UDC 539.3:534.1

N.V. Smetankina, Dr. Sci. (Tech.), Senior Researcher
A.I. Merkulova
D.O. Merkulov

A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine
(Kharkiv, Ukraine, nsmetankina@ukr.net)

NON-STATIONARY VIBRATIONS OF LAMINATED COMPLEX-SHAPE SHELLS AT LOW-VELOCITY IMPACT

Laminated structures are used widely in mechanical engineering. Calculating dynamic response parameters for impact loading is a key effort in analyzing their vibrations [1, 2]. This work investigates the dynamic behavior of laminated composite shells under the effect of low-velocity impact. An analytical approach to investigating vibrations of laminated orthotropic non-closed cylindrical shells with a complex shape is offered. Impact loading is carried out by an indenter with a semispherical end. The dynamic behavior of shells is described by the first-order theory accounting for transverse shear strain, thickness reduction and normal element rotation inertia in each layer [3]. The governing equations for composite shells have been derived by using Hamilton's principle. The motion equations are added by the indenter equation of motion and the condition of joint displacement of the indenter and shell. Contact approach is found by solving the Hertzian problem on a ball indentation into an elastic semispace. The analytical solution of the problem is derived by the immersion method. According to this method, a complex-shape laminated shell is immersed into an auxiliary enveloping shell with a simple shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. The sought-for functions of the problem are expanded into trigonometrical series in domain of the auxiliary shell and along the boundary of the given shell. The system of motion equations of shells is integrated by expansion into Taylor series.

The results of numerical studies for the dynamic response of laminated composite shells are demonstrated and compared with previous studies in the literature.

1. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Comp. Struct.* 2015. Vol. 133. No. 1. P. 1127–1136. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035

2. Zhang J., Zhang X. Simulating low-velocity impact induced delamination in composites by a quasi-static load model with surface-based cohesive contact. *Comp. Struct.* 2015. Vol. 125. No. 7. P. 51–57. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.050

3. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment. *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics.* 2008. Vol. 75. No. 5. P. 051004-1–051004-9. https://doi.org/10.1115/1.2936925

УДК 539.3

К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.
Б.В. Успенский, канд. техн. наук
Н.Г. Сахно

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, Uspensky.kubes@gmail.com)

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ УСИЛЕННОЙ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ КОМПОЗИТНОЙ СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Развитие инновационных производственных технологий привело к возникновению новых материалов, которые имеют высокий потенциал для использования в аэрокосмической промышленности. В частности, к ним относятся материалы, армированные углеродными нанотрубками – так называемые нанокомпозиты. Эти материалы демонстрируют высокую прочность и жёсткость в сочетании с малой массой, что особенно актуально при проектировании элементов ракетных и авиационных конструкций: обтекателей, топливных баков, двигателей. Проведено ряд исследований по определению механических характеристик нанокомпозитов. В работе [1] использованы методы микромеханики для численного моделирования эффективных упругих свойств нанокомпозита. В [2] эти свойства определяются конечноэлементным подходом на базе континуальной механической модели. В исследовании [3] предложена модель для определения свойств нанокомпозита.

В работе получена модель деформирования функционально градиентной композитной конической оболочки усиленной углеродистыми нанотрубками с верхним изотропным шпангоутом. Деформирование градиентной конической оболочки описывается сдвиговой теорией Редди высокого порядка, а деформирование кольцевого шпангоута описываются гипотезами Эйлера-Бернулли. Для исследования собственных колебаний композитной конструкции применяется метод Релея-Ритца.

Получена математическая модель нестационарного отклика конструкции в виде линейной динамической системы относительно обобщенных координат. Для получения этой системы используется метод заданных форм.

1. Seidel G.D., Lagoudas D.C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mechanics of Materials.* 2006. Vol. 38. Iss. 8–10. P. 884–907. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.06.029

2. Liu Y.J., Chen X.L. Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials.* 2003. Vol. 35. Iss. 1–3. P. 69–81. https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00200-4

3. Odegard G.M., Gates T.S., Wise K.E., Park C., Siochi E.J. Constitutive modeling of nanotube–reinforced polymer composites. *Composites Science and Technology.* 2003. Vol. 63. Iss. 11. P. 1671–1687. https://doi.org/10.1016/S0266-3538(03)00063-0

УДК 539.3:629.7

Б.Ф. Зайцев[1], д-р техн. наук, ст. науч. сотр.
Т.В. Протасова[1], канд. техн. наук
Д.В. Клименко[2], канд. техн. наук
Д.В. Акимов[2], канд. техн. наук
В.Н. Сиренко[2], канд. техн. наук

[1]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, b.zajtsev@gmail.com)*
[2]*Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»*
(Днепр, Украина, KlymenkoDV@hotmail.com)

ВЛИЯНИЕ РАССЛОЕНИЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОГО ОБТЕКАТЕЛЯ ПРИ ОТДЕЛЕНИИ

Одной из тенденций при создании обтекателей ракет является переход на композитные конструкции. Их использование позволяет снизить массовые показатели, добиться высоких параметров объема для размещения полезного груза. Достижениям и перспективам применения полимерных композитных материалов (ПКМ) при создании обтекателей ракет посвящены работы [1, 2].

Характерным видом разрушения композитных слоистых конструкций является расслоение структуры, развитие которого может быть причиной макроскопического разрушения. При этом расслоение вызывает перераспределение напряжений, что также может приводить к потере устойчивости.

Для оценки опасности появления расслоения, особенно в переходных зонах нерегулярной укладки ПКМ, и его влияния на несущую способность необходимо исследование изменения напряженно-деформированного состояния (НДС), вызванного нарушением структуры ПКМ.

Решению такой задачи посвящена данная работа, где исследуется влияние расслоения в композитном обтекателе ракеты на изменение динамического напряженного и деформированного состояний в его элементах при отделении.

Рассматриваемый обтекатель ракеты складывается из неподвижного и подвижного узлов, имеет составную конструкцию, в которой представлены металлические элементы и композитный стеклопластиковый корпус обтекателя в виде обечайки. Теплозащитное покрытие (ТЗП) не является несущим элементом и представлено в модели только массовыми характеристиками. Отделение обтекателя выполняется пиротехнической системой, под действие которой достигается необходимая скорость для подвижного узла, включающего в себя композитный элемент.

Нагружение на обтекатель состоит из внутреннего P_i и наружного P_e давлений, вызванных в первом случае расширением газов при сгорании пороховой навески, а во втором – аэродинамическим сопротивлением в полете, влияние которого на динамический НДС незначительно [3]. Внутреннее давление P_i имеет импульсный характер, действует в течение 4 мс, достигая значения 1870 бар. Особенностью задачи является свободное движение подвижного узла обтекателя под действием внутреннего давления до достижения необходимой для отделения скорости.

Рассмотрено два вида расслоений, которые начинаются от нерегулярных зон намотки стеклопластика: переходная зона от фланца обечайки (внутреннее расслоение) и зона от края обечайки (внешнее расслоение), где наиболее вероятно появление расслоений. Основное внимание в расчетных исследованиях уделено перераспределению номинальных величин НДС, возникающего вследствие расслоения. Размеры расслоений приняты макроскопическими, соизмеримыми с характерными размерами обечайки, для выявления больших эффектов перераспределения напряженного состояния. Взаимодействие между собой возникших поверхностей расслоения во внимание не принималось.

Методика расчета динамического НДС и движения обтекателя базируется на применении метода конечных элементов в трехмерной постановке, где используется объемный полилинейный конечный элемент с топологически регулярной системой дискретизации. Математическая модель представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений [4]

$$[M]\ddot{u} + [K]u = F\,, \tag{1}$$

где u – вектор перемещения узлов конечно-элементной (КЭ) сетки; F– вектор заданной нагрузки (P_i и P_e), $[M]$, $[K]$ – соответственно матрицы масс и жесткости. Демпфирование не учитывалось вследствие малой его определенности и незначительного влияния при кратковременных процессах.

Уравнение (1) отражают движение точек тела при его перемещении как твердого тела, а также при взаимных смещениях, то есть колебаниях, сопровождающихся деформациями.

Для композитной обечайки имеет место случай криволинейной анизотропии. Введенная для нее система локальных координат x', y', z' совпадает с главными осями анизотропии. Вычисление матриц жесткости и масс для обечайки выполняется в локальных координатах, а пересчет в глобальные координаты для системы (1) устанавливается соотношением

$$[K] = [T]^{\mathrm{T}}\,[K'][T], \tag{2}$$

где K' – матрица жесткости в локальных координатах, T – матрица перехода.

Способ построения конечноэлементной модели тела с расслоением состоит в разрыве связей между узлами ее конечноэлементной сетки по поверхности расслоения, и выполняется согласно методу введения разрезов [5]. Полученная модифицированная сетка конечных элементов содержит разделяющую поверхность, имеющую не связанные между собой двойные узлы на берегах расслоения. Применение метода введения разрезов приводит к изменению основных характеристик конечноэлементной модели – матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$.

Решение матричного уравнения (1) с модифицированными для учета расслоения матрицами осуществляется по неявной конечно-разностной схеме Вильсона [6]. При этом нет ограничений на выбор временного шага, который определяется в основном требованием точности и эффективности вычислений.

Относительные перемещения u_z, связанные с динамическими деформациями, получены исключением из решения уравнений (1) перемещения жесткого целого, которое определялось отдельным расчетом динамики обтекателя с завышенными механическими характеристиками материалов его элементов.

По результатам расчетных исследований радиальные и осевые перемещения при переходе через поверхность расслоения терпят разрыв. Отличия перемещений по берегам расслоения для внутреннего расслоения значительно меньше, чем внешнего. Это связано со стеснением взаимных смещений берегов внутреннего расслоения в отличии от внешнего расслоения, которое выходит на границу. Радиальное и осевое перемещения максимальны в случае внешнего расслоения $(u_r)_{\max}$=3,15 мм; $(u_z)_{\max}$=2,95 мм и возникают на нижнем краю обечайки на наружном слое с ТЗП. Для цельной обечайки максимальные перемещения имеют место там же и составляют: $(u_r)_{\max}$=1,76 мм; $(u_z)_{\max}$=2,06 мм.

Осевые напряжения σ_z в обечайке обтекателя являются максимальными и существенно перераспределяются вследствие расслоения. Величина напряжений и степень их перераспределения по слоям для внешнего расслоения значительно больше, что помимо указанной причины обусловлено также действием инерционной нагрузки со стороны ТЗП непосредственно на наружный слой расслоившейся обечайки.

В целом, из результатов вытекает, что расслоения, выходящие на край стеклопластиковой обечайки более опасные, т.к. значительно повышают напряжения вследствие их перераспределения.

1. Дегтярев А.В., Коваленко В.А., Потапов А.М. Применение композитных материалов при создании перспективных образцов ракетной техники. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2012. № 2 (89). С. 34–38.

2. Потапов А.М., Коваленко В.А., Кондратьев А.В. Сравнение головных обтекателей существующих и перспективных отечественных ракет-носителей и зарубежных аналогов. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2015. № 1. С. 35–43.

3. Зайцев Б.Ф., Асаенок А. В., Протасова Т. В., Клименко Д. В., Акимов Д. В., Сиренко В. Н. Динамическое напряженно-деформированное состояние композитного обтекателя при отделении от ракеты. *Вестник двигателестроения.* 2018. № 2/2018. С. 129–135.

4. Шульженко Н.Г., Гонтаровский П.П., Зайцев Б.Ф. Задачи термопрочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований). Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG., 2011. 370 с.

5. Асаёнок А.В., Зайцев Б.Ф., Шульженко Н.Г. Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций. *Проблемы машиностроения.* 2003. Т. 6. № 3. С. 58–63.

6. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. 448 с.

УДК 66.067.12

А.Б. Калюжный[1], канд. техн. наук, доц.
В.Я. Платков[2], д-р физ.-мат. наук, проф.

[1]*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко*
(Харьков, Украина, albokal@ukr.net)
[2]*Луганский национальный аграрный университет*
(Старобельск, Украина, vplatkov@gmail.com)

ПОВЫШЕНИЕ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПОРИСТОГО ФТОРОПЛАСТА-4 ПУТЕМ АРМИРОВАНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЫ

Фильтрующие материалы на основе пористого фторопласта-4 находят широкое применение в машиностроении, электронной технологии, химии, медицине, фармакологии, газодобыче и других областях народного хозяйства благодаря уникальным физико-химическим свойствам этого полимера [1].

При получении пористых полимеров в широком диапазоне значений пористости используют различные порообразователи, которые добавляются в полимер с последующим испарением, выгоранием или растворением [2]. При получении объемного пористого фторопласта-4 с открытой пористостью и контролируемой поровой структурой в качестве порообразователя используют хлористый натрий, который удаляют из полимера растворением в воде [3].

Недостатком фильтрующих материалов на основе пористого фторопласта-4, полученных данным методом, является невозможность использования их при повышенных температурах от 60 до 250 ^{o}C. Данный недостаток обусловлен тем, что в указанном интервале температур межпоровые перегородки фторопластового каркаса становятся эластичными в результате чего поровое пространство подвержено упругой деформации [4]. Это снижает надежность работы фильтрующих элементов и повышает вероятность проскока частиц загрязнения, размеры которых значительно превышают номинальную тонкость фильтрации.

Целью данной работы является разработка технологического процесса повышающего устойчивость порового пространства фторопласта-4 путем уменьшения эластичности и увеличения прочности межпоровых перегородок при повышенных температурах. Это достигнуто заменой эластичного фторопластового каркаса порового пространства композитом, основой которого является фторопласт-4, а армирующим наполнителем служит графит ГС-1.

Разработан технологический процесс получения фильтрующего материала на основе фторопласта-4 с армированной полимерной матрицей, который включал:

1. *Подготовку порошкообразного фторопласта ф-4.* Операция заключается в измельчении фторопласта в состоянии поставки в стандартном смесителе-измельчителе с частотой вращения 2000 об/мин в течении 1 мин.

2. *Подготовку композиционной смеси материала каркаса.* Основой композиционной смеси является подготовленный ранее фторопласт-4, в который добавлен графит ГС-1 в количестве 20 вес. %. Равномерность распределения графита в порошке фторопласта достигалась в процессе смешения композиционной смеси тем же смесителем в течение 2 мин.

3. *Подготовку порообразователя.* В качестве порообразователя использовался NaCl, который после измельчения в шаровой мельнице просеивается через сито. Время измельчения порообразователя и размер ячеек сита выбирается в зависимости от требуемой дисперсности порообразователя, обеспечивающей получение фильтроэлементов с заданной тонкостью очистки.

4. *Смешение компонентов.* Компоненты смеси (композиционная смесь и порообразователь), взятые в определенном массовом соотношении в зависимости от дисперсности порообразователя (60–70 % массовая доля порообразователя в смеси) троекратно протирали через сито с размером ячеек 500 мкм.

5. *Прессование заготовок фильтроэлементов.* Заготовки фильтроэлементов получали путем двухстороннего осевого компрессионного прессования навески композиционной смеси в прессформе с плавающей матрицей при давлении прессования 100–150 МПа.

6. *Термообработку заготовок фильтроэлементов.* Режим термообработки включает нагрев с печью до температуры t=385±2,5 °С (средняя скорость нагрева ~2 °С/мин), выдержку при данной температуре (время выдержки определяется толщиной полуфабриката и составляет 5 мин на 1 мм толщины) и охлаждение с печью.

7. *Удаление порообразователя.* Охлажденная заготовка погружается в емкость с проточной водой, подогретой до температуры 70–90 °С. Водорастворимый порообразователь удаляется в течении 5–12 часов, в зависимости от толщины фильтрующего материала.

8. *Сушку фильтроэлемента.* Готовые фильтроэлементы сушат в электрических шкафах при температуре 110–150 °С в течение 3–5 часов.

Предлагаемая технология позволила получить фильтрующие материалы на основе пористого фторопласта-4 повышенной прочности, способные надежно работать в температурном интервале 60-250 ^{0}С, сохраняя заданные параметры фильтрования.

1. Wei Z., Ding B., Dou H., Gascon J., Kong X.-J., Xiong Y., Cai B., Zhang R., Zhou Y., Long M., Miao J., Dou Y., Ding Yuan D., Ma J. 2020 roadmap on pore materials for energy and environmental applications. Chinese Chem. Lett. 2019. Vol. 30. Iss. 12. P. 2010–2122. https://doi.org/10.1016/j.cclet.2019.11.022

2. Babaie E., Bhaduri S.B. Fabrication Aspects of Porous Biomaterials in Orthopedic Applications: A Review. ACS Biomater. Sci. Eng, 2018. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–39. https://doi.org/10.1021/acsbiomaterials.7b00615

3. Mane S. Effect of porogens (type and amount) on polymer porosity: A review. Can. Chem. Trans. 2016. Vol. 4. Iss.2. P. 210–225.

4. Drobny J.G. Technology of fluoropolimers. CRC Press Taylor & Francis Group, 2009. 250 p.

УДК 539.3

С.Б. Ковальчук, канд. техн. наук

Полтавська державна аграрна академія
(Полтава, Україна, stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua)

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ НДС БАГАТОШАРОВОГО КРИВОЛІНІЙНОГО БРУСА ІЗ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО-ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

У роботах [1] та [2] на прикладі багатошарової балки із зосередженим довільним навантаженням показано, що на основі точного розв'язку [3] для задачі згину консолі навантаженням на вільному торці, можуть бути отримані наближені аналітичні розв'язки більш складних задач згину, які дають результати, близькі до результатів моделювання методом скінченних елементів (МСЕ), навіть для коротких балок. Аналогічно, у роботі [4] на основі точного розв'язку [5] побудовано наближений розв'язок згину багатошарової кругової арки із зосередженою нормальною силою у середньому перерізі, який також показує високу точність визначення НДС.

В обох зазначених випадках для побудови аналітичного розв'язку задач застосований однаковий підхід, що полягає у розбитті вихідного бруса на ділянки, у межах яких для визначення НДС може бути застосований розв'язок теорії пружності, із подальшим узгодженням за кінематичними і статичними умовами у спільному перерізі. За такого підходу для окремо виділеної прямої чи кругової ділянки бруса у зазначених задачах застосований точний розв'язок задовольняє граничні умови на поздовжніх поверхнях. Водночас розв'язки [3] та [5] мають лише 6 невідомих сталих, – 3 статичних (поздовжня та поперечна сили і згинаючий момент у початковому перерізі ділянки) і 3 кінематичні параметри (переміщення у початковому перерізі), для узгодження деформацій сусідніх ділянок бруса. Така кількість невідомих не дозволяє досягти точного узгодження розподілу внутрішніх зусиль та переміщень на спільній межі ділянок, тому побудований таким чином розв'язок буде точним локально у межах ділянок, за винятком невеликих ділянок поблизу крайніх перерізів. Однак для всього бруса, що складається із ряду ділянок, він буде наближеним. З огляду на зазначені особливості такий метод визначення НДС бруса можна узагальнити назвою – метод локально-точних розв'язків (МЛТР).

Роботи [1–4] демонструють елементарні приклади застосування МЛТР для прямої балки та кругової арки із зосередженими навантаженнями. Водночас, брус із плоскою віссю довільної форми завжди можна представити як скінченну сукупність прямих та кругових ділянок, що дозволяє застосувати МЛТР із використанням вихідних розв'язків, наведених у [3] та [5]. Розширити можливості МЛТР для врахування розподілених навантажень різного типу на поздовжніх поверхнях ділянок можна за допомогою відповідних розв'язків плоских задач теорії пружності.

У роботах [6–8] отримані точні аналітичні розв'язки рівнянь плоскої задачі теорії пружності для задач згину багатошарового прямого бруса під дією рівномірного, лінійного та довільного навантаження, представленого у вигляді суми синусоїдального ряду на поздовжніх гранях. Подібні розв'язки для багатошарового кругового бруса також отримані автором. Суперпозиція таких розв'язків дає можливість змоделювати довільний розподіл інтенсивності зовнішнього навантаження прямої та кругової ділянки багатошарового бруса, включно із навантаженнями локалізованими на невеликих ділянках поверхонь [8]. Це, у свою чергу, дозволяє враховувати зосереджені навантаження не наближено, – через умови на межах ділянок бруса, а навпаки, – всередині ділянок. У такому випадку розбиття ділянок можна виконувати так, щоб навантаження на їх межах було неперервне або відсутнє, що значно підвищить точність методу і дозволить досліджувати місцеві збурення напруженого стану у зонах різкої зміни інтенсивності розподіленого навантаження.

Важливим етапом реалізації МЛТР є вибір кінематичних умов з'єднання ділянок на спільних межах. У роботах [1–4] було запропоновано узгоджувати переміщення для крайніх волокон бруса, що дає значення, близькі до одержаних МСЕ, навіть у випадку наближеного моделювання зосереджених навантажень. Водночас, не виключено, що умови іншого типу, зокрема умови отримані на основі варіаційних принципів, можуть забезпечити підвищення точності запропонованого методу, що важливо для брусів із великою кількістю ділянок для уникнення накопичення похибки визначення переміщень.

1. Kovalchuk S.B., Gorik A.V. Major Stress-Strain State of Double Support Multilayer Beams under Concentrated Load. Part 1. Model construction. *J. Mech. Eng*. 2018. Vol. 21. Iss. 4. P. 30–36. https://doi.org/10.15407/pmach2018.04.030

2. Kovalchuk S.B., Goryk O.V. Major Stress-Strain State of Double Support Multilayer Beams under Concentrated Load. Part 2. Model Implementation and Calculation Results. *J. Mech. Eng*. 2019. Vol. 22. Iss. 1. P. 24–32. https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.024

3. Goryk A.V., Koval'chuk S.B. Elasticity Theory Solution of the Problem on Plane Bending of a Narrow Layered Cantilever Bar by Loads at its End. *Mech. Compos. Mater*. 2018. Vol. 54. Iss. 2. P. 179–190. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9730-z

4. Ковальчук С.Б., Горик О.В. Аналітичний розв'язок задачі згину багатошарової симетричної кругової арки під дією нормальної сили у середньому перерізі. Повідомлення 1. Арки великої кривизни. *Вісник ПДАА*. 2019. Вип. 2(93). С. 270–283. https://doi.org/10.31210/visnyk2019.02.36

5. Koval'chuk S.B., Goryk A.V. Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End. *Mech. Compos. Mater*. 2018. Vol. 54. Iss. 5. P. 605–620. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9768-y

6. Goryk A.V., Koval'chuk S.B. Solution of a Transverse Plane Bending Problem of a Laminated Cantilever Beam under the Action of a Normal Uniform Load. *Strength Mater*. 2018. Vol. 50. Iss. 3. P. 406–418. https://doi.org/10.1007/s11223-018-9984-7

7. Gorik A.V., Koval'chuk S.B. Solving the Problem of Elastic Bending of a Layered Cantilever Under a Normal Load Linearly Distributed over Longitudinal Faces. *Int. Appl. Mech*. 2020. Vol. 56, No. 1. P. 65–80. https://doi.org/10.1007/s10778-020-00997-w

8. Koval'chuk S.B. Exact Solution of the Problem on Elastic Bending of the Segment of a Narrow Multilayer Beam by an Arbitrary Normal Load. *Mech. Compos. Mater*. 2020. Vol. 56. Iss. 1. P. 55–74. https://doi.org/10.1007/s11029-020-09860-y

УДК 629.7.002.3

А.В. Кондратьєв[1], д-р техн. наук, проф.
М.Є. Харченко[2]**,** канд. техн. наук
Т.П. Набокіна[3], канд. техн. наук, доц.

[1]*Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова (Харків, Україна, andrii.kondratiev@kname.edu.ua)*
[2]*ТОВ «АВ-ТЕК» (Дніпро, Україна)*
[3]*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ» (Харків, Україна, t.nabokina@khai.edu)*

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МЕЖАМИ МІЦНОСТІ ПОЛІМЕРНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ СТАТИЧНОМУ ВИГИНІ, РОЗТЯГУВАННІ ТА СТИСНЕННІ

Перевагами сучасних полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) є їх висока міцність, мала вага, технологічність, несприйнятливість до агресивних експлуатаційних середовищ, довговічність. Все це обумовлює пильну увагу до цих матеріалів у різних галузях – можливі перспективи їх застосування очевидні. У той же час ці матеріали мають ряд своїх особливостей [1]. Так, як показує досвід, у більшості випадків висновок про відповідність цих матеріалів вимогам, що пред'являються, дається тільки за результатами обробки вельми дорогих натурних випробувань [2]. ПКМ є фізично однорідними по макроструктурі, але не ізотропними матеріалами [3]. Крім того, у цих матеріалів межі міцності при розтягуванні і стисненні різні. Це викликано особливостями напруженого стану композитних зразків та їх технологією виробництва [4]. Таким чином, для ПКМ, строго кажучи, межа міцності при вигині є деяким умовним поняттям і у визначенні напружено-деформованого стану (НДС) композитних конструкцій не використовується. Випробування зразків з ПКМ не викликають труднощів на розтягнення і вигин, в той час, як при стисненні тонких зразків непросто виключити їх втрату стійкості, а збільшення їх товщини з огляду на масштабний ефект, який сильно проявляється в ПКМ, призводить до некоректних результатів [5]. Саме цими причинами, очевидно, викликана наявність у довідковій літературі даних тільки по межах міцності при вигині і розтягуванні та виникає необхідність встановлення достовірної взаємозалежності між цими трьома межами міцності композита [6].

Доповідь присвячено обговоренню результатів досліджень по встановленню наближеного взаємозв'язку умовної границі міцності ПКМ при статичному вигині з його реальними межами міцності при розтягуванні і стисненні. Було досліджено ефективність ряду припущень, прийнятих при встановленні взаємозв'язку між межами міцності ПКМ при статичному вигині F_B, розтягуванні F_T та стисненні F_C [7]. Загальним припущенням є припущення про лінійно пружну поведінку композиційного матеріалу зразка аж до руйнування.

Друге припущення стосувалось передбачуваної причини руйнування композитних зразків. Було розглянуто наступні причини руйнування та реалізуючі їх математичні моделі [7].

1. Межі міцності при стисненні F_C і розтягуванні F_T досягаються одночасно в крайніх волокнах зразка, що згинається.

2. Межа міцності при стисненні F_C при вигині спочатку досягається в крайньому волокні стиснутої зони а потім миттєво поширюється на всю її глибину При цьому в крайньому волокні розтягнутої зони напруження досягають межі міцності при розтягуванні F_T і відбувається руйнування зразка.

3. Межа міцності при розтягуванні F_T при вигині спочатку досягається в крайньому волокні розтягнутої зони і одночасно на всій її глибині. При цьому в крайньому волокні стиснутої зони напруження досягають межі міцності при стисненні F_C і відбувається руйнування зразка.

4. Межі міцності при стисненні F_C і розтягуванні F_T при вигині зразка спочатку досягаються в крайніх волокнах відповідних зон і одночасно на всій їх глибині.

Для перевірки прийнятності того чи іншого припущення, прийнятого при реалізації відповідної математичної моделі взаємозв'язку меж міцності ПКМ при вигині, розтягуванні і стисненні за існуючими експериментальними даними, для різних матеріалів були обчислені теоретичні межі міцності при стисненні F_C^{th} з використанням експериментальних величин меж міцності при розтягуванні F_T і вигині F_B. Потім отримані дані порівняно з відповідними експериментальними величинами. Аналіз отриманих результатів дозволив зробити наступні висновки.

1. Як показують експериментальні дані щодо 34 різних ПКМ, 26 матеріалів (76,4%) реалізують математичну модель, відповідно до якої межа міцності при стисненні F_C і розтягуванні F_T при вигині зразка спочатку досягаються в крайніх волокнах відповідних зон і одночасно на всій їх глибині. Зв'язок між межами міцності при вигині F_B, розтягуванні F_T та стисненні F_C виражається залежністю

$$F_B = \frac{3F_T F_C}{F_T + F_C}. \qquad (1)$$

Це дозволяє визнати цю модель такою, що наближено відповідає реальній картині руйнування зразків розглянутих ПКМ.

2. Відхилення, які визначаються моделлю (1), від експериментальних їх значень в діапазоні до 5% мають місце 7 раз (ймовірність 20,6%), понад 5% до 10% 11 разів (ймовірність 32,3%), понад 10 до 20% – 7 разів (ймовірність 20,6%), понад 20% до 30% – 4 рази (ймовірність 11,8%) і понад 30% – 5 разів (ймовірність 14,7%).

3. У найближчій моделі до моделі (1) значення межі міцності при стисненні F_C в 21 випадках дає модель, відповідно до якої межа міцності при розтягуванні F_T при вигині спочатку досягається в крайньому волокні

розтягнутої зони і одночасно на всій її глибині. Зв'язок між межами міцності при вигині F_B, розтягуванні F_T та стисненні F_C в цьому випадку виражається залежністю

$$F_B = \frac{F_T F_C \left(8F_T + 3F_C\right)}{\left(2F_T + F_C\right)^2} \tag{2}$$

В 13 випадках працює модель, при якій межа міцності при стисненні F_C при вигині спочатку досягається в крайньому волокні стиснутої зони, а потім миттєво поширюється на всю її глибину При цьому зв'язок між межами міцності при вигині F_B, розтягуванні F_T та стисненні F_C виражається залежністю

$$F_B = \frac{F_T F_C \left(3F_T + 8F_C\right)}{\left(F_T + 2F_C\right)^2}. \tag{3}$$

При цьому рівні значення меж міцності, що визначаються моделями (2) і (3) зустрічаються 4 рази.

Значення межі міцності при стисненні F_C, що визначаються іншими припущеннями, які є найближчими до моделі (3), жодного разу не мали місця.

На завершення доповіді відзначається, прийняте авторами припущення, що напруження «миттєво» стають постійними по всьому стисненому або розтягнутому перерізу, тобто відбувається миттєвий перехід лінійно пружного деформування до ідеально пластичного – є досить наближеним для полімерних волокнистих композитів. Однак саме воно дозволило авторам отримати наближений взаємозв'язок умовної границі міцності ПКМ при статичному вигині з його реальними межами міцності при розтягуванні і стисненні. Результати проведених досліджень слід вважати попередніми, що вимагають подальшого поглибленого аналізу. Цей аналіз, мабуть, вимагатиме і розробки нових математичних моделей, що описують реальний характер деформування матеріалу.

1. Composites and Their Properties / ed. Ning Hu. Ch. 17. InTech Publ. 2012. 515 p.

2. Shah V. Handbook of plastics testing and failure analysis. Consultek Brea, California, 2007. 648 p. https://doi.org/10.1002/0470100427

3. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials. Elsevier, 2007. 504 p. https://doi.org/10.1016/B978-008045372-9/50005-1

4. Kondratiev A., Gaidachuk V., Nabokina T., Kovalenko V. Determination of the influence of deflections in the thickness of a composite material on its physical and mechanical properties with a local damage to its wholeness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 4. No. 1 (100). P. 6–13. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.174025

5. Кербер М.Л. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: пер. с англ./ под ред. А.А. Берлина. Санкт-Петербург: Профессия. 2008. 560 с.

6. Михайлин Ю.А. Конструкционные полимерные композиционные материалы. Санкт-Петербург: НОТ, 2008. 822 с

7. Kondratiev A.V., Gaidachuk V.E., Kharchenko M.E. Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55. No. 2 P. 259–266. https://doi.org/10.1007/s11029-019-09808-x

УДК 621.791.51

О.В. Крахмальов, канд. техн. наук, доц.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (Харків, Україна, krakhmalyov1@gmail.com)

ЕМІСІЙНИЙ ПРОЦЕС ГОРІННЯ ЗВАРЮВАЛЬНОЇ ДУГИ

Для опису емісійного процесу на катоді дуги використовуються майже всі відомі фізичні явища, що супроводжуються випусканням твердим тілом електронів.

Термоелектронний механізм емісії запропонований раніше за інших і успішно використаний для опису поведінки вугільної дуги. Стало можливим зрозуміти такі її властивості, як збудження дуги розведенням електродів, які контактують, нерухомість катодної плями при переміщенні анода і можливість повторного розпалу дуги після порівняно великих пауз. Однак застосування термоелектронного механізму до дуг, які горять на металевих електродах, виявилось неуспішним, оскільки більшість металів не можуть бути нагріті до температур, достатніх для помітної емісії електронів, а такі метали, як ртуть, кадмій та цинк мають настільки низькі точки кипіння при атмосферному тиску, що про них можна говорити як про термоелектронні емітери, хоча дуга горить на цих металах без будь-яких труднощів. На вольфрамі може горіти електрична дуга з катодною плямою, хоча сам катод залишається холодним,а при нагріві його до високої температури дуга з плямою перетворюється в дугу без плями, тобто стає термоелектронною [1, 2].

У катоді дуги під впливом об’ємного заряду позитивних іонів може виникнути електричне поле, достатнє для суттєвого зниження потенційного бар’єру і виникнення холодної емісії електронів. Для створення у катода напруженості поля 10^7–10^8 В/см, необхідного для отримання достатньої щільності емісійного струму, потрібно дуже великі щільності струму, дія якого призведе до того, що поверхня катода буде знаходитися в стані безперервного теплового руйнування. В цих умовах неможливо використання для обчислення емісійного струму величини роботи виходу, температури поверхні та інших аналогічних характеристик матеріалу катода. Автоелектронний механізм емісії не пояснює залежності щільності струму в катодній плямі від теплофізичних властивостей матеріалу. Термоелектронний механізм передбачає посилення автоемісійного струму через термічне збудження електронів. Однак для катодів з низькою температурою кипіння термічне збудження електронів може бути незначним і оптимальний термоавтоелектронний механізм перетворюється в автоелектронний.

Іони, наближаючись до поверхні катода, своїм власним електричним полем виривають із катода електрони, які під дією зовнішнього поля вільно йдуть в прикатодну зону, забезпечуючи електронну компоненту струму в цій ділянці дуги.

Урахування пружного розсіяння електронів на підбар’єрному іоні призводить до збільшення кількості емітованих електронів на один падаючий іон. Іонелектронний механізм у сильних електричних полях виявляється здатним забезпечити вихід електронів на кожен падаючий іон при полях, набагато менших, ніж потрібно для автоелектронної емісії. При віддаленні атома від поверхні катода електронні енергетичні стани перебудовуються від зонної структури в металі до дискретних енергетичних рівнів атома або іона. Така перебудова закінчується на деякій критичній відстані від поверхні катода. Електричне поле у катода змінює потенційну енергію електрона так, що з’являється можливість тунельного переходу електрона із пов’язаного стану на атомі в вільний, тобто відбувається іонізація. Для здійснення цього процесу необхідно електричне поле пружністю $E_К$=10^7 В/см, яке забезпечує вихід вільного електрона в напрямку стовпа дуги, тобто його емісію.

При низьких температурах катода ($T_К$=700 К) кількість електронів, що емітують при випаровуванні одного атома лантану, виявляється на порядок більшою, ніж при випаровуванні одного атома ітрію. При цьому підвищення температури катода до 2500 К призводить до зменшення цієї різниці. Через свою велику масу атом лантану проходить відстань від поверхні катода більшу, ніж атом ітрію і тому відбувається більша кількість одиничних випадків емісії електронів. Оскільки потенціал іонізації атома лантану менше, ніж атома ітрію, із метала на атомну частину лантану надходить більша кількість електронів з енергіями, при яких іонізація найбільш імовірна. З підвищенням температури катода ця різниця в поведінці атомів слабшає через зростання кількості термічно збуджених електронів метала. Механізм емісії електронів з поверхні катода в електричному полі катодного падіння потенціалу може забезпечити вихід до ста електронів на один атом, що випаровується [2, 3].

При розгляданні процесів на ділянці катодного падіння необхідно вирішити проблему утворення носіїв електрики, тобто електронів. Інша ситуація у анода. Електрони, які здійснюють перенесення струму в дузі, подаються на анод із стовпа, і задача зводиться до з’ясування механізму генерації анодної ділянки. Анод, зазвичай, вважають електродом, менш важливим для підтримання дуги, аніж катод. Однак, процеси на аноді теж складні і поки що мало досліджені, як і на аноді.

На ділянці анодного падіння електрони, що надходять із стовпа дуги, прискорюються, їх енергія досягає величини потенціалу іонізації газу або першого потенціалу збудження. Відбувається пряма або ступенева іонізація нейтральних часток. Енергія направленого руху, яка отримана електронами при прискоренні в анодному просторі, в результаті багатьох зіткнень електронів один з одним і з важкими частками плазми переходить в енергію невпорядкованого руху. При цьому температура електронів досягає великих значень і іонізація у анода здійснюється найбільш швидкими електронами максвеловського розподілення за швидкостями.

При зварюванні покритими електродами дуга горить між краплею на торці електрода (або межею краплі і покриття) і ванною розплавленого металу. Крапля і ванна покриті шаром рідкого шлаку, який отримується в результаті плавлення електродного покриття. У сучасних зварювальних електродів таке покриття є складною рудо-мінерало-металевою композицією. Зварювальні шлаки в твердому стані за електричними характеристиками належать до діелектриків або напівпровідників, а рідкі шлаки – до іонних розплавів. При підвищених температурах електропровідність зварювального шлаку досить висока і тому наявність шару рідкого шлаку не перешкоджає горінню дуги. Дуга може стійко горіти між вугільним електродом і розплавленим склом, флюсом та ін. Зварювальні шлаки підтримують дугу при температурі, близькій до початку розм'якшення. Нагріті покриття, коли вони ще не прореагували з металом (в такому стані знаходиться покриття на торці електрода), підтримують дугу при менших температурах, ніж шлаки [3].

Властивості шлаку повинні спричиняти сильний вплив на зварювальну дугу. Тому при розгляданні процесів в такій дузі найголовніше значення мають емісійні характеристики електродних покриттів і шлаків.

Тривалість паузи від моменту переходу струму в дузі через нуль до її повного загоряння складає біля 10^{-4} сек. Час охолодження плазми заліза до зменшення ступеню її їонізації в 10^{5} разів складає $1{,}8\cdot10^{-4}$ сек. Термічна іонізація зменшується зі зниженням температури міжелектродної атмосфери. В результаті цього зменшується і потік іонів із міжелектродного простору до електродів. Збільшення електродного струму потребує повторного розпалювання дуги та відповідного збільшення іонного струму для підтримання необхідного режиму компенсації біля поверхні електрода, на якому формується катод. Термоіонна емісія і поверхнева іонізація легко забезпечують необхідні для цього щільності іонного струму і елементи, які легко іонізуються в достатній кількості, завжди є на електронних покриттях.

Позитивні іони, які емітує анод, створюють сумарний об'ємний заряд, який визначає анодне падіння напруги. Такий вплив позитивної іонної емісії може позначитися навіть при невеликій щільності струму позитивних іонів [4]. Щільність електронного струму, який подається на анод зварювальної дуги, складає 10^{7} А/м^{2} , щільність струму позитивних іонів, при якому зменшується анодне падіння, складає 10^{5}–10^{4} А/м^{2}. Звідси випливає, що термоелектронна емісія і поверхнева іонізація елементів на аноді зварювальної дуги можуть визначати величину анодного падіння напруги і потужність, яку отримує анод.

1. Акулов А.И., Алехин В.П., Ермаков С.И., Полевой Г.В., Рыбачук А.М., Чернышов Г.Г., Якушин Б.Ф. Технология и оборудование сварки плавлением и термической резки: Учебник для ВУЗов. 2-е изд. Под ред. А.И. Акулова. Москва: Машиностроение, 2003. 560 с.

2. Гуменюк І.В., Іваськів О.Ф., Гуменюк О.В. Технологія електродугового зварювання: Підручник. Київ: Грамота, 2007. 512 с.

3. Биковський О.Г. Зварювання та різання кольорових металів: Довідковий посібник. Київ: Основа, 2011. 392 с.

4. Биковський О.Г. Довідник зварника. Київ: Основа, 2014. 448 с.

УДК 539.38

С.С. Куреннов, д-р техн. наук, проф.
К.П. Барахов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» (Харьков, Украина, kpbarakhov@gmail.com)

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ, УСИЛЕННЫМ КРУГЛОЙ НАКЛАДКОЙ

Тонкостенные конструкции могут содержать дефекты в виде отверстий и трещин, которые появляются в процессе эксплуатации, например, в результате механических повреждений. Наличие отверстий в пластине вызывает концентрацию напряжений на границах отверстий и ведет, в конечном итоге, к преждевременному выходу элемента конструкции из строя. Для подкрепления отверстий часто применяются так называемые ремонтные накладки. Для уменьшения концентрации напряжений отверстиям любой формы в процессе ремонтных работ, как правило, придают форму круга. Поэтому наибольший интерес представляет исследование напряженного состояния подкрепленных круглых отверстий. Известные аналитические решения задачи об усиливающей накладке и напряженном состоянии нахлесточных соединений, как правило, предполагают прямоугольную форму накладки и соединяемых пластин и равномерное распределение напряжений по ширине конструкции [1, 2]. Существует несколько различных приближенных двумерных моделей и соответствующих методов решения задач о напряженном состоянии клеевого соединения [3, 4, 5] и их развитие на задачи с дефектами в клеевом слое [6]. Однако указанные подходы не позволяют получить аналитическое решение задачи о пластине с круглым отверстием и круглой накладкой.

Целью данной работы является построение аналитического решения и исследование напряженного состояния клеевого соединения внахлест круглой пластины с круговым отверстием с коаксиальной круглой накладкой при равномерном растяжении. Данная задача решается впервые.

Рассматривается клеевое соединение двух круглых пластин одинаковой толщины. Основная пластина нагружена симметричным двухосным растяжением. Радиус отверстия в основной пластине R_1, радиус накладки R_2. Обе пластины (основная и накладка) имеют одинаковую толщину δ и выполнены из одинакового изотропного материала. Между пластинами находится соединительный слой, толщина которого δ_0.

Очевидно, что в данном случае целесообразно применение полярной системы координат $\{r;\varphi\}$. При этом, поскольку отсутствует зависимость напряжений от угловой координаты, задача сводится к одномерной.

Напряжения в клеевом слое имеют вид

$$\tau = \frac{C_1}{r} + C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r). \quad (1)$$

$$\sigma = S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r). \qquad (2)$$

Продольные U_i и поперечные W_i перемещения слоев в области склейки имеют вид

$$U_1 = C_1\left(\frac{r\ln r}{2B} - \frac{r}{4B}\right) + \frac{C_2}{\beta^2 B} I_1(\beta r) + \frac{C_3}{\beta^2 B} K_1(\beta r) + C_4 r + \frac{C_5}{r}, \qquad (3)$$

$$U_2 = C_1\left(\frac{r}{4B} - \frac{r\ln r}{2B}\right) - \frac{C_2}{\beta^2 B} I_1(\beta r) - \frac{C_3}{\beta^2 B} K_1(\beta r) + C_6 r + \frac{C_7}{r}. \qquad (4)$$

$$W_1 = C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) + C_3 f_3(r) + \frac{r^2}{2\delta}(C_4 - C_6) + \frac{\ln r}{\delta}(C_5 - C_7) +$$
$$+ C_8 - S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K} - S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K} - S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K} - S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K}, \qquad (5)$$

$$W_2 = C_1 f_1(r) - C_2 f_2(r) - C_3 f_3(r) + \frac{r^2}{2\delta}(C_4 - C_6) + \frac{\ln r}{\delta}(C_5 - C_7) +$$
$$+ C_8 + S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K} + S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K} + S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K} + S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K}, \qquad (6)$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{P\left(\delta^2 B + 4D\right)}{2BD}}$; $\lambda = \sqrt[4]{-\dfrac{2K}{D}}$; I_1, K_1, I_0, K_0, - модифицированные функции Бесселя; J_0, Y_0 - функция Бесселя и функция Неймана соответственно; $C_i,\ i = 1..8$ и $S_1, ..., S_4$ - произвольные константы.

$$f_1(r) = \frac{r^2}{2\delta B}(1 - \ln r) - \frac{\ln r}{\delta P};\ f_2(r) = \left(\frac{2}{\delta\beta^2 B} - \frac{1}{2P}\right)\frac{I_0(\beta r)}{\beta};$$

$$f_3(r) = \left(\frac{1}{2P} - \frac{2}{\delta\beta^2 B}\right)\frac{K_0(\beta r)}{\beta},$$

где P и K - жесткости клеевого слоя на сдвиг и на отрыв, вычисляемые, например, по формулам $P = \dfrac{G_0}{\delta_0}$ $K = \dfrac{E_0}{\delta_0}$, где соответственно E_0 и G_0 - модуль упругости и модуль сдвига клея; δ_0 – толщина соединительного слоя; $B = \dfrac{\delta E}{1 - \mu^2}$ - мембранная жесткость пластин; $D = \dfrac{E\delta^3}{12\left(1 - \mu^2\right)}$ - изгибная жесткость; μ - коэффициент Пуассона материала пластин; E - модуль упругости материала пластин.

Зная продольные перемещения (3), (4), а также поперечные перемещения (5), (6), и напряжения в клеевом слое (1) и (2), не составляет труда найти погонные изгибающие моменты, а также продольные и поперечные усилия в пластинках.

Перемещения во внутренней области $(r < R_1)$ и во внешней области $(r > R_2)$, т.е. за пределами склейки имеют вид

$$U_3 = c_1 r + \frac{c_2}{r},\ U_4 = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \tag{7}$$

$$W_3 = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2,\ W_4 = s_4 + s_5 \ln r + s_6 r^2, \tag{8}$$

Зная эти перемещения, находим изгибающие моменты, радиальные и тангенциальные усилия.

Перерезывающие усилия в пластинках находим из соотношения

$$H_m = D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 W_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_m}{dr}\right),$$

где $m = 3, 4$.

Константы $C_1, C_2, ..., C_8$, $S_1, ..., S_4$ и $c_1, ..., c_4$ с $s_1, ..., s_6$ находятся из краевых условий и условий сопряжения перемещений и усилий на границах областей.

Предложена математическая модель осесимметричного напряженного состояния пластинки, имеющей круглый вырез, который внахлест закрыт приклеенной коаксиальной круглой накладкой. Задача сведена к линейным дифференциальным уравнениям относительно касательных и нормальных напряжений в клеевом слое. Данные уравнения имеют аналитические решения в функциях Бесселя.

Особенностью задачи является то, что в отличие соединений стержней [1, 7, 8], не все усилия с основной пластины передаются на накладку. Предложенная модель является обобщением классической модели клеевого соединения двух стержней Голанда и Рейсснера [1] на осесимметричную область склейки.

1. Kurennov S.S., Koshevoi A.G., Polyakov A.G. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multilayer Composite Material. *Russian Aeronautics* (Iz. VUZ). 2015. Vol. 58. No. 2. P. 145-151. https://doi.org/10.3103/S1068799815020026

2. Zhang Y., Zhang K., Zhao H., Xin J., Duan M. Stress Analysis of Adhesive in a Cracked Steel Plate Repaired with CFRP. *Journal of Constructional Steel Research*. 2018. Vol. 145. P. 210–217. https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.02.029

3. Kessentini R., Klinkova O., Tawfiq I., Haddar M. Transient Hygro-thermo-mechanical Stresses Analysis in Multi-layers Bonded Structure with Coupled Bidirectional Model. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 150. P. 188–201. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004

4. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution. *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. No. 1. P. 105-114. https://doi.org/10.1007/s11029-014-9397-z

5. Rapp P. Mechanics of Adhesive Joints as a Plane Problem of the Theory of Elasticity. Part II: Displacement Formulation for Orthotropic Adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015. Vol. 15. Iss. 2. P. 603-619. https://doi.org/10.1016/j.acme.2014.06.004

6. Kurennov S.S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. Vol. 60 (4). P. 740–747. https://doi.org/10.1134/S0021894419040199

7. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K. Analytical Models of Adhesively Bonded Joints. Part I: Literature Survey. *Int. Journal Adhes. & Adhesiv*. 2009. Vol. 29. P. 319–330. https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005

8. Grigorenko A.Y., Los' V.V., Malanchuk V.A., Tormakhov N.N. Stress State of a Threaded Joint in a Dental Implant–Bone System. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. P. 33–39. https://doi.org/10.1007/s10778-020-00994-z

УДК 539.3

Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф.
А.Б. Линник, канд. техн. наук, доц.
Т.Е. Щербинина, канд. физ.-мат. наук, доц.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
(Харьков, Украина, kurpalidia@gmail.com, linnik2105@gmail.com)

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН, НАГРУЖЕННЫХ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ НЕРАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКОЙ

Задача о нахождении критической (допустимой) нагрузки является одной из основных задач, возникающих при проектировании современных конструкций. Это связано с возможной потерей устойчивости, приводящей к разрушению конструкции. Учитывая, что многие элементы конструкций изготавливаются из современных композитных материалов и могут быть нагружены в своей плоскости различными нагрузками как равномерно, так и неравномерно распределенными, задача устойчивости многослойных пластин имеет большое практическое значение. Поэтому данная проблема изучалась многими исследователями. Однако следует заметить, что в большинстве статей, посвященных данной проблеме, рассматриваются прямоугольные или четырехугольные пластины, как правило, нагруженные в своей плоскости равномерно. Существенно меньше публикаций, в которых рассматриваются пластины, нагруженные неравномерно [1–3], но только прямоугольной формы. Это объясняется существенным усложнением задачи, в силу возникновения неоднородного докритического состояния.

В данной работе предложен численно-аналитический подход для изучения задачи устойчивости композитных пластин сложной геометрической формы, нагруженных неравномерно в срединной плоскости. В основу предложенного подхода положено использование теории R-функций и вариационного метода Ритца.

Математическая постановка задачи выполнена в рамках классической теории при условии, что слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости. Предполагается, что пластина находится под действием неравномерно распределенной в плоскости нагрузки. Докритическое напряженное состояние пластины неоднородно и описывается соотношениями линейной теории упругости. Все внешние нагрузки пропорциональны параметру λ. В рамках классической теории многослойных пластин полная система уравнений движения имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} =$$
$$= \lambda\left(N_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (2)$$

В случае симметричного расположения слоев в плоскости результирующая сила $\{N\} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T$, изгибающие и крутящие моменты $\{M\} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ в уравнениях (1), (2) определяются следующим образом:

$$\{N\} = [C]\{\varepsilon\}, \qquad \{M\} = [D]\{\chi\}, \quad (3)$$

где деформации $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T$ и $\{\chi\} = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$ определяются соотношениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \; \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \; \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Здесь *u, v* и *w* смещения срединной плоскости в направлениях *Ox, Oy* и *Oz* соответственно. Матрицы $[C]$ и $[D]$ в уравнениях (3) определяются так:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}.$$

Элементы C_{ij}, D_{ij} $(ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66)$ вычисляются по формулам

$$\left(C_{ij}, D_{ij}\right) = \sum_{s=1}^{N} \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s \left(1, z^2\right) dz.$$

Плотность пластины определяется как

$$\rho = \sum_{s=1}^{n} \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(s)} \left(1, z^2\right) dz,$$

где $\rho_0^{(s)}$ – плотность материала *s*-го слоя.

В уравнениях (2) силы $N_{11}^0, N_{12}^0, N_{22}^0$ соответствуют значению параметра λ=1, и в общем случае могут быть определены из системы (1), дополненной соответствующими неоднородными граничными условиями. Заметим, что на нагруженной части границы граничные условия имеют следующий вид:

$$N_n = P_1^0,$$
$$S_n = 0.$$

Здесь $N_n = N_{11} l^2 + N_{12} m^2 + 2N_{12} lm, \;\; S_n = N_{12}\left(l^2 - m^2\right) + \left(N_{11} - N_{22}\right) lm,$

где l и m направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к внешней границе: $l = \cos\alpha, m = \cos\beta = \sin\alpha, \; \alpha = \left(\vec{n}\,\hat{,}\,Ox\right)$ - угол между нормалью $\vec{n}$ и осью *Ox*.

Система уравнений (1) – (2) дополняется соответствующими граничными условиями, которые зависят от способа закрепления края пластины.

Метод решения сводится к последовательному решению двух краевых задач: а) задачи теории упругости (1) для определения докритического состояния пластины и расчета значений $N_{11}^{0}(x,y)$, $N_{12}^{0}(x,y)$, $N_{22}^{0}(x,y)$; б) задачи на собственные значения (2) для определения критической нагрузки и частот. Эти задачи решаются вариационным методом Рэлея-Ритца и применением теории R-функций [5, 6].

Вариационная постановка краевой задачи (1) сводится к минимизации следующего функционала:

$$I(u,v)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(N_{11}\varepsilon_{11}+N_{12}\varepsilon_{12}+N_{22}\varepsilon_{22}\right)d\Omega+\int_{\partial\Omega_1}P_{load}\left(u\cos\alpha+v\sin\alpha\right)ds\ , \qquad (4)$$

где P_{load} – функция, зависящая от способа нагружения края пластины $\partial\Omega_1$.

Критическая нагрузка определяется в результате решения задачи на собственные значения. Эта задача сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$J=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[M_{11}\chi_{11}+M_{22}\chi_{22}+M_{12}\chi_{12}+\lambda\left(N_{11}^{0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}+N_{22}^{0}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{2}+N_{12}^{0}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

Наименьшее значение параметра λ соответствует критическому параметру.

Разработанный алгоритм и программное обеспечение были проверены на серии тестовых задач. Ниже представлено сравнение полученных результатов с известными.

Задача. Рассмотрим симметрично многослойную $(0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ})$ прямоугольную пластину, нагруженную по параболическому закону $P=P_0(1-4y^2/b^2)$ (см. рис. 1). Край пластины предполагается свободно опертым.

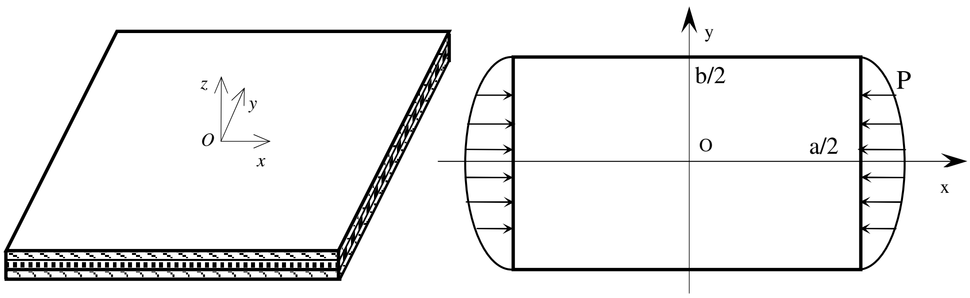


Рис. 1. Трехслойная прямоугольная пластина, нагруженная по параболическому закону

Свойства материала пластины взяты из статьи [2]:
$E_1=127.3\ GPa,\ E_2=11\ GPa,\ G_{12}=5.5\ GPa,\ \nu_{12}=0.34.$

На рис. 2 показано сравнение коэффициента критической нагрузки $k=\dfrac{4\sigma_{cr}\,hb^2}{\sqrt{D_1D_2}}$ для разных отношений $\dfrac{a}{b}$ с результатами статьи [2]. Из графика, очевидно, что результаты хорошо согласуются.

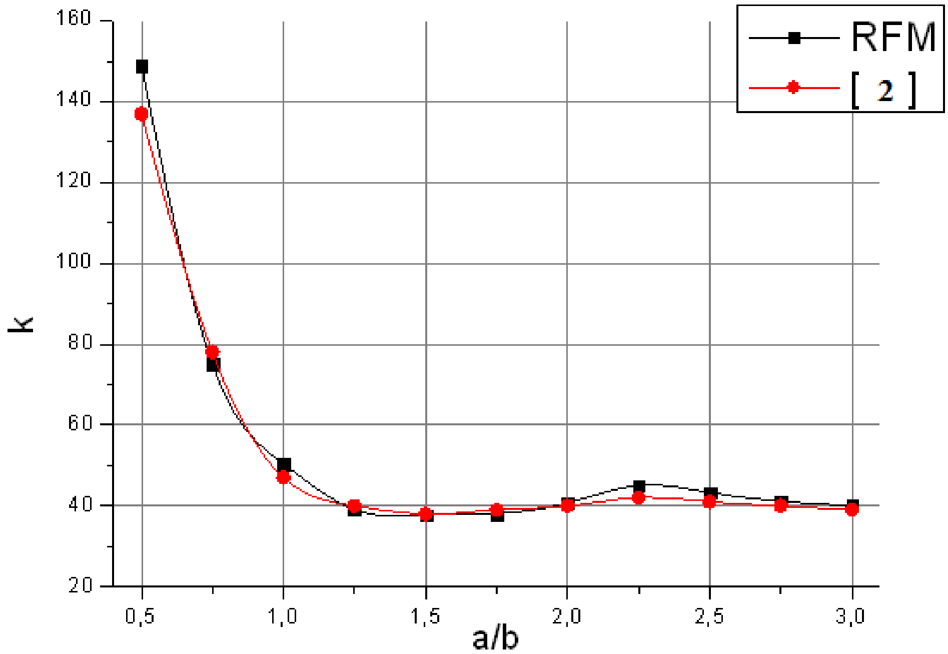


Рис.2. Влияние отношения a/b на коэффициент k

Разработанный метод был также применен к исследованию многослойных прямоугольных пластин с ромбическим отверстием, находящихся под действием косинусоидальной нагрузки, при различных условиях на отверстии и внешнем контуре. Представленные расчеты хорошо демонстрируют эффективность метода R-функций.

1. Roshan Lal, Renu Saini. Buckling and vibration of non-homogeneous rectangular plates subjected to linearly varying in-plane force. *Shock and Vibration.* 2013. Vol. 20 (5). P. 879–894. https://doi.org/10.1155/2013/579813

2. Tang Y., Wang X. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates under parabolic edge compression. *International Journal of Mechanical Siences.* 2011. Vol. 53. P. 91–97. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.11.005

3. Wang X., Gan L., Zhang Y. Differential quadrature analysis of the buckling of thin rectangular plates with cosine-distributed compressive loads on two opposite sides. *Advances in Engineering Software*. 2008. Vol. 39 (6). P. 497–504. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2007.03.011

4. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 858 p.

5. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

6. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 1. P. 175–188. https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000100017

УДК 539.3

Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф.
Г.Н. Тимченко, канд. техн. наук, доц.
Т.В. Шматко, канд. техн. наук, доц.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
(Харьков, Украина, kurpalidia@gmail.com)

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СЭНДВИЧ ПЛАСТИН СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) относятся к новому виду высокоэффективных современных материалов, обладающих большими преимуществами по сравнению с многослойными композитами. Эти материалы способны выдерживать сверхвысокие температуры и обладают механическими свойствами, которые плавно и непрерывно изменяются от одной поверхности к другой. Такие особенности ФГМ стали причиной их широкого использования для изготовления многих элементов современных тонкостенных авиационных, строительных и других промышленных конструкций, в том числе, пластин и оболочек типа сэндвич структур. В последние десятилетия было опубликовано огромное количество работ, посвященных исследованию статических и динамических проблем ФГ пластин и оболочек. Обзор выполненных исследований представлен во многих публикациях [1–6]. Теория R-функций была использована в работах [7–9] для исследования линейных и геометрически нелинейных колебаний и устойчивости ФГ пластин и пологих оболочек.

В настоящей работе рассматривается применение метода R-функций к новому классу задач: исследованию свободных колебаний ФГ пластин типа сэндвич, которые имеют сложную форму. При этом средний слой (заполнитель) изготовлен из ФГМ, внешние слои – металлические. Особенностью работы является то, что общая толщина пластины постоянная, а толщина составляющих слоев – переменная. Для решения задачи применяется вариационный метод Ритца совместно с теорией R-функций [10].

Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории типа Тимошенко, в предположении, что слои расположены симметрично относительно срединной плоскости (рис. 1).

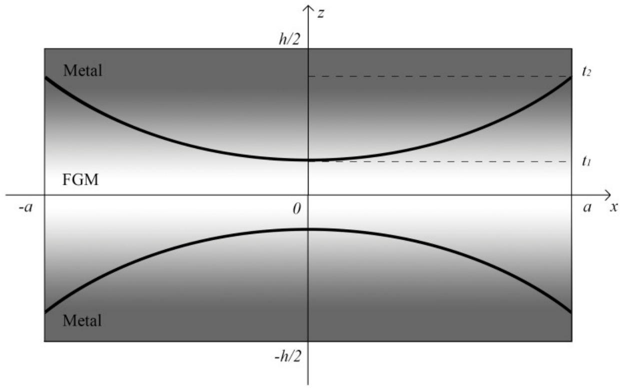


Рис. 1

Усилия в срединной плоскости $N=(N_{11},N_{22},N_{12})^T$, изгибающие и крутящий моменты $M=(M_{11},M_{22},M_{12})^T$, и перерезывающие силы $Q=(Q_x,Q_y)^T$ вычисляются в результате интегрирования по толщине пластины и определяются как

$$[N]=[A]\{\varepsilon\}+[B]\{\chi\},\quad [M]=[B]\{\varepsilon\}+[D]\{\chi\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon=\{\varepsilon_{11};\varepsilon_{22};\varepsilon_{12}\}^T$, $\chi=\{\chi_{11};\chi_{22};\chi_{12}\}^T$ – компоненты деформаций [11,12], $[A],[B],[D]$ – матрицы с элементами A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, которые вычисляются следующим образом:

$$A_{ij}=\sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}}Q_{ij}^{(r)}dz,\qquad B_{ij}=\sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}}Q_{ij}^{(r)}z\,dz,\qquad D_{ij}=\sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}}Q_{ij}^{(r)}z^2dz\quad, \tag{2}$$

где r – номер слоя, $z_1=-h/2$, $z_2=h_1$, $z_3=h_2$, $z_4=h/2$. Величины $Q_{ij}^{(r)}\,(i,j=1,2,3)$ вычисляются с помощью следующих выражений

$$Q_{11}^{(r)}=Q_{22}^{(r)}=\frac{E^{(r)}}{1-\left(\nu^{(r)}\right)^2},\qquad Q_{12}^{(r)}=\frac{\nu^{(r)}E^{(r)}}{1-\left(\nu^{(r)}\right)^2},\qquad Q_{66}^{(r)}=\frac{E^{(r)}}{2\left(1+\nu^{(r)}\right)}. \tag{3}$$

Для определения эффективных свойств ФГМ использован степенной закон (закон Фойгта). Далее предполагается, что коэффициенты Пуассона для составляющих ФГ материала являются одинаковыми, т.е. $\nu_m=\nu_c$. Модуль упругости и плотность ФГ материала вычисляются по формулам

$$E=(E_c-E_m)V_c+E_m\,,\qquad \rho=(\rho_c-\rho_m)V_c+\rho_m \tag{4}$$

Здесь V_c – объемная доля керамики, которая в данном случае (Рис. 1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} V_c=0, & z\in[-\frac{h}{2},-h_1(x,y)],\\ V_c=\left(\frac{z+h_1(x,y)}{h_1(x,y)}\right)^p, & z\in[-h_1(x,y),0],\\ V_c=\left(\frac{h_1(x,y)-z}{h_1(x,y)}\right)^p, & z\in[0,h_1(x,y)],\\ V_c=0, & z\in[h_1(x,y),\frac{h}{2}], \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая соотношения (3),(4),(5) можно вычислить интегралы (2) и получить аналитические выражения для элементов A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, которые имеют следующий вид:

$$E_{cm} = E_c - E_m, \qquad A_{11}(x,y) = \frac{1}{1-\nu^2}\left(E_m h + 2E_{cm}\frac{h_1(x,y)}{p+1}\right), \qquad B_{11} = 0,$$

$$D_{11}(x,y) = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{E_m}{12}h^3 + 2E_{cm}h_1^3(x,y)\left(\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}\right)\right).$$

Заметим, что элементы A_{12}, $A_{66,}$ B_{12}, $B_{66,}$ D_{12}, $D_{66,}$ определяются как

$$\{A_{12}, B_{12}, D_{12}\} = \nu\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} \quad \{A_{22}, B_{22}, D_{22}\} = \{A_{11}, B_{11}, D_{11}\},$$

$$\{A_{66}, B_{66}, D_{66}\} = \frac{1-\nu}{2}\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\}$$

Для решения линейной задачи о колебаниях воспользуемся вариационным методом Ритца в сочетании с теорией R-функций [10]. Тогда собственные функции и собственные частоты λ находятся из условия минимизации следующего функционала:

$$I = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}\right)dxdy$$

$$-\lambda^2\frac{1}{2}\iint_{\Omega}I_0\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + 2I_1\left(u\psi_x + v\psi_y\right) + I_2\left(\psi_x{}^2 + \psi_y{}^2\right)dxdy.$$

В работе получены аналитические выражения для коэффициентов I_0, I_1, I_2

$$I_0 = \rho_m h + 2\rho_{cm}\frac{h_1(x,y)}{p+1}, \quad I_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{\rho_m}{12}h^3 + 2\rho_{cm}h_1^3(x,y)\left(\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}\right), \ \rho_{cm} = \rho_c - \rho_m.$$

Минимизация функционала выполнена с использованием метода Ритца. Система координатных функций в случае сложной формы пластины построена с помощью теории R-функций [10].

Для проверки достоверности предложенного подхода был решен ряд тестовых задач. Проведено сравнение полученных результатов с известными для частного случая, когда пластины становятся двухслойными. Ниже в качестве примера приведена одна из них.

Задача. Рассматривается двухслойная свободно опертая квадратная пластина. Составляющие ФГМ этой пластины (металл и керамика) характеризуются следующими механическими свойствами:

$$E_m = 70Gpa,\ E_c = 380Gpa,\ \rho_m = 2707kg/m^3,\ \rho_c = 3800kg/m^3,\ \nu_m = 0.3,\ \nu_c = 0.3$$

Эта же задача была решена в работах [5, 6]. Сравнение полученных результатов с известными для безразмерного параметра основной частоты пластины $\Lambda = a^2\omega/h$ при изменении значений отношения h/a и градиентного индекса p представлено в табл. 1.

Как следует из табл. 1, полученные результаты хорошо согласуются с известными, что подтверждает предложенный подход и разработанное программное обеспечение. В качестве новых результатов представлены выполненные исследования колебаний пластин сложной формы с параболической толщиной слоев и применением различных сплавов для ФГМ. Даны некоторые рекомендации и показано влияние толщины слоев и типа ФГМ на собственные частоты и формы колебаний пластин.

Таблица 1

h/a	Метод	p=0	p=0.5	p=1	p=5	p=10
0.01	RFM	1.8885	1.4827	1.2718	0.9658	0.9506
	[6]	1.8883	1.4824	1.2716	0.9656	0.9504
	[5]	1.8882	1.4826	1.2716	0.9657	0.9505
0.1	RFM	1.8244	1.4416	1.2403	0.9425	0.9251
	[6]	1.8268	1.4461	1.2447	0.9448	0.9273
	[5]	1.8268	1.4462	1.2447	0.9443	0.9258
0.2	RFM	1.6697	1.3395	1.1606	0.8835	0.8613
	[6]	1.6771	1.3536	1.1749	1.8909	0.8637
	[5]	1.6772	1,3536	1.1748	0.8894	0.8683

1. Swaminathan K., Naveencumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates- A state-of-the-art review. *Journal of Composite Structures.* 2015. Vol. 120. P. 10–31. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070

2. Thai H.-T., Nguen T.-K., Vo T.P., Lee J. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *Eur. J. Mech. – A/Solids.* 2014. Vol. 45. P. 211–225. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.12.008

3. Zencour A.M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2 – Buckling and free vibration. *Int. J. Solids Struct*. 2005. Vol. 42 (18). P. 5243–5258. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016

4. Bennoun M., Houari M.S.A., Tounci A. A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2016. Vol. 23 (4). P. 423–431. https://doi.org/10.1080/15376494.2014.984088

5. Malekzadeh P., Ghaedsharaf M. Three-dimensional free vibration of laminated cylindrical panels with functionally graded layers. *Composite Structures.* 2014. Vol. 108. P. 894–904. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.024

6. Li Q., Iu V.P., Kou K.P. Three –dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration.* 2008. Vol. 311. P. 498–515. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018

7. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *Int. Journal of Non-Linear Mechanics.* 2018. Vol. 107. P. 161–169. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013

8. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Lat. Am. Journal of Solids Struct*. 2019. Vol. 16. No. 1. 16 p. https://doi.org/10.1590/1679-78254911

9. Kurpa L., Shmatko T. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *J. Mechanical Engineering*, Science, Part C. 2020. Vol. 1–12. https://doi.org/10.1177/0954406220936304

10. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

11. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates. *J. Num. Method Eng.* 2000. Vol. 47. P. 663–684. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8

12. Shen H.S. Functionally graded materials of plates and shells. Boca Raton, FL: CRC Press, 2009.

УДК 539.3

Д.В. Леоненко, д-р физ.-мат. наук, доц.

Белорусский государственный университет транспорта
(Гомель, Республика Беларусь, leoden@tut.by)

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Трехслойные конструкции широко используются в строительстве, машино-, авиа и ракетостроении. Деформирование трехслойных стержней, пластин и оболочек рассмотрено в монографиях [1–2]. Статическое нагружение трехслойных конструкций на упругом основании исследовано в [3]. Статья [4] посвящена исследованию трехслойного стержня ступенчато переменной толщины. Здесь выполнена постановка задачи об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины с нерегулярной границей.

Пластина состоит из трех слоев различной толщины. Во внешних несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, во внутреннем слое (заполнителе) – гипотеза Тимошенко. Толщины несущих слоев могут изменяться вдоль радиуса пластины как непрерывно, так и ступенчато. На границах слоев перемещения непрерывны.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат $r, \varphi, z,$ связанной со срединной поверхностью заполнителя. На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует осесимметричная распределенная нагрузка $q(r)$. За искомые величины принимаются прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$, которые не зависят от окружной координаты φ.

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta A - \delta W = 0,$$

где δA – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q(r)$ и контурных усилий, δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S.

Получена система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях.

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 343 с.
3. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 379 с.
4. Плескачевский Ю.М., Старовойтова Е.Э. Изгиб трехслойного металлополимерного стержня ступенчато-переменной толщины. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*: сборник научных работ. 2009. Вып. 13. С. 186–192.

УДК 539.3; 678.067

М.В. Марчук[1], д-р фіз.-мат. наук, проф.
М.М. Хом'як[2], канд. фіз.-мат. наук, доц.
В.М. Харченко[3]
В.С. Пакош[1], канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*
(Львів, Україна, mv_marchuk@ukr.net)
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
(Львів, Україна, khomnick98@gmail.com)
[3]*Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»*
(Дніпро, Україна, volod.kharchenko@meta.ua)

ЕФЕКТИВНІ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕХРЕСНО-АРМОВАНИХ КОМПОЗИТІВ НА ПОЛІМЕРНІЙ ОСНОВІ

Армовані композиційні матеріали на полімерній основі є невід'ємною та значною складовою сучасних конструкцій різноманітного цільового призначення. Розрахунок на міцність конструкцій із таких матеріалів потребує детальної інформації про їх фізико-механічні характеристики, оскільки їм притаманні такі особливості деформування, як податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Особливо це актуально для випадку шаруватих композитів при використанні програмних пакетів скінченноелементного аналізу.

Для знаходження фізико-механічних характеристик перехресноармованого полімерного композитного матеріалу на основі даних про термопружні властивості шарів побудована тривимірна модель з урахуванням просторового характеру напружено-деформованого стану.

Шляхом використання матричної форми співвідношень термопружності Дюамеля-Неймана отримані уточнені формули для визначення ефективних пружних констант і коефіцієнтів температурного розширення.

Показана адекватність відображення побудованою моделлю специфічних ефектів при деформуванні сучасних композитів, зокрема, можливість визначати діапазон кутів армування, при яких проявляються ауксентичні властивості.

Побудована структурна модель шаруватого композиційного матеріалу дозволяє шляхом розрахунків на міцність повною мірою показати переваги композиційних матеріалів у порівнянні з традиційними.

УДК 539.3

В.Ю. Мірошніков, канд. техн. наук, доц.

Харківський національний університет будівництва та архітектури
(Харків, Україна, m0672628781@gmail.com)

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРУЖНОГО ШАРУ З ДЕКІЛЬКОМА ПОЗДОВЖНІМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

На основі узагальненого методу Фур'є [1–6] розроблено аналітико-числове розв'язання просторової задачі теорії пружності для ізотропного шару з декількома паралельними круговими циліндричними включеннями. Проведено аналіз напружено-деформованого стану тіла шару з трьома циліндричними суцільними включеннями при заданих на межах шару переміщеннях, вивчено взаємний вплив включень та меж шару. Напружений стан, при однакових фізичних величинах і однакових геометричних параметрах, порівняно з задачею, коли в шарі розташоване одне суцільне циліндричне включення [6].

Постановка задачі. Пружний однорідний шар має N кругових циліндричних паралельних включень радіусом R_p, непересічних між собою і межами шару, де p – номер включення, p=1, 2, .., N. Відстань між включенням з номером i і включенням з номером j дорівнює L_{ij}. Межі шару розташовані на відстані $y=h$ та $y=-\tilde{h}$ від центру включення p=1. Включення будемо розглядати у локальних циліндричних системах координат (ρ_p, φ_p, z), межі шару у декартовій системі координат (x, y, z). Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе за умов, що на верхній межі шару задано переміщення $\vec{U}(x,z)\big|_{y=h} = \vec{U}_h^0(x,z)$, на нижній межі шару переміщення $\vec{U}(x,z)\big|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x,z)$, на межах між шаром та включеннями задані умови спряження: $\vec{U}_0(\varphi_p, z)\big|_{\rho_p=R_p} = \vec{U}_p(\varphi_p, z)\big|_{\rho_p=R_p}$, $F\vec{U}_0(\varphi_p, z)\big|_{\rho_p=R_p} = F\vec{U}_p(\varphi_p, z)\big|_{\rho_p=R_p}$, де $\vec{U}$ – вектор переміщення; $F\vec{U}$ – вектор напруження;

$$\vec{U}_h^0(x,z) = U_x^{(h)}\vec{e}_x + U_y^{(h)}\vec{e}_y + U_z^{(h)}\vec{e}_z,$$
$$\vec{U}_{\tilde{h}}^0(x,z) = U_x^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + U_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + U_z^{(\tilde{h})}\vec{e}_z, \tag{1}$$

відомі функції.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координатах x і z.

Розв'язання задачі шукаємо у вигляді

$$\vec{U}_p = \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda,$$

$$\vec{U}_0 = \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda,\mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) + \tilde{H}_k(\lambda,\mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu) \right) d\mu d\lambda +$$

$$+ \sum_{p=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}\left(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda\right) d\lambda,$$

де $\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda\right)$, $\vec{R}_{k,m}\left(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda\right)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ базисні розв'язки рівняння Ламе [1], а невідомі функції $H_k(\lambda,\mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $A_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов (1).

При розв'язанні задачі скористаємось особливими формулами переходу в базисних розв'язках між локальними системами координат [5].

Задача зводиться до сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Результати. Вивчено напружений стан для шару пластику ABS, армованого трьома стальними, горизонтально розташованими циліндричними включеннями. На верхній межі шару, навпроти одного з включень, було задано ненульове переміщення, на нижній межі шару переміщення відсутні.

Для числового розв'язку задачі нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь були усічені по параметру m. При m=6, R_p/h=0,5, $(R_1+R_2)/L_{12}$=0,67 точність виконання граничних умов склала 10^{-3}.

Числові дослідження алгебраїчної системи для трьох включень і шару дають можливість стверджувати, що її рішення може бути з будь-якою ступінню точності знайдено методом редукції.

За темою дослідження можливий подальший розгляд задачі з іншими граничними умовами.

1. Николаев А.Г., Проценко В.С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.

2. Проценко, В.С., Украинец Н.А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью. *Вісник Запорізького національного університету*. 2015. Вып. 2. С. 193–202.

3. Мірошніков В.Ю. Перша основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20. № 4. С. 45–52. https://doi.org/10.15407/pmach2017.04.045

4. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 4. № 7 (94). P. 43–50. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567

5. Николаев А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. Харьков: Харьковский авиац. ин-т, 1996. 109 с.

6. Miroshnikov V.Yu., Medvedeva A.V., Oleshkevich S.V. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413

УДК 539.3

Х.І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Львів, Україна, ser.kristina@gmail.com)

МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО ГАЗУ ДЛЯ ЗАПОВНЮВАЧА МІЖФАЗНОЇ ЩІЛИНИ В ОДНОРІДНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Розглянемо біматеріальну площину, компоненти якої D_1 і D_2 характеризуються коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2), коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). Вважаємо, що $G_1(1-\nu_2)=G_2(1-\nu_1)$ і $\eta_1=\eta_2$, де $\eta_1=\dfrac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}$ і $\eta_2=\dfrac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}$ термічні дистортивності матеріалів D_1 і D_2. На межі з'єднання D_1 і D_2 розташована щілина завдовжки $2a$, що має початкову висоту $h_0(x)$. Порожнина щілини заповнена газом з коефіцієнтом теплопровідності λ_g. Газ чинить тиск P_g на береги щілини. На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний однорідний тепловий потік q, перпендикулярні до міжфазної лінії. Між берегами щілини відбувається передача тепла за моделлю неідеального теплового контакту зі змінним термоопором $r(x)=h(x)/\lambda_g$, де $h(x)$ – висота щілини, набута в процесі навантаження. Для визначення тиску газу P_g використовуємо модель реального газу, стан якого описується рівнянням Ван-дер-Ваальса

$$\left(P_g+n^2\frac{a_g}{V^2}\right)\left(V-nb_g\right)=nRT,$$

де n – кількість газу, a_g, b_g – газові сталі, $R=1{,}38\cdot10^{-23}\,Дж\cdot K^{-1}$ – стала Больцмана, $V_g=l\int\limits_{-a}^{a}h(x)dx$ – об'єм газу, що припадає на одиницю довжини щілини $l=1м$ в поздовжньому напрямі, T_g – абсолютна температура газу, що визначається усередненою температурою інтерфейсу $T_g=\dfrac{\lambda^*}{4a}\int\limits_{-a}^{a}\gamma(x)\,dx+T_0$ ($\gamma(x)$ – стрибок температури між берегами щілини, $T_0=273K$).

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для міжфазних тріщин [1], задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно функцій стрибка температури між берегами тріщини $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$ та рівняння відносно тиску P_g:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{h'(t)}{t-x}dt=-\frac{1}{2G^*}\left(p+P_g\right)+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{h_0'(t)}{t-x}dt\,,\ \ |x|<a\,, \tag{1}$$

$$\lambda_g\frac{\gamma(x)}{h(x)}-\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\gamma'(t)}{t-x}dt=q\,,\ \ |x|<a\,, \tag{2}$$

$$P_g=\frac{nR\left(\frac{\lambda^*}{4a}\int_{-a}^{a}\gamma(x)\,dx+T_0\right)}{l\int_{-a}^{a}h(x)\,dx-nb_g}-\frac{n^2a_g}{\left(l\int_{-a}^{a}h(x)\,dx\right)^2}\,, \tag{3}$$

де $\lambda=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\lambda^*=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $G^*=\frac{G_1(1-\kappa_2)}{(1-\kappa_1\kappa_2)}$, $\kappa_n=3-4\nu_n$. На кінцях тріщини функції $\gamma(x)$ та $h(x)$ задовольняють умови: $h(\pm a)=0$, $\gamma(\pm a)=0$.

Систему рівнянь (1)-(3) розв'язано з використанням методу послідовних наближень. На початковому наближенні розглядаємо випадок ненавантаженого стану біматеріалу і проводимо розрахунки за наступним алгоритмом: вважаємо, що об'єм газу визначається початковою висотою щілини $h_0(x)$, а температура газу не залежить від стрибка температури; враховуючи рівності $h(x)=h_0(x)$ і $\gamma(x)=0$ у рівнянні (3), знаходимо значення тиску P_g для заданих параметрів n, a_g, b_g і $h_0(x)$; підставляємо отримане значення P_g у рівняння (1) і визначаємо висоту щілини $h(x)$ для заданого розтягувального зусилля p; підставляємо функцію $h(x)$ у рівняння (2), і для заданого q визначаємо стрибок температури $\gamma(x)$. Далі, на кожному наступному кроці ітераційного процесу отримані функції $h(x)$ і $\gamma(x)$ підставляємо у рівняння (3) і визначаємо значення тиску P_g і повторюємо вище описану процедуру для визначення $h(x)$ і $\gamma(x)$. Ітераційний процес завершується за умови досягнення відносної похибки між значеннями визначальних параметрів $h(0)$, $\gamma(0)$, P_g на поточній і попередній ітерації деякого значення $\varepsilon=10^{-5}$.

Для заданих параметрів розтягувальних зусиль p, теплового потоку q, кількості газу n, газових сталих a_g, b_g та коефіцієнта теплопровідності газу λ_g визначено розподіл розкриття щілини $h(x)$ та стрибка температури $\gamma(x)$ між її берегами. Проаналізовано вплив теплопровідності й тиску газу на коефіцієнти інтенсивності міжфазних напружень.

1. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів: Растр-7, 2017. 168 с.

УДК 691.5

В.П. Силованюк, д-р техн. наук, проф.
А.Є. Ліснічук, канд. техн. наук

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
(Львів, Україна, vsylovanyuk@gmail.com)*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ФІБРОБЕТОНІВ

Запропонована розрахункова модель для прогнозування тріщиностійкості волокнистих композитів, створених на основі цементної матриці. Встановлено основні чинники, що формують опір композитного матеріалу поширенню у ньому тріщини. Отримано просту інженерну залежність для розрахунку характеристики тріщиностійкості K_{IC}, яка дає можливість цілеспрямовано формувати оптимальний склад композита.

Вступ. Одним із основних критеріїв у сучасних підходах під час вибору конструкційних матеріалів є їх тріщиностійкість. Для бетону характеристики тріщиностійкості особливо важливі, оскільки це крихкий матеріал і руйнується він, як правило, внаслідок поширення тріщини.

Зазвичай, досліджуючи тріщиностійкість бетонів, абстрагуються від їх структурної неоднорідності, вважаючи матеріал суцільним і однорідним [1–6]. Такий підхід до визначення тріщиностійкості бетону конкретного складу дає, звичайно, достовірні результати. Однак на їх основі неможливо прогнозувати зміну тріщиностійкості матеріалу за зміни параметрів однієї з фаз.

Тріщиностійкість цементного каменю. Встановимо спочатку тріщиностійкість зв'язуючої фази композитного матеріалу – цементного каменю. Його основними дефектами є пори, розміри яких можуть змінюватись у широких межах від кількох мікрон до міліметра. Фронт макротріщини в такому матеріалі проходить через пори, внаслідок чого вершина тріщини затуплена з радіусом кривизни максимальних характерних пор ρ (рис. 1).

Тріщина відриву поширюватиметься за умови, що деформація ε_y в її околі досягне граничного значення ε_c. Деформацію на продовженні початково уже затупленої порами макротріщини встановимо на основі таких міркувань. Деформація уявного включення з нульовими пружними модулями, що заповнює фізичну тріщину в точці $x=a-\rho$ може бути виражена залежністю

$$\varepsilon_y = \int_{2\rho}^{2\rho+\delta} \frac{dy}{y} = \ln\left(1+\frac{\delta}{2\rho}\right), \tag{1}$$

де δ – розкриття тріщини в точці $x=a-\rho$. Згідно з теоремою про консервативність поля деформацій в еліптичному (еліпсоїдальному) включенні [7] та припущенням про еліптичну форму контуру тріщини біля вершини, деформацію на відрізку $a-\rho \le x \le a$ можна вважати однорідною.

З умови сумісності деформацій уявного включення і матриці в точці $x=a$ слідує, що деформацію матриці в околі макротріщини виражає залежність (1). Таким чином, умовою росту тріщини буде виконання рівності

$$\ln(1+\frac{\delta_c}{2\rho})=\varepsilon_c\,, \tag{2}$$

де δ_c – критичне розкриття тріщини.

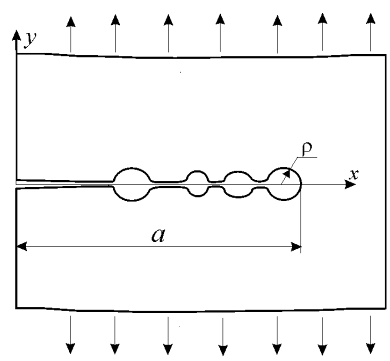


Рис. 1. Схематичне зображення контуру тріщини в матеріалі з порами

У механіці руйнування для крихких матеріалів відома залежність [8], що пов'язує розкриття тріщини δ з коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I:

$$\delta=\frac{(1-\nu^2)K_\mathrm{I}^2}{\sigma_0\cdot E}\,. \tag{3}$$

Тут σ_0 – напруження в зоні передруйнування; E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу, відповідно. Беручи до уваги співвідношення (2), (3), отримуємо вираз для обчислення характеристики тріщиностійкості – граничного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{\mathrm{I}C}$

$$K_{\mathrm{I}C}=\sqrt{\frac{\sigma_0 E\rho(\exp\varepsilon_c-1)}{1-\nu^2}}\,. \tag{4}$$

Врахувавши залежність модуля пружності E цементного каменю від об'ємного вмісту пор [9]

$$E=E_m(1-V_p^{2/3})\,, \tag{5}$$

а також отриману раніше [10] формулу для обчислення міцності цементного каменю від вмісту дефектів типу тріщин

$$\sigma_\mathrm{B}^c=\sigma_\mathrm{B}(1-\omega)\,, \tag{6}$$

на основі виразу (4) отримуємо розрахункову залежність для прогнозування $K_{\mathrm{I}C}^c$ цементного каменю

$$K_{IC}^c=\sqrt{\frac{\sigma_B E_m(1-V_p^{2/3})\rho(\exp\varepsilon_c-1)(1-\omega)}{(1-\nu^2)}}\,, \tag{7}$$

де E_m – модуль пружності цементної матриці; V_p – об'ємний вміст пор; σ_B – границя міцності матеріалу матриці; ω – параметр, що відображає пошкодженість матеріалу тріщинами; за напруження σ_0 тут прийнято границю міцності σ_B^c цементного каменю.

Тріщиностійкість фібробетону. Розглянемо тепер композитний матеріал – фібробетон, матрицею якого є цементний камінь, армувальний матеріал – мікроволокна (базальтові, скляні, вуглецеві тощо). Для таких матеріалів отримана [10] залежність для розрахунку їх міцності за розтягу

$$R_{bt}^f = (1-\omega)(\lambda\sigma_f V_f (1-\frac{r\sigma_f}{l\sigma_m}) + \sigma_m(1-V_f)), \tag{8}$$

де V_f – об’ємний вміст волокон; σ_f, σ_m – міцність волокон та цементного каменю, відповідно; l – довжина волокон; r – радіус волокна; λ – коефіцієнт приведення хаотичного армування до напрямленого ($\lambda = 1$ – для напрямленого армування вздовж осі розтягу; $\lambda = 0{,}33$ – для хаотичного).

Таблиця 1. Механічні характеристики фібри

Назва фібри	ε_c	Густина, г/см^3	σ_B, МПа	E_f, ГПа
Базальтова	0,033	2,65	1200	110
Скляна	0,048	2,46	3310	76
Кевлар 29	0,015	1,44	3620	41,4
Кевлар 149	0,036	1,47	3480	41,4
Поліпропіленова	0,15	1,18	500	38
Поліакрилонітрил.	0,11	2,65	500	75
Вуглецева	0,016	1,8	5100	228

Модуль пружності композита з порами можна розрахувати на основі формули [9]

$$E = E_m(1-V_p^{2/3})(1+\frac{V_f}{(m/(m+V_p^{2/3}-1))-V_f^{1/3}}), \quad m = \frac{E_m}{E_f}, \tag{9}$$

де E_f – модуль пружності волокна.

Враховуючи співвідношення (4), (8), (9), отримуємо залежність для прогнозування тріщиностійкості композитного матеріалу

$$K_{Ic}^f = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\left((1-\omega)\left(\lambda\sigma_f V_f\left(1-\frac{r\sigma_f}{l\sigma_m}\right)+\sigma_m\left(1-V_f\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(E_m\left(1-V_p^{2/3}\right)\left(1+\frac{V_f}{\left(m/\left(m+V_p^{2/3}-1\right)\right)-V_f^{1/3}}\right)\right)\rho\left(\exp\varepsilon_c-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

На основі отриманої формули графічно зображено (рис. 2) залежність параметра тріщиностійкості K_{IC}^f композитного матеріалу від об’ємного вмісту стохастично орієнтованої фібри різної природи та пошкодженості матеріалу порами і тріщинами. Механічні характеристики волокон подані у табл. 1.

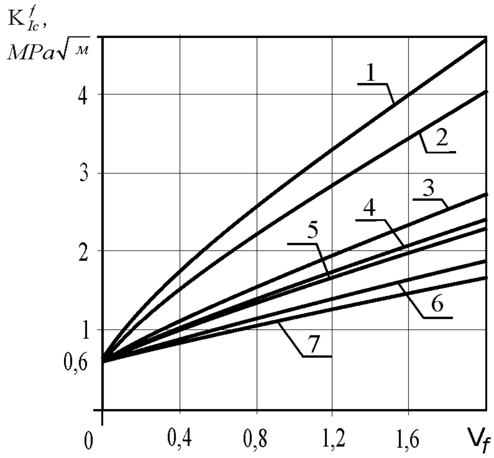


Рис. 2. Прогнозована тріщиностійкість цементного каменю, армованого фіброю: 1 – поліпропіленовою; 2 – поліакрилонітриловою; 3 – скляною; 4 – кевлар 149; 5 – базальтовою; 6 – вуглецевою; 7 – кевлар 29; ρ=*15 μm*

Висновки. Отримана розрахункова залежність для встановлення тріщиностійкості композитів на основі цементної матриці K_{IC}. Розрахунки показали, що для забезпечення високої тріщиностійкості композита визначальним чинником є деформаційна здатність армувальних волокон. Найвищу тріщиностійкість матеріалу забезпечило армування поліпропіленовою фіброю, для якої характерна незначна міцність, але висока деформативність. Натомість армування цементного каменю високомодульними і міцними вуглецевими волокнами та кевларом призводить до створення міцних композитних матеріалів, але з дещо нижчими характеристиками тріщиностійкості.

1. Kaplan H.F. Crack propagation and the fracture of concrete. *ACI Journal.* 1961. Vol. 58. No. 5. P. 531–610. https://doi.org/10.14359/7999

2. Brown J.H. Measuring of the fracture toughness of cement paste and mortar. *Mag. Of Concrete Res.* 1972. Vol. 24. P. 185–196. https://doi.org/10.1680/macr.1972.24.81.185

3. Naus D.J., Lott J.L. Fracture toughness of Portland cement concretes. *ACI Journal.* 1969. Vol. 66. P. 481–489. https://doi.org/10.14359/7375

4. Naus D.J., Batson J.B., Lott J.L. Fracture mechanics of concrete. *Fracture Mechanics of Ceramics*. 1974. Vol. 2. P. 469–482. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7014-1_2

5. Evans E.G., Clifton J.R., Anderson E. The Fracture Mechanics of Mortars. *Cement and Concrete Research.* 1976. Vol. 6. No. 4. P. 535–548. https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90082-X

6. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. Москва: Стройиздат, 1982. 196 с.

7. Eshelby J.D. The stresses on and in a thin inextensible fibre in a strerched elastic medium. *Eng. Fract. Mech.* 1982. Vol. 16. No. 3. P. 453. https://doi.org/10.1016/0013-7944(82)90124-2

8. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка. 1991. 416 с.

9. Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. Т. 5: Разрушение и усталость. Перевод с англ. под ред. Г.П. Черепанова. Москва: Мир, 1978. 488 с.

10. Силованюк В.П., Юхим Р.Я., Ліснічук А.Є., Івантишин Н.А. Розрахункова модель фібробетону на міцність за розтягу. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2015. Т. 51. № 3. С. 39–45.

УДК 539.3

В.З. Станкевич, канд. фіз.-мат. наук, доц.

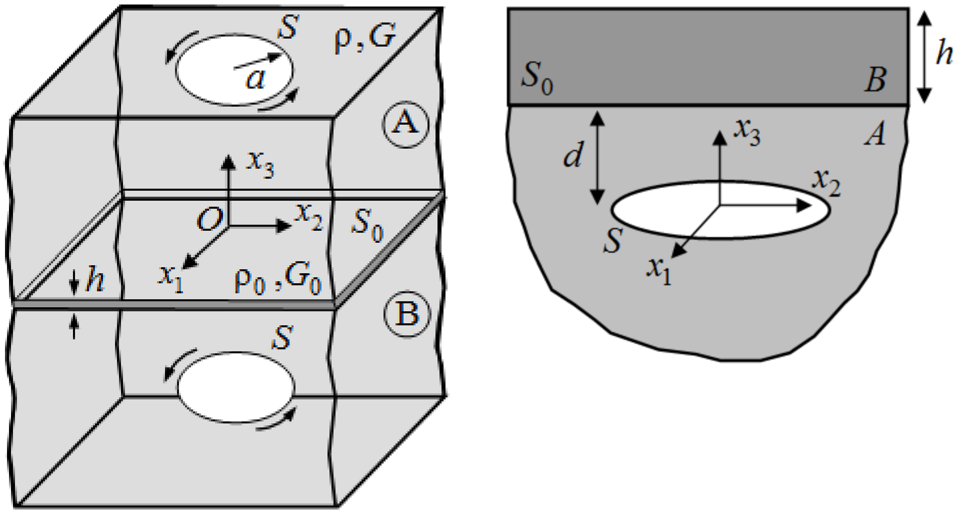
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Львів, Україна, adm@iapmm.lviv.ua)

ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОМПОЗИТУ З ТРІЩИНАМИ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ЙОГО КОМПОНЕНТ

У багатьох практичних ситуаціях під час досліджень напружено-деформівного стану кусково-однорідних тіл з тріщинами в умовах усталеного в часі характеру навантажень слід враховувати можливість неідеального контакту компонент тіла на інтерфейсній поверхні, зокрема від наявності тонкого пружного прошарку на межі розмежування різних матеріалів або тонкого пружного покриття тіла. Розв’язування таких задач у точній постановці вимагає проведення громіздких математичних викладок і обчислень. У деяких випадках на основі певних припущень щодо геометричних і механічних властивостей тонкостінних елементів зазначені проблеми вдається розв’язати у спрощеній постановці. Так, у випадку спряження двох пружних півпросторів з тріщинами через тонкий проміжний шар із відмінними механічними характеристиками під час точної постановки задачі потрібно враховувати реальну геометрію шару задоволенням умов контакту на двох паралельних інтерфейсних поверхнях між прошарком та півпросторами. Для уникнення зазначених труднощів у роботах [1, 2] запропоновано використовувати “модель пружинного контакту” для опису динамічного впливу тонкого прошарку на розкриття тріщини і хвильові поля у півпросторах, яка полягає у припущенні, що довжини згенерованих пружних хвиль набагато більші за товщину прошарку, що справедливо для низькочастотного діапазону навантаження. Ця модель використовує некласичні крайові умови недосконалого зв’язку для розглянутих півпросторів через поверхню розмежування, які є лінійними і пов’язують розрив переміщень із поверхневими зусиллями. У випадку покриття півпростору тонким пружним шаром, товщина якого набагато менша за довжину згенерованих хвиль, у працях [3] використали також спеціальні “ефективні крайові умови”, виведені асимптотичним підходом. Крайові умови на інтерфейсі півпростору і шару заміняють крайовими умовами у вигляді диференціальних співвідношень на поверхні півпростору, які пов’язують напруження у півпросторі з його переміщеннями за допомогою пружних і геометричних параметрів покриття. У результаті наявність покриття заміняють натягом на поверхні півпростору. Значний інтерес представляє вплив проміжного шару та покриття на перерозподіл напружень у тілі за наявності у ньому тріщин.

У роботі запропоновано гранично-інтегральний підхід до розв’язування динамічних задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами.

Розглянуто випадок біматеріалу з двох пружних півпросторів, спряжених тонким прошарком та півпростору з тонким пружним покриттям. Тіла містять плоскі кругові тріщини, паралельні інтерфейсам S_0 . Протилежні поверхні $S^{\pm}$ дефектів зазнають дії гармонічих у часі крутних навантажень. Матеріали півпросторів характеризуються модулем зсуву G , густиною ρ , а прошарку – G_0 і ρ_0 відповідно.



Схеми задач

Інтегральні подання для переміщень та напружень у композитах вибрано у вигляді потенціалів Гельмгольца з невідомими густинами, які характеризують зміщення точок протилежних поверхонь тріщин. Шляхом задоволення некласичних крайових умов на інтерфейсних поверхнях задачу зведено до розв’язання системи двовимірних граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій розкриття тріщин.

Показано, що отримані інтегральні рівняння належать до гіперсингулярних. Проведено регуляризацію граничних інтегральних рівнянь з подальшим їх числовим розв’язуванням. За допомогою значень розв’язків на контурі тріщин обчислені динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень поздовжнього зсуву.

Досліджено вплив на значення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень співвідношення фізичних параметрів матеріалів компонент тіла, товщини пружного прошарку та покриття, глибини залягання дефектів та частоти прикладеного навантаження.

1. Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S.I., Seghi R.R. Effective spring stiffness for a periodic array of interacting coplanar penny-shaped cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50. Iss. 18. P. 2817–2828. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.006

2. Golub M.V., Doroshenko O.V., Boström A. Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 81. P. 141–150. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.11.021

3. Craster R.V., Kaplunov J. Dynamic localization phenomena in elasticity, acoustics and electromagnetism. Springer International Publishing, 2013. 260 p. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1619-7

УДК 620.168.16

М.С. Стечишин, д-р техн. наук, проф.
Н.С. Машовець, канд. техн. наук, доц.
А.В. Мартинюк, канд. техн. наук, доц.
В.В. Люховець

Хмельницький національний університет
(Хмельницький, Україна, av.mart@ukr.net)

ЗАЛЕЖНІСТЬ ЗНОСОСТІЙКОСТІ КЕП ВІД ОБ'ЄМНОГО ВМІСТУ ЗМІЦНЮЮЧОЇ ФАЗИ

Досліджено кавітаційно-ерозійну зносостійкість сформованих композиційних електролітичних покриттів (КЕП) з частинками SiC різних геометричних розмірів в нейтральних, кислих та лужних середовищах. Показано, що КЕП з частинками $SiC_{нано}$ і SiC_5 в середньому в 6 разів підвищують зносостійкість сталі 45 нормалізованої в жорсткій воді, в 11 разів в 3%-му розчині NaCl і більше, ніж в 16 разів, в кислому середовищі. Дослідження також показали, що із зростанням корозійної активності середовища ефективність дії КЕП зростає, а збільшення розмірів частинок SiC зменшує кавітаційно-ерозійну зносостійкість покриття.

Встановлено, що збільшення об'ємного вмісту частинок $SiC_{нано}$ і SiC_5 в нікелевій матриці підвищує кавітаційно-ерозійну стійкість КЕП у всіх середовищах. Ефективність впливу цих частинок на зносостійкість КЕП в 3 %-му розчині NaCl проявляється при їх об'ємному вмісті матриці $C_\alpha \geq 10\%$.

Для частинок SiC_{50} і SiC_{28} максимальні значення кавітаційно-ерозійної зносостійкості в усіх досліджених середовищах досягаються при їх вмісті в нікелевій матриці $C_\alpha = 22...25\%$.

Зміцнення нікелевої матриці частинками SiC і B, залежно від їх розмірів, здійснюється за двома механізмами: частинки $SiC_{нано}$, SiC_5 і B, розміщуючись по границям кристалів нікелю, блокують поля деформацій і рух дислокацій через границю кристалів, а крупні частинки SiC_{28} і SiC_{50} сприймають на себе ударні кавітаційні хвилі, які амортизуються і гасяться в більш пластичній нікелевій матриці.

Поєднання різних механізмів зміцнення матриці крупними і дрібними частинками наповнювача привело до створення градієнтних багатошарових КЕП з «прямим» і «оберненим» градієнтами структури по товщині шару покриття. При «прямому» градієнті на основу наносять більш крупні частинки наповнювача, а далі формуються шари з дедалі дрібнішими частинками. Наприклад, у нашому випадку покриття з «прямим» градієнтом наносять у такій послідовності:основа (сталь 45) $\rightarrow$ $SiC_{50} \rightarrow$ $SiC_{28} \rightarrow$ $SiC_5 \rightarrow$ $SiC_{нано}$, а при «оберненому» градієнті, навпаки. Застосування КЕП градієнтного типу підвищує їх зносостійкість від 4 до 7 разів, що автор роботи [1] пояснює сприятливим розподілом внутрішніх напружень, особливо при застосуванні КЕП з «прямим» градієнтом їх будови. Встановлено також, що лазерне формування поверхневих шарів градієнтної будови підвищує корозійно-ерозійну стійкість деталей апаратів хімічної промисловості в середовищах соляної кислоти та аміаку в середньому у 6…8 разів [2].

Враховуючи, що кавітаційно-ерозійна зносостійкість зумовлена двома факторами: корозійним і механічним, необхідно дослідити не лише фізико-механічні характеристики, але і зміну їх електрохімічних характеристик та корозійну стійкість залежно від технологічних параметрів електролізу, природи і геометричних розмірів частинок наповнювача, його вмісту в матриці і т.д.

1. Герц Г. Электрохимия. Новые воззрения: пер. с англ. Москва: Мир, 1983. 231 с.

2. Булатов, А.С. Пинчук В.Г., Лазарева М.Б. Зависимость ширины линии ФМР от плотности дислокаций в никеле. *Физика металлов и металловедение.* 1972. Т. 34. Вып. 5. С. 1066–1069.

УДК 539.3

С.В. Угрімов, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.
В.А. Кобильнік

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, sugrimov@ipmach.kharkov.ua)

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТА КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ ІЗ НАНОАРМУВАННЯМ

У сучасній аерокосмічній техніці широко використовуються тонкостінні одно- та багатошарові оболонкові конструкції. Однією із найголовніших вимог при проектуванні таких елементів є забезпечення меншої ваги усієї конструкції. Але можливості для подальшого зниження ваги оболонкових конструкцій при використанні класичних матеріалів практично вичерпані. Саме тому, перспективним напрямком у аерокосмічній техніці стало використання нових штучно створених матеріалів із наперед заданими механічними властивостями, які обираються відповідно до умов експлуатації конструкцій. Останнім часом багато уваги приділяється використанню нанокомпозитів – композиційних матеріалів, посилених вуглецевими нанотрубками. За рахунок використання нановключень, які мають міцнісні характеристики на декілька порядків вищі за аналогічні параметри сталі та відносно невелику питому вагу, досягаються висока жорсткість та міцність матеріалу, що дає можливість отримувати з нього легкі конструкції. Крім того, нановключення сповільнюють розвиток дислокацій у композиті.

Армування оболонкових конструкцій вуглецевими нанотрубками може супроводжуватися створенням різного розподілу їх по товщині та по площині оболонки, що дозволяє отримувати функціонально-градуйовані матеріали та локалізовано насичувати нановолокнами місця концентрації навантажень. Найбільш поширеними є п’ять типів армування нановолокнами по товщині (рис. 1): рівномірне (UD), лінійне збільшення щільності нановолокон від внутрішньої до зовнішньої поверхні (FG-V), лінійне збільшення щільності нановолокон від зовнішньої до внутрішньої поверхні (FG-Λ), лінійне збільшення щільності нановолокон по товщині від серединної поверхні (FG-X); лінійне зменшення щільності нановолокон від серединної поверхні оболонки (FG-O) [1–3]. Також досить часто застосовується експоненціальне збільшення нановолокон по товщині. Нерівномірний розподіл волокон по товщині композита приводить до залежності пружних характеристик та густини від поперечної координати. У результаті, коефіцієнти у диференціальних рівняннях, які описують поведінку композита, залежать від поперечної координати, що істотно ускладнює розв’язок отриманих рівнянь [4].

Для визначення механічних властивостей нанокомпозитного матеріалу існує декілька підходів. Найбільш поширеними на практиці є метод Морі-Танака [5, 6] та правило змішування [1–3]. Перший метод застосовується для більш детального аналізу механічних властивостей матеріалу із включеннями (наночастинками), а другий є більш простим у використанні. Він заснований на усередненні властивостей матеріалу конструкції і досить часто застосовується при аналізі макродеформацій звичайних композитів та нанокомпозитів. Саме цей метод і був застосований у роботі для отримання механічних характеристик нанокомпозита.

Для описання поведінки тонкостінних елементів конструкцій зазвичай використовуються різні двовимірні моделі, які засновані на спрощеному описанні процесу деформування по товщині оболонки [7, 8]. Але механічні властивості нанокомпозита змінюються вздовж товщини, що потребує застосування некласичних моделей оболонок для їх аналізу, а також проведення додаткового дослідження можливостей застосування різних двовимірних моделей для нанокомпозитів. Найбільш просто границі застосування двовимірних теорій можна отримати шляхом порівняння результатів розрахунку з аналогічними даними, отриманими на основі тривимірної теорії пружності.

У роботі розглянуто процес деформування та коливання одно- та багатошарових циліндричних панелей, що знаходяться під дією зовнішніх силових навантажень як статичних, так і динамічних. Кожний шар панелі виготовлено з нанокомпозита із довільним типом армування. Поведінка панелі описується у циліндричній системі координат r, φ, z (рис. 2).

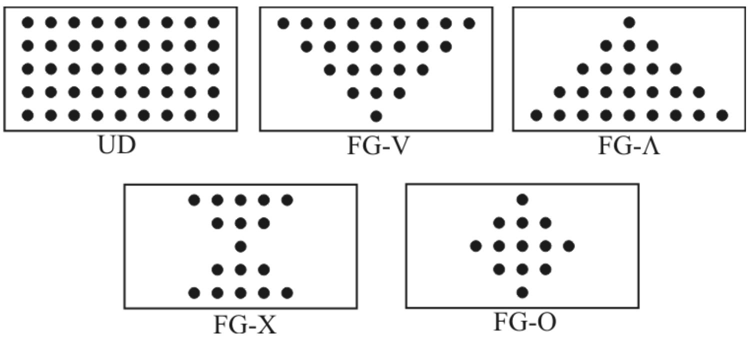


Рис.1. Розподіл нанотрубок по товщині

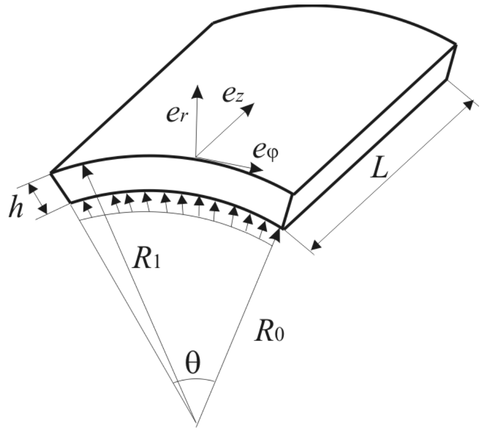


Рис.2. Циліндрична панель

Деформації оболонки вважаються малими й описуються лінійними залежностями. Згідно з правилом змішування, ефективні властивості нанокомпозитного матеріалу можуть бути обчислені за формулами [1–3]

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m, \quad \frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m},$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m}, \quad \rho = \rho_{CN} V_{CN} + \rho_m V_m,$$

де E_{11}, E_{22}, G_{12} – осереднені модулі Юнга та зсуву нанокомпозита, $E_{11}^{CN}, E_{22}^{CN}, G_{12}^{CN}$ – модулі Юнга та зсуву вуглецевих нанотрубок; E^m, G^m – модуль Юнга та зсуву матриці; V_{CN}, V_m, – об'ємна частка нанотрубок та матриці в композиті, які задовольняють співвідношенню $V_{CN} + V_m = 1$; η_1, η_2, η_3, – параметри ефективності наноармування, які визначаються експериментально; ρ_{CN}, ρ_m, ρ – питома маса нанотрубок, матриці та нанокомпозита в цілому.

Поведінка кожного шару композита описується тривимірними рівняннями

$$\frac{\partial p_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\partial p_{zr}^i}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(p_{rr}^i - p_{\varphi\varphi}^i) = \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial p_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{\partial p_{z\varphi}^i}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}^i}{\partial \varphi} + \frac{2 p_{z\varphi}^i}{r} = \rho^i \frac{\partial^2 u_\varphi^i}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial p_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}^i}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} + \frac{p_{rz}^i}{r} = \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2},$$

де i – номер шару; p_{jk}^i – компоненти тензора напружень i-го шару; ρ^i – густина i-го шару.

Система рівнянь доповнюється умовами на зовнішніх поверхнях

$$p_{rz}^1 = p_{r\varphi}^1 = 0,\ p_{rr}^1 = -q_r^1(\varphi, z, t) \ \text{ при } \ r = R_0,$$

$$p_{rz}^I = p_{r\varphi}^I = 0,\ p_{rr}^I = -q_r^I(\varphi, z, t) \ \text{ при } \ r = R_I,$$

умовами на границі контакту сусідніх шарів (умови жорсткого контакту)

$$u_k^i = u_k^{i+1},\ p_{r\varphi}^i = p_{r\varphi}^{i+1},\ p_{rz}^i = p_{rz}^{i+1},\ p_{rr}^i = p_{rr}^{i+1} \ \text{ при } \ r = \delta_i,\ \delta_i = \sum_{i=1}^{I} R_i,\ i = \overline{1, I-1},$$

та умовами на контурі опирання (умови шарнірного опирання по контуру)

$$p_{\varphi\varphi}^i = u_z^i = u_r^i = 0 \ \text{ при } \ \varphi = 0, \theta,$$

$$p_{zz}^i = u_\varphi^i = u_r^i = 0 \ \text{ при } \ z = 0, L,\ i = \overline{1, I}.$$

Метод розв'язання системи диференціальних рівнянь базується на розвиненні компонент переміщень і зовнішніх навантажень у ряди Фур'є по координатах φ, z. У результаті вихідна система рівнянь зводиться до системи диференціальних рівнянь у частинних похідних від r, t. Потім похідні по поперечній координаті r, які входять до рівнянь руху, умови контакту шарів і граничні умови замінюються на їх скінченнорізницевий вираз з використанням симетричної схеми [8, 9]. У результаті тривимірна задача про коливання багатошарової панелі зводиться для кожної гармоніки до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$[\mathbf{\Omega}]\mathbf{U}_{,tt} - [\mathbf{\Lambda}]\mathbf{U} = \mathbf{P}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0,$$

де $[\mathbf{\Omega}]$, $[\mathbf{\Lambda}]$ – квадратні матриці; $\mathbf{U}$ – вектор, компонентами якого є переміщення точок у кожному шарі; $\mathbf{P}$ – вектор нестаціонарних зовнішніх навантажень.

Для розв’язання отриманої системи диференціальних рівнянь використовується модифікований метод розвинення розв’язку у ряд Тейлора, для визначення частот використовується метод Хессенберга, для розв’язання лінійних алгебраїчних рівнянь у задачі статичного деформування панелі застосовується метод Жордана-Гауса.

Проведено чисельне дослідження впливу щільності та характеру армування наноструктурами на НДС та власні частоти коливання панелей із різними геометричними характеристиками. Результати розрахунку співставляються із відомими розв’язками, отриманими іншими дослідниками. Показано, що наноармування істотно впливає на поведінку композита.

Розроблений підхід може бути корисним для визначення границь застосовності двовимірних моделей композитів із шарами, армованими нановолокнами.

1. Alibeigloo A. Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical panell. *Mechanical of Advanced Composite Materials*. 2014. Vol. 1. P. 49–60. https://dx.doi.org/10.22075/macs.2014.279

2. Yas M.H., Pourasghar A., Kamarian S., Heshmati M. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube. *Materials and Design*. 2013. Vol. 49. P. 583–590. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.01.001

3. Jam J.E., Pourasghar A., Kamarian S., Namdaran N. Free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panel reinforced by carbon nanotube. *Metall. Mater. Eng*. 2013. Vol. 19 (3). P. 203–216.

4. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) *Прикладная механика*. 2013. Т. 49. № 2. С. 3–70.

5. Seidel G.D., Lagoudas D.C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mechanics of Materials*. 2006. Vol. 38. Iss. 8–10. P. 884–907. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.06.029

6. Aragh B. S., Barati A. N., Hedayati H. Eshelby–Mori–Tanaka approach for vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43. Iss. 4. P. 1943–1954. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.004

7. Ugrimov S.V., Shupikov A.N. Layered orthotropic plates. Generalized theory. *Composite structures*. 2015. Vol. 129. P. 224–235. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.004

8. Угримов С.В. Анализ нестационарных колебаний многослойных ортотропных пластин по трехмерной теории. *Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов:* сб. науч. тр. Харьк. нац. аэрокосмического ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2015. Вып. 4. С. 145–153.

9. Shupikov A.N., Ugrimov S.V. Vibrations of multilayer plates under the effect ofimpulse loads. Three-dimensional theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36. Iss. 22. P. 3391–3402. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00156-5

УДК 539.3

Б.В. Успенский, канд. техн. наук
К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.
Н.Г. Сахно

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, Uspensky.kubes@gmail.com)

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ НАНОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Быстрый прогресс передовых производственных технологий привёл к появлению новых функционально градиентных материалов с включением нанотрубок (нанокомпозитов). Эти материалы являются перспективными для использования в аэрокосмической, энергетической, машиностроительной и других отраслях. Поэтому их свойства стали темой многих современных исследований. Для полноценного использования новых материалов необходимо развивать аналитические и численные методы, позволяющие проводить анализ поведения нанокомпозитных оболочек и пластин в различной среде.

Анализ динамической неустойчивости нанокомпозитных панелей и оболочек в последнее время становится актуальной тематикой научных исследований. Большое количество работ, посвящённых анализу флаттера нанокомпозитных оболочек под действием сверхзвукового потока, демонстрируют необходимость использования сдвиговых теорий высокого порядка для корректного анализа форм колебаний [1–5]. В работе [6] предлагается метод анализа флаттера нанокомпозитных цилиндрических оболочек.

Попытки анализа динамики составных оболочек велись уже давно. Так, в работе [7] описано экспериментальное исследование свободных колебаний составной оболочки, имеющей коническую и цилиндрическую части. Аналогичная система проанализирована методом конечноэлементного анализа в [8]. В [9–11] рассматриваются методы анализа динамики составных оболочек, состоящих из цилиндрических и конических отсеков.

В большей части теоретических работ, в которых проводится анализ составных оболочек, для обеспечения условий непрерывности оболочки используются дополнительные искусственные ограничения (краевые условия, виртуальные жёсткости на границе между частями оболочки и др.). Это обычно приводит к необходимости определения эмпирических весовых коэффициентов, введение которых неминуемо снижает точность решения.

В работе предложен метод анализа свободных колебаний и динамической неустойчивости составной нанокомпозитной функционально-градиентной оболочки в сверхзвуковом газовом потоке. Рассмотрена составная оболочка, имеющая коническую и цилиндрическую части. Составная оболочка рассматривается как обобщённая оболочка одинарной кривизны с кусочнолинейными геометрическими параметрами. Движение оболочки исследуется с помощью метода заданных форм на базе сдвиговой теории высокого порядка. Для описания динамики составной оболочки предложена система базисных функций, позволяющая автоматически удовлетворить условиям непрерывности перемещений точек оболочки на стыке оболочек. Уравнения движения оболочки получены в форме уравнений Лагранжа. Форма, на которой происходит потеря устойчивости оболочки, характеризуется большим числом волн в окружном направлении, что в корне отличается от результатов, полученных для цилиндрических оболочек [6]. На критическое давление потока существенно (до 1,5 раз) влияет тип нанокомпозита, который используется при создании оболочки.

Предложенный метод имеет преимущество перед методами, базирующимися на методе штрафных функций, поскольку не усложняет вариационную задачу и не требует введения дополнительных эмпирических весовых коэффициентов. Это позволяет легко масштабировать предложенный метод для исследования более сложных составных конструкций.

1. Chwał M., Muc A. Buckling and free vibrations of nanoplates-comparison of nonlocal strain and stress approaches. *Appl. Sci.* 2019. Vol. 9 (7). P. 1409. https://doi.org/10.3390/app9071409

2. Muc A. Modelling of carbon nanotubes behavior with the use of a thin shell theory. *J. Theor. Appl. Mech*. 2011. Vol. 49. Iss. 2. P. 531–540.

3. Matin M.R., Mirdamadi H.R., Ghayour M. Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration of nano-plate coupled with fluid flow. *Phys. E Low-Dimens. Syst. Nanostruct*. 2013. Vol. 48. P. 85–95. https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.12.001

4. Oveissi S., Toghraie D., Eftekhari S.A. Longitudinal vibration and stability analysis of carbon nanotubes conveying viscous fluid. *Phys. E Low-Dimens. Syst. Nanostruct*. 2016. Vol. 83. P. 275–283. https://doi.org/10.1016/j.physe.2016.05.004

5. Eltaher M.A., Khater M.E., Emam S.A. A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations and wave propagation of nanoscale beams. *Appl. Math. Model*. 2016. Vol. 40. Iss. 5–6. P. 4109–4128. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.11.026

6. Avramov K.V., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K.K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite cylindrical shells in supersonic flow. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. No. 3. P. 1853–1876. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05292-z

7. Hu W.C.L., Raney J.P. Experimental and analytical study of vibrations of joined shells. *AIAA J*. 1967. Vol. 5. No. 5. P. 976–980. https://doi.org/10.2514/3.4111

8. Lashkari M., Weingarten V.I. Vibrations of segmented shells. *Exp. Mech*. 1973. Vol. 13 (3). P. 120–125. https://doi.org/10.1007/BF02323969

9. Irie T., Yamada G., Myramoto Y. Free vibration of joined conical–cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 1984. Vol. 95. Iss. 1. P. 31–39. https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90256-6

10. Sivadas K.R., Ganesan N. Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness. *Comput. Struct*. 1990. Vol. 36. Iss. 3. P. 559–566. https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90290-I

11. Caresta M., Kessissoglou N. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2010. Vol. 329. Iss. 6. P. 733–751. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.003

УДК 539.3

В.А. Федоров, канд. техн. наук, доц.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
(Харьков, Украина, vf7@ukr.net)

ПРИНЦИПЫ И ЗАКОН СИММЕТРИИ

Симметрия является важным аргументом в фундаментальных проблемах физики [1], теоретических исследованиях [2] и технологии производства [3]. Принципы симметрии, а именно, принцип Кюри [4], а также принцип Неймана-Миннигероде [5], позволяют прогнозировать симметрию следствия при наличии таковой в причине независимо от природы объекта. Принцип Кюри позволяет уменьшать размерность или область определения проблемы, существенно упрощая ее решение.

Однако эти интеллектуальные достижения могут быть поставлены под сомнение тем, что принцип Кюри не является общепризнанным в научном сообществе. История принципов симметрии, начиная с работ Неймана, насчитывает почти два века [6]. Кюри сформулировал принцип как эвристическое утверждение без доказательства. До настоящего времени продолжается дискуссия о его правильности. Теоретические аргументы в пользу этого принципа приводятся в работах [7, 8]. В то же время в статьях [9, 10] отрицается его справедливость.

Таким образом, одних исследователей не убеждают доказательства, а других не убеждают опровержения. Основной причиной этого является отсутствие строгого доказательства принципа Кюри. Правдоподобные рассуждения, интуиция, аналогии, примеры, естественный язык изложения весьма важны для осмысления проблемы и являются необходимыми этапами ее решения. Однако они не могут заменить строгого доказательства, которое в обобщенном виде излагается в данном докладе.

Реальность является физическими полями и веществом, которые распределены в пространственно-временном континууме $\mathcal{X}$ точек $\mathrm{Y} = (t, Y_1, Y_2, Y_3) \in \boldsymbol{X}$, где t – время, Y_i – пространственные (эйлеровы) координаты.

Реальность представима набором физических величин, тензоров ${}^{\mathrm{V}}\hat{\boldsymbol{W}}_p(\boldsymbol{Y})$ ($p = 1,2,...$). Эти тензоры могут быть детерминированными или случайными. В последнем случае вместо ${}^{\mathrm{V}}\hat{\boldsymbol{W}}_p(\boldsymbol{Y})$ следует применить обращенную кумулятивную функцию распределения Π соответствующего случайного тензора ${}^{\mathrm{V}}\hat{\boldsymbol{W}}_p(\Pi, \boldsymbol{Y})$. Элементарным атрибутом реальности является каждый компонент физического тензора, представимый тройкой

$$\boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{Y}) = ({}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{W}_p, {}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{Y}), {}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{W}_p), \quad (1)$$

где ${}^{\mathrm{N}}\hat{\boldsymbol{W}}_p$ – его физическое имя. Второй элемент ${}^{\mathrm{V}}\hat{\boldsymbol{W}}_p(\boldsymbol{Y})$ представляет количественное распределение компонента в континууме $\mathcal{X}$. Третий элемент ${}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{W}}_p \subseteq \mathcal{X}$ является областью определения функции ${}^{\mathrm{V}}\hat{\boldsymbol{W}}_p(\boldsymbol{Y})$.

Из всех атрибутов (1) какие-то являются следствиями, которые организуем в кортеж $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{Y}), \ldots)$, а атрибуты их причины – в кортеж $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{X}), \ldots)$.

Математической моделью каузальности принимаем отображение

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}) = f(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})) \tag{2}$$

Для него принимаем справедливым принцип относительности Эйнштейна, который проявляется следующим образом: существует такая система отсчета $\mathcal{X}$ и такие ее преобразования $\varphi : \mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{X}$, относительно которых отображение f инвариантно.

Тогда справедлива следующая Лемма:
каждый автоморфизм прообраза $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ инвариантен относительно отображения f (является автоморфизмом образа $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$).

В физических терминах она формулируется в виде Закона симметрии:
каждое преобразование симметрии причины является также преобразованием симметрии следствия.

Принципы симметрии Кюри и Неймана-Миннигероде являются частными случаями данного закона симметрии и, таким образом, также доказаны.

1. Bourgoin A., Hees A., Bouquillon S., Le Poncin-Lafitte C., Francou G., Angonin M.-C. Testing Lorentz Symmetry with Lunar Laser Ranging. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117. P. 241301. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.241301

2. Francois M.L.M. A damage model based on Kelvin eigentensors and Curie principle. *Mechanics of Materials.* 2011. Vol. 44 . P. 23–34. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.07.017

3. Kuz'minov Yu.S. Curie Symmetry Principle and Growth of Single Crystals. *Crystallogr. Rep.* 2007. Vol. 52. No. 5. P. 906–913. https://doi.org/10.1134/S1063774507050227

4. Curie P. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, Symétrie d' un champ électrique et d'un champ magnétique. *Journal de Physique*. 1894. Vol. 3. No. 1. P. 393–415. https://doi.org/10.1051/jphystap:018940030039300

5. Minnigerode B. Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elastizität der Kristalle. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-phys. Klasse IIa.* 1884. Vol. 184. P. 195–226.

6. Katzir S. The emergence of the principle of symmetry in physics. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*. 2004. Vol. 35. No. 1. P. 35–65. https://doi.org/10.1525/hsps.2004.35.1.35

7. Chalmers A.F. Curie's Principle. *British Journal for the Philosophy of Science*. 1970. Vol. 21. Iss. 2. P. 133–148. https://doi.org/10.1093/bjps/21.2.133

8. Ismael J. Curie's Principle. *Synthese*. 1997. Vol. 110. P. 167–190. https://doi.org/10.1023/A:1004929109216

9. Norton J.D. Curie's Truism. *Philosophy of Science.* 2014. Vol. 83. No. 5. P. 1014–1026. https://doi.org/10.1086/687934

10. Roberts B.W. Curie's Hazard: From Electromagnetism to Symmetry Violation. *Erkenntnis*. 2015. Vol. 81. No. 5. P. 1011–1029. https://doi.org/10.1007/s10670-015-9779-1

УДК 539.3

М.В. Чернобривко, канд. техн. наук, ст. наук. співроб.
К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.
І.В. Біблік

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, chernobryvko @ipmach.kharkov.ua

ДЕФОРМУВАННЯ НАНОКОМПОЗИТНОГО КОРПУСУ ТВЕРДОПАЛИВНОГО ДВИГУНА ПРИ СТАРТІ РАКЕТИ

Найбільш небезпечним з точки зору аналізу напружено-деформованого стану корпусу твердопаливного двигуна є етап старту ракети, коли на корпус двигуна діють значні нестаціонарні навантаження, які можуть призвести до руйнування корпусу [1]. Ці навантаження характеризуються швидким зростанням внутрішнього тиску від нуля до свого максимального значення. Навантаження внутрішньої поверхні корпусу максимальним тиском відбувається протягом декількох мілісекунд. Після закінчення етапу старту ракети на корпус діє спадаючий тиск, який не може зруйнувати корпус.

Моделюється початок роботи ракетного двигуна. Досліджуються деформації в корпусі внаслідок нестаціонарного навантаження. Корпус моделюється оболонкою обертання, що складається з трьох нероз’ємних частин: лівого та правого днища у формі усічених півсфер та центральної циліндричної частини [2]. Матеріал конструкції – нанокомпозит. Розглядається п'ять основних типів армування композитної матриці вуглецевими нанотрубками [3]. Визначається тип нанокомпозитного матеріалу, що забезпечує найменші деформації у корпусі. На рис. 1 показана модель нанокомпозитного корпусу твердопаливного двигуна.

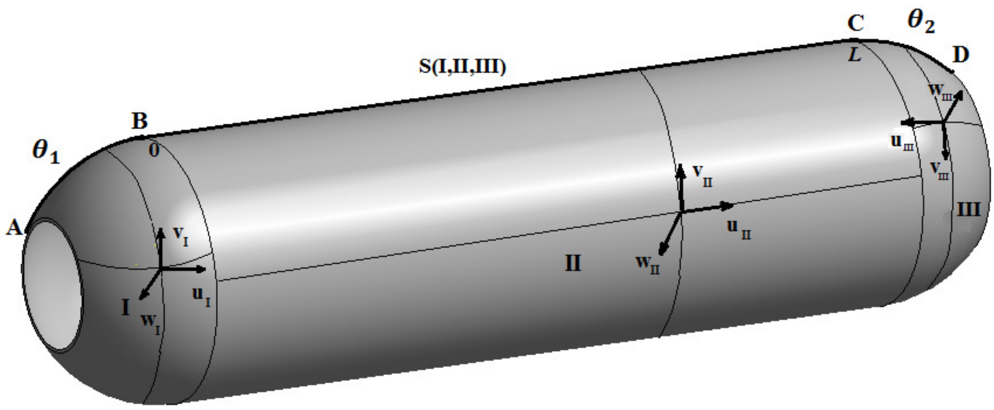
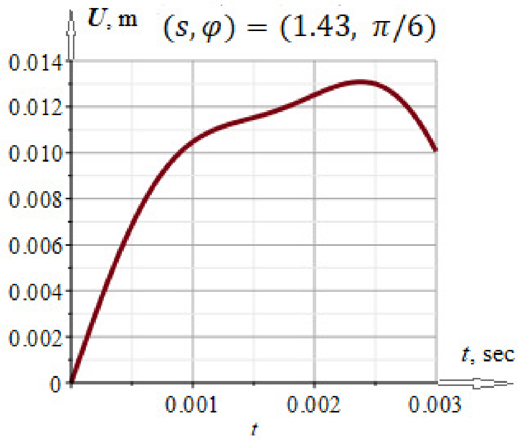
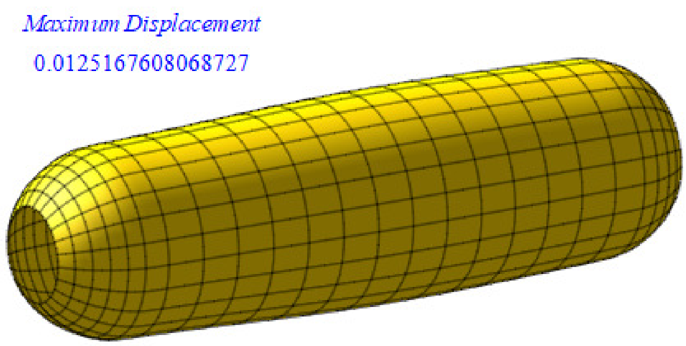


Рис. 1. Модель корпусу твердопаливного двигуна

Для матеріалу з функціонально-градієнтними властивостями, яким є нанокомпозитний матеріал, характер деформування поперечної нормалі по товщині є нелінійним та описується теоріями високого порядку [3]. Тому для опису деформування сферичних і циліндричних оболонок застосовується теорія Редді. Потенційні та кінетичні енергії оболонок, що входять в конструкцію, визначаються за цією теорією. Для виведення рівнянь руху конструкції застосовується метод заданих форм. Переміщення конструкції розкладаються за власними формами коливань, які розраховуються методом Релея-Рітца.

Розроблено модель деформування корпусу твердопаливного двигуна, яка враховує функціонально-градієнтні властивості конструкційного матеріалу. Запропоновано метод чисельного аналізу та алгоритми чисельної реалізації задачі. Проведено чисельні дослідження для корпусу, що виготовлено з п’яти основних типів нанокомпозитного матеріалу. На рис. 2 приведені результати досліджень переміщень ***U****(u, v, w)* для нанокомпозиту типу "FG-O".





а *б*

Рис. 2. Переміщення для нанокомпозиту типу "FG-O":
а – зміна в часі переміщень ***U****(u, v, w);*
б – форма серединної поверхні в момент часу t = 2,3 мс

Проведені дослідження дозволили вибрати тип наноармування, при якому деформації в корпусі найменші. Таким типом є "FG-O" Він дозволяє знизити максимальні переміщення в конструкції в 6,3 рази в порівнянні з типом ортотропного наноматеріалу "UD". Переміщення для типу "FG-X" близькі до типу "UD", а для типів наноматеріалу "FG-Λ" і "FG-V" вони їх перевищують в рази. Тому саме нанокомпозит типу "FG-O" доцільно використовувати для виробництва корпусів твердопаливних двигунів.

1. Дегтярев А.В. Ракетная техника. Проблемы и перспективы: избр. науч.-техн. публ. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2014. 418 с.

2. Avramov K., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A. Dynamics of solid propellant motor composite casing under impact pressure. *Meccanica*. 2018. Vol. 53, No. 13. P. 3339–3353. https://doi.org/10.1007/s11012-018-0876-5

3. Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. No. 3. P. 1853–1876. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05292-z

УДК 621.793 : 544.72.02 : 621.165.5

О.Л. Шубенко[1], чл.-кор. НАН України
В.Й. Сафонов[2], канд. техн. наук, ст. наук. співроб.
М.Ю. Бабак[1]**,** канд. техн. наук, ст. наук. співроб.
М.Л. Євич[1], канд. фіз.-мат. наук
О.Ю. Бояршинов[1], канд. техн. наук

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, shuben@ipmach.kharkov.ua)*
[2]*Інститут фізики твердого тіла, матеріалознавства і технологій (ІФТТМТ) ННЦ ХФТІ (Харків, Україна, v_safonov@kipt.kharkov.ua)*

СТАН ПРОБЛЕМИ ЗАСТОСУВАННЯ СУПЕРГІДРОФОБНОГО ПОКРИТТЯ НА СОПЛОВІ ЛОПАТКИ ДЛЯ ПОДОВЖЕННЯ РЕСУРСУ ВОЛОГОПАРОВИХ СТУПЕНІВ ТУРБІН ТЕС

Розвиток нанотехнологій призвів в останні роки до необхідності підвищення надійності вологопарових ступенів (ВПС) парових турбін (у додаток до традиційних методів забезпечення ресурсу робочих лопаток (РЛ) [1]) шляхом застосування супергідрофобних покриттів (SH – у англомовних джерелах), властивості яких у великій мірі визначаються структурою поверхневого шару товщиною в кілька нанометрів [2].

Саме утворення при SH властивості покриття напрямної лопатки (НЛ) ВПС невеликих ерозійнобезпечних крапель в проточній частині турбіни (замість плівки вологи на поверхні НЛ без покриття, що потім зривається з вихідної кромки у вигляді ерозійнонебезпечних крапель розміром 80-100 мкм), дає змогу підвищити ресурс РЛ. Цей ефект підтверджено результатами досліджень обтікання вологим потоком решітки нерухомих лопаток з SH покриттям на повітряному стенді [3]: утворюються краплі вологи розміром меншим 20 мкм.

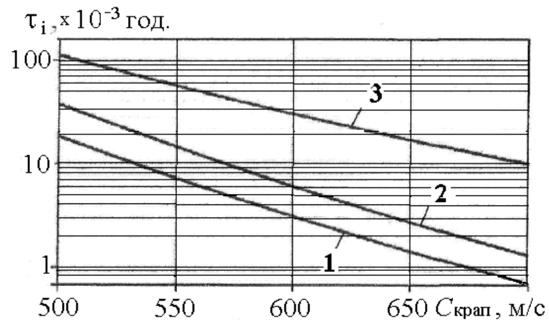


Рис. 1. Прогнозований час експлуатації турбіни τ_i з РЛ останнього ступеня довжиною 1220 мм у залежності від швидкості зіткнення крапель вологи з вхідною кромкою $C_{крап}$ при різних діаметрах крапель [4]: 1 –120 мкм; 2 – 80 мкм; 3 –20 мкм

Позитивний вплив течії в проточній частині ВПС крапель малого діаметру на прогнозований час експлуатації турбіни підтверджують результати дослідження [4]. З рис. 1 видно, що при швидкості $C_{крап}$ = 650 м/с, яка характерна для РЛ останніх ступенів турбін, $\tau_i \approx 16000$ год – крива 3, а при діаметрі крапель 80 мкм – крива 2, $\tau_i \approx 1160$ год. Тобто прогнозований час експлуатації турбіни у ~14 разів менше.

У відкритому доступі є інформація про застосування SH покриттів для НЛ турбінних ступенів та про відповідні патенти, наприклад [5]. Значущих же даних про використання таких покриттів для реальних парових турбін нами не знайдено. Тобто на даний час відсутня відкрита інформація з таких питань:

– у якій мірі SH характеристики покриттів НЛ впливають на характеристики ВПС;

– яка витривалість і вартість SH покриттів НЛ турбінного ступеня ЦНТ може бути забезпечена.

Попередня експертна оцінка впливу SH покриттів НЛ останнього ступеня турбіни типу К-300-240 на показники якості свідчить, що потужність цього ступеня за рахунок зменшення втрат енергії: (на тертя та схід вихрів при обтіканні НА, механічних втрат від удару крупних крапель по РЛ та втрат при їх обтіканні), а також витрати пари на внутрішню сепарацію вологи, може підвищитися на 50-150 кВт (на один вихлоп) при підвищенні на 30-50 % ресурсу останньої РЛ (дані будуть уточненні після продовження досліджень).

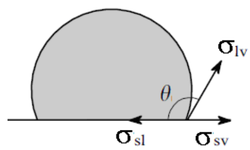
В останні роки дослідження по темі направлені на підвищення витривалості та технологічності (зменшення вартості) SH покриттів. Для вирішення цих питань необхідно приймати до уваги особливості фізичних процесів, що мають місце при взаємодії твердої поверхні з рідиною.

У результаті аналізу структури поверхні на мікро- та нанометрічному рівні [2], виявлено ряд моделей взаємодії твердої поверхні з рідиною, основні з яких: Юнга, Венцеля, Кассі-Бакстера (надалі Кассі), див. рис. 2.

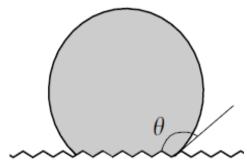
Рівновагу між силами, що діють на краплю на твердій гладкий підкладці (див. рис. 2, а), описує рівняння Юнга [2], яке застосовується лише до гладких, однорідних поверхонь інертних до рідини контакту (в природі не зустрічаються): $\cos\theta = (\sigma_{SV} - \sigma_{Sl})/\sigma_{1V}$, де θ – статичний контактний кут, поверхневі енергії переходу: σ_{SV} – тверда фаза – пара, σ_{Sl} – тверда фаза – рідка, а σ_{1V} – рідка фаза – пара (поверхневий натяг рідини).

У залежності від величини кута взаємодії краплі з ідеальною твердою поверхнею визначають такі типи покриттів: супергідрофільне ($\theta \leq 10$ º), гідрофільне (10 º$< \theta < 30$ º), гідрофобне ($\theta > 90$ º) та SH ($\theta \geq 150$ º).

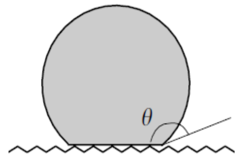
Венцелем [2] запропоновано модель режиму змочування (рис. 2, б), що враховує коефіцієнт шорсткості r ($r > 1$), який визначається як відношення фактичної площі поверхні до геометричної. При цьому видимий контактний кут $\theta_в$, що посилений шорсткістю, задається рівнянням: $\cos\theta_B = r\cos\theta$.



а



б



с

Рис. 2. Крапля на підкладці. Режими змочування поверхні [2]: а – Юнга; б – Венцеля; с – Кассі

Іншою моделлю, що описує поведінку краплі рідини при контакті з твердою поверхнею, є модель Кассі [2]. Це випадок, коли краплина рідини не може проникнути (див. рис. 2, с) у повітряні (парові) «кишені» між пагорбами, що характеризують шорсткість поверхні. У цій моделі кут $\theta_в$ враховує поверхню, що знаходиться в безпосередньому контакті з рідиною, і розраховується таким чином: $\cos \theta_B = f_\varphi\,(\cdot\cos \theta + 1) - 1$, де f_φ – доля проекції площі, що змочується, на поверхню підкладки. У стані Кассі контакт краплі з повітрям зменшує тертя по поверхні, що важливо при течії пари в умовах проточної частини турбіни.

Модель Венцеля термодинамічно більш стабільна і є станом рівноваги моделі Кассі, але саме функціонування останньої повинно забезпечуватися при SH покритті напрямної лопатки (НЛ) ВПС. Для вирішення мети роботи було досліджено досягнення у створенні SH покриттів.

На рис. 3 наведено загальну структуру SH ерозійно-стійкого покриття [5], що включає металеву матрицю 1 (зв'язує частинки з підкладкою, містить нікель або його сплави), полімерний полісилоксановий наповнювач з активованих (гомогенізованих) гідрофобних частинок 2 різної форми, в тому числі лускатих – 3, рівномірно розподілених по товщині, а також внутрішній ерозійно-стійкий шар.

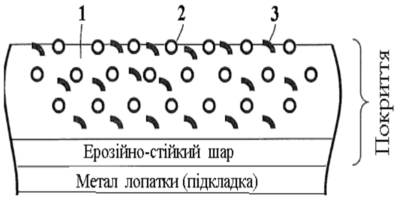


Рис. 3. Структура SH покриття [5]

У [6] запропоновано гібридні еластомірні / металооксидні наноструктурні матеріали для міцних і тих, що можуть самовідновлюватися, SH поверхонь на основі полідиметилсилоксан / діоксид титану (TiO_2). Для зовнішнього каркасу покриття застосовується тонка плівка TiO_2 (у попередніх пропозиціях титан використовується в якості поверхневих наночастинок, що проникають в поверхню еластомеру).

У США розроблено витривале SH покриття [7], що самовідновлюється. Воно складається з суміші матеріалу, названого «фторований поліуретановий еластомер» (FPU), і спеціалізованої SH молекули, що відома як «F-POSS», легко наноситься шляхом напилення, має злегка гумову еластичну текстуру та витримує 5000 циклів стирання за Табером.

Методом електроосадження розроблено надійні SH нікелеві мікро / наноструктури з антикорозійними і трибологічними властивостями [8]. При нанесенні цього SH покриття (товщина ~ 7 нм, кути: контакту – 165 ± 3 °, ковзання – 3 ± 1°) поверхня сталі вкривається структурою у вигляді листя лотоса (див. на рис. 4 відповідне зображення, що отримане за допомогою електронного мікроскопа). Після випробування на абразивне стирання по наждачному паперу поверхня зберігала SH при довжині переміщення ~160 мм [8].

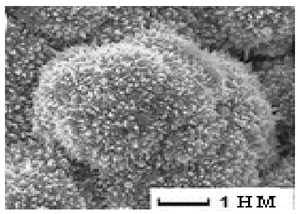


Рис. 4. Морфологія поверхні зразка нікелевого покриття [8]

Останнім часом досить широко застосовуються і керамічні покриття на основі оксидів лантаноїдів [9]. Вони мають гідрофобні і SH властивості, набагато міцніші ніж полімерні покриття.

Іншим перспективним напрямком є нанесення карбідо-хромових покриттів (мають високу ерозійну стійкість та гідрофобність) з використанням технології атомно-іонного розпилення матеріалів у вакуумі (AIP), що полягає в електронно-променевому випаровуванні матеріалу покриття у вакуумі з наступною іонізацією парової фази і осадженням її на поверхню підкладки [10, 11].

Наведені характеристики покриттів, а також досвід ІФТТМТ ННЦ ХФТІ з їх створення з використанням технологій AIP і осадження шляхом піролізу карбіду хрому з хроморганічної рідини "BARHOS" [10, 11], далі планується застосувати для розробки і виготовлення зразків довговічних SH покриттів та дослідження їх структурних властивостей. SH властивості зразків цих покриттів, їх придатність до застосування на НЛ ВПС планується дослідити в ІПМаш НАН України на установці, що створюється, а також оцінити їх вплив на ресурсні та економічні показники проточної частини парових турбін.

1. Шубенко А.Л., Ковальский А.Э. Каплеударная эрозия лопаточных аппаратов паровых турбин. Прогнозирование и методы защиты. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. 2012. № 7. С. 76–87.

2. Бойнович Л.Б., Емельяненко А.М. Гидрофобные материалы и покрытия: принципы создания, свойства и применение. *Успехи химии.* 2008. Т. 77. № 7. С. 619–638. http://dx.doi.org/10.1070/RC2008v077n07ABEH003775.

3. Plondke A.Ch. Droplet Characterization in the Wake of Steam Turbine Cascades. Graduate School, Master's Thesis, 5-2012, University of Tennessee. 78 p.

4. Медников А.Ф. Определение длительности инкубационного периода процесса каплеударной эрозии рабочих лопаток последних ступеней проектируемых паровых турбин большой мощности: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.04.12: Москва, 2012. 20 с.

5. Baumann T., Melas M., Grasso P.-D., Stankowski A., Olliges S., Widmer T. Coating for turbine parts. *US Patent* 0,178,699, filed Dec. 20, 2013, and issued Jun. 26, 2014.

6. Hoshian S., Jokinena V., Franssila S. Robust hybrid elastomer/metal-oxide superhydrophobic surfaces. *Soft Matter.* 2016. Vol. 12. P. 6526–6535. https://doi.org/10.1039/C6SM01095D

7. Golovin K., Boban M., Mabry J.M., Tuteja A. Designing Self-Healing Superhydrophobic Surfaces with Exceptional Mechanical Durability ACS Appl. *Mater. Interfaces*. 2017. Vol. 9. No. 12. P. 11212−11223. https://doi.org/10.1021/acsami.6b15491

8. Liu S., Zhang X., Seeger S. Solvent-Free Fabrication of Flexible and Robust Superhydrophobic Composite Films with Hierarchical Micro/Nanostructures and Durable Self-Cleaning Functionality. *ACS Applied Materials & Interfaces.* 2019. Vol. 11. No. 47. P. 44691–44699. https://doi.org/10.1021/acsami.9b15318

9. Zykova A., Safonov V., Yakovin S., Dudin S., Melnikova G., Petrovskaya A., Tolstaya T., Kuznetsova T., Chizhik S.A., Donkov N. Comparative analysis of platelets adhesion to the surface of Ta-based ceramic coatings deposited by magnetron sputtering 21st International Summer School on Vacuum. *Electron and Ion Technologies Journal of Physics*: *Conference Series.* 2020. Vol. 1492. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1492/1/012038

10. Safonov V. Plasma activated EB-deposition: Different modes of arc discharge and plasma characteristics. *ВАНТ.* 2017. №5 (111). С. 65–71.

11. Шубенко А.Л., Ковальский А.Э., Воробьев Ю.С., Картмазов Г.Н., Романенко В.Н. Влияние эрозии на основные эксплуатационные характеристики рабочей лопатки последней ступени цилиндра низкого давления мощной паровой турбины. Часть 2. Прогнозирование изменяющихся вследствие эрозионного износа вибрационных характеристик рабочей лопатки последней ступени и выбор способа ее пассивной защиты от эрозии. *Проблемы машиностроения.* 2010. Т. 13. № 1. С. 3–11.