания главной оси гироскопа относительно плоскости меридиана, происхождение которых рассматривается ниже. Допустим, что главная ось гироскопа в начальный момент времени находится в плоскости горизонта на экваторе и отклонена от плоскости меридиана на угол α_0.

Траектория движения оси гироскопа имеет вид эллипса при отсутствии других моментов, кроме маятникового. В действительности из-за неизбежных моментов (трения в подвесе и от закрутки торсиона) колебания оси гироскопа с течением времени затухают, однако процессы затухания продолжаются довольно долго. В связи с этим для быстрого определения истинного меридиана необходимо иметь алгоритм вычислений, позволяющий при максимальном объёме измерений угла α в различные моменты времени решать задачу с заданной точностью и в короткий срок.

Движение главной оси гиротеодолита в предположении отсутствия сухого трения приближённо описывается уравнением [3]:

$$A\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + HU\cos\varphi\sin\varphi = M\,, \qquad (1)$$

где $A\ddot{\alpha}$ – инерциальный момент; $D\dot{\alpha}$ – демпфирующий момент; $HU\cos\varphi\sin\varphi$ – направляющий момент; M – момент от прочих неучтённых сил; U – величина скорости движения гиротеодолита.

Уравнение (1) можно трактовать как частный случай математической модели системы, которую в общем случае можно назвать системой автоматического регулирования (САР).

Одной из актуальных задач идентификации является задача определения параметров системы по результатам измерений выходного сигнала – это определение истинного меридиана или равновесного положения угла α.

В тех случаях, когда к решению задачи предъявляются жёсткие требования по объёму запоминаемой информации и времени обработки, применение классических методов (как, например, фильтра Калмана и др.) не может быть оправдано. В этих случаях может быть успешно применён предлагаемый в работе конечно-шаговый метод, особенность которого состоит в том, что решение реализуется за конечное наперёд заданное число вычислений при отсутствии какой-либо итерационной процедуры. При этом математически такое решение точное.

Следует отметить, что соответствующий алгоритм обеспечивает с заданной точностью решение задачи идентификации реальной САР в случае, когда её математическая модель несколько отличается от реальной.

Решение уравнения (1) и ему подобных можно представить как сумму постоянной R и затухающих синусоид в виде:

$$\alpha(t) = R + \sum_{k=1}^{N} A'_k R^{\beta_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k), \tag{2}$$

где числа β_k могут быть положительными или равными нулю [3].

Поскольку для гиротеодолита и некоторых САР постоянная R является основным идентифицирующим объектом, то задачу расчёта R с высокой точностью за ограниченный отрезок времени будем называть основной задачей. Задачу идентификации параметра A'_k, β_k, ω_k, ψ_k будем называть неосновной. Приведенный в работе алгоритм обеспечивает решение всех этих задач. Однако, главный упор при обосновании метода делается на основную задачу с указанием пути решения неосновных. Назовём предлагаемый способ решения методом равноотстоящих точек.

Для решения основной задачи, то есть для определения постоянной R в выражении (2), необходимо располагать достаточным числом N_1 измерений $\alpha(t_j)$. Число N_1 зависит от количества подлежащих определению неизвестных параметров в (2). Будем полагать, что измерения снимаются через равные промежутки времени, тогда

$$t_j = t_0 + j\Delta t, \quad (j = 0, 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

где t_0 и t_j – время начального и текущего измерения; Δt – заданная дискретность получения измерений; j – номер измерения.

На интервале времени измерения от t_0 до t_N выберем условную среднюю точку:

$$t_c = \frac{t_0 + t_p}{2} = t_0 + p'\Delta t, \tag{4}$$

где $p = 2p' < N_1$. Конкретные значения p' и N_1 определены в [4].

В дальнейшем будем оперировать со значениями t_j и N_1, симметричными относительно условной средней точки.

Из (3) и (4) следует:

$$t_c = \frac{t_j + t_{p-j}}{2}; \; t_{p-j} = 2t_c - t_j,$$

поэтому изложенный ниже способ решения основной задачи можно называть методом равноотстоящих точек:

моменты времени t_{p-j} и t_j равно отстоят от t_c.

Предложенная математическая модель метода позволяет определить величину R

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i Q_i + Q_0}{2^N \left(\sum_{i=1}^{N} z_i + 1 \right)}. \tag{5}$$

Величины z определяются при реализации математической модели [4]. Этим и заканчивается решение основной задачи методом равноотстоящих точек.

Очевидно, что для решения основной задачи необходимо иметь измерения $\alpha(t)$ в $3N+2$ точках, где $N = 2n_1 + n_2$, то есть число измерений должно быть больше числа неизвестных величин в аналитической форме измерений (2).

Достаточное число измерений определяется равенством $N_1 = 3N + 2$, а измерение, соответствующее условной средней точке удовлетворяет условию $p' \geq N + 2$ [4].

Желающие могут более подробно ознакомиться с этой задачей и её математической моделью в сборнике: Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. № 1 (1355) 2020.

1. Данилин В.П. Гироскопические приборы. Москва: Высшая школа, 1965. 539 с.

2. Каргу Л.И. Гироскопические приборы и системы: учебник для вузов. Ленинград: Судостроение, 1988. 240 с.

3. Пельпор Д.С. Гироскопические системы. Гироскопические приборы и системы. Москва: Высшая школа, 1988. 424 с.

4. Tokmakova I.A. Final step-by-step method for determining the equilibrium state of the gyrotheodolite. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2020. № 1 (1355). С. 96–105.

УДК 539.3

О.О. Усатова[1]
О.О. Стрельнікова[1,2], д-р техн. наук, проф.

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України*
[1,2]*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна*
(Харків, Україна, elena15@gmx.com)

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ В ТРУБКАХ ТА НАНОТРУБКАХ

В останні роки в гідромеханіці набуває розвитку новий напрямок, пов'язаний з поширеним застосуванням нанотехнологій. Актуальність моделювання потоку рідини через мікро- і нанотрубки підтверджують результати багатьох експериментів, які проводились упродовж двох десятиріч. Рух рідини по трубках є явищем, що дуже поширене в природі та техніці. У роботі розглянуто рух в’язкої нестисливої рідини з постійними коефіцієнтами. За припущеннями наявності течії Хагена–Пуазейля в нанотрубці побудовані рівняння для визначення частот коливань трубки з рідиною, що дає змогу дослідити стійкість руху.

Розглянемо течію Хагена–Пуазейля в трубі. Геометрія задачі і система координат для течії Хагена–Пуазейля наведені на рис. 1. Відомо, що рівняння гідродинаміки є нелінійним, навіть при постійних коефіцієнтах, де швидкість в інерційних членах рівняння входить квадратично, але точного рішення цього рівняння фактично немає. Тому потрібно знайти рішення рівняння гідродинаміки, яке обумовлено тим, що нелінійні члени є набором базових течій, які присутні в технологічних процесах [1]:

$$G = \int_0^R U(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}, \tag{1}$$

де G – об’ємна витрата рідини, U – швидкість, R – радіус труби, L – довжина труби, μ – в’язкість, Δp – різниця тиску.

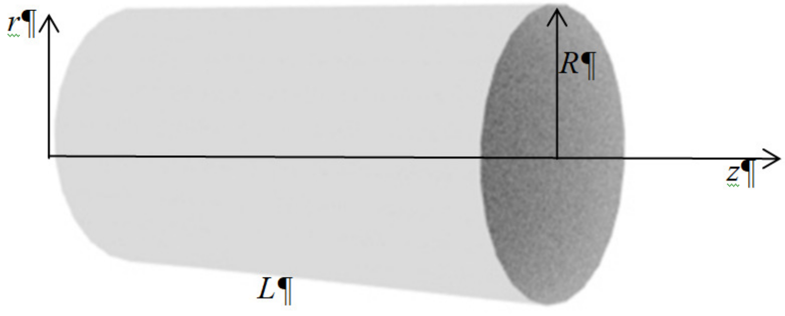


Рис. 1. Геометрія задачі і система координат для течії Хагена–Пуазейля

Також використовуючи формулу Хагена–Пуазейля, можна знайти середню по перерізу швидкість у трубі:

$$U_{cep} = \frac{G}{\pi r^2}. \tag{2}$$

У даній геометрії представлена слоїста течія з єдиною відмінною від нуля *z*- компонентою швидкості:

$$v_z \equiv U \neq 0. \tag{3}$$

Характерна ознака слоїстої течії – наявність лише однієї, відмінної від нуля компоненти швидкості. Це означає, що всі частинки рідини рухаються за траєкторією, які повторюють одну з координатних ліній [2, 3].

Рівняння руху оболонки за відсутністю зовнішніх збурень, може бути описано на основі принципу Остроградського–Гамільтона:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Pi - \delta T)\, dt = 0, \tag{4}$$

де П, Т – потенційна та кінетична енергії [4, 5].

Дослідження потоку рідини через мікро- і нанотрубки представляє фундаментальний інтерес для багатьох біологічних і технічних пристроїв і систем.

1. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.

2. Байков В.И., Павлюкевич Н. В., Федотов А.К., Шнип А.И. Минск: Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2014. 370 с.

3. Reza Bahaadini, Ali Reza Saidi, Mohammad Hosseini. Flow-induced vibration and stability analysis of carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam theory. *Journal of Vibration and Control*. 2019. Vol. 25. Iss. 1. P. 203–218. https://doi.org/10.1177/1077546318774242

4. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. Т. 9. № 1. С. 105–118.

5. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers. *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology.* 2015. Vol. 1. No. 1. P. 45–50.

УДК 539.371/372 + 669.788+660.234

Е.П. Фельдман[1], д-р ф.-м. наук, проф.
О.М. Любименко[2], канд. ф.-м. наук, доц.
О.А. Штепа[2], канд. техн. наук, доц.

[1] *Інститут фізики гірничих процесів НАН України*
(Дніпро, Україна, edward.feldman.40@gmail.com)
[2] *ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»*
(Покровськ, Україна, e.n.lyubimenko@gmail.com)

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕТИКИ ВИГИНУ ПЛАСТИНИ В ВОДНЕВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Останнім часом у зв'язку з розвитком машинобудування та широкого застосування комп'ютерних технологій до процесів, які відбуваються з конструкційними матеріалами під час їх роботи, набуває актуальності вивчення процесів взаємодії водню з металами при створенні та експлуатації водневих мембран. Для вивчення кінетики процесів проникнення водню в метал необхідно створити модель, у якій треба встановити час протікання процесу проникнення водню в залежності від умов експлуатації, тиску водню, температури, та самої товщини мембрани.

У роботі експериментально досліджували зразки у вигляді консолей з паладію, на який за допомогою електролітичного напилення наносили нано-шар міді, який не пропускає водень. Було проведено експеримент з вимірювання вигину-розгинання пластини в водневo-вакуумній установці при насиченні та дегазації воднем, запропоновано теоретичне обґрунтування і зроблено асимптотичний аналіз. Виконано комп'ютерне моделювання процесу вигину пластини з розподілом концентрації водню по ній [1]. Отримано тимчасові залежності формо змінення пластини: рис 1, а – експериментальні, рис. 1, б – комп'ютерне моделювання.

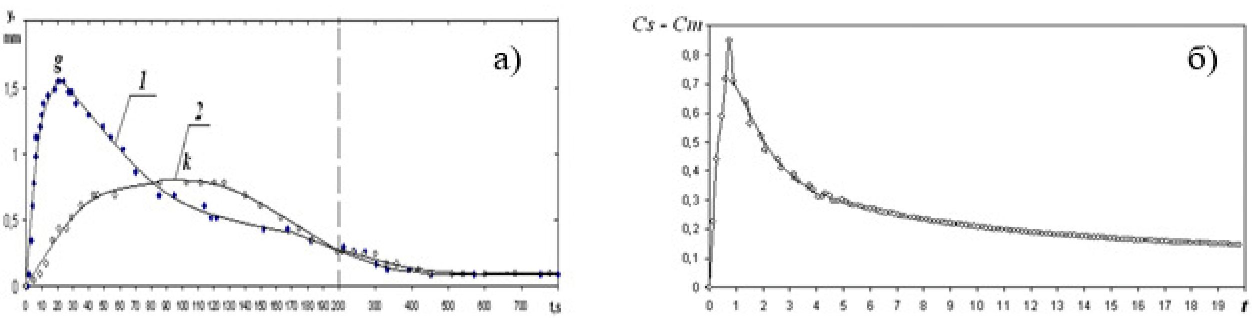


Рис. 1. а) при 180 °C, при збільшенні тиску до 0,0145 MPa за 2,7 s (1) і за 98 s (2); б) схема графіку зміни концентрації та вигину для умов: $C_s(t)$– $C_e(t)$ $p<<1$, тобто $t_s<<t_d$, де k=6, dt= 0,15, dk = 20, C_e=1, p= 0,25

1. Feldman E.P, Lyubimenko E.N., Gumennyk K.V. Kinetics of permeation and absorption of hydrogen in palladium during bending and unbending of a palladium cantilever. *Journal of Applied Physics.* 2020. Vol. 127. Iss. 24. https://doi.org/10.1063/5.0011826

УДК 539.4: 629.76

В.Н. Харченко
Д.В. Клименко, канд. техн. наук
В.Ю. Кожарин

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»
(Днепр, Украина, kharchenkovm@science.yuzhnoye.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТАБИЛИЗАТОРА РАКЕТЫ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Для стабилизации полета ракеты часто используют ее закручивание при старте с помощью винтообразных направляющих и в полете с помощью стабилизатора, имеющего лопасти, установленные под углом к оси ракеты. В полете на стабилизатор действует комплекс взаимосвязанных аэродинамических и инерционных нагрузок. Выбор геометрических и механических параметров существенно влияет на нагруженность стабилизатора и его механическое состояние и в конечном итоге на эффективность всей ракеты.

Актуальным является разработка методологии моделирования механического состояния стабилизатора ракеты с учетом комплексного нагружения и всех факторов, влияющих на нелинейность задачи.

В данной работе предложена методология математического моделирования механического состояния стабилизатора ракеты в полете с помощью расчетного комплекса конечно-элементного анализа ANSYS в нелинейной квазистатической постановке. Рассматривается типовая конструкция стабилизатора в полетном положении, состоящая из цилиндрического корпуса и четырех лопастей, установленных на корпусе под заданным углом с помощью продольных осей. Геометрическая модель стабилизатора строилась путем импорта в ANSYS 3D модели, построенной в Autodesk Inventor, и соответствующей доработки ее в препроцессоре ANSYS. При построении расчетной модели стабилизатора использовались упруго-пластические модели материалов. Конечно-элементная сетка строилась с помощью твердотельных конечных элементов со сгущением в зонах предполагаемых концентраторов. Контактное воздействие между элементами конструкции моделировалось с помощью конечных элементов типа «поверхность – поверхность». К модели прикладывались граничные условия в перемещениях, имитирующие закрепление стабилизатора на ракете. К расчетной модели прикладывались сборочные нагрузки (усилия пружин, устанавливающее лопасти в рабочее положение), аэродинамические (давление набегающего потока на рабочие поверхности лопастей) и инерционные (продольное ускорение и угловая скорость вращения вокруг оси ракеты) нагрузки.

Проведен расчет напряженно-деформированного состояния стабилизатора с учетом больших перемещений, исследован вклад различных видов нагружения на параметры напряженно-деформированного состояния стабилизатора.

Предложенная методология позволила выбрать на этапе проектирования конструкцию стабилизатора с оптимальными параметрами.

УДК 519.85

А.М. Чугай[1], д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
Т.Є. Романова[1], д-р техн. наук, проф.
О.В. Панкратов[1], д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
С.Б. Шеховцов[2], канд. техн. наук, доц.

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, chugay.andrey80@gmail.com, tarom27@yahoo.com, pankratov2001@yahoo.com)*
[2]*Харківський національний університет внутрішніх справ (Харків, Україна, ep109@ukr.net)*

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Задачі геометричного проектування (Packing, Cutting, Layout, Covering) стають дуже затребуваними через те, що заміна натурних експериментів комп'ютерним моделюванням дозволяє суттєво заощаджувати матеріальні ресурси та час. При розв'язанні задач даного класу виконується обробка великого об'єму складної геометричної, аналітичної та логічної інформації, тому скорочення часу обчислень із застосуванням сучасного програмного забезпечення є актуальною проблемою.

Різноманітність функцій цілі, форм об'єктів і контейнерів, геометричних та механічних обмежень, створюють множину оптимізаційних задач геометричного проектування, що покриває широкий спектр актуальних наукових та прикладних задач, що виникають у машинобудуванні, матеріалознавстві, сучасній біології, нанотехнологіях, робототехніці, системах розпізнавання образів, адитивних технологіях та багатьох інших галузях.

Багато публікацій присвячено розробці засобів, моделей і методів оптимізації розміщення геометричних об'єктів (див., наприклад, [1–3]).

У рамках теорії геометричного проектування для математичного моделювання взаємодій геометричних 2D&3D об'єктів застосовується метод phi-функцій [4], який дозволяє будувати математичні моделі у вигляді задач математичного програмування [4–15].

Методи пошуку локальних екстремумів, запропоновані в роботах [6–15], ґрунтуються на стратегії мультістарту та алгоритм декомпозиції, який дозволяє звести основну задачу великої вимірності (large-scale problem) до послідовності підзадач меншої вимірності та зі значно меншою кількістю нелінійних нерівностей.

Для формування кожної з підзадач генерується простір розв'язків. В залежності від обраної величини параметру декомпозиції така послідовність підзадач може бути досить великою, а витрати машинного часу на генерацію та перехід між підзадачами є також суттєвими. Це обумовлено тим, що для того, щоб сформувати кожну підзадачу необхідно виконати підстановку отриманої початкової точки в систему нерівностей, яка описує основну задачу, та виділити із неї нову підсистему нерівностей за допомогою побудови дерева розв'язків.

Оскільки система нерівностей, що описує область припустимих розв'язків основної задачі, задається досить великою кількістю нерівностей, і кожна з таких нерівностей є нелінійною, то на обчислення таких нерівностей та формування із них нової підсистеми, що буде задавати область припустимих розв'язків основної задачі, витрачається час, оцінка якого дорівнює $O(N^2)$.

Розв'язок описаної проблеми часових витрат прийнято було шукати у застосуванні сучасних технологій паралельних обчислень на системах із загальною пам'яттю.

Просте перенесення послідовної програми на систему з багатьма процесорами без її суттєвої переробки, як правило, не призводить до прискорення обчислень. Слід відзначити, що зусилля, витрачені на переробку задачі з послідовного алгоритму у паралельний, в значній мірі залежать від типу задачі.

Для того, щоб побудувати ефективний паралельний алгоритм проведені наступні етапи аналізу задачі: декомпозиція основної задачі на відносно незалежні частини (підзадачі), які можна буде виконувати паралельно; виявлення інформаційних залежностей між виділеними підзадачами; масштабування підзадач; балансування навантаження для кожного процесора.

Задача переробки алгоритму обчислень зводиться до розбиття масиву вихідних даних на фрагменти, обробка яких ведеться незалежно на різних процесорах. Здатність алгоритму до розпаралелювання потенційно пов'язана з однією з двох (або одночасно з обома) внутрішніх властивостей, які характеризують як паралелізм задач, так і паралелізм даних. Якщо алгоритм грунтується на паралелізмі задач, то задача розбивається на ряд відносно самостійних підзадач, кожна з яких завантажується в окремий процесор. Кожна підзадача реалізується незалежно, але використовує спільні дані або обмінюється результатами своєї роботи з іншими підзадачами. Для реалізації такого алгоритму на багатопроцесорній системі необхідно виявляти незалежні підзадачі, які можуть виконуватися паралельно.

При наявності в алгоритмі властивості паралелізму даних, одна операція може виконуватися відразу над всіма елементами масиву даних. В цьому випадку різні фрагменти масиву можуть оброблятися незалежно на різних процесорах.

Для того, щоб повною мірою використовувати структурні властивості алгоритму, необхідно, перш за все виявити, до якого типу він відноситься.

Аналіз алгоритму формування підзадач при пошуку локального екстремуму задачі показав, що він підтримує як паралелізм задач, так і паралелізм даних.

Розглянемо основний принцип розпаралелювання алгоритму пошуку локального екстремуму задачі. Можливість розпаралелювання алгоритму ґрунтується на тому, що phi-функції складених об'єктів є максимінними функціями, що дозволяє представити область припустимих розв'язків основної задачі у вигляді об'єднання підобластей, кожна з яких описується системою диференційованих функцій.

Алгоритм формування підсистеми, що задає область допустимих розв'язків, можна представити у вигляді графа у ярусно-паралельній формі. Важливим є той факт, що операції, яким відповідають вершини одного ярусу, не залежать одна від іншої (не перебувають у відношенні зв'язку), і тому можлива паралельна реалізація алгоритму, в якій вони можуть бути виконані паралельно.

Результати проведених числових експериментів показали, що застосування технологій паралельних обчислень дозволило скороти витрати часу на розв'язання задач в середньому до 50 %.

На рис.1 наведено діаграму, яка відображає витрати часу на пошук розв'язку задачі оптимізації упаковки 3D об'єктів із застосуванням та без застосування технологій паралельних обчислень.

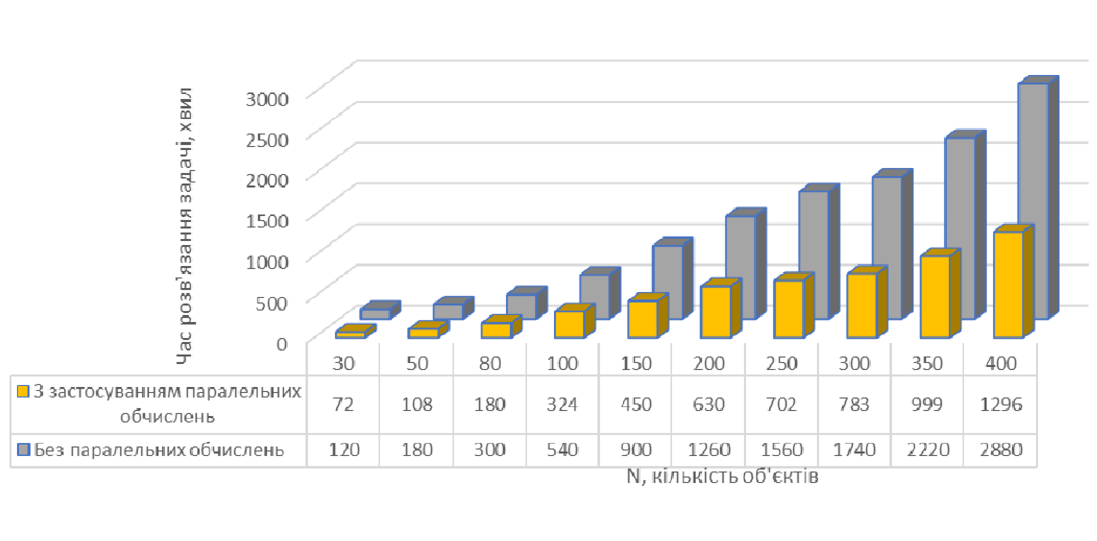


Рис. 1. Витрати часу на розв'язання задач із застосуванням технологій паралельних обчислень та без застосування

Як видно з діаграми, ефективність застосування технологій паралельних обчислень стає більшою зі зростанням кількості об'єктів. Це пов'язано з тим, що при малій кількості об'єктів витрати на обслуговування паралельних обчислень зменшують ефективність їх застосування.

Розроблений в роботі підхід до застосування технологій паралельних обчислень для розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування дозволив зменшити витрати часу при розв'язанні задач пошуку оптимального розміщення об'єктів із застосуванням сучасного програмного забезпечення.

1. Leao A.A.S., Toledo F.M.B., Oliveira J.F., Carravilla M.A., Alvarez-Valdés R. Irregular packing problems: a review of mathematical models. *European Journal of Operational Research.* 2020. Vol. 282(3). P. 803–822. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.04.045

2. Araújo L.J.P., Özcan E., Atkin J.A.D., Baumers M. Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset. *International Journal of Production Research.* 2019. Vol. 57(18). P. 5920–5934. https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1534016

3. Liu X., Liu J., Cao A., Yao Z. HAPE3D – a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering.* 2015. Vol. 16(5). P. 380–390. https://doi.org/10.1631/FITEE.1400421

4. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry. Theory and Application*. 2010. No. 43(5). P. 535–553. https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2009.12.003

5. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimization: Two- and three-dimensional problems and applications. In G. Fasano, J. Pintér (Eds.). Modeling and optimization in space engineering. New York: Springer Optimization and its Applications, 2013. Vol. 73. P. 363–388. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5_15

6. Stoyan Y., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetics and System Analysis*. 2012. No. 48 (6). P. 837–845. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9463-2

7. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. [Електронний ресурс]. Режим доступа: https://www.hindawi.com/journals/ads/2014/571743.

8. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52(2). P. 296–304. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9826-1

9. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T., Chugay A. Optimized object pack- 884 ings using quasi-phi-functions. In G. Fasano, J. Pintér (Eds.). Optimized packings and their applications. Cham: Springer International Publish, 2015. P. 265–291. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7_13

10. Chugay A., Stoian Ye. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. № 1. C. 16–21. https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.1.03

11. Stoian Y.E., Chugay A.M., Pankratov A.V., Romanova T.E. Two Approaches to Modeling and Solving the Packing Problem for Convex Polytopes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54 (4). P. 585–593. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0059-3

12. Romanova T., Bennell J., Stoyan Y., Pankratov A. Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimization. *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 268(1). P. 37–53. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.025

13. Romanova T., Litvinchev I., Grebennik I., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Packing Convex 3D Objects with Special Geometric and Balancing Conditions. In: Vasant P., Zelinka I., Weber G.W. (eds) Intelligent Computing and Optimization. Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, Cham, 2020. Vol. 1072. P. 273–281. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4_27

14. Romanova T., Litvinchev I., Pankratov A. Packing ellipsoids in an optimized cylinder. *European Journal of Operational Research*. 2020. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.01.051

15. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pintér J.D., Stoian Y.E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications: Part I. In G. Fasano, & J. Pintér (Eds.), Springer Optimization and Its Applications: *Modeling and Optimization in Space Engineering*. 2019. Vol. 144. P. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15

УДК 534.1:519.876.5:621.671

С.С. Шевченко, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины (Киев, Украина)

МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «РОТОР – ЩЕЛЕВЫЕ УПЛОТНЕНИЯ»

В процессе создания центробежных насосов на любые параметры, помимо отработки экономичной проточной части, первостепенными задачами являются снижение вибраций, обеспечение требуемой надежности и долговечности опор и разработка надежных и достаточно герметичных уплотнений. В центробежных насосах до 10 % потребляемой мощности теряется на протечки через щелевые уплотнения рабочих колес и системы авторазгрузки осевых сил. Энергию объемных потерь можно превратить в полезную энергию, если щелевые уплотнения использовать одновременно как гидростатические опоры, способные обладать не только большой радиальной жесткостью, но и эффективно демпфировать колебания ротора. В этом случае энергия протечек не только может обеспечить необходимую несущую способность опор, но и, что важно, снизить до допустимого уровня вибрации ротора даже при наличии значительной неуравновешенности. Влияние среды особенно существенно при наличии больших градиентов скоростей и давлений, что характерно для малых зазоров щелевых уплотнений, на которых дросселируются большие перепады давления, а одна из стенок принадлежит вращающемуся и вибрирующему ротору.

Упрощенная структурная схема системы «ротор – щелевые уплотнения», показана на рис. 1. Радиальные (x, y) и угловые (ϑx, ϑy) колебания ротора во многом определяются гидродинамическими силами (F) и моментами (M), возникающими в уплотняющих зазорах (в кольцевых дросселях), а сами силы и моменты зависят от характера движения ротора. Еще одна обратная связь существует между геометрической формой зазора (средний радиальный зазор H и конусность ϑ_2) и давлением в зазоре $p(z, \varphi)$: деформации уплотнительных колец определяются распределением давления, а последнее – очень чувствительно к изменению величины и формы зазора.

На рис. 2 показана модель щелевого уплотнения, которая представляет собой кольцевой дроссель, образованный внутренним цилиндром (валом) с малым углом конусности ϑ_A и внешним цилиндром (втулкой) с углом конусности ϑ_B; суммарный угол конусности канала $\vartheta_0 = \vartheta_B - \vartheta_A$. Параметр конусности канала $\theta_0 = \vartheta_0 l/2H$, $|\theta_0| \le 1$

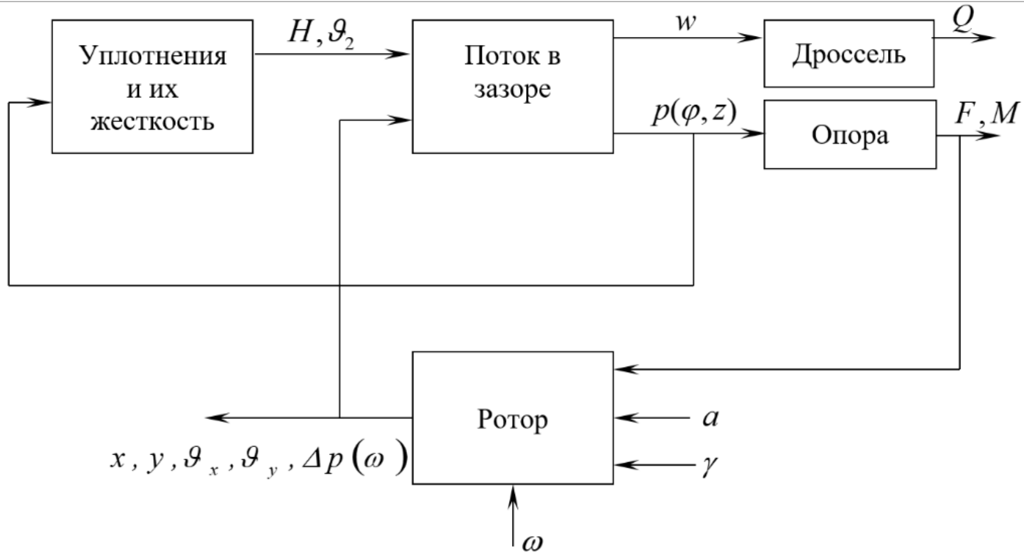


Рис.1. Структурная схема гидромеханической системы "ротор – щелевые уплотнения"

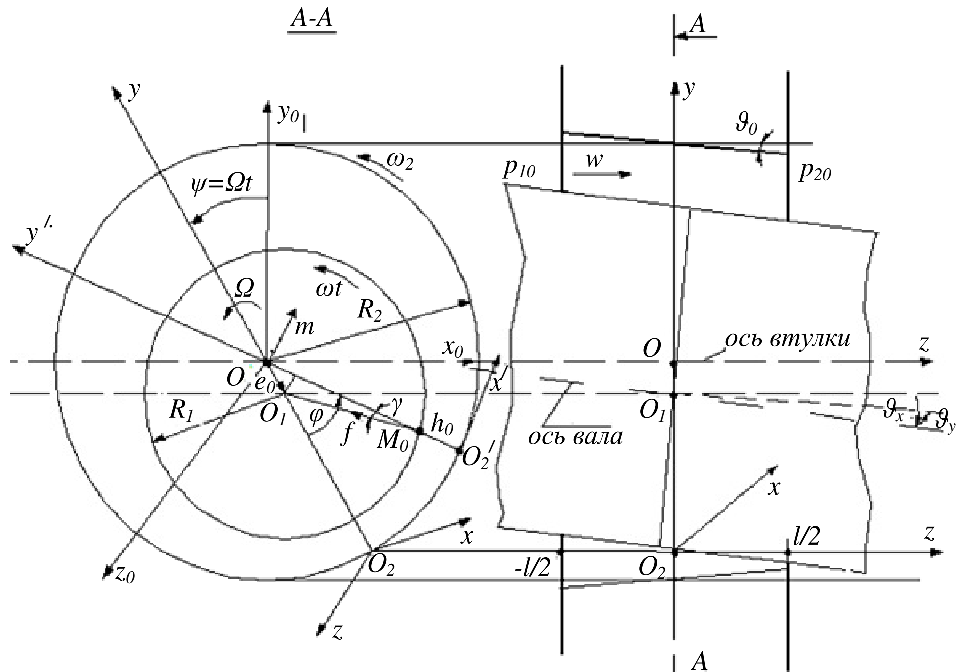


Рис.2. Расчетная схема щелевого уплотнения с подвижной втулкой

Вал и втулка вращаются вокруг собственных осей с частотами собственного вращения ω_1, ω_2. Сами оси вращаются вокруг неподвижного центра *O* с частотами прецессии Ω_1, Ω_2, а также совершают радиальные и угловые колебания. Рассматривается ротор, вращающийся в двух симметрично расположенных щелевых уплотнениях с неподвижными внешними обоймами. В моделях роторов одноступенчатых насосов рабочие колеса расположены между двумя одинаковыми уплотнениями. Для симметричных статически неуравновешенных роторов преобладающими являются радиальные колебания. Незначительные угловые колебания вызываются неизбежной динамической неуравновешенностью и возможными нарушениями симметрии ротора относительно поперечной вертикальной плоскости, проходящей через центр масс. Коэффициенты гидродинамических сил при этом нужно удваивать (по числу уплотнений). Другой крайний случай преимущественно угловых колебаний возможен для симметричного статически уравновешенного ротора под действием динамической неуравновешенности. В этом случае необходимо удваивать гидродинамические моменты. Кроме того, возникающие при перекосах оси ротора относительно оси уплотнений радиальные гидродинамические силы отличаются по величине из-за отличия эксцентриситетов, радиальных скоростей и ускорений. Поэтому они создают дополнительный момент относительно центра рабочего колеса. Углы перекоса в обоих уплотнениях при одинаково расположенных втулках остаются одинаковыми, следовательно, составляющие сил, обусловленные угловыми колебаниями (с коэффициентами α_i), дополнительных моментов не создают.

Рассматриваемый ротор в щелевых уплотнениях является колебательной системой восьмого порядка с четырьмя обобщенными координатами: $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$. Система колеблется относительно устойчивого положения равновесия, поэтому корни характеристического уравнения – четыре пары комплексных сопряженных чисел. На переднем щелевом уплотнении центробежной ступени дросселируется давление, развиваемое ступенью. Это давление пропорционально квадрату частоты вращения рабочего колеса. Именно такие условия характерны для центробежных машин. Это отражается на форме частотных характеристик – зависимостей собственных частот от частоты вращения ротора. В этом случае перепад давления перестает быть независимым внешним воздействием, он связан дополнительным соотношением $\Delta p_0 = \mathrm{B}\omega^2$. В результате, внешним воздействием является только частота вращения, а эффект самоужесточения ротора усиливается. Вынужденные совместные радиально-угловые колебания ротора при постоянном перепаде давления на уплотнениях описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
&a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3 u \mp i\left(a_4'\dot{u} + a_5' u\right)\omega - \left(\alpha_2'\dot{\theta} + \alpha_3'\theta\right)\omega \mp \\
&\mp i\left(\alpha_4\dot{\theta} + \alpha_5\theta - \alpha_0\theta\right) = \omega^2 a^* = \omega^2\left|a^*\right|e^{\pm i\omega t}, \\
&b_1\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_3\theta \mp i\left(b_4'\dot{\theta} + b_5'\theta\right)\omega + \left(\beta_2'\dot{u} - \beta_3' u\right)\omega \mp \\
&\mp i\left(\beta_4\dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u\right) = \left(1 - \mathrm{j}_0\right)\omega^2\gamma^* = \left(1 - \mathrm{j}_0\right)\omega^2\left|\gamma^*\right|e^{\pm i\omega t};
\end{aligned}
$$

Пользуясь стандартными программами можно сразу находить численное решение этих уравнений. После перехода к безразмерным частотам $\overline{\omega} = \omega / \Omega_{u0}$ и ввода ряда обозначений уравнения принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\left(U_{11} + iV_{11}\right)\tilde{u} + \left(U_{12} + iV_{12}\right)\tilde{\theta} = \mathrm{A}\overline{\omega}^2, \\
&\left(U_{21} + iV_{21}\right)\tilde{u} + \left(U_{22} + iV_{22}\right)\tilde{\theta} = \Gamma\overline{\omega}^2.
\end{aligned}
$$

Здесь $U_{11} + iV_{11}, U_{22} + iV_{22}$ – собственные операторы независимых радиальных и угловых колебаний соответственно. Перекрестные операторы $U_{12} + iV_{12}, U_{21} + iV_{21}$ характеризуют влияние угловых колебаний на радиальные и радиальных на угловые, т. е. взаимосвязанность этих колебаний. Из системы неоднородных алгебраических уравнений после ряда преобразований получим амплитуды и фазы, выраженные через внешние возмущения:

$$u_a = \overline{\omega}^2 \sqrt{\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)^2 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}},$$

$$\theta_a = \overline{\omega}^2 \sqrt{\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)^2 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}},$$

$$\varphi_u = -arctg \frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)V_0 - \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)U_0}{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)U_0 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)V_0},$$

$$\varphi_\vartheta = -arctg \frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)V_0 - \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)U_0}{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)U_0 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)V_0}.$$

Пользуясь полученными формулами можно построить амплитудные частотные характеристики как отношения амплитуд соответствующих колебаний к амплитудам внешних возбуждений.

Отличия закономерностей колебаний ротора в щелевых уплотнениях от его колебаний в воздухе обусловлены действием гидродинамических сил, возникающих в щелевых уплотнениях. Сила инерции и сила вязкого сопротивления уменьшают, а гироскопическая сила и сила гидростатической жесткости увеличивают модули собственных частот. Увеличение собственных частот пропорционально корню квадратному из дросселируемого на уплотнениях перепада давления и зависит от конусности кольцевого дросселирующего зазора. Для типовых конструкций центробежных насосов собственные частоты роторов в уплотнениях с конфузорным $(\theta_0 = 0{,}3)$ каналом в 2–4 раза больше, чем в диффузорных $(\theta_0 = -0{,}3)$ уплотнениях. Перепад давления 1,5 МПа на конфузорных уплотнениях обеспечивает почти трехкратное увеличение собственной частоты ротора. Этим подтверждается возможность и эффективность одновременного использования щелевых уплотнений в качестве гидростатических опор, а значит, перспективность конструкций насосов без выносных масляных подшипников. Циркуляционная сила, зависящая от частоты вращения, не влияет на величину собственных частот, но уменьшает модуль удельного коэффициента демпфирования и является основным дестабилизирующим фактором, приводит к потере устойчивости свободных колебаний. Циркуляционная сила пропорциональна коэффициенту закрутки потока в кольцевом канале, поэтому подавление закрутки расширяет область устойчивости ротора. Гидродинамическая диссипативная сила зависит от конусности канала и в диффузорном канале может менять знак, превращаясь в силу отрицательного сопротивления, т.е. является еще одним дестабилизирующим фактором. В отличие от циркуляционной силы, обусловленной собственным вращением ротора, диссипативная сила не зависит от частоты вращения и может становиться отрицательной в отсутствие вращения. Таким образом, в уплотнениях с диффузорными каналами даже невращающийся ротор может выходить за границу колебательной устойчивости. Силовые коэффициенты щелевых уплотнений определяются геометрическими (зазор, радиус, длина, конусность, форма входных кромок) и эксплуатационными (перепад давления, диапазон рабочих частот вращения, физические свойства перекачиваемой среды) параметрами. Целенаправленным выбором этих параметров можно влиять на вибрационное состояние ротора и машины в целом. Важной особенностью центробежных машин является то, что дросселируемые на щелевых уплотнениях перепады давления пропорциональны частоте вращения ротора. Этим обусловлен эффект самоужесточения ротора, приводящий к тому, что в большинстве случаев критические частоты отсутствуют. Самоужесточение усиливается гироскопическими моментами щелевых уплотнений, а для роторов дисковой конструкции – гироскопическим моментом диска.

1. Корчак А., Марцинковский В.А., Чурилова В.Е. Статический расчет радиально-упорных гидростатических саморегулируемых подшипников. *Вісник Технологічного університету Поділля*. Ч. 1. Т. 1. Технічні науки. Хмельницький, 2003. С. 196–201.

2. Марцинковский В.А. Радиально-угловые колебания ротора центробежной машины в щелевых опорах-уплотнениях. *Zeszyty naukowe politechniki Swiętokrzyskiej. Mechanika*. 1995. Vol. 54. P. 247–259.

3. Марцинковский В.А. Щелевые уплотнения: теория и практика. Сумы: Изд-во Сумского госуниверситета, 2005. 416 с.

4. Марцинковский В.А., Шевченко С.С., под общ. ред. С.С. Шевченко. Насосы атомных электростанций: расчет, конструирование, эксплуатация: монография. Сумы: ЧФ «Издательство «Университетская книга», 2018. 472 с.

5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Москва: Машиностроение, 1985. 472 с.

6. Korczak A., Marcinkowski W., Peczkis G. Wpływ szczelin uszczelniających na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej. *Politechnika śląska.* Prace naukowe, 2007. Z. 18. P. 161–170.

7. Kundera Cz, Marcinkowski W. The effect of the annular seal parameters on the dynamics of the rotor system. *Int. Journal of Applied Mechanics and Enginerering.* 2010. Vol. 15. No. 3. P. 719–730.

8. Marcinkowski W., Kundera Cz. Teoria konstrukcji uszczelnien bez- stykowych. Kielce: Wyd-wo Politechniki Swiętokrzyskiej, 2008. 443 p.

9. Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotor dynamics. A modern treatment with applications. New York: John Willey&Sons, 2001. 326 p.

УДК 517.95+518.517+629.735.33-519

Т.И. Шейко[1]**,** д-р техн. наук, проф.
К.В. Максименко-Шейко[1,2]**,** д-р техн. наук, ст. науч. сотр.
А.И. Морозова[3]

[1]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины*
[2]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина*
[3]*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*
(Харьков, Украина, sheyko@ipmach.kharkov.ua)

R-ФУНКЦИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ МАКЕТА КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ ТИПА «СОЮЗ-АПОЛЛОН» С ЦЕЛЬЮ РЕАЛИЗАЦИИ НА 3D-ПРИНТЕРЕ

Одной из новых технологий, которая в последнее время получает растущую популярность, стала 3D-печать, которая позволяет создавать объемные модели практически любых предметов при помощи специального оборудования – 3D-принтера.

Возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций, которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением. В работе [1] на основе теории R-функций разработаны новые подходы к аналитической идентификации поверхностей беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для реализации технологии 3D-печати. В работе [2] на основе теории R-функций построены уравнения поверхностей макетов ракеты-носителя типа «Ангара», космического корабля типа «Буран» и ракет по доставке объектов в пункт назначения. Таким образом, в настоящее время накоплен определённый опыт построения уравнений поверхностей аэрокосмических объектов. Однако каждая новая конструкция корабля требует, как правило, совершенствования используемого базового инструментария.

Цель данной работы заключается в создании математической и компьютерной многопараметрической модели поверхности макета космического корабля типа «Союз-Аполлон».

В работе были использованы R-операции $fk \wedge_0 fl = fk + fl - \sqrt{fk^2 + fl^2}$; $fk \vee_0 fl = fk + fl + \sqrt{fk^2 + fl^2}$ [3, 4], а также цилиндрические, сферические, эллипсоидальные, конусоидальные опорные функции. Ряд опорных функций был нормализован по общей формуле $\omega n = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (\nabla\omega)^2}}$ [3, 4], что дало возможность проиллюстрировать новый подход к построению трехмерных уравнений поверхностей заданной толщины $W = \delta - |\omega| \ge 0$, где 2δ – толщина стенки [5].

Построим уравнение поверхности основной части корабля «Союз», используя в качестве опорных функций нормализованные цилиндрические поверхности $f1, f2$, эллипсоид fe, сферу $f31$, обрезанные соответствующими плоскостями.

$$f1 = (r1^2 - x^2 - y^2)/2r1 \wedge_0 z(25 - z)/25 \ge 0;\ f2 = (r2^2 - x^2 - y^2)/2r2 \wedge_0 z(4 - z)/4 \ge 0;$$

$$fe = 1 - \left(\frac{x}{r1}\right)^2 - \left(\frac{y}{r1}\right)^2 - \left(\frac{z - 25}{30}\right)^2 \ge 0;$$

$$fen = \frac{fe}{\sqrt{fe^2 + gfe}};\ f12 = ((f1 \vee_0 f2) \vee_0 fen) \wedge_0 z(50 - z)/50 \ge 0;$$

$$f31 = (r3^2 - x^2 - y^2 - (z - 60)^2)/2r3 \wedge_0 65 - z \ge 0;\ f32 = f12 \vee_0 f31 \ge 0$$ (рис.1, а).

Построим уравнение поверхности внутренней части корабля «Союз», используя нормализованность опорных функций.

$$ff = \left(f1 \vee_0 1 - \left(\frac{x}{r1}\right)^2 - \left(\frac{y}{r1}\right)^2 - \left(\frac{z - 25}{30}\right)^2\right) \wedge_0 z(50 - z)/50 \ge 0;$$

$$ff32 = ff \vee_0 f31 \ge 0;\ fp = ((1 - abs(ff32)) \vee_0 f2) \wedge_0 y \ge 0$$ (рис.1, б).

Построим уравнение поверхности корабля «Союз» с коническим стыковочным блоком $f33$, переходящим в цилиндрический $f4$.

$$x3 = -\frac{85x}{z - 85};\ y3 = -\frac{85y}{z - 85};\ f33 = (r4^2 - x3^2 - y3^2)/2r4 \wedge_0 (75 - z)(z - 65)/10 \ge 0;$$

$$f3 = f32 \vee_0 f33 \ge 0;\ f4 = (r5^2 - x^2 - y^2)/2r5 \wedge_0 (100 - z)(z - 66)/34 \ge 0;$$

$$f34 = f3 \vee_0 f4 \ge 0$$ (рис.1, в).

Запишем уравнение поверхности солнечных батарей.

$$fa = ((1 - |y|) \wedge_0 (25 - z)(z - 10)/15) \wedge_0 (45^2 - x^2)/90 \ge 0;\ f5 = fa \vee_0 f34 \ge 0$$ (рис.1, г).

Расположим основную часть блока цилиндрической поверхности корабля «Аполлон».

$$f6 = (r6^2 - x^2 - y^2)/2r6 \wedge_0 (150 - z)(z - 115)/35 \ge 0;\ f56 = f5 \vee_0 f6 \ge 0$$ (рис.1, д).

Построим общее уравнение поверхности корабля «Союз-Аполлон», используя две конические поверхности и полуплоскости.

$$x1 = -\frac{145x}{z - 145};\ y1 = -\frac{145y}{z - 145};\ fk1 = (r7^2 - x1^2 - y1^2)/2r7 \wedge_0 (175 - z)(z - 150)/25 \ge 0;$$

$$x2 = -\frac{85x}{z - 85};\ y2 = -\frac{85y}{z - 85};\ fk2 = (r8^2 - x2^2 - y2^2)/2r8 \wedge_0 (115 - z)(z - 95)/20 \ge 0;$$

$$fk = fk1 \vee_0 fk2 \ge 0;\ WSA = f56 \vee_0 fk \ge 0$$ (рис.1, е).

Значения буквенных параметров:

$$r1 = 13; r2 = 15; r3 = 12; r4 = 45; r5 = 5; r6 = 16; r7 = 55; r8 = 45.$$

Следует отметить, что с изменением каких-либо из представленных буквенных параметров автоматически последует изменение форм соответствующих фрагментов корабля.

Достоверность полученных результатов, их адекватность проектируемым объектам подтверждается визуализацией в условиях эксплуатации программы

RFPreview. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, сложные суперпозиции функций, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять их конструктивные элементы. Свойство положительности построенных функций во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

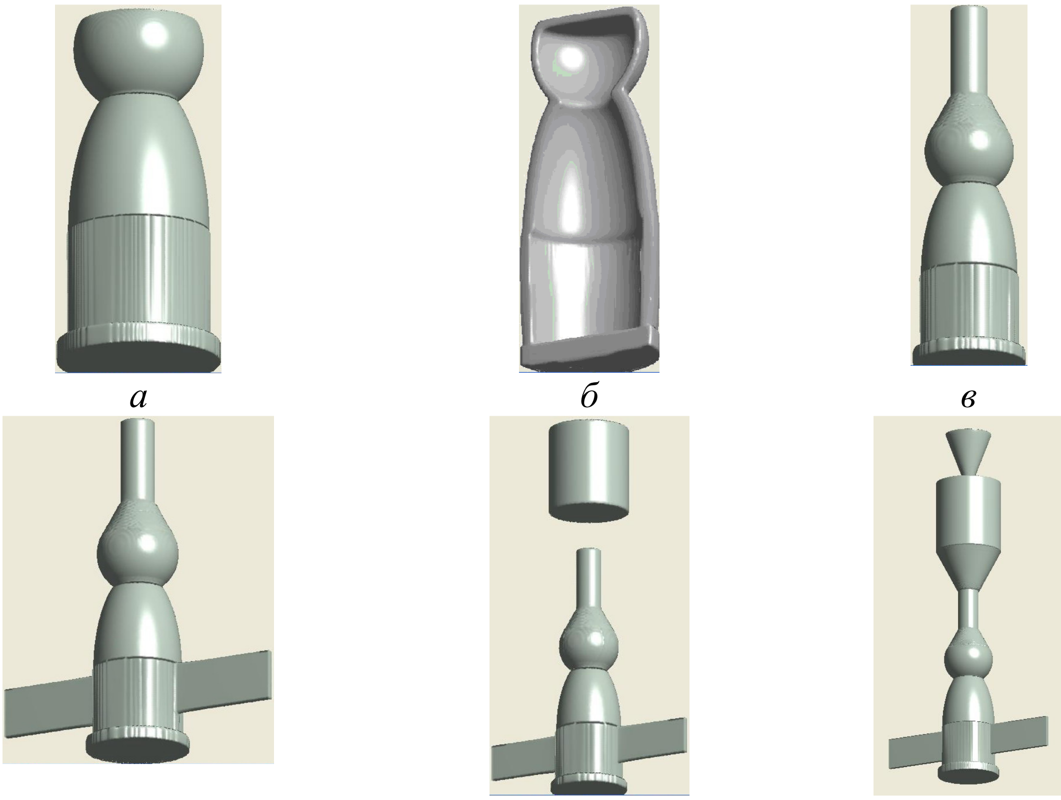


Рис. 1. Поэтапное построение поверхности макета космического корабля типа «Союз-Аполлон»

Результаты данной работы частично получены в рамках программы поддержки приоритетных для государства научных исследований и научно-технических (экспериментальных) разработок Отделения физико-технических проблем энергетики НАН Украины (КПКВК 6541230).

1. Sheyko T., Maksymenko-Sheyko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the implementation at a 3D printer . *Eastern-European J. Enterprise Techn.* 2019. No. 1/2 (97). P. 48–56. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.155548

2. Шейко Т.И., Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Морозова А.И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2019. №2 (174). С. 16–20.

3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

4. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics *Appl. Mech. Reviews*. 1995. Vol. 48. Iss. 4. P. 151–188. https://doi.org/10.1115/1.3005099

5. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.

УДК 539.3

Т.В. Шматко, канд. техн. наук, доц.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
(Харьков, Украина, ktv_ua@yahoo.com)

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Исследования динамического поведения функционально-градиентных пластин и оболочек, находящихся на упругом основании, постоянно привлекает внимание многих исследователей. Разработаны различные деформационные теории [1–4] и методы решения задач изгиба, колебаний и устойчивости таких объектов. Обзор литературы, посвященный исследованиям поведения пластин и оболочек, изготовленных из функционально-градиентных материалов (ФГМ) на упругом основании, опубликован во многих работах [1–5]. Несмотря на большое количество научных работ, посвященных анализу данной тематики [6–8], остается много нерешенных или недостаточно изученных вопросов, особенно в области колебаний и устойчивости пологих оболочек.

В настоящей работе предложен метод решения указанной проблемы с помощью теории R-функций и вариационного метода Ритца [9–11]. Отличительной особенностью работы является использование уточненных теорий первого (FSDT) и высших порядков (HSDT). Влияние упругого основания на деформацию оболочки учитывается с помощью соотношения

$$p_0 = K_W w - K_G \nabla^2 w,$$

где K_W, K_G – параметры упругого основания Винклера и Пастернака соответственно. Эффективные материальные свойства ФГМ вычисляются по степенному закону [5], при этом коэффициент Пуассона ν является постоянным. Модуль Юнга E_f и плотность ФГМ ρ зависят от координаты z и определяются согласно следующим формулам

$$E_f(z,T) = \left(E_c(T) - E_m(T)\right)\left(\frac{2z+h}{2h}\right) + E_m(T), \qquad \rho(z) = (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right) + \rho_m.$$

Предполагается, что температура изменяется только в одном направлении (вдоль толщины) и задается формулой [5]:

$$P_j(T) = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3\right),$$

где $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ – коэффициенты, которые определены для каждого материала. Таблицы значений этих коэффициентов приведены в работах [4, 5, 8].

Тестирование разработанных алгоритмов и программного обеспечения было проведено на большом количестве задач. Результаты этого тестирования представлены на примере одной из них.

Задача. Рассматривается цилиндрическая ФГ пологая оболочка, покоящаяся на упругом основании и находящаяся в температурной среде. Геометрические и механические параметры оболочки приняты такими же, как и в работе [4]:

$$a/b=1;\quad 2b/R=0.8;\quad 2b/h=20;\quad h=1\text{мм};$$

функционально-градиентный материал ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) состоит из керамики Zirconia ZrO_2 и металла $Ti-6Al-4V$. Модули Юнга металла E_m и керамики E_c и плотности материала ρ_m, ρ_c при комнатной температуре $T_0 = 300\,K$ совпадают со следующими значениями:

$$E_m = 105.6981 GPA;\quad \rho_m = 4427\,Kg/m^3;\quad E_c = 168.0629\,GPA;\quad \rho_c = 3000 Kg/m^3.$$

Коэффициент Пуассона принимается одинаковым для металла и керамики и полагается равным 0.3 $(\nu_m = \nu_c = 0.3)$.

Сравнение собственных частот $\Lambda = \Omega((2b)^2/h)\sqrt{\rho_0/E_0}$, полученных методом R-функций в рамках двух теорий, с аналогичными результатами, представленными в работе [8], показано в табл. 1. Величины E_0 и ρ_0 определяют значения E_m и ρ_m при комнатной температуре $T_0 = 300\,K$. Безразмерные величины (k_w, k_g), характеризующие упругое основание, определяются как

$$k_w = K_W \frac{(2b)^4}{E_m h^3},\ k_g = K_G \frac{(2b)^2}{E_m h^3}.$$

Таблица 1. Сравнение безразмерного частотного параметра Λ для различных значений градиентного индекса p, характеристик упругого основания и температуры на верхней (T_t) и нижней поверхностях (T_b) оболочки

(k_1, k_g)	T_t/T_b	Метод	p=0	p=0.5	p=2	p=5
$k_w = 100$, $k_g = 0$	$T_t = 400$, $T_b = 400$	RFM (FSDT)	18.24	16.31	14.77	14.10
		RFM (HSDT)	18.45	16.50	14.93	14.28
		[9]	17.19	15.83	14.72	14.23
	$T_t = 300$, $T_b = 500$	RFM (FSDT)	18.81	16.59	14.81	14.05
		RFM (HSDT)	19.01	16.77	14.99	14.23
		[9]	16.19	15.28	14.42	14.09
$k_w = 100$, $k_g = 10$	$T_t = 400$, $T_b = 400$	RFM (FSDT)	24.67	22.42	20.66	19.89
		RFM (HSDT)	24.82	22.57	20.78	20.02
		[9]	24.20	22.38	20.90	20.26
	$T_t = 300$, $T_b = 500$	RFM (FSDT)	25.09	22.64	20.68	19.85
		RFM (HSDT)	25.25	22.77	20.81	20.00
		[9]	23.50	22.00	20.69	20.16

Из приведенной таблицы следует, что полученные результаты хорошо согласуются с известными, что подтверждает достоверность предложенного подхода.

В работе были проведены исследования, связанные с влиянием толщины оболочки на собственные частоты для различных закреплений: свободно опертых оболочек (SS) и жестко защемленных по всей границе (CL). На рис. 1, 2 показана зависимость поведения безразмерного частотного параметра цилиндрической и сферической оболочек, изготовленных из ФГМ $Si_3N_4 / SUS304$.

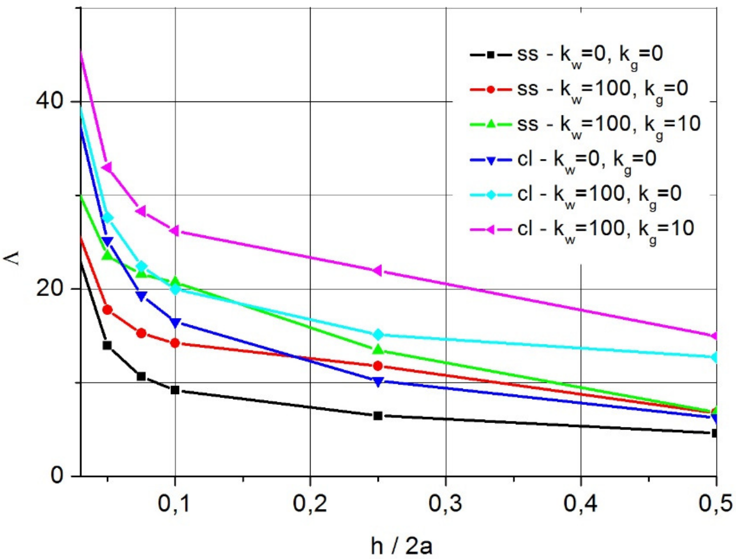


Рис. 1. Изменение безразмерного частотного параметра цилиндрической ФГМ оболочки при увеличении толщины для различных граничных условий и значений характеристик упругого основания ($T_b = T_t = 300\ K; k_1 = \dfrac{a}{R_x} = 1; k_2 = \dfrac{a}{R_y} = 0;\ a/b = 1$)

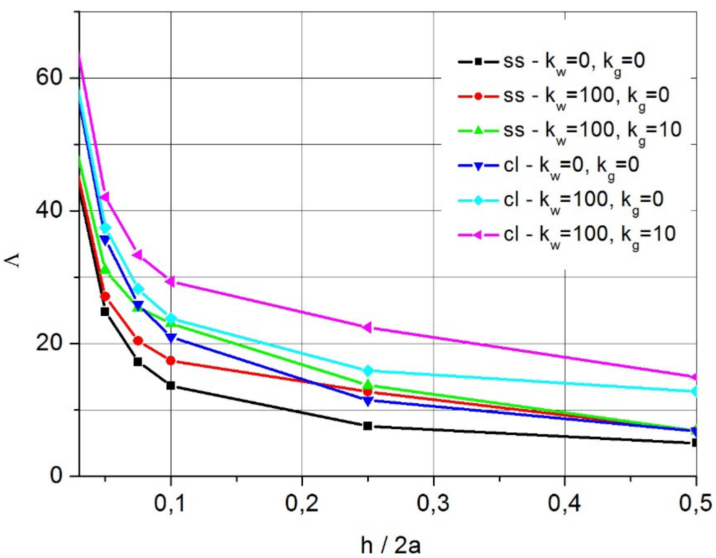


Рис. 2. Изменение безразмерного частотного параметра сферической ФГМ оболочки при увеличении толщины для различных граничных условий и значений характеристик упругого основания ($T_b = T_t = 300\ K; k_1 = \dfrac{a}{R_x} = 1; k_2 = \dfrac{a}{R_y} = 1;\ a/b = 1$)

Модули Юнга металла $SUS304$ (E_m) и керамики Si_3N_4 (E_c) и плотности материалов (ρ_m, ρ_c) при комнатной температуре $(T_0 = 300\,K)$ совпадают со следующими значениями:

$$E_m = 207.787 GPA;\ \rho_m = 8166\,Kg/m^3;\ \ E_c = 322.27\,GPA;\ \ \rho_c = 2370 Kg/m^3.$$

Как следует из представленных рисунков, наиболее существенное влияние на безразмерный частотный параметр оказывает упругое основание. Чем больше его характеристики, тем больше значения частотного параметра. Кривизна оболочек влияет в меньшей степени. Особенно это касается жестко защемленных оболочек.

1. Zenkour A.M, Radwan A.F. On the simple and mixed first-order theories for functionally graded plates resting on elastic foundations. *Meccanica.* 2013. Vol. 48. P. 1501–1516. https://doi.org/10.1007/s11012-012-9680-9

2. Thai H-T., Park M., Choi D-H. A simple refined theory for bending, buckling and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *Int. J. Mech. Sci.* 2013. Vol. 73. P. 40–52. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.017

3. Thai H-T., Vo T.P. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 2013. Vol. 37. Iss. 5. P. 3269–3281. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.008

4. Baferani A.H., Saidi A.R., Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. Iss. 7. P. 1842–1853. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020

5. Shen H-S. Functionally Graded Materials nonlinear analysis of plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2009. 280 p.

6. Ghumare S.M., Sayyad A.S. Analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation and subjected to non-linear hygro-thermo-mechanical loading. *JMST Advances.* 2019. Vol. 1. P. 233–248. https://doi.org/10.1007/s42791-019-00024-1

7. Mohammadi M., Arefi M., Dimitri R., Tornabene F. Higher-order thermo-elastic analysis of FG-CNTR cylindrical vessels surrounded by Pasternak foundation. *Nanomaterials.* 2019. Vol. 9 (1). P. 79–98. https://doi.org/10.3390/nano9010079

8. Shen H-S., Wang H. Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites: Part B Engineering*. 2014. Vol. 60. P. 167–177. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.051

9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

10. Awrejcewicz J., Kurpa L., and Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures.* 2015. Vol. 125. P. 575–585. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.054

11. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *Int. J. Non-linear Mechanics*. 2018. Vol. 107. P. 161–169. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013

УДК 517.968+517.956

Ю.С. Шувалова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба (Харків, Україна, shuvalova@kart.edu.ua)

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН, ЩО ПОСЛАБЛЕНІ ТРІЩИНАМИ

Задачі динаміки тонких пружних пластин присутні в багатьох конструкціях, які використовуються в різних областях машинобудування. Особливо актуальна задача розрахунку напруг, які виникають в процесі коливань пластин, що послаблені тріщинами. В роботі запропоновано варіант метода теорії потенциалів, який дозволяє звести задачу до розв'язання систем нестаціонарних граничних рівнянь. Метод дослідження базується на схемі, наведеній в [1–2].

Нехай Γ_0 – зв'язна крива класу C^2. Розглянемо тонку пружну пластину товщини h, яка займає область $\Omega\times\left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$, де $\Omega=\mathrm{R}^2\setminus\overline{\Gamma_0}$, Γ_0– тріщина в пластині Будемо розрізняти боки Γ_0, називаючи їх берегами розрізу. Вектор зсуву точки (x,x_3) пластини, $x=(x_1,x_2)$, має вид $\left(-x_3\partial_1 u(x,t),-x_3\partial_2 u(x,t),u(x,t)\right)$, де $u(x,t)$ – зсув точки x серединної площини пластини в напрямку, перпендикулярному цій площині в недеформованому стані, $\partial_i=\partial/\partial x_i$. Функція $u(x,t)$ є розв'язком змішаної задачі, яку можна записати так

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(x,t)+D\Delta^2 u(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0;\infty),\\
&u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0, \qquad x\in\Omega,\\
&\begin{cases}u^+(x,t)=f_1^+(x,t), & u^-(x,t)=f_1^-(x,t),\\ \partial_n u^+(x,t)=f_2^+(x,t), & \partial_n u^-(x,t)=f_2^-(x,t),\end{cases} \qquad (x,t)\in\Gamma_0\times(0;\infty),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де індексами "±" позначені граничні значення відповідних функцій на берегах розрізу Γ_0, $D=\frac{\tilde{D}}{\rho h}$, ρ– поверхнева густина пластини, $\tilde{D}$– її циліндрична жорсткість. $\partial_t=\partial/\partial t$, ∂_n– похідна за нормаллю $n(x)=\left(n_1(x),n_2(x)\right)$ до контуру Γ_0, ∂_τ – похідна за напрямком дотичного до Γ_0 орту τ, що отримано з n поворотом на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки, ν– коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлена пластина.

Введемо динамічні потенціали простого та подвійного шарів із заданими на $\Gamma_0\times\mathrm{R}$ двокомпонентними густинами $\vec{\alpha}(x,t)$ та $\vec{\beta}(x,t)$ відповідно

$$(V\vec{\alpha})(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_0}\left\{\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_2(y,\tau)\right\}ds_y\,d\tau,$$

$$(W\vec{\beta})(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_0}\left\{Q_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_1(y,\tau)-M_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_2(y,\tau)\right\}ds_y\,d\tau,$$

де $\partial_{n,y}$, Q_y, M_y – операції нормальної похідної узагальненої сили, що перерізає, та моменту, що згинає, які діють за змінною у.

$$Qu=-D(\partial_n\Delta u+(1-\nu)\partial_\tau\left[n_1n_2(\partial_2^2u-\partial_1^2u)+(n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2u\right]),$$

$$-Mu=D(\Delta u+(1-\nu)(2n_1n_2\partial_1\partial_2u-n_2^2\partial_1^2u-n_1^2\partial_2^2u)).$$

$\Phi(x,t)$ – фундаментальний розв'язок рівняння коливань пластини.

Докладніше про явний вид фундаментального розв'язку, властивості динамічних потенціалів див. [3].

Подання розв'язку задачі (1) сумою потенціалів простого та подвійного шарів, приводить до системи граничних рівнянь:

$$\begin{aligned}&(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t)+(V\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)=f_1^{\pm}(x,t)\\ &\partial_n(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t)+\partial_n(V\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)=f_2^{\pm}(x,t)\end{aligned}\qquad (x,t)\in\Gamma_0\times(0;\infty).\qquad(2)$$

Однозначну розв'язність цієї задачі і було доведено в [3] в однопараметричній шкалі просторів соболевського типу.

Розглянемо тонку пружну пластину з тріщиною прямокутної форми. Враховуючи формули стрибків, з системи (2) можна отримати явний вид інтегральних граничних рівнянь.

$$\mp\beta_1+\int_{\Gamma_0}W(x-y,t)\beta_2(y,t)+V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y+$$

$$+\int_0^{\infty}\int_{\Gamma_0}\tilde{W}(x-y,t-\tau)(\beta_2(y,\tau)-\beta_2(y,t))+\tilde{V}(x-y,t-\tau)(\alpha_1(y,\tau)-\alpha_1(y,t))dyd\tau=f_1^{\pm}(x,t),$$

$$\mp\beta_2+\int_{\Gamma_0}W_n(x-y,t)\beta_1(y,t)+V_n(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y+$$

$$+\int_0^{\infty}\int_{\Gamma_0}\tilde{W}_n(x-y,t-\tau)(\beta_1(y,\tau)-\beta_1(y,t))+\tilde{V}_n(x-y,t-\tau)(\alpha_2(y,\tau)-\alpha_2(y,t))dyd\tau=f_2^{\pm}(x,t).$$

Нехай тріщину розташовано, як на рисунку 1. Будемо вважати, що $x=(0,x_2)$, $y=(0,s)$.

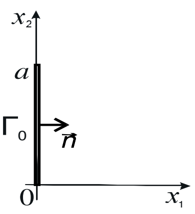


Рис. 1. Нескінченна пластина, що послаблена тріщиною

Розіб'ємо Γ_0 на n частин, на кожній з яких будемо вважати густини $\alpha_k(y,t)$, $\beta_k(y,t)$ сталими ($k=1,2$). Маємо наближені формули для чисельного розв'язання системи

$$\int_{\Gamma_0} W(x-y,t)\beta_2(y,t)+V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}(-\nu+\frac{(1+\nu)}{2}\ln t+\frac{3+5\nu}{32}\frac{(x_2-s)^4}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(x_2-s)^2}{4D}\ln t+\frac{(x_2-s)^6}{384D^2t^2})\alpha_{1i}(t)ds=$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}(-\nu s+\frac{(1+\nu)}{2}s\ln t+\frac{3+5\nu}{160}\frac{(s-x_2)^5}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(s-x_2)^3}{12}\ln t+\frac{(s-x_2)^7}{2688D^2t^2})\alpha_{1i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

$$\int_{\Gamma_0} W_n(x-y,t)\beta_1(y,t)+V_n(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}(\frac{-(\nu+1)}{4(x_2-s)^2}+\frac{(x_2-s)^2}{16Dt^2}\cdot(2\nu-1))\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}\ln t-\frac{(x_2-s)^4}{32D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)ds_y=$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}(\frac{(\nu+1)}{4(s-x_2)}+\frac{(s-x_2)^3}{48Dt^2}\cdot(2\nu-1))\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}s\ln t-\frac{(s-x_2)^5}{160D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

Висновки. Побудовано динамічні аналоги потенціалів простого та подвійного шарів для задачі динаміки тонких пружних пластин, які дозволяють визначати зсув будь-якої точки пластини, яка послаблена тріщиною, в довільний момент часу без використання методів типу скінченних різниць або скінченних елементів. Отримано явний вигляд граничних рівнянь для подальшої чисельної реалізації.

1. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems. *Math. Methods Appl. Sci*. 1993. Vol. 16. P. 203–215. https://doi.org/10.1002/mma.1670160304

2. Чудинович И.Ю. К решению граничных уравнений в задачах дифракции упругих волн на пространственных трещинах. *Дифференциальные уравнения*. 1993. Т. 29. № 9. С. 1648–1651.

3. Гассан Ю.С. Граничні рівняння в задачах динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами. *Вісник Київського університету.* Серія фізико-математичні науки. 2000. № 3. С. 105–114.

УДК 629.01

І.В. Янчевський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
В.Ф. Кришталь, канд. техн. наук, доц.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
(Київ, Україна, v.kryshtal@kpi.ua)

ТОПОЛОГІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ 2D-МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ НЕРІВНОМІРНОСТІ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Можливості сучасних технологій виробництва дають поштовх до розвитку нових підходів у конструюванні, зокрема, із залученням методів топологічної оптимізації для отримання легких і разом з тим міцних деталей та конструкцій у цілому.

Досить поширеним методом для побудови оптимальної топології деталей є SIMP-метод через простоту алгоритму та стійкість обчислювального процесу. Однак більш близьким до інженерних критеріїв у проектуванні є метод BESO [1, 2] з перевіркою виконання умови міцності деталі. До недоліків останнього слід віднести проблеми, які пов'язані з нелінійністю механічного напруження, та сингулярність розв'язку [3].

Задача топологічної оптимізації деталі з обмеженнями на рівень її напруженого стану полягає в мінімізації умовної маси розрахункової геометричної області з урахуванням виконання умови міцності. З використанням методу скінченних елементів зазначена задача може бути записана наступним чином:

$$\begin{cases} \sum\limits_i \rho_i V_i \to \min \quad \left(i=\overline{1,N}\right); \\ \tilde{\sigma}_i \le [\sigma], \end{cases} \tag{1}$$

де $\tilde{\sigma}_i$, ρ_i і V_i – механічне напруження, «відносна» густина і об'єм (площа у випадку двовимірних розрахункових моделей) i-го елементу.

Розрахунковою змінною в цій задачі є «відносна» густина ρ кожного елементу скінченноелементної моделі ($0 \le \rho_{\min} \le \rho_i \le 1$), яка одночасно визначає і його «відносний» модуль пружності E [3]:

$$E(\rho) = E_{\min} + \rho^p \cdot \left(E_0 - E_{\min}\right),$$

де $E_{\min}$ – мінімальне значення модуля Юнга (для «пустих» елементів з $0 \le \rho \le \rho_{\min}$); $E_0 = 1$; p – коефіцієнт «штрафу».

Першим недоліком даного підходу є необхідність наявності у вхідних даних наперед невідомого значення допустимого напруження $[\sigma]$. Другим недоліком є використання максимального значення механічного напруження $\max(\tilde{\sigma}_i)$, яке для більшості прикладних задач розрахунку на міцність є відображенням напруженого стану в околі певного концентратора напружень і, відповідно, не визначає напружений стан деталі у цілому.

У даній доповіді запропоновано альтернативний критерій формування оптимальної топології деталі, який орієнтований на мінімізацію нерівномірності розподілу напруженого стану серед скінченних елементів з «ненульовою» відносною густиною ($\rho_i > \rho_{\min}$). В цьому випадку, оптимізаційна задача (1) запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \sum\limits_i \rho_i V_i \Big/ \sum\limits_i V_i \to \min; \\ \sum\limits_i \left|\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i\right| \Big/ \sum\limits_i \left|\bar{\sigma}_i\right| \to \min. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $\bar{\sigma}_i$ – лінійна апроксимація впорядкованих значень $\tilde{\sigma}_i$.

Зазначений в другому рядку (2) інтегральний критерій може бути інтерпретований як відношення відхилення впорядкованих значень еквівалентних напружень від лінійної їх апроксимації до середнього значення.

Алгоритм реалізовано у програмному середовищі MatLab на основі методу пропорційної топологічної оптимізації з обмеженням напружень, який представлений у роботі [4].

Ефективність методу апробована на плоских розрахункових схемах, зокрема на т.зв. mbb-балці, консольній балці та L-балці, на які діють одиничні навантаження [4].

Проведені чисельні експерименти показали, що запропонований алгоритм через використання інтегральної оцінки напруженого стану дозволяє зменшити вплив локальних пікових значень напружень і забезпечує кращу рівноміцність проектної деталі. До недоліків алгоритму слід віднести потребу у пошуку оптимального результату на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини розрахункової області. Однак до принципових переваг представленого методу слід віднести зменшену кількість вхідних даних, забезпечення кращої рівноміцності оптимізованої топології, наявність єдиного результату оптимізації і меншу чутливість до похибок у обчисленнях.

1. Xia L., Xia Q., Huang X., Xie Y.M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: A comprehensive review. Archives of Computational Methods in Engineering. 2018. No. 25. P. 437–478. https://doi.org/10.1007/s11831-016-9203-2

2. Сысоева В.В., Чедрик В.В. Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций. Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 2. С. 91–101.

3. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications. Berlin: Springer, 2003. 370 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6_2

4. Biyikli E., To A.C. Proportional Topology Optimization: A new non-gradient method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB. *PLoS ONE*. 2014. No. 10. P. 1–18. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0145041

УДК 539.3

Е.Г. Янютин, д-р техн. наук, проф.
П.А. Егоров, канд. техн. наук

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Харьков, Украина, egorovpa@online.ua)

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МЕМБРАНЫ В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

Исследованию нестационарного деформирования элементов конструкций посвящено значительное количество работ. Большинство задач может быть решено с использованием численных методов, таких как метод конечных элементов и прочие. Решение обратных задач по восстановлению вызвавшей нестационарные колебания нагрузки представляют интерес в виду отсутствия таких универсальных методов, как для прямых задач. Это обстоятельство обуславливает необходимость построения таких математических моделей процесса деформирования, на основе которых возможно дальнейшее решение обратных задач. Некоторые элементы конструкций могут быть с определенной степенью точности представлены в виде треугольных мембран, закрепленных вдоль их сторон и несущих присоединенные массы. Построим математическую модель деформирования такой системы.

Пусть на мембране (рис. 1, а), которая имеет форму прямоугольного треугольника, находится в некоторой ее точке с координатами x_M, y_M сосредоточенная масса величиной M. На мембрану воздействует внешняя сосредоточенная сила $Q(t)$, приложенная в точке с координатами x_Q, y_Q и вызывающая ее колебания. В случае рассмотрения прямой задачи о нестационарных колебаниях мембраны функция $Q(t)$ является известной.

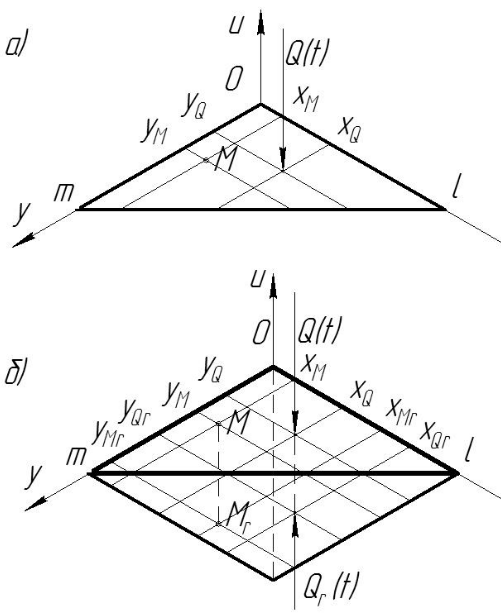


Рис. 1. Схема исследуемой системы

Особенность построения решения поставленной задачи заключается в удовлетворении граничным условиям. Указанное препятствие может быть преодолено с использованием приема, предложенного Релеем [1], на базе теории колебаний квадратной мембраны. Установлено, что в случае исследования деформирования квадратной мембраны под действием нестационарной нагрузки можно обеспечить отсутствие перемещений точек мембраны, лежащих на одной из ее диагоналей, путем приложения силы по модулю равной, а по знаку противоположной заданной нагрузке. При этом упомянутая фиктивная нагрузка $Q_r(t)$, а также фиктивная масса M_r, должны располагаться зеркально относительно диагонали квадрата формирующей контур исследуемой треугольной мембраны (рис. 1, б).

Поскольку на мембране находится сосредоточенная масса величиной M, то воздействие этой массы эквивалентно наличию силы $R(t)$, которая может быть определена согласно второму закону Ньютона

$$M\cdot\ddot{u}(x_M, y_M, t) = -R(t). \tag{1}$$

В уравнении (1) учтено, то обстоятельство, что перемещение сосредоточенной массы и точки мембраны, в которой находится масса, совпадают.

Влияние массы M_r на процесс деформирования также может быть учтено путем введения соответствующей реакции $R_r(t)$. В силу того, что величины отклонения мембраны от горизонтальной плоскости в соответствующих точках по обе стороны от прямой $y+x=l$, различны по знаку, то будем иметь

$$R_r(t) = -R(t). \tag{2}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к анализу уравнения, подобного приведенному в [2] и имеющего следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}Q^{\Sigma}(x,y,t), \tag{3}$$

где $u = u(x,y,t)$ – отклонения точек мембраны от плоскости xOy; $a^2 = T/\rho$; T – величина натяжения мембраны; ρ – поверхностная плотность, считающаяся постоянной; $Q^{\Sigma}(x,y,t)$ – интенсивность поперечной нагрузки, воздействующей на мембрану, в данном случае включающая в свой состав четыре составляющих: $Q^*(x,y,t)$, $Q_r^{\,*}(x,y,t)$, $R^*(x,y,t)$, $R_r^{\,*}(x,y,t)$.

Последующее решение задачи может быть произведено с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье и теории операционного исчисления аналогично приведенному в [3]. Выражение, определяющее процесс колебаний мембраны в форме равнобедренного прямоугольного треугольника будет иметь вид

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{k,n}^1 - C_{k,n}^2}{\lambda_{k,n}}\int_0^t Q(\tau)\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{k,n}^3 - C_{k,n}^4}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R(\tau)\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \tag{4}$$

где $\lambda_{k,n}^2 = k^2\pi^2/l^2\left(k^2+n^2\right)$; $C_{k,n}^1 = 4/\left(\rho l^2\right)\sin\left(k\pi x_Q/l\right)\sin\left(n\pi y_Q/l\right)$;

$C_{k,n}^2 = 4/\left(\rho l^2\right)\sin\left(k\pi\left(l-y_Q\right)/l\right)\sin\left(n\pi\left(l-x_Q\right)/l\right)$; $C_{k,n}^3 = 4/\left(\rho l^2\right)\sin\left(k\pi x_M/l\right)\times$

$\times\sin(n\pi y_M/l)$; $C_{k,n}^4 = 4/(\rho l^2)\sin(k\pi(l-y_M)/l)\sin(n\pi(l-x_M)/l)$.

Определение неизвестной реакции *R(t)* может быть осуществлено путем анализа уравнения характеризующего равенство перемещения массы и точки мембраны, на которой находится масса, вида

$$u(x_M, y_M, t) = -\frac{1}{M}\int_0^t (t-\tau)R(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Решение получаемого из (5) уравнения Вольтерра I рода можно осуществить численным методом [3], в котором предлагается интегралы с переменным верхним пределом (во времени) заменить конечными суммами.

Уравнение для дискретных значений реакции будет иметь вид

$$\sum_{p=1}^{j} R_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t}\left(\frac{\tau - t_j}{M} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_{k,n}^3 - C_{k,n}^4}{\lambda_{k,n}}\sin(\lambda_{k,n}(t_j-\tau))\sin\left(\frac{k\pi x_M}{l}\right)\times\sin\left(\frac{n\pi y_M}{l}\right)\right)\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{k,n}^1 - C_{k,n}^2}{\lambda_{k,n}}\int_0^{j\Delta t} Q(\tau)\sin(\lambda_{k,n}(j\Delta t-\tau))\sin\left(\frac{k\pi x_M}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_M}{l}\right)d\tau. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) рационально производить в матричной форме, как это сделано в [4].

После нахождения значений реакции *R(t)* на основе (4) можно определить перемещения точек треугольной мембраны.

Решение обратной задачи по восстановлению во времени возмущающей нагрузки возможно осуществить при наличии информации о перемещениях в некоторой точке мембраны $u(x_e, y_e, t)$. В таком случае необходимо найти решение системы интегральных уравнений Вольтерра, состоящей из уравнения вида (5) и уравнения, описывающего перемещения мембраны в точке с координатами x_e, y_e. Представляя систему уравнений в матричном виде для ее решения могут быть использованы обобщенные методы Гаусса или Крамера в совокупности с методом регуляризации А. Н. Тихонова.

Стоит отметить, что на основе изложенных подходов могут быть рассмотрены только элементы конструкций в форме прямоугольного треугольника с равными катетами.

1. Стретт. Дж.В. (Релей) Теория звука. Москва: Гостехиздат, 1955. Т. 1. 504 с.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Моска: Наука, 1969. 288 с.

3. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. Харьков: ХНАДУ, 2004. 392 с.

4. Янютин Е.Г., Егоров П.А. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2012. № 54 (960). С. 209–216.

УДК 539.3

Е.Г. Янютин[1], д-р техн. наук, проф.
А.С. Шарапата[2], канд. техн. наук, доц.

[1]*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*
(Харьков, Украина, e.yanyutin@gmail.com)
[2]*Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет*
(Харьков, Украина, shandreysh@gmail.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрены прямые задачи теории упругости при нестационарном действии различных нагрузок на упругие изотропные пластины в форме прямоугольного равнобедренного треугольника. Исследования проводятся с использованием классической теории пластин и базируются на подходах, изложенных в [1, 2]. Граничные условия соответствуют свободному опиранию. Начальные условия соответствуют нулевым. Нагрузки расположены нормально к срединной поверхности пластины. Для решения прямых задач используется дифференциальное уравнение для прямоугольной пластины [3] (в нашем случае она квадратная), которое решается методом предложенным Навье [2], с использованием преобразования Лапласа и разложения искомой функции в двойной ряд Фурье. При этом дополнительно прикладывается фиктивная нагрузка, которая расположена зеркально относительно диагонали квадратной пластины (с противоположным знаком). Такое распределение дополнительной нагрузки дает возможность реализовать симметрию законов колебаний в пластинах квадратной формы и перейти к исследованию треугольной пластины как половины квадратной [2].

В результате исследований получено аналитическое решение прямой задачи и проанализировано выполнение граничных условий на третьей стороне треугольной пластины (равенство нулю нормального перемещения и изгибающего момента).

На базе решения кратко изложенной прямой задачи можно рассматривать и обратные задачи, когда в качестве искомой нагрузки выступает функция нагружения.

1. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Москва: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 734 с.