

# **ВИКОРИСТАННЯ ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ В МЕТОДІ ГАЛЬОРКІНА НА ПРИКЛАДІ АНАЛІЗУ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ЗАЩЕМЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ**

**Ориняк І.В. Бай Ю.П.  
НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського**

**2020**

# ВСТУП

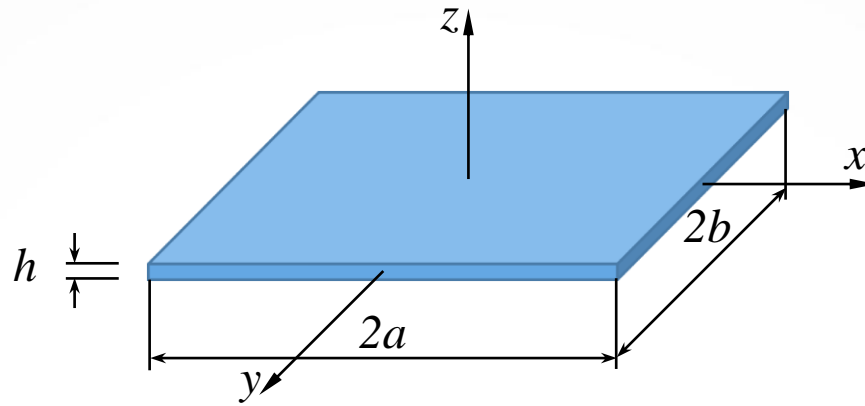
Останнім часом найбільш поширеними підходами для розв'язання задач статичної і динамічної пластин є:

а) використання аналітичного представлення [1], що йде від класичної роботи Фойгта 1890 р.

б) метод Гальоркіна-Рітца [2], точність якого залежить від вибору пробних функцій. Найбільш популярними функціями, що використовуються в якості пробних в методі Гальоркіна, є так звані балочні функції, що описують власні коливання балки, а також поліноміальні, гармонійні функції та їх комбінації, *sinc*-функції та інші. Детальне дослідження точності і ефективності використання різних наборів пробних функцій для аналізу коливань прямокутної защемленої пластини проведено в роботі [2].

Метою даної роботи є дослідження ефективності спеціально сконструйованих наборів послідовних експоненційних функцій щодо їх використання в методі Гальоркіна в задачах динаміки пластин. Результати представлено для задачі про вільні коливання прямокутної защемленої пластини, оскільки вона не має аналітичного розв'язку і вважається найбільш показовою для демонстрації ефективності наближених методів.

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ



Об'єкт дослідження – **прямокутна пластина**  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ ,  $|z| \leq h/2$ ,  
**защемлена по контуру.**

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Рівняння, що описує вільні коливання пластини:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \omega^2 w, \quad (1)$$

$w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega_1 t$  – функція прогинів серединної площини;

$\omega^2 = \omega_1^2 \rho h / D$  – умовна частота, що підлягає визначенню;

$D$  – жорсткість пластини при згині;  $\rho h$  – маса одиниці площі пластини.

Граничні умови:

$$w(x = \pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x = \pm a, y) = 0; \quad (2)$$

$$w(x, y = \pm b) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, y = \pm b) = 0. \quad (3)$$

# ДЕТАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

Введемо позначення:

$$\Gamma_k(x, L_x) = \exp(kx/L_x), \quad \Gamma_m(y, L_y) = \exp(my/L_y), \quad (4)$$

де  $k, m \in \mathbb{Z}$ ;  $L_x, L_y$  – параметри масштабування, значення яких співставні з характерними розмірами пластини.

Введемо **базисні (пробні) функції**, як суми послідовних наборів функцій  $\Gamma_k(x, L_x), \Gamma_m(y, L_y)$ :

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=0}^4 \alpha_{k,i} \Gamma_{2+k-i}(x, L_x), \quad (5)$$

$$\Phi_m(y) = \sum_{j=0}^4 \gamma_{m,j} \Gamma_{2+m-j}(y, L_y). \quad (6)$$

В (5), (6) коефіцієнти  $\alpha_{k,0}, \gamma_{m,0}$  ( $k, m = \overline{1, 4}$ ) покладаються рівними 1, а коефіцієнти  $\alpha_{k,i}, \gamma_{m,j}$  ( $k, i, m, j = \overline{1, 4}$ ) визначаються з граничних умов (2), (3).

# ДЕТАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

Наступним кроком вводиться множина двовимірних базисних функцій:

$$\Psi_{k,m}(x, y) = \Phi_k(x, L_x) \cdot \Phi_m(y, L_y). \quad (7)$$

Відповідно до методу Гальоркіна, функція прогинів розшукується у вигляді:

$$w(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N \beta_{k,m} \Phi_k(x, L_x) \cdot \Phi_m(y, L_y), \quad (8)$$

де  $\beta_{k,m}$  – невідомі коефіцієнти. Підставляючи (5), (6) в (7), (8), одержимо:

$$w(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N \beta_{k,m} \sum_{i=0}^{i=4} \alpha_{k,i} \sum_{j=0}^{j=4} \gamma_{m,j} \Gamma_{2+k-i}(x, L_x) \cdot \Gamma_{2+m-j}(y, L_y). \quad (9)$$

Підстановка представлень (9) в постановочне рівняння (1) і врахування властивостей функцій  $\Gamma_k(x, L_x)$ ,  $\Gamma_m(y, L_y)$  дозволяє одержати нев'язки  $\Omega_{k,m}(x, y)$  у вигляді:

# ДЕТАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

$$\Omega_{k,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{i=4} \sum_{j=0}^{j=4} \chi_{k,m}^{i,j} \Gamma_{2+k-i}(x, L_x) \cdot \Gamma_{2+m-j}(y, L_y), \quad (10)$$

де

$$\chi_{k,m}^{i,j} = \alpha_{k,i} \gamma_{m,j} \left( \left( \left( \frac{2+k-i}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{2+m-j}{L_y} \right)^2 \right)^2 - \omega^2 \right) = \lambda_{k,m}^{i,j} - \alpha_{k,i} \gamma_{m,j} \omega^2. \quad (11)$$

Відповідно до методу Гальоркіна, мінімізація проводиться по функціях, утворених як добуток пробних функцій по координатах  $x, y$  :

$$\Psi_Y(x, y) = \Phi_r(x) \Phi_q(y). \quad (12)$$

Помножимо нев'язки (10) на кожен із функцій (12) і проінтегруємо по всій площі пластини. Одержимо систему рівнянь:

$$\varphi_{k,m}^{r,q} \beta_{k,m} = \varphi_Z^Y \beta_Z = 0, \quad (13)$$

# ДЕТАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

$$\varphi_{k,m}^{r,q} = \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a \left( \sum_{i=0}^{i=4} \sum_{j=0}^{j=4} \lambda_{k,m}^{i,j} \Gamma_{2+k-i}(x, L_x) \cdot \Gamma_{2+m-j}(y, L_y) \times \right. \\ \left. \times \sum_{s=0}^4 \alpha_{r,s} \Gamma_{2+r-s}(x, L_x) \sum_{t=0}^4 \gamma_{m,t} \Gamma_{2+q-t}(y, L_y) \right) dx dy. \quad (14)$$

Система (13) може бути подана у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^1 - \omega^2 \cdot \varphi_1^1 & \varphi_0^2 - \omega^2 \cdot \varphi_1^2 & \dots & \varphi_{(2N+1)^2}^1 - \omega^2 \cdot \varphi_{(2N+1)^2}^1 \\ \varphi_0^2 - \omega^2 \cdot \varphi_1^2 & \varphi_0^2 - \omega^2 \cdot \varphi_1^2 & \dots & \varphi_{(2N+1)^2}^2 - \omega^2 \cdot \varphi_{(2N+1)^2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \varphi_{(2N+1)^2}^{(2N+1)^2} - \omega^2 \cdot \varphi_{(2N+1)^2}^{(2N+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{(2N+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Шукані власні частоти визначаються з умови рівності нулю детермінанту однорідної системи (15). Після визначення власних частот відповідні їм форми власних коливань знаходяться за звичайними процедурами.



# РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Чисельний розрахунок власних частот прямокутної защемленої пластини проведено для  $N = 0, \dots, 4$ . Результати розрахунків для  $N = 2$  (25 рівнянь в системі (15)),  $N = 3$  (49 рівнянь) та  $N = 4$  (81 рівняння), а також найбільш відомі в літературі аналогічні результати представлено в таблиці.

Використання 25 рівнянь не дозволило визначити 9-у та 10-у частоти. Всі інші частоти визначено з хорошою точністю. Використання 81 рівняння для перших восьми частот дає результати, що відрізняються від аналогічних для 49 рівнянь менш, ніж на 0,003%, в той час, як для 12-ої частоти похибка становить 0,5%. Порівняння з результатами інших авторів [3-6] показує незначну різницю.

Відносна похибка для перших чотирьох частот в порівнянні з класичною роботою Leissa A. [3]. становить менше, ніж 0,03%. В роботі El-Gamel M. [6], в якій використовувалось  $N \approx 150$  членів (тобто  $N^2$  рівнянь), наведено лише перші чотири власні частоти. Найбільша відносна похибка (для четвертої частоти), в порівнянні з одержаними в даній роботі результатами, менша, ніж 0,0002%. Отже, можна стверджувати про надзвичайну точність пропонованого підходу при відносно невеликій кількості використовуваних рівнянь.

# РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## Безрозмірні власні частоти для квадратної заземленої пластини

№	Пропонований підхід			El-Gamel M. [6]	Blevins R. [5]	Leissa A. [3]	Gorman D. [4]
	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$				
1	35,9855	35,985217	35,985193	35,985191	35,9915	35,992	35,984
2	73,4137	73,394121	73,393877	73,393857	73,413	73,413	73,40
3	73,4137	73,394121	73,393877	73,393878	73,413	73,413	73,40
4	108,2589	108,217880	108,216711	108,216517	108,269	108,27	108,20
5	131,7900	131,582561	131,580782	-	131,641	131,64	131,92
6	132,4211	132,207247	132,204900	-	132,243	132,24	131,92
7	165,2058	165,003733	165,000815	-	165,158	-	165,00
8	165,2058	165,003733	165,000815	-	165,158	-	165,00
9	-	211,772117	210,547862	-	-	-	210,52
10	-	211,772117	210,547862	-	-	-	210,52
11	220,3309	220,035401	220,033243	-	-	-	220,04
12	231,7419	243,192875	242,172416	-	-	-	242,28

# ВИСНОВКИ

В даній роботі для задачі про власні коливання прямокутної заземленої пластини застосовано метод Гальоркіна на основі спеціально сконструйованих наборів послідовних експоненційних функцій. Розв'язок будується як добуток двох незалежних множин функцій відносно координат  $x$  та  $y$ .

Представлені результати визначення власних частот для заземленої по контуру квадратної пластини при відносно невеликій кількості рівнянь СЛАР. Співставлення одержаних результатів з аналогічними, відомими в літературі, показує високу ефективність і надзвичайну точність запропонованого підходу.

# ЛІТЕРАТУРА

1. Banerjee R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case. *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 342. P. 177–199. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.12.031>
2. Moreno-García P., Araújo dos Santos J.V., Lopes H. A review and study on Ritz method admissible functions with emphasis on buckling and free vibration of isotropic and anisotropic beams and plates. *Arch Computat Methods Eng*. 2018. Vol. 25. P. 785–815. <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9214-7>
3. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973. Vol. 31. No. 3. P. 257–293. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2)
4. Gorman D. J. Free vibration analysis of rectangular plates. NY: Elsevier, 1982. 321 p.
5. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. Ch. 5: Natural Frequency of Plates and Shells. John Wiley and Sons, 2016. P. 203–259. <https://doi.org/10.1002/9781119038122.ch5>
6. El-Gamel M., Mohsen A., Abdrabou A. Sinc-Galerkin solution to the clamped plate eigenvalue problem. *SeMA Journal*. 2017. Vol. 74. P. 165–180. <https://doi.org/10.1007/s40324-016-0086-9>