

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ІМ. А. М. ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

**КОБИЛЬСЬКА ОЛЕНА
БОРИСІВНА**



УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ
ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ З РУХОМИМИ ТА
НЕРУХОМИМИ ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання
та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О. Б. Кобильська

Науковий консультант:

Ляшенко Віктор Павлович,

доктор технічних наук, професор

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Кобильська О. Б. Математичне та комп'ютерне моделювання теплових процесів у складних системах з рухомими та нерухомими осесиметричними елементами

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського Міністерство освіти і науки України, Кременчук. Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків, 2020.

У промисловості існує багато технологічних процесів, у яких важливу роль відіграє теплообмін у складних системах. Такими системами у металургії є прокатні стани, обладнання для 3-D друку та термічної обробки металів, у електромеханіці – електричні машини, у яких під дією струму виділяється тепло та відбувається теплообмін між обмотками. В роботі набувають подальшого розвитку математичні моделі процесів теплообміну на основі початково-крайових та нелокальних задач для рівняння теплопровідності за рахунок залучення інтегральних і складних граничних умов спряження імпедансного типу у багатопарових областях та складних системах. Обґрунтовується необхідність застосування методів теорії інтегральних та диференціальних рівнянь до розв'язання крайових та нелокальних задач в областях, що мають складну геометричну форму.

Тому можна зробити висновок про те, що тема дисертаційної роботи є актуальною та має важливе наукове і практичне значення. В дисертації розвивається новий науковий напрям у математичному моделюванні процесів теплообміну у складних системах на основі нелінійних крайових та нелокальних задач зі складними умовами теплообміну на граничних поверхнях.

Основна мета дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови

теплообміну між багатошаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв'язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями.

Розглянуто існуючі фізичні та математичні моделі теплових процесів у складних системах, які включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла і враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Наведено стислий огляд публікацій за темою дисертації, зроблено аналіз існуючих числових та аналітичних методів розв'язання нелінійних крайових та нелокальних задач, сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

В результаті дослідження відомих математичних моделей, побудованих на основі початково-крайових, крайових та нелокальних задач для диференціального рівняння теплопровідності формується єдина концептуальна точка зору щодо побудови математичних моделей теплових процесів у складних системах, що мають складну геометричну форму, наприклад прокатних станах, багатошарових виробів складної геометричної форми, в електричних машинах. Обґрунтовується доцільність розробки нових математичних моделей для розрахунків температурних розподілів у таких системах та їх конструктивних елементах під час їх роботи.

Розглянуто математичні моделі теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, запропоновано метод розв'язання задачі керування тепловим процесом, що відбувається у осесиметричних елементах складних систем. Це дає змогу підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Досліджено зв'язок нелокальної та крайової задачі, що описують один і той же фізичний процес нагрівання та обґрунтовуються переваги

застосування однієї з них по відношенню до іншої для описання того чи іншого класу теплового процесу. Такі задачі виникають при дослідженні температурних розподілів під час відпалу рухомого дроту та стрічки постійними або періодичнодіючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Проведені числові експерименти та побудовані температурні розподіли в умовах дії внутрішніх та зовнішніх джерел тепла, які підтверджують ефективність залучення нелокальних умов для описання теплових процесів. Це дозволяє визначати параметри керування процесом тепло і масопереносу, зокрема визначати джерела тепла та концентрації речовини.

Запропоновано метод розв'язання оберненої нелокальної задачі, що описує температурне поле у зоні нагрівання рухомого середовища внутрішніми джерелами тепла. Шляхом уведення до математичної моделі теплового процесу, який протікає в рухомій циліндричній області інтегральної умови визначено параметри керування температурним полем. Інтегральна умова побудована виходячи із фізичних міркувань протікання процесу, що дозволило підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Розглянуто математичні моделі теплових процесів, що відбуваються в рухомих осесиметричних елементах складних систем, таких, як пристрої для термічної обробки, де діють імпульсні джерела тепла. Зокрема, розглядаються теплові процеси під час термічної обробки металів і сплавів, в якій використовується циклічна багаторазова зміна температури.

Розглянуто математичні моделі температурного поля у рухомих стрічці, дроті та профілях з циклічно діючими імпульсними джерелами тепла. На основі цих моделей запропоновано формулювання обернених задач для однорідних та неоднорідних рівнянь теплопровідності. Обернені задачі спрямовані на знаходження параметрів керування температурним полем виробів. Ці параметри дозволяють підтримувати необхідний температурний розподіл у всій області нагрівання чи її частині. Зокрема, коли джерело тепла

є невідомою функцією, ми приходимо до оберненої задачі.

Для кожного випадку (внутрішнього, зовнішнього джерела тепла або їх комбінації) пропонується відповідний підхід до знаходження розв'язку оберненої задачі. Досліджуються та враховуються особливості впливу імпульсних джерел тепла на температурний розподіл.

Розглянуто математичні та фізичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багат шарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми. Побудовано умови імпедансного типу на границі шарів складної системи – валкового кристалізатора. У математичній моделі враховані різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхонь валка зі стрічкою та навколишнім середовищем. Запропоновано метод розв'язання задач, що описують побудовані моделі.

Побудована фізична модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двовалковому прокатному стані. Запропонована математична модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю. У математичній моделі враховані різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхні валка зі стрічкою та оточуючим його середовищем. Запропоновано метод розв'язання задачі. Уточнення математичної моделі полягає у врахуванні того, що зовнішня поверхня, у залежності від кута φ повороту валка прокатного стану навколо своєї осі, сприймає тепло від стрічки, що деформується, а потім втрачає його за межами зони деформації за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. Розглянуто методи побудови умов імпедансного типу для однорідного рівняння теплопровідності у двошаровій циліндричній та сферичній областях на межі розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками.

Побудовано математичні моделі теплових процесів, що протікають у складних системах (електричних машинах), які на відміну від існуючих математичних моделей враховують характер теплового обміну на межі

розділу шарів та дозволяють розраховувати температуру окремих частин складної області. Запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній системі з осесиметричними елементами – багатошаровому циліндрі, де в одній частині елементів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв'язання задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами.

У дисертації на основі виконаних теоретичних і експериментальних досліджень отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, яка полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей температурних розподілів у складних системах та методів їх дослідження. Такі складні системи включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи циліндричної форми, що нагріваються зовнішніми чи внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються, та які враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з оточуючим середовищем. Отримане рішення відрізняється від існуючих рішень більш повним відображенням процесів теплообміну, розробкою нових обчислювальних методів розв'язання початково-крайових та нелокальних задач, які виникають у математичних моделях, що дозволяє підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Запропоновано метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі,

де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усередненні температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведенні крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Удосконалено математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багат шарових областях при щільному та нещільному контакті шарів, які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів.

Удосконалено методи розв'язання обернених крайових задач теплопровідності, які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв'язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв'язання обернених задач. Удосконалено математичні моделі процесів теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами. Удосконалено математичні моделі теплообміну між елементами складних систем, де, на відміну від існуючих математичних моделей у вигляді нелокальних задач, як нелокальна умова запропонована умова балансу тепла. Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній роботі, базується на використанні строгого математичного апарату математики, забезпечується шляхом поетапної перевірки відповідності моделей, що будуються, основним фізичним законам і підтверджується в ході комплексу розрахунково-експериментальних досліджень, а також на основі позитивних результатів натурних експериментів, та про що свідчать акти впровадження. Упроваджено результати роботи в навчальний процес Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського і практику проектування технологічних процесів та обладнання на підприємствах України та за

кордоном (Франція).

Ключові слова: математична модель, тепловий процес, крайова задача, нелокальна задача, інтегральна умова, температурний розподіл, числові методи.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Влияние высокоэнергетических воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов: сер. Фундаментальные проблемы современного материаловедения/ А. В. Аниськов, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В.Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2013. 375 с.
2. Влияние внешних энергетических воздействий на структуру, фазовый состав и свойства материалов / В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2012. 320 с.
3. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов / О. А.Троицкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2011. С. 2011. 210 с.
4. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатопарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 6. Ч. 1. С. 37–43. (*index copernicus*)
5. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 133–137.
6. Родькин Д. Й., Ченчевой В. В., Кобыльская Е. Б. Нелинейные преобразования с рядами Фурье в применении к задачам электротехники. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчук: КрНУ. 2015. Вип. 1(29). С. 82–93.

7. Ляшенко В. П., Черненко В. П., Кобильська О. Б., Анісков А. В. Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2014. Вип. 3(50). С. 350–354. (РИНЦ (eLibrary)).
8. Kobilskaya O., Lyashenko V. Mathematical model of thermal process with an unknown source. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 6/2016 (101). Ч. 1. С. 41–45. (index copernicus)
9. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Відновлення імпульсного джерела тепла в задачі теплопровідності. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 2/2016 (97). Ч 1. С. 27–32. (index copernicus).
10. Кобильська О. Б. Задача керування джерелом тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 17. С. 65–71.
11. Кобильська О. Б. Обернена нелокальна задача з умовою інтегрального перевизначення. Математичне та комп'ютерне моделювання: сер. Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ. 2012. Вип. 7. С. 118–124. (BASE, Citefactor, General Impact Factor (GIF) та ін).
12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Застосування ітераційних методів до визначення параметрів керування температурним полем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2012. Вип. 4/2012 (75). С. 34–37. (index copernicus).
13. Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. Copper strip electroplastic rolling. *Metalurgical and Mining Industry*. 2015. № 2. Р. 294 – 299. (scopus).
14. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471. (РИНЦ (eLibrary)).
15. Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння. *Вісник Харківського національного*

університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2013. Вип. 21 (№ 1058). С. 43–49.

16. Кобильська О. Б. Моделювання імпульсного теплового процесу. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2013. Вип. 22 (№ 1063). С. 84–89.

17. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Нестационарні поздовжні хвилі в спадково-пружній циліндричній оболонці. Вісник Тернопільського НТУ імені Івана Пулюя. 2012. Вип. № 4 (68). С. 28–34.

18. Кобыльская Е. Б., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Троицкий О. А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении. Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. 2011. Вип. 4/2011 (69). Ч 1. С. 57–62.(index copernicus).

19. Троицкий О. А., Сташенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобыльская Е.Б. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. Питання атомної науки і техніки. 2011. Вип. 4/2011. С. 111 – 117. (scopus, web of science).

20. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2012. Вип. 19 (№ 1015). С. 167–172.

21. Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Математична модель теплообміну у валковому калібрі. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2019. Вип. 42 (№ 1015). С. 55–64.

22. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet

Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 45. С. 41–49.

23. Kobilskaya E., Lyashenko V., Hryhorova T. Integral conditions in the inverse heat conduction problems. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. [Vol. 7. № 2](#). P. 219–227. (scopus).

24. Kobilskaya E., Lyashenko V. A method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 46. С. 25–36.

Праці апробаційного характеру

25. Lyashenko V., Rod'kin D., Kobilskaya E., Martynenko M., Demyanchenko O. Thermal Process Mathematical Model in Electrical Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2017. P. 296–299. (IEEE, scopus).

26. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobilskaya E., Lyashenko V. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2017. [Vol. 1895. Issue 1](#). P. 090004-1 – 090004-9. (scopus).

27. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2016. [Vol. 1773. Issue 1](#). P. 040005-1 – 040005-7. (scopus).

28. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2014. Vol. 1629. Issue 1. P. 94–101. (scopus).

29. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact of Boundary-value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2015. Vol. 1684. Issue 1. P.080009-1 – 080009-10. (scopus).

30. Kobilskaya E., Lyashenko V., Demyanchenko O., Nabok T. Thermal Process in Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2019. P. 334–338. (IEEE, scopus).

31. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Nabok T. Temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2019. [Vol. 2164. Issue 1](#). P. 060018 – 080009.(scopus).

32. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Hryhorova T. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2018. [Vol. 2025. Issue 1](#). P. 080006-1–080006-7. (scopus).

33. Aniskov A., Lyashenko V., Kobilskaya E. The process control of electroplastic deformation ultrafine wire. *Proceeding of scientific and student's works in the field of Industrial Electrical Engineering*. 2013. Vol. 2. Part 1. Kosice, Slovakia. P. 87–90.

34. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового стану електричної машини. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р.* Харків, 2018. С. 190 –192.

35. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Сучасні проблеми математичного моделювання,*

обчислювальних методів та інформаційних технологій: тези доп. міжнар. наук. конф., м. Рівне, 2–4 березня 2018 р. Рівне, 2018. С. 65.

36. Беззубченко Т. С., Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 55–57.

37. Жердєва А. І., Кобильська О. Б. Математичні моделі та методи розв'язку лінійних та нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 58–60.

38. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Заїка А. В., Жердєва А. І. Розрахунок умов теплової рівноваги під час роботи електричної машини. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 17–20.

39. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: материалы междунар. симпозиума, г. Харьков, 26–28 июня 2017 г. Харьков, 2017. С. 59 – 62.

40. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Нелокальні задачі відновлення джерел тепла. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем*: матеріали II всеукр. наук.-техн. конф. з міжнар. участю, м. Дніпро, 1–3 листопада 2016 р. Дніпро, 2016. С. 71–72.

41. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving Inverse Nonlocal Problems for Parabolic Equations. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Eight International Conference, Albena, 22–27 June 2016. Albena (Bulgaria), 2016. P. 37–38.

42. Кобильська О. Б., Заїка А. В., Дем'янченко О. П. Алгоритм чисельного розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами

теплообміну. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 72–73.*

43. Кобильська О. Б., Черненко В. П. Моделювання поширення нестационарних повздовжніх хвиль напруги в поропружному стрижні. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 62–63.*

44. Черненко В. П., Кобильська Е. Б. Математическая модель механического поведения вязкоупругого материала под действием периодической нагрузки. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 22–25 вересня 2015 г. Кременчук, 2015. С. 91–92.*

45. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Григорова Т. А. Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 26–31 мая 2016 г. Харьков, 2016. С. 219 – 222.*

46. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Енергетичні умови в математичних моделях для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф. м. Кременчук, 22–25 вересня 2015г. Кременчук, 2015. С. 116–117.*

47. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact Boundary Value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Seventh International Conference. 28 June – 3 July 2015, Albena, Bulgaria. Albena (Bulgaria), 2015. P. 45.*

48. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Sixth International Conference. Albena, 1 July –26 June 2014. Albena (Bulgaria), 2014. P. 28–29.*

49. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of process control system of wire drawing. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 28–31 мая 2014 г., Харьков, 2014. С. 259 – 261.

50. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of Process Control System of Wire Drawing. *37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics “MIPRO 2014”*, Opatija 26–30 May 2014. Opatija (Croatia), 2014. – P. 31

51. Bryl T., Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. System of control of pulse processing with hyperfine wire during electroplastic deformation. *XV International PhD Workshop OWD 2013*: conference archives PTETIS, Wisla, 19–22 october 2013. Vol.33. Wisla, 2013. P. 74 – 79.

52. Zagirnyak M., Kobilskaya E., Lyashenko V., Salenko A. Heat Surce Control During Additive Processes. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Twelfth International On-Line Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena, 24–29 June 2020. San Diego (Bulgaria), 2020. P. 53.

53. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Яковлева Д. М. Моделювання теплового процесу під час ультразвукового електропластичного плющення металу. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2013 г. Харьков, 2013. С. 242–245.

54. Kobilskaya E. Modeling of temperature distribution of the mobile enviroment with pulse sources of heat. *XIV International PhD Workshop OWD 2012*: conference archives PTETIS. Wisla, 19–22 october 2012. Vol.31. Wisla, 2012. P. 210–213

55. Ляшенко В. П., Кобильська Е. Б. Определение параметров управления процессом электропластической деформации. *Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими*

токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах: материалы междунар. конф., г. Туапсе (Россия), 8–15 сентября 2012 г. Туапсе, 2012. С. 154–160.

56. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали конф., м. Київ, 10–11 вересня 2012 р. Київ, 2012. С. 66.

57. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв'язання задачі з рухомою границею. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 23–27 апреля 2012 г. Харьков, 2012. С. 278 – 280.

58. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Слесаренко А. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2011 г., Харьков, 2011. С. 211–214.

59. Kobilskaya E., Zaika A. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Tenth International Conference Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, Albena, 20–25 June 2018. Albena (Bulgaria), 2018. P. 39.

ABSTRACT

Kobil'skaya E.B. Mathematical and computer modeling of thermal processes in complex systems with moving and stationary axisymmetric elements. – Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for the scientific degree of Doctor of Science for the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and calculation methods. – Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kremenchuk. A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS Ukraine, Kharkiv, 2020.

Today in the industry there are many technological processes in which heat exchange in complex systems plays an important role. Such processes in metallurgy are rolling and heat treatment of metals, modern technologies of 3-D printing, in other industries - the work of electric machines, where heat is released under the action of current. One of the important problems that arise here is the development of mathematical models and methods for studying temperature distributions.

The theory of construction of mathematical models of thermal processes and phenomena on the basis of initial-boundary and nonlocal problems for heat equation due to involvement of integral and complex boundary conditions of impedance type conjugation in multilayer regions and complex systems is generalized, mathematical models of thermal processes in the form of nonlocal and boundary thermal conductivity problems with piecewise monotone functions. The necessity of applying the methods of the theory of integral and differential equations to the solution of boundary and nonlocal problems in domains with complex geometric shape is substantiated. Therefore, we can conclude that the topic of the dissertation is relevant and has important scientific and practical significance. The dissertation develops a new scientific direction in mathematical modeling of thermal processes of complex systems on the basis of nonlinear boundary and nonlocal problems with complex conditions of heat exchange on

boundary surfaces. The main purpose of the dissertation research is to increase the efficiency of temperature control in complex systems, which are presented in the form of nonlinear boundary and nonlocal problems for thermal conductivity equations in complex systems of metallurgy (rolling, heat treatment), electromechanics, by building new and improving existing classes of mathematical models of thermal processes, where there are complex conditions of heat exchange between multilayer moving and stationary elements on boundary surfaces. Search for effective methods for solving boundary, nonlocal and inverse problems to determine the basic parameters of temperature field control. This allows to increase the accuracy of determining temperature distributions in complex systems. The first section considers the existing physical and mathematical models of thermal processes in complex systems, which include multilayer moving and stationary cylindrical elements heated or cooled by external or internal heat sources and which take into account the dependence of the temperature field on the angle of rotation around its axis. and complex conditions of surface heat exchange with the environment, a brief overview of publications on the topic of the dissertation, analysis of existing numerical, analytical and numerical-analytical methods for solving nonlinear boundary and nonlocal problems, the tasks of dissertation research are formulated. As a result of research of the known mathematical models constructed on the basis of boundary and nonlocal problems for the differential equation of thermal conductivity the only conceptual point of view concerning construction of mathematical models of thermal processes in systems having a complex geometrical form is formed. Such systems are, for example, rolling mills, multilayer products of complex geometric shapes, electric machines. The expediency of development of new mathematical models for calculations of temperature distributions in such systems and their constructive elements during their work is substantiated. In the second section, mathematical models of heat transfer in the form of nonlocal problems for the equation of thermal conductivity are considered, and a method for solving the problem of thermal process control is proposed.

The connection of nonlocal and boundary value problems describing the same physical heating process is investigated and the advantages of using one of them in relation to another to describe one or another class of thermal process are substantiated. Such problems arise in the study of temperature distributions during annealing of moving wire and tape by permanent or periodically acting internal and external heat sources. Numerical experiments have been carried out and temperature distributions under the conditions of action of internal and external heat sources have been constructed, which confirm the effectiveness of attracting nonlocal conditions to describe thermal processes. This allows you to determine the control parameters of the heat and mass transfer process, in particular to determine the heat sources and concentrations of the substance. A method for solving the inverse nonlocal problem is proposed, which describes the temperature field in the heating zone of the moving medium by internal heat sources. By introducing into the mathematical model of the thermal process that takes place in the moving cylindrical region of the integral condition, the parameters of the temperature field control are determined. The integral condition is constructed on the basis of physical considerations of the process, which allowed to increase the efficiency of temperature control in complex systems. The third section considers mathematical models of temperature distributions in moving products with isotropic physical properties (tape, wire and profiles) with periodic pulsed heat sources. The features of the action of heat sources on temperature distribution are investigated.

Methods for solving inverse thermal conductivity problems with pulsed intermittent heat sources are proposed. Mathematical models of the temperature field in moving tape, wire and profiles with cyclically acting pulsed heat sources are considered. Based on these models, the formulation of inverse problems for homogeneous and inhomogeneous thermal conductivity equations is proposed. The inverse problems are aimed at finding the parameters of the temperature field control of products. These parameters allow to maintain the required temperature distribution in all or part of the heating area. In particular, when the heat source is

an unknown function, we obtain the inverse problem.

For each case (internal, external heat source or a combination of them), an appropriate approach to finding a solution to the inverse problem is proposed. The peculiarities of the influence of pulsed heat sources on the temperature distribution are investigated and taken into account. In the fourth section mathematical models of thermal processes in roller molds are considered. The section considers physical and mathematical models of thermal processes occurring in complex areas. Impedance-type conditions are built here, which allow to increase the accuracy of mathematical models.

A physical model of the thermal process in roll caliber during the rolling of the tape on a two-roll rolling mill is constructed. A mathematical model of the temperature field of a movable hollow roll of a rolling mill of cylindrical shape rotating around its axis with a constant angular velocity is proposed. The mathematical model takes into account different heat transfer conditions of the inner and outer surface of the roll with the tape and its environment. A method for solving the problem is proposed. The refinement of the mathematical model is to take into account that the outer surface, depending on the angle of rotation of the rolling mill around its axis, receives heat from the deforming tape and then loses it outside the deformation zone according to Newton's and Stefan-Boltzmann laws. Methods for constructing impedance-type conditions for a homogeneous thermal conductivity equation in two-layer cylindrical and spherical regions at the interface of media with different thermophysical characteristics are considered. The fifth section considers mathematical models of thermal processes in multilayer regions.

Mathematical models of thermal processes occurring in complex multilayer regions (electric machines) are constructed, which, unlike existing mathematical models, take into account the nature of heat exchange at the interface and allow to calculate the temperature of individual parts of a complex region. A method of solving the boundary-value problems for heat conduction equation in a complex area – a multi-layered cylinder with internal heat sources operating in one part of the layers and external ones in another part, is proposed. The method of solving the

problem at uncertainty of one of the boundary conditions on the boundary of layers with conductive heat exchange between layers is considered.

In the dissertation on the basis of the performed theoretical and experimental researches the new decision of an important scientific and applied problem which consists in development of conceptually new and improvement of existing classes of mathematical models and methods of their research is received; development of the theoretical basis of mathematical and computer modeling of temperature distributions in complex systems. The latter include multilayer movable and stationary cylindrical elements that are heated or cooled by external or internal heat sources and take into account the dependence of the temperature field on the angle of rotation of the elements around its axis and the difficult conditions of heat exchange between the surface and the environment. This solution differs from existing solutions by a more complete reflection (temperature distributions) of heat transfer processes, the development of new computational methods for solving initial-boundary and nonlocal problems that arise in mathematical models implemented in Matcad, Matlab, which makes it possible to increase the efficiency of temperature control in complex systems.

Formulate a unified approach to building new and improving existing mathematical models of thermal processes in complex systems that include multi movable and immovable elements axially symmetric shape, heated or cooled, which differs from similar approaches by taking into account temperature field depending on the angle of rotation of the items on its axis and complex conditions of heat exchange of the surface with the environment, which allows to increase the efficiency of temperature control in complex systems. The method of solving the boundary problems for the thermal conductivity equation in a complex area – multi-layered cylinder where internal heat sources operate in one part of the layers and external sources operate in another part in the conditions of uncertainty of one of the boundary conditions at the layers interface and with conductive heat exchange between the layers, is proposed, by introducing into such a problem the conditions of the impedance type can increase the efficiency temperature control in

complex systems and the accuracy of numerical calculations.

Mathematical models of thermal processes occurring in complex multilayer regions have been improved, which, in contrast to the existing ones, take into account different laws of heat transfer at the interface between layers and the dependence of the temperature field on the angle of rotation of the product around its axis. The constructed models allow to calculate temperature of separate parts of complex products that promotes increase of efficiency of temperature control in complex systems.

Improved methods for solving inverse boundary value problems of thermal conductivity which, in contrast to existing ones, take into account variable boundary conditions, apply the integral condition of heat balance to construct a solution, which allows to expand the range of applications of inverse solutions, which in turn efficiency of temperature control in complex systems.

Mathematical models of heat transfer processes in the form of nonlocal problems for heat equation have been further developed, which, in contrast to the existing ones, allow to determine the temperature distribution control parameters by involving an integral condition in the mathematical model, which allows to increase the efficiency of temperature control in complex systems.

The theory of nonlocal problems in mathematical models of heat exchange has been further developed where, in contrast to the existing formulations of nonlocal inverse problems, the condition of heat balance is proposed as a nonlocal condition, which makes it possible to increase the efficiency of temperature control in complex systems. The reliability and accuracy of the results obtained in the dissertation is based on the use of rigorous mathematical apparatus of mathematics, is ensured by step-by-step verification of conformity of the built models to the basic physical laws and confirmed during a set of computational and experimental researches. evidenced by acts of implementation. The results of work in the educational process of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University and the practice of designing technological processes and equipment at the enterprises of Ukraine and abroad (France) are introduced.

Key words: mathematical model, thermal process, boundary value problem, nonlocal problem, integral condition, temperature distribution, numerical methods

References

Scientific works in which the main scientific results of the dissertation were published:

1. Влияние высокоэнергетических воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов: сер. Фундаментальные проблемы современного материаловедения/ А. В. Аниськов, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В.Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2013. 375 с.
2. Влияние внешних энергетических воздействий на структуру, фазовый состав и свойства материалов / В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2012. 320 с.
3. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов / О. А.Троицкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2011. С. 2011. 210 с.
4. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багат шарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 6. Ч. 1. С. 37–43. (*index copernicus*)
5. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 133–137.
6. Родькин Д. Й., Ченчевой В. В., Кобыльская Е. Б. Нелинейные преобразования с рядами Фурье в применении к задачам электротехники. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчук: КрНУ. 2015. Вип. 1(29). С. 82–93.

7. Ляшенко В. П., Черненко В. П., Кобильська О. Б., Анісков А. В. Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2014. Вип. 3(50). С. 350–354. (РИНЦ (eLibrary)).
8. Kobilskaya O., Lyashenko V. Mathematical model of thermal process with an unknown source. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 6/2016 (101). Ч. 1. С. 41–45. (index copernicus)
9. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Відновлення імпульсного джерела тепла в задачі теплопровідності. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 2/2016 (97). Ч 1. С. 27–32. (index copernicus).
10. Кобильська О. Б. Задача керування джерелом тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 17. С. 65–71.
11. Кобильська О. Б. Обернена нелокальна задача з умовою інтегрального перевизначення. Математичне та комп'ютерне моделювання: сер. Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ. 2012. Вип. 7. С. 118–124. (BASE, Citefactor, General Impact Factor (GIF) та ін).
12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Застосування ітераційних методів до визначення параметрів керування температурним полем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2012. Вип. 4/2012 (75). С. 34–37. (index copernicus).
13. Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. Copper strip electroplastic rolling. *Metalurgical and Mining Industry*. 2015. № 2. Р. 294 – 299. (scopus).
14. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471. (РИНЦ (eLibrary)).
15. Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння. *Вісник Харківського національного*

університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2013. Вип. 21 (№ 1058). С. 43–49.

16. Кобильська О. Б. Моделювання імпульсного теплового процесу. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2013. Вип. 22 (№ 1063). С. 84–89.

17. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Нестационарні поздовжні хвилі в спадково-пружній циліндричній оболонці. Вісник Тернопільського НТУ імені Івана Пулюя. 2012. Вип. № 4 (68). С. 28–34.

18. Кобыльская Е. Б., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Троицкий О. А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении. Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. 2011. Вип. 4/2011 (69). Ч 1. С. 57–62.(index copernicus).

19. Троицкий О. А., Сташенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобыльская Е.Б. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. Питання атомної науки і техніки. 2011. Вип. 4/2011. С. 111 – 117. (scopus, web of science).

20. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2012. Вип. 19 (№ 1015). С. 167–172.

21. Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Математична модель теплообміну у валковому калібрі. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2019. Вип. 42 (№ 1015). С. 55–64.

22. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet

Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 45. С. 41–49.

23. Kobilskaya E., Lyashenko V., Hryhorova T. Integral conditions in the inverse heat conduction problems. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. [Vol. 7. № 2](#). P. 219–227. (scopus).

24. Kobilskaya E., Lyashenko V. A method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 46. С. 25–36.

Праці апробаційного характеру

25. Lyashenko V., Rod'kin D., Kobilskaya E., Martynenko M., Demyanchenko O. Thermal Process Mathematical Model in Electrical Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2017. P. 296–299. (IEEE, scopus).

26. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobilskaya E., Lyashenko V. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2017. [Vol. 1895. Issue 1](#). P. 090004-1 – 090004-9. (scopus).

27. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2016. [Vol. 1773. Issue 1](#). P. 040005-1 – 040005-7. (scopus).

28. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2014. Vol. 1629. Issue 1. P. 94–101. (scopus).

29. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact of Boundary-value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2015. Vol. 1684. Issue 1. P.080009-1 – 080009-10. (scopus).

30. Kobilskaya E., Lyashenko V., Demyanchenko O., Nabok T. Thermal Process in Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2019. P. 334–338. (IEEE, scopus).

31. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Nabok T. Temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2019. [Vol. 2164. Issue 1](#). P. 060018 – 080009.(scopus).

32. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Hryhorova T. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2018. [Vol. 2025. Issue 1](#). P. 080006-1–080006-7. (scopus).

33. Aniskov A., Lyashenko V., Kobilskaya E. The process control of electroplastic deformation ultrafine wire. *Proceeding of scientific and student's works in the field of Industrial Electrical Engineering*. 2013. Vol. 2. Part 1. Kosice, Slovakia. P. 87–90.

34. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового стану електричної машини. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р.* Харків, 2018. С. 190 –192.

35. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Сучасні проблеми математичного моделювання,*

обчислювальних методів та інформаційних технологій: тези доп. міжнар. наук. конф., м. Рівне, 2–4 березня 2018 р. Рівне, 2018. С. 65.

36. Беззубченкова Т. С., Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 55–57.

37. Жердєва А. І., Кобильська О. Б. Математичні моделі та методи розв'язку лінійних та нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 58–60.

38. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Заїка А. В., Жердєва А. І. Розрахунок умов теплової рівноваги під час роботи електричної машини. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 17–20.

39. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: материалы междунар. симпозиума, г. Харьков, 26–28 июня 2017 г. Харьков, 2017. С. 59 – 62.

40. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Нелокальні задачі відновлення джерел тепла. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем*: матеріали II всеукр. наук.-техн. конф. з міжнар. участю, м. Дніпро, 1–3 листопада 2016 р. Дніпро, 2016. С. 71–72.

41. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving Inverse Nonlocal Problems for Parabolic Equations. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Eight International Conference, Albena, 22–27 June 2016. Albena (Bulgaria), 2016. P. 37–38.

42. Кобильська О. Б., Заїка А. В., Дем'янченко О. П. Алгоритм чисельного розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами

теплообміну. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 72–73.*

43. Кобильська О. Б., Черненко В. П. Моделювання поширення нестационарних повздовжніх хвиль напруги в поропружному стрижні. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 62–63.*

44. Черненко В. П., Кобильська Е. Б. Математическая модель механического поведения вязкоупругого материала под действием периодической нагрузки. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 22–25 вересня 2015 г. Кременчук, 2015. С. 91–92.*

45. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Григорова Т. А. Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 26–31 мая 2016 г. Харьков, 2016. С. 219 – 222.*

46. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Енергетичні умови в математичних моделях для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф. м. Кременчук, 22–25 вересня 2015г. Кременчук, 2015. С. 116–117.*

47. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact Boundary Value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Seventh International Conference. 28 June – 3 July 2015, Albena, Bulgaria. Albena (Bulgaria), 2015. P. 45.*

48. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Sixth International Conference. Albena, 1 July –26 June 2014. Albena (Bulgaria), 2014. P. 28–29.*

49. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of process control system of wire drawing. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков , 28–31 мая 2014 г., Харьков, 2014. С. 259 – 261.

50. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of Process Control System of Wire Drawing. *37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics “MIPRO 2014”*, Opatija 26–30 May 2014. Opatija (Croatia), 2014. – P. 31

51. Bryl T., Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. System of control of pulse processing with hyperfine wire during electroplastic deformation. *XV International PhD Workshop OWD 2013*:conference archives PTETIS, Wisla, 19–22 october 2013. Vol.33. Wisla, 2013. P. 74 – 79.

52. Zagirnyak M., Kobilskaya E., Lyashenko V., Salenko A. Heat Surce Control During Additive Processes. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Twelfth International On-Line Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena, 24–29 June 2020. San Diego (Bulgaria), 2020. P. 53.

53. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Яковлева Д. М. Моделювання теплового процесу під час ультразвукового електропластичного плющення металу. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2013 г. Харьков, 2013. С. 242–245.

54. Kobilskaya E. Modeling of temperature distribution of the mobile enviroment with pulse sources of heat. *XIV International PhD Workshop OWD 2012*: conference archives PTETIS. Wisla, 19–22 october 2012. Vol.31. Wisla, 2012. P. 210–213

55. Ляшенко В. П., Кобильська Е. Б. Определение параметров управления процессом электропластической деформации. *Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими*

токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах: материалы междунар. конф., г. Туапсе (Россия), 8–15 сентября 2012 г. Туапсе, 2012. С. 154–160.

56. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали конф., м. Київ, 10–11 вересня 2012 р. Київ, 2012. С. 66.

57. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв'язання задачі з рухомою границею. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 23–27 апреля 2012 г. Харьков, 2012. С. 278 – 280.

58. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Слесаренко А. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2011 г., Харьков, 2011. С. 211–214.

59. Kobilskaya E., Zaika A. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Tenth International Conference Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, Albena, 20–25 June 2018. Albena (Bulgaria), 2018. P. 39.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	5
ВСТУП	6
 РОЗДІЛ 1 СУЧАСНИЙ СТАН РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	 18
1.1 Фізичні процеси та їх моделі у предметних областях: металургії та електромеханіці.....	18
1.2 Математичні моделі теплообміну та їх особливості у складних системах, що містять багат шарові осесиметричні елементи	40
1.3 Нелокальні задачі в математичних моделях	44
1.4 Обернені задачі теплопровідності в математичних моделях	49
1.5 Огляд математичних моделей визначення температурних розподілів у складних системах	51
1.6 Нові математичні моделі температурних розподілів у складних системах	56
1.7 Висновки за розділом 1	70
 РОЗДІЛ 2 НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМІНУ	 73
2.1 Нелокальна інтегральна умова	73
2.2 Нестационарна задача керування температурним полем в області із діючими внутрішніми джерелами.....	82
2.3 Визначення параметрів керування температурою осесиметричного рухомого елемента, що нагрівається зовнішніми джерелами тепла	85

2.4 Метод визначення параметрів керування нестационарним температурним полем у зоні нагрівання рухомого виробу внутрішніми джерелами тепла	90
2.5 Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну	96
2.6 Висновки за розділом 2	101
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ПІД ЧАС ІМПУЛЬСНОЇ ОБРОБКИ РУХОМИХ ТА НЕРУХОМИХ ВИРОБІВ	103
3.1 Нові технологічні способи термічної обробки металів і сплавів	103
3.2 Математична модель теплового процесу рухомого осесиметричного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла.....	105
3.3 Відновлення внутрішніх періодично діючих джерела тепла в задачі керування тепловим процесом під час ЕПВ	111
3.4 Математична модель теплового процесу рухомого осесиметричного середовища із зовнішніми періодично діючими джерелами тепла.....	115
3.5 Математична модель теплового процесу, що відбувається під дією внутрішніх і зовнішніх періодично діючих джерел тепла	117
3.6 Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння	126
3.7 Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації	131
3.8 Висновки за розділом 2	138
РОЗДІЛ 4 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ У МЕТАЛУРГІЇ.....	141
4.1 Математична модель теплообміну у валковому кристалізаторі.....	141
4.2 Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багат шарових областях	155

4.3 Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками	160
4.4 Отримання імпедансних умов у багатошаровій області	165
4.5 Математична модель температурного поля складної системи екструдер–філамент під час адитивного виробництва	196
4.6 Висновки за розділом 4	215
 РОЗДІЛ 5 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ	218
5.1 Теплообмін у багатошаровому циліндрі з шарами складної форми	218
5.2 Математична модель теплового процесу радіального перерізу багатошарової області	230
5.3 Математична модель теплового процесу в синхронній машині з постійним магнітом, у формі спиць	239
5.4 Математична модель теплових процесів у складній електромеханічній системі	244
5.5 Метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі	251
5.6 Методики проведення експерименту	263
5.7 Висновки за розділом 5	265
ВИСНОВКИ	267
Список використаних джерел	271
Додаток А Список публікацій за темою дисертаційної роботи	305
Додаток Б Акти впровадження результатів дисертаційної роботи	314

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ВК – валковий кристалізатор

ТЦО – термоциклічна обробка

ЕПВ – електропластичне волочіння

ЕПЕ – електропластичний ефект

ЗДМ– зона деформації металу

T – температура

ЗПД– зона пластичної деформації

МНЛЗ–машини неперервного лиття злитка

АСУ ТП– автоматизовані системи управління технологічним процесом

ОЗТ–обернена задача теплопровідності

АВ–адитивне виробництво

FDM (fused deposition modeling) –моделювання методом пошарового наплавлення

ВСТУП

Актуальність теми. У промисловості існує багато технологічних процесів, у яких важливу роль відіграє теплообмін у складних системах. Такими системами у металургії є прокатні стани, обладнання для 3-D друку та термічної обробки металів, у електромеханіці – електричні машини, у яких під дією струму виділяється тепло та відбувається теплообмін між обмотками.

Процес побудови адекватних моделей теплових процесів, які відбуваються в складних системах, надає широкі можливості для вивчення властивостей систем і принципів теплообміну з навколишнім середовищем. У більшості випадків вимірювання та контроль температури у складній системі, з різних причин, проводити складно або взагалі неможливо. Керування процесами теплообміну тут відбувається або на основі експерименту, або на основі розв’язання обернених задач для рівняння теплопровідності, що розглядаються в рамках математичних моделей теплових процесів у складних системах. У зв’язку з цим важливе значення має побудова адекватних математичних моделей та знаходження розв’язків обернених задач, які дозволяють визначати параметри керування процесом теплообміну в системі. Обернені задачі дозволяють ефективно визначати необхідні параметри керування температурними розподілами.

Існуючі наукові досягнення в області математичного моделювання процесів теплообміну у складних системах здебільшого базуються на крайових задачах для рівняння теплопровідності, які описують теплообмін між нерухомими елементами складної системи. Зовсім мало розглядаються моделі теплообміну у складних системах з рухомими елементами та моделі, в яких використовуються нелокальні умови. На основі крайових задач і засобів комп’ютерного моделювання створено та активно використовується чимало методів керування параметрами температурних розподілів. За

допомогою крайових та нелокальних задач, інших додаткових умов відбувається ідентифікація того чи іншого температурного розподілу. Слід відзначити, що математичні моделі на основі крайових задач досить правдиво відображають температурні розподіли усередині області нагрівання і не зовсім вірно відображають їх на границях. Це пов'язано з особливістю побудови математичної моделі. Підвищення ефективності контролю температурних розподілів вимагає побудови удосконалених математичних моделей та ефективних методів розв'язання задач, пов'язаних із цими моделями.

Побудова математичних моделей температурних розподілів з різними умовами теплообміну та їх аналіз розглядалися в роботах багатьох учених, серед них слід відзначити таких як Митропольський Ю. О., Самойленко А. М., Мацевитий Ю. М., Макаров В. Л., Ликов О. В., Тихонов А. М., Самарський А. А., Ільїн М. Й, Березовський А. А., Коляно Ю. М., Марчук Г. І., Пташник Б. Й., Ляшенко В. П. та багато інших. Нелокальні інтегральні умови виникають при вивченні різних фізичних явищ в разі, коли границя області протікання процесу недоступна для безпосереднього вимірювання температури. Проте можливості застосування нелокальних задач, інтегральних умов та більш складних умов імпедансного типу у математичних моделях теплообміну у рухомих елементах та системах досліджені недостатньо. Формулювання нелокальних умов на основі уявлення про фізичний процес є досить складною процедурою.

Незважаючи на значну кількість досліджень, на сьогодні відкритою залишається проблема визначення параметрів керування температурними процесами на основі математичних моделей, які з достатньою точністю відображають температурні розподіли та дозволяють керувати ними.

Виникає необхідність у модифікації та узагальненні існуючих математичних моделей температурних розподілів у рухомих елементах та системах з різними умовами теплообміну поверхні з навколишнім середовищем, складних з геометричної точки зору багатопарових областях,

а також у розробці нових методів розв'язання нелінійних крайових та нелокальних задач, що пов'язані з такими моделями, ефективних алгоритмів розв'язання прямих та обернених задач та визначенні параметрів керування процесами теплообміну.

В роботі набувають подальшого розвитку математичні моделі процесів теплообміну на основі початково-крайових та нелокальних задач для рівняння теплопровідності за рахунок залучення інтегральних і складних граничних умов спряження імпедансного типу у багатошарових областях та складних системах. Обґрунтовується необхідність застосування методів теорії інтегральних та диференціальних рівнянь до розв'язання крайових та нелокальних задач в областях, що мають складну геометричну форму.

Тому можна зробити висновок про те, що тема дисертаційної роботи є актуальною та має важливе наукове і практичне значення. В дисертації розвивається новий науковий напрям у математичному моделюванні процесів теплообміну у складних системах на основі нелінійних крайових та нелокальних задач зі складними умовами теплообміну на граничних поверхнях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано в період з 2011 р. по 2020 р. на кафедрі інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. Вона є частиною досліджень, які проводяться відповідно до планів науково-дослідних робіт за держбюджетною темою: «Наукові основи створення конструкційних елементів літальних та космічних апаратів із композиційних матеріалів» (№ ДР 0102U001480).

Також робота виконувалась згідно з грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених на 2014 рік «Нелокальні задачі у математичних моделях» (GP/F56/044), госпрозрахунковими договорами між фірмою NEUTRONIC (Франція) і Кременчуцьким

національним університетом № 241/12 – IBM – Neutronic «Розробка програмного забезпечення та проекту приладів ДАД і концентратора для систем пожежогасіння та виявлення технічних неполадків»; № 260/12 – IBM – Neutronic 2 «Розробка програмного забезпечення та удосконалення приладів концентратора та блоку живлення для систем пожежогасіння та виявлення технічних неполадків»; № 280/13 – IBM – Neutronic 3 «Виготовлення пристрою збору інформації щодо виникнення пожежної ситуації та програмного забезпечення для передачі її віддаленій інформаційній системі»; № 292/13 – IBM – Neutronic 4 «Розробка графічного людино-машинного інтерфейсу для системи пожежогасіння з елементами керування».

Дослідження, подані у роботі, відповідають чинному Закону України «Про пріоритетні напрями розвитку науки та техніки» від 11.07.2001, а саме, п.п. 3 і 6 статті 3 «Пріоритетні напрями розвитку науки і техніки на період до 2020 року».

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови теплообміну між багатошаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв’язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями.

Це дозволяє підвищити точність визначення температурних розподілів у складних системах.

Для досягнення вказаної мети і вирішення існуючої науково-практичної проблеми в цілому у дисертації були сформульовані і розв’язані такі завдання:

- проведено аналіз математичних моделей і методів, що

використовуються під час дослідження процесів теплообміну у складних технічних системах, таких, як прокатні стани, обладнання для термічної обробки виробів, електричні машини;

– побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну у багатошарових рухомих та нерухомих осесиметричних елементах, що нагріваються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують різні умови теплообміну поверхні елементів систем з навколишнім середовищем;

– побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну, що відбуваються під час електроімпульсної термічної обробки і враховують особливості кусково-монотонних функцій джерел тепла у нелокальних та крайових задачах для рівняння теплопровідності;

– побудовано та розв’язано обернені задачі для рівняння теплопровідності, що містять інтегральні умови, які дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами у рухомих та нерухомих елементах складних систем з внутрішніми та зовнішніми, періодично та постійно діючими джерелами тепла;

– проведено порівняльний аналіз числових розв’язків нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий тепловий процес у складній системі;

– запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у багатошаровому циліндрі при щільному та нещільному контакті шарів, де в одних шарах діють внутрішні джерела тепла, а в інших – зовнішні, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами;

– проведено аналіз та порівняння результатів числових розрахунків зі значеннями температурних розподілів, отриманих шляхом вимірювання за допомогою приладів;

– запропоновано методи побудови умов імпедансного типу для багатошарової циліндричної області з умовами спряження 4-го роду на межі розділу шарів з різними теплофізичними характеристиками.

Об’єктом дослідження є процеси теплообміну у складних системах, зокрема в металургії та електромеханіці, які включають у себе рухомі та нерухомі, одно- та багатошарові елементи, у яких постійно або періодично діють джерела тепла.

Предметом дослідження є математичні моделі у вигляді крайових, нелокальних та обернених задач для рівняння теплопровідності, що описують процеси теплообміну у складних системах, числові та аналітичні методи розв’язання.

Методи дослідження. У дисертації використовуються методи математичного моделювання; аналітичні, числові та аналітичні методи розв’язання прямих та обернених задач математичної фізики, методи розв’язання нелінійних інтегральних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. На основі виконаних теоретичних і експериментальних досліджень отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, що полягає у розробці та узагальненні математичних та комп’ютерних моделей процесів теплообміну у складних системах.

У межах запропонованого напрямку на основі сформульованих принципів побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей та методів розв’язання задач одержано такі наукові результати, що дозволяють підвищити точність числових розрахунків та ефективність контролю температури у складних системах.

Вперше:

– сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що

нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем;

- запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багат шаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усередненні температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведенні крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Удосконалено:

- математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багат шарових областях при щільному та нещільному контакті шарів які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів;

- методи розв’язання обернених крайових задач теплопровідності які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв’язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв’язання обернених задач;

- математичні моделі процесів теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами;

- математичні моделі теплообміну між елементами складних систем, де, на відміну від існуючих математичних моделей у вигляді нелокальних задач, як нелокальна умова запропонована умова балансу тепла.

Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній

роботі, базуються на використанні методів математичного моделювання та апарату математичної фізики, забезпечуються числовими експериментами, відповідністю моделей технологічним і фізичним процесам, результатами досліджень інших авторів та результатами натурних експериментів, актами впровадження.

Практичне значення отриманих результатів полягає у створенні ряду математичних моделей та програмних модулів, що мають можливість адаптації до дослідження різних складних систем та можливість використання в системах керування процесами виготовлення дроту. Розроблені методи і засоби розв'язання задач були використані під час розробки технологічного обладнання процесів спікання, гарячого пресування та високотемпературної деформації виробів канонічної та неканонічної форми із порошкових матеріалів (Акт впровадження фірма "Карма" Додаток Б), для прогнозування перебігу пожежі і розрахунків температур в складних системах (Акт впровадження фірма "Neutronic" Додаток Б).

Крім того, математичні моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, що запропоновано в дисертаційній роботі, використані в наукових дослідженнях, які проводяться відповідно до планів науково-дослідних робіт в Кременчуцькому національному університеті імені Михайла Остроградського під час виконання держбюджетних та госпрозрахункових тем.

Розроблені моделі відрізняються від існуючих більш високим ступенем адекватності, що дало змогу підвищити точність визначення температурних розподілів під час технологічних операцій у металургії, адитивному виробництві та під час роботи електричних машин різного типу.

Отримані результати (математичні моделі, методи розв'язання задач) використані у викладанні курсів «Обчислювальні методи», «Рівняння з частинними похідними», «Рівняння математичної фізики», «Моделювання природничих та технологічних процесів» та інших у Кременчуцькому

національному університеті імені Михайла Остроградського (Додаток Б).

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано особисто або за участі автора. Роботи [10–11, 15–16, 54] написані без співавторів. У працях, виконаних у співавторстві, авторів належить таке: запропоновано підхід, що дозволив побудувати нові та вдосконалити існуючі математичні моделі теплообміну у складних системах, які включають у себе багат шарові рухомі та нерухомі елементи осесиметричної форми при щільному та нещільному контакті шарів, що нагріваються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують залежність температурного поля від кута обертання їх навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем.

У роботах [1–3] побудовано математичні моделі, запропоновано метод розв’язання задач з кусково-монотонними граничними умовами, неявну скінченно-різницеву схему, проведено числові розрахунки.

У роботі [4] побудовано математичну модель теплового процесу у двошаровій циліндричній області з різними теплофізичними властивостями шарів.

У роботі [5] запропоновано метод дослідження температурних розподілів у складній системі – багат шаровому виробі, одна частина шарів якого нерухома, а інші обертаються навколо своєї осі зі сталою швидкістю, метод розв’язання крайової задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності у складній циліндричній області.

У роботах [6–7, 43–44] дано теоретичне обґрунтування методів розв’язання задач.

У роботах [8, 9, 13, 23, 27–28, 33, 40–41, 47–50, 55] у відповідних математичних моделях запропоновано формулювання обернених задач для рівняння теплопровідності та методи їх розв’язання.

У роботі [12] побудовано математичну модель теплового процесу, що відбувається у рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з

періодично діючим джерелом тепла, запропоновано метод розв'язання оберненої задачі теплопровідності.

У роботі [14] запропоновано математичну модель високотемпературного процесу.

У роботах [17–19] побудовано математичну модель та проведено числовий експеримент.

У роботі [20] отримано розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності зі змінним у часі джерелом тепла.

В роботі [21] побудовано фізичну модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двовалковому прокатному стані, запропоновано математичну модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю.

У роботах [22, 25, 30, 31, 32, 34, 59] побудовано математичну модель температурного поля в електричній машині, проведено числові експерименти.

У [24] запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв'язання задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами.

У роботі [26] запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні.

У роботі [29] запропоновані нелокальні інтегральні умови, що побудовані на основі умови балансу енергії в області нагрівання. Досліджується зв'язок нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий фізичний процес нагрівання.

У роботі [35] побудовано математичну модель теплообміну з умовами імпедансного типу.

У роботі [36] побудовано математичну модель температурного поля двошарового циліндра.

У роботах [37–38] побудовано математичні моделі для рівняння теплопровідності.

У роботах [39, 42] запропоновано метод числового розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами теплообміну.

У роботах [43–44] розв'язано крайові задачі, що описують поширення повздовжніх хвиль, проведено аналіз числових експериментів.

В [45] побудовано математичну модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у двошаровому контейнері циліндричної форми. Для визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі отримано граничну умову імпедансного типу.

У роботі [46] побудовано енергетичні умови у математичних моделях для рівняння теплопровідності.

У роботах [51, 53, 56] побудовано математичні моделі теплових процесів під час імпульсної обробки виробів.

У роботі [52] здійснено постановку задачі теплообміну, що відбувається в складній системі під час адитивного виробництва.

У роботі [57] розв'язано задачу теплопровідності для рухомого осесиметричного середовища, проведено числові розрахунки.

У роботі [58] запропоновано метод розв'язання нелокальних задач.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних, всеукраїнських та регіональних конференціях: міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях» КМНТ (м. Харків, 2014, 2016, 2018); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (Рівне, 2018); всеукраїнській науковій конференції «Математичне моделювання та математична фізика» (м. Кременчук, 2013, 2015, 2017); міжнародних

симпозіумах «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (Харків–Херсон, 2011, 2013, 2017); всеукраїнській науково-технічній конференції з міжнародною участю «Комп’ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (Дніпро, 2016); міжнародних наукових конференціях International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (Albena (Bulgaria), 2014–2019; *San Diego*, 2020); міжнародній науковій конференції “37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics, MIPRO 2014” (Opatija (Croatia), 2014); XIV, XV міжнародних наукових конференціях “International PHD WorkShop OWD”, (Wisla (Poland) 2012, 2013); міжнародних наукових конференціях Proceedings of the International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (Кременчук, 2017, 2019); міжнародній науковій конференції «Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах», (Туапсе, 2012); конференції «Обчислювальна та прикладна математика», (Київ, 2012); 51-й міжнародній науковій конференції «Актуальные проблемы прочности», (Харьков, 2011).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 59 наукових праць: з них 3 закордонні колективні монографії [1–3], 11 включені до міжнародних наукометричних баз SCOPUS та Web of Science [13, 19, 23, 25–32], 21 стаття у фахових виданнях України, 35 публікацій у збірниках матеріалів конференцій [25–59], одноосібних публікацій 5.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел (300 найменувань на 31 сторінці) та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 316 сторінок, в тому числі 265 сторінок основного тексту, включаючи 9 таблиць та 58 рисунків; обсяг додатків 12 сторінок.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розглядаються предметна область дослідження, існуючі фізичні та математичні моделі температурних розподілів у складних системах під час термічної обробки, прокатки на прокатних станах та у валкових кристалізаторах (ВК). Розглядаються математичні моделі теплових процесів у складних системах з осесиметричними елементами, на прикладі електричних машин. Розглядаються існуючі постановки нелокальних та обернених задач теплопровідності. Наводиться стислий огляд публікацій за темою дисертації, робиться аналіз існуючих математичних моделей теплових процесів під час пластичної деформації, математичних моделей у багатошарових областях, формулюються задачі дисертаційного дослідження.

1.1 Фізичні процеси та їх моделі у предметних областях: металургії та електромеханіці

Теплові процеси у прокатному виробництві

Теплові процеси відіграють важливу роль у багатьох галузях промисловості, зокрема у металургії та електромеханіці. Виробництво металів та сплавів у металургії зазвичай проходить при підвищеній та високій температурі. Від сировини до готової продукції зразки проходять сотні технологічних операцій на технологічному обладнанні, яке можна представити у вигляді складних технічних систем [59–63].

Процеси теплообміну у складних системах під час технологічних операцій можуть бути описані математичними моделями, що мають вигляд крайових або нелокальних задач для рівняння теплопровідності. Особливості теплообміну у кожній окремо взятій складній системі (технологічному обладнанні) визначається крайовими умовами у задачах

для рівняння теплопровідності, що виникають у математичних моделях[64–65].

Найбільш поширеними технологічними процесами тут є прокатка та відпали. Яскравим прикладом багат шарової складної системи є прокатний стан, на якому теплообмін відбувається під час стискання заготовки валками прокатного стану, що обертаються навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю[66–68](Рис.1.1).

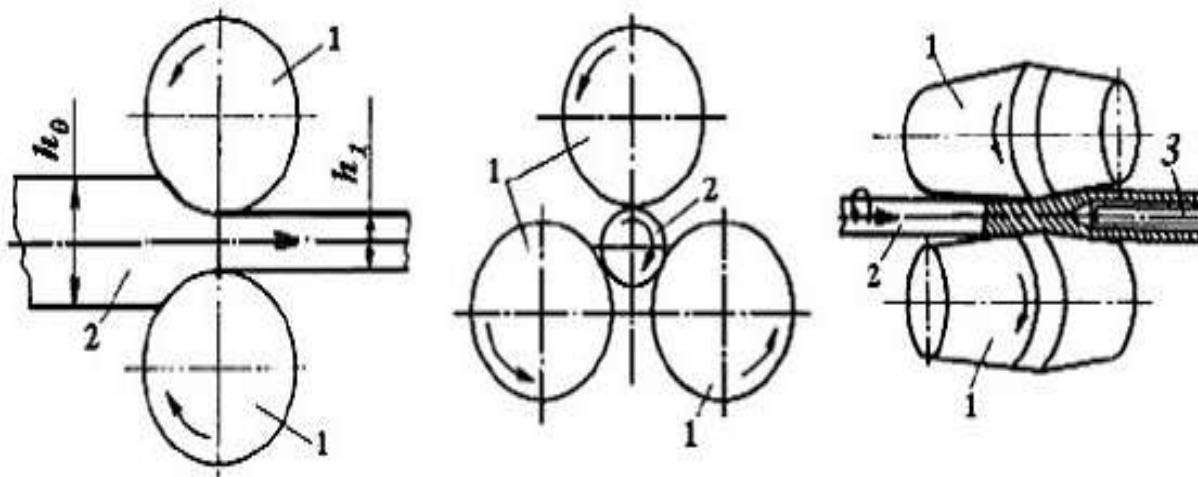


Рис. 1.1. Схеми основних видів прокатки: а – повздовжня; б – поперечна; в – поперечно-гвинтова; 1 – валки; 2 – заготовка; 3 – оправлення

Під час прокатки метал піддається деформації прокатними валками.

У металургії процеси відпалу профілів та листового прокату для більшості металів відбуваються під дією внутрішніх або зовнішніх джерел тепла у муфельних та газових печах або за рахунок пропускання електричного струму через метал. Тут застосовуються різні види нагрівання або охолодження металу.

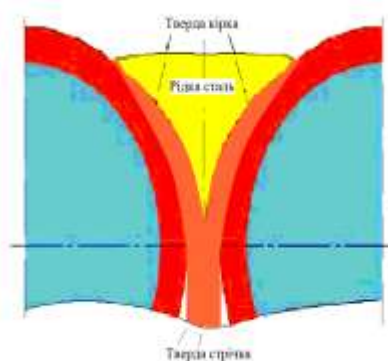
Розглянемо основні теплофізичні процеси, що відбуваються у складних системах, зокрема під час прокатки та отримання стрічки та профілів у валкових кристалізаторах. Тепло, отримане металом під час нагріву у печах або після попередньої пластичної деформації, передається оточуючому середовищу та технологічному інструменту – валкам прокатного стану. Тепло від прокатних валків під час прокатки стрічки або

профілю постійно відводиться в оточуюче їх середовище природним шляхом або примусово – охолоджуючою рідиною. Необхідність охолодження валків викликана збереженням їх геометричних розмірів, які при підвищених температурах змінюються: зношуються, деформуються або ламаються. Тому визначення температурного поля валків під час прокатки стрічки має велике значення, оскільки воно дозволяє контролювати якість продукції, що випускається, зокрема геометричні розміри стрічки та дроту.

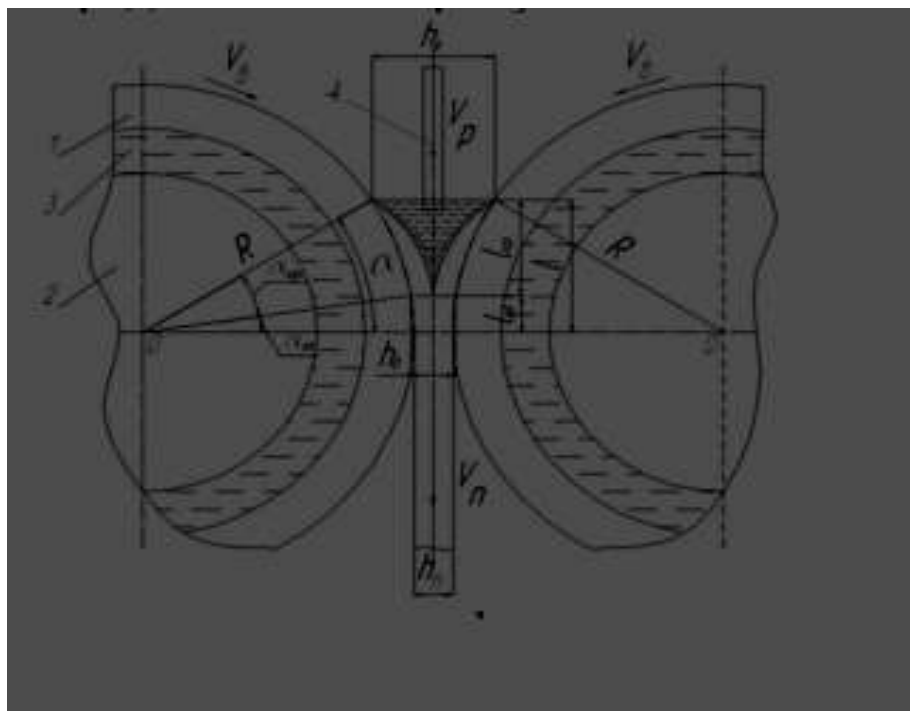
На сьогодні розроблені методи прокатки, що дозволяють отримувати металеву стрічку або дріт одночасно з розливом рідкого металу у валкових кристалізаторах (ВК) [69–70]. Тут відбуваються складні теплофізичні процеси. З рідкого металу отримують злитки або заготовки на машинах неперервного лиття злитка (МНЛЗ), що дозволяє зробити технологічний процес значно економнішим, дозволяє істотно скоротити споживання енергоресурсів [70]. У МНЛЗ (Рис. 1.2) розплавлений метал із ковша розливки через проміжний ківш надходить у валковий кристалізатор.

Теплові процеси під час відпалу дроту

Технологія виготовлення дроту містить дві основні операції: термічна обробка і волочіння. Термічна обробка є важливою складовою виробництва дроту. Термічна обробка проводиться для того, щоб заготовку зробити напівм'якою, з дрібнозернистою структурою, вільною від внутрішніх напружень. Метал нагрівають до певної температури, деякий час витримують в таких умовах, охолоджують. Відпал змінює властивості матеріалу і полегшує процес волочіння дроту.



а)



б)

Рис. 1.2. Схема зони кристалізації-деформації при неперервній валковій розливці-прокатці

1 – бандаж складеного валка; 2 – вісь валка; охолоджуюча рідина; 4 – живильник (дюза) для подачі рідкого матеріалу в міжвалковий простір; R – зовнішній радіус бандажа; l – загальна довжина зони кристалізації-деформації; α – кут контакту металу з валком; l_{kr} – довжина зони кристалізації; α_{kr} – кут, що характеризує протяжність області кристалізації; l_{ob} – довжина зони деформації; α_{ob} – кут, що характеризує протяжність ділянки прокатки; h_p – поперечний розмір вани рідкого металу; h_0 – товщина смуги на початку зони деформації; h_n – товщина смуги на виході з валків; V_b – кутова швидкість обертання валків (швидкість розливання); V_p – швидкість подачі рідкого металу; V_n – швидкість виходу смуги з валків.

Основою математичних моделей, що описують температурні розподіли під час процесу волочіння є крайові або нелокальні задачі для рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат, що дозволяють ідентифікувати технологічний або фізичний процес.

Математичні моделі процесів нагрівання складної системи рухомого валка прокатного стану під час прокатки стрічки або дроту

Оптимізація технологічних процесів в металургії, пов'язаних з перенесенням і використанням теплової енергії, висуває все більш складні вимоги до розрахунку тепломасообміну. Для технологічних схем, наприклад, отримання дроту, в яких необхідність відводу або перерозподілу тепла раніше взагалі не бралася до уваги або враховувалася спрощено з використанням емпіричних співвідношень теорії подібності, тепер потрібно застосування досить точних методів теплового розрахунку. Детальний опис процесів тепломасообміну, що забезпечує надійний збіг розрахункових даних з результатами експериментів, можливий на основі моделювання і сучасного обчислювального експерименту. Основна ідея числового розв'язання задач тепломасообміну полягає в заміні вихідних диференціальних рівнянь і крайових умов, що описують процес теплообміну, звичайно-різницевиими аналогами і в подальшому розв'язанні алгебраїчних рівнянь з невідомими значеннями визначених функцій у вузлах сітки. Застосування числових методів породжує нові вимоги і проблеми. Проведення теплофізичних розрахунків передбачає знання законів тепломасообміну, інженерних методів розрахунку, що базуються на теорії подібності та моделювання. Математичне моделювання в металургії дозволяє швидко знаходити оптимальні розв'язки при плануванні виробництва і керуванні процесами виробництва. Застосування автоматизованих систем керування технологічним процесом (АСУ ТП), що базується на застосуванні адекватних математичних моделей, приводить до зростання продуктивності праці, підвищення якості продукції, зниження її собівартості, підвищення культури виробництва. Процеси конвективного тепло- і масообміну відбуваються в результаті руху теплоносія (рідини або газу) і завжди тісно пов'язані з відповідними процесами молекулярного перенесення (теплопровідністю і дифузією). Залежно від причини руху теплоносія розрізняють конвекцію вимушену і вільну (природну). У

першому випадку рух теплоносія обумовлений зовнішніми причинами: насосом, вентилятором, компресором і т.п. У другому випадку рух теплоносія викликаний неоднорідністю температур або концентрацій компонент теплоносія. Конвективна тепловіддача грає важливу роль при нагріванні металу в печах, при хіміко-термічній обробці металу, формуванні злитка. При цьому, як правило, основну роль грає вимушена конвекція, однак і вільно конвективний теплообмін визначає тепловіддачу від нагрітих поверхонь в навколишнє середовище.

Розглянемо теплообмін у клітці прокатного стану як теплообмін рухомого ізотропного осесиметричного середовища (стрічки, профіля, дроту) з оточуючим його твердим (валками), рідким або газоподібним середовищем. Розглянемо теплові процеси, що протікають у довільному об'ємі рухомого теплопровідного середовища Ω , обмеженому поверхнею S , у кожній точці якого відома температура $T = T(P, t)$ або $u = u(P, t)$, що залежить від координат та часу. Температурне поле при цьому характеризується температурним градієнтом, який у прямокутній $P \in (x, y, z)$ та циліндричній $P \in (r, \varphi, z,)$ системах координат має вигляд [60]

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = (\nabla, \vec{n}),$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}; \vec{i}_r, \vec{i}_\varphi, \vec{k}$ – орти у відповідних системах координат.

Згідно першого закону теплопровідності Фур'є кількість тепла q , що проходить через одиницю площі за одиницю часу, пропорційна до нормальної похідної від температури

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = -\lambda (\text{grad } u, \vec{n}), \quad (1.1)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda(\text{gradu}, \vec{n})$ – проекція градієнта температури на напрям нормалі до ізотерми. Коефіцієнт теплопровідності λ числово характеризує кількість теплоти, що проходить через одиницю ізотермічної поверхні в одиницю часу.

Нехай в області $G \in \Omega$ діють джерела тепла об'ємною щільністю $W(x, y, z, t)$. Тоді кількість тепла Q_2 , що виділяється цими джерелами в об'ємі $\Delta V \in \Omega$ за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, можна записати у вигляді інтеграла

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} W(P, t) dv. \quad (1.2)$$

Згідно із законом збереження енергії це тепло частково накопичується в об'ємі Ω за рахунок його теплоємності, а частково втрачається через поверхню S за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем.

Накопичення об'ємної енергії у середовищі, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ та розігрівається, можна записати у вигляді

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (c \rho u) + c \rho (\vec{v} \text{gradu}) \right) dv, \quad (1.3)$$

де $(\vec{v}, \text{gradu})$ – скалярний добуток вектора швидкості на градієнт температури.

Втрату тепла для $\lambda = \text{const}$ через поверхню S , що обмежує об'єм $S \in V \in \Omega$ можна записати у вигляді

$$Q_3 = \lambda \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S (\text{gradu}, \vec{n}) ds = \lambda \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} \text{div}(\text{gradu}, \vec{n}) dv, \quad (1.4)$$

де $\vec{n}$ – одиничний орт зовнішньої до S нормалі.

Баланс тепла для рухомої області Ω означає, що кількість тепла накопиченого у об'ємі dv дорівнює різниці виділеного та втраченого тепла через поверхню у навколишнє середовище $Q_1 = Q_2 - Q_3$ [64]

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} [\text{div}(\lambda \text{gradu}) - \frac{\partial}{\partial t}(c \rho u) - c \rho (\vec{v} \text{gradu}) + W] dx dy dz = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{div}(\lambda \text{gradu}) - \frac{\partial}{\partial t}(c \rho u) - c \rho (\vec{v} \text{gradu}) = -W. \quad (1.6)$$

В аналітичній теорії теплообміну температурне поле характеризується неперервною та диференційованою функцією $u(P, t)$ часу та координат точок фізичного простору. Тіла циліндричної форми, що розігріваються або охолоджуються, з фізичної точки зору розглядаються у вигляді рухомого осесиметричного середовища, щільність якого не порушується, тому тут більшість математичних моделей зводиться до задач для рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат. Якщо коефіцієнт температуропровідності $a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}$ є величина стала, то рівняння (1.6) у циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Одержані рівняння теплопровідності покладені в основу математичних моделей, що описують температурні розподіли у складних системах – прокатних станах та у валкових кристалізаторах під час прокатки металевих виробів, електричних машинах. Основною задачею, що виникає у таких математичних моделях є знаходження температурних розподілів –

розв'язків $u(P, t)$ рівнянь (1.6)–(1.7), які задовольняють певним початковим та граничним умовам [64].

Нехай в області G діють джерела тепла об'ємною щільністю $W(x, y, z, t)$. Тоді кількість тепла ΔQ_2 , що виділяється цими джерелами в об'ємі $\Delta V \in \Omega$ за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ визначається за формулою

$$\Delta Q_2 = W \Delta t \Delta V \quad (1.8)$$

або у вигляді інтеграла

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} W(x, y, z) dg. \quad (1.9)$$

Згідно із законом збереження енергії це тепло частково накопичується в об'ємі Ω за рахунок його теплоємності, а частково втрачається через поверхню S за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем. Накопичення об'ємної енергії можна записати у вигляді

$$\Delta Q_1 = c \rho (u(t + \Delta t) - u(t)) \Delta V \approx c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \Delta V,$$

де c, ρ – відповідно теплоємність і щільність середовища, що розігрівається, або у інтегральній формі

$$Q_1 = c \rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dg, \quad (1.10)$$

де dg – диференціал об'єму.

Втрату тепла через поверхню S , що обмежує об'єм $S \in V \in \Omega$ можна

записати у вигляді

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S q_n ds, \quad (1.11)$$

де q_n – щільність потоку тепла через поверхню S або

$$Q_3 = \lambda \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S (\text{grad } u, \vec{n}) ds, \quad (1.12)$$

де $\vec{n}$ – одиничний орт зовнішньої до S нормалі, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Скориставшись формулою Гауса – Остроградського

$$\iint_S (\lambda \text{grad } u, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \text{div}(\lambda \text{grad } u, \vec{n}) dg,$$

рівність (1.12) можна записати у вигляді

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} \text{div}(\lambda \text{grad } u) dv.$$

Баланс тепла області Ω означає, що кількість тепла накопиченого у об'ємі dv , яке пішло на підвищення температури області дорівнює сумі тепла, виділеного джерелами та втраченого через поверхню у навколишнє середовище

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

або у інтегральній формі в прямокутній системі координат

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} + W] dg = 0. \quad (1.13)$$

У зв'язку з тим, що об'єм і проміжок часу довільні, інтегральна рівність (1.13) можлива тоді і тільки тоді, коли вираз, що знаходиться під знаком інтеграла у (1.13), дорівнює нулю

$$\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} + W = 0. \quad (1.14)$$

Вираз (1.14) це дивергентна форма рівняння теплопровідності (не прив'язана до системи координат). У загальному випадку, коли параметри λ, ρ та c залежать від температури та її градієнта, рівняння (1.14) є квазілінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними параболічного типу. Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) &= \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} u + (\operatorname{grad} \lambda, \operatorname{grad} u), \\ \frac{1}{\lambda} \operatorname{grad} \lambda &= \operatorname{grad} \ln \lambda; \quad \frac{\partial(c \rho u)}{\partial t} = c \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(c \rho)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Рівняння (1.14) набуває вигляду

$$\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} u - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -W + \frac{\partial(c \rho)}{\partial t} u - (\operatorname{grad} \lambda, \operatorname{grad} u) \quad (1.15)$$

або у прямокутній системі координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{W}{\lambda} + \frac{u}{\lambda} \frac{\partial(c \rho)}{\partial t} - (\operatorname{grad} \ln \lambda, \operatorname{grad} u),$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопроводності.

Якщо c, λ не залежить від температури u , а щільність $\rho = \text{const}$, останні два доданки рівняння (1.15) обертаються в нуль, рівняння (1.15) у прямокутній системі координат приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{W}{\lambda}. \quad (1.16)$$

Якщо у тілі є стоки або джерела тепла, але температура не залежить від часу, тобто $u = u(x, y, z)$, то рівняння (1.16) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \pm \frac{W}{\lambda}.$$

Одержані лінійні та нелінійні рівняння описують температурне поле у нерухомій області Ω , що залежить від часу та просторових змінних.

Баланс тепла для рухомої області Ω означає, що кількість тепла накопиченого у об'ємі dg дорівнює різниці виділеного та втраченого тепла через поверхню у навколишнє середовище $Q_1 = Q_2 - Q_3$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} [\text{div}(\lambda \text{gradu}) - \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - c\rho(\vec{v} \text{gradu}) + W] dg = 0, \quad (1.17)$$

де $\vec{v}$ – швидкість руху області через зону нагрівання або охолодження

$$\text{div}(\lambda \text{gradu}) - \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - c\rho(\vec{v} \text{gradu}) + W = 0. \quad (1.18)$$

Ми отримали найбільш повне рівняння теплопроводності, що описує процеси теплообміну на макрорівні у інтегральній та дивергентній формах.

Якщо параметри c, λ не залежить від u , а $\rho = \text{const}$, то рівняння

(1.18) у прямокутній системі координат можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{W}{\lambda},$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \left[\frac{M^2}{c} \right]$ – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо рухома область циліндрична, то рівняння теплопровідності (1.18) має вигляд

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mp W.$$

Рівняння теплообміну описує безліч процесів. Щоб виділити конкретний процес і визначити його єдиний розв'язок, рівняння потрібно замкнути умовами однозначності, що дають математичний опис всіх частинних особливостей даного явища [11–12, 67–69].

Розрізняють такі види умов однозначності.

1. Геометричні умови, що характеризують форму і розміри тіла або системи, в якій протікає процес.

2. Фізичні умови характеризують фізичні властивості середовища: щільність ρ , теплопровідність λ , теплоємність c та ін.

3. Часові або початкові умови характеризують розподіл температури і швидкості в системі в початковий момент часу. Для стаціонарних задач ці умови відсутні.

Початкова умова для рівняння (1.18) визначає розподіл температури валка у початковий момент часу, тобто

$$u(P, t_0) = \psi(P). \quad (1.19)$$

4. Граничні умови характеризують розподіл температур і швидкостей

на границі середовища. Граничні умови для температури включають:

1. Умова Діріхле. Поверхня S , що обмежує тіло Ω , підтримується при заданій температурі, яка відома у кожен момент часу

$$u_0 = u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in S \quad t > 0.$$

У найпростішому випадку $u_0 = \text{const.}$

2. Умова Неймана. Поверхня $S \in \Omega$ сприймає або втрачає заданий тепловий потік q

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \pm \frac{q}{\lambda}, \quad x, y, z \in S \quad t > 0, \\ q_n &= f(x, y, z), \end{aligned}$$

де q_n – щільність теплового потоку на поверхні тіла. У найпростішому випадку $q_n = \text{const.}$ Такий теплообмін має місце наприклад під час нагрівання металевих виробів у високотемпературних печах, або під час охолодження в приміщенні зі сталою температурою.

3. У цьому випадку задається температура навколишнього середовища та закон теплообміну між поверхнею тіла та оточуючим його середовищем під час нагрівання або охолодження. У найпростішому випадку на поверхні тіла має місце конвективний теплообмін за законом Ньютона - Рихмана із зовнішнім рідким або газоподібним середовищем. Згідно цьому закону кількість теплоти, що проходить через поверхню тіла в одиницю часу пропорційна різниці температур поверхні тіла $u = u(x, y, z)$ та оточуючого середовища u_c , ($u_c > u(x, y, z)$) відповідає процесу охолодження, а $u_c < u(x, y, z)$ – процесу нагрівання)

$$q = \alpha(u_c - u),$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі $\left[\frac{Вт}{м^2 K} \right]$.

Граничні умови визначають закон теплової взаємодії між навколишнім середовищем та поверхнею валків під час прокатки металевих виробів, що нагрівається або охолоджується [64–65].

Особливе місце у математичних моделях теплообміну у багат шарових складних системах відіграє умова спряження, що виникає на границі шарів з різними теплофізичними характеристиками шарів. На поверхні розділу двох середовищ із різними коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 згідно із законом Фур'є має місце рівність теплових потоків

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{n=n_0-0} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{n=n_0+0} \quad P \in S, \quad t > 0. \quad (1.20)$$

Такі умови виникають при щільному та нещільному тепловому контакті [64].

В даній роботі в якості додаткової нелокальної умови використовується умова балансу енергії (теплова енергія, підведена до контрольного об'єму внутрішніми джерелами заданої потужності, а також теплопровідністю і конвекцією, йде на зміну внутрішньої енергії цього об'єму), що дозволяє запропонувати автором у якості математичної моделі теплового процесу у складній області замість крайової нелокальну задачу.

$$\begin{aligned} a_1 \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{r_0} [T(z,t) - T_0] dr dz d\varphi + a_2 \int_0^{2\pi} \int_0^L [T(r,z) - T_c] dz d\varphi = \\ = a_3 \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{r_0} [1 + \beta T(z,t)] dr dz d\varphi, \end{aligned} \quad (1.21)$$

де – $a_1, a_2, a_3 - const$, β – температурний коефіцієнт опору циліндричної області. Залучення такої умови у математичну модель дозволяє керувати

тепловим процесом, що буде показано у другому і третьому розділі даної роботи.

Теплообмін під час виробництва дроту із застосуванням ТЦО і ЕПВ

Під термоциклічною обробкою (ТЦО) розуміють процес термічного впливу, що здійснюється за допомогою циклічної зміни температури в певному інтервалі і супроводжується структурними та фазовими перетвореннями при багаторазових нагріваннях і охолодженнях від циклу до циклу. Важлива особливість циклу – відсутність витримки як при верхній, так і при нижній температурах. За темою ТЦО металевих сплавів, критеріями якої є фазові перетворення, виконано великий обсяг досліджень, що дозволяють встановити деякі закономірності циклічних теплових впливів на стан критичних точок сталі [71, 76–78].

Формування структури металів при циклічних теплових впливах здійснюється внаслідок реалізації тих же елементарних процесів структуроутворення, які відбуваються в статичних умовах механічних і теплових впливів [71]. Ініціювання цих процесів призводить до виникнення внутрішніх напружень (структурних і термічних), які відповідальні за пластичну деформацію металу, так званий деформаційний ефект ТЦО.

Електропластичне волочіння (ЕПВ) важкодеформівних, зокрема, тугоплавких сплавів, з використанням електропластичного ефекту, вперше дослідженого в роботах російських вчених В. І. Спіцина і О. А. Троїцького. Було встановлено, що при пропусканні електричного струму через зразок, що протягується через філь'єру помітно знижуються внутрішня напруга і зусилля волочіння. Використання ЕПВ дозволило не тільки інтенсифікувати процес волочіння, але і виключити операції підігріву заготовок і волок, які необхідні при традиційній технології отримання дроту з тугоплавких металів, наприклад вольфраму. Під час ЕПВ, особливо в разі застосування

імпульсного струму, в зоні деформації металу (ЗДМ) діє, відкритий в 1968 р., електропластичний ефект (ЕПЕ) [79–80].

В кандидатській дисертації Кобильської О. Б. [81] розглянута математична модель температурного поля рухомого ізотропного осесиметричного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками у вигляді крайової задачі для нестационарного рівняння теплопровідності, що розігрівается періодично діючими внутрішніми джерелами тепла, задача розв'язана методом Рунге. Така математична модель може описувати тепловий процес під час ЕПВ при постійній швидкості протікання процесу. Питання керування такими джерелами не розглядалось. Не досліджувався вплив різних умов процесу ЕПВ. В роботі [82] розглянуто механізм електропластичного ефекту в рамках моделі дислокаційної струни. Запропоновано формули, за допомогою яких дано опис залежності температури розігріву від щільності струму в режимі адіабатичного Джоулевого нагріву дроту, а також побудована залежність електронної та ефективної температури дислокаційних фононів від щільності струму для тонкої плівки. У роботі [82] запропоновано кінетичний підхід до проблеми ЕПЕ, немає математичного опису картини теплового процесу під час ЕПЕ.

У роботах Григорової Т.А. та Ляшенка В. П. [83–84] розглядається та досліджується математична модель температурного поля для нерухомої області циліндричної форми з циклічно діючими джерелами тепла.

У якості математичних моделей розглядаються початково-крайові задачі для рівняння теплопровідності в циліндричній області

$$\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < t < t_0\}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(t, T), \quad (1.22)$$

$$T(r, z, 0) = T_0.$$

У [83, 85] побудована математична модель температурного поля з зовнішніми джерелами тепла. У цьому випадку у рівнянні теплопровідності (1.22) функція $W(t, T) = 0$. При цьому зовнішні джерела тепла відображені у вигляді граничних умов першого, другого або третього роду

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad -\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha(T) f_1^i(t)(T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t)(T_c^4 - T^4). \quad (1.23)$$

На кінцях циліндра задані граничні умови першого та третього роду у вигляді функції

$$T_1(t) = T_2(t) = \gamma T + T_0,$$

та у вигляді

$$\begin{aligned} \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} &= \alpha(T) f_1^i(t)(T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t)(T_c^4 - T^4), \\ \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} &= -\alpha(T) f_1^i(t)(T_c - T) - \varepsilon \sigma f_1^i(t)(T_c^4 - T^4). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Шляхом усереднення температури за радіусом була знижена розмірність задачі, а потім вона була розв'язана числовим методом. Знайдено розв'язок крайових задач кінцево-різницеvim методом та проведені числові експерименти.

Для знаходження розв'язку задач побудована різницева схема Кранка-Ніколсон. Отримана система різницевих рівнянь розв'язана ітераційним методом. Для комп'ютерного моделювання процесів враховуючи особливості функцій $f_1^i(t)$ та різні граничні умови розроблено алгоритм комп'ютерної реалізації.

Проте в цих роботах відсутній аналіз характеру імпульсу джерел тепла, параметрів теплового процесу, описи числового експерименту, а отже виникає потреба в побудові математичних моделей температурних розподілів у виробах – стрічці та дроту під час електропластичної та термоциклічної обробки рухомих та нерухомих одно- та багат шарових виробів, внутрішніми та зовнішніми, періодично та постійно діючими джерелами тепла, а також постановці обернених задач, на основі математичних моделей, що дозволяють визначати параметри керування температурними полями.

Моделювання теплових процесів в електричній машині

Електрична машина являє собою складну систему з точки зору теплофізики і геометричних форм. Математичні моделі температурного поля тут можна розглядати як теплообмін у багат шаровій області з різними умовами теплообміну на межі шарів.

Математичні моделі теплових процесів в електричних машинах розглядаються у багатьох наукових публікаціях [86–101]. Наведені в них методики розв’язання задач для рівняння теплопровідності можна розділити на два класи: де використовують сіткові методи і ті, в яких використовується мала кількість теплових однорідних тіл. Перший клас методик передбачає наявність ґрунтовних відомостей про внутрішні конструктивні елементи машини і великий обсяг обчислень за допомогою комп’ютерних програм, таких як ANSYS, що реалізують розрахунок теплових полів на основі сіткових методів.

В [102] представлена та вдосконалена теплова модель з зосередженими параметрами для синхронно-реактивної машини з постійним магнітом (PMSRM), розроблена для руху в гібридному електромобілі. Особлива увага приділяється обмотці статора і пропонується теплова модель, яка розділяє паз статора на кілька еліптичних шарів.

Модель дозволяє отримати наближений аналітичний вираз для теплового опору еліптичного циліндра постійної товщини.

В [103] розглядаються особливості конвективних повітряних потоків в охолоджуючих каналах машини. Наводяться відповідні рівняння і розрахункові співвідношення для числа Нуссельта при природній і примусовій конвекції. Розрахунки стосуються тільки стаціонарних теплових процесів, та не враховують природну неоднорідність та нестаціонарність температурного поля машини.

В роботі [104] методом кінцевих елементів розв'язується задача моделювання нестаціонарних теплових процесів в статорі електричного двигуна. Наведено результати експериментальних досліджень, які показують, що математична модель має низьку похибку при визначенні температури в статичному режимі роботи і високу у динамічному режимі роботи при зовнішньому навантаженні.

Другий клас методик розрахунку теплових процесів в електричному двигуні базується на ряді істотних припущень, що при цьому не враховують значних вимог до обчислюваних потужностей двигуна, можуть застосовуватися в програмному забезпеченні промислових приладів.

Так в [105] розглядається чотирьохмасова модель двигуна для нестаціонарного теплового режиму, що враховує вплив вищих гармонійних складових струмів статора. Розрахункові співвідношення для обчислення температури зовнішнього середовища, яке охолоджує не наводяться.

В роботі [106] запропонована математична модель нестаціонарних теплових процесів двигуна AIP160S4 як системи з 16 однорідних тіл. Система диференціальних рівнянь розв'язана методом Адамса. Побудовано часові залежності для різних вузлів двигуна. Відсутні результати експериментальних досліджень.

В роботі [107] розглянута теплова модель двигуна у вигляді системи з 17 однорідних тіл, що враховує механічні втрати в підшипниках. Дано

порівняння розрахункових і вимірних значень температур статора і підшипникового щита двигуна.

В [108] розроблена методика експериментального визначення параметрів двохмасової теплової моделі двигуна. Методика вимагає значної кількості випробувань. В цілому, можна відзначити, що при підвищенні порядку математичної моделі зростає точність розрахунків, але зростають і вимоги до обчислювальних потужностей пристроїв, особливо для нестационарних теплових процесів. Це ускладнює реалізацію систем контролю теплових процесів в двигуні в реальному часі.

В роботі [109] представлений алгоритм розрахунку температури поверхні корпусу двигуна в часовій області (через експоненціальні складові). Алгоритм не вимагає значних обчислювальних потужностей і може бути реалізований за допомогою мікроконтролера, забезпечуючи при цьому розрахунки в режимі реального часу.

В [110] для моделювання тривимірних температурних полів в електричній машині використовувався метод паралельних структур.

В роботі [111] виконаний перевірочний тепловий розрахунок тягового вентильного двигуна з постійними магнітами за допомогою кінцево-елементної ланцюгово-польової математичної моделі на платформі JMAG-Designer в тривимірній постановці задачі. Отримано розподіл температури і графіки нагрівання деталей двигуна.

В [112] розглядається тепловий процес в Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine, для розрахунку температури в синхронній машині складної структури з постійним магнітом використовується метод кінцевих елементів, описані формули для теплофізичних характеристик окремих частин машини, проте не наведені співвідношення (рівняння, крайові умови) для опису температури електричної машини, лише докладно наведені розрахунки. Електрична машина не розглядається як складна тепла система.

У роботах [113–114] досліджено магнітне поле в синхронній машині з

постійним, у формі спиць, магнітом зроблена спроба врахувати вплив кінцевих ефектів (форма реактивного опору торцевої обмотки або магнітного потоку розсіювання) в радіальному перетині. Розглядається математична модель, яка дозволяє прогнозувати розподіл магнітного поля в синхронних машинах з постійним магнітом.

В роботі [115] проведено аналіз температурних впливів на продуктивність внутрішніх магнітних машин, що працюють при високих температурах. Зокрема показано вплив зміни температури на основні характеристики електричної машини, включаючи характеристики постійного крутного моменту, механічні напруги, максимальний крутний момент на амперні траєкторії. Для синхронної електричної машини з постійним магнітом і високим крутним моментом термін служби і електромагнітні характеристики безпосередньо пов'язані з температурою обмотки [114]. Завдяки високій ефективності і потужності в багатьох комерціалізованих електрифікованих силових агрегатах використовувалися синхронні машини з внутрішнім постійним магнітом (IPM).

В [116] представлено тепловий аналіз і управління тяговими машинами з внутрішніми постійними магнітами (IPM). Втрати тягової машини розраховуються з використанням методу скінченних елементів. Потім компоненти втрат використовуються для стаціонарного і перехідного термічного аналізу.

Однак в цих роботах основна увага приділена дослідженню теплофізичних характеристик, їх впливу на сам теплової процес, моделі прості, і в більшості своїй описують температурний розподіл в окремих частинах електричної машини. Крім того, математичні моделі з малою кількістю теплових однорідних тіл досить просто реалізувати в апаратній частині, але вони дають високі похибки по відношенню до реальних теплових процесів в двигуні. Не розглядається повна математична модель теплового процесу за допомогою якої можна було визначити температурний

режим в будь-який її точці.

В існуючих математичних моделях теплових процесів у електричних машинах недостатньо приділено уваги опису:

- теплового контакту на межах різних частин електричної машини;
- теплообміну між машиною і зовнішнім або охолоджуючим середовищем;
- опису геометрії частин електричної машини, зручному для математичного опису теплових процесів в окремих частинах машини;
- теплообміну між конструктивними елементами машини (внутрішніми шарами) і зовнішнім або охолоджуючим середовищем;
- методу розв'язання крайових задач у багат шарових областях (електричних машинах).

Моделювання теплових процесів в електричній машині передбачає розгляд електричної машини як складної теплової системи – багат шарової області з різними теплофізичними характеристиками шарів, в якій деякі шари області в розрізі мають вигляд криволінійної трапеції, що ускладнює розрахунок і заважає застосуванню аналітичних методів при розрахунку температурного поля. Тому виникає необхідність в розробці математичної моделі теплового процесу в складній системі, якою є електрична машина, як в багат шаровій області з різними теплофізичними характеристиками шарів та різними умовами теплообміну на границі шарів.

Отже, основним актуальним завданням розробки математичної моделі теплового процесу в електричній машині є розробка принципів моделювання теплових процесів в ній, що дозволяють розраховувати її температуру як у складній системі.

1.2 Математичні моделі теплообміну та їх особливості у складних системах, що містять багат шарові осесиметричні елементи

Задачі у багат шарових неканонічних областях часто зустрічаються

при дослідженні температурного поля у металургії під час прокатки металевої стрічки чи профілів у електричних машинах.

Теплообмін у прокатному виробництві. Зазвичай двошарові валки прокатного стану мають різні теплофізичні властивості, між ними має місце щільний тепловий контакт. Тепло від поверхні двошарового валка циліндричної форми передається до його осі теплопровідністю. Цю теплову взаємодію дозволяє враховувати умова спряження четвертого роду [25, 29, 30, 64]. В роботі [117] побудовано умови спряження у двошаровому валку прокатного стану.

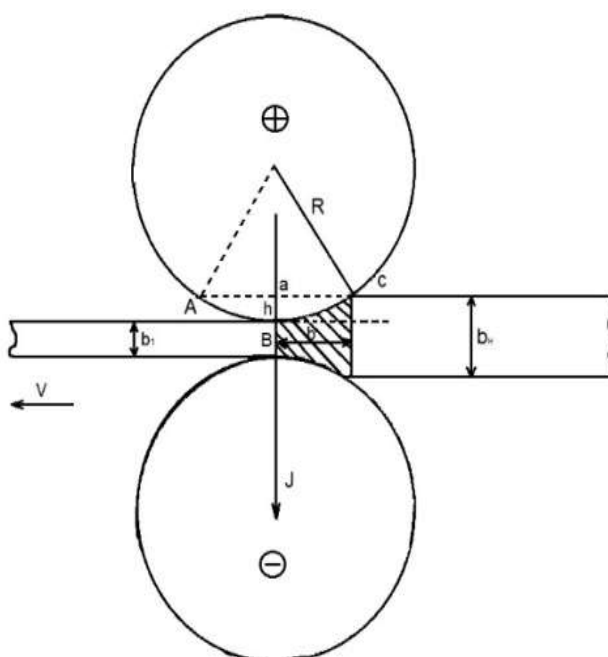


Рис. 1.4. Схема прокатки або відпалу стрічки на прокатному стані

Будемо вважати, що у двошаровому валку відсутні внутрішні джерела тепла. Тоді теплофізична модель процесу теплообміну під час прокатки, що розглядається в роботі приводить до математичної моделі, в основу якої покладено однорідне рівняння теплопровідності, яке в області $\Omega \times t = \{(r, \varphi) | R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < l, t > 0\}$ має вигляд

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} + \lambda_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.25)$$

Умова спряження у двошаровій області виводиться на основі рівняння балансу тепла у довільній точці одного із шарів області (рис. 1.4)

$$\int_{\gamma} [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) - c\rho u_t] ds = 0. \quad (1.26)$$

В результаті отримана умова спряження імпедансного типу для циліндра, що містить похідні за різними напрямками [18]

$$\begin{aligned} & \left(R + \frac{h}{2} \right) \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R+\frac{h}{2}} - \left(R - \frac{h}{2} \right) \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R-\frac{h}{2}} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left(\bar{u} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} + \bar{u}' h \right) - \\ & - c\rho \left[\dot{\bar{u}} R h + \dot{\bar{u}}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Ця умова еквівалентна умові спряження четвертого роду, яка використовуються при розв'язанні задач у багатошарових областях.

У роботі [118] розглянуто розподіл температури в багатошаровому ортотропному циліндрі. Задача теплопровідності в багатошаровому, двовимірному ортотропному циліндрі, що пов'язана з асиметричним і циклічним розподілом температури вздовж зовнішньої стінки, розв'язана аналітично. Показано, що теплопровідність через циліндр є функцією числа Біо і наступних чотирьох безрозмірних параметрів в кожному шарі: коефіцієнта частоти (α_n^*), коефіцієнта щільності (x_n^*), а також радіального ($K_{r,n}^*$) і тангенціального ($K_{\tau,n}^*$) коефіцієнтів провідності. Розв'язок обґрунтований для довільного числа шарів і був використаний для вивчення впливу розташування шарів і загальну теплопередачу. Як приклад, розглядається циліндр, що складається з двох шарів.

У роботі [119] розглянуто порожнистий двошаровий циліндр скінчених розмірів, розміщений в однорідному середовищі з постійною

температурою. У порожнині циліндра температура постійна, відмінна від початкового розподілу температури усередині циліндра. В деякий момент часу починає діяти джерело тепла постійної потужності. Потрібно знайти розподіл температури в циліндрі в будь-який момент часу. Задача ділиться на два етапи. На першому етапі відома температура на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра (граничні умови 1 роду), на другому етапі у внутрішній порожнині розміщене джерело тепла постійної потужності (гранична умова 3 роду). Було отримано аналітичний розв'язок для температурного поля двошарового полого циліндра скінченних розмірів, всередині якого діє джерело тепла.

Моделювання теплових процесів в електричній машині також приводить до крайових задач в багатошарових циліндричних областях.

З точки зору теплопередачі електрична машина являє собою складну багатошарову систему різнорідних елементів з розподіленими джерелами тепла в окремих зонах. При цьому конструкція електричної машини може бути представлена як багатошарова структура, що складається із ряду циліндричних коаксіальних областей і систем стрижнів, які розташовуються вздовж твірної циліндра. Корпус, магнітопровід статора, ротора утворюють співвісні циліндричні області. Пазові зони, зони обмоток моделюються у вигляді частини 2π пелюсткової троянди. Задача контролю теплового стану базується на розрахунку процесів теплопередачі в елементах і вузлах електричної машини на основі опису стаціонарних і нестаціонарних теплових полів із врахуванням геометричних форм і розмірів елементів, врахуванням теплообміну між елементами машини.

В даній роботі математичні моделі, які дозволяють досліджувати теплові поля в електричній машині представлені у вигляді крайових задач у складній багатошаровій області [19–20]. У найпростішому випадку, процес теплообміну в електричній машині можна представити у вигляді температурного поля у тришаровому циліндрі, де у одному з шарів діють внутрішні джерела Джоулева тепла, а у два інших тепло передається за

рахунок теплопровідності або теплопередачі від одного шару до іншого.

1.3 Нелокальні задачі в математичних моделях

При дослідженні ряду фізичних процесів і подальшій побудові математичної моделі виникають задачі, в яких задаються умови, що зв'язують значення шуканого розв'язку або його похідних в різних точках границі або в точках границі і будь-яких внутрішніх точках. Такі задачі, що називаються нелокальними, для різних класів рівнянь їх вивчали А.В. Біцадзе, А.А. Самарський, А.А. Дезні, В.А. Ільїн, Є.І. Моїсєєв, А.М. Нахушев, В.І. Жегалов, Т.Ш. Кальменов, О.А. Рєпін та інші. Останнім часом все більшу увагу фахівців в області рівнянь з частинними похідними привертає клас задач з нелокальними інтегральними умовами, які є природним узагальненням дискретних нелокальних умов.

Нелокальні інтегральні умови виникають при вивченні різних фізичних явищ в разі, коли границя області протікання процесу недоступна для безпосереднього вимірювання. Як приклад можна навести задачі, які пов'язані з дослідженням дифузії частинок в турбулентній плазмі, з процесами поширення тепла, з процесом вологопереносу в капілярно-пористих середовищах, при математичному моделюванні технологічного процесу зовнішнього гетерування, що застосовується для очищення кремнієвих плат від домішок, а також при дослідженні деяких обернених задач математичної фізики.

До числа перших досліджень нелокальних задач з інтегральними умовами для рівнянь параболічного типу можна віднести статтю Дж. Р. Кеннона. Згодом даний напрямок отримав розвиток у роботах Н.І. Іонкіна, Л.А. Мурав'я і А.В. Філіновського, Н.І. Юрчука., А.І. Кожанова., Л.С. Пулькіної та інших. Дослідження показали, що наявність нелокальної умови викликає труднощі при використанні відомих методів розв'язання і дослідження нелокальних задач.

Особливо це проявляється у разі, коли інтегральна умова має вигляд

операторного рівняння першого роду. Такі умови є інтегральними умовами першого роду. Якщо ж нелокальна умова крім інтегрального оператора містить значення шуканого розв'язку або його похідних на границі області дослідження, то умови такого виду є інтегральними умовами другого роду.

В кандидатській дисертації Кобильської О.Б. [81] сформульовані та доведені теореми існування єдиного розв'язку нелокальних крайових задач для рівняння теплопровідності, у яких на границі області задана крайова умова I-го, II-го або III-го роду, а замість другої умови задана інтегральна умова. Зроблена спроба використовуючи інтегральну умову знаходити параметри керування тепловим процесом, але описаний підхід придатний для розв'язання лінійних задач і знаходження сталого значення параметру керування.

Застосування методу поділу змінних до задач з нелокальними умовами привело до необхідності вивчення спектральних властивостей диференціальних операторів. Особливістю розглянутих задач, що ускладнює їх дослідження, є несамопряженність просторового диференціального оператора і, як наслідок, неповнота системи його власних функцій. Ці функції поповнюються приєднаними функціями, яких може бути нескінченно багато. Питання про базисність сукупності власних і приєднаних функцій було вирішено В. А. Ільїним. Він розвинув методи вивчення спектральних розкладів в біортогональний ряд за довільною повною і мінімальною системою, яка складається з власних і приєднаних функцій. Великий інтерес представляють роботи В. А. Ільїна та Е. І. Моїсеєва, в яких знайдені точні умови, що гарантують можливість розв'язання нелокальних крайових задач і стійкість їх розв'язку, побудовані і досліджені різницеві схеми, що апроксимують ці задачі.

У роботах Н. І. Іонкіна [120] вивчалася стійкість і збіжність різницевих схем з вагами в сітковій нормі для рівняння теплопровідності з нелокальними граничними умовами і був запропонований алгоритм знаходження розв'язку.

Розглядається метод розв'язання однієї несамопряженої задачі теорії теплопровідності з крайовою умовою виду

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \mu(t).$$

Такого роду умови зустрічаються, наприклад, при розв'язанні задач, що описують процес дифузії частинок в турбулентній плазмі, а також під час процесів поширення тепла в тонкому нагрітому стрижні, якщо заданий закон зміни загальної кількості тепла стрижня. В роботі доводиться існування неперервного в замкненій області розв'язку одновимірної крайової задачі з граничною умовою першого роду на лівому кінці відрізка $\{0, 1\}$ і з нелокальною граничною умовою зазначеного вище типу. Отримано двосторонні апріорні оцінки за початковими даними і правою частиною в нормі $L_2(0,1)$ для розв'язання задачі, а також апріорні оцінки в нормах $C(0,1)$, $C(\bar{D}_T)$.

Роботи Данілкиної [121–123] присвячені дослідженню двох нелокальних задач з інтегральними умовами для параболічних рівнянь у випадку однієї просторової змінної.

Досліджується задача з інтегральною умовою, що має вигляд операторного рівняння першого роду для параболічного рівняння.

Розглядається рівняння

$$u_t = u_{xx} + c(t)u + f(x,t). \quad (1.27)$$

В області $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0,T)\}$ для нього ставиться задача з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (1.28)$$

граничною умовою

$$u_x(0, t) = 0 \quad (1.29)$$

і нелокальною умовою

$$\int_0^l K(x) u(x, t) dx = E(t). \quad (1.30)$$

Показана можливість переходу від дослідження задачі (1.27) – (1.30) до вивчення задачі з нелокальною умовою другого роду виду

$$u_x(l, t) = \int_0^l H(x) u_x(x, t) dx + F(t).$$

Вивчається також задача з інтегральною умовою, що має вигляд операторного рівняння другого роду для параболічного рівняння.

Розглядається рівняння

$$u_t - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1.31)$$

В області $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, l), t \in (0, T)\}$ для нього ставиться задача з початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.32)$$

граничною умовою

$$u(0,t) = 0, \quad (1.33)$$

і нелокальною умовою

$$u(l,t) = \int_0^l K(x)u(x,t)dx. \quad (1.34)$$

Вводиться поняття узагальненого розв'язку такої задачі.

У роботах Л.С. Пулькіної [124–125] введено поняття нелокальної умови 1-го і 2-го роду. У роботі представлений метод, що дозволяє довести розв'язність нелокальної задачі з інтегральною умовою I роду. Запропонований метод заснований на виявленні еквівалентності нелокальної задачі з інтегральною умовою I роду і нелокальної задачі з інтегральною умовою II роду спеціального виду. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків поставлених задач. Задачі з нелокальними умовами I роду породжують ряд труднощів, аналогічних тим, які виникають в теорії інтегральних рівнянь. Однак в разі однієї просторової змінної ці труднощі можна подолати, звівши задачу з умовами I роду до задачі з умовами II роду.

В силу згаданих причин виникає потреба у модифікації стандартних методів вивчення нелокальних задач і у розробці нових методів дослідження. В даній роботі досліджуються нелокальні задачі для рівнянь параболічного типу з інтегральними умовами різних видів як в разі однієї, так і в разі трьох просторових змінних. Таким чином, тема досліджень є актуальною як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Аналіз показав, що достатньо добре вивчені питання існування і єдиності, розв'язності нелокальних задач з інтегральними умовами, проте їх можливості, зокрема застосування інтегральних умов в обернених задачах вивчені недостатньо. В згаданих вище роботах не показана ефективність застосування нелокальних задач у якості математичних моделей. Немає

класифікації інтегральних умов в залежності від характеру теплового процесу.

1.4 Обернені задачі теплопровідності в математичних моделях

Порушення причинно-наслідкового зв'язку, що має місце у вихідній постановці оберненої задачі, зумовлює серйозні труднощі їх розв'язання. В першу чергу, це труднощі розробки методів і алгоритмів, що дають достовірні результати. Проте, як буде показано надалі, зазначені труднощі можна подолати. Виходячи із загального призначення всі обернені задачі, незалежно від розглянутого фізичного процесу або технічної системи, можна розділити на три класи [126]:

 обернені задачі, що виникають при діагностиці та ідентифікації фізичних процесів;

 обернені задачі, що виникають при проектуванні технічних об'єктів;

 обернені задачі, що виникають під час управління процесами і об'єктами.

Обернені задачі першого класу зазвичай пов'язані з експериментальними дослідженнями, коли потрібно за деякими вимірними "вихідними" наслідковими характеристиками відновити вхідні причинні. Ці задачі первинні як по відношенню до прямих задач, так і по відношенню до інших класів обернених задач, оскільки вони пов'язані з побудовою математичних моделей і наділенням їх кількісною інформацією.

Обернені задачі типу проектування полягають у визначенні проектних характеристик (синтезі) технічного об'єкта за заданими показниками якості при відповідних обмеженнях. При цьому шукані характеристики є причинними по відношенню до цих показників і обмежень. У разі керування системами роль причинних характеристик виконують дії, що управляють, внаслідок зміни яких реалізується той чи інший ефект управління, який виражається через стан системи – наслідок.

Потрібно відзначити, що між задачами типу діагностики та

ідентифікації і задачами типу проектування і керування існує принципова відмінність. Для задач проектування та керування розширення класу допустимих розв'язків зазвичай спрощує ситуацію, оскільки потрібно знайти будь-яке рішення, яке може бути технічно реалізоване, що забезпечує екстремум критерію якості з заданою точністю. У той же час для задач ідентифікації та діагностики, чим ширше клас можливих розв'язків, тим більше можуть бути похибки причинних характеристик, що визначаються, це вимагає обов'язкового використання регулярних методів розв'язування цих задач. За ознакою шуканої причинної характеристики можна поділити обернені задачі кожної з груп на ті чи інші види [126].

Найчастіше математичні моделі процесів теплообміну ґрунтуються на рівняннях з частинними похідними.

При розв'язанні обернених задач особливо важливим є вибір виду додаткової інформації про розв'язання, що дозволяє однозначно визначити невідомі параметри даного процесу. Зазвичай в якості такої інформації розглядаються додаткові граничні умови, значення розв'язку на деякій внутрішній множині області або в певний момент часу. В роботі [127–129] розглянуті питання однозначної розв'язності обернених задач для рівняння теплопровідності з нелокальними крайовими умовами виду

$$u(0,t) + u(h,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^h u(x,t) dx = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

У роботі [130] досліджується обернена задача відновлення правої частини в параболічному рівнянні. Обернені задачі відновлення джерела можна трактувати як задачі прогнозу-керування для систем з розподіленими

параметрами. Для таких задач, як правило, виділяється клас єдиності, в якому шукається розв'язок, і в цьому полягає їх головна відмінність від класичних задач оптимального керування. В роботі [130] для параболічного рівняння досліджується обернена задача відновлення джерела-правої частини $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, де невідомою є функція $f(x)$. Для знаходження $f(x)$ крім початкових і граничних умов задається додаткова умова

нелокального спостереження виду $\int_0^T u(x,t) d\mu(t) = \chi(x)$. Вибір міри

близькості виміряних і розрахованих температур досить складне питання розв'язання обернених задач в екстремальній постановці.

У даній дисертаційній роботі критерій якості формулювався на основі інтегральної умови. Аналіз публікацій по нелокальним оберненим задачам показує, що значна їх частина присвячена дослідженню питань розв'язності таких задач, питанням існування і єдиності розв'язку. Розглядаються абстрактні нелокальні обернені задачі. Методи розв'язання таких задач переважно аналітичні і в більшості своїй ці методи призначені для розв'язання конкретних задач (лінійних ретроспективних або стаціонарних лінійних коефіцієнтних) і не можуть бути застосовані для широкого класу обернених задач.

1.5 Огляд математичних моделей визначення температурних розподілів у складних системах

Вивчення процесів теплообміну під час технологічних процесів у металургії, зокрема електропластичного волочіння та термоциклічної обробки відбувається на основі експериментальних даних та дослідження математичних моделей. Дослідження високотемпературних процесів зі складними умовами теплообміну у металургії, розробка методів рзв'язання задач, що описують такі процеси розглядалася у роботах багатьох вчених, таких як Ю.О. Митропольський [131], А.М. Самойленко [132–133], В.С. Дейнека, Г.І. Марчук, А.А. Березовський, Ю.М. Мацевитий, А.П.

Слесаренко [134–141], В.П. Ляшенко, А.Я. Бомба [142–143], Я.Г. Савула[144], А.В. Ликов [65], О.А. Самарський [145–147] та багато інших. Розв'язання одномірних крайових задач зводилося до розв'язання еквівалентних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [148].

У працях В.П. Ликова, Я.С. Підстригача здебільшого розглядаються моделі побудовані з залученням лінійних крайових та початково-крайових задач з нелінійними граничними умовами. Нелінійні задачі в математичних моделях у багат шарових циліндрах, як правило, не розглядалися. В роботах В.С. Дейнеки, І.В. Сергієнка, В.В. Скопечького [149–150] розглянуто крайові задачі Діріхле, Неймана для еліптичних рівнянь з умовами спряження. Досліджено питання існування та єдиності розв'язків. На базі використання класів розривних допустимих функцій побудовано високоточні алгоритми їх дискретизації.

Незначна кількість робіт присвячена побудові математичних моделей теплових процесів з імпульсними джерелами тепла [152–154]. В цих роботах визначаються основні параметри режиму нагріву, представлені числові експерименти і робиться висновок про оптимізацію процесу нагріву. Математичні моделі на основі нелінійних рівнянь теплопровідності розглядалися в роботах Ю.А. Митропольського, А.А. Березовського, А.Н. Тихонова, А.А. Самарського і інших авторів. У цих роботах для спеціальних класів ядер релаксації операційним методом в поєднанні з методом поділу змінних отримані точні розв'язки статичних та динамічних задач.

У роботах [157, 158] Березовського А.А. розглядається ряд задач масопереносу в постановці, що базується на уявленнях про можливі механізми процесів дифузійного фазоутворення у твердих тілах. В цих роботах розглянуто математичні моделі у спрощених постановках. У них не повністю розв'язані задачі, що враховують вплив радіаційного теплообміну на температурний розподіл із врахуванням крайової умови Стефана-Больцманана, а також змінний характер теплофізичних параметрів

середовища.

В [159] представлені аналітичні методи розв'язання крайових і початково-крайових задач стаціонарної і нестаціонарної дифузії, у тому числі наближені методи розв'язання задач дифузії в областях з рухомими границями, закон руху яких заздалегідь невідомий. Крім лінійних задач дифузії, проведено дослідження початково-крайових задач для квазілінійного рівняння дифузії. Представлено методи лінеаризації рівняння дифузії за допомогою перетворення залежних змінних (перетворення Кірхгофа) та його спрощення за рахунок введення нових незалежних змінних (перетворення Больцмана). Введено поняття про автомодельні розв'язки та наведено методи визначення коефіцієнта взаємної дифузії.

У роботах Коляно Ю.М. [160–161] започаткований і розвинутий новий науковий напрямок – застосування узагальнених функцій в термомеханіці тіл неоднорідної структури: багатошарових, армованих тіл, тіл із наскрізними і ненаскрізними включеннями, покриттями, із залежними від температури теплофізичними характеристиками, з кусково-постійними коефіцієнтами тепловіддачі, багатоступеневих пластин, оболонок, валів.

В [162] запропонована замкнута система алгебраїчних і звичайних диференціальних рівнянь, що дозволяє просто і з високою точністю розв'язувати нестаціонарні задачі теплопровідності і дифузійного вилучення речовини з твердих тіл стандартної форми – пластини, циліндра, кулі – при змінних зовнішніх умовах. Метод розв'язання, що базується на єдиній універсальній залежності, з високою точністю описує розподіл температур або концентрацій речовини в перерахованих вище тілах, і на рівняннях, що визначають зміни характеристик, які входять в цю залежність, в часі або в просторі при переміщенні тіл.

У роботах Тихонова А.С., Белова В.В. розглянуті фізичні основи циклічної обробки, а також інші методи теплової обробки матеріалів [163]. Під час циклічної обробки щільність джерел тепла є взагалі кусково-неперервна функція, що залежить як від координат, так і від часу [164].

У роботі [165] у спрощених постановках запропоновані математичні моделі температурного поля з постійно та періодично діючими джерелами тепла. Отримані аналітичні розв'язки задач та побудовано температурні розподіли.

У [166] розроблено комп'ютерну модель температурного поля високотемпературної установки спікання порошкових зразків із керамічних матеріалів з використанням індукційного і променевого нагрівання. Для числового розв'язання системи рівнянь, що описує процеси індукційного та променевого нагрівання, використано метод скінченних елементів у поєднанні з кінцево-різницевою процедурою за часом, яка базується на схемі Ньютона-Рафсона. Проведено числовий аналіз температурного поля в технологічній установці в процесі спікання. Наведено порівняння числових результатів і результатів вимірювання температури на поверхні інфільтратора в процесі спікання композитної суміші із карбідокремнієвим каркасом; на підставі узгодження результатів обчислень з результатами вимірювань зроблено висновок про адекватність комп'ютерної моделі.

Далі розглянемо крайові задачі, що є моделями теплових процесів під час різних технологічних операцій в металургії, що з'явилися у науковій літературі за останні 15-20 років.

Існує велика кількість робіт, у яких будуються математичні моделі та досліджуються температурні розподіли у таких тілах як циліндр, куля під час термічної обробки [65, 167–169].

В [170] методом фундаментальних функцій та функцій Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру нестационарних задач феноменологічної теорії теплопровідності в напівобмежених багатопарових (кусково-однорідних) просторових середовищах. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є для однорідних середовищ та перетворення Фур'є на декартовій піввісі з n точками спряження.

Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [171–172]. Зокрема, в [172] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ.

Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [173].

У [174] розглянуто математичну модель теплового процесу під час спікання напівфабрикату циліндричної форми та запропоновано алгоритм числового розв'язання крайової задачі для квазілінійного рівняння теплопровідності, проаналізовані отримані числові результати.

У роботах Тришевського О. І. [175–177] на основі теоретичного аналізу розроблено математичні моделі теплового стану смуги і валків під час гарячої прокатки листового матеріалу, що дозволяють розрахувати тепловий стан об'єктів з розподіленими параметрами на всіх ділянках технологічного процесу. Отримані моделі можна використовувати для аналізу ефективності процесу охолодження смуги, встановлені залежності кількості води в системах водопостачання від способу її подачі, а також вибору найбільш ефективної системи охолодження. Виконані дослідження можуть служити основою для розв'язання задач розробки прокатного обладнання IV покоління, а також реконструкції діючих станів гарячої прокатки листа.

У роботах [178–181] розглянуто питання розробки нових методів розрахунку теплового стану, питання моделювання теплових процесів і створення сучасного обладнання з комп'ютерним управлінням технологічними процесами.

У роботі [182] встановлено, що для числового розв'язання крайових задач теплообміну системи валок – полоса, що описуються рівняннями нестационарної теплопровідності, найбільш ефективним є метод кінцевих різниць. Для подальшого числового розв'язання задач нестационарної

теплопровідності (теплого стану) полоси та валків при гарячій прокатці сляби, які є заготовкою під час прокатки листа, поділені умовною сіткою, для можливих варіантів вузлів якої при розв'язанні двовірної задачі нестационарної теплопровідності складені рівняння балансу енергії з подальшою кінцево-різничевою апроксимацією Фур'є.

В [183] розглянуто процес розігріву циліндричного тіла при періодичному тепловому впливі на його торцеві поверхні. Математична модель досліджуваного процесу включає в себе нелінійне диференціальне рівняння параболічного типу, що враховує залежність теплофізичних властивостей матеріалу від температури, а також граничні умови, що описують процеси теплообміну на поверхні тіла. Запропоновано алгоритм розрахунку нестационарного температурного поля циліндричного тіла, який базується на дискретизації диференціального рівняння за часовою змінною з досить малим кроком розбиття.

Більшість задач, що розглядаються у науковій літературі, містять крайові умови теплообміну I-III роду поверхні тіла з оточуючим його середовищем [117–119]. Задачі з умовами імпедансного типу у вітчизняній та закордонній науковій літературі практично не розглядаються, особливо це стосується тіл неканонічної форми.

1.6 Нові математичні моделі температурних розподілів у складних системах

Нестационарна задача керування тепловим процесом в області із внутрішніми джерелами

Визначення нестационарного температурного розподілу, рухомого зі швидкістю $v(t)$ осесиметричного середовища у обмеженій циліндричній області Ω_t , що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, приводить до розв'язання наступної крайової задачі для рівняння теплопровідності

$$\Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\} \quad [26]$$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T), \quad (1.35)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (1.36)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha (T - T_c) - \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4), \quad (1.37)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (1.38)$$

де

$$w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad (1.39)$$

де λ, c, ρ_m, I відповідно коефіцієнт теплопровідності, теплоємність і щільність, сила струму, T_c – температура навколишнього середовища, $\alpha, \varepsilon, \sigma$ відповідно коефіцієнт конвективної тепловіддачі з поверхні, ступінь чорноти та стала Стефана-Больцмана. Розглянемо загальну постановку задачі визначення температурного поля в рухомому середовищі, що розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Процес нагрівання протікає у два етапи. На першому етапі середовище нагрівається зі змінною швидкістю $v(t)$. Це нестационарний перехідний процес. Під час перехідного процесу, який відбувається упродовж часу $0 \leq t \leq t_0$, швидкість руху середовища $v(t)$ змінюється в межах $0 \leq v(t) < v = \text{const}$. Аналітичний розв’язок (1.35)–(1.39) не завжди задовольняє фізичні умови задачі, а саме не виконується закон збереження енергії (1.11). Визначити параметри керування температурним полем із розв’язку (1.35)–(1.39) достатньо складно. Ці складнощі пов’язані з тим, що якщо крайова задача коректна за Адамаром [184], то вона має єдиний розв’язок і цей розв’язок не завжди задовольняє фізичній постановці задачі. При знаходженні параметра керування тепловим процесом доцільно застосовувати не розв’язок крайової задачі, а розв’язок нелокальної задачі

для цього ж рівняння. Якщо до задачі (1.35)–(1.39) увести нелокальну інтегральну умову

$$\int_{0+0}^{t_0} \int_{0+0}^{r_0} \int_0^l \frac{I(t)^2 \rho_0 l + \beta I(t)^2 \rho_0 l T(r, z, t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dz dr dt = \alpha l \int_{0+G}^t \iint \frac{T(r, z, t) - T_c}{v(t)} dg dt + \\ + c \rho_n \int_{0+0}^t \int_0^r \int_0^l (T(r, z, t) - T_0) dz dr dt,$$

що визначає баланс енергії області нагрівання, то крайова задача перетвориться у нелокальну. При цьому з'являється можливість ідентифікації на певному рівні температури у будь-якій точці рухомої області, зокрема і на одній із границь області, що нагрівається. Параметром керування тут може виступати будь-який параметр, що відображений у рівнянні або у крайовій умові, зокрема це може бути внутрішнє джерело тепла. Параметр керування може бути як сталою, так і змінною величиною, наприклад, функцією координат та часу. Контроль температури здійснюється у кожній точці розрахункової області і в кожен момент часу.

Температурне поле рухомого дроту із внутрішніми джерелами тепла під час процесу ЕПВ

Термічна обробка дроту імпульсним або з постійним струмом (меншою мірою) в режимах електропластичного волочіння (ЕПВ) дозволяє впливати на фізико-механічні властивості металу в процесі пластичної деформації. Така обробка дозволяє формувати необхідні фізико-механічні властивості металу.

Однак різноманітність моделей таких видів обробки вимагає більш ретельного і єдиного підходу при вивченні та аналізі температурних розподілів.

Крім того, для успішного проведення таких видів обробки необхідно чітко знати параметр процесу(силу струму, початкове значення

температури і т.і.). У зв'язку з цим, моделювання теплового процесу під час ЕПВ приводить до обернених задач, розв'язок яких дозволяє отримати необхідні значення параметрів процесу [4–7]. Одночасно з питанням визначення температурного розподілу під час перехідного процесу виникає технічна проблема визначення параметрів керування процесом нагрівання, за яких температурне поле під час руху середовища зі змінною $v(t)$ швидкістю було б стаціонарним і співпадало з температурним полем під час руху середовища зі сталою $v(t) = \text{const}$ швидкістю. Цього можна досягти, якщо обрати відповідним чином щільність джерел тепла.

Визначення нестационарного температурного розподілу під час ЕПВ приводить до розв'язання такої початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в області $\Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$ [26]:

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), \quad (r, z, t) \in \Omega_t, \quad (1.40)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (1.41)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (1.42)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f_{12}(t) [-\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4)]. \quad (1.43)$$

Функція джерел тепла $W(z, t, T)$ у випадку залежності від координати та часу має вигляд

$$\begin{aligned} W(z, t, T) &= f_{11}(z) f_2(T), & 0 < t \leq t_0, \\ W(z, t, T) &= f_{12}(t) f_2(T), & t > t_0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad \rho_0, \beta - \text{питомий опір і температурний коефіцієнт опору}$$

дроту. Функції $f_{11}(z)$, $f_{12}(t)$ залежно від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд

$$f_{11}(t) = 0,5 \left(1 - \cos \frac{t}{t_0} \right), \quad (1.45)$$

$$f_{12}(t) = \left| \sin \left(\frac{t}{t_0} \right) \right|,$$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{t_0} - 2kn, & nt_0 \leq t \leq (n + \frac{1}{2mk})t_0 \\ \frac{1}{m}, & (n + \frac{1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\frac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), & (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{1}{k})t_0 \\ 0, & (n + \frac{1}{k})t_0 < t < (n+1)t_0 \end{cases}$$

$$f_{14}(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 \leq t \leq (2n+1)t_0 \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t \leq (2n+2)t_0 \end{cases}.$$

Тут параметри m, n визначають циклічний характер дії джерел тепла. Функції $f_{11}(z), f_{12}(t)$ є кусково-неперервні та додатно визначені.

Залучивши до задачі(1.40)–(1.44) інтегральну умову у вигляді

$$\int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_{0+}^{r_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I(t)^2 \rho_0 l T(r, z, t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dz dr dt = c \rho_n \int_{\varepsilon+}^t \iint_G (T(r, z, t) - T_0) dg dt +$$

$$+\frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+0}^{\eta_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{T(r,z,t)-T_c}{v(t)} dz dr dt.$$

Будемо мати можливість керувати тепловим процесом під час ЕПВ.

Математична модель теплообміну у валковому кристалізаторі

Теплофізична модель процесу теплообміну під час прокатки приводить до математичної моделі, в основу якої покладено однорідне рівняння теплопровідності, яке в циліндричній системі координат має вигляд

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1.46)$$

У випадку, коли $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, рівняння (1.46) описує квазістаціонарне температурне поле валкового калібру, коли після кожного оберту валка температура його поверхні не залежить від часу і залишається незмінною. Це ідеальний варіант, який можливий при жорсткому контролі умов теплообміну під час прокатки. Така задача притаманна для процесу отримання стрічки у валковому кристалізаторі.

Якщо вважати, що основи циліндричного валка теплоізовані, а його температура не суттєво залежить від осової координати, то можна покласти $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, а задачу визначення температурного розподілу на поверхні і у тілі валка звести до задачі визначення температурного розподілу осового перерізу порожнистого циліндра $T = T(r, \varphi, t)$, який обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Коли тепловий потік ортогональний осі обертання, то маємо початково-крайову задачу для

рівняння теплопровідності в області

$$\Omega \times t = \{(r, \varphi) \mid R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\} [142].$$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

$$T(r, \varphi, 0) = T_0, \quad T(r, \varphi + 2\pi, t) = T(r, \varphi, t),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -h_2 (T_{c_2} - T), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \bar{F}(\varphi, t, T),$$

$$\bar{F}(\varphi, t, T) = \begin{cases} h_2 T_M, & \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ h_1 (T_c - T) + \kappa (T_c^4 - T^4), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases},$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; c – теплоємність; ρ – щільність матеріалу; α_i – коефіцієнт теплообміну, $T_M = T_m + T_d$, T_m – температура металу, що потрапляє у зону деформації, T_d – середнє збільшення значення температури у зоні деформації (викликане деформацією металу), T_c – температура середовища зовні кільця, T_{c_2} – температура всередині кільця.

Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багат шарових областях

Розглянемо обмежену двошарову циліндричну область з різними теплофізичними характеристиками шарів. З фізичної точки зору її можна розглядати як один сталний валок прокатного стану із зносостійким покриттям, який застосовується під час прокатки металевої стрічки. Для підвищення стійкості валків, подовження терміну їх роботи валки покривають зносостійким матеріалом. При цьому поверхневий шар – покриття товщиною Δ має зовсім інші теплофізичні властивості ніж

основна маса валка. Тому температурне поле такого циліндричного валка доцільно розглядати як температурне поле двошарового циліндра. Моделювання температурного розподілу на поверхні валкових калібрів під час термічної обробки та прокатки стрічки відноситься до задач визначення температурного поля у циліндричній області, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω [11, 142]. Для визначення температурного розподілу $T(r, z, \varphi, t)$ у такому складеному циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження в області

$$\Omega \times t = \{(r, z, \varphi, t) | 0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$$

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \leq r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

$$T(r, 0, t) = T(r, z, 0) = T_0, \quad T(r, z, l) = T_l, \quad (1.48)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = \lambda_2 T_r(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \quad (1.49)$$

$$T(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = T(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \quad (1.50)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0, z, \varphi, t) = -\alpha(T - t_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - t_c^4), \quad T_r(0, z, \varphi, t) = 0, \quad (1.51)$$

$$T(r, \varphi + 2\pi, t) = T(r, \varphi, t),$$

де $\lambda_{1,2}, c_{1,2}, \rho_{1,2}, \alpha, \varepsilon, \sigma$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів шару покриття та основного тіла валка. При таких умовах теплообміну у математичній моделі припускаємо, що температура циліндра уздовж його довжини залишається сталою, тому похідною по z можна знехтувати, поклавши $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$. При цьому задача (1.47) – (1.51)

спрощується, рівняння (1.47) в області $\Omega_1 \times t = \{(r, \varphi, t) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ набуває вигляду

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \leq r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0. \end{cases}$$

Після перетворень маємо на границі внутрішнього та зовнішнього циліндрів умову імпедансного типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_0-\Delta} &= \\ = \begin{cases} g_0, & \omega t < \varphi < \omega t + \varphi_0, t > 0, \\ f_0 + f(u), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi, t > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.52)$$

де $g_0, f_0, f(u)$ – сталі величини, або кусково - монотонні функції.

Математична модель температурного поля найпростішої електричної машини

Розглянемо математичну модель температурного поля у тришаровому циліндрі, у одному з шарів якого діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших, що мають різні теплофізичні властивості тепло передається теплопровідністю. Внутрішні джерела тепла представляють собою джоулеве тепло, що виділяється під час протікання електричного струму у одному із шарів. Для прикладу розглянемо температурне поле електричної машини, що складається з двошарового ротора, в якому відсутні джерела тепла та статора з обмотками мідного дроту або алюмінієвих вставок, вздовж яких протікає електричний струм та виділяє джоулеве тепло. Визначення температурного розподілу $T(r, z, t)$ у тришаровому циліндрі, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішні шари тепло передається від зовнішнього теплопровідністю має вигляд наступної крайової задачі на спряження в області $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{S^2}, & r_1 \leq r < r_2 \\ 0, & 0 < r < r_0, r_0 < r < r_1, r > r_2 \end{cases},$$

$$T_i(r, z, 0) = T_0,$$

$$T_i(r, 0, t) = T_0, \quad T_i(r, l, t) = T_0,$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = [-\alpha (T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4)],$$

$$T(r_{i-0}, z, t) = T_i(r_{i+0}, z, t), \quad i = 1 \dots 3,$$

$$\left. \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=r_i-0} = \left. \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \right|_{r=r_i+0}, \quad i = 1 \dots 3,$$

де λ_i , c_i , ρ_i – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів частин електричної машини, α_i , I , ρ_0 , ε , σ – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір дроту обмотки, степінь чорноти та стала Стефана-Больцмана відповідно. Тут S – сумарна площа перетинів дроту в обмотках статора, зокрема $S_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ площа шару S_3 .

В даній роботі запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багат шаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами.

Математична модель теплового процесу радіального перерізу багат шарової складної області

Розглянемо математичку модель температурного поля радіального перерізу тришарового циліндра, що дозволяє досліджувати температурне поле електричної машини, яка складається з двошарового ротора, в якому відсутні джерела тепла та статора з композитного матеріалу, в якому діють внутрішні джерела тепла. З фізичної точки зору, статор включає в себе

складовою частиною алюмінієвий або мідний провідник вздовж якого протікає електричний струм і відбувається виділення джоулевого тепла і непровідний композит. В радіальному перерізі він має вигляд «4-пелюсткової троянди».

У математичній моделі температурного поля припускаємо, що температура навколишнього середовища стала, теплофізичні характеристики матеріалів також сталі. Уважаємо, що на межі внутрішнього та зовнішнього циліндрів має місце ідеальний тепловий контакт.

Математична модель температурного розподілу $T(r, z, \varphi)$ у такій складній багатосаровій області має вигляд наступної крайової задачі на спряження в області $\Omega: \{0 < r < r_3, r = r_3 \cos 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, & r_2 \leq r < r_3 \cos 2n, \alpha_2 < \varphi < \alpha_3, n=1, 2, \dots \\ 0, & 0 < r < r_1, r_1 < r < r_2, (0 < \varphi < \alpha_2) \quad r_2 < r < r_3, (\alpha_2 < \varphi < \alpha_3) \end{cases}$$

$$\lambda T_r(r_3, \varphi) = -\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4),$$

$$T_r(r_i - 0, \varphi) = T_r(r_i + 0, \varphi),$$

$$T_i(r_i - 0, \varphi) = T_i(r_i + 0, \varphi), \quad i = 1 \dots 3,$$

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_3 \cos 2\varphi - 0} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_3 \cos 2\varphi + 0}.$$

λ_i – коефіцієнти теплопровідності ротора, заліза статора, провідників електричного струму та ізоляції відповідно, α_i, c_i, ρ_i , – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів частин електричної машини, α_i, I, ρ_0 – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір провідників струму. Тут S – сумарна площа перетинів алюмінієвої складової статора, зокрема S площа області.

Математична модель теплового процесу в синхронній машині з постійним магнітом, у формі спиць

Побудуємо математичну модель температурного поля в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом, яка представлена у вигляді багатошарової області з різними теплофізичними характеристиками шарів.

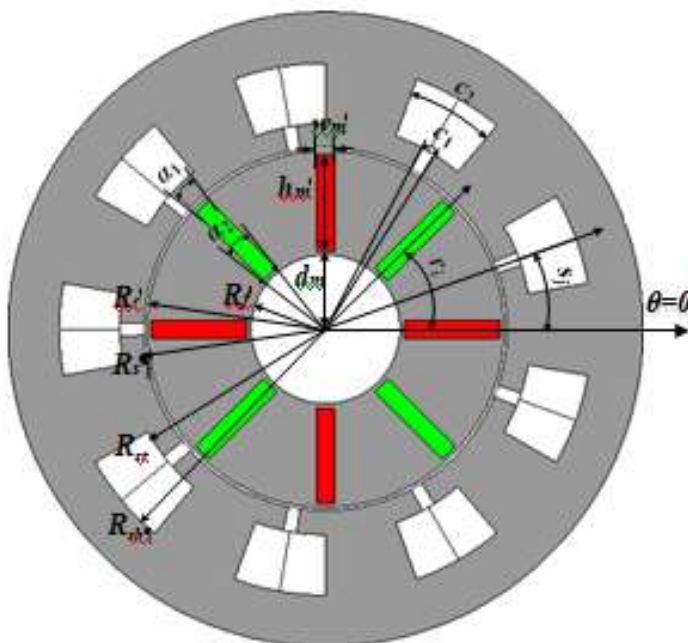


Рис. 1.5. Геометрія області

h_m – висота постійного магніту; w_m – ширина постійного магніту; d_m – мінімальна відстань між постійним магнітом та центром; θ – це положення радіус-вектора на колі, положення початкової осі визначається як $\theta=0$; r_i – кутове положення i -го магніту по відношенню до початкової осі; s_j – кутове положення j -го пазу; α_1 – кут ширини зовнішнього краю магніту; α_2 – кут ширини внутрішнього краю магніту; s_1 – кут ширини отвору паза; s_2 – кут ширини паза; r_1, r_3, r_4 та r_5 – радіуси вала, отвору статора, верхньої частини паза та низ паза відповідно. Для досягнення поставленої мети вся область (рис.1.6) розділена на п'ять типів простих підобластей, а саме: I – вал, II – внутрішній віялоподібні магніт, III –

зовнішній віялоподібні магніт, IV – отвір пазу, V – паз. В даній машині 4 пари полюсів і 9 слотів.

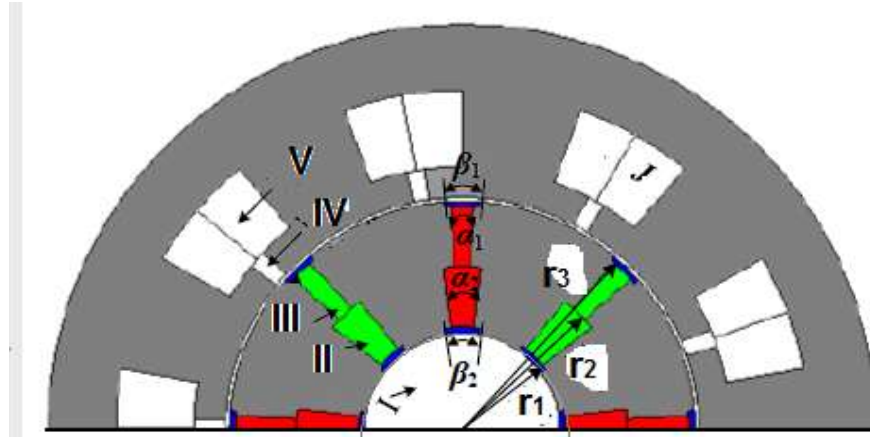


Рис. 1.6. Розбиття на під області

Визначення температурного розподілу $T(r, \varphi)$ в багат шаровій області $\Omega: \{0 < r < r_6, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, де внутрішнє джерело тепла зосереджено в обмотках, тобто в області V може бути записано як крайова задача з умовами спряження у вигляді

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, & r_4 \leq r < r_5, s_j - \frac{c_2}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_2}{2}, j=1,2,.. \\ 0, & 0 < r < r_1, r_5 < r < r_6, (0 < \varphi < 2\pi) \\ r_1 < r < r_2, (r_i - \frac{\alpha_2}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_2}{2}), \\ r_2 < r < r_3, (r_i - \frac{\alpha_1}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_1}{2}), r_3 < r < r_4, (s_j - \frac{c_1}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_1}{2}), \end{cases}$$

$$T_{ir}(r_i - 0, \varphi) = T_{ir}(r_i + 0, \varphi), \quad i = 2, 4$$

$$T_i(r_i - 0, \varphi) = T_i(r_i + 0, \varphi), \quad i = 2, 4$$

$$\lambda T_{ir}(r_i, \varphi) = -\alpha(T_i - T_c) - \varepsilon \sigma(T_i^4 - T_c^4), \quad i = 1, 3, 5.$$

Тут S площа пазу, тобто області V. Граничні умови четвертого роду дають по суті правило сполучення температурних полів по всім підобластям. Задача розв'язується методом кінцевих елементів.

Зваживши на все вищесказане, можна сформулювати наступні мету і завдання дисертаційного дослідження.

Основна мета дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови теплообміну між багат шаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв’язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями.

Це дозволяє підвищити точність визначення температурних розподілів у складних системах.

Для досягнення вказаної мети і вирішення існуючої науково-практичної проблеми в цілому у дисертації були сформульовані і розв’язані такі завдання:

- проведено аналіз математичних моделей і методів, що використовуються під час дослідження процесів теплообміну у складних технічних системах, таких, як прокатні стани, обладнання для термічної обробки виробів, електричні машини;

- побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну у багат шарових рухомих та нерухомих осесиметричних елементах, що нагріваються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують різні умови теплообміну поверхні елементів систем з навколишнім середовищем;

- побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну, що відбуваються під час електроімпульсної термічної обробки і враховують особливості кусково-монотонних функцій джерел тепла у нелокальних та крайових задачах для рівняння теплопровідності;

- побудовано та розв’язано обернені задачі для рівняння

теплопровідності, що містять інтегральні умови, які дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами у рухомих та нерухомих елементах складних систем з внутрішніми та зовнішніми, періодично та постійно діючими джерелами тепла;

- проведено порівняльний аналіз числових розв’язків нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий тепловий процес у складній системі;

- запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у багатошаровому циліндрі при щільному та нещільному контакті шарів, де в одних шарах діють внутрішні джерела тепла, а в інших – зовнішні, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами;

- проведено аналіз та порівняння результатів числових розрахунків зі значеннями температурних розподілів, отриманих шляхом вимірювання за допомогою приладів;

- запропоновано методи побудови умов імпедансного типу для багатошарової циліндричної області з умовами спряження 4-го роду на межі розділу шарів з різними теплофізичними характеристиками.

1.7 Висновки за розділом 1

В розділі розглянуто існуючі фізичні та математичні моделі теплових процесів, у складних системах, які включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі вироби циліндричної форми, що нагріваються або охолоджуються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла та які враховують залежність температурного поля від кута обертання виробів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з оточуючим середовищем, наведено стислий огляд публікацій за темою дисертації, зроблено аналіз існуючих числових та аналітичних методів розв’язання нелінійних крайових та нелокальних задач, сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

В результаті дослідження з’ясовано, що у науковій літературі відсутні

математичні моделі теплових процесів у складних системах, які включають у себе багат шарові рухомі та нерухомі вироби циліндричної, сферичної форм, що нагріваються або охолоджуються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла та які враховують залежність температурного поля від кута обертання виробів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з оточуючим середовищем.

В результаті дослідження відомих математичних моделей, побудованих на основі початково-крайових, крайових та нелокальних задач для диференціального рівняння теплопровідності формується єдина концептуальна точка зору щодо побудови математичних моделей теплових процесів у системах, що мають складну геометричну форму, наприклад прокатних станах, багат шарових виробів, в електричних машинах. Обґрунтовується доцільність розробки нових математичних моделей для розрахунків температурних розподілів у таких системах та їх конструктивних елементах під час їх роботи.

Виявлено недоліки методів числових розрахунків температурних розподілів у раніше запропонованих математичних моделях. Зокрема зазначено, що раніше запропоновані математичні моделі теплових процесів, які побудовані на основі не пов'язаних між собою лінійних крайових задач для рівнянь теплопровідності, не враховують тепловий контакт на межі різних частин складної системи; теплообмін між складною системою і зовнішнім або охолоджуючим середовищем; геометрію частин складної області, кускову-монотонність функцій коефіцієнтів рівняння. Ці моделі, в більшості своїй, призначені для дослідження теплового процесу в окремих частинах складної області, що значно ускладнює аналіз теплового процесу в складному багат шаровому виробі, такому як електрична машина. Пропонуються концептуально нові та уточнюються існуючі математичні моделі теплових процесів у багат шарових виробів – елементах електричних машин та під час таких технологічних операцій як ТЦО та ЕПВ у вигляді крайових, початково-крайових та нелокальних задач для рівняння

теплопровідності.

Значна увага приділяється обґрунтуванню побудови математичних моделей температурних розподілів у виробках – стрічці та дроту під час електропластичної та термоциклічної обробки виробів внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, а також постановці обернених задач, на основі математичних моделей, що дозволяють визначати параметри керування температурними полями.

В розділі багато уваги приділено нелокальним задачам теплопровідності. В результаті дослідження з'ясовано, що у багатьох роботах розглядаються питання існування і єдиності розв'язків нелокальних задач для рівняння теплопровідності; розглядаються аналітичні методи розв'язання нелокальних задач з різними типами інтегральних умов. Прикладне застосування нелокальних задач теплопровідності із інтегральною умовою досліджено недостатньо.

Зазначено, що введення нелокальної інтегральної умови, яка визначає баланс тепла області нагрівання або охолодження, у крайову задачу для рівняння теплопровідності, дозволяє більш точно формулювати математичні моделі теплових процесів, зокрема керуючи параметрами теплового процесу підтримувати необхідну температуру в усіх точках області, що нагрівається.

РОЗДІЛ 2

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМІНУ

Побудовані математичні моделі теплових процесів, що відбуваються в осесиметричних елементах складних систем під дією зовнішніх та внутрішніх джерел тепла. Запропоновані нелокальні інтегральні умови, що виражають баланс енергії в області нагрівання. В залежності від характеру джерел тепла енергія може виділятися всередині області або підводиться до неї із зовні. Це відображено під час постановки нелокальної задачі. Розглянуті постановки задач керування джерелом тепла та граничним режимом.

Проведено порівняльний аналіз температурних розподілів, що отримані із розв'язків крайової, нелокальної задачі та температурні розподіли отримані експериментально.

Запропоновано метод розв'язання задачі керування тепловим процесом, що відбувається в осесиметричних елементах складних систем. Шляхом уведення до математичної моделі теплового процесу, який протікає у рухомому осесиметричному елементі, інтегральної умови визначено параметр керування температурним полем. Інтегральна умова побудована виходячи із умови балансу теплової енергії в області нагрівання, що дозволило підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

2.1 Нелокальна інтегральна умова

Під час дослідження та контролю температурних розподілів у рухомих та нерухомих осесиметричних елементах складних систем важливе значення відіграють математичні моделі процесів нагрівання. На відміну від натурних вимірювань температури у скінченній кількості точок ці моделі

допомагають аналізувати температурне поле у всій області нагрівання. Для практичного використання та застосування математичної моделі при проектуванні технологічного обладнання важливим є визначення параметрів керування температурним розподілом. Ці параметри дозволяють визначати температурний розподіл як усередині області нагрівання, так і на її границях. Як відомо, більшість математичних моделей процесів теплообміну ґрунтуються на крайових задачах для рівняння теплопровідності [131–139, 185, 186]. За допомогою крайових та інших додаткових умов відбувається ідентифікація того чи іншого температурного розподілу. Слід відзначити, що математичні моделі на основі крайових задач досить правдиво відображають температурні розподіли усередині області нагрівання і не завжди вірно відображають температуру на її границях. Це пов'язано з особливістю побудови математичної моделі у вигляді крайової задачі. Так, коли температурне поле відоме у всіх точках області, то крайова задача ідеально описує температурне поле. А якщо температурний розподіл відомий лише у початковий момент часу та /або на частині границі, то для визначення температурного розподілу у всій області нагрівання необхідні додаткові умови, що пов'язані з балансом енергії виділеної у зоні нагрівання. Знання кількості енергії виділеної у всій області нагрівання дозволяє повністю ідентифікувати температурний розподіл. З математичної точки зору визначення температурного розподілу в області нагрівання, за таких умов приводить до розв'язання не крайової, а нелокальної задачі для рівняння теплопровідності [8, 39]. Комбінуючи отримані розв'язки крайової і нелокальної задачі можна розв'язувати обернену задачу, зокрема обернену задачу для рівняння теплопровідності з додатковою інтегральною умовою, що дозволяє визначати невідомі параметри теплового процесу. Такі задачі виникають під час виробництва дроту та стрічки [187–194], де у багатьох випадках відбувається попередній розігрів перед пластичною деформацією.

Як відомо [60–61], тепло у зону нагрівання можна підводити як із зовні, так і генерувати його усередині виробу, що нагрівається.

Випадок розігріву елемента складної системи внутрішніми джерелами тепла. З фізичної точки зору дріт та стрічку, що рухаються через зону нагріву можна розглядати як осесиметричний елемент складної системи з діючими внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагріву. Під дією електричного струму зростає температура, змінюються теплофізичні параметри елемента, в тому числі і його питомий опір. У цьому випадку, з математичної точки зору, у математичній моделі джерела тепла відображаються у неоднорідному рівнянні теплопровідності у вигляді функції, що залежить від координат, температури і часу.

Випадок розігріву елемента складної системи зовнішніми джерелами тепла. Тут у математичній моделі джерела тепла відображаються у граничних умовах для однорідного рівняння теплопровідності або у вигляді неперервної або кусково-неперервної функції [6, 13], що залежить від координат, температури і часу. Аналогічно формулюються задачі охолодження [65].

На відміну від нелокальних, крайові задачі достатньо досліджені. При формулюванні нелокальної задачі одна із крайових умов задачі замінюється нелокальною умовою, що має прозорий фізичний зміст. Найпростішою нелокальною умовою може виступати умова балансу енергії або імпульсу енергії [26] виділеної в усій області нагрівання або в її частині

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, \quad (2.1)$$

де Q_1 , Q_3 , Q_2 – відповідно кількість тепла виділеного в області нагрівання; кількість тепла, що пішло на підвищення температури області та кількість тепла, втраченого через її границі. Під час формування нелокальної задачі ця умова є найбільш повною. Долучивши до неї відповідну кількість локальних умов та однорідне або неоднорідне рівняння теплопровідності отримаємо нелокальну задачу.

Враховуючи вищезазначене, математична модель температурного поля елементів складної системи з діючими в них внутрішніми джерелами тепла щільністю $W(P, t)$ у дивергентній формі може бути записана у вигляді

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - c \rho_n \frac{\partial}{\partial t} T - c \rho_n (\vec{v} \operatorname{grad} T) + W(P, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$T(P, 0) = \varphi(P), \quad (2.3)$$

де T – температура, t – час, P – координати, λ, c, ρ_n – теплофізичні параметри елемента, $\vec{v}$ – швидкість руху елемента в області нагрівання.

Долучивши до рівняння (2.2) початкову умову (2.3), нелокальну умову (2.1) та граничні умови отримаємо нелокальну задачу. Кількість граничних умов визначає однозначність розв'язку задачі.

Математична модель температурного поля елементів складної системи в області Ω , де діють зовнішні джерела тепла описується однорідним рівнянням, яке у дивергентній формі має вигляд

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - c \rho_n \frac{\partial}{\partial t} T - c \rho_n (\vec{v} \operatorname{grad} T) = 0. \quad (2.4)$$

До цього рівняння долучається початкова умова (2.3), нелокальна умова (2.1) та одна із наступних граничних умов

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \alpha_k (T - T_c), \quad (2.5)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4),$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \left[\alpha_k (T - T_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right],$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{n=n_0-0} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{n=n_0+0} \quad x, y, z \in S, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

отримаємо нелокальну задачу для рівняння теплопровідності із зовнішніми джерелами тепла. У цій задачі, на відміну від попередньої, функція джерел тепла розташована не у рівнянні, а у граничних умовах.

Визначення основних параметрів керування температурним полем рухомого дроту або нерухомих прутків перед пластичною деформацією є однією з проблем, що виникає під час створення сучасних систем автоматичного керування технологічними процесами термічної обробки металів. Ці параметри можуть бути отримані як експериментально, так і за допомогою математичних моделей, що враховують умови взаємодії поверхні з навколишнім середовищем. У ряді випадків визначення оптимальних параметрів керування термічною обробкою металів пов'язано з великими фінансовими затратами, набагато більшими ніж дослідження математичних моделей.

Якщо дріт або пруток розігрівається електричним струмом, то кількість тепла, що виділяється в області нагрівання визначається за законом Джоуля-Ленца

$$Q_1 = \frac{I^2 \rho_0}{S} (1 + \beta T),$$

де S – площа перетину області нагрівання, ρ_0 – питомий опір області, β – температурний коефіцієнт опору.

З одиниці бічної поверхні l в одиницю часу за законами Ньютона і Стефана -Больцмана втрачається наступна кількість тепла

$$Q_2 = l \left[\alpha (T - T_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right],$$

де $\alpha, \varepsilon, \sigma$ – коефіцієнт тепловіддачі, ступінь чорноти, стала Стефана-Больцмана, T_c – температура навколишнього середовища.

У випадку, коли все виділене в елементі складної системи тепло витрачається, його температура не змінюється і маємо випадок термодинамічної рівноваги. Термодинамічна рівновага може наступати при різних значеннях температури T , в залежності від характеристик теплового процесу (I, α, ε). При відомому значенні сили струму I і коефіцієнті тепловіддачі α температура T термодинамічної рівноваги осесиметричного елемента визначається із рівняння

$$Q_1 = Q_2$$

або

$$\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi r_0^2} = 2\pi r_0 \left[\alpha (T - T_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right]. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) має єдиний додатний корінь. Якщо температура термодинамічної рівноваги $T = T_l$ відома, то із рівняння (2.7) можна визначити величину сили струму, необхідну для досягнення термодинамічної рівноваги при заданій температурі

$$I_l = \sqrt{\frac{2r_0}{\rho_0 (1 + \beta T_l)}} \left[\alpha (T_l - T_c) + \varepsilon \sigma (T_l^4 - T_c^4) \right].$$

Частина тепла, що виділяється під час нагрівання, витрачається на підвищення температури елемента

$$Q_3 = c \rho_n \Delta T. \quad (2.8)$$

У цьому випадку має місце співвідношення (2.1).

Визначення нестационарного температурного розподілу, рухомого зі швидкістю $v(t)$ осесиметричного елемента (пруток, дріт), що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, у обмеженій циліндричній області Ω_t , приводить до розв'язання наступної крайової задачі для рівняння теплопровідності $\Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$ [3]

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T), \quad (2.9)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha(T - T_c) - \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4), \quad (2.11)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (2.12)$$

де

$$w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}. \quad (2.13)$$

Якщо довжина зони нагрівання елемента, значно більша радіуса перетину і температурний розподіл уздовж неї несуттєвий, то можна зменшити розмірність задачі, перейшовши до усередненої за радіусом температури. Скориставшись співвідношенням [65]

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr$$

та граничною умовою (2.11), отримаємо наступну задачу в області

$$Q : \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, z, t), \quad (2.14)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (2.15)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l, \quad (2.16)$$

$$f(u, z, t) = - \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} \right) u - \frac{2 \varepsilon \sigma}{r_0} u^4 - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c + \frac{2 \varepsilon \sigma}{r_0} T_c^4.$$

У випадку коли $\varepsilon = 0$ рівняння (2.14) стає лінійним і має вигляд

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c - \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} \right) u.$$

Увівши заміну $u(z, t) = e^{\mu z + \eta t} v(z, t)$ приходимо до наступної задачі

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = f(z, t), \quad (2.17)$$

$$v(z, 0) = T_0 e^{-\mu z} = \varphi(z), \quad (2.18)$$

$$v(0, t) = T_0 e^{-\eta t} = \mu_1(t), \quad v(l, t) = T_l e^{-\mu l - \eta t} = \mu_2(t), \quad (2.19)$$

$$\text{де } f(z, t) = \left(- \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c \right) e^{-\mu z - \eta t}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c \rho_n}.$$

Розв'язок шукаємо методом поділу змінних Фур'є [64–65]

$$v(z, t) = v_2(z, t) + v_1(z, t),$$

$$v_2(z, t) = \mu_1(t) + \frac{z}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = T_0 e^{-\eta t} + \frac{z}{l}(T_l e^{-\mu l - \eta t} - T_0 e^{-\eta t}),$$

$$v_1(z, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l},$$

$$T_k(t) = \varphi_{1k}(t) e^{-a^2 \lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-a^2 \lambda_k (t-\tau)} d\tau,$$

де

$$\varphi_{1k}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^t \varphi_1(\tau) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$f_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(z, \tau) \sin \frac{k\pi z}{l} dz,$$

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) - v(z, 0).$$

Розв'язок крайової задачі (2.17) – (2.19) має вигляд

$$\begin{aligned} v(z, t) = & T_0 e^{-\eta t} + \frac{z}{l}(T_l e^{-\mu l - \eta t} - T_0 e^{-\eta t}) + \sqrt{\frac{2}{l}} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^t (T_0 e^{-\mu z} - \kappa z) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right) e^{-a^2 \lambda_k t} + \\ & + \int_0^t \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(z, \tau) \sin \frac{k\pi z}{l} dz \right) e^{-a^2 \lambda_k (t-\tau)} d\tau \sin \frac{k\pi z}{l}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{де } \kappa = \frac{1}{l}(T_l e^{-\mu l} - T_0).$$

2.2 Нестационарна задача керування температурним полем в області із діючими внутрішніми джерелами

Розв'язок (2.20) не завжди задовольняє фізичній моделі процесу нагрівання, не завжди виконується закон збереження енергії (2.1). Розглянемо більш детально таку задачу і спробуємо керувати температурним полем [194–203]. Визначити параметри керування температурним полем із розв'язку (2.20) достатньо складно. Ці складнощі пов'язані з тим, що якщо крайова задача коректна за Адамаром [146], то вона має єдиний розв'язок і цей розв'язок не завжди задовольняє фізичній постановці задачі. Якщо до задачі (2.17) – (2.19) додати нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії області нагрівання, то крайова задача перетвориться у нелокальну. При цьому з'являється можливість ідентифікації температури у будь-якій точці рухомої області, зокрема і на одній із границь області, що нагрівається. Параметром керування тут може виступати будь-який параметр, що відображений у рівнянні або у крайовій умові, зокрема це може бути щільність внутрішнього джерела тепла. Параметр керування може бути як сталою, так і змінною величиною, наприклад, функцією координат та часу.

Контроль температури здійснюється у кожній точці рухомої області і в кожен момент часу. Рівняння теплового балансу (2.1) в інтегральній формі має вигляд

$$\int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^{\eta} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 l T(r, z, t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dz dr dt = c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^t \iint_G (T(r, z, t) - T_0) dg dt +$$

$$+ \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^{\eta} \int_0^l \frac{T(r, z, t) - T_c}{v(t)} dz dr dt. \quad (2.21)$$

Тут сила струму $I(t)$ залежить від часу. Після усереднення за радіусом та вважаючи, що температурне поле не залежить від кутової координати, умова (2.21) набуває вигляду

$$\int_{0+0}^{t_0} \int_0^l \frac{I^2(t)\rho_0 l + \beta I^2(t)\rho_0 u^*(z,t)l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} dz dt = c \rho_n \int_{0+0}^{t_0} \int_0^l (u(z,t) - T_0) dz dt + \frac{\alpha l}{2\pi r_0} \int_{0+0}^{t_0} \int_0^l \frac{u^*(z,t) - T_c}{v(t)} dz dt$$

$$\int_{0+0}^{t_0} \int_0^l M(t) u^*(z,t) dz dt = \int_{0+0}^{t_0} \int_0^l N(t) dz dt, \quad (2.22)$$

де

$$M(t) = \left(c \rho_n - \frac{\beta I^2(t)\rho_0 l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} + \frac{\alpha l}{2v(t)\pi r_0} \right),$$

$$N(t) = c \rho_n T_0 + \frac{I^2(t)\rho_0 l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} + \frac{\alpha l T_c}{2v(t)\pi r_0}.$$

Тобто маємо задачу (2.14)–(2.16), (2.22) з якої можна визначити параметри керування процесом нагрівання виробу циліндричної форми. Методи визначення параметрів керування процесом нагрівання будуть розглянуті в розділі 3 [5–8, 23, 26–28].

Із розв'язку задачі отримуємо температуру $u(z,t)$ і функцію джерела тепла $f(u,z,t)$.

Параметр керування $f(u,z,t)$ підбирається таким чином, щоб на протязі часу $0 \leq t \leq t_0$ утримувати задане значення температури. Це викликано однією з вимог технологічного процесу виробництва дроту, де різке підвищення або зниження температури внаслідок недотримання технологічної температури може призвести до його обриву.

Проведені дослідження свідчать про те, що температурний розподіл, отриманий із розв'язку нелокальної задачі співпадає із температурним розподілом одержаним шляхом замірювання температури під час технологічного процесу відпалу мідного дроту (точки 3 на рис. 2.1).

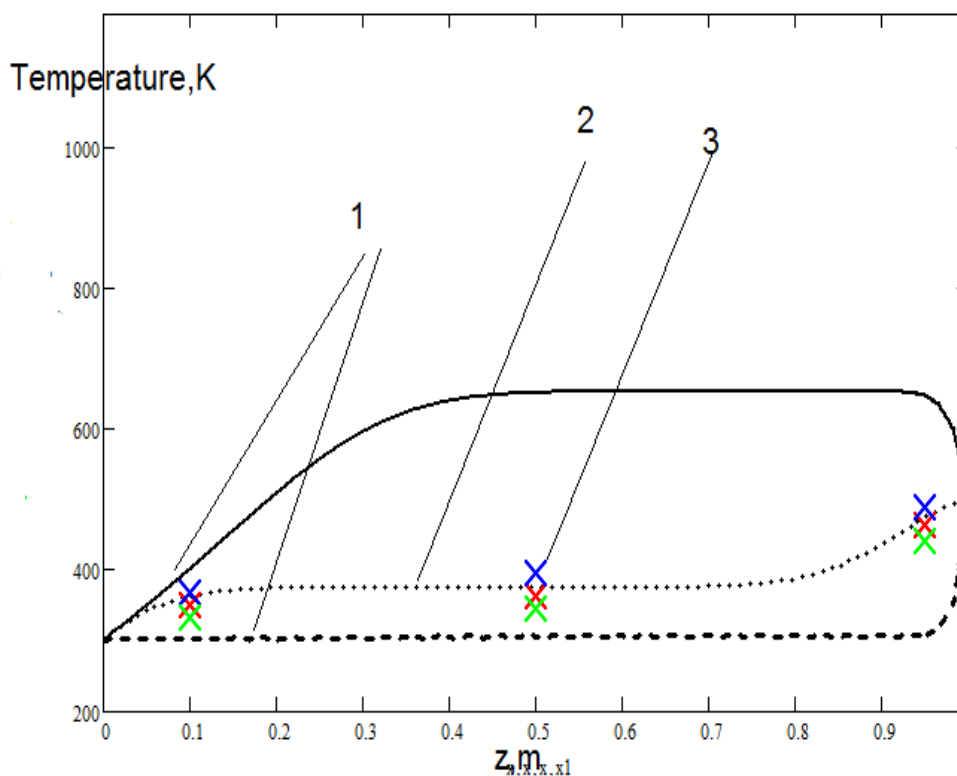


Рис. 2.1. Температурні розподіли отримані із розв'язку: криві 1 – крайової задачі (2.9) – (2.12), крива 2 – нелокальної задачі (2.9) – (2.12), (2.21), точки 3 – значення отримані експериментально.

На рис. 2.1 зображено температурні розподіли, що отримані із розв'язку: криві 1 – крайової задачі (2.9) – (2.12), крива 2 – нелокальної задачі (2.9) – (2.12), (2.21), точки 3 – значення отримані експериментально в трьох контрольних точках. На рис. 2.1 показано результати трьох експериментів на початку зони нагрівання $z=0.1$ м, всередині зони нагрівання $z=0.5$ м, в кінці зони нагрівання $z=0.95$ м. Результати експерименту узгоджуються із розв'язками нелокальної задачі (похибка не перевищує 8%) і ці результати далекі від розв'язків крайової задачі. Результати трьох експериментів зведені в таблицю 2.1

Ці розподіли свідчать про те, що крайова задача не при будь-яких граничних умовах може розглядатися як математична модель температурного поля рухомого осесиметричного елемента – стрічка, дріт, оскільки вона не завжди відповідає фізичному змісту задачі.

Порівняння результатів числового і натурного експериментів

Таблиця 2.1.

	Експериментальні дані 1 , $T_{1\text{exper}}, K$	Експериментальні дані 2	Експериментальні дані 3	Значення отримані із розв'язку крайової задачі	Значення отримані із розв'язку нелокальної задачі, T_n, K	$\delta T = \frac{ T_{1\text{exper}} - T_n }{T_n}$
Значення температури на початку зони нагрівання $z=0.1 \text{ m}$	332K	368K	351 K	400 K	362 K	8%
Значення температури всередині зони нагрівання $z=0.5 \text{ m}$	345K	495 K	362K	651K	375K	8%
Значення температури в кінці зони нагрівання $z=0.95 \text{ m}$	440K	490K	465K	647K	474K	7%

У якості математичної моделі теплового процесу в осесиметричних елементах складних систем доцільно використовувати нелокальну задачу з інтегральною умовою теплового балансу.

2.3 Визначення параметрів керування температурою осесиметричного рухомого елемента, що нагрівається зовнішніми джерелами тепла

Розглянемо задачу керування стаціонарним тепловим процесом, якщо в якості керування виступає температура у точці $z = l$.

Якщо теплообмін з навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона, то температурний розподіл уздовж області нагрівання можна записати у вигляді

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (2.23)$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad T(r, l) = T_l, \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha (T - T_c), \quad T_0 < T_l < T_c, \quad (2.25)$$

T_c – середня температура середовища, що нагріває.

Цілком доцільно розглянути задачу керування тепловим процесом [200–203], коли ми маємо можливість керувати тепловим граничним режимом.

При цьому стаціонарний температурний розподіл описується рівнянням (2.23), де відома температура на одній із границь області нагрівання $z = 0$, а на іншій $z = l$ будемо нею керувати $T(r, l) = T_l(r)$.

Для термічно тонкого елемента, можна перейти до усередненої інтегральної температури [65] уздовж радіуса, врахувавши при цьому одну із умов (2.5). Після усереднення задача (2.23)–(2.25) в області $W = \{0 < r < r_0, 0 < z < l\}$ для рівняння теплопровідності зведена до доточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\lambda \frac{d^2 u}{dz^2} - \nu c \rho_n \frac{du}{dz} - \frac{2\alpha}{r_0} u = -\frac{2\alpha T_c}{r_0} \quad (2.26)$$

з наступними крайовими умовами

$$u(0) = T_0, \quad u(l) = T_l. \quad (2.27)$$

Критерій якості розглянемо у вигляді

$$J(T_l) = c\rho \int_0^l (u(z) - u_k(z))^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\lambda l}{\alpha} T_l(z) \right\|^2, \quad (2.28)$$

$$J_\varepsilon(\omega) = \inf_{V \in H} J_\varepsilon(T_l(z)),$$

$u_k(z)$ – температурний розподіл, знайдений із спрощеної задачі або експериментальним шляхом.

В інженерних розрахунках при великій швидкості руху дроту перерозподілом температури уздовж зони нагрівання за рахунок теплопровідності можна знехтувати. При цьому крайова задача (2.26) – (2.27) трансформується в задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dz} = \frac{2\alpha}{r_o \nu c \rho_n} (u - T_c), \quad 0 < z < l, \quad (2.29)$$

$$u(0) = T_0.$$

Розв'язок якої виписується у вигляді [204 – 205]

$$u_k(z) = T_c - (T_c - T_0) e^{-\frac{2\alpha}{\nu c \rho_n r_o} z}, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (2.30)$$

Розглянемо задачу оптимального керування (2.26)–(2.27).

Гradient функціоналу для поставленої задачі оптимального керування має вигляд

$$L\delta u = 0, \quad (2.31)$$

$$\delta u = 0, \quad z = 0, \quad (2.32)$$

$$\delta u = \delta T_l, \quad z = l. \quad (2.33)$$

Визначаючи спряжений стан як розв'язок задачі

$$Lp(z) = u(z) - u_k(z), \quad (2.34)$$

$$p(z) = 0, \quad (2.35)$$

отримаємо

$$\int_{\Omega} \delta u(z)(u(z) - u_k(z))dz = -k \left(\frac{\partial p}{\partial n}, \delta T_l(z) \right), \quad (2.36)$$

$$\text{grad} J_{\varepsilon}(T_l) = 2 \left(-k \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{\varepsilon^2} T_l(z) \right),$$

$$-k \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{\varepsilon^2} \omega(z) = 0. \quad (2.37)$$

Рівність (2.36) визначає оптимальне керування.

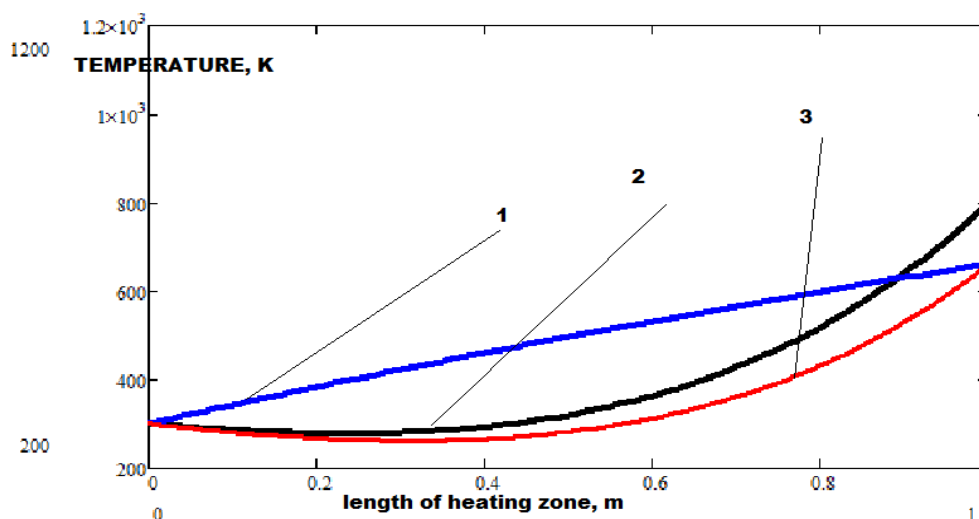


Рис. 2.2. Температурні розподіли отримані із розв'язку: крива 3 – (2.26) – (2.28) при невідомому значенні $u(l)$, крива 2 – (2.26) – (2.27), крива 1 – (2.29).

Розв'язок (2.29) доцільно використовувати для інженерних розрахунків при визначенні температурного поля осесиметричного елемента – дроту, що розігрівається в газовій або муфельній печі. Однак він не враховує перерозподіл температури уздовж осі z за рахунок теплопровідності і тому його застосування доцільне при розрахунку температурного поля дроту, що рухається через зону нагріву зі швидкістю $v = 0,5 \frac{m}{c}$.

В даному випадку реальні температурні розподіли відрізняються від температурних розподілів отриманих із розв'язку задачі (2.26)–(2.27) (рис.2.2).

Якщо рухома область розігрівається зовнішніми джерелами тепла від середовища з температурою T_c і коефіцієнтом тепловіддачі α , і при цьому уся теплова енергія витрачається на збільшення температури області і не втрачається в оточуюче середовище, то нелокальна інтегральна умова у нестационарних умовах нагрівання має вигляд

$$\int_{0+}^t \int_G \frac{T(r, z, t) - T_c}{v(t)} dg dt = \frac{c \rho_n}{\alpha l} \int_{0+}^{t_0} \int_0^{r_0} \int_0^l (T(r, z, t) - T_0) dz dr dt. \quad (2.38)$$

У цьому випадку маємо задачу керування процесом нагрівання області зовнішніми джерелами тепла в нестационарних умовах (2.4)–(2.5), (2.38). Тут можна керувати граничними режимами, тепловим потоком або температурою.

Якщо область, на яку діє зовнішнє джерело тепла, включається в область, де не діють джерела тепла, то через границю відбувається втрата тепла за одним із законів теплообміну [64]. Для рухомого дроту на границі може бути задана умова спряження – рівності теплових потоків через границю

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{n=n_0-0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{n=n_0+0} \quad r, z \in S, \quad t > 0. \quad (2.39)$$

2.4 Метод визначення параметрів керування нестационарним температурним полем у зоні нагрівання рухомого виробу внутрішніми джерелами тепла

Як було показано в 2.1, нелокальні задачі більш точно відображають реальні температурні розподіли усередині зони нагрівання рухомого елемента складної системи. Тому для визначення параметрів керування температурним полем доцільно застосовувати не розв'язки крайових, а розв'язки нелокальних задач для рівняння теплопровідності.

Розглянемо метод визначення параметрів керування нестационарним температурним полем.

У якості додаткової умови при розв'язанні оберненої задачі теплопровідності в такому випадку береться інтегральна умова, що визначає баланс енергії зони нагрівання, для $v(t) > 0$ вона має вигляд

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^{\eta} \int_0^l \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 l T(r, z, t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dz dr dt = c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^t \int_G (T(r, z, t) - T_0) dg dt + \\ + \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^{\eta} \int_0^l \frac{T(r, z, t) - T_c}{v(t)} dz dr dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Математична модель температурного поля осесиметричного рухомого елемента складної системи зі сталими теплофізичними характеристиками розглядається у вигляді крайової задачі (функція $I(t)$ є невідомою) для нестационарного рівняння теплопровідності в області

$$Q_{1t} = \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(T), \quad (2.41)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2.42)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha(T - T_c) - \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4), \quad (2.43)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (2.44)$$

де

$$W(T) = \frac{I^2(t) \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}.$$

Керування температурним полем може відбуватися за допомогою будь-якого параметра, що відображений у рівнянні або у крайовій умові. Зокрема, це може бути сила струму при нагріванні області внутрішніми джерелами тепла. Параметр керування може бути як сталою, так і змінною величиною, наприклад, функцією часу. При застосуванні умови (2.40) вважаємо, що температурний розподіл $T(r, z, t)$ відомий, тому підставивши його можемо визначити будь який параметр керування температурним полем. Нев'язка рівності (2.40) використовується для уточнення значення параметра I_0 на кожному часовому кроці. Отже, питання полягає у знаходженні функції $T(r, z, t)$, що відображена у математичній моделі. У випадку термічно тонкого елемента, перейшовши до усередненої інтегральної температури [64] будемо мати задачу в області $Q_{2t} = \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u, t), \quad (2.45)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (2.46)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l, \quad (2.47)$$

$$\int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 u(z,t) l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} dz dt =$$

$$c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l (u(z,t) - T_0) dz dt + \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \oint f_{12}(t) \frac{u(z,t) - T_c}{v(t)} dz dt, \quad (2.48)$$

$$F_1(u, t) = - \left(-\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2(t)}{\pi^2 r_0^4} \right) u - \frac{2 \varepsilon \sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4) - \left(\frac{I^2(t) \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c \right).$$

Для розв'язання оберненої задачі теплопровідності використовуємо пошуковий метод, що базується на пошуку температурної функції, яка задовольняє рівнянню (2.45), граничним умовам (2.47) і початковій умові (2.46). Умова (2.48) задовольняється в усіх точках області $Q_{2t} = \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}$. Керування $I(t)$ проводиться згідно з вимогою мінімізації відхилень в рівності (2.48) після підстановки у неї отриманої модельної температурної функції, що задовольняє (2.45) – (2.47).

Розглянемо обернену задачу теплопровідності як задачу оптимізації.

Розв'язання ОЗТ як задачі оптимізації пов'язано із введенням деяких параметрів системи $a_j (j = 1, 2, \dots, J)$, керування якими проводиться згідно з вимогою мінімізації відхилень модельної (розрахованої) температурної функції від (2.48). Для того щоб виразити шукану функцію $I(t)$ через параметри керування системи розкладемо її в ряд Тейлора $I(t) = I_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$. Процес знаходження параметра керування $I(t)$ розпочинається із апіорного задання початкового наближення функції $I(t)$ – сталого значення I_0 [138].

Його знайдемо, поклавши в (2.45) $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Це приводить до розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{du}{dz} - \left(\frac{2}{r_0 \nu c \rho_n} + \frac{\beta \rho_0 I(t)^2}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n} \right) u = \frac{\rho_0 I(t)^2}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n} - \frac{2T_c}{r_0 \nu c \rho_n}, \quad 0 < z < l, \quad (2.49)$$

$$u(0) = T_0. \quad (2.50)$$

Її розв'язок можна записати у вигляді

$$u(z) = \frac{\chi_1}{\theta_1} + (T_0 - \frac{\chi_1}{\theta_1}) e^{\theta_1 z}. \quad (2.51)$$

З нього визначаємо значення I_0 . Більш точне наближення I_0 можна отримати, прийнявши в (2.45) $\lambda = 0$, $\sigma \neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

За таких припущень розв'язок задачі (2.49)–(2.50) шукаємо методом предиктор-коректор.

Введемо на відрізку $0 \leq t \leq t_0$ рівномірну сітку $\omega_t = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\}$, уведемо позначення сіткової функції $u_n = u(t_n)$ і використовуємо наступний алгоритм

$$\bar{u}_n = u_n + \frac{\tau}{2} f(t_n, u_n), \quad \bar{u}_{n+1} = u_n + \tau f(t_n + \frac{\tau}{2}, \bar{u}_n), \quad (2.52)$$

$$u_0 = T_0, \quad (2.53)$$

$$f(u, t) = \left(\frac{2\alpha}{r_0 \nu c \rho_n} + \frac{\beta \rho_0 I(t)^2}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n} \right) u - \frac{\rho_0 I(t)^2}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n} + \frac{2\alpha T_c}{r_0 \nu c \rho_n} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4).$$

Якщо параметри $a_1, a_2 \dots$ знайдені, то приходимо до прямої задачі теплопровідності і розв'язуємо її кінцево-різницеvim методом. Отримана в результаті розв'язання прямої задачі модельна температурна функція буде шуканим розв'язком ОЗТ, якщо $I(t)$ буде підібрана таким чином, щоб умова (2.48) виконувалась. Розглянемо дискретний аналог (2.48)

$$\int_0^l \frac{I_j^2 \rho_0 l + \beta I_j^2 \rho_0 u^j(z) l}{r_0^4 \pi^2 v_j} dz = c \rho_n \int_0^l (u^j(z) - T_0) dz + \frac{\alpha l}{r_0} \int_0^l \frac{u^j(z) - T_c}{v_j} dz. \quad (2.54)$$

В результаті підстановки в (2.54) модельної температурної функції, що відповідає I_k в k -ому наближенні отримуємо нев'язку $\eta_{j(k)}$ у k -му наближенні. Сукупність нев'язок отриманих для кожного часового шару j утворює вектор нев'язок $\bar{H}$, усі компоненти якого повинні бути зведені до нуля у процесі розв'язання. Кожному параметру a_j ставиться у відповідність певна нев'язка η_j . Робиться невеликий пробний крок Δa_1 за першим параметром і проводиться розв'язання прямої задачі (2.45)–(2.47), у результаті якого знаходиться приріст відповідної нев'язки $\Delta \eta_1$ і наближене значення похідної $\frac{\partial \eta_1}{\partial a_1} = \frac{\Delta \eta_1}{\Delta a_1}$.

Далі робиться кілька робочих кроків уздовж параметра a_1 при фіксованих значеннях інших параметрів до тих пір, поки не буде задоволена умова $|\eta_1| \leq \delta$ для нев'язки η_1 , де δ – необхідна точність обчислень. Величина робочого кроку може бути визначена при $A_j = 1$.

$$\Delta a_j = -A_j \eta_j \frac{\partial a_j}{\partial \eta_j}. \quad (2.55)$$

Похідна $\frac{\partial \eta_j}{\partial a_j}$ уточнюється після кожного β робочого кроку, тобто

$$\left(\frac{\partial a_j}{\partial \eta_j} \right)^{(\beta)} = \frac{a_j^{(\beta)} - a_j^{(\beta-1)}}{\eta_j^{(\beta)} - \eta_j^{(\beta-1)}}. \quad (2.56)$$

Якщо для нев'язок $\eta_j (j=1, 2, \dots, s, s < J)$, що відповідають параметрам

$a_1, a_2, \dots, a_s$, умова $|\eta_j| \leq \delta$ уже виконується і необхідно визначити значення параметрів $a_1, a_2, \dots, a_{s+1}$, які задовольняють умовам $|\eta_j| \leq \delta$ ($j = 1, 2, \dots, s+1$), то робимо пробний крок Δa_{s+1} за a_{s+1} і обчислюємо похідну $\frac{\partial \eta_{s+1}}{\partial a_{s+1}} = \frac{\Delta \eta_{s+1}}{\Delta a_{s+1}}$. Далі робиться робочий крок за цим параметром, причому величина кроку обчислюється за (2.55). Кожен наступний крок за a_{s+1} проводиться після обчислень, що пов'язаний із зміною параметрів $a_1, a_2, \dots, a_s$ до тих пір поки не буде задоволена умова $|\eta_j| < \delta$ для ($j = 1, 2, \dots, s$). Цей цикл відрізняється від циклу обчислень, що передували зміні a_{s+1} тим, що пробні кроки для $\frac{\partial \eta_j}{\partial a_j}$ не проводяться. Розрахунок припиняється, коли всі η_j ($j = 1, 2, \dots, s, s < J$), будуть задовольняти умові $|\eta_j| \leq \delta$.

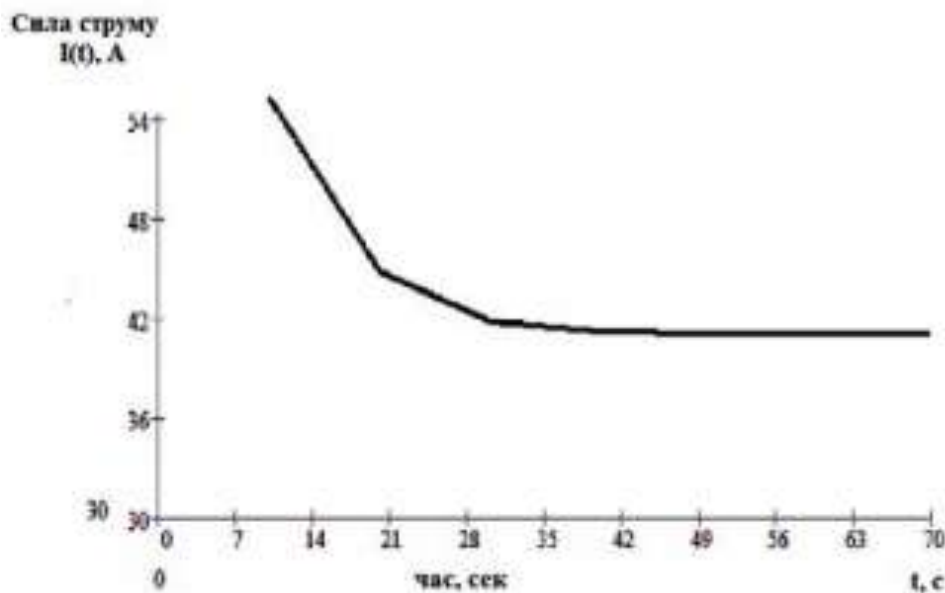


Рис.2.3. Параметр керування знайдений із (2.45)–(2.48)

На рисунку 2.3 зображена функція $I(t)$, що дозволяє підтримувати задану температуру у кінці зони нагрівання. Для розрахунків були взяті

значення теплофізичних характеристик для вольфраму. Функція $I(t)$ є розв'язком оберненої задачі (2.45)–(2.48).

2.5 Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну

Інтегральні рівняння знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичної фізики та під час моделювання багатьох неперервних фізичних та технологічних процесів. Зведення крайової задачі для рівняння з частинними похідними до відповідного інтегрального рівняння дозволяє у багатьох випадках спростити алгоритм її розв'язання. Особливо це стосується нелінійних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, де зведення до нелінійних інтегральних рівнянь дозволяє розв'язувати методами комп'ютерної математики.

У роботі пропонується алгоритм знаходження розв'язку крайових задач теплообміну шляхом зведення їх до інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна.

Математична модель процесу нагрівання дроту внутрішніми джерелами тепла приводить до дослідження крайових задач для неоднорідного рівняння теплопровідності з граничними умовами I-III роду, які відображають втрати тепла з поверхні середовища, що нагрівається. У такій моделі джерела тепла відображаються у неоднорідному рівнянні у вигляді функції, що залежить від просторових координат та невідомої функції.

Розглянемо математичну модель процесу нагрівання рухомого зі сталою швидкістю v дроту внутрішніми джерелами тепла. Крайова задача, що описує стаціонарне температурне поле рухомого осесиметричного середовища, розв'язок якої дозволяє визначити температурний розподіл у зоні нагрівання довжиною l з діючим джерелом тепла

щільністю $w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 a^4}$, що залежить від температури та враховує

перерозподіл температури за рахунок теплопровідності та втрат тепла з

поверхні, має вигляд наступної задачі для рівняння теплопровідності у циліндричній області $\Omega: \{0 < z < l, 0 < r < r_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad (2.57)$$

$$T(r, 0) = u_0, \quad T(r, l) = u_l,$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(a, z)}{\partial r} = \alpha(u_c - T) + \varepsilon \sigma (u_c^4 - T^4), \quad (2.58)$$

де $T(r, z)$ – температурне поле дроту, I – величина сили струму, α , λ – відповідно коефіцієнти тепловіддачі, теплопровідності; c – теплоємність матеріалу; l – довжина зони нагрівання; r_0 , ρ_n , ν – відповідно радіус, щільність та швидкість руху дроту; σ , ε – стала Стефана-Больцмана та ступінь чорноти матеріалу дроту; u_c – температура навколишнього середовища; ρ_0 , β – питомий опір та температурний коефіцієнти опору.

Задачу (2.57)–(2.58) можна звести до нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку шляхом усереднення за радіусом.

Для тонкого у термічному відношенні дроту достатньо точні результати можна отримати, розглядаючи усереднене за радіусом температурне поле $u(z)$, скориставшись співвідношенням [2]

$$u(z) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r T(r, z) dr, \quad (2.59)$$

та крайовою умовою (2.57). У результаті перетворень отримаємо задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку в області $0 < z < l$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - v\chi \frac{du}{dz} + \gamma u = \tau(u^4 - u_c^4) - \omega, \quad 0 < z < l \quad (2.60)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l,$$

де

$$\chi = c\rho_n \lambda^{-1}, \quad \gamma = (I^2 \rho_0 \beta - 2\pi^2 r_0^3 \alpha) (\pi^2 r_0^4 \lambda)^{-1}, \quad \tau = 2\varepsilon \sigma (r_0 \lambda)^{-1},$$

$$\omega = (I^2 \rho_0 + 2\alpha u_c \pi^2 r_0^3) (\pi^2 r_0^4 \lambda)^{-1}.$$

При цьому враховується теплообмін поверхні рухомого середовища із навколишнім. Усереднення за радіусом дозволяє зменшити розмірність задачі та звести її до розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку з неоднорідними крайовими умовами. Зведемо нелінійну крайову задачу (2.60) до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Запишемо рівняння (2.60) в операторній формі

$$Lu = \tau u^4 - \tau u_c^4 - \omega, \quad (2.61)$$

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - v\chi \frac{d}{dz} + \gamma.$$

Зведемо розв'язання нелінійної крайової задачі (2.61) до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна згідно наступного алгоритму.

Для знаходження розв'язку будемо функцію Гріна для спряженого

до $L = \frac{d^2}{dz^2} - v\chi \frac{d}{dz} + \gamma$ оператора

$$L^* = \frac{d^2}{dz^2} + v\chi \frac{d}{dz} + \gamma,$$

$$\begin{cases} L^*G(z, \xi) = \delta(z - \xi) \\ G(0, \xi) = 0, G(l, \xi) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

де $\delta(z - \xi)$ – дельта-функція Дірака [142].

Функція $G(z, \xi)$ для $z < \xi$ або $z > \xi$ повинна задовольняти однорідному рівнянню

$$L^*G(z, \xi) = 0, z < \xi, \quad z > \xi. \quad (2.63)$$

У кожній із підобластей $z < \xi$ або $z > \xi$ запишемо загальний розв'язок однорідного рівняння (2.63) з однорідними умовами

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{dz^2} + v\chi \frac{dG}{dz} + \gamma G &= 0, \quad 0 < z < l, \\ G(0, \xi) &= G(l, \xi) = 0. \end{aligned}$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + v\chi k + \gamma = 0, \quad k_{1,2} = -v\chi / 2 \pm \sqrt{\frac{v^2\chi^2}{4} - \gamma}.$$

Тоді

$$G(z, \xi) = \begin{cases} \{C_1(\xi)e^{k_1z} + C_2(\xi)e^{k_2z}, \forall z \leq \xi \\ \{C_3(\xi)e^{k_1z} + C_4(\xi)e^{k_2z}, \forall z \geq \xi \end{cases} \quad (2.64)$$

Визначимо коефіцієнти $C_1 \div C_4$ скориставшись однорідними граничними умовами та властивостями функції Гріна.

Підставивши значення коефіцієнтів $C_1(\xi) \div C_4(\xi)$ в (2.64) отримаємо функцію Гріна. Після перетворень рівняння Гаммерштейна можна записати у вигляді

$$u(\xi) = u_l - \tau \int_0^l G(z, \xi) u^4 dz, \quad (2.65)$$

$$\text{де } u_l(\xi) = u_0 G'_z(0, \xi) - u_l G'_z(l, \xi) + \tau(u_c^4 + \omega) \int_0^l G(z, \xi) dz.$$

Інший вигляд має математична модель нагрівання дроту зовнішніми джерелами тепла. У такій моделі температурне поле задається крайовою задачею для однорідного рівняння теплопровідності. Зовнішні джерела тепла у таких моделях відображені у граничних умовах.

Визначення температурного розподілу у зоні нагрівання рухомого дроту під час стаціонарного процесу з врахуванням перерозподілу температури за рахунок теплопровідності та променевого нагріву дроту через поверхню приводить до розв'язання наступної задачі для рівняння теплопровідності у циліндричній області $\Omega: \{0 < z < l, 0 < r < r_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= u_0, & T(r, l) &= u_l, \\ \frac{\partial T(0, z)}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial T(a, z)}{\partial r} &= -\varepsilon \sigma (u_c^4 - T^4). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Після перетворень, усереднення за радіусом (2.59) розв'язок задачі (2.66)–(2.67) зводиться до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна

$$u(\xi) = u_L - \mu \bar{u}^4 \int_0^l G(z, \xi) dz, \quad (2.68)$$

де функція $\mu = \frac{2\varepsilon\sigma}{\lambda r_0}$ пов'язує фізичні параметри середовища та параметри теплообміну,

$$u_L(\xi) = -u_0 \frac{e^{-kl} - e^{k(\xi-l)}}{(1 - e^{-kl})} + u_l \frac{e^{k(\xi-l)} - e^{-kl}}{(1 - e^{-kl})} + \mu \bar{u}^4 \int_0^l G(z, \xi) dz. \quad (2.69)$$

Для знаходження розв'язку нелінійного рівняння застосовано модифікований метод Ньютона.

2.6 Висновки за розділом 2

В розділі побудовані математичні моделі процесів теплообміну, що відбуваються в осесиметричних елементах складних систем під дією зовнішніх та внутрішніх джерел тепла. Запропоновані нелокальні інтегральні умови, що з фізичної точки зору виражають баланс енергії в області нагрівання. В залежності від характеру джерел тепла енергія може виділятися всередині області або підводиться до неї із зовні. Це відображено під час постановки нелокальної задачі. Розглянуті постановки задач керування джерелом тепла та граничним режимом. Зокрема розглянуті:

нестационарна задача керування тепловим процесом в області із внутрішніми джерелами;

задача керування тепловим процесом із зовнішніми джерелами тепла в стаціонарних умовах;

задача керування нестационарним тепловим процесом із зовнішніми джерелами.

Побудовані температурні розподіли в області нагрівання, що отримані

із розв'язків крайової, нелокальної задачі та експериментальним шляхом. Проведено порівняльний аналіз температурних розподілів. Зроблено висновок про те, що уведення нелокальної інтегральної умови балансу тепла у крайову задачу для рівняння теплопровідності, дозволяє більш точно формулювати математичні моделі процесів теплообміну, зокрема керуючи параметрами теплового процесу підтримувати необхідну температуру в усіх точках області, що нагрівається. Розроблені математичні моделі теплових процесів у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами, що дає змогу підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Запропоновано метод розв'язання обернених крайових задач теплопровідності який, на відміну від існуючих, застосовує інтегральну умову балансу тепла для побудови розв'язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв'язання обернених задач, що в свою чергу дозволило підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

В розділі розглянуто математичні моделі температурного поля у рухомому осесиметричному середовищі, що розігрівається у обмеженій замкненій області внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла. В кожному випадку розв'язання задачі зведено до розв'язання інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна.

Матеріали розділу описані в роботах [8–13, 20, 23, 27–29, 40–41, 48–51, 58].

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ПІД ЧАС ІМПУЛЬСНОЇ ОБРОБКИ РУХОМИХ ТА НЕРУХОМИХ ВИРОБІВ

Розглядаються математичні моделі процесів теплообміну, що відбуваються в рухомих осесиметричних елементах складних систем, таких, як пристрої для термічної обробки, де діють імпульсні джерела тепла. На основі цих моделей запропоновано формулювання обернених задач для однорідних та неоднорідних рівнянь теплопровідності. Обернені задачі спрямовані на знаходження параметрів керування температурним полем елементів складних систем за допомогою математичної моделі. Ці параметри дозволяють підтримувати необхідний температурний розподіл у всій системі чи в окремих елементах системи. Досліджуються особливості дії джерел тепла на температурний розподіл. Запропоновано методи розв'язання обернених задач теплопровідності з імпульсними періодично діючими джерелами тепла.

3.1 Нові технологічні способи термічної обробки металів і сплавів

На даний час розроблені і знаходять широке застосування на практиці різні технологічні способи термічної обробки металів і сплавів [206–210], в яких використовується циклічна багаторазова зміна температури. До них можна віднести способи багаторазової нормалізації, загартування або відпуску, циклічного або маятникового відпалу, а також різні способи термоциклювання в процесі обробки. Так, в останні роки інтенсивно розробляється і знаходиться на стадії впровадження принципово нові методи термообробки – термоциклічна обробка (ТЦО) та електропластичне волочіння (ЕПВ), режими яких характеризуються (на відміну від відомого методу термічної обробки) багаторазовим нагріванням та охолодженням з

оптимальними швидкостями і відсутністю витягів при максимальних температурах нагрівання.

Термоциклічна обробка (ТЦО) – вид термічної обробки, при якій матеріал піддається багаторазовим неперервним змінам температури (циклам нагрівання та охолодження), що супроводжується структурними та / або фазовими перетвореннями в матеріалі з метою отримання необхідних змін структурного, фазового або напруженого стану і, як наслідок, необхідних властивостей матеріалу.

Термоциклічна обробка (ТЦО) являє собою процес термічного впливу, що здійснюється за рахунок неперервної циклічної зміни температури і супроводжується багаторазовими структурними або фазовими перетвореннями в матеріалі, який піддається нагріванню й охолодженню із заданою швидкістю. Вона виконується в газових або муфельних печах або шляхом пропускання електричного струму через виріб або напівфабрикат. [15–16, 72, 79–80]. З фізичної точки зору перше є впливом зовнішніх джерел тепла на заготовку, а друге – внутрішніх джерел тепла.

Волочіння дроту з імпульсним або з постійним струмом (меншою мірою) в режимах електропластичного волочіння (ЕПВ) являє собою приклад впливу струму на полярну деформацію матеріалу, що відбувається в процесі волочіння дроту. Електропластичне волочіння (ЕПВ) дроту із застосуванням імпульсного або постійного струму спричинює додатковий вплив на властивості деформованого металу. Під час ЕПВ, особливо в разі застосування імпульсного струму, в зоні деформації металу (ЗДМ) всередині волоки діє відкритий в 1968 р. електропластичний ефект (ЕПЕ).

Така обробка дозволяє формувати необхідні фізико-механічні властивості металу. В результаті ЕПВ зменшується електричний опір дроту, що дозволяє рекомендувати цю технологію для застосування в виробництві проводів і електрокабелів в якості основної операції для надання заготовкам майбутніх проводів, струмопровідних жил і кабелів головної їх властивості та призначення – ефективного та маловитратного транспортування

електричної енергії.

3.2 Математична модель теплового процесу рухомого осесиметричного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла

Для з'ясування впливу термічної складової дії імпульсного струму на ЕПД (електропластичну деформацію) було побудовано математичну модель температурного поля в зоні підведення струму. В основу цієї моделі покладена крайова задача для рівняння теплопровідності в рухомому осесиметричному середовищі з постійними теплофізичними характеристиками.

З математичної точки зору температурне поле рухомого осесиметричного елемента – дроту під час процесу ЕПВ можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою $I(t)$ в зоні нагрівання.

Якщо під час перехідного процесу в зоні нагрівання діють джерела тепла, параметри яких не змінюються, то температурне поле є нестационарним. Одночасно з питанням визначення температурного розподілу під час перехідного процесу виникає технічна проблема визначення параметрів керування процесом нагрівання, за яких температурне поле під час руху осесиметричного елемента зі змінною $v(t)$ швидкістю буде стаціонарним. Цього можна досягти, обравши відповідним чином щільність джерел тепла.

Починаючи з деякого моменту часу, для $t \geq t_0$, швидкість руху дроту стає сталою $v = const$. Вибір параметрів керування дозволяє підтримувати в зоні ЕПВ необхідний з технологічної точки зору режим обробки. Щільність джерел необхідно підібрати таким чином, щоб упродовж розглядуваного проміжку часу утримувати температуру, близькою до наперед заданої.

Визначення нестационарного температурного розподілу під час перехідного процесу приводить до розв'язання такої початково-крайової

задачі для рівняння теплопровідності в області $\Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$ [4–6, 10, 12–13, 15–16, 20–22, 32, 46, 52–55, 211–215]:

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), \quad (r, z, t) \in \Omega_t, \quad (3.1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (3.2)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l, \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f_{12}(t) \left[-\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right]. \quad (3.4)$$

Функція джерел тепла $W(z, t, T)$ у випадку залежності від координати та часу має вигляд

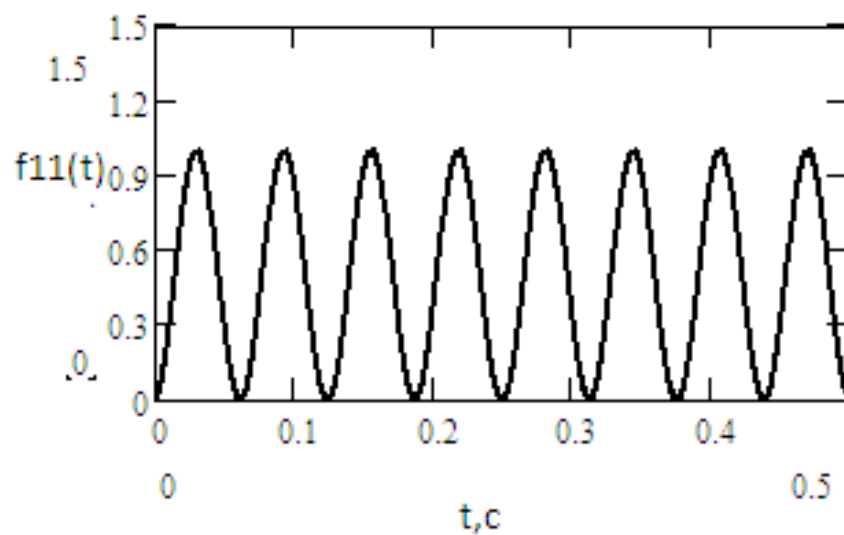
$$\begin{aligned} W(z, t, T) &= f_{11}(z) f_2(T), & 0 < t \leq t_0, \\ W(z, t, T) &= f_{12}(t) f_2(T), & t > t_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$f_2(T) = \frac{I^2(t) \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad I(t), \rho_0, \beta \text{ — сила струму, питомий опір і}$$

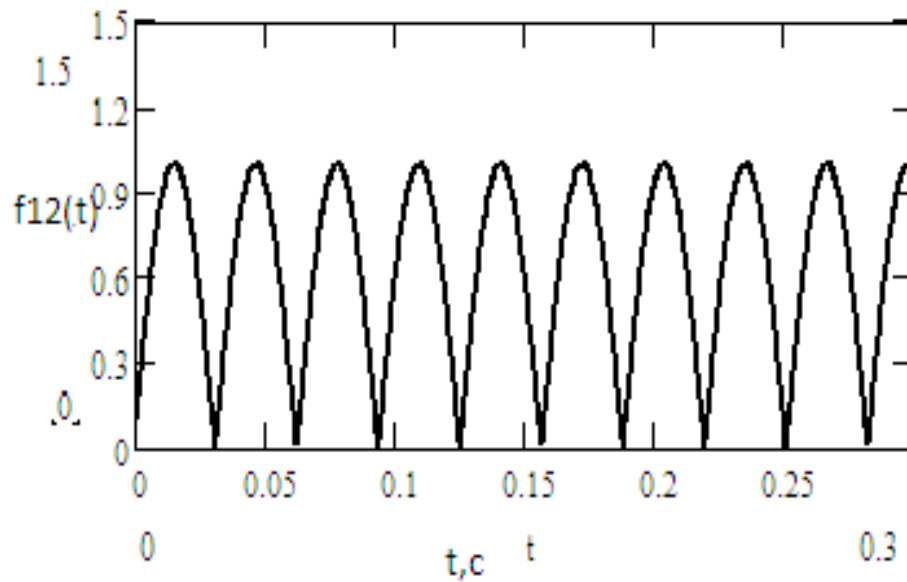
температурний коефіцієнт опору дроту.

Функції $f_{11}(z)$, $f_{12}(t)$ залежно від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд

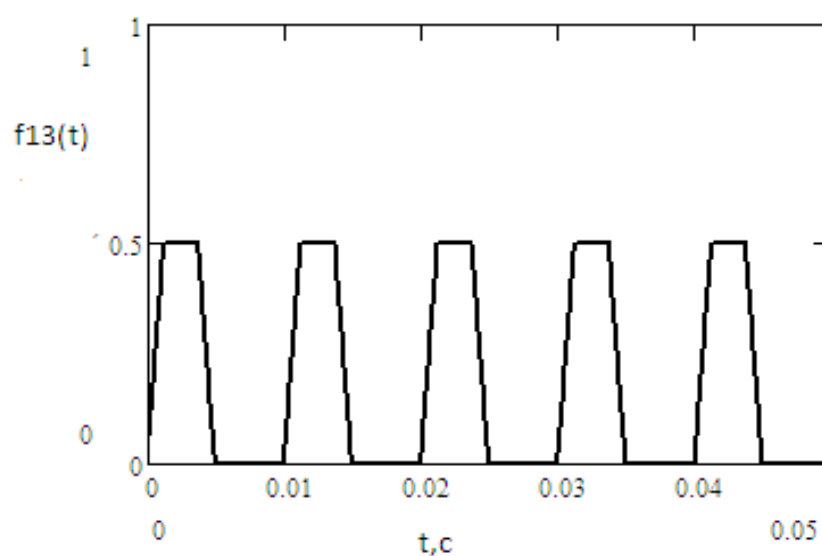
$$f_{11}(t) = 0,5 \left(1 - \cos \frac{t}{t_0} \right),$$

Рис. 3.1. Функція $f_{11}(t)$

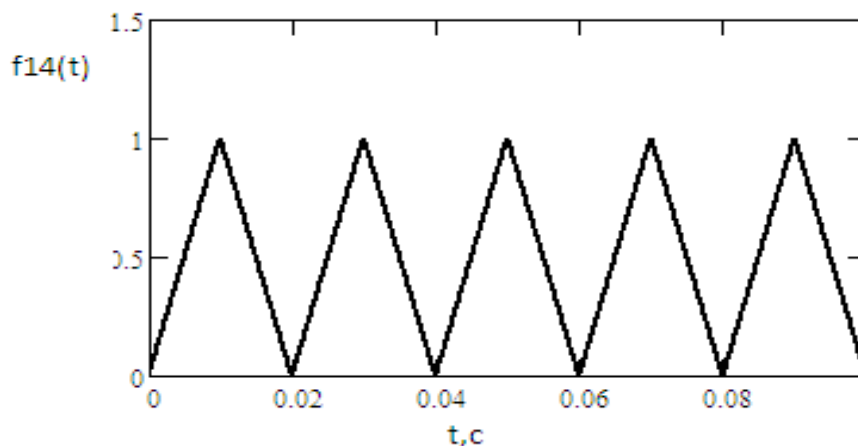
$$f_{12}(t) = \left| \sin \left(\frac{t}{t_0} \right) \right|,$$

Рис. 3.2. Функція $f_{12}(t)$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{t_0} - 2kn, & nt_0 \leq t \leq (n + \frac{1}{2mk})t_0 \\ \frac{1}{m}, & (n + \frac{1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\frac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), & (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{1}{k})t_0 \\ 0, & (n + \frac{1}{k})t_0 < t < (n+1)t_0 \end{cases}$$

Рис.3.3. Функція $f_{13}(t)$

$$f_{14}(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 \leq t \leq (2n+1)t_0 \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t \leq (2n+2)t_0 \end{cases},$$

Рис. 3.4. Функція $f_{14}(t)$

Де параметри m, n визначають циклічний характер дії джерел тепла. Функції $f_{11}(z), f_{12}(t)$ є кусково-неперервні та додатно визначені.

Скориставшись співвідношенням [64]

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr \quad (3.6)$$

та граничною умовою (3.4), отримаємо задачу визначення усередненої за радіусом температури в області $Q: \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} + f_{12}(t) \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2(t)}{\pi^2 r_0^4} \right) u = \quad (3.7)$$

$$= \frac{2 \varepsilon \sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4) - f_{12}(t) \frac{\rho_0 I^2(t)}{\pi^2 r_0^4} + f_{12}(t) \frac{2}{r_0} \alpha T_c,$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (3.8)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l. \quad (3.9)$$

При цьому враховується теплообмін поверхні рухомого елемента з навколишнім середовищем. Перетворення (3.6) дозволяє зменшити

розмірність задачі та звести її до розв'язання першої крайової задачі для квазілінійного рівняння теплопровідності.

За допомогою підстановки $u(z,t) = U(z,t)e^{\mu(t)z + \eta(t)t}$ отримаємо задачу в області $\bar{Q}_T = \{(z,t) | z \in [0,l], t \in [0,t_0]\}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f(z,t), (z,t) \in Q_T, \quad (3.10)$$

$$U(z,0) = T(z), \quad 0 \leq z \leq l, \quad (3.11)$$

$$U(l,t) = T_2(z), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (3.12)$$

Поклавши $\sigma = 0$ будемо мати лінійну крайову задачу з параметрами

$$f(z,t) = f_{12}(t) \left(\frac{I^2(t)\rho_0 - 2\alpha T_c r_0^3 \pi^2}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} \right) e^{-\mu(t)z - \eta(t)t},$$

$$\mu(t) = \frac{v(t)c\rho_n}{2\lambda}, \quad \eta(t) = \frac{-v^2(t)c\rho_n}{4\lambda} + f_{12}(t) \frac{I^2(t)\rho_0\beta + 2\alpha r_0^3 \pi^2}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n}.$$

При $\sigma \neq 0$

$$f(z,t) = f_{12}(t) \left(\frac{I^2(t)\rho_0 - 2\alpha T_c r_0^3 \pi^2 + 2\varepsilon\sigma r_0^3 \pi^2 (T_0 + T_c)(T_0^2 + T_c^2)}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} \right) e^{-\mu(t)z - \eta(t)t},$$

$$\eta(t) = \frac{-v^2(t)c\rho_n}{4\lambda} + f_{12}(t) \frac{I^2(t)\rho_0\beta + 2\alpha r_0^3 \pi^2 + 2\varepsilon\sigma r_0^3 \pi^2 (T_0 + T_c)(T_0^2 + T_c^2)}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n}.$$

Досліджується вплив нагріву дроту струмом на процес його волочіння. Слід відзначити, що величина $e^{-\mu(t)z - \eta(t)t} \approx 0,1-1$, для мідного мікродроту радіусом $r_0 = 10^{-4}$ м при щільності струму $j = 10^8 - 10^9 \frac{A}{m^2}$ і часу

імпульсу $10^{-4}c$, що піддавався імпульсному волочінню зі швидкістю $v(t) = 0,2 \frac{M}{c}$.

Маємо коректно поставлену задачу, оскільки розв'язок задачі (3.10)–(3.12) існує, єдиний і стійкий по відношенню до малих збурень $f(z,t), T(z), T_1(z), T_2(z)$.

3.3 Відновлення внутрішніх періодично діючих джерела тепла в задачі керування тепловим процесом під час ЕПВ

У випадку, коли джерело тепла є невідомою величиною, ми приходимо до оберненої задачі [126–128, 186, 216–221].

Такі задачі виикають при керуванні температурними полями [222].

Необхідно знайти просторово-часовий розподіл теплового потоку в осесиметричному середовищі. Причому функція $f(z,t)$ може бути результатом сумарної дії виділеного усередині і втраченого поверхнею середовища тепла

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = f_{12}(t) [-\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4)],$$

а можливо являє собою внутрішнє джерело тепла і є функцією, що відображена у правій частині рівняння теплопровідності.

Нехай теплофізичні характеристики середовища сталі. Після застосування усереднення (3.6) та подальших перетворень задача (3.1)–(3.4) трансформується у (3.10)–(3.12), де функція $f(z,t)$ може бути визначена повністю лише, коли відомий температурний розподіл в усій області нагрівання. Тому при заданні внутрішніх джерел тепла будемо вважати відомою сумму енергій, що пішла на нагрівання виробу і втрати тепла з поверхні, тобто права частина рівності

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^{r_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I(t)^2 \rho_0 l T(r, z, t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dz dr dt = c \rho_n \int_{\varepsilon+}^t \iint_G (T(r, z, t) - T_0) dg dt + \\
& + \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+}^{t_0} \int_0^{r_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{T(r, z, t) - T_c}{v(t)} dz dr dt.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Завершуємо постановку оберненої задачі додаванням до рівняння теплопровідності початкової та крайових умов.

Після усереднення за радіусом та вважаючи, що температурне поле не залежить від кутової координати, умова (3.13) набуває вигляду [40]

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 u^*(z, t) l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} dz dt = \\
& = c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l (u^*(z, t) - T_0) dz dt + \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+}^{t_0} \oint_{\varepsilon+}^l f_{12}(t) \frac{u^*(z, t) - T_c}{v(t)} dz dt.
\end{aligned}$$

Зробивши заміну $u(z, t) = U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t}$, ми отримаємо умову

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} dz dt = c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l (U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} - T_0) dz dt + \\
& + \frac{\alpha l}{2\pi r_0} \int_{\varepsilon+}^{t_0} \oint_{\varepsilon+}^l f_{12}(t) \frac{U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} - T_c}{v(t)} dz dt.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Скориставшись (3.14) введемо функціонал квадратичної нев'язки

$$J(f) = \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l [W_1(U, f) - W_2(U)]^2 dz dt, \tag{3.15}$$

$$W_1(U, f) = f_{12}(t) \frac{I^2(t) \rho_0 l + \beta I^2(t) \rho_0 U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} l}{r_0^4 \pi^2 v(t)},$$

$$W_2(U) = c \rho_n (U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} - T_0) + \frac{\alpha l}{2\pi r_0} f_{12}(t) \left(\frac{U(z, t) e^{\mu(t)z + \eta(t)t} - T_c}{v(t)} \right).$$

Будемо шукати функцію $f(z, t)$ із умови мінімуму квадратичного функціонала нев'язки при обмеженні $J(f) \geq \delta^2$. Використовуємо критерій нев'язки. У якості δ^2 береться величина $\delta^2 = \int_0^{t_0} \int_0^l \sigma^2 dz dt$, де σ^2 дисперсія функції $W_2(v)$.

Ітераційний процес будуємо у просторі $L_2(Q)$, $Q = \Omega \times [0, \tau_m]$ за методом спряжених градієнтів [126]

$$f^{k+1} = f^k - \beta_k S^k, k = 0, 1, \dots, \bar{k}, \quad (3.16)$$

$$\text{де } S^k = J'_f{}^k + \gamma_k S^{k-1}, \gamma_0 = 0, \quad \gamma_k = \|J'_f{}^k\|^2 / \|J'_f{}^{k-1}\|^2,$$

$$\beta_k = \frac{(U^k - f, V^k)}{\|V^k\|^2},$$

$U^k = U(f^k, z, \tau)$ – температурне поле на k -ій ітерації. $V^k = V(\Delta f^k, z, \tau)$ – поле приросту температури на k -ій ітерації при варіації джерела на величину Δf^k ; $(u, w) = \iint_Q u(z, t) w(z, t) dz dt$, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ – скалярний добуток елементів $u(z, t), w(z, t)$ та норма елемента u в просторі $L_2(Q)$.

Приріст температури V^k отримується із розв'язку крайової задачі

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \Delta f(z, t), (z, t) \in Q_T, \quad (3.17)$$

$$V(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (3.18)$$

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (3.19)$$

Гradient цільового функціонала отримаємо за допомогою спряженої змінної $\psi(z, t)$.

Тотожність $(Lv, \psi) = (v, L * \psi)$ дозволяє записати умови спряженої задачі:

$$L * \psi = \zeta, \quad (z, t) \in Q, \quad (3.20)$$

$$\psi(z, t_m) = 0, \quad (3.21)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.22)$$

де $L * \psi = \psi_t + a^2 \psi_{zz}$, $\zeta = \zeta(z, t)$ – деяка функція.

Формулу для gradientа запишемо у вигляді

$$J'_q = \psi, \quad (z, t) \in Q.$$

Для організації ітераційного процесу (3.16) розраховуємо температуру на кожному кроці, приріст температури і спряжену змінну [211–214].

Розв'язки цих трьох задач (3.10)–(3.12), (3.17)–(3.19), (3.20)–(3.22) для знаходження $U(z, t), V(z, t), \psi(z, t)$ можуть бути отримані за допомогою шеститочкової різницевої схеми [146].

Введемо сітку $\bar{\omega}_h = \{z_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ і сітку

$$\omega_{hr} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\} \quad \text{з кроками} \quad h = \frac{1}{N}, \quad \tau = \frac{t_0}{j_0}$$

Позначимо через y_i^j значення у вузлі (z_i, t_j) сіткової функції U , що визначена

на ϖ_{ht} . Замінюючи похідну $\frac{\partial U}{\partial t}$ першою різницевою похідною, а $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ другою різницевою похідною U_{zz} і вводячи довільний дійсний параметр $\bar{\sigma}$, розглянемо однопараметричну сім'ю різницевих схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\bar{\sigma} y_i^{j+1} + (1 - \bar{\sigma}) y_i^j) + \varphi_i^j, \quad 0 < i < N, 0 \leq j < j_0, \quad (3.23)$$

$$y_0^j = T_1^j, \quad y_N^j = T_2^j,$$

$$y_i^0 = y(z_i, 0) = T(z_i),$$

$$\varphi_i^j = f(z_i, t_{j+0,5}), \quad t_{j+0,5} = t_j + 0,5\tau$$

або

$$\varphi_i^j = 0,5(\bar{f} + f),$$

$$\bar{f} = f(z_i, t_{j+0,5}),$$

$$\Lambda y_i = y_{zz,i} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2.$$

Різницева схема (3.23) написана на шеститочковому шаблоні. При $\bar{\sigma} = 0,5$ схема (3.23) абсолютно стійка за початковими даними і за правою частиною [145–147].

Далі для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь використано метод прогону.

3.4 Математична модель теплового процесу рухомого осесиметричного середовища із зовнішніми періодично діючими джерелами тепла

Така задача описує математичну модель термоциклічної обробки (ТЦО) виробів зовнішніми джерелами тепла.

Завдяки ТЦО досягається зниження енергозатрат, за рахунок охолодження нагрівальних елементів. Вироби нагріваються за рахунок тепловипромінювання нагрівачів, конвекції атмосфери і теплопровідності контейнера з деталями.

З математичної точки зору, рухомий елемент складної системи (пристрою для термоциклічної обробки) – спресований штабик довжиною L під час ТЦО розглядається у вигляді скінченного середовища з постійними теплофізичними характеристиками і параметрами. Досліджуються математичні моделі температурних полів, в яких діють зовнішні джерела тепла [215–220]. Зовнішні джерела тепла виникають в результаті теплообміну з навколишнім середовищем за законами Ньютона і Стефана Больцмана. З математичної точки зору дослідження температурних полів процесів ТЦО приводить до розв'язання однорідного рівняння теплопровідності з крайовими умовами. У математичній моделі зовнішні джерела тепла зображуються у вигляді крайових умов першого, другого або третього роду.

Математична модель температурного поля під час термоциклічної обробки елемента осесиметричної форми, має вигляд [28, 40]

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (r, z) \in \Omega_t \quad (3.24)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (3.25)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_0, \quad (3.26)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=l} = f_{12}(t) \left[-\alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4) \right]. \quad (3.27)$$

Після усереднення за радіусом і спрощень маємо обернену задачу в області $\bar{Q}_T = \{(z, t) | z \in [0, l], t \in [0, t_0]\}$ у вигляді (3.7)–(3.9), де

$$f(z, t) = f_{12}(t) \left(\frac{-2\alpha T_c \pi^2}{\pi^2 r_0 c \rho_n} \right) e^{-\mu z - \eta(t)t}, \quad (3.28)$$

$$\mu = \frac{vc\rho_n}{2\lambda}, \quad \eta(t) = \frac{-v^2 c \rho_n}{4\lambda} + f_{12}(t) \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n}.$$

Умова теплового балансу у випадку зовнішніх джерел набуває вигляду

$$\int_{0+}^t \int_G \alpha(T) \frac{T(r, z, t) - T_c}{v} dg dt = c \rho_n \int_{0+}^{t_0} \int_0^{\eta_0} \int_0^l f_{12}(t) (T(r, z, t) - T_0) dz dr dt. \quad (3.29)$$

Зробимо підстановку $u(z, t) = U(z, t)e^{\mu z + \eta(t)t}$ і отримаємо умову

$$\int_{0+}^t \int_0^l \alpha(T) \frac{U(z, t)e^{\mu z + \eta(t)t} - T_c}{v} dz dt = c \rho_n \int_{0+}^{t_0} \int_0^l f_{12}(t) (U(z, t)e^{\mu z + \eta(t)t} - T_0) dz dt \quad (3.30)$$

і функціонал квадратичної нев'язки (3.15), де

$$W_1(U, f) = \alpha(T) \frac{U(z, t)e^{\mu z + \eta(t)t} - T_c}{v},$$

$$W_2(U) = f_{12}(t) (U(z, t)e^{\mu z + \eta(t)t} - T_0).$$

Подальше розв'язання задачі із зовнішніми джерелами тепла аналогічне розв'язанню задачі із внутрішніми джерелами тепла.

3.5 Математична модель теплового процесу, що відбувається під дією внутрішніх і зовнішніх періодично діючих джерел тепла

Розглянемо математичну модель теплового процесу у випадку, коли ми маємо комбінацію внутрішніх і зовнішніх періодично діючих джерел

тепла, тобто вони відображені як у рівняння, так і в крайових умовах. Тут може бути циклічне нагрівання і циклічні втрати тепла. Змінюються лише знаки в умовах.

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), \quad (r, z, t) \in \Omega_t \quad (3.31)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (3.32)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = f_{1i}(t) [\alpha(T - T_c) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4)], \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = f_{1i}(t) [\alpha(T - T_c) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4)], \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f_{1i}(t) [-\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4)], \quad (3.34)$$

де $W(z, t, T)$ у випадку залежності джерел тепла від координати і часу має вигляд

$$W(z, t, T) = f_{11}(t) f_2(T), \quad (3.35)$$

$$W(z, t, T) = f_{12}(z) f_2(T).$$

Після усереднення (3.6) маємо задачу в області

$$Q: \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t \leq t_0\}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F(T, t), \quad (3.36)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (3.37)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \pm f_{12}(t) [\alpha(T_c - u) + \varepsilon \sigma \alpha_T (T_c^4 - u^4)], \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=L} = \pm f_{12}(t) [\alpha(u - T_c) + \varepsilon \sigma \alpha_T (u^4 - T_c^4)], \quad (3.38)$$

$$u(0, t) = T_0(t), \quad (3.39)$$

$$F(T, t) = \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(T_c^4 - u^4) - f_{12}(t) \frac{\rho_0 I(u)^2}{\pi^2 r_0^4} (1 + \beta u) - f_{12}(t) \frac{2}{r_0} \alpha + f_{12}(t) \frac{2}{r_0} \alpha T_c.$$

Нехай необхідно знайти $I(u)$, яка є функцією температури

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l f_{12}(t) \frac{I(u)^2 \rho_0 l + \beta I(u)^2 \rho_0 u^*(z, t) l}{r_0^4 \pi^2 v(t)} dz dt = \\ = c \rho_n \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \int_0^l (u^*(z, t) - T_0) dz dt + \frac{\alpha l}{r_0} \int_{\varepsilon+0}^{t_0} \oint f_{12}(t) \frac{u^*(z, t) - T_c}{v(t)} dz dt. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Маємо наступний алгоритм розв'язання задачі. Априорно задаємо значення $I(u)$, яка визначається із (3.40), при підстановці замість $u^*(z, t)$, функції знайденої із спрощеної задачі.

Далі знайдемо розв'язок задачі (3.36)–(3.39). Ця задача є коректно поставленою прямою задачею теплопровідності і її розв'язуємо різницеvim методом [223–236].

В задачі (3.36)–(3.39) права частина рівняння, крайові умови містять кусково-неперервні функції. Щоб отримати розв'язок, складемо методом балансу консервативну різницеву схему [145].

Відхилення знайденої у наближенні β модельної функції $u_\beta(z, t)$ використовується як сигнал розузгодження для наступного уточнення $I(u)$. Для визначення варіації функції $I(u)$, які зменшують нев'язку згідно з методом суміщення [138], розкладемо $I(u)$ в ряд Тейлора за степенями u і обмежимося скінченною кількістю членів

$$I(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots a_J u^J. \quad (3.41)$$

Даний поліном містить $J + 1$ варіюючи параметри a_J .

Так a_0 співставляється значення функції T_0 . Пошук оптимальних

значень параметрів a_j , що забезпечують для нев'язки ξ_j задоволення умови $|\xi_j| \leq \delta$ проводиться на основі методу послідовної мінімізації нев'язок. Кожному параметру a_j ставиться у відповідність певна нев'язка $\xi_j (j = 0, 1, 2, \dots, J)$. Робиться невеликий пробний крок Δa_1 за першим параметром a_1 і проводиться розв'язання (прямої задачі), в результаті якого знаходиться приріст відповідної нев'язки $\Delta \xi_1$ і наближене значення похідної $\frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} = \frac{\Delta \xi_1}{\Delta a_1}$. Далі робиться декілька робочих кроків за параметром a_1 при фіксованому значенні інших параметрів до тих пір, поки не буде задовольнятися умова $|\xi_j| \leq \delta$ для нев'язки $\xi_1 (j = 1)$. Величина робочих кроків визначається згідно формули

$$\Delta a_j = -A_j \xi_j \frac{\partial a_j}{\partial \xi_j}. \quad (3.43)$$

При цьому похідна $\frac{\partial a_j}{\partial \xi_j}$ може уточнюватись після кожного β -го робочого кроку, тобто

$$\left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi_j} \right)^{(\beta)} = \frac{a_j^{(\beta)} - a_j^{(\beta-1)}}{\xi_j^{(\beta)} - \xi_j^{(\beta-1)}}.$$

Нехай для нев'язок $\xi_j (j = 1, 2, \dots, s, s < J)$, що відповідають параметрам $a_1, a_2, \dots, a_s$, умова $|\xi_j| \leq \delta$ задоволена і необхідно визначити значення параметрів $a_1, a_2, \dots, a_{s+1}$, які забезпечують задоволення нерівності $|\xi_j| \leq \delta$ $\xi_j (j = 1, 2, \dots, s + 1)$. Спочатку робиться пробний крок Δa_{s+1} за параметром a_{s+1}

і обчислюється похідна $\frac{\partial \xi_{s+1}}{\partial a_{s+1}} = \frac{\Delta \xi_{s+1}}{\Delta a_{s+1}}$. Далі робиться перший робочий крок за цим параметром, причому величина кроку визначається із (3.43). Кожен наступний крок за параметром відбувається після циклу обчислень, який пов'язаний зі зміною параметрів $a_1, a_2, \dots, a_s$, до тих пір, поки умова $|\xi_j| < \delta$ не буде виконана для $(j=1, 2, \dots, s)$. При цьому пробні кроки для знаходження похідної $\frac{\partial \xi_j}{\partial a_j}$ ($j=1, 2, \dots, s$) не робимо, на відміну від випадку здійснення циклу обчислень, що передував зміні параметру a_{s+1} . Похідна $\frac{\partial \xi_j}{\partial a_j}$ для першого робочого кроку береться із попереднього циклу, причому приріст Δa_j в цьому випадку обчислюється за формулою (3.43) при $0 < A_j \leq 1$. Розрахунок припинявся, коли всі компоненти ξ_j ($j=1, 2, \dots, s, s < J$) вектора нев'язки будуть задовольняти умові $|\xi_j| \leq \delta$.

Для перевірки адекватності запропонованої моделі були проведені порівняння числових розрахунків з результатами експериментальних замірів температури в контрольних точках на поверхні заготовок. Відносна похибка розрахунків склала близько 5%. На рис. 3.7 зображено графіки розрахованих значень температури і виміряних експериментально за допомогою пірометра в трьох точках зони нагрівання.

Порівняльні дослідження ЕПВ мідного, залізного і алюмінієвого дротів.

На Кірсінському електрокабельному заводі Кіровської області (Росія) були проведені порівняльні дослідження ЕПВ мідного, залізного та алюмінієвого дротів із застосуванням схем підведення імпульсного і постійного струму в ЗДМ за допомогою роликівих контактів. Опір деформації металу знижувався на десятки відсотків. Для досліджень ЕПВ вибиралися добре вивчені метали і сплави [18, 19], разом з тим ті, що істотно відрізняються між собою за фізичними властивостями. Як об'єкти

дослідження використовувалася мідний дріт марки М1, дріт з нержавіючої сталі 12Х18Н10Т і алюмінієвий сплав цівкалою. Застосовувався такий режим імпульсного струму: амплітуда струму $I_m = (1,5 - 2,5) \frac{A}{mm^2}$; частота проходження імпульсів $f = 600 \dots 700 Гц$ і тривалість імпульсів $\tau = 200 мкс$ при напрузі 20 В без урахування падіння напруги під час проходженні імпульсу струму на ділянці ЗПС. У заводській лабораторії вивчалися фізико-механічні властивості дротів після звичайного і електропластичного волочіння.

Були розроблені і створені дві експериментальні установки [18, 19]: перша – для одноразового волочіння дроту діаметром 0,5 мм і менше; друга – для одноразового волочіння дроту діаметром 1,5–0,2 мм. Перша установка, виконана на базі одноразової волочильної машини типу F-1 "Кратос" з приводом постійного струму. Вона включала в себе розмотувальний вузол, регулятор протинатягнення, волокотримач з контактуючими пристроями, систему подачі мастильно-охолоджувальної рідини, прилад для вимірювання зусиль протинатягнення і волочіння, а також джерела змінного, постійного та імпульсного струму, пульт керування і контрольно-вимірювальну апаратуру. Друга установка – це одноразовий волочильний стан ПТ-1 типу 1 / 160,250. Контроль температури здійснювався перед джерелом деформації за допомогою радіаційного пірометра. Підведення електричного струму до дроту під час волочіння здійснювалось за допомогою роликів і щіткових контактів. Частота проходження імпульсів вибиралась з такою умовою, щоб кожна ділянка дроту, що проходить джерело деформації, оброблялась хоча б одним імпульсом струму.

Для відділення електропластичної дії електричного струму від ефектів термічного характеру (в разі дії на ЗПД імпульсним струмом) використовувалась схема підведення електричного струму до дроту, зображена на рис 3.5, де 1 – розмотувальний вузол; 2 – змотуючий і намотуючий барабани для волочіння дроту; 3 – вузол деформації з

утримувачем філь'ери; 4 – зона нагрівання; 5 – пульт керування з приладом контролю сили струму в зоні нагрівання; 6 – рухомий дріт, що нагрівається з приладами для вимірювання зусилля деформації; 7 – радіаційний пірометр.

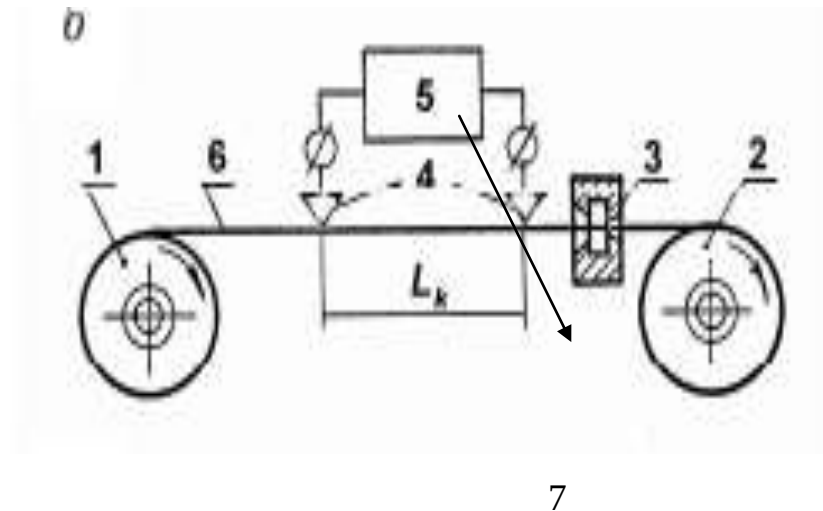


Рис. 3.5. Схема підведення струму

В розрахунках розглянуто наступний режим підведення імпульсного струму: амплітуда струму $I_m = 10 \frac{A}{мм^2}$; частота проходження імпульсів $f = 600...700 Гц$ і тривалість імпульсів $\tau = 100 мкс$.

Ефективність дії струму на процес волочіння дроту оцінювалась за відносним зменшенням напруги (сили) волочіння λ_z , яке розраховувалося за формулою

$$\lambda_z = \frac{\sigma_z - \sigma_z^T}{\sigma_z} 100\% = \frac{P_z - P_z^T}{P_z} 100\%,$$

де σ_z, P_z – відповідно напруга і сила волочіння при звичайному волочінні (без струму) за виключенням складової, що створюється протинатягненням дроту; σ_z^T, P_z^T – для випадку волочіння зі струмом.

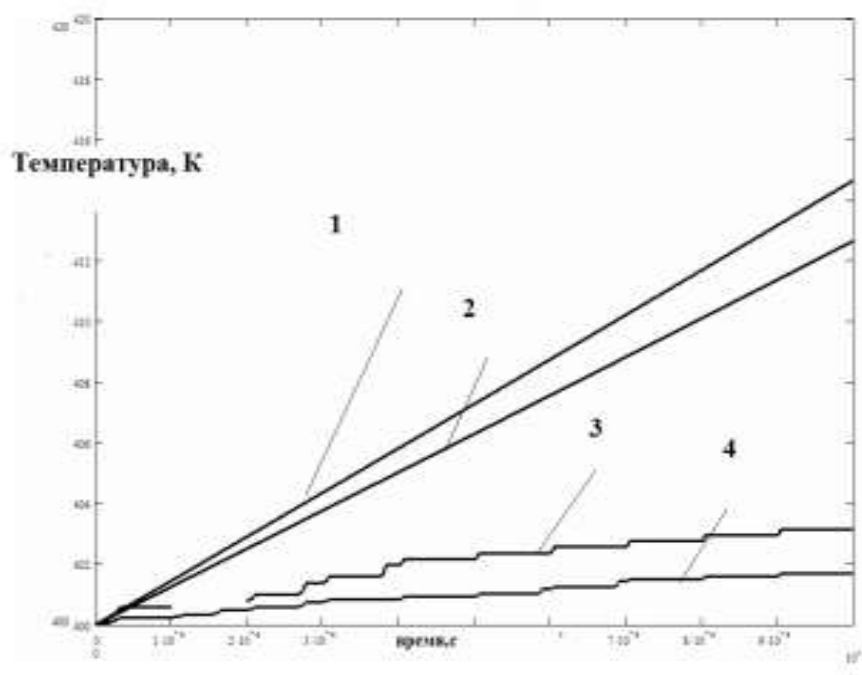


Рис. 3.6. Температурний розподіл в зоні дії імпульсного і постійного струму в залежності від часу. Криві 1 і 2 відповідають неперервній дії електричного струму, а криві 3 і 4 – імпульсній

Порівняння результатів натурного і числового експериментів при використанні імпульсної функції $f_{11}(t)$

Таблиця

3.1.

	Експериментальні дані, T_1 , K	Експериментальні дані, T_2 , K	Експериментальні дані, T_3 , K	Значення температури отримані під час дії імпульсного струму T_{imp}, K	Значення температури отримані під час дії неперервного струму, T_{per}, K	Відносна похибка (T_1, T_{imp})
$Z=0.1m$, $t=50c$	320	310	345	330	346	4%
$Z=0.5m$, $t=50c$	390	384	401	396	451	1%
$Z=0.95m$, $t=50c$	398	388	410	405	457	2%

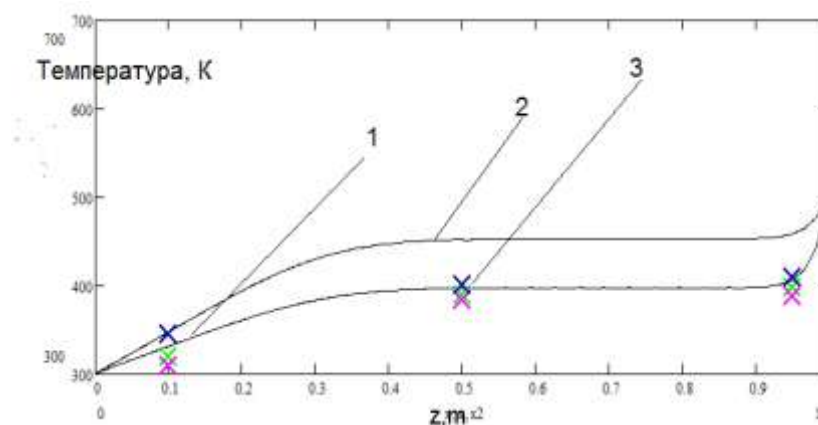


Рис.3.7. Температурні розподіли, отримані для мідного дроту крива 1 – під дією імпульсного струму із (3.31)–(3.34); крива 2 – під дією постійного ($f_{li}(t)=1$) струму із (3.31)–(3.34), точки 3 – дані, що отримані експериментально

Математична модель у вигляді (3.31)–(3.34) дозволяє досліджувати на макрорівні теплові процеси, що протікають в рухомому дроті під дією імпульсного джерела тепла.

Порівняння результатів натурного і числового експериментів при використанні імпульсної функції $f_{12}(t)$

Таблиця

3.2.

	Експеремен тальні дані, T1, K	Експеремен тальні дані , T2, K	Експере мен тальні дані, T3, K	Значення температур и отримані під час дії імпульсного струму Timp,K	Відносна похибка (T1,Timp)
Z=0.1m, t=50c	315	320	321	305	3%
Z=0.5m t=50c	356	364	460	369	3%
Z=0.95 m t=50c	400	405	402	410	4%

В результаті експерименту з'ясовано, що зміни пластичності і фізичних властивостей дроту після ЕПВ не можуть бути пояснені тепловою дією струму, оскільки виходячи з результатів числових розрахунків і

експерименту температура в зоні дії імпульсного струму піднімалась несуттєво.

3.6 Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння

Розглянемо загальну постановку задачі визначення температурного поля в обмеженому рухомому зі швидкістю $v(t)$ середовищі [237–245], яке розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Виробництво тугоплавкого і важко деформованого дроту без попереднього розігріву перед пластичною деформацією призводить до зниження якості продукції і часто буває неможливим. Застосування технології електропластичного волочіння (ЕПВ) в процесі виробництва тонкого дроту під впливом періодично діючого імпульсного внутрішнього джерела тепла дозволяє знизити зусилля пластичної деформації та проводити процес волочіння при понижених температурах. Температурне поле під час процесу волочіння можна визначити, досліджуючи математичну модель теплового процесу ЕПВ. Математична модель такого процесу у найбільш повній постановці приводить до розв'язання нелінійних та нелокальних задач для рівняння теплопровідності [221–246].

Коли нагрівання дроту відбувається одночасно з пластичною деформацією, а температура не дозволяє проводити процес волочіння не порушуючи умову нерозривності, це призводить до обриву дроту [1–3]. Тому одночасно з питанням визначення температурного розподілу, під час перехідного процесу, виникає проблема визначення таких параметрів керування процесом нагрівання, при яких температурне поле під час руху середовища зі змінною $v(t)$ швидкістю стає стаціонарним. Цього можна досягти, обравши відповідним чином щільність джерел тепла та підібравши відповідним чином режими імпульсного джерела тепла, а саме скважність, тривалість одного імпульсу. Починаючи з деякого моменту часу, при $t \geq t_0$, швидкість руху дроту стає постійною $v = \text{const}$. Вибір параметрів керування

та режиму імпульсного джерела тепла дозволить підтримувати в зоні ЕПВ необхідний, з технологічної точки зору, температурний розподіл. Методи визначення параметрів керування тепловим процесом під час ЕПВ розглянуті в [7–9, 246]. В даній роботі досліджується залежність теплового процесу під час ЕПВ від виду імпульсного джерела тепла. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності, розв'язання якої дозволяє визначити температурне поле рухомого дроту, в зоні нагрівання якого, діє джерело тепла з щільністю $W(z, t, T)$, та яке залежить від координат та температури [221–223].

Визначення нестационарного температурного розподілу приводить до розв'язання початково-крайової задачі (3.31)–(3.34), де функції $f_{1i}(z)$ мають вигляд

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{t_0} - 2kn, nt_0 \leq t \leq (n + \frac{1}{2mk})t_0 \\ \frac{1}{m}, (n + \frac{1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\frac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{1}{k})t_0 \\ 0, (n + \frac{1}{k})t_0 < t \leq (n+1)t_0, \end{cases}$$

$$f_{15}(t) = \left| \sin\left(\frac{t\pi}{t_0}\right) \right|,$$

$$f_{16}(t) = \begin{cases} m\frac{t}{t_0} - mn, nt_0 \leq t \leq (n + \frac{1}{m})t_0 \\ 0, (n + \frac{1}{m})t_0 < t \leq (n+1)t_0, t < 0. \end{cases}$$

Розв'язок шукаємо числовим методом.

Побудована різницева схема Кранка-Ніколсон

$$c\rho_n \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2h^2} (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) - \frac{v}{2h} (+u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + F_2(u_i^j, t), \quad i = \overline{1, L-1}, j = \overline{1, K}, \quad (3.44)$$

$$u_i^0 = T_0, \quad i = \overline{1, L}, \quad (3.45)$$

$$F_2(u_i^j, t) = \left[\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_{12}(t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u_i^j - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (u_i^j)^4 + F(t). \quad (3.46)$$

$$F(t) = \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} T_c^4 - f_{12}(t) \frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} + f_{12}(t) \frac{2}{r_0} \alpha T_c$$

для крайових умов різницевий аналог має вигляд

$$\frac{-u_2^{j+1} + 4u_1^{j+1} - 3u_0^{j+1}}{2h} = \alpha f_{12}(t)(u_0^j - T_c) + \varepsilon\sigma f_{12}(t)((u_0^j)^4 - T_c^4), \quad j = \overline{1, K} \quad (3.47)$$

$$\frac{3u_M^{j+1} - 4u_{M-1}^{j+1} + 3u_{M-2}^{j+1}}{2h} = -\alpha f_{12}(t)(u_M^j - T_c) - \varepsilon\sigma f_{12}(t)((u_M^j)^4 - T_c^4), \quad j = \overline{1, K}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь(3.44)–(3.47) отримаємо температуру рис. 3.8–3.10 при різних значеннях параметрів імпульсної функції

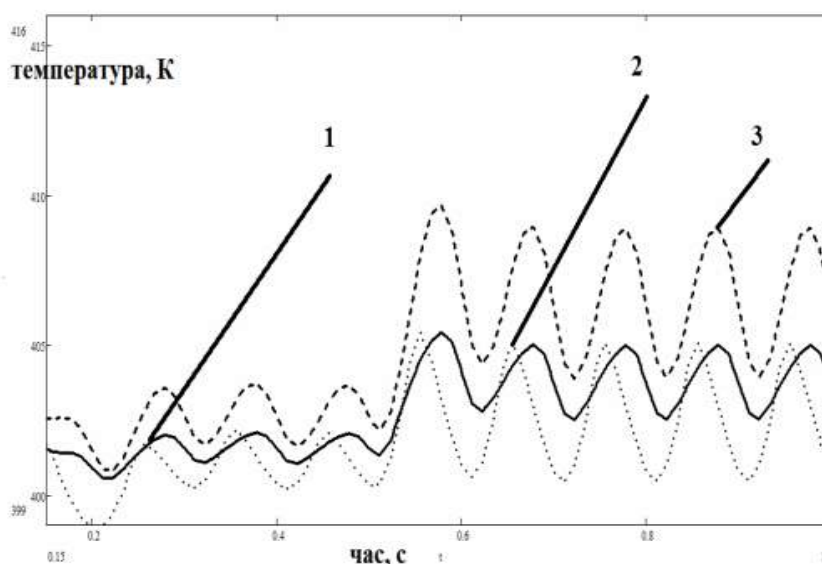


Рис. 3.8. Температурні розподіли отримані із (3.44)–(3.47) при різних типах імпульсних джерел тепла. Крива 1– $f_{16}(t)$, крива 2– $f_{13}(t)$, крива 3– $f_{15}(t)$

Для числових розрахунків було обрано матеріал цинк та мідь.

Температурні розподіли отримані для різних типів імпульсів джерел тепла. Із рисунку 3.8 видно, що не змінюючи інших параметрів проведення процесу, а лише змінюючи тип імпульсу можна змінити значення температури в різних точках рухомого середовища.

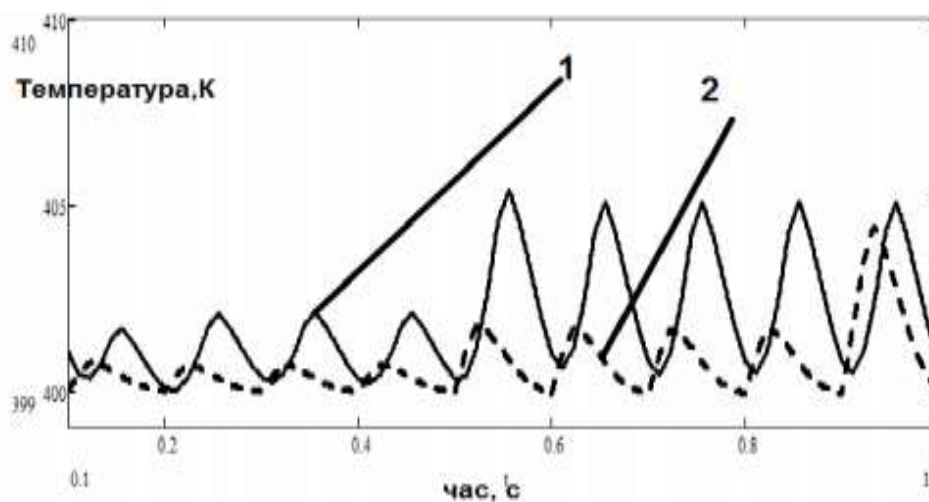


Рис. 3.9. Температурні розподіли отримані із (3.44)–(3.47), крива 1 $m=2$, крива 2 $m=5$

Зміна скважності m та тривалості одного імпульсу то дозволяє

змінювати температуру, що в свою чергу впливає на проведення процесу електропластичного волочіння.

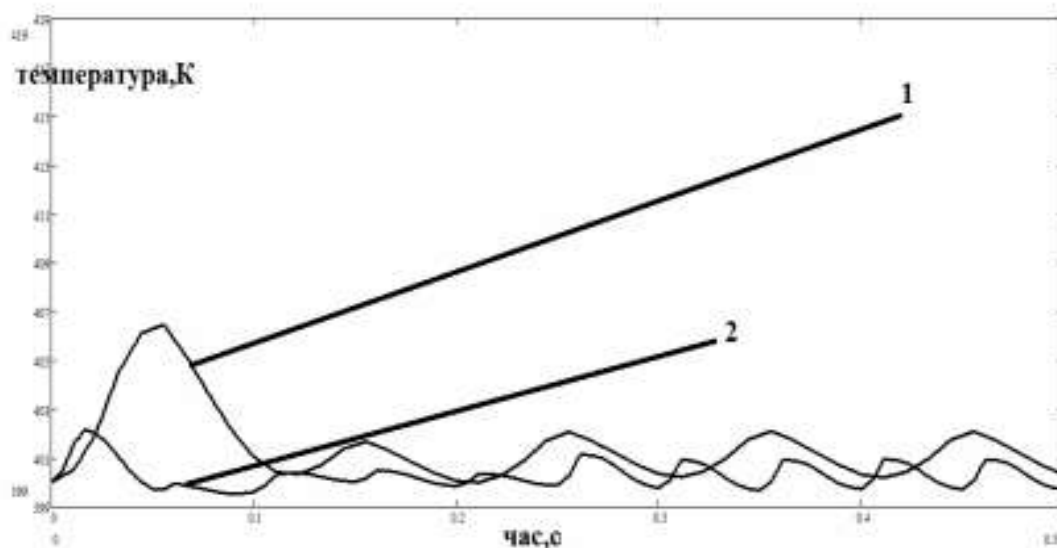


Рис.3.10. Температурні розподіли отримані із (3.44)–(3.47) при $f_{16}(t)$ та при різних значеннях тривалості імпульсу t_0 , крива 1– $t_0=0.1$, крива 2– $t_0=0.05$

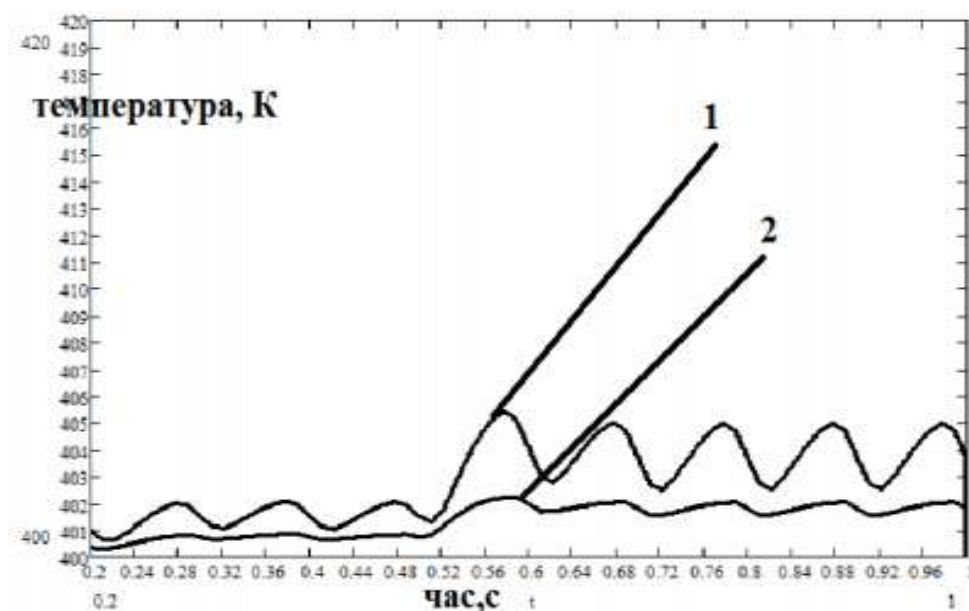


Рис. 3.11. Температурні розподіли отримані із розв'язку (3.44)–(3.47) для $f_{13}(t)$ та при значеннях струму: крива 1– $I=10$ А, крива 2– $I=30$ А

Досліджено вплив характеру імпульсного джерела тепла на

температурний розподіл в рухомому дроті під час процесу електропластичного волочіння. Отримано картину температурних розподілів, із якої видно, що підбір характеру імпульсів і зміна параметрів імпульсного джерела тепла дозволяє вибрати необхідний режим електропластичного волочіння.

3.7 Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації

Для підвищення пластичності тугоплавких та важкодеформівних металів під час процесу волочіння дріт, як правило, підігрівається до температур 600^0 - 1000^0 С. Більш економічним, для досягнення цієї мети, є застосування електропластичного ефекту (ЕПЕ), що відбувається одночасно з процесом пластичної деформації, який було виявлено при розтягуванні зі струмом монокристалів чистих металів. Тонкі дроти, стрижні та стрічки із металів і сплавів знаходять широке застосування у різних галузях промисловості і техніці. Відомо, що у багатьох металах і сплавах під дією температур відбувається структурна релаксація, яка в свою чергу призводить до зміни фізичних властивостей матеріалів і виробів із них, погіршуючи експлуатаційні характеристики. Найбільш інтенсивно структурна релаксація протікає при нагріванні аморфних сплавів, в тому числі, викликана проходженням електричного струму. У зв'язку із цим дослідження впливу імпульсних струмів на структурні зміни є актуальною задачею. При пропусканні імпульсів електричного струму відбувається збільшення температури за рахунок виділення джоулевого тепла. Важливим, з практичної точки зору, є урахування теплової дії імпульсного струму, яке включає в себе точне вимірювання або розрахунок нагріву зразків і оцінку впливу цього нагріву на їх деформацію.

Експерименти по дослідженню впливу імпульсів електричного струму були проведені у [2]. Лазерним вимірювачем температури проводилось вимірювання нагріву зразків протягом всього процесу деформації. Також

проводились дослідження по вивченню впливу довжини імпульсу електричного струму на характер спаду механічної напруги. За результатами проведених експериментів встановлено, що пропускання імпульсного струму викликає спад механічної напруги більший, ніж нагрів у печі. Встановлено, що пропускання імпульсів електричного струму високої щільності викликає спад механічної напруги на діаграмах навантаження, пов'язане не лише із нагрівом зразків, але і зі структурними перетвореннями. Спостерігається лінійна залежність спаду напруги від температури, характерна для кожного сплаву. Для експериментальних досліджень впливів імпульсів електричного струму в [2] були обрані стрижні із аморфних металічних сплавів з різним елементним складом. Однак вимірювання і контроль температури напружень і деформацій може бути проведений і за допомогою математичної моделі процесу імпульсної обробки стрічок і стрижнів із металічних сплавів – це дозволяє не лише прогнозувати хід проведення процесу пластичної деформації, але і керувати процесом пластичної деформації.

Вище побудована математична модель температурного поля рухомого надтонкого дроту, що піддається імпульсній дії електричного струму під час електропластичної деформації. Наведені результати теоретичних досліджень впливу термічної складової електропластичного ефекту на пластичні властивості дроту. Теоретичні дослідження напруженого стану і переміщень під час імпульсної дії струму не розглядались, а в ряді робіт були отримані експериментально [19]. Тому актуальною є задача побудови математичної моделі термонапруженого стану під час електропластичної деформації зразків.

У якості матеріалів для досліджень впливів імпульсів електричного струму були обрані аморфні металічні сплави, цинк та мідь. Струм, що проходить через дріт має щільність від 10^8 до 10^9 А / м². Довжина імпульсів складала $\tau \sim 0,625$ с. Математична модель процесу дозволяє розраховувати температуру і контролювати її протягом усього процесу.

Математична модель температурного стану ізотропного осесиметричного середовища з постійними теплофізичними характеристиками розглядається у вигляді крайової задачі (3.1)(3.4) для нестационарного рівняння теплопровідності в області. Після усереднення (3.6) розглянемо задачу (3.1)(3.4) у вигляді

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u, t), \quad (3.48)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (3.49)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l. \quad (3.50)$$

$$F_1(u, t) = \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4) - f_{12}(t) \frac{\rho_0 I^2(t)}{\pi^2 r_0^4} + f_{12}(t) \frac{2}{r_0} \alpha T_c - \\ - f_{12}(t) \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2(t)}{\pi^2 r_0^4} \right) u(z, t)$$

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (3.48)–(3.50) в області $0 \leq z \leq l$, $0 \leq t \leq t_0$ [146]. Введемо рівномірну сітку для рівняння теплопровідності ω , таким чином, щоб точки розриву попадали у вузли сітки, сітковий оператор Лапласа відповідає апроксимації оператора теплопровідності, тобто

$$\Delta u = -u_{zz}.$$

Запишемо для рівняння і граничних умов різницеву схему з вагами. У внутрішніх вузлах сітки використовується різницеве рівняння з квазілінеаризованою правою частиною

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + v(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1) y_n) + \Lambda(\sigma_2 y_{n+1} + (1 - \sigma_2) y_n) = \varphi(z, t_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$z \in \omega, n = 0, 1, \dots \quad y_0(z) = T_0.$$

При пропусканні імпульсу електричного струму відбувалось збільшення температури за рахунок виділення джоулевого тепла.

Під дією тепла тверді тіла розширюються. Цей ефект термічного розширення враховується у рамках теорії пружності.

Згідно [247–251], коли механічні властивості матеріалів залежать від температури, визначальні співвідношення можна записати у наступному вигляді, використовуючи температурно-часову аналогію:

$$\sigma(z, t) = E \left[\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} - \lambda u \right].$$

Рівняння руху стрижня має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Нестационарні термопружні деформації описуються рівнянням

$$\rho \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + E \lambda \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (3.51)$$

Початковий стан визначається умовами

$$v(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.52)$$

Граничні умови мають вигляд [64]

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=kt. \quad (3.53)$$

У формулах (3.51)–(3.53): σ – напруга, v – переміщення, z – поперечна координата, t – час, E – модуль Юнга, ρ – щільність матеріалу, λ – коефіцієнт теплопровідності, l – довжина стрижня.

Розглянемо задачу (3.51)–(3.53). Вважаючи температурний розподіл відомим, запишемо різницеву задачу для переміщень.

Задачу (3.51)–(3.53) будемо розв’язувати кінцево-різницеvim методом. Для цього вводиться рівномірна різницева сітка ω . Поставимо у відповідність рівнянню (3.51) із урахуванням граничних умов наступну систему. Неоднорідні крайові умови включаються в праву частину

$$\rho \frac{d^2 v(z,t)}{dt^2} + \Lambda v + Gu = F, \quad x \in \omega,$$

де $Gu = \left\{ E \lambda u_z \right\}$, апроксимація початкових умов дає

$$v_0(z) = w^0(z).$$

На множині сіткових функцій для граничних умов маємо

$$v_1(z) = v_0 + \tau \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\tau^3).$$

На розв’язки рівняння (3.51) це дає

$$v_1(z) = w_0 + \tau w_1 + \frac{\tau^2}{2\rho} (\Lambda w_0 + Gu^0 - F(z,0)).$$

Використовуючи розрахований вище температурний розподіл, розв'язуємо задачу (3.51)–(3.53) при відомій температурі за наступною різницевою схемою

$$\rho \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{\tau^2} + \Lambda(\sigma_1 v_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)v_n + \sigma_2 v_{n-1}) = F_n + Gu_n,$$

$$z \in \omega, n = 1, 2..$$

На рис. 3.12. зображено залежність температури нагрівання зразка від часу. При пропусканні імпульсів електричного струму відбувалось підвищення температури за рахунок виділення джоулевого тепла.

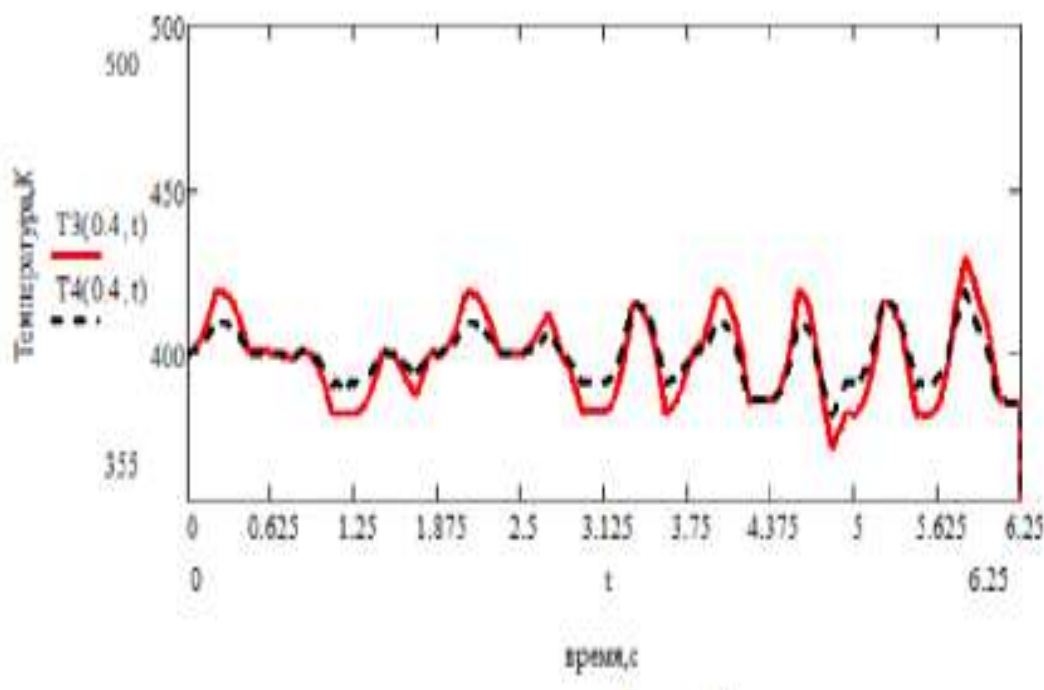


Рис.3.12. Температурні розподіли при $j = 10^8 \frac{A}{M^2}$ – суцільна крива, при

$$j = 0,5 \cdot 10^8 \frac{A}{M^2} \text{ – пунктирна крива}$$

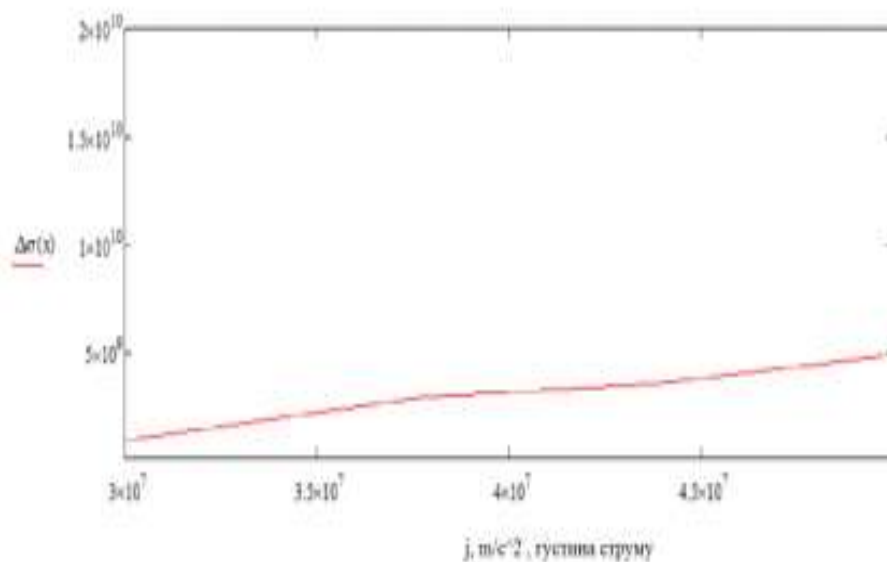


Рис. 3.13. Залежність спаду механічної напруги від густини струму

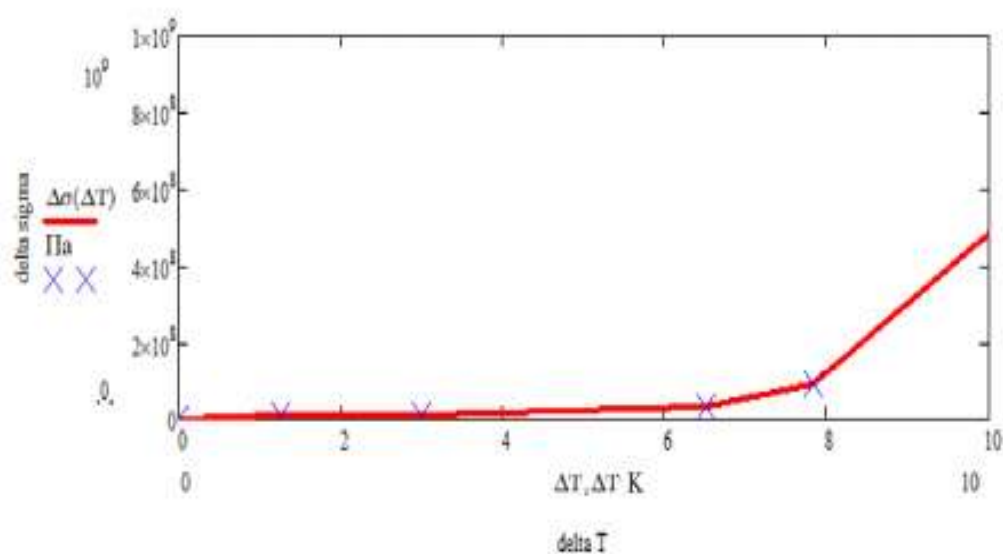


Рис. 3.14. Залежність спаду механічної напруги від температури під час дії імпульсного струму на зразки

Рис. 3.14. показує майже лінійну залежність між спадом механічної напруги і нагрівом зразків при пропусканні імпульсів струму. Найбільш важливим є врахування теплової дії струму, що включає в себе точне вимірювання або розрахунок нагріву зразків і оцінку впливу цього нагріву на деформацію зразків. Результати числових розрахунків підтверджують

експериментально встановлений факт, що при одній і тій самій щільності струму більший час імпульсу викликає більший спад механічної напруги.

Побудована у роботі математична модель дозволяє розраховувати температурне поле, поле напруги і переміщень при пропусканні імпульсів струму під час електропластичної деформації тонких стрижнів. Числові розрахунки показали, що в аморфних сплавах лінійні дефекти структури, аналогічні дислокаціям кристалічної решітки, які відповідають за процес пластичної деформації, або відсутні, або достатньо сильно закріплені внаслідок високої концентрації інших дефектів, що створюють більші внутрішні напруження. Отримані числові розрахунки підтвердили той факт, що при одній і тій самій щільності струму більший час імпульсу викликає більший спад механічної напруги. При пропусканні імпульсу електричного струму відбувається незначне збільшення температури за рахунок виділення джоулева тепла.

3.8 Висновок за розділом 3

В розділі розглянуто і удосконалено ряд математичних моделей теплових процесів, які протікають під час імпульсної обробки виробів осесиметричної форми внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, та які на відміну від існуючих враховують складні умови теплообміну у початково-крайових і нелокальних задачах і дозволяють знаходити оптимальне поєднання параметрів режимів імпульсної обробки із заданим градієнтом температурами нагріву і охолодження, що дозволило підвищити ефективність контролю температури у математичних моделях.

Удосконалено методи розв'язку обернених крайових задач теплопровідності які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв'язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв'язання обернених задач, що в свою чергу дозволило підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Залежно від типу оберненої задачі і відомих параметрів процесу, що описує математичну модель, пропонується відповідний метод її розв'язання. Зокрема, розглядається задача відновлення функції джерела тепла у рівнянні теплопровідності. Показано, що задача знаходження температурного поля і розподілу концентрації як внутрішнього, так і зовнішнього джерела тепла може бути зведена до екстремальної постановки і розв'язана по одному і тому ж самому алгоритму.

Запропоновано метод відновлення внутрішнього періодично діючого джерела тепла в задачі теплопровідності з інтегральною умовою, де у якості додаткової інформації використана температурна функція, яка знайдена із інтегральної умови балансу тепла, що дозволило отримати найбільш ефективну інформацію при формулюванні екстремальної задачі і підвищити ефективність математичної моделі. Інтегральна умова балансу енергії, використовується для побудови квадратичного функціонала нев'язки в екстремальній задачі. Для пошуку невідомої функції (керування) джерела використовується метод спряжених градієнтів.

Для перевірки адекватності запропонованої моделі були проведені порівняння числових розрахунків з результатами експериментальних замірів температури в контрольних точках на поверхні заготовок.

Також у розділі розглядається математична модель температурного та напруженого стану рухомого ізотропного осесиметричного середовища з періодично діючим імпульсним джерелом тепла. Математична модель у вигляді системи крайових задач для диференціальних рівнянь теплопровідності і термopружності описує процеси, що відбуваються у тонкому рухомому дроті під час електропластичної деформації. Вивчаються особливості впливу імпульсних джерел тепла на температурний розподіл та розподіл напружень і переміщень. Досліджуються особливості температурних розподілів в зразках під час пропускання імпульсів струму. Отримано числові розрахунки для цинку, міді та неметалевих сплавів,

побудовано графіки температурних розподілів та розподілів напружень і переміщень під час електропластичної деформації.

Результати розділу 3 опубліковані в роботах [1–3, 7, 15–16, 18–19, 27–28, 33,45, 47–51, 53–56].

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ У МЕТАЛУРГІЇ

В розділі розглянуто математичні моделі теплових процесів в металургії, що відбуваються у складних системах з рухомими та нерухомими елементами. З використанням умови теплового балансу, області нагрівання побудовані умови імпедансного типу на границі шарів складної багатошарової області.

Побудована фізична та математична модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двухвалковому прокатному стані. У цій моделі враховані різні умови теплообміну поверхні валка зі стрічкою та навколишнім середовищем. Запропоновано метод розв'язання задач такого класу.

Побудована математичну модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у циліндричному контейнері або прес-формі та запропоновано метод її розв'язку. Побудована математична модель температурного поля рухомої полімерної нитки – філамента, що рухається через нерухомий екструдер 3-D принтера та розігрівається в ньому згідно технології FDM (fused deposition modeling) просторового друку. В розділі виведені умови імпедансного типу для багатошарових циліндричної і сферичної областей.

4.1 Математична модель теплообміну у валковому кристалізаторі

В останні десятиріччя у металургії розробляються технології та дослідно-промислові агрегати прямого безперервного розливу сталі на тонкі смуги. Основна перевага отримання тонкого листа за цією технологією полягає у виключенні із технологічної схеми операції гарячої прокатки, що дозволяє зменшувати витрати електроенергії та матеріальних ресурсів [59–

60]. Технологічна схема отримання тонкого листа із застосуванням двовалкових машин безперервного лиття заготовок дозволяє у 8–10 разів зменшити витрати енергетичних ресурсів, у 40–50 разів скоротити втрати металу на окалину, у 5–10 разів підвищити продуктивність праці, що забезпечує економічну доцільність подальшого розвитку та удосконалення технологічних процесів [5]. Але нова технологія має і недоліки: ширина смуг не регулюється і коливається за довжиною. Існують технології, де рідку сталь пропонується розливати безпосередньо в консольні прокатні валки, які є кристалізаторами [6–11] і швидко зменшувати перегрів металу перед розливанням використовуючи суспензійне розлиття [12]. Однією з переваг суспензійного лиття є можливість утилізувати металовідходи (стружки, обрізи, недоливи, вирубки). Суттєвою відмінністю суспензійного лиття в порівнянні з іншими способами є реалізація внутрішнього відводу тепла за допомогою теплостоків інокуляторів для інтенсифікації теплопереносу в рідкій фазі з накладенням зовнішньої дії. Дослідженнями доведено, що швидкість кристалізації розплаву зі сталі 35 при введенні залізомістких добавок збільшується з 0,15 мм/с (при литті без добавок) до 0,2–0,8 мм/с (при додаванні залізного порошку). Для досягнення максимального теплофізичного ефекту необхідно регулювати параметри дисперсного інокулятора таким чином, щоб частинки повністю розплавлялися до моменту досягнення температури ліквідус. Тому важливим параметром технологічного процесу суспензійного лиття сталі є розмір частки дисперсного інокулятора [77–78]. Оптимальний розмір частинки можна установити, визначивши тривалість нагрівання і плавлення часток і порівнявши її з часом досягнення кромки смуги температури ліквідус. Для цього було досліджено процеси теплообміну і кінетики плавлення частинок в залежності від їх форми та розмірів, маси добавки та температури перегріву рідкої сталі.

Багато фахівців, які працюють у прокатному виробництві, вважають, що підвищення стійкості валків шляхом оптимізації теплового режиму їх

роботи є перспективним і актуальним. Це можливо за рахунок створення систем керування прокатними станами з використанням фізичних та математичних моделей. Фізичні моделі теплового стану валків потребують значної кількості досліджень. Вони повинні враховувати основні параметри технологічного процесу прокатки та дозволяти їх узагальнення на різні типи прокатних станів. Такі фізичні моделі найбільш ефективно будувати на лабораторних прокатних станах. Ці моделі дають змогу визначити основні показники технологічного процесу, які потім можуть бути використані при побудові та дослідженні математичних моделей теплообміну під час прокатки стрічки та профілів. Для дослідження математичних моделей та розв'язання задач оптимізації режиму теплообміну, що виникають у цих моделях, необхідно мати достовірні експериментальні дані про теплове поле металу, що контактує з валками та про тепло деформації під час прокатки. Таку інформацію, зазвичай, можна отримати на експериментальних прокатних станах, оснащених відповідним програмним забезпеченням та математичною обробкою результатів експериментів. Сучасні вимоги щодо якості продукції у прокатному виробництві вимагають підвищення точності контролю температури валків у зоні прокатки [68–70, 175–181, 235]. Це можливо за рахунок керування температурним режимом роботи за допомогою математичної моделі теплового процесу у валковому калібрі. Однією із важливих умов оптимізації температурного режиму є чіткий контроль умов теплообміну валків з навколишнім середовищем. Для дослідження математичних моделей та розв'язання задач, що описують моделі теплообміну, необхідно мати достовірні експериментальні дані про теплове поле металу, який контактує з валками та про тепло деформації під час прокатки [175–176]. У роботі [182] розглянута математична модель температурного поля слябу, що є заготовкою для гарячої прокатки листа, у вигляді двомірної задачі для нестационарного рівняння теплопровідності з подальшим розв'язанням її за допомогою явного скінченно-різницевого методу із залученням рівнянь балансу енергії.

Розглянемо фізичну модель процесів теплообміну у валковому кристалізаторі. Зовнішня поверхня, у залежності від кута φ повороту валка прокатного стану навколо своєї осі, сприймає тепло від стрічки, що деформується, а потім втрачає його за межами зони деформації за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. Внутрішня його поверхня втрачає тепло конвективним або кондуктивним способом, у окремих випадках ще і випромінюванням. У зоні контакту валка зі стрічкою тепло від поверхні передається до його осі теплопровідністю. У іншій частині валка тепло втрачається випромінюванням, конвективним або кондуктивним способом. Теплову взаємодію валка зі стрічкою, що обробляється, дозволяє враховувати умова спряження (гранична умова четвертого роду), або можна вважати, що температура поверхні валка і стрічки у зоні деформації однакові [141, 149].

Така теплофізична модель процесу теплообміну під час прокатки приводить до математичної моделі, в основу якої покладено однорідне рівняння теплопровідності, яке в циліндричній системі координат має вигляд [142, 183]

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (4.1)$$

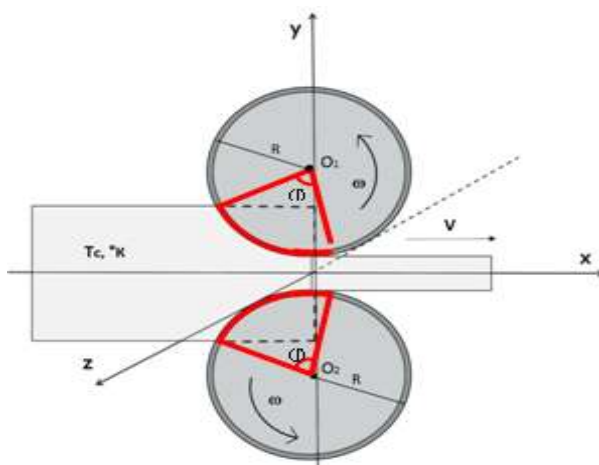


Рис. 4.1. Процес прокатки

У випадку, коли $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, рівняння (4.1) описує квазістаціонарне температурне поле валкового калібру, коли після кожного оберту валка температура його поверхні не залежить від часу і залишається незмінною. Це ідеальний варіант, який можливий при жорсткому контролі умов теплообміну під час прокатки. Така задача притаманна для процесу отримання стрічки у валковому кристалізаторі [176–177].

Нестационарне рівняння (4.1) описує температурне поле валків при неконтрольованому теплообміні під час прокатки. Воно суттєво залежить від часу та кількості обертів навколо своєї осі.

Якщо вважати, що основи циліндричного валка теплоізолювані, а його температура не суттєво залежить від осової координати, то можна прийняти $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, а задачу визначення температурного розподілу на поверхні і у тілі валка звести до задачі визначення температурного розподілу осового перерізу порожнистого циліндра $T = T(r, \varphi, t)$, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Коли тепловий потік ортогональний осі обертання маємо початково-крайову задачу для рівняння (4.1) в області (рис. 4.2) $\Omega \times t = \{(r, \varphi) \mid R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ [18].

$$\begin{aligned} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \\ T(r, \varphi, 0) &= T_0, \quad T(r, \varphi + 2\pi, t) = T(r, \varphi, t), \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} &= -h_2(T_{c_2} - T), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \bar{F}(\varphi, t, T), \\ \bar{F}(\varphi, t, T) &= \begin{cases} h_2 T_M, & \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ h_1(T_c - T) + \kappa(T_c^4 - T^4), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; c – теплоємність; ρ – щільність матеріалу; α_i – коефіцієнт теплообміну, $T_M = T_m + T_d$, T_m – температура металу, що потрапляє у зону деформації, T_d – середнє збільшення значення температури у зоні деформації (викликане деформацією металу), T_c – температура середовища зовні кільця, T_{c_2} – температура всередині кільця.

При великому числі обертів валків навколо своєї осі встановлюється квазістаціонарний розподіл температури, який не залежить від часу. Задача (4.2) спрощується і ми маємо задачу для рівняння теплопровідності у кільці $\Omega = \{(r, \varphi) | R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$ [11] з неоднорідними граничними умовами та умовами теплообміну за межами кільця, що залежать від кутової координати φ .

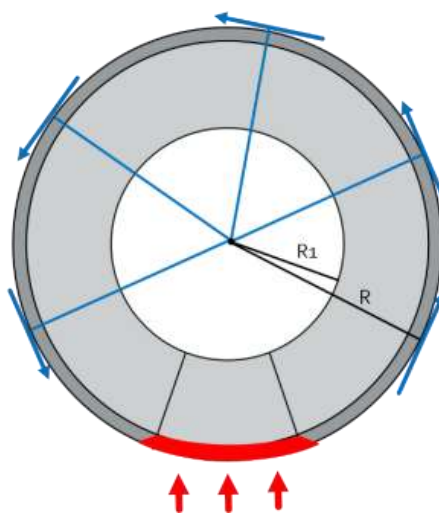


Рис.4.2. Радіальний переріз циліндричного валка

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \bar{F}_1(\varphi, T), \quad \bar{F}_1(\varphi, T) = \begin{cases} h_2 T_M & 0 < \varphi < \varphi_0, \\ h_1 (T_c - T) + \kappa (T_c^4 - T^4), & \varphi_0 < \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -h_2(T_{c_2} - T), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (4.5)$$

$$T(r, \varphi + 2\pi) = T(r, \varphi). \quad (4.6)$$

Тут $\kappa = \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda}$; ε – ступінь чорноти; σ – стала Стефана-Больцмана.

Якщо температурний розподіл кільця не залежить від радіуса, кільце термічно тонке, то можна перейти до розгляду усередненої за радіусом температури [64]. Розв'язання такої спрощеної задачі зведемо до розв'язання інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [148]. Для цього помножимо рівняння (4.3) задачі (4.3)–(4.6) на rdr та зінтегруємо його в межах $R_1 < r < R$, де r_c – середнє значення радіуса кільця, $S = \pi(R^2 - R_1^2)$ – площа кільця.

Після операції усереднення отримаємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яка розпадається на дві крайові задачі в області $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{2Rr_c^2 h_2}{S} u + \frac{2Rr_c^2}{S} \bar{F}(\varphi, u) + \frac{2Rr_c^2 h_1}{S} u = 0. \quad (4.7)$$

Перша задача в області $\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \varphi_0\}$ має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} - \frac{2r_c^2}{S} (Rh_2 - R_1 h_1) u_1 + \frac{2Rr_c^2}{S} h_2 T_M &= 0, \\ u_1(0) &= T_m, \quad u_1(\varphi_0) = T_M. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Увівши позначення $g^2 = \frac{2r_c^2}{S} (Rh_2 - R_1 h_1)$, $g_1 = \frac{2Rr_c^2 h_2 T_M}{S}$, отримаємо розв'язок задачі (4.8) у вигляді

$$u_1(\varphi) = C_1 e^{g\varphi} + C_2 e^{-g\varphi} + \frac{2Rh_2 T_M}{Rh_2 - R_1 h_1}. \quad (4.9)$$

Друга задача в області $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < 2\pi\}$ має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + g^2 u_2 &= -h_1 T_0 - \tau(T_c^4 - u_2^4), \\ -\frac{du_2(\varphi_0)}{d\varphi} &= (h_2 - h_1)u_2 + h_1 T_0 + \kappa(T_c^4 - u_2^4); \quad u_2(2\pi) = T_m, \end{aligned} \quad (4.10)$$

де

$$\tau = a \times \kappa \quad a = \frac{2Rr_c^2}{S}.$$

Для побудови функції Гріна [184] задачі (4.10) запишемо рівняння (4.10) в операторному вигляді

$$Lu = \tau u_2^4 - \tau T_c^4, \quad L = \frac{d^2}{d\varphi^2} + g^2. \quad (4.11)$$

Для знаходження функції u_2 будуємо функцію Гріна для спряженого оператора L^* до оператора L у кожній з підобластей області $\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$

$$\begin{cases} L^* G_i(\varphi; \xi) = -\delta(\varphi - \xi), \\ G_1(0) = 0, G_1(\varphi_0) = 0, G_2(\varphi_0) = 0, G_2(2\pi) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

де $\delta(\varphi - \xi)$ – дельта-функція Дірака, $L^* = \frac{d^2}{d\varphi^2} - g^2$.

В області $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}$ функція $G_2(\varphi; \xi)$ повинна задовольняти однорідним умовам

$$L^* G_2(\varphi; \xi) = 0, \quad \varphi < \xi, \quad \varphi > \xi. \quad (4.13)$$

У кожній із підобластей $\Omega_{\varphi_1}, \Omega_{\varphi_2}$ $\varphi < \xi, \varphi > \xi$ представимо φ як загальний розв'язок однорідного рівняння (4.13) з однорідними крайовими умовами

$$\frac{d^2 G_i}{d\varphi^2} - g^2 = 0, \quad G_1(0) = 0, \quad G_1(\varphi_0) = 0, \quad G_2(\varphi_0) = 0, \quad G_2(2\pi) = 0, \quad (4.14)$$

де $\chi_{1,2} = \pm g$ – корені характеристичного рівняння. Тоді функція Гріна, що задовольняє задачі (4.14), має вигляд

$$G_i(\varphi; \xi) = \begin{cases} C_{i1}(\xi)e^{\chi_1\varphi} + C_{i2}(\xi)e^{\chi_2\varphi}, & \varphi < \xi \\ C_{i3}(\xi)e^{\chi_1\varphi} + C_{i4}(\xi)e^{\chi_2\varphi}, & \varphi > \xi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \varphi_0 < 2\pi. \quad (4.15)$$

Скориставшись властивостями функції Гріна та однорідними граничними умовами, визначимо коефіцієнти $C_{i1} \div C_{i4}$ у кожній із підобластей області $\Omega_{\varphi} = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}$, $\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\}$, $\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}$.

$$\begin{cases} C_{11}(\xi) + C_{12}(\xi) = 0, \\ C_{13}(\xi)e^{\varphi_0\chi_1} + C_{14}(\xi)e^{\varphi_0\chi_2} = 0, \\ C_{11}(\xi)e^{\chi_1\xi} + C_{12}(\xi)e^{\chi_2\xi} = C_{13}(\xi)e^{\chi_1\xi} + C_{14}(\xi)e^{\chi_2\xi} \\ -C_{11}(\xi)\chi_1e^{\chi_1\xi} - C_{12}(\xi)\chi_2e^{\chi_2\xi} + C_{13}(\xi)\chi_1e^{\chi_1\xi} + C_{14}(\xi)\chi_2e^{\chi_2\xi} = -1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= 2g(e^{x_1\varphi_0} - e^{x_2\varphi_0}), \quad g_{11}(\xi) = e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi} + e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi}, \\
 g_{12}(\xi) &= e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi} - e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi}, \quad g_{13}(\xi) = (e^{x_2\xi} - e^{x_1\xi}), \\
 \Delta_2 &= x_1(e^{x_2\varphi_0 + 2\pi x_1} - e^{x_1\varphi_0 + 2\pi x_2}) + x_2(e^{x_1\varphi_0 + 2\pi x_2} - e^{x_2\varphi_0 + 2\pi x_1}), \\
 g_{21}(\xi) &= e^{x_2\xi + 2\pi x_1} - e^{x_1\xi + 2\pi x_2}, \quad g_{22}(\xi) = e^{x_1\varphi_0 + x_2\xi} - e^{x_2\varphi_0 + x_1\xi}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Врахувавши, що $x_1 + x_2 = 0$, а $x_1 - x_2 = 2g$ та підставивши значення коефіцієнтів $C_{i1}(\xi) \div C_{i4}(\xi)$ в (4.15), будемо мати функцію Гріна в області

$$\Omega_\varphi = \{\Omega_{\varphi_1} + \Omega_{\varphi_2}\}, \quad \text{де}$$

$$\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\}, \quad \Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}.$$

$$G_1(\varphi; \xi) = \frac{1}{\Delta_1} \begin{cases} -g_{11}(\xi)e^{x_1\varphi} + g_{12}(\xi)e^{x_2\varphi}, & \varphi < \xi \\ g_{13}(\xi)(e^{x_2\varphi_0}e^{x_1\varphi} - e^{x_1\varphi_0}e^{x_2\varphi}), & \varphi > \xi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{4.18}$$

$$G_2(\varphi; \xi) = \frac{1}{\Delta_2} \begin{cases} g_{21}(\xi)(e^{x_1\varphi} - e^{x_2\varphi}), & \varphi < \xi \\ g_{22}(\xi)(e^{x_1\varphi} - e^{x_2\varphi}), & \varphi > \xi \end{cases} \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi. \tag{4.19}$$

Рівняння Гаммерштейна у кожній підобласті має вигляд

$$\begin{aligned}
 u_{21}(\xi) &= u_{21}(0)G'_{1\varphi}(0, \xi) - u_{21}(\varphi_0)G'_{1\varphi}(\varphi_0, \xi) + \\
 &+ \omega_1 \int_0^{\varphi_0} G_\varphi(\varphi, \xi) d\varphi - \tau \int_0^{\varphi_0} G_\varphi(\varphi, \xi) u_{21}^4 d\varphi,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\Omega_{\varphi_1} = \{0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < \varphi_0\},$$

$$u_{22}(\xi) = u_{22}(\varphi_0)G'_{2\varphi}(\varphi_0, \xi) - u_{22}(2\pi)G'_{2\varphi}(2\pi, \xi) + \\ + \omega_2 \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi - \tau \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) u_{22}^4 d\varphi,$$

$$\Omega_{\varphi_2} = \{\varphi_0 < \varphi < \xi, \xi < \varphi < 2\pi\}.$$

Після перетворень та обчислення інтегралів $\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi$ та

$\int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi$ запишемо рівняння Гаммерштейна у вигляді

$$u(\xi) = u_L(\xi) - \tau \int_0^{2\pi} G_i(\varphi; \xi) u^4 d\varphi,$$

$$u_L(\xi) = u_{21}(0)G'_{\varphi}(0, \xi) - u_{21}(\varphi_0)G'_{\varphi}(\varphi_0, \xi) + \omega_1 \int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi + \quad (4.21)$$

$$+ u_{22}(\varphi_0)G'_{\varphi}(0, \xi) - u_{22}(2\pi)G'_{\varphi}(2\pi, \xi) + \omega_2 \int_0^{\varphi_0} G_2(\varphi, \xi) d\varphi.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (4.21) знайдено із застосуванням модифікованого методу Ньютона у вигляді

$$u(\xi) = u_L - \tau \bar{u}^4 \left(\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi, \xi) d\varphi + \int_{\varphi_0}^{2\pi} G_2(\varphi, \xi) d\varphi \right), \quad (4.22)$$

де $\bar{u}$ – середнє значення температури валка та корінь рівняння $\bar{u} = A - B\bar{u}^4$,

$$A = \frac{1}{2\pi - \varphi_0} \int_0^{2\pi} u_L(\xi) d\xi, \quad B = \frac{\tau}{2\pi - \varphi_0} \left(\int_0^{\varphi_0} d\xi \int_0^{\varphi_0} G(\varphi, \xi) d\varphi + \int_{\varphi_0}^{2\pi} d\xi \int_{\varphi_0}^{2\pi} G(\varphi, \xi) d\varphi \right).$$

За розв'язками задач проведені числові експерименти. На рис 4.3 зображений температурний розподіл радіального перерізу сталевого циліндричного валка, що сприймає тепло в залежності від зміни кута повороту в інтервалі $0 < \varphi < \varphi_0$, та втрачає його за законами Ньютона та Стефана-Больцмана в інтервалі $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$. Для числового експерименту були взяті теплофізичні характеристики сталі марки 9Х2МФ [185]: $\lambda = 34 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ – коефіцієнт теплопровідності, $\rho_0 = 7840 \text{ кг/м}^3$ – щільність сталі, $c = 460 \text{ Дж/К}$ – теплоємність сталі, $T_0 = 300 \text{ К}$ – початкова температура, $T_c = 300 \text{ К}$ – температура середовища, $T_{m1} = 900 \text{ К}$, $T_{m1} = 615 \text{ К}$ – температура металу, що обробляється та температура металу на виході із зони деформації, $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\alpha_1 = 100 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, $\alpha_2 = 150 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, $\varepsilon = 0.7$, $\sigma = 6.67 \times 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ – постійна Стефана-Больцмана, $R = 0.2 \text{ м}$ і $R_1 = 0.1 \text{ м}$ – зовнішній та внутрішній радіуси кільця. Графіки температурних розподілів поверхні та перерізу порожнистого циліндра побудовано за розв'язками задач (4.8), (4.9), (4.22) в середовищі Matcad та Matlab з допомогою GUI-додатка PDEToolbox.

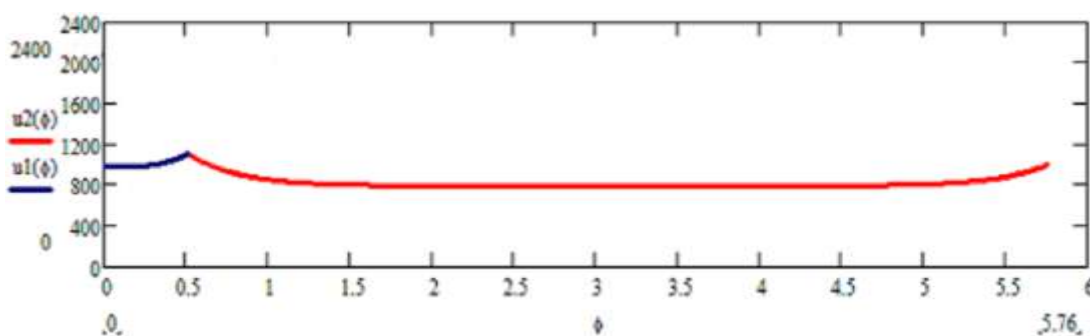


Рис. 4.3. Квaziстаціонарний температурний розподіл валка прокатного стану, що отриманий за розв'язком задачі (4.22) при $t=10\text{с}$ при

$$T_{M2} = 1100 \text{ К}, T_{m2} = 995 \text{ К}.$$

На рис. 4.4 зображений температурний розподіл перерізу сталевого циліндричного валка, який сприймає тепло в межах зміни кута повороту

$0 < \varphi < \varphi_0$, а у межах $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ втрачає тепло за законами Ньютона та Стефана-Больцмана через 10 с після початку процесу прокатки

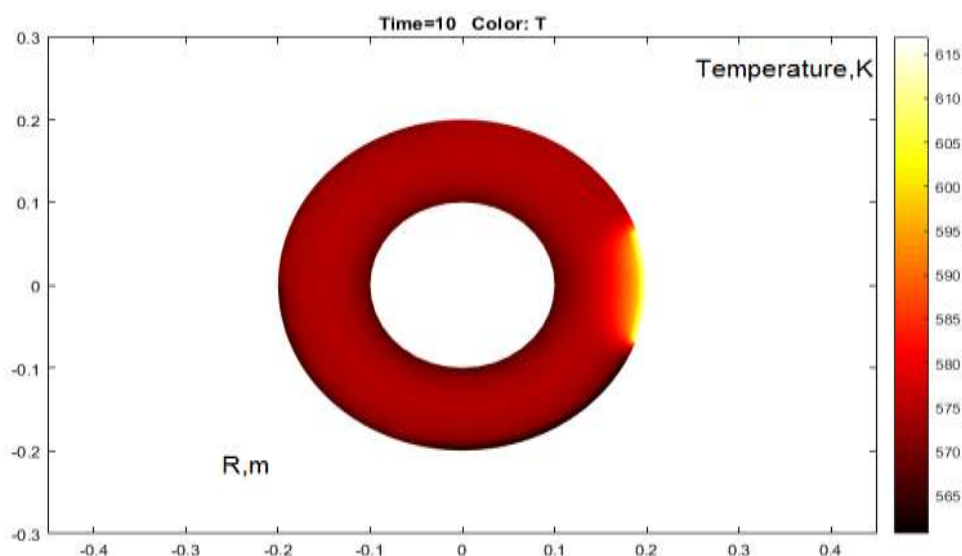


Рис. 4.4. Температурний розподіл, що отриманий за розв'язком задачі (4.2) при $t=10$ с

На рис. 4.5, 4.6 зображений температурний розподіл перерізу алюмінієвого циліндричного валка, який сприймає тепло в межах зміни кута повороту $0 < \varphi < \varphi_0$, а у межах $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ втрачає тепло за законами Ньютона та Стефана-Больцмана

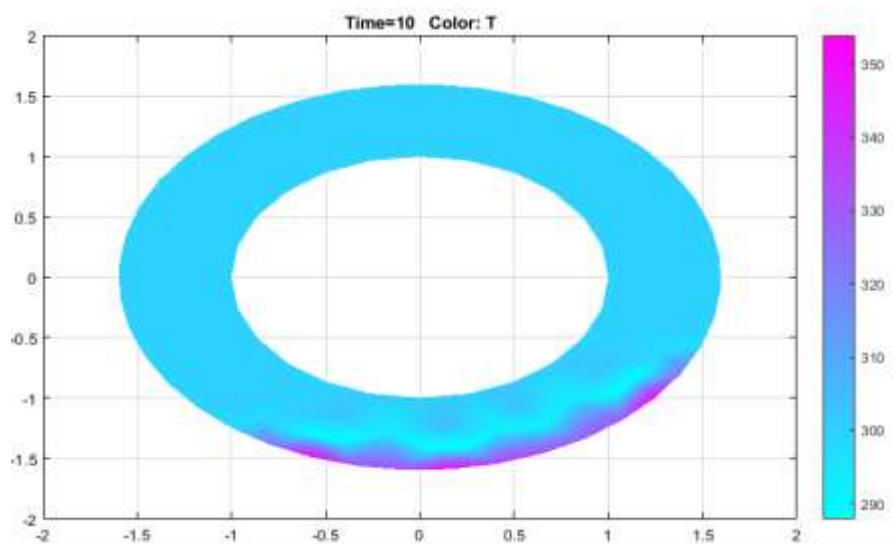


Рис.4.5. Температурний розподіл перерізу алюмінієвого циліндричного валка, що отриманий за розв'язком задачі (4.2)

$T_{M1} = 600\text{K}$, $\lambda = 236\text{ Вт/(м·К)}$, $\rho_0 = 2697\text{ кг/м}^3$ – щільність алюмінію,
 $c = 903\text{ Дж/К}$ – теплоємність алюмінію, $T_0 = 300\text{ K}$ – початкова температура,

$T_c = 300\text{ K}$ – температура середовища, $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\alpha_1 = 10\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$,

$\alpha_2 = 100\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$.

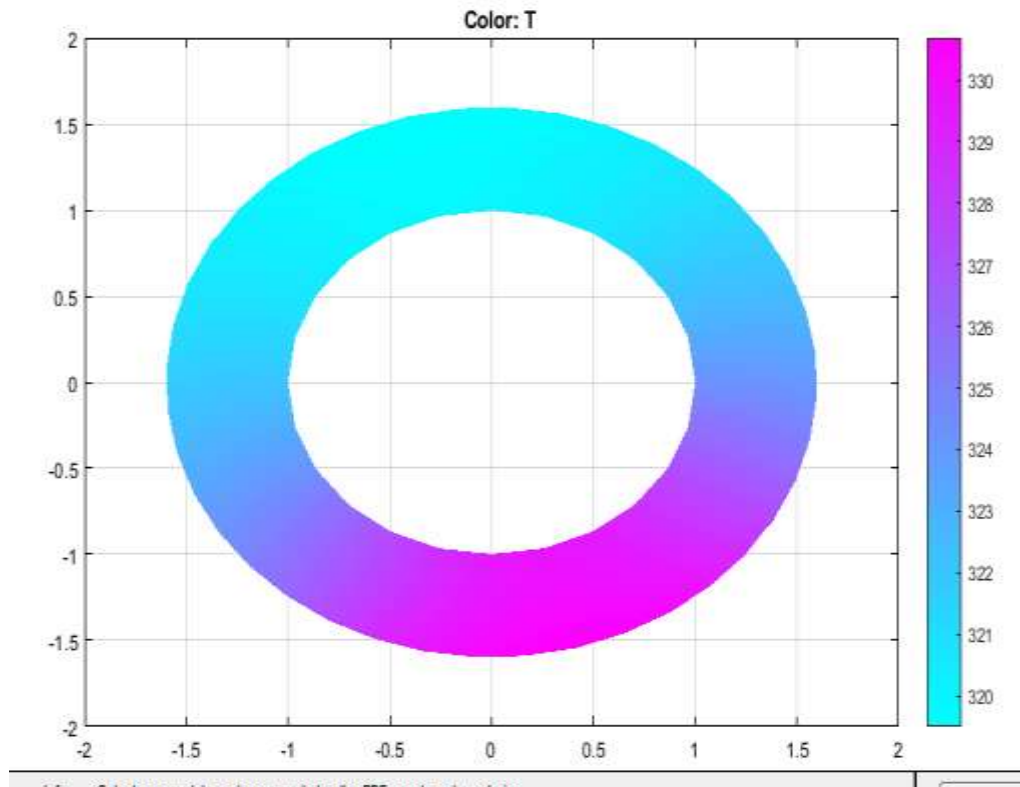


Рис.4.6. Температурний розподіл перерізу алюмінієвого циліндричного валка, за розв'язком задачі (4.3) –(4.6)

$T_{M1} = 600\text{K}$, $\lambda = 236\text{ Вт/(м·К)}$ $\rho_0 = 2697\text{ кг/м}^3$ – щільність заліза, $c = 903\text{ Дж/К}$
– теплоємність заліза, $T_0 = 300\text{ K}$ – початкова температура, $T_c = 300\text{ K}$ –
температура середовища, $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\alpha_1 = 10\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$, $\alpha_2 = 1\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$.

На рис. 4.7 зображено порівняння температурних розподілів натурного і числового експерименту перерізу сталюого циліндричного валка, який сприймає тепло в межах зміни кута повороту $0 < \varphi < \varphi_0$, а у межах $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ втрачає тепло за законами Ньютона та Стефана-Больцмана $\alpha_1 = 2\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$, $\alpha_2 = 1\text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$.

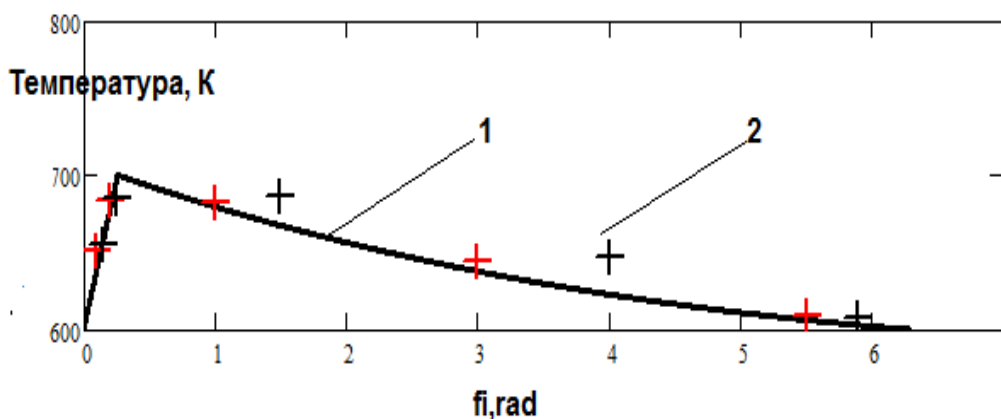


Рис.4.7. Температурні розподіли отримані із крива 1– із (4.3)–(4.6) для сталюого валка; крива 2– результати натурного експерименту.

4.2 Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багат шарових областях

У математичних моделях теплообміну та дифузії у багат шарових осесиметричних областях часто приходить ся розв'язувати задачі з граничними умовами третього роду. Найбільш часто такі задачі розглядаються у канонічних областях, що обмежують циліндри та кулі з однорідними теплофізичними властивостями, з діючими внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла[252–263]. Якщо тіло, що обмежене областю Ω має ізотропні теплофізичні властивості, а його поверхня $\bar{\Omega} \in \Omega$ поглинає або випромінює тепло за законом Ньютона або Стефана–Больцмана, гранична умова, що описує таку теплову взаємодію між тілом і навколишнім середовищем, має вигляд

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}} = \pm \left[\alpha (u_c - u) + \varepsilon \sigma (u_c^4 - u^4) \right]. \quad (4.23)$$

У багат шарових областях з різними теплофізичними характеристиками шарів умова (4.23) може змінюватися і приймати більш складний вигляд. Тут можна розглядати два види контакту між шарами – щільний і нещільний тепловий контакт. При нещільному тепловому контакті шарів форма умови

третього роду (4.23) не змінюється і приймає вигляд

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}_i} = \pm \left[\alpha_i (u_{c_i} - u) + \varepsilon_i \sigma (u_{c_i}^4 - u^4) \right], \quad (4.24)$$

де $\lambda_i, \alpha_i, \varepsilon_i, \sigma$ – відповідні коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі, ступеня чорноти шарів та стала Стефана-Больцмана. При щільному тепловому контакті шарів форма умови третього роду (4.23) змінюється. У такому випадку замість граничної умови третього роду з'являється умова четвертого роду – умова спряження, яка складається з рівності теплових потоків та рівності температур на межі областей щільного теплового контакту. Умовою для визначення теплових потоків при щільному контакті є умова теплового балансу одного із сусідніх шарів, для якого відомі граничні умови [7]

$$\lambda_i \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \pm w(P, u, t) = 0, \quad (4.25)$$

де $P, c_i, \rho_i, w(P, u, t)$ – координати точок області, теплоємність, щільність матеріалу шару та щільність джерел тепла, що діють у шарі

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}_{i+1}}. \quad (4.26)$$

Для неоднорідного рівняння теплопровідності (4.25) з діючими у зовнішньому шарі внутрішніми джерелами тепла умова імпедансного типу описана у роботі [11]. Розглянемо обмежену двошарову циліндричну область з різними теплофізичними властивостями шарів. З фізичної точки зору її можна розглядати як один сталений валок прокатного стану із зносостійким покриттям, який застосовується під час прокатки металевої

стрічки. Для підвищення стійкості валків, подовження терміну їх роботи валки покривають зносостійким матеріалом. При цьому поверхневий шар – покриття товщиною Δ має зовсім інші теплофізичні властивості ніж основна маса валка (рис. 4.8).

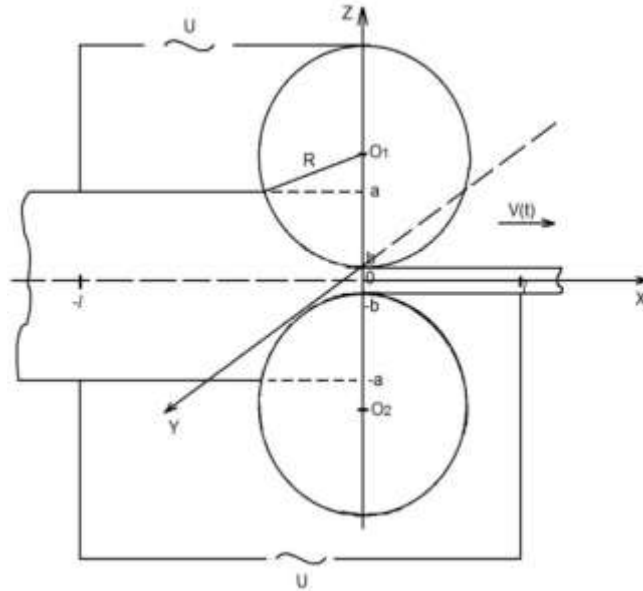


Рис. 4.8. Схема прокатки стрічки

Тому температурне поле такого циліндричного валка доцільно розглядати як температурне поле двошарового циліндра. Моделювання температурного розподілу на поверхні валкових калібрів під час термічної обробки та прокатки стрічки відноситься до задач визначення температурного поля у циліндричній області, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Для визначення температурного розподілу $T(r, z, \varphi, t)$ у такому складеному циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження в області

$$\Omega \times t = \{(r, z, \varphi, t) | 0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$$

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \leq r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

$$T(r, 0, t) = T(r, z, 0) = T_0, \quad T(r, z, l) = T_l, \quad (4.28)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = \lambda_2 T_r(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \quad (4.29)$$

$$T(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = T(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \quad (4.30)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0, z, \varphi, t) = -\alpha(T - t_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - t_c^4), \quad (4.31)$$

$$T_r(0, z, \varphi, t) = 0,$$

$$T(r, \varphi + 2\pi, t) = T(r, \varphi, t), \quad (4.32)$$

де $\lambda_{1,2}, c_{1,2}, \rho_{1,2}, \alpha, \varepsilon, \sigma$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів шару покриття та основного тіла валка, t_c – температура оточуючого валки середовища, w – щільність джерела тепла. При таких умовах теплообміну у математичній моделі припускаємо, що температура циліндра уздовж його довжини залишається сталою, тому похідною по z можна знехтувати, поклавши $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$. При цьому задача (4.27)–(4.32) спрощується, рівняння (4.27) в області $\Omega_1 \times t = \{(r, \varphi, t) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ набуває вигляду

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \leq r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0. \end{cases}$$

Для дослідження температурного поля внутрішнього циліндра достатньо знати усереднений температурний розподіл у зовнішньому (рис. 4.9) [44, 75]. Тому для визначення теплового потоку через поверхню внутрішнього циліндра, помножимо рівняння (4.27) на rdr і зінтегруємо по товщині шару в межах від $r_0 - \Delta$ до r_0 .

Скориставшись співвідношенням

$$u(\varphi, t) = \frac{2}{S} \int_{r_0 - \Delta}^{r_0} T(r, \varphi, t) r dr,$$

де S – площа перетину зовнішнього шару

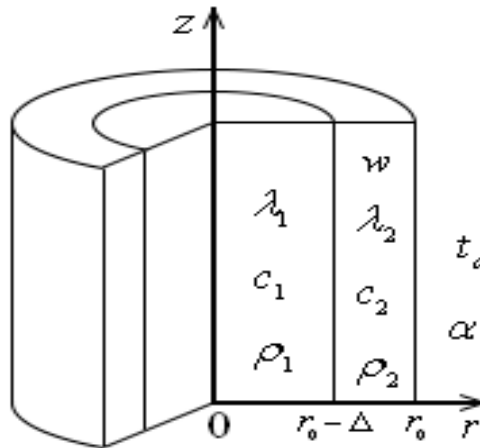


Рис. 4.9. Двошаровий циліндр

Після перетворень маємо на границі внутрішнього та зовнішнього циліндрів умову імпедансного типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_0-\Delta} = \\ = \begin{cases} g_0, & \omega t < \varphi < \omega t + \varphi_0, t > 0, \\ f_0 + f(u), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi, t > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.33)$$

де $g_0, f_0, f(u)$ – сталі величини, або кусково-монотонні функції.

Умову імпедансного типу на межі двох шарів, при щільному контакті, можна отримати зінтегрувавши рівняння (4.25), яке у випадку відсутності внутрішніх джерел тепла та для нелінійного теплообміну з навколишнім середовищем матиме вигляд

$$\lambda_i \operatorname{div}(\operatorname{gradu}) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4.34)$$

4.3 Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками

Розглянемо математичну модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у циліндричному контейнері або прес-формі. Прес-форма розігрівається постійними або періодично діючими зовнішніми джерелами тепла [75, 83]. У ній відбувається процес спікання попередньо спресованого виробу. Визначення температурного розподілу у виробі приводить до розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками шарів. Зовнішній циліндр, розігрівається внутрішніми, джерелами тепла, а внутрішній циліндр, холодно спресований виріб, розігрівається за рахунок передачі тепла теплопровідністю або конвективного теплообміну від зовнішнього циліндра. Розглянемо процес передачі тепла від зовнішнього до внутрішнього циліндра теплопровідністю.

Якщо тіло контейнера з виробом розігрівається індукційним способом, джерела тепла зосереджені у поверхневому шарі товщиною Δ – тілі контейнера. При цьому внутрішніми джерелами тепла розігрівається шар товщиною Δ , а далі уздовж радіуса r у напрямі осі спресованого виробу відбувається нагрівання шляхом передачі тепла теплопровідністю. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що у прес-формі сила струму стала та дорівнює I . Тому під час моделювання температурного поля зони нагріву прес-форми та виробу у ній індукційним способом природно припустити, що нагрівання відбувається одночасно внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. У геометричному сенсі можна вважати, що нагрівається двошаровий циліндр, зовнішній шар якого має товщину стінки Δ . При цьому теплофізичні характеристики зовнішнього та внутрішнього циліндрів різні.

Для визначення температурного розподілу $T(r, z, t)$ у складеному

циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження [174] в області $\Omega \times t: \{0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq l, 0 \leq t \leq t_0\}$

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = f_{li}(t) \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, & r - \Delta \leq r < r_0, \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta \end{cases} \quad (4.35)$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \quad (4.36)$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l, t) = T_l, \quad (4.37)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r}, \quad (4.38)$$

$$T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t) = T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t), \quad (4.39)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0, z, t)}{\partial r} = -f_{li}(t) [\alpha_1 (T_1 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_c^4)], \quad \frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (4.40)$$

де $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів тіла контейнера та виробу, $T_{1,2}$ – температура контейнера та виробу, $f_{li}(t)$ – кусково-неперервна функція, що відповідає за періодичну дію джерел тепла.

Задачу (4.35)–(4.40) розв'язуємо числовим і аналітичним методом [264]. Для дослідження температурного поля внутрішнього циліндра T_2 необхідно знати усереднений тепловий потік від зовнішнього циліндра до внутрішнього [174, 265, 266]. Для цього сформулюємо умову спряження на межі зовнішнього та внутрішнього циліндрів. Знайдемо тепловий потік через поверхню зовнішнього циліндра до внутрішнього. Для цього помножимо рівняння (4.35) на rdr і проінтегруємо його за радіусом в межах $(r_0 - \Delta, r_0)$ та використаємо першу з граничних умов (4.40), будемо мати

$$\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\Delta-0}^{r=r_0} + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{r_0-\Delta}^{r_0} T_1 r dr - c_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0-\Delta}^{r_0} T_1 r dr = - \frac{I^2 \rho_0 f_{1i}(t)}{S^2} \int_{r_0-\Delta}^{r_0} (1 + \beta T_1) r dr, \quad (4.41)$$

$$\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\Delta-0}^{r=r_0} = f_{1i}(t) [-\lambda_1 r_0 (\alpha_1 (T_1 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_c^4))] - \lambda_1 (r_0 - \Delta) \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta, z, t)}{\partial r}, \quad (4.42)$$

де $S = \pi(r_0 \Delta - \Delta^2)$ – площа кільця.

Підставивши (4.42) у (4.41) та скориставшись співвідношенням [65]

$$u(z, t) = \frac{2}{S} \int_{r_0-\Delta}^{r_0} T_1(r, z, t) r dr,$$

будемо мати тепловий потік на межі від зовнішнього до внутрішнього циліндра

$$\begin{aligned} \lambda_1 (r_0 - \Delta) \frac{S}{2} \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t)}{\partial r} &= \frac{\lambda_1 S}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{c_1 \rho_1 S}{2 \partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2S} f_{1i}(t) u + \\ &+ \frac{I^2 \rho_0}{2S} f_{1i}(t) (r_0 \Delta - \Delta^2 / 2) - r_0 f_{1i}(t) \left[\alpha \left(\frac{1}{2} S u - T_c \right) + \varepsilon \sigma \left(\frac{S}{16} u^4 - T_c^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Якщо прийняти умову рівності температур на границі внутрішнього і зовнішнього циліндрів $u(z, t) \approx T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t) \approx T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)$ та крайову умову (4.39), то з урахуванням напрямку теплового потоку, умова спряження (4.38) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r} &= \frac{1}{(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{c_1 \rho_1}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2(r_0 - \Delta) S} f_{1i}(t) u + \\ &+ \frac{I^2 \rho_0 (r_0 \Delta - \Delta^2 / 2)}{\lambda_1 S^2 (r_0 - \Delta)} f_{1i}(t) - \frac{r_0 f_{1i}(t)}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} \left[\alpha (u - T_c) + \varepsilon \sigma (u^4 - T_c^4) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Отримана умова (4.44) є умовою імпедансного типу, оскільки вона поряд з нормальною містить і дотичну похідну. У такий спосіб визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі T_2 зводить задачу (4.35)–(4.40) до крайової задачі з умовою імпедансного типу [4, 35]

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (4.45)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (4.46)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r} = & \frac{\lambda_2}{(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_1 \lambda_2 \rho_1}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2(r_0 - \Delta) S} f_{li}(t) T_2 + \\ & + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 f_{li}(t) (r_0 \Delta - \Delta^2 / 2)}{\lambda_1 S^2 (r_0 - \Delta)} - \frac{r_0 \lambda_2 f_{li}(t)}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} \left[\alpha (T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_2^4 - T_c^4) \right], \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Якщо і у цьому циліндрі температурним розподілом уздовж радіусу можна знехтувати, то провівши усереднення [65]

$$v(z, t) = \frac{2}{S_1} \int_0^{r_0 - \Delta + 0} T_2(r, z, t) r dr, \quad S_1 = \pi (r_0 - \Delta)^2$$

приходимо до крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку з умовами (4.45)–(4.47)

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_2}{(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{c_1 \lambda_2 \rho_1}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} - \frac{c_2 \rho_2}{(r_0 - \Delta)} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2(r_0 - \Delta) S} f_{li}(t) v + \\ + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_0 \Delta - \Delta^2 / 2)}{\lambda_1 S^2 (r_0 - \Delta)} f_{li}(t) - \frac{r_0 \lambda_2}{\lambda_1 (r_0 - \Delta)} f_{li}(t) \left[\alpha (T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_2^4 - T_c^4) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Спростивши (4.49) маємо задачу для знаходження температурного

поля у внутрішньому циліндрі

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial v}{\partial t} + Av + Cv^4 = B, \quad 0 < z < l, \quad t > 0 \quad (4.50)$$

$$v(z, 0) = T_0, \quad v(0, t) = T_0, \quad v(r, z, l) = T_l, \quad (4.51)$$

де

$$A = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{4\lambda_2 S} f_{li}(t) - \frac{r_0 \alpha}{2\lambda_1} f_{li}(t), \quad a^2 = \frac{c_1 \rho_1}{2\lambda_1} - \frac{c_2 \rho_2}{2\lambda_2}, \quad C = \frac{r_0 \varepsilon \sigma}{2\lambda_1} f_{li}(t),$$

$$B = -\frac{I^2 \rho_0 f_{li}(t) (r_0 \Delta - \Delta^2 / 2)}{2\lambda_1 S^2} - \frac{r_0 f_{li}(t) (\alpha T_c + \varepsilon \sigma T_c^4)}{2\lambda_1}.$$

Її розв'язок знаходимо кінцево-різницеvim методом Кранка-Ніколсон [145].

Побудована кінцево-різницева схема Кранка-Ніколсон для рівняння теплопровідності (4.50)

$$a_{1,2} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + A_{1,2} u_i^{j+1} + C_{1,2} (u_i^{j+1})^4 - B_{1,2}$$

Отриману матрицю значень температур використано для розв'язання задачі (4.45) – (4.48) для внутрішнього циліндру, як граничну умову. Для цього побудовано кінцево-різницеvu схему Дугласа-Ганна для розв'язання методом змінних напрямів, яка має вигляд

$$\frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2},$$

$$\frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для } n=0,$$

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру.

4.4 Отримання імпедансних умов у багат шаровій області

В багат шарових виробах з різними теплофізичними властивостями шарів при щільному їх контакті під час визначення температурних розподілів досить часто з'являються задачі з граничними умовами 3-го та 4-го роду. При цьому часто трапляється, що умови теплообміну при переході через термічно тонкий шар відомі лише на одній його границі. В таких задачах в функціях граничних умов з'являються точки або лінії розриву першого роду. Це приводить до складнощів під час розв'язання задач. В таких випадках доцільно замінити умови спряження з розривними функціями на межі шарів на умови спряження з неперервними функціями, що включають у себе крім нормальної похідної ще і тангенціальні похідні,

або похідні у напрямі заданого вектора. Такі умови можна отримати використавши умови теплового балансу, або теплового моменту області нагрівання.

Припустимо, що термічно тонкий шар постійної товщини, який розташований на поверхні кулі радіусом R_2 обмежений сферами Φ_+ і Φ_- . Розглянемо серединну між ними сферу Φ . Нормалі до цих поверхонь співпадають з напрямками радіусу. Припустимо, що температурне поле, в такому шарі, буде лінійним в напрямі радіусу до Φ .

$$U = \frac{U_+ + U_-}{2} + \frac{U_+ - U_-}{h} r = \frac{U_+ + U_-}{2} + \frac{U_{R_2} - U_{R_1}}{R_2 - R_1} r = \bar{U} + \bar{U}' r, \quad R_1 < r < R_2$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Φ_+, Φ_- – частини кулі;

$\partial\omega_\perp$ – бічна поверхня;

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad R_1 \leq r \leq R_2.$$

Розглянемо рівняння теплового балансу в довільній точці області ω

$$\int_{\omega} [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) - c \rho U_t] dv = 0.$$

Розглянемо перший доданок рівняння теплового балансу

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) dv = \int_{\partial\omega} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad \text{— формула Гауса-Остроградського.}$$

Ліву частину цієї формули розглянемо в сферичних координатах

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) dv =$$

$$= \lambda \int_{\omega} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Розглянемо праву частину формули Гауса-Остроградського

$$\int_{\partial \omega} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Phi_+} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\Phi_-} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\partial \omega_{\theta}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\partial \omega_{\varphi}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

$$1. \int_{\Phi_+} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Phi_+} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} R_2^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \lambda R_2^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} d\theta d\varphi.$$

$$2. \int_{\Phi_-} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Phi_-} \lambda \frac{\partial U}{\partial(-r)} r ds = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_1} \sin \theta d\theta d\varphi = - \lambda R_1^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} d\theta d\varphi.$$

$$3. \int_{\partial \omega_{\theta}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\partial \omega_{\theta_1}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\partial \omega_{\theta_2}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds =$$

$$= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_2} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{\partial U}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} r \sin \theta_1 ds d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{\partial U}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} r \sin \theta_1 ds d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \bigg|_{\theta=\theta_2} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \bigg|_{\theta=\theta_1} \right) dr d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} \right) dr d\varphi = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\theta dr d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_1}^{R_2} r U dr \right) d\theta = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) \right) d\theta = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\frac{1}{r_{cp}^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) \right)}_{=\Delta \theta} d\theta = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\theta} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) d\theta.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{4.} \int_{\partial \omega} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\partial \omega_{\varphi_1}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_{\partial \omega_{\varphi_2}} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds =$$

$$= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_1} r^2 \sin \theta dr d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \lambda \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_2} r^2 \sin \theta dr d\theta =$$

$$= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_2} - \left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} \right) dr d\theta = \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi \right) dr d\theta =$$

$$= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \int_{R_1}^{R_2} r U dr d\varphi = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \int_{R_1}^{R_2} (\bar{U} + \bar{U}' r) r dr d\varphi =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} R_1 = R - \frac{h}{2} \\ R_2 = R + \frac{h}{2} \end{array} \right\} = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \left(\bar{U} \frac{r^2}{2} + \bar{U}' \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} d\varphi =$$

$$= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) \frac{d\theta}{\sin \theta} d\varphi =$$

$$= -\lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r_{cp}^2 \sin^2 \theta_{cp}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) d\theta d\varphi =$$

$$= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) d\theta d\varphi.$$

$$\iiint_W \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_{S_W} (\vec{F} \vec{n}) ds, \quad \vec{n} = \{r, \theta, \varphi\},$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right\}.$$

Розглянемо другий доданок рівняння теплового балансу

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} c\rho U_t dv &= c\rho \int_{\omega} U_t r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} U_t r^2 dr \right) d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \theta \left(\left(\dot{\bar{U}} \frac{r^3}{3} + \dot{\bar{U}}' \frac{r^4}{4} \right) \right)_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} d\varphi d\theta = \\
&= c\rho \sin \theta_{cp} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{\bar{U}} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\varphi d\theta.
\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння теплового балансу набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\lambda R_2^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} d\theta d\varphi - \lambda R_1^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} d\theta d\varphi + \\
&+ \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\theta} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) d\theta d\varphi + \\
&+ \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) d\theta d\varphi - \\
&- c\rho \sin \theta_{cp} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{\bar{U}} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\varphi d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Скориставшись теоремою про повне загальне середнє, отримаємо

$$\lambda R_2^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - \lambda R_1^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} +$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \Delta_{\theta} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) + \\
& +\lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) - \\
& - c \rho \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \left(\dot{\bar{U}} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Розділимо обидві частини рівності на $r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + \lambda \Delta_{\theta, \varphi} \left(\bar{U} R h + \bar{U}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right) - \\
& - \frac{c \rho}{r_{cp}^2} \left(\dot{\bar{U}} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

У випадку ідеального теплового контакту

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2-0} = \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r}, \quad \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0} = \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r},$$

$$U_+ = U|_{\Phi_+ - 0}; \quad U_- = U|_{\Phi_- + 0},$$

$$\frac{R_2^2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \Delta_{\theta, \varphi} \left(\frac{U_+ + U_-}{2} R h + \frac{U_+ + U_-}{h} \left(R^2 h + \frac{h^3}{4} \right) \right) - \quad (4.52)$$

$$-\frac{c\rho}{r_{cp}^2}\left(\frac{\dot{U}_+ + \dot{U}_-}{2}\left(R^2h + \frac{h^3}{12}\right) + \frac{\dot{U}_+ + \dot{U}_-}{h}\left(R^3h + R\frac{h^3}{4}\right)\right) = 0.$$

Рівняння (4.52) є першою умовою імпедансного типу на спряження для кулі.

Для отримання другої умови імпедансного типу розглянемо рівняння моменту теплового балансу в довільній точці області ω .

$$\int_{\omega} m(r, \theta, \varphi) (\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) - c\rho U_t) dv = 0.$$

Візьмемо

$$m(r, \theta, \varphi) = r,$$

$$\int_{\omega} r (\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) - c\rho U_t) dv = 0.$$

Скористаємося формулою Гауса-Остроградського

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) dv = \int_{\partial\omega} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds$$

і розглянемо перший доданок

$$\begin{aligned} \int_{\omega} r \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) dv = \\ = \lambda \int_{\omega} r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \lambda \iiint_W \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) r^3 \sin \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \lambda \int_{\partial \omega} r \frac{\partial U}{\partial n} ds = \lambda \int_{\Phi_+} r \frac{\partial U}{\partial n} ds + \lambda \int_{\Phi_-} r \frac{\partial U}{\partial n} ds + \lambda \int_{\partial \omega_\theta} r \frac{\partial U}{\partial n} ds + \lambda \int_{\partial \omega_\varphi} r \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

$$1. \int_{\Phi_+} \lambda \frac{\partial U}{\partial n} ds = \lambda \int_{\Phi_+} r \frac{\partial U}{\partial r} ds = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} R_2^3 \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \lambda R_2^3 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} d\theta d\varphi.$$

$$2. \lambda \int_{\Phi_-} r \frac{\partial U}{\partial n} ds = \lambda \int_{\Phi_-} r \frac{\partial U}{\partial(-r)} r ds = -\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_1} \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= -\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_1} \sin \theta d\theta d\varphi = -\lambda R_1^3 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} d\theta d\varphi.$$

$$3. \lambda \int_{\partial \omega_\theta} r \frac{\partial U}{\partial n} ds = \lambda \int_{\partial \omega_{\theta_1}} r \frac{\partial U}{\partial n} ds + \lambda \int_{\partial \omega_{\theta_2}} r \frac{\partial U}{\partial n} ds =$$

$$= -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_1} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_2} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi =$$

$$= -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_1} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_2} r^2 \sin \theta_1 ds d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right) r^2 dr d\varphi = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\theta \right) dr d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_{R_1}^{R_2} U r^2 dr \right) \right) d\theta d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_{R_1}^{R_2} (\bar{U} + \bar{U}'r) \right) r dr \right) d\theta d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} R_1 = R - \frac{h}{2} \\ R_2 = R + \frac{h}{2} \end{array} \right\} = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{U} \frac{r^3}{3} + \bar{U}' \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \right) d\theta d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) \right) d\theta d\varphi = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\frac{1}{r_{cp}^2 \sin \theta_{cp}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) \right)}_{=\Delta \theta} d\theta d\varphi = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\theta} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{4.} \quad \lambda \int_{\partial \omega} r \frac{\partial U}{\partial n} ds = \lambda \int_{\partial \omega_{\varphi_1}} r \frac{\partial U}{\partial n} ds + \lambda \int_{\partial \omega_{\varphi_2}} r \frac{\partial U}{\partial n} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} r \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_1} r^2 \sin \theta dr d\theta + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} r \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_2} r^2 \sin \theta dr d\theta = \\
&= -\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_1} \frac{r^2}{\sin \theta} dr d\theta + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=\varphi_2} \frac{r^2}{\sin \theta} dr d\theta = \\
&= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2}{\sin \theta} dr d\theta = \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi \right) \frac{r^2}{\sin \theta} dr d\theta = \\
&= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^2 U dr \right) d\varphi \frac{d\theta}{\sin \theta} = \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^2 (\bar{U} + \bar{U}' r) dr \right) d\varphi \frac{d\theta}{\sin \theta} = \\
&= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \frac{r^3}{3} + \bar{U}' \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} d\varphi \frac{d\theta}{\sin \theta} = \\
&= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\varphi \frac{d\theta}{\sin \theta} = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\frac{1}{r_{cp}^2 \sin \theta_{cp}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right)}_{=\Delta_\varphi} d\theta d\varphi = \\
&= \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_\varphi \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Проведемо перетворення другого доданку у рівнянні теплового балансу

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} rc\rho U_t dv &= c\rho \int_{\omega} U_t r^3 \sin\theta dr d\theta d\varphi = c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} U_t r^3 dr \right) d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \left(\dot{U} + \dot{U}'r \right) r^3 dr = c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \left(\dot{U} \frac{r^4}{4} + \dot{U}' \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} = \\
&= c\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{U} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{8} \right) + \frac{\dot{U}'}{5} \left(\left(R + \frac{h}{2} \right)^5 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^5 \right) \right) d\varphi = \\
&= c\rho \sin\theta_{cp} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{U} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) + \dot{U}' \left(R^4 h + R^2 \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) \right) d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння моменту теплового балансу набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\lambda R_2^3 \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} d\theta d\varphi - \lambda R_1^3 \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} d\theta d\varphi + \\
&+ \lambda r_{cp}^2 \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\theta} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\theta d\varphi + \\
&= + \lambda r_{cp}^2 \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) d\theta d\varphi - \\
&- c\rho \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\dot{U} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) + \dot{U}' \left(R^4 h + R^2 \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) \right) d\varphi d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Застосуємо теорему про середнє і об'єднаємо Δ_{θ} и Δ_{φ}

$$\begin{aligned}
& R_2^3 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - R_1^3 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + \\
& + \lambda r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \Delta_{\theta, \varphi} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) - \\
& - c \rho \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1) \left(\dot{\bar{U}} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \dot{\bar{U}}' \left(R^4 h + R^2 \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Розділивши обидві частини рівності на $r_{cp}^2 \sin \theta_{cp} (\varphi_2 - \varphi_1) (\theta_2 - \theta_1)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{R_2^3}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - \frac{R_1^3}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + \lambda \Delta_{\theta, \varphi} \left(\bar{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \bar{U}' \left(R^3 h + R \frac{h^3}{12} \right) \right) - \\
& - c \rho \left(\dot{\bar{U}} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^4 h + R^2 \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

У разі ідеального теплового контакту

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2-0} = \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r}, \quad \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0} = \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r}.$$

$$U_+ = U|_{\Phi_+-0} \quad U_- = U|_{\Phi_-+0}.$$

Друга імпедансна умова спряження для кулі має вигляд

$$\begin{aligned}
& \frac{R_2^3}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r} - \frac{R_1^3}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r} + \\
& + \Delta_{\theta, \varphi} \left(\frac{U_+ + U_-}{2} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \frac{U_+ + U_-}{h} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) \right) - \\
& = \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left(\frac{\dot{U}_+ + \dot{U}_-}{2} \left(R^3 h + R \frac{h^3}{4} \right) + \frac{\dot{U}_+ + \dot{U}_-}{h} \left(R^4 h + R \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Виведення імпедансних умов в задачі для циліндра

Будемо припускати, що термічно тонкий шар, що покриває циліндр радіуса R_2 постійної товщини h , обмежений поверхнями Φ_+ і Φ_- . Розглянемо серединну поверхню Φ радіуса R , де

$$R_2 = R + \frac{h}{2}; \quad R_1 = R - \frac{h}{2}. \quad (4.53)$$

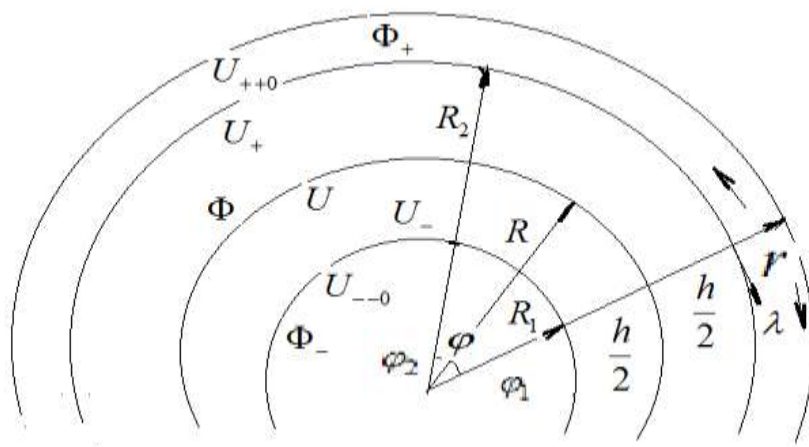


Рис.4.10. Радіальний переріз двошарової циліндричної області

Нормалі до цих поверхонь співпадають з напрямом радіуса. Температурне поле в такому шарі будемо припускати лінійним в напрямку радіуса до поверхні Φ :

$$U = \frac{U_+ + U_-}{2} + \frac{U_+ - U_-}{h} \cdot r = \bar{U} + \bar{U}' \cdot r, \quad (4.54)$$

$$U_t = \dot{\bar{U}} + \dot{\bar{U}}' r,$$

де $R_1 \leq r \leq R_2$ або $R - \frac{h}{2} \leq r \leq R + \frac{h}{2}$, а U_+ і U_- – значення температур на поверхнях Φ_+ і Φ_- в точках перетину нормалі з поверхнею: $U|_{R_2} = U_+$, $U|_{R_1} = U_-$. Замість диференціального рівняння теплопровідності в шарі розглянемо рівняння балансу тепла в довільній точці області ω і рівняння балансу теплового моменту в цій області:

$$\int_{\omega} [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) - c\rho U_t] ds = 0, \quad (4.55)$$

$$\int_{\omega} m [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) - c\rho U_t] ds = 0. \quad (4.56)$$

У нашому випадку ω – це частина кільця, що міститься між колами радіусів R_2 і R_1 ($R_2 > R_1$) і двома радіусами, що утворюють з початковою точкою відліку деякі кути φ_1 і φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$).

Поворот радіуса здійснюється від кута φ_1 до кута φ_2 (проти годинникової стрілки). Перетворимо перший доданок інтеграла (4.55), для чого скористаємося формулою Гауса-Остроградського

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) ds = \int_{K_{\omega}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl,$$

де K_{ω} – контур області ω .

Розглянемо інтеграл уздовж границі ω

$$\int_{K_{\omega}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl = \int_{K_{R_1}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{K_{R_2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{K_{\varphi_1}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{K_{\varphi_2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl.$$

Перейдемо до полярних координат : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тоді

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) ds &= \lambda \int_{\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] r dr d\varphi = \\ &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial(-r)} r \Big|_{r=R_1} d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial(r)} r \Big|_{r=R_2} d\varphi + \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial u}{\partial(-\varphi)} \frac{1}{r} \Big|_{\varphi=\varphi_1} dr + \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial u}{\partial(\varphi)} \frac{1}{r} \Big|_{\varphi=\varphi_2} dr = \\ &= -\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_-}{\partial r} R_1 d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_+}{\partial r} R_2 d\varphi - \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} dr + \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2} dr = \\ &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_+}{\partial r} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_-}{\partial r} R_1 d\varphi + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} \right) dr = \\ &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_+}{\partial r} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U_-}{\partial r} R_1 d\varphi + \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} dr = \end{aligned}$$

$$= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U(R_2, \varphi)}{\partial r} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U(R_1, \varphi)}{\partial r} R_1 d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^R \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} dr d\varphi.$$

Розглянемо перший доданок:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial r} dr d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} U(r, \varphi) dr \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} (\bar{U} + \dot{\bar{U}} r) dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{1}{r} \bar{U} + \bar{U}' \right) dr d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\bar{U} \ln|r| + \bar{U}' r) \Big|_{R_1}^{R_2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\bar{U} \ln|r| + \bar{U}' r) \Big|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \left[\ln \left(R + \frac{h}{2} \right) - \ln \left(R - \frac{h}{2} \right) \right] + \bar{U}' \left(R + \frac{h}{2} - R + \frac{h}{2} \right) \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + \bar{U}' h \right) d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left((U_+ + U_-) \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + U_+ - U_- \right) d\varphi = \\ &= r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{r_{cp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(U_+ \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \right) + U_- \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} - 1 \right) \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta_{\varphi} \left(U_+ \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + 1 \right) + U_- \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} - 1 \right) \right) d\varphi,$$

$$\text{де } \frac{1}{r_{cp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \Delta_{\varphi}.$$

Обчислимо другий доданок з (4.55) з урахуванням (4.53) і (4.54):

$$\begin{aligned} \int_{\omega} c \rho U_t ds &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} c \rho U_t r dr d\varphi = c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} (\dot{U} + \dot{U}' r) r dr d\varphi = \\ &= c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} (\dot{U} r + \dot{U}' r^2) dr d\varphi = c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{U} \frac{r^2}{2} + \dot{U}' \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{R - \frac{h}{2}}^{R + \frac{h}{2}} d\varphi = \\ &= c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \frac{\dot{U}}{2} \left[\left(R + \frac{h}{2} \right)^2 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{\dot{U}'}{3} \left[\left(R + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^3 \right] \right\} d\varphi = \\ &= c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\dot{U}}{2} \cdot 2Rh + \frac{\dot{U}'}{3} \left(3R^2h + \frac{h^3}{4} \right) \right) d\varphi = c \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\dot{U}Rh + \dot{U}' \left(R^2h + \frac{h^3}{12} \right) \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Таким чином, замість (4.55) отримуємо рівняння:

$$\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} R d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta_{\varphi} \left[u_+ \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + 1 \right) + u_- \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} - 1 \right) \right] d\varphi - \\
& - c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\dot{\bar{U}} R h + \dot{\bar{U}}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right] d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Застосовуючи теорему про середнє, отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \lambda(\varphi_2 - \varphi_1) R_2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - \lambda(\varphi_2 - \varphi_1) R_1 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} + \lambda r_{cp}^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + \bar{U}' h \right) - \\
& - c\rho(\varphi_2 - \varphi_1) \left[\dot{\bar{U}} R h + \dot{\bar{U}}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Обидві частини рівності розділимо на $r_{cp}^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{R_2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} + \lambda \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + \bar{U}' h \right) - \\
& - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left[\dot{\bar{U}} R h + \dot{\bar{U}}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Перетворимо тепер рівняння (4.56) так само, як і (4.55), прийнявши $m(r, \varphi) = r$.

Розглянемо спочатку перший доданок:

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega} m \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) ds &= \lambda \int_{R_1}^{R_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] r dr d\varphi = \\
 &= \lambda \int_{R_1}^{R_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] r dr d\varphi = \\
 &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) r dr d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} dr d\varphi = \\
 &= \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) r dr = \left| \begin{array}{l} \underline{u} = r, \quad d\underline{u} = dr \\ d\underline{v} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) dr, \quad \underline{v} = r \frac{\partial U}{\partial r} \end{array} \right| = r \cdot r \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} r \frac{\partial U}{\partial r} dr = \right. \\
 &= \left. \left| \begin{array}{l} \underline{u} = r, \quad d\underline{u} = dr \\ d\underline{v} = \frac{\partial U}{\partial r} dr, \quad \underline{v} = U \end{array} \right| = r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1}^{R_2} - \left(r U \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} U dr \right) \right\} = \\
 &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1}^{R_2} - r U \Big|_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} U dr \right) d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{R_1}^{R_2} U dr d\varphi = \\
 &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} - R_2 U \Big|_{R_2} + R_1 U \Big|_{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} (\bar{U} + \bar{U}'r) dr \right) d\varphi + \\
 &+ \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{R_1}^{R_2} (\bar{U} + \bar{U}'r) dr d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} - R_2 U \Big|_{R_2} + R_1 U \Big|_{R_1} + \left(\bar{U}r + \bar{U}' \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \right) d\varphi + \\
&\quad + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U}r + \bar{U}' \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} - \left(R + \frac{h}{2} \right) U_+ + \left(R + \frac{h}{2} \right) U_- + \bar{U} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \bar{U} \left(R - \frac{h}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{U}'}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\bar{U}'}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right)^2 \right) d\varphi + \\
&\quad + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \bar{U} \left(R - \frac{h}{2} \right) + \frac{\bar{U}'}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\bar{U}'}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right)^2 \right) d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} - R U_+ - \frac{h}{2} U_+ + R U_- - \frac{h}{2} U_- + U \left(R + \frac{h}{2} - R + \frac{h}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{U}'}{2} \left(\left(R + \frac{h}{2} \right)^2 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^2 \right) \right] d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\bar{U}h + \frac{\bar{U}'}{2} 2Rh \right) d\varphi = \\
&= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} - R U_+ - \frac{h}{2} U_+ + \right. \\
&\quad \left. + R U_- - \frac{h}{2} U_- + \frac{h}{2} U_+ + \frac{h}{2} U_- + R U_+ - R U_- \right) d\varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{r_{cp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\bar{U}h + \bar{U}'Rh) d\varphi = \\
& = \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} \right) d\varphi + \lambda r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta_{\varphi} (\bar{U}h + \bar{U}'Rh) d\varphi.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер другий доданок з (4.56):

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} rc\rho U_t ds &= c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} r U_t dr d\varphi = c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} U_t r^2 dr d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} (\dot{\bar{U}} + \dot{\bar{U}}'r) r^2 dr d\varphi = c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\dot{\bar{U}} \frac{r^3}{3} + \dot{\bar{U}}' \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\dot{\bar{U}}}{3} \left(\left(R + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^3 \right) + \frac{\dot{\bar{U}}'}{4} \left(\left(R + \frac{h}{2} \right)^4 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^4 \right) \right] d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\dot{\bar{U}}}{3} \left(3R^2h + \frac{h^3}{4} \right) + \frac{\dot{\bar{U}}'}{4} \left(4R^3h + Rh^3 \right) \right] d\varphi = \\
&= c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\dot{\bar{U}} \left(R^2h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3h + \frac{1}{4}Rh^3 \right) \right] d\varphi.
\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння (4.56) перетвориться до виду:

$$\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(R_2^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} \right) d\varphi + \lambda r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta_{\varphi} (\bar{U}h + \bar{U}'Rh) d\varphi -$$

$$-c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\dot{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{U}' \left(R^3 h + \frac{1}{4} R h^3 \right) \right] d\varphi.$$

Застосовуючи теорему про середнє, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \lambda R_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - \lambda R_1^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} + \\ & + \lambda r_{cp}^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \Delta_\varphi (\bar{U}h + \bar{U}'Rh) - \\ & - c\rho (\varphi_2 - \varphi_1) \left[\dot{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{U}' \left(R^3 h + \frac{1}{4} R h^3 \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Розділимо обидві частини рівності на $r_{cp}^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2} - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1} + \lambda \Delta_\varphi (\bar{U}h + \bar{U}'Rh) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left[\dot{U} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{U}' \left(R^3 h + \frac{1}{4} R h^3 \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, замість співвідношень (4.55)–(4.56), отримуємо систему:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left. \frac{R+\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{R+\frac{h}{2}} - \left. \frac{R-\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{R-\frac{h}{2}} + \lambda \Delta_{\varphi} \left(\bar{U} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} + \bar{U}' h \right) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left[\dot{\bar{U}} R h + \dot{\bar{U}}' \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \right] = 0, \\ & \left. \frac{\left(R+\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{R+\frac{h}{2}} - \left. \frac{\left(R-\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{R-\frac{h}{2}} + \lambda \Delta_{\varphi} (\bar{U} h + \bar{U}' R h) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left[\dot{\bar{U}} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \dot{\bar{U}}' \left(R^3 h + \frac{1}{4} R h^3 \right) \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.58)$$

У разі ідеального теплового контакту маємо:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_2-0} &= \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r}, & U_+ &= U \Big|_{R_2-0}, \\ \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_1+0} &= \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r}, & U_- &= U \Big|_{R_1+0}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Підставляючи співвідношення (4.59) в систему (4.58), отримаємо:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{R+\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r} - \frac{R-\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r} + \lambda \Delta_{\varphi} \left[\frac{U_+ + U_-}{2} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} + U_+ - U_- \right] - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{U_+ + U_-}{2} R h + (U_+ - U_-) \left(R^2 + \frac{h^2}{12} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\left(R+\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_+}{\partial r} - \frac{\left(R-\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_-}{\partial r} + \lambda \Delta_{\varphi} \left[\frac{U_+ + U_-}{2} h + (U_+ - U_-) R \right] - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{U_+ + U_-}{2} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + (U_+ + U_-) \left(R^3 + \frac{1}{4} R h^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.60)$$

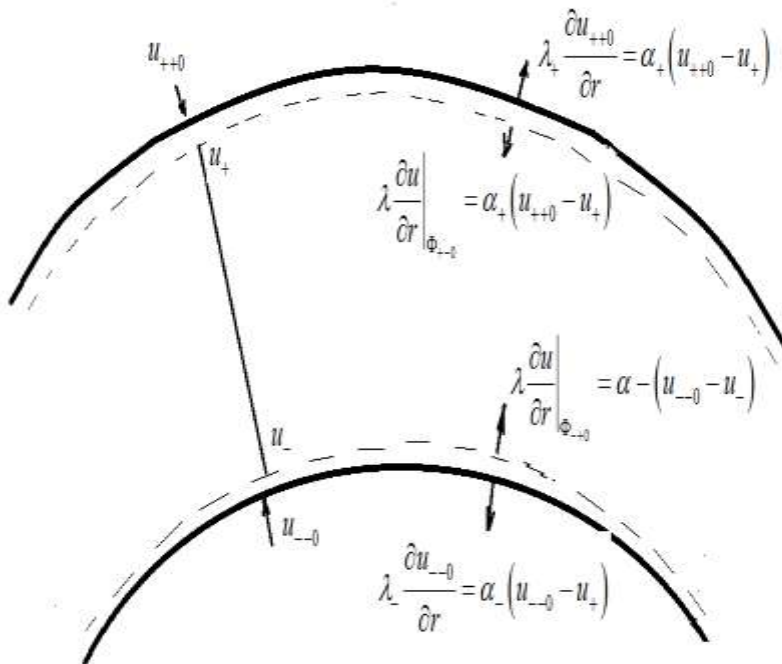
Отримані рівняння в системі (4.60) є першою і другою імпендансною умовою спряження для циліндра. У разі неідеального теплового контакту маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} &= \alpha_+ (U_{++0} - U_+), & \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} &= \alpha_- (U_{--0} - U_-), \\ \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\Phi_{++0}} &= \alpha_+ (U_{++0} - U_+), & \lambda \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\Phi_{--0}} &= \alpha_- (U_{--0} - U_-), \end{aligned} \quad (4.61)$$

де $\lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r}$ і U_{++0} – тепловий потік і температура над поверхнею Φ_+ , $\lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r}$ и U_{--0} – тепловий потік і температура під поверхнею Φ_+ .

Із співвідношень (4.61) отримаємо:

$$U_+ = U_{++0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r}, \quad U_- = U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r}, \quad (4.62)$$



попередньо обчислимо $(u_+ + u_-)$ і $(u_+ - u_-)$, після чого підставимо їх у систему (4.56):

$$\begin{aligned}
 U_+ + U_- &= U_{++0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} = \\
 &= U_{++0} + U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right), \\
 U_+ + U_- &= U_{++0} + U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right).
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{R + \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{R - \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi \left\{ \left[U_{++0} + U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \right] \times \right. \\
 &\times \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + U_{++0} - U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \Big\} - \\
 &+ \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{Rh}{2} \left[U_{++0} + U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \right] + \right. \\
 &\left. + \left(R^2 + \frac{h^2}{12} \right) \left[U_{++0} - U_{--0} - \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \right] \right\} = 0. \\
 &\frac{\left(R + \frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\left(R - \frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi \left[\frac{h}{2} \left(U_{++0} + U_{--0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) + \right. \\
 &\left. + R \left(U_{++0} - U_{--0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \right] - \\
 &- \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} R^2 h + \frac{1}{24} h^3 \right) \left(U_{++0} + U_{--0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) + \right. \\
 &\left. + \left(R^3 + \frac{1}{4} R h^2 \right) \left(U_{++0} - U_{--0} - \frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} + \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) \right] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Перетворимо цю систему:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{R+\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{R-\frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - \lambda \Delta_\varphi \left[\left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} \right) \right] + \\ & + \lambda \Delta_\varphi \left[\left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} \right) \right] - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(R^2 - \frac{Rh}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) - \left(R^2 + \frac{Rh}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) \right] = 0. \\ & \frac{\left(R+\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{\left(R-\frac{h}{2} \right)^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - \lambda \Delta_\varphi \left[\left(R+\frac{h}{2} \right) \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) \right] + \\ & + \lambda \Delta_\varphi \left[\left(R-\frac{h}{2} \right) \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) \right] - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(R^3 - \frac{R^2h}{2} + \frac{Rh^2}{4} - \frac{h^3}{24} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) - \left(R^3 + \frac{R^2h}{2} + \frac{Rh^2}{4} + \frac{h^3}{24} \right) \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Введемо позначення:

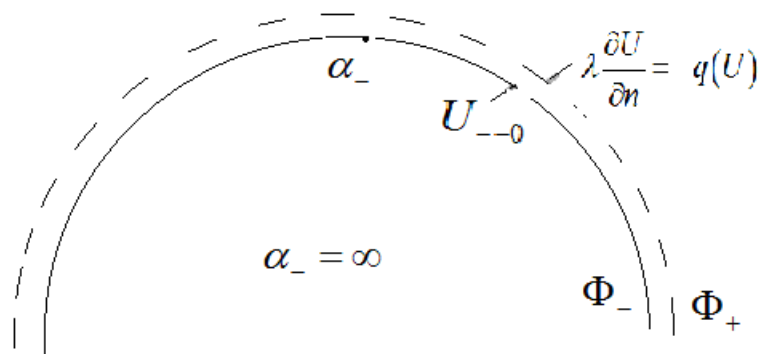
$$A_1 = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}; \quad A_2 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}};$$

$$A_3 = R^2 - \frac{1}{2} Rh + \frac{1}{12} h^2; \quad A_4 = R^2 + \frac{1}{2} Rh + \frac{1}{12} h^2;$$

$$A_5 = R^3 - \frac{1}{2} R^2 h + \frac{1}{4} Rh^2 - \frac{1}{24} h^3; \quad A_6 = R^3 + \frac{1}{2} R^2 h + \frac{1}{4} Rh^2 + \frac{1}{24} h^3.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{R_2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \\ & + \lambda A_1 \Delta_\varphi \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) - \lambda A_2 \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) = 0. \\ & \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} \lambda_+ \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \\ & + \lambda R_1 \Delta_\varphi \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) - \lambda R_2 \Delta_\varphi \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - U_{--0} \right) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_+}{\alpha_+} \frac{\partial U_{++0}}{\partial r} - U_{++0} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.63)$$

Отримані рівняння системи (4.63) є шуканими імпедансними умовами спряження у випадку неідеального теплового контакту. Якщо термічно тонкий шар покриває теплопровідне тіло, то, виходячи з отриманих співвідношень (4.58) і використовуючи крайову умову $\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = -q(U)$ на поверхні Φ_+ і умови спряження (4.61) на поверхні Φ_- , після перетворення і виключення на поверхні Φ_- рівняння для знаходження U_+



$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{R_2}{r_{cp}^2} q(U_+) - \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - \lambda A_1 \Delta_\varphi(U_-) + \lambda A_2 \Delta_\varphi(U_+) - \\ -\frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_4 \frac{\partial}{\partial t}(U_+) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t}(U_-) = 0, \\ -\frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(U_+) - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda R_2 \Delta_\varphi(U_+) - \lambda R_1 \Delta_\varphi(U_-) - \\ -\frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t}(U_+) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t}(U_-) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{R_2}{r_{cp}^2} q(U_+) - \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - \lambda A_1 \Delta_\varphi \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) + \lambda A_2 \Delta_\varphi(U_+) - \\ -\frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_4 \frac{\partial}{\partial t}(U_+) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) = 0, \\ -\frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(U_+) - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda R_2 \Delta_\varphi(U_+) - \lambda R_1 \Delta_\varphi \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) - \\ -\frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t}(U_+) + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t} \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda A_2 \Delta_\varphi U_t - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_4 \dot{U}_+ - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(U_+) = \lambda A_1 \Delta_\varphi \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right) + \\ + \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(U_{--0} - \frac{\lambda_-}{\alpha_-} \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} \right), \\ \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{R_1^2}{r_{cp}^2} + \frac{\lambda R_1}{\alpha_-} \Delta_\varphi - \frac{c\rho A_5}{\lambda_- r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{--0} + \lambda \Delta_\varphi (R_2 U_+ - R_1 U_{--0}) - \\ -\frac{c\rho A_6}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} U_+ + \frac{c\rho A_5}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} U_{--0} - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(U_+) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda A_2 \Delta_\varphi U_+ - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_4 \dot{U}_+ - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(U_+) = \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\lambda A_1}{\alpha_-} \Delta_\varphi + \frac{R_1}{r_{cp}^2} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{A_3}{\alpha_-} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{--0} + \\ & + \left(\lambda A_1 \Delta_\varphi - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{--0}, \\ & \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{R_1^2}{r_{cp}^2} + \frac{\lambda R_1}{\alpha_-} \Delta_\varphi - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{A_5}{\alpha_-} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{--0} + \lambda \Delta_\varphi (R_2 U_+ - R_1 U_{--0}) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t} U_+ + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t} U_{--0} - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(U_+) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.64)$$

Перше рівняння в системі (4.64) є імпедансною крайовою умовою, де U_+ є корінь другого рівняння цієї системи. При $\alpha_- = \infty$, отримуємо випадок ідеального теплового контакту. Підставивши $\alpha_- = \infty$ в (4.60), отримаємо

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda A_2 \Delta_\varphi U_+ - \frac{c\rho}{r^2} A_4 \dot{U}_+ - \frac{R_2}{r^2} q(U_+) = \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1}{r^2} U_{--0} \right) + \left(\lambda A_1 \Delta_\varphi - \frac{c\rho}{r^2} A_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{--0}, \\ & -\frac{R_1^2}{r^2} \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} U_{--0} + \lambda \Delta_\varphi (R_2 U_+ - R_1 U_{--0}) - \frac{c\rho}{r^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t} U_+ + \frac{c\rho}{r^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t} U_{--0} - \frac{R_2^2}{r^2} q(U_+) = 0. \end{aligned} \right.$$

Таким чином, отримуємо крайову імпедансну умову ідеального теплового контакту

$$\begin{aligned} & \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi (A_1 U_{--0} - A_2 U_+) - \\ & - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} (A_3 U_{--0} - A_4 U_+) - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(U_+) = 0 \end{aligned}$$

і рівняння для визначення U_+

$$\begin{aligned}
& \lambda_+ \Delta_\varphi R_2 U_+ - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial}{\partial t} U_+ - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(U_+) = \\
& = \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial U_{--0}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi (R_1 U_{--0}) - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial}{\partial t} U_{--0}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

У випадку, якщо на поверхнях Φ_+ і Φ_- значення температур збігаються $U_+ = U_- = \tilde{U}$, то імпендансна крайова умова (4.64) і рівняння (4.65) перетворюються до вигляду

$$\begin{cases} \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi (A_1 \tilde{U} - A_2 \tilde{U}) \lambda \Delta_\varphi - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \frac{\partial}{\partial t} (A_3 \tilde{U} - A_4 \tilde{U}) - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0, \\ \lambda \Delta_\varphi R_2 \tilde{U} - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \lambda \Delta_\varphi (R_1 \tilde{U}) - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \lambda (A_1 - A_2) \Delta_\varphi \tilde{U} - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} (A_3 - A_4) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0, \\ \lambda R_2 \Delta_\varphi \tilde{U} - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_6 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \lambda R_1 \Delta_\varphi \tilde{U} - \frac{c\rho}{r_{cp}^2} A_5 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}. \end{cases}$$

$$A_1 - A_2 = -\ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}}, \quad A_3 - A_4 = -Rh, \quad A_5 - A_6 = -R^2 h - \frac{h^3}{12}.$$

$$\begin{cases} \frac{R_1}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \lambda \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \Delta_\varphi \tilde{U} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} Rh \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R_2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0, \\ \lambda \Delta_\varphi (R_2 - R_1) \tilde{U} - \frac{R_1^2}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} (A_5 - A_6) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R_2^2}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R - \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \lambda \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \Delta_{\varphi} \tilde{U} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} Rh \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R + \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0, \\ \left(\frac{R - \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \right)^2 \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \lambda h \Delta_{\varphi} \tilde{U} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \left(\frac{R + \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \right)^2 q(\tilde{U}) = 0. \end{array} \right.$$

Найпростішою імпедансною крайовою умовою є

$$\frac{R - \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} \lambda_- \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \lambda \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \Delta_{\varphi} \tilde{U} + \frac{c\rho}{r_{cp}^2} Rh \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{R + \frac{h}{2}}{r_{cp}^2} q(\tilde{U}) = 0.$$

4.5 Математична модель температурного поля складної системи екструдер– філамент під час адитивного виробництва

Побудована а математична модель температурного поля полімерної нитки– філамента, що розігрівається в екструдері 3-D принтера згідно технології FDM (fused deposition modeling) просторового друку[26, 72,75]. Розплавлена полімерна нитка видавлюється на нагріту поверхню з поступовим нашаруванням шарів матеріалу один на один, створюючи готову деталь. Математична модель температурного поля складної системи: екструдер, нагрівник, полімерна нитка, що рухається через екструдер з постійною швидкістю, розглядається у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності з додаванням відповідних крайових умов. Філамент розігрівається в обмеженій області – нагрівник зовнішніми джерелами тепла конвективним або кондуктивним способом до температури розм'ягчення філамента на виході із екструдера.

Технологія адитивного виробництва або 3-D друку методом FFF (моделювання методом наплавлення) або FDM (fused deposition modeling) є однією з технологій, що впроваджуються у багатьох галузях промисловості,

таких як, медицина, машинобудування, літако- та ракетобудування та в інші галузі [288]. Всі ці технології об'єднує процес формування деталі шляхом додавання нового матеріалу (від англ. «Add» - додавати) на відміну від традиційних технологій, де створення деталі відбувається шляхом видалення «зайвого» матеріалу. У 3D принтерах, які працюють за такою технологією в якості наповнювача, найчастіше використовується спеціальний термопластик – філамент, який під час нагрівання набуває розм'якшеного стану, а після охолодження – твердне. Термопластик, для формування тіла виробу, подається за допомогою направляючих до екструдера, у якому він розігрівається до температури розм'якшення, а далі подається на розігріту платформу на якій шар за шаром, за заданою цифровою програмою формується виріб. Екструдери подають матеріал методом видавлювання (екструзії). Сам матеріал укладається шарами до тих пір, поки не буде повністю сформовано готовий виріб або його частина.

На рисунку 4.11 зображена принципова схема роботи 3D-принтера.

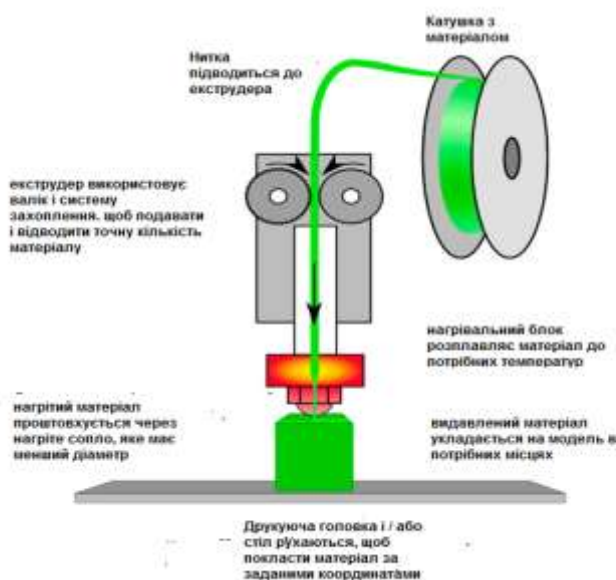


Рис. 4.11. Принципова схема роботи 3D-принтера
за технологією FDM

вдосконалюються швидкими темпами, зокрема за рахунок можливостей комп'ютерного проектування. Технологія дозволяє створювати як готові вироби, так і їх структурні елементи, близькі до чистової форми, що економічно і екологічно більш вигідно ніж традиційні механічні методи обробки деталей, такі як спікання, пресування, штамповка. Основою технології адитивного друку методом АВ є послідовне формування шарів на розігрітому столі, розплавленої пластикової нитки – філамента, нагрітої в екструдері, згідно до 3-D даних, закладених у програму 3-D принтера (Рис.4.12). В результаті такого процесу фізичні властивості шарів і усієї деталі залишаються незмінними [5].

Однією з основних проблем, що стримують широке застосування технологій адитивного друку є низька якість пошарового наплавлення філамента 3-D-принтером на розігріту основу та поява залишкової механічної напруги в деталях.

Залишкова механічна напруга, що виникає в деталях під час виробництва погіршує їх механічні властивості та приводить до коливання геометричних розмірів деталі та до незадовільних фізико-механічних властивостей. До цього додається низький рівень контролю характеристик полімерних матеріалів під час 3-D друку, моделювання та керування процесом розм'якшення філамента.

Усі ці проблеми свідчать про те, що контроль температурного поля під час виготовлення деталі на 3-D принтері має важливе значення, оскільки температура визначає ізотропні властивості виробу його мікроструктуру та механічні властивості деталі[276–282].

Вирішення більшості з цих проблем можливе за рахунок використання адекватної математичної моделі, що описує температурне поле системи: філамент із полімерного матеріалу, що розігрівається в екструдері та фрагменту виробу утвореного пошаровим накладанням матеріалу (Рис.4.12).

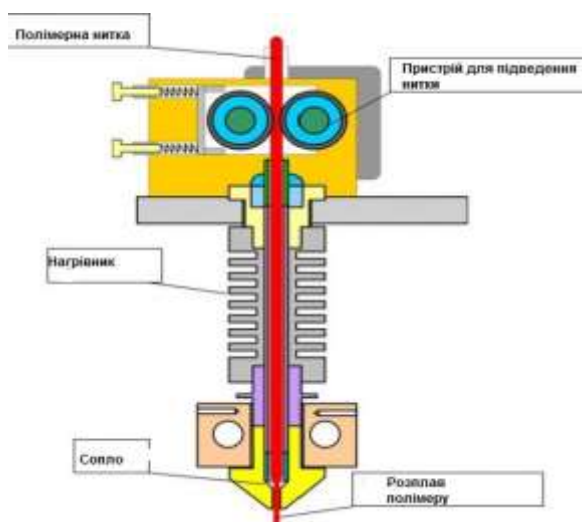


Рис. 4.12. FDM принтер з екструдером

Математична модель температурного поля системи дозволяє розраховувати оптимальні параметри керування температурним полем в процесі адитивного виробництва. Це зменшує необхідність проведення натурних експериментів.

При побудові математичної моделі вважаємо, що філамент циліндричної форми ізотропний має сталі теплофізичні властивості, який при пошаровому накладанні деформується.

Існує цілий ряд підходів до побудови математичних моделей температурного поля деталей, що виготовляються за допомогою процесів АВ. У більшості з них застосовуються числові методи аналізу. В якості джерела тепла у 3-D-принтерах використовуються різного роду нагрівники, що нагрівають поверхню філамента.

Температурний розподіл уздовж зони нагрівання можна знайти із розв'язку наступної крайової задачі для рівняння теплопровідності в області $\Omega = \{0 < r < r_0, 0 < z < l\}$

$$\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (4.66)$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad T(r, l) = T_l, \quad (4.67)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T(r_0, z)}{\partial r} = \alpha(T_c - T), \quad \frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \quad T_0 < T_l < T_c, \quad (4.68)$$

де T_c – температура середовища в екструдері під час нагрівання рухомого філамента, $\lambda, c, \rho_n, \alpha$ – відповідні теплофізичні характеристики термопластику та коефіцієнт теплообміну оточуючого середовища з рухомим філаментом. Оскільки філамент є тонким у термічному відношенні, а теплообмін його з екструдером відбувається за законом Ньютона, то розв'язок задачі (4.66)–(4.68) знаходимо усереднюючи за радіусом рівняння (4.66), що приводить до розв'язання наступної крайової задачі.

$$\lambda_1 \frac{d^2 u}{dz^2} - v c_1 \rho_1 \frac{du}{dz} - \frac{2\alpha}{r_0} u = -\frac{2\alpha T_c}{r_0}, \quad 0 < z < l, \quad (4.69)$$

$$u(0) = T_0, \quad u(l) = T_l. \quad (4.70)$$

У термопластичних матеріалів коефіцієнт теплопровідності λ значно менший ніж у металів тому він суттєво не впливає на температурний розподіл уздовж зони нагівання. Тому для інженерних розрахунків, перерозподілом температури уздовж зони нагрівання за рахунок теплопровідності можна знехтувати поклавши $\frac{d^2 u}{dz^2} = 0$. При цьому крайова задача (4.69)–(4.70) після усереднення за радіусом спрощується

$$\frac{du}{dz} = \frac{2\alpha}{v c_1 \rho_1 r_0} (T_c - u), \quad u(0) = T_0, \quad 0 < z < l. \quad (4.71)$$

Її розв'язок має вигляд

$$u(z) = T_c - (T_c - T_0) e^{\frac{-2\alpha}{vc_1\rho_1\eta_0}z}, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (4.72)$$

Зважаючи на розв'язок (4.72), слід зазначити, що основними параметрами керування температурним полем рухомого філаменту є коефіцієнт теплообміну оточуючого середовища з рухомим філаментом α , температура оточуючого його середовища T_c та швидкість руху філаменту через зону нагрівання v . Це дає можливість оптимізувати процес нагрівання вибравши найкраще співвідношення параметрів екструдера та нагрівника.

Коли швидкість руху філаменту через зону нагрівання $v \ll 0,01 \frac{M}{c}$ та відома температура у кінці зони нагрівання $T(l) = T_l$ температурне поле зони нагрівання філаменту має вигляд

$$u(z) = T_c + (e^{m_2 l} - e^{m_1 l})^{-1} \left[T_l (e^{m_2 z} - e^{m_1 z}) + T_c (e^{m_2 z} - e^{m_1 z}) + \right. \\ \left. + (T_c - T_0) (e^{m_1 l + m_2 z} - e^{m_1 z + m_2 l}) \right], \quad 0 \leq z \leq l, \quad (4.73)$$

де m_1, m_2 – корені характеристичного рівняння, що визначаються за формулами

$$m_{1,2} = \frac{vc_1\rho_1}{2\lambda_1} \pm \sqrt{\left(\frac{vc_1\rho_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\lambda_1}}. \quad (4.74)$$

Розв'язки (4.72) і (4.73) пов'язують основні параметри нагрівника в екструдері (α, l, v, T_c) та теплофізичні параметри філаменту, що нагрівається (λ_1, c_1, ρ_1) .

Із розв'язку рівняння (4.72), задаючи з технологічних міркувань, температуру філаменту на виході з екструдера T^* , легко визначити кожен з

параметрів керування процесом 3-D друку методом FFF, при відомих інших параметрах

$$T^* = T_c - (T_c - T_0) e^{-\frac{2\alpha l}{vc_1\rho_1r_0}}, \quad 0 < T_0 < T^* < T_c. \quad (4.75)$$

Ці параметри визначаються співвідношеннями

$$v = \frac{2\alpha l}{c_1\rho_1r_0l_n \frac{T_c - T_0}{T_c - T^*}}, \quad \alpha = \frac{vc_1\rho_1r_0}{2l} \ln \frac{T_c - T_0}{T_c - T^*}, \quad (4.76)$$

$$l = \frac{vc_1\rho_1r_0}{2\alpha} \ln \frac{T_c - T_0}{T_c - T^*}, \quad T_c = \frac{T^* - T_0 e^{-\frac{2\alpha l}{vc_1\rho_1r_0}}}{1 - e^{-\frac{2\alpha l}{vc_1\rho_1r_0}}}. \quad (4.77)$$

Нагрів філамента у екструдері методом FFF може здійснюватись за допомогою радіаційного підведення тепла. У такому випадку теплообмін між екструдером і філаментом, що нагрівається відбувається за законом Стефана-Больцмана.

При побудові математичної моделі температурного поля зони нагріву вважаємо, що нагрівник, який випромінює тепло, має постійну температуру T_c . Тоді математична модель температурного поля зони нагрівання філамента в екструдері – області $\Omega = \{0 < r < r_0, 0 < z < l\}$ відрізняється від задачі (4.66)–(4.68) додаванням замість умови (4.68) нової умови

$$\lambda_1 \frac{\partial T(r_0, z)}{\partial r} = \varepsilon \sigma (T_c^4 - T^4), \quad \frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \quad (4.78)$$

де ε, σ – ступінь чорноти філамента та стала Стефана-Больцмана.

Для тонкого у термічному відношенні філамента після усереднення та

поклавши $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$, задача (4.66), (4.67)–(4.78) трансформується в наступну

$$\frac{du}{dz} = \frac{2\varepsilon\sigma}{vc_1\rho_1r_0}(T_c^4 - u^4), \quad 0 < z < l, \quad u(0) = T_0, \quad (4.79)$$

розв'язок якої виписується в неявному, відносно температури, вигляді

$$z = \frac{vc_1\rho_1r_0}{T_c^3\varepsilon\sigma} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{T_c + u}{\omega(T_c - u)} + \operatorname{arctg} \frac{u}{T_c} - \operatorname{arctg} \frac{T_0}{T_c} \right), \quad \omega = \frac{T_c + T_0}{T_c - T_0}. \quad (4.80)$$

З розв'язку (4.80), задаючи температуру на виході із екструдера T^* , його довжину та інші параметри можна визначити за формулами

$$l = \frac{vc_1\rho_1r_0}{T_c^3\varepsilon\sigma} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{T_c + T^*}{\omega(T_c - T^*)} + \operatorname{arctg} \frac{T^*}{T_c} - \operatorname{arctg} \frac{T_0}{T_c} \right), \quad (4.81)$$

$$u(z) \approx T_c \frac{\omega M^z - 1}{\omega M^z + 1}, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (4.82)$$

$$M = e^{\frac{2\varepsilon\sigma T_c^3}{vc_1\rho_1T_0}}. \quad (4.83)$$

Поклавши у (4.82) $z = l$, $u(l) = T_l$, отримаємо прості розрахункові формули для визначення швидкості v руху філамента через екструдер, його довжину l у наступному вигляді

$$v = \frac{2\varepsilon\sigma T_c^3 l}{c_1\rho_1r_0} \ln \frac{\omega(T_c - T_l)}{T_c + T_l}, \quad (4.84)$$

$$l = \frac{vc_1\rho_1r_0}{2\varepsilon\sigma T_c^3} \ln \frac{T_c + T_l}{\omega(T_c - T_l)}. \quad (4.85)$$

При малій швидкості руху $v \ll 0,01 \frac{m}{c}$ філаменту через нагрівник в екструдері, перерозподілом температури у філаменті за рахунок теплопровідності нехтувати не можна. Температурний розподіл у цьому випадку визначається із розв'язку двоточної крайової задачі (4.69)–(4.70), або задачі

$$Lu = \mu(u^4 - T_c^4), \quad u(0) = T_0, \quad u(l) = T_l, \quad (4.86)$$

де $L = \frac{d^2}{dz^2} - \chi \frac{d}{dz}$ – лінійний диференціальний оператор, $\mu = 2\varepsilon\sigma\lambda^{-1}r_0^{-1}$, $\chi = v c \rho_n \lambda^{-1}$. Скориставшись другою формулою Гріна, розв'язок крайової задачі (4.86) отримуємо у вигляді

$$u(\xi) = T_0 G'_z(0, \xi) - T_l G'_z(l, \xi) - \mu \int_0^l G(z, \xi) (u^4 - T_c^4) dz, \quad (4.87)$$

$$\text{де } G'_z(0, \xi) = \frac{e^{\chi l} - e^{\chi \xi}}{e^{\chi l} - 1}, \quad G'_z(l, \xi) = \frac{1 - e^{\chi \xi}}{e^{\chi l} - 1}.$$

На рис. 4.13 зображені температурні розподіли зони нагрівання філаменту PLA, що рухається через зону нагрівання з різними швидкостями та з різним коефіцієнтом теплообміну в екструдері, побудовані за розв'язками задачі (4.69)–(4.70).

Під час числового експерименту змінювалась швидкість руху філаменту PLA радіусом $r_0 = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, з температурою розм'якшення $T_r = 323 \text{ К}$ через екструдер: криві 1,4 – $v = 6 \times 10^{-5} \frac{m}{s}$, криві 2,5 – $v = 6,5 \times 10^{-5} \frac{m}{s}$, криві 3,6 – $v = 7 \times 10^{-4} \frac{m}{s}$. При проведенні числового експерименту були взяті наступні параметри філаменту PLA та процесу

теплообміну: $T_0 = 300K$, $T_l = 330K$, $T_c = 450K$, $T_{c1} = 350K$, коефіцієнтами теплообміну між філаментом та екструдером: криві 1–3 при $\alpha = 1 \frac{W}{m^2 K}$, криві 4–6 при $\alpha = 0.1 \frac{W}{m^2 K}$, теплофізичні параметри філаменту та оточуючого його середовища $\rho_1 = 1230 \frac{кг}{м^3}$, $\lambda_1 = 0.029 \frac{Вт}{м \cdot K}$, $c_1 = 540 \frac{Дж}{кг \cdot K}$.

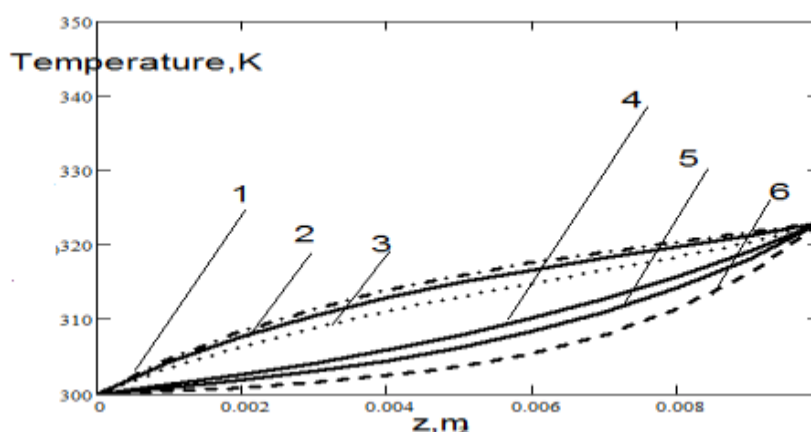


Рис. 4.13. Температурні розподіли зони нагрівання філаменту PLA, що рухається через зону нагрівання з різними швидкостями та з різним коефіцієнтом теплообміну в екструдері

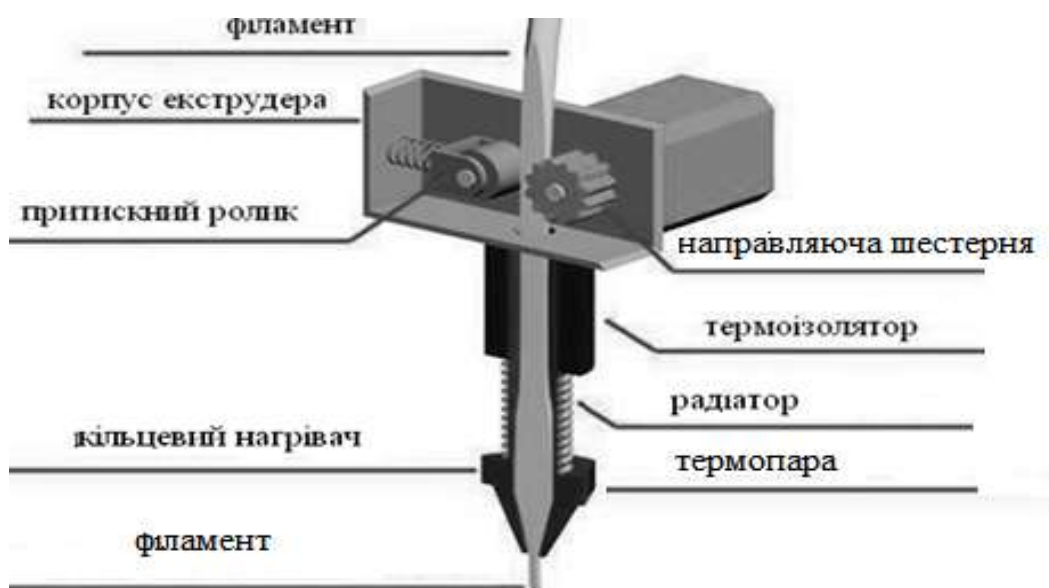
Як видно із рис.4.13 швидкість руху філаменту через екструдер, при рівності інших параметрів, суттєво впливає на температуру у зоні нагрівання. Те ж саме можна сказати про зміну температурних розподілів залежно від коефіцієнтів теплообміну в екструдері.

Криві 1,4 при $v = 6 \times 10^{-5} \frac{м}{с}$, криві 2,5 при $v = 6.5 \times 10^{-5} \frac{м}{с}$, криві 3,6 при $v = 7 \times 10^{-4} \frac{м}{с}$ побудовані за розв'язками задачі (4.69)–(4.70).

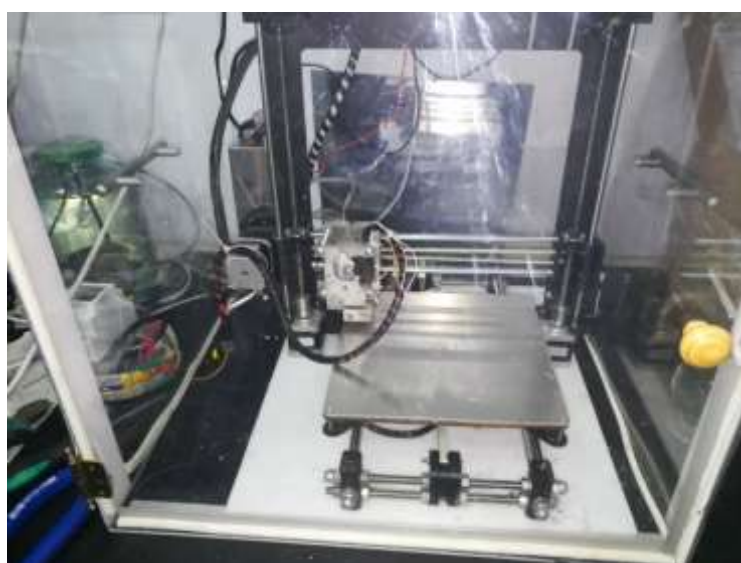
Розв'язок (4.72) доцільно використовувати при інженерних розрахунках нагрівника філаменту у зоні нагрівання та конструкції екструдера.

Для перевірки достовірності числових розрахунків температурних

розподілів отриманих за розв'язками задачі (4.69)–(4.70), (4.72) проведено порівняння експериментальних значень температури з розрахунковими. Температура зовнішньої поверхні екструдера вимірювалася за допомогою радіаційного пірометра типу [Benetech GM550](#), що дозволяє вимірювати температуру в межах -50°C – 550°C . Температура внутрішньої поверхні сопла екструдера вимірювалася за допомогою однієї із зачеканених термопар ТСП, ХК (Рис.4.14).



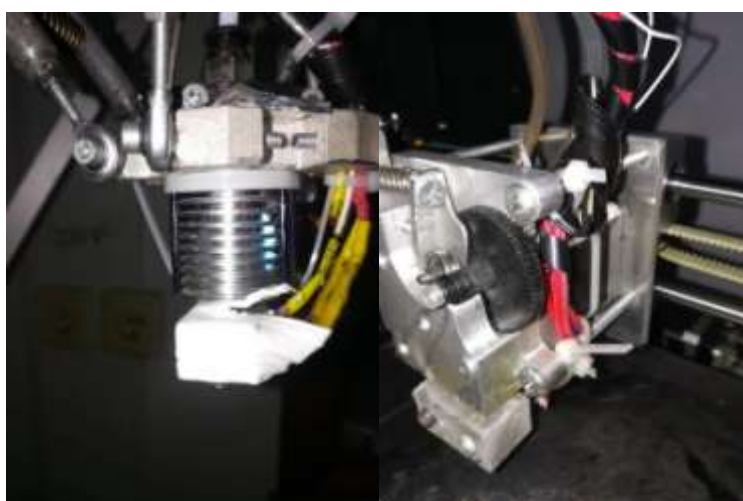
а)



б)



в)



г)

Рис.4.14. Схема експериментального 3-Д принтера з екструдером (а) та його технічне виконання (б) з високотемпературною експериментальною голівкою в), г)

Порівняльні значення числових розрахунків температур (4.69) – (4.70), рухомого з різними швидкостями PLA філамента, у зоні нагрівання, та результати вимірювання за допомогою радіаційного пірометра типу [Benetech GM550](#) наведені у Таблиці 4.1.

У математичних моделях реальних технологічних процесів досить часто температура на виході із зони нагрівання $u(l)$ невідома, тому для визначення температурного розподілу у зоні нагрівання необхідно її вимірювати пірометром і отримане значення підставляти у крайову умову.

Якщо це неможливо, то замість крайової умови необхідно залучати нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії зони нагрівання[11]. Це приводить до ускладнення розрахунків та уточнення математичної моделі.

Порівняльні значення температур отриманих експериментально і із розв'язків (4.69) –(4.70)

Таблиця 4.1.

№ контр. точки	Темпера тура нагрівни ка, $T_{нагр.} \text{ } K^0$	Розрахункові значення температури філамента у зоні нагрівння $T_{розр.} \text{ } K^0$		Експерем ентальні дані, К	Експерем ентальні дані, К	$\delta T =$ $= \frac{ \Delta T }{T_{roz}}$	$\delta T =$ $= \frac{ \Delta T }{T_{roz}}$
		$v[m/c]$		$v[m/c]$		$v[m/c]$	
		$60 \cdot 10^{-3}$	$70 \cdot 10^{-3}$	$60 \cdot 10^{-3}$	$70 \cdot 10^{-3}$	$60 \cdot 10^{-3}$	$70 \cdot 10^{-3}$
1 Z=0.00 2	700	304	304	306	305	0,6%	0,3
2 Z=0.00 5	700	311	309	315	313	1%	0,6
3 Z=0.00 8	700	321	318	323	322	0,6%	1%

При щільному тепловому контакті шарів (рухомий філамент, нагрівник) у математичній моделі з'являється умова спряження четвертого роду, яка складається з рівності теплових потоків та рівності температур на межі шарів щільного теплового контакту. Тут умовою для визначення теплових потоків при щільному контакті є умова теплового балансу одного із сусідніх шарів, для якого відомі граничні умови

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Omega_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Omega_{i+1}}, \quad (4.88)$$

$$\lambda_i \operatorname{div}(\operatorname{gradu}) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \pm w(P, u, t) = 0, \quad (4.89)$$

де $P, c_i, \rho_i, w(P, u, t)$ – координати точок області, теплоємність, щільність

матеріалу шару та щільність джерел тепла, що діють у шарі.

Для дослідження температурного поля філамента достатньо знати усереднений температурний розподіл нагрівника (рис.4.15) [296].

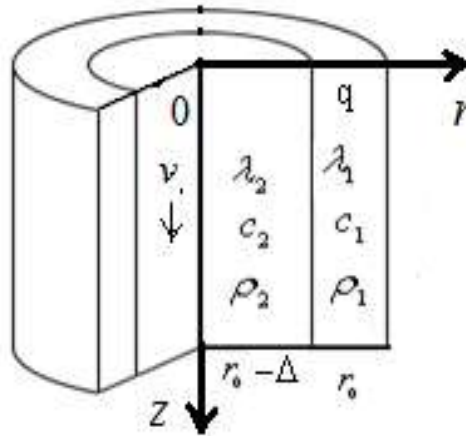


Рис.4.15. Система: рухомий філамент– нагрівник

Для визначення температурного розподілу $T(r, z)$ у системі нагрівник – рухомий філамент приходимо до наступної крайової задачі на спряження в області $\Omega = \{(r, z) | 0 < r < r_0, 0 < z < l\}$ [283–287]

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - v c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial z} = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0 - \Delta, v \neq 0, \\ -\frac{I^2 \rho_0}{S^2} = q, & r_0 - \Delta \leq r < r_0, v = 0, \end{cases} \quad (4.90)$$

$$0 < z < l,$$

$$T_{1,2}(0, 0) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l) = T_l, \quad (4.91)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z)}{\partial r}, \quad (4.92)$$

$$T_1(r_0 - \Delta - 0, z) = T_2(r_0 - \Delta + 0, z), \quad (4.93)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_2(r_0, z)}{\partial r} = -\alpha(T - T_c), \quad \frac{\partial T_1(0, z)}{\partial r} = 0, \quad (4.94)$$

де $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, ρ_0 – відповідні теплофізичні характеристики та параметри нагрівника та філамента.

Для дослідження температурного поля рухомого філамента достатньо знати усереднений температурний розподіл зовнішньої поверхні нагрівника.

$$\begin{aligned} \lambda_2 r \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r_0-\Delta+0}^{r=r_0} &= -r_0 (\alpha(T_2 - T_c)) - \lambda_2 (r_0 - \Delta) \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta, z)}{\partial r}, \\ \lambda_2 (r_0 - \Delta) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r_0-\Delta+0} &= \frac{\lambda_2 S}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{vc_2 \rho_2 S}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{I^2 \rho_0 (2r_0 \Delta - \Delta^2)}{2S^2} + \\ &\quad + r_0 \alpha(u - T_c), \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r_0-\Delta+0} &= \frac{\lambda_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{vc_2 \rho_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{I^2 \rho_0 (2r_0 \Delta - \Delta^2)}{2(r_0 - \Delta)S^2} + \\ &\quad + \frac{r_0 \alpha(u - T_c)}{(r_0 - \Delta)}. \end{aligned}$$

Застосувавши усереднення за радіусом і прийнявши, що $u(r, z) \approx T_1(r_0 - \Delta - 0, z) \approx T_2(r_0 - \Delta + 0, z)$, крайову умову на границі внутрішнього і зовнішнього циліндрів з урахуванням теплового потоку, та умови спряження (4.92) – (4.93) запишемо у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r_0-\Delta-0} = \frac{\lambda_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{vc_2 \rho_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{I^2 \rho_0 (2r_0 \Delta - \Delta^2)}{2(r_0 - \Delta)S^2} + \frac{r_0 \alpha(u - T_c)}{(r_0 - \Delta)}.$$

У такий спосіб визначення температурного розподілу у зоні нагрівання рухомого філамента зводиться до крайової задачі з умовою, що включає поряд з нормальною похідною дотичні похідні за напрямками

$$\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (4.95)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad 0 < z < l,$$

$$T(0,0) = T_0, \quad T(r,l) = T_l, \quad (4.96)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_0-\Delta+0} = \frac{\lambda_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\nu c_2 \rho_2 S}{2(r_0 - \Delta)} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{I^2 \rho_0 (2r_0 \Delta - \Delta^2)}{2(r_0 - \Delta) S^2} + \frac{r_0 \alpha (u - T_c)}{(r_0 - \Delta)}, \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4.98)$$

Якщо і у рухомому філаменті температурним розподілом уздовж радіуса можна знехтувати, то провівши усереднення

$$w(z) = \frac{2}{S_1} \int_0^{r_0-\Delta+0} T(r,z) r dr, \quad S_1 = \pi(r_0 - \Delta)^2$$

приходимо до крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{\nu(c_1 \rho_1 S + c_2 \rho_2 S_1)}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1} \frac{dw}{dz} + \frac{2r_0 \alpha}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1} w = \frac{2r_0 \alpha T_c}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1} - \frac{I^2 \rho (2r_0 \Delta - \Delta^2)}{S^2 (\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)},$$

$$w(0) = T_0, \quad w(l) = T_l.$$

Після виконання дій та перегрупування доданків маємо

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - A \frac{dw}{dz} + Bw = C, \quad 0 < z < l, \quad (4.99)$$

$$w(0) = T_0, \quad w(l) = T_l, \quad (4.100)$$

де

$$A = \frac{v(c_1\rho_1 S + c_2\rho_2 S_1)}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1}, \quad B = \frac{2r_0\alpha}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1},$$

$$C = \frac{2r_0\alpha T_c}{\lambda_1 S + \lambda_2 S_1} - \frac{I^2\rho_0(2r_0\Delta - \Delta^2)}{S^2(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)}.$$

Якщо покласти $\frac{d^2 w}{dz^2} = 0, 0 < z < l$, будемо мати задачу Коші, яку можна розглядати як тестову для тестування алгоритму числового розв'язання

$$a^2 \frac{dw}{dz} - Aw = -B, \quad 0 < z < l, \quad w(0) = T_0. \quad (4.101)$$

Її розв'язок має вигляд

$$w(z) = \frac{AT_0 - B}{A} e^{\frac{A}{a^2}z} + \frac{B}{A}. \quad (4.102)$$

Параметр нагрівника I вибираємо із умови $\frac{I^2\rho_0}{S} > 2r_0\alpha T_c$.

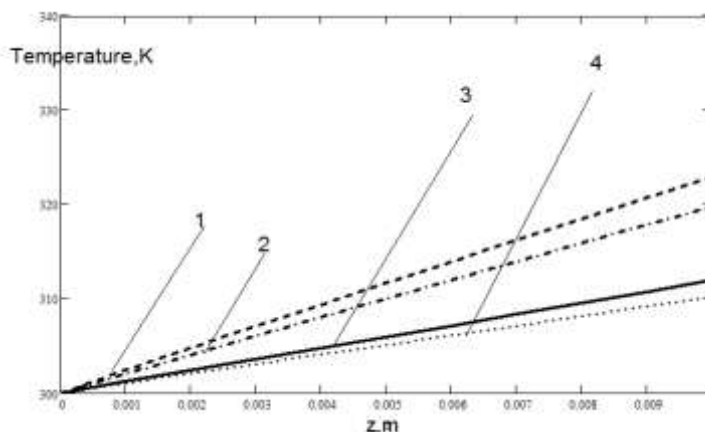


Рис. 4.16. Температурні розподіли у зоні нагрівання рухомого, з різними швидкостями PLA, філамента, побудовані за розв'язками (4.72) та (4.102).

При проведенні числового експерименту були взяті наступні параметри філамента PLA, екструдера та процесу теплообміну:

$$\alpha = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}, \quad T_0 = 300\text{К}, \quad T_c = 700\text{К} \quad \rho_1 = 1370 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \lambda_1 = 0.057 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}},$$

$$c_1 = 440 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \rho_2 = 7900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \lambda_2 = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_2 = 450 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad T_c = 618\text{К},$$

$$\alpha = 0,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}, \quad q = 54 \cdot 10^6 \text{ Дж}, \quad \Delta = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

На рис. 4.16 зображені температурні розподіли побудовані за розв'язком (4.72) криві 1–2 , за розв'язком (4.102) криві 3–4. Під час числового експерименту змінювалась швидкість руху філамента PLA радіусом $r_0 = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, з температурою розм'якшення $T_r = 323\text{К}$ через екструдер: криві 1 і 3 – $v = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, криві 2 і 4 – $v = 7 \times 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

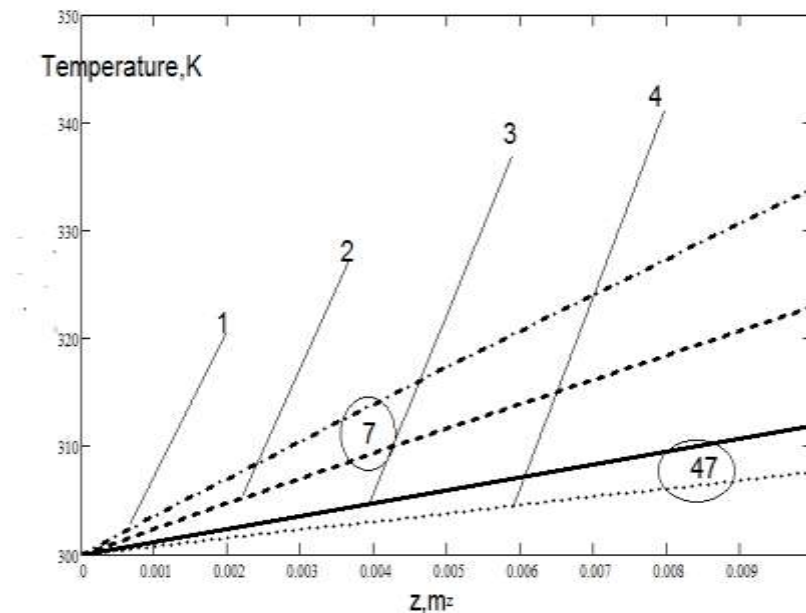


Рис. 4.17. Температурні розподіли у зоні нагрівання рухомого філамента побудовані за розв'язками (4.72), (4.102).

Таблиця порівняння розв'язків (4.72) та (4.102) при різних значеннях швидкості

Таблиця 4.2.

$\nu := 60 \cdot 10^{-3}$ Температурні розподіли отримані із розв'язку (4.72)	$\nu := 70 \cdot 10^{-3}$ Температурні розподіли отримані із розв'язку (4.72)	$\nu := 60 \cdot 10^{-3}$ Температурні розподіли отримані із розв'язку (4.102)	$\nu := 70 \cdot 10^{-3}$ Температурні розподіли отримані із розв'язку (4.102)
300	300	300	300
308.672	307.448	311.017	309.443
317.107	314.721	322.039	318.889
325.313	321.824	333.066	328.339
333.294	328.76	344.098	337.793
341.058	335.534	355.136	347.251
348.61	342.15	366.179	356.713
355.957	348.61	377.227	366.179
363.103	354.92	388.28	375.648
370.054	361.081	399.338	385.121
376.815	367.098	410.402	394.598
383.392	372.974	421.471	404.079
389.79	378.713	432.545	413.564
396.013	384.317	443.624	423.053
402.067	389.79	454.709	432.545
407.955	395.135	465.799	442.041
413.683	400.354	476.894	451.541
419.255	405.452	487.994	461.045
424.675	410.43	499.1	470.553
429.947	415.291	510.211	480.065
435.075	420.038	521.327	489.58
440.063	424.675	532.448	499.1
444.916	429.203	543.575	508.623
449.636	433.624	554.707	518.15
454.227	437.942	565.844	527.681
458.693	442.159	576.986	537.216

Під час числового експерименту були вибрані наступні параметри філамента та процесу нагрівання: температура розм'якшення $T_r = 323K$, різні

коефіцієнтом теплообміну: $\alpha = 10 \frac{Вт}{м^2 K}$ – криві 2 і 3, $\alpha = 15 \frac{Вт}{м^2 K}$ – криві 1 і 4

зони нагрівання філаменту **PLA**, що рухається через зону нагрівання із

швидкістю $v = 6 \times 10^{-3} \frac{M}{c}$.

Із таблиці 4.2 видно, що збільшення швидкості приводить до зменшення температури філамента у зоні нагрівання. Температурні розподіли отримані із розв'язку (4.102) дещо більші ніж температурні розподіли отримані із розв'язку (4.72) при одних і тих самих умовах проведення процесу.

Температурні розподіли отримані із (4.72) при збільшені швидкості зменшуються на 1-12 К, а розподіли отримані за розв'язками (4.102) при збільшені швидкості зменшуються на 3-40 К.

На рисунку 4.17 зображені температурні розподіли побудовані за розв'язком (4.72) – криві 1–2, за розв'язком (4.102) – криві 3–4. Розрахунки зроблені

при наступних параметрах $\rho_n = 1370 \frac{K\epsilon}{M^3}$, $\lambda = 0.057 \frac{Bm}{M \cdot K}$,

$c = 440 \frac{Дж}{K\epsilon \cdot K}$, $T_0 = 300K$, $r_0 = 2 \cdot 10^{-3} M$, $T_c = 618K$ $v = 60 \cdot 10^{-3} \frac{M}{c}$ з

температурою розм'якшення $T_r = 348K$

4.6 Висновки за розділом 4

Удосконалено математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багатошарових областях при щільному та нещільному контакті шарів які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів.

Побудовано фізичну модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двовалковому прокатному стані. Побудовано математичну модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю. У математичній моделі враховано різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхні валка зі стрічкою та

навколишнім середовищем. Температурне поле порожнистого валка прокатного стану розглянуто у вигляді початково крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними, нелінійними граничними умовами, що залежать від кута обертання валка навколо своєї осі. Розглянуто спрощену математичну модель у вигляді задачі визначення квазістаціонарного температурного поля, розв'язання якої зведено до розв'язання еквівалентного їй інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. За допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad побудовано температурний розподіл поверхні валка. Розроблено алгоритм розв'язання неоднорідної задачі та за допомогою GUI-додатка PDEToolbox Matlab побудовано температурний розподіл валка.

В роботі розглянуто методи побудови умов імпедансного типу для однорідного рівняння теплопровідності у двошаровій циліндричній області на межі розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками. Температурне поле циліндричного валка зі стійким покриттям розглянуто у вигляді температурного поля двошарового циліндра. Для визначення температурного розподілу у такому складеному циліндрі побудована математична модель у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності. Розглянуто спрощення математичної моделі, яке дозволило побудувати умову імпедансного типу на межі двох шарів циліндра при щільному контакті. Розглянута крайова задача для однорідного рівняння теплопровідності у двошаровій сферичній області. На основі рівняння теплового балансу елемента двошарової сферичної області та скориставшись теоремою Остроградського-Гауса та теоремою про середнє побудована умова імпедансного типу. Друга умова імпедансного типу отримана із використанням умови моменту теплового балансу у довільній точці сферичної області.

Побудована математична модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у двошаровому контейнері циліндричної форми. Для визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі

отримана гранична умова імпедансного типу. Запропонована математична модель та алгоритми розв'язання задачі з достатньою точністю описують тепловий процес під час спікання виробів у контейнері.

Побудована математична модель температурного поля дроту(стренги) із полімерного матеріалу, що розігрівається в екструдері до температури розм'якшення під час адитивного друку тривимірних деталей або їх фрагментів згідно технології FDM (fused deposition modeling). Розігріта до температури розм'якшення стренга, дріт або стрічка з полімеру видавлюється на нагріту поверхню з поступовим нашаруванням матеріалу, створюючи готову деталь. Побудована математична модель температурного поля складної системи: екструдер, нагрівник, полімерна нитка представлена у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності з додаванням відповідних крайових умов в рухомому циліндрі, що розігрівається в обмеженій області – екструдері зовнішніми джерелами тепла. Спрощена задача розв'язана аналітичним методом, що дозволило визначити основні параметри керування температурним полем, такі як швидкість руху дроту, стренги через екструдер, його геометричні розміри, щільність джерел тепла та інші параметри. Шляхом зведення крайової задачі у неперервній області до нелінійного рівняння типу Гаммерштейна розв'язана нелінійна крайова задача та визначено температуру дроту, стренги на виході із екструдера. Побудовані температурні розподіли дроту з полімерного матеріалу в екструдері та на виході з нього для різних умов керування процесом адитивного друку деталей. Проведені числові експерименти та побудовані графіки температурних розподілів.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [4, 5, 14, 21, 35–36, 39,42, 46].

РОЗДІЛ 5.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

Побудовані математичні моделі теплових процесів, що протікають у складних системах (електричних машинах), які на відміну від існуючих математичних моделей враховують характер теплового обміну на межі розділу шарів системи та дозволяють розраховувати температуру окремих частин складної області. Запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багат шаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв'язання задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами.

5.1 Теплообмін у багат шаровому циліндрі з шарами складної форми

У задачах математичного моделювання теплових процесів у складних системах – електричній машині виникає ряд проблем пов'язаних з нелінійністю задач, складністю областей дослідження і складністю граничних умов на їх межах, неоднорідністю фізичних середовищ, що обмежують області дослідження.

Розв'язання багатовимірних нелінійних нестационарних задач для областей, що мають складну форму, до появи швидкодіючих ЕОМ, було практично неможливим. Для лінійних і деяких нелінійних задач з лінійними граничними умовами застосовуються аналітичні методи (методи Фур'є, інтегральних перетворень, теплових потенціалів, конформних відображень, різні методи лінеаризації задачі). Можливості цих методів вимагають від дослідників спрощення вихідних задач теплообміну до такого рівня, щоб

розв'язок задачі зміг дати практичні результати.

Важливою перевагою аналітичних методів розв'язання задач теплообміну є те, що у них залежність від параметрів можна прослідкувати в явному вигляді. Аналітичні розв'язки допомагають з усього різноманіття критеріїв виділити визначальні. Це значно полегшує постановку фізичного експерименту. Точні аналітичні розв'язки часто виконують роль розв'язків – еталонів і служать тестовими задачами для перевірки адекватності більш складних нелінійних моделей.

Створення швидкодіючих ЕОМ та методів комп'ютерної математики розв'язання нелінійних задач привело до розробки нових числових методів дослідження складних задач теплообміну, зокрема скінченно-різницевих методів, скінченних елементів, елементарних балансів та ін.[145–147].

У порівнянні з аналітичними методами, числові методи дали можливість отримати повний кількісний опис теплового процесу у конструкціях складної форми і можливість використовувати складні нелінійні математичні моделі, які більш точно відображають досліджувані теплові процеси у широкій області зміни геометричних і фізичних параметрів. Числові методи з використанням сучасних ЕОМ дозволили проводити математичне прогнозування теплових процесів у досить складних фізичних об'єктах, зокрема у сучасних електричних машинах.

У другій половині 20-го століття розпочалося стрімке зростання електромашинобудування, яке було пов'язане з появою мініатюрних електричних машин для космічної галузі, літакобудування та для електромобілів. З точки зору математичного моделювання, електричну машину можна розглядати як складну електромеханічну систему. Активними частинами будь-якої електричної машини є магнітопровід і обмотки. Всі інші частини – конструктивні, що забезпечують необхідну жорсткість, міцність, можливість обертання, охолодження. При цьому важливу роль у їх надійній роботі відіграє діапазон робочих температур.

Не зважаючи на різноманітність типів електричних машин вони мають

багато спільних структурних елементів: дріт з малим електричним опором, ізоляційний матеріал з високими діелектричними властивостями, магнітопроводи з анізотропними властивостями в ортогональних напрямках. Усе це дозволяє будувати математичні моделі електромагнітних і теплових процесів у електричній машині.

Нами на прикладі математичної моделі теплового процесу у найпростішій електричній машині розглянуто метод дослідження температурного поля у тришаровому циліндрі.

Визначення тривимірних температурних розподілів, що породжуються дією електромагнітного поля у електричних машинах є надзвичайно складною задачею математичного моделювання у складних електромеханічних системах [19, 24–25, 29–31, 33, 37]. Електромагнітні поля у таких системах описуються моделями, що містять систему рівнянь Максвела, рівняння нерозривності заряду та закон Ома [288–292]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{\kappa} \vec{j} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho_e, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma_e \vec{E}. \end{aligned}$$

Наявність полів і струмів у електричній машині спонукає виділення джоулевого тепла у підобластях, де протікає електричний струм. Тому до рівнянь Максвела у математичну модель, що дозволяє визначити температурні розподіли у обмотках та між ними, додається рівняння енергії без якого математична модель не буде узгодженою. Крім того електропровідність σ_e обмоток електричної машини залежить від температури. Для визначення внутрішньої енергії у електричній машині залучають рівняння теплопровідності у вигляді

$$\rho_n \frac{\partial e}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) + W(P, t, T),$$

де λ, ρ_n – відповідно коефіцієнт теплопровідності і щільність матеріалів обмоток, $e = \int_{\Omega} c_v dT$ – питома внутрішня енергія, c_v – узагальнена теплоємність середовища, $W(P, t, T)$ – щільність джерел тепла в обмотках електричної машини. У багатьох моделях у системі рівнянь Максвела нехтують

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{\kappa} \vec{j} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

струмом зміщення $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ у порівнянні зі струмом провідності, що породжується щільністю $\vec{j}$ електричного струму, $\vec{E}, \vec{H}$ – напруженість електричного та магнітного полів в обмотках машини, κ – швидкість світла. Таке припущення правомірне оскільки струм зміщення $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ у електричних машинах значно менше впливає на температурний розподіл у порівнянні зі струмом провідності $\vec{j}$. Також досить часто нехтують теплом Пельтьє, що виникає у рухомих контактах.

Після прийняття вищезазначених допущень система рівнянь Максвела може бути записана у квазістаціонарному наближенні в області Ω_t у наступному безрозмірному вигляді

$$\text{rot} \vec{H} = 4\pi \sigma_e \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{j} = \sigma_e \vec{E} = W(P, t),$$

де $\vec{E}, \sigma_e$ – напруженість електричного поля та електропровідність матеріалу відповідно.

Проектування електричних машин не вимагає ретельної деталізації температурного поля, це приводить до певного спрощення математичної моделі доступної для дослідження. В основі спрощення математичної моделі лежать уявлення про структуру і властивості температурного поля, геометричні розміри різних частин електричної машини.

Нехтування струмом зміщення $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ дозволяє суттєво спростити математичну модель змінивши систему рівнянь та перетворивши її з гіперболічної у параболічну. При цьому модель суттєво спрощується за рахунок зменшення кількості крайових умов.

Змінний електричний струм, що протікає вздовж обмоток електричної машини виділяє енергію як при прямому, так і при зворотному напрямках струму. Крім того, електрична енергія змінного струму спричиняє зміну внутрішньої енергії провідників. За рахунок енергії змінного магнітного поля та перемагнічування нагріваються осердя котушок вихровими струмами. Електрична та магнітна енергії спричиняє підвищення температури конструктивних елементів. Її ще називають активною енергією, а щільність активних джерел тепла при цьому може бути визначена за формулою

$$W = j \times U \times R / Z, \quad R = \frac{\rho_0 L (1 + \beta T)}{s}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

де s, ρ_0, X_L, U – фізичні параметри електромеханічної системи. Щільність активних джерел тепла визначається за формулою $W = \frac{j \times U \cos \varphi}{s}$.

Необхідність визначення тривимірних температурних розподілів, що породжуються дією електромагнітного поля у електричних машинах є надзвичайно складною задачею математичного моделювання та математичної фізики. Електричні машини є складними електромеханічними

системами, що містять кілька елементів, одні з яких є провідниками електричного струму, а інші – діелектриками [288–292]. Активними частинами у такій системі є магнітопровід і обмотки – провідники електричного струму. Всі інші частини – конструкційні, що забезпечують необхідну жорсткість, міцність, можливість обертання, охолодження і т. п.

Основними елементами будь-якої електричної машини є статор і ротор, які під час роботи переміщуються в просторі, один відносно одного. При підведенні електричного струму до цих елементів відбувається їх розігрів за рахунок виділення джоулевого тепла і механічної енергії, що виникає під час тертя рухомих елементів. При цьому, як відомо, відбувається перерозподіл енергії і перетворення її в теплову. Теплова енергія частково витрачається на підвищення температури ротора і статора, а частково віддається в навколишнє середовище [288–292].

При зростанні температури у струмопровідних шарах, за рахунок підвищення температури провідників, відбувається прискорене старіння електроізоляції, зміна питомого опору, а також зменшення механічної міцності провідників. Так, наприклад, при тривалому перевищенні температури, щодо номінальної всього лише на 8°K – 10°K для даного класу електроізоляції, скорочує термін служби останньої в 2 рази [288–292]. При збільшенні температури міді зі 100°C до 250°C механічна міцність знижується на 40%. Слід мати на увазі, що при короткому замиканні, коли температура може досягати граничних значень (200 – 300°C), у струмопровідних шарах починають діяти значні електродинамічні сили. Робота контактних з'єднань також сильно залежить від температури. Нагрівання токопровідних частин та ізоляції електричної машини в значній мірі визначає її надійність. Великий інтерес представляє визначення кількості тепла, що виділяється в електричній машині за рахунок змінного електромагнітного поля, що виділяється, джоулевого тепла зокрема.

Математичні моделі, що описують електромагнітні поля, містять систему рівнянь Максвелла, рівняння нерозривності заряду та закон Ома.

Струми, що протікають в обмотках електричної машини спонукають виділення джоулевого тепла у підобластях, де протікає електричний струм. Тому, до рівнянь Максвела у математичну модель для визначення температурних розподілів в шарах, де діють внутрішні джерела тепла (протікає електричний струм) та між ними додається рівняння теплопровідності, без якого математична модель не буде узгодженою. Крім того, в таких шарах внутрішні джерела тепла (протікає електричний струм) залежать від температури, тому рівняння теплопровідності, що описує таке температурне поле буде нелінійним.

Побудова математичної моделі у електричній машині, як у складній системі, дозволяє дослідити електромагнітні і теплові процеси в електричній машині.

Визначення тривимірних температурних розподілів, що породжуються дією електромагнітного поля у електричних машинах є надзвичайно складними задачами математичного моделювання та математичної фізики [19, 24–25, 29–31]. Складність побудови математичної моделі електромагнітних і теплових процесів тут полягає в тому, що область дії електричного струму є складною з геометричної точки зору, під час протікання електричного струму в якій виділяється не лише джоулеве тепло, а і тепло, що виділяється під час перехідних процесів у рухомих електричних контактах.

Математичні моделі, які дозволяють досліджувати електромагнітні та теплові поля у складній системі якою є електрична машина можна віднести до моделей про процеси, що відбуваються у складній області [19, 24–25, 29–31, 33, 37, 58].

Розглянемо математичну модель температурного поля у тришаровому циліндрі, у одному з шарів якого діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших, що мають різні теплофізичні властивості тепло передається теплопровідністю. Внутрішні джерела тепла представляють собою джоулеве тепло, що виділяється у одному із шарів. Для прикладу розглянемо

температурне поле електричної машини, що складається з двошарового ротора, в якому відсутні джерела тепла та статора з композитного матеріалу алюміній-залізо. З геометричної точки зору, алюмінієвий статор вздовж якого протікає електричний струм та відбувається виділення джоулевого тепла, у радіальному перерізі має вигляд « $2n$ пелюсткової троянди» (Рис.5.1).

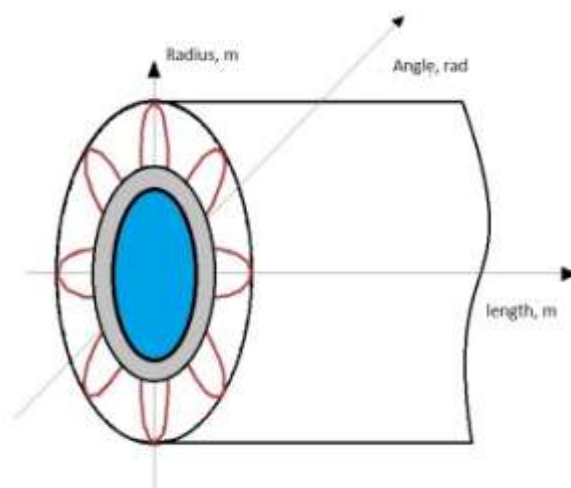


Рис 5.1. Область дослідження

Тепло від нього передається теплопровідністю до залізної складової, а далі конвективно або теплопровідністю до нерухомого ротора та виводиться назовні. Математична модель будується у циліндричній системі координат. Визначення температурного розподілу $T(r, z, \varphi, t)$ у тришаровому циліндрі, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішні шари тепло передається від зовнішнього теплопровідністю має вигляд наступної крайової задачі на спряження в області

$$\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < t < t_0\}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \\ & = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{S^2}, & r_1 \leq r < r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi, n = 1, 2, \dots \\ 0, & 0 < r < r_0, r_0 < r < r_1, r > r_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$T_i(r, z, \varphi, 0) = T_0, \quad (5.2)$$

$$T_i(r, 0, \varphi, t) = T_0, \quad T_i(r, l, \varphi, t) = T_0, \quad (5.3)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

$$\lambda_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \left[-\alpha (T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4) \right], \quad (5.4)$$

$$T_i(r_{i-0}, z, \varphi, t) = T_i(r_{i+0}, z, \varphi, t), \quad i = 1 \dots 3, \quad (5.5)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=r_i-0} = \lambda_{i+1} \left. \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \right|_{r=r_i+0}, \quad i = 1 \dots 3, \quad (5.6)$$

де α_i, I, ρ_0 – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір провідників струму. Сумарна площа перетинів алюмінієвої складової статора S

$$S = \{r_1 \leq r \leq r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi\}, n = 1, 2 \dots$$

$$S = \pi r_2^2 - \frac{\pi r_1^2}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Якщо досліджується стаціонарне температурне поле перерізу, що перпендикулярний вісі Oz , то похідною за часом і координатою z можна знехтувати поклавши

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta z}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Щоб знайти аналітичний розв'язок, проведемо спрощення задачі на нескінченно малому проміжку Δz .

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4},$$

$$\lambda \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr + \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{r_0} r T dr + \lambda \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_0^{r_0} T dr + \frac{I^2 \rho_0}{2\pi^2 r_0^2} = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2\alpha}{r_0} u = - \left(\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha u_c}{r_0} \right), \quad (5.7)$$

$$u(0, \varphi) = T_0, \quad u(l, \varphi) = T_0.$$

Застосувавши дискретизацію за змінною z , увівши сітку $z = z_k = k\tau_k, k = 0, \dots, N$ з достатньо малим кроком τ , замінимо похідну по z скінченно-різницеvim аналогом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\tau^2} [u(z_{k+1}, \varphi) - 2u(z_k, \varphi) + u(z_{k-1}, \varphi)].$$

Тоді відносно наближених значень $u(z, \varphi) \approx u(z_k, \varphi)$ отримаємо множину крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} + \frac{r_0}{\tau^2} [u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] - \frac{2\alpha}{\lambda} u_k = - \left(\frac{I^2 \rho_0}{\lambda \pi^2 r_0^3} + \frac{2\alpha u_c}{\lambda} \right), \quad (5.8)$$

$$k = \overline{0, N}, \quad u_0 = T_0, u_{N+1} = T_0$$

з умовами

$$u_k(\varphi_1) = T_1, \quad u_k(\varphi_2) = T_2.$$

Розв'язок системи дорівнює сумі частинного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} + \frac{r_0}{\tau^2} [u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] - \frac{2\alpha}{\lambda} u_k = 0, \quad (5.9)$$

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0, \dots k = \overline{0, N}.$$

Частинний розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$u_k(\varphi) = \gamma(k) \nu(\varphi).$$

Підставивши в (5.9) будемо мати

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \nu(\varphi)}{\partial \varphi^2} \gamma(k) + \\ & + \frac{r_0}{\tau^2} \nu(\varphi) \left[\gamma(k+1) - \left(2 + \frac{2\alpha\tau^2}{\lambda r_0} \right) \gamma(k) + \gamma(k-1) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$k = \overline{0, N},$$

$$\gamma(0) = \gamma(N+1) = 0$$

або

$$\frac{\nu''(\varphi)}{\nu(\varphi)} = \frac{r_0 \left(\gamma(k+1) - \left(2 + \frac{2\alpha\tau^2}{\lambda r_0} \right) \gamma(k) + \gamma(k-1) \right)}{\tau^2 \gamma(k)} = \delta^2 = \text{const}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (5.11)$$

Отримаємо однорідне різницеве рівняння

$$\gamma(k+1) - \left(2 + \frac{2\alpha\tau^2}{\lambda r_0} - \frac{\delta^2 \tau^2}{r_0} \right) \gamma(k) + \gamma(k-1) = 0$$

з умовами

$$\gamma(0) = \gamma(N+1) = 0.$$

Загальний розв'язок різницевого рівняння має вигляд

$$\gamma(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k,$$

де C_i – довільні сталі корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{2\alpha\tau^2}{\lambda r_0} - \frac{\delta^2\tau^2}{r_0} \right) \lambda + 1 = 0.$$

Із граничних умов маємо

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{N+1} = 1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[N+1]{1} = e^{\frac{2\pi is}{N+1}}, s = \overline{0, N}.$$

Будемо шукати невідому сталу

$$2 + \frac{2\alpha\tau^2}{\lambda r_0} - \frac{\delta^2\tau^2}{r_0} = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\frac{2\pi is}{N+1}} + e^{-\frac{2\pi is}{N+1}} = 2 \cos \frac{\pi s}{N+1}.$$

Із (5.11) маємо

$$v''(\varphi) - \delta^2 v(\varphi) = 0, \quad v_s(\varphi) = A_s e^{\delta_s \varphi} + B_s e^{-\delta_s \varphi},$$

$$u_{k,s}(\varphi) = C \sin \frac{\pi s(z_k - z_0)}{l} [A_s e^{\delta_s \varphi} + B_s e^{-\delta_s \varphi}],$$

$$s = 0, \dots, N,$$

$$u_k(\varphi) = \sum_{s=1}^N C \sin \frac{\pi s(z_k - z_0)}{l} [A_s e^{\delta_s \varphi} + B_s e^{-\delta_s \varphi}].$$

Далі знаходимо частинний розв'язок системи (5.8) методом варіації довільних сталих. Знайшовши їх визначаємо загальний розв'язок системи (5.8).

5.2 Математична модель теплового процесу радіального перерізу багат шарової області

Вимірювання температури обмоток електричної машини, сталевго статора, корпусу і т.д. є одним з необхідних факторів діагностики стану машини, надійності та терміну експлуатації. На стадії розробки електричної машини або під час її модернізації (зміни окремих вузлів), необхідна інформація про те, як ці зміни вплинуть на температурний стан його обмоток.

Це можливо лише під час попереднього дослідження математичної моделі або при проведенні натурних експериментів. У роботі побудована математична модель температурного розподілу радіального розрізу найпростішої електричної машини. Математична модель для дослідження теплового процесу нормального перерізу електричної машини розглядається у вигляді двовимірної задачі на спряження для рівняння теплопровідності. Така модель дозволяє враховувати неоднорідні граничні умови теплообміну та умови спряження.

Розрахунок розподілу температури статора і ротора як і електричної машини в цілому представляє собою складну задачу, оскільки вона складається із вузлів і елементів з різними теплофізичними характеристиками і має складну геометричну конфігурацію, містить нерівномірно розподілені джерела та стоки тепла. Задача дослідження теплового процесу в електричній машині розглядається у вигляді математичної моделі температурного поля радіального перерізу машини, яка зводиться до двовимірної задачі на спряження в полярній системі координат та дозволяє враховувати неоднорідні граничні умови теплообміну

та умови спряження. В різних частинах електричної машини формуються різні умови теплової взаємодії в залежності від умов виділення теплової енергії і умов відведення тепла (теплопровідність, конвекція, променевий теплообмін).

Крім того для підвищення інтенсивності відводу тепла від нагрітих ділянок електричної машини використовують різні системи охолодження. Система охолодження електричної машини може бути природною або примусовою. Її потрібно враховувати при формулюванні граничних умов у математичній моделі. У математичних моделях теплообміну у багат шарових областях часто приходиться розв'язувати задачі з граничними умовами третього роду [19, 24–25, 29–31, 33, 37, 58]. Якщо тіло, що обмежене областю Ω має ізотропні теплофізичні властивості, а його поверхня $\bar{\Omega} \in \Omega$ поглинає або випромінює тепло за законом Ньютона або Стефана-Больцмана, гранична умова, що описує таку теплову взаємодію між тілом і оточуючим його середовищем має вигляд

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}} = \pm \left[\alpha (u_c - u) + \varepsilon \sigma (u_c^4 - u^4) \right]. \quad (5.12)$$

У багат шарових областях з різними теплофізичними характеристиками шарів ця умова може змінюватися і приймати більш складний вигляд [45, 64, 65]. Тут можна розглядати два види контакту між шарами – щільний і нещільний тепловий контакт [45]. При нещільному тепловому контакті шарів форма умови третього роду не змінюється і приймає вигляд (5.12)

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\bar{\Omega}_i} = \pm \left[\alpha_i (u_{c_i} - u) + \varepsilon_i \sigma (u_{c_i}^4 - u^4) \right].$$

При щільному тепловому контакті шарів форма умови третього роду змінюється. З'являється умова четвертого роду – умова спряження, яка складається з рівності теплових потоків та рівності температур на межі областей щільного теплового контакту. Умовою для визначення теплових потоків при щільному контакті є умова теплового балансу одного із сусідніх шарів

$$\lambda_i \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \pm w(P, u, t) = 0, \quad (5.13)$$

де $c_i, \rho_i, w(P, u, t)$ – теплоємність, щільність матеріалу шару та щільність джерел тепла, що діють у шарі, а також умова спряження 4-го роду

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\overline{\Omega_i}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\overline{\Omega_{i+1}}}.$$

Розглянемо математичку модель температурного поля радіального розрізу тришарового циліндра, де у одному з шарів діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших, що мають різні теплофізичні властивості тепло передається теплопровідністю. Внутрішні джерела тепла представляють собою джоулеве тепло, що виділяється у шарі, i , з геометричної точки зору, мають вигляд криволінійної трапеції. Така модель дозволяє досліджувати температурне поле електричної машини, що складається з двошарового ротора, в якому відсутні джерела тепла та статора з композитного матеріалу, в якому діють внутрішні джерела тепла. З фізичної точки зору, статор включає в себе складовою частиною алюмінієвий або мідний провідник вздовж якого протікає електричний струм і відбувається виділення джоулевого тепла і непровідний композит. В радіальному перерізі він має вигляд «4-пелюсткової троянди» (Рис.5.2).

У математичній моделі температурного поля припускаємо, що температура навколишнього середовища стала, теплофізичні характеристики матеріалів також сталі. Уважаємо, що на межі внутрішнього та зовнішнього циліндрів має місце ідеальний тепловий контакт.

На рисунку 5.2 зображено тришарова область у вигляді перетину 3 концентричних кругів та чотирьохпелюсткової троянди, у вигляді області $\Omega = \{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4\} = \{0 < r < r_3, r = r_3 \cos 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

В області Ω_3 діють внутрішні джерела тепла.

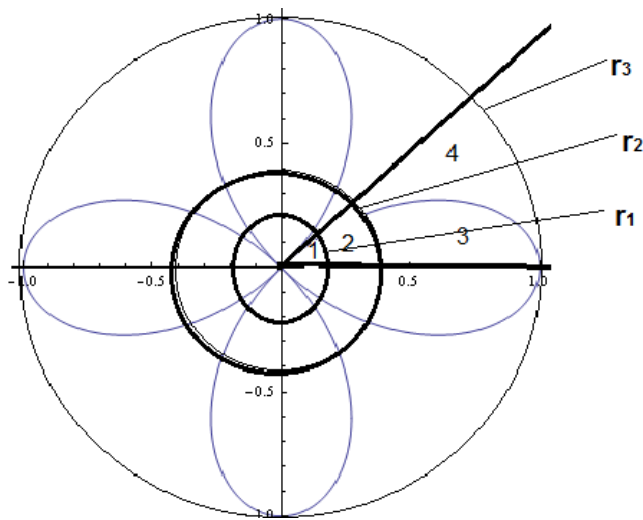


Рис 5.2. Схема радіального перерізу електричної машини

Визначення температурного розподілу $T(r, z, \varphi)$ у тришаровому циліндрі, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішніх шарах тепло передається від зовнішнього теплопровідністю має вигляд наступної крайової задачі на спряження в області

$$\Omega: \{0 < r < r_3, r = r_3 \cos 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, & r_2 \leq r < r_3 \cos 2n, \alpha_2 < \varphi < \alpha_3, n=1, 2, \dots \\ 0, & 0 < r < r_1, r_1 < r < r_2, (0 < \varphi < \alpha_2) \quad r_2 < r < r_3, (\alpha_2 < \varphi < \alpha_3) \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\lambda_3 T_{3r}(r_3, \varphi) = -\alpha(T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma(T_3^4 - T_c^4), \quad (5.15)$$

$$T_r(r_i - 0, \varphi) = T_r(r_i + 0, \varphi), \quad (5.16)$$

$$T_i(r_i - 0, \varphi) = T_i(r_i + 0, \varphi), \quad i = 1 \dots 3, \quad (5.17)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_3 \cos 2\varphi - 0} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_3 \cos 2\varphi + 0}, \quad (5.18)$$

λ_i – коефіцієнти теплопровідності ротора, заліза статора, провідників електричного струму та ізоляції відповідно, c_i, ρ_i , – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів частин електричної машини, α, I, ρ_0 – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір провідників струму. Тут S – сумарна площа перетинів алюмінієвої складової статора.

Значення α для електричних машин з повітряним охолодженням лежить у межах $8 - 20 [Bm / m^2 K]$ при природній конвекції і при примусовій від 10 до декількох сотень [182]. Коефіцієнт тепловіддачі має велике значення при розрахунках теплових полів.

Розглянемо одну восьму частину перерізу розглядуваної області

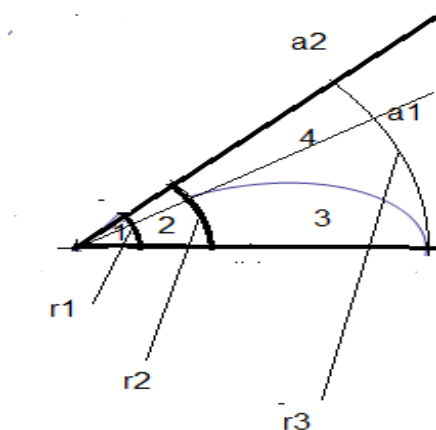


Рис 5.3. Одна восьма частина області Ω

Розіб'ємо цю область на чотири підобласті [11]: 1-ша частина це круговий сектор, 2-га частина кільцевий сектор, 3-тя частина криволінійна трапеція, 4-та частина кільцевий сектор. У кожній з підобластей запишемо математичну модель. Розглянемо алгоритм розв'язання задачі

$$1\text{-ша частина } G = \{(0 < r < r_1), (0 < \varphi < \alpha_2)\}$$

$$\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \lambda_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5.19)$$

$$0 < \varphi < \alpha_2, 0 \leq r < r_1$$

$$T_i(r, 0) = T_i(r, \alpha_1) = 0, \quad (5.20)$$

$$T_1(r_{1-0}, \varphi) = T_1(r_{1+0}, \varphi), \quad (5.21)$$

2-га частина $G = \{(r_1 < r < r_2), (0 < \varphi < \alpha_2)\}$

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5.22)$$

$$r_1 < r < r_2 \quad 0 < \varphi < \alpha_2 < 2\pi$$

$$T_2(r, 0) = T_2(r, \alpha_1) = 0, \quad (5.23)$$

$$T_i(r_{i-0}, \varphi) = T_i(r_{i+0}, \varphi), \quad i = 1, 2 \quad (5.24)$$

3-тя частина $G = \{(0 < \alpha < \alpha_2), (0 < r < r_3 \cos 2\varphi) \mid r = r_3 \cos 2\varphi\}$,

$$\lambda_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + \lambda_3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_3}{\partial \varphi^2} = -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, \quad r_2 \leq r < \cos 2n\varphi, n = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

$$T_3(r_3 \cos 2(\alpha_1 - 0), \varphi) = T_3(r_3 \cos 2(\alpha_1 + 0), \varphi). \quad (5.26)$$

Оскільки теплопровідність λ_i ізоляції набагато менша теплопровідності інших частин електричної машини, то можна вважати, що провідники електричного струму теплоізовані

4-та частина

$$\lambda_4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + \lambda_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_4}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5.27)$$

$$r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi$$

$$T_4(r, \alpha_1) = T_4(r, \alpha_2) = 0, \quad (5.28)$$

$$\lambda T_{4r}(r_2, \varphi) = -\alpha(T_4 - T_c), \quad \lambda T_r(r_3, \varphi) = -\alpha(T_4 - T_c). \quad (5.29)$$

Задача розв'язується методом скінченних елементів. Сформулюємо триангулярну сітку з використанням методу Делоне. Криволінійна границя області апроксимується відрізками – ребрами трикутних скінченних елементів.

У випадку наявності ізоляції обмотки статора з'являється ще одна підобласть 5 Рис 5.4

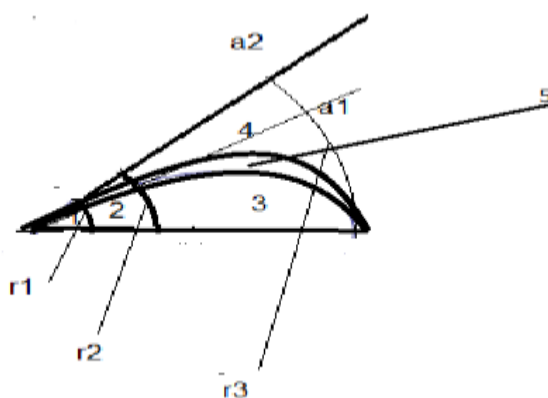


Рис 5.4. Одна восьма частина області Ω при наявності ізоляції

$$G = \{(0 < \alpha < \alpha_2), (0 < r < r_3 \cos 2\varphi) \mid r = r_3 \cos 2\varphi,$$

$$\lambda_5 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_5}{\partial r} \right) + \lambda_5 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_5}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r_2 \leq r < r_4 \cos 2n\varphi, n = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

$$T_5(r_4 \cos 2(\alpha_1 - 0), \varphi) = T_5(r_4 \cos 2(\alpha_1 + 0), \varphi). \quad (5.31)$$

Підготовка вихідних даних для розрахунку стаціонарного температурного поля

- 1) тепловими процесами в лобових частинах обмоток нехтуємо;
- 2) теплопередача у зовнішнє середовище здійснюється через зовнішню поверхню корпусу і в повітряний зазор через поверхню розточення статора;

3) в повздовжньому перерізі машини відсутнє перетікання тепла, що дозволяє розв'язувати плоску задачу в поперечному перерізі;

4) в поперечному перерізі обмотки температури окремих провідників дорівнюють середньому значенню температури перерізу;

5) тепловими потоками через вал нехтуємо;

6) умови охолодження стаціонарні;

7) матеріали досліджуваного двигуна і повітря мають лінійні (які не залежать від температури) і ізотропні в площині розв'язання властивості теплопровідності і теплоємності для робочих температур частин двигуна;

8) швидкість протікання електромеханічних процесів багато більше швидкості протікання теплових процесів;

9) ротор виготовлено із цільної паковки електротехнічної сталі.

Для розрахунку внутрішнього джерела тепла в обмотках статора необхідно розрахувати площу пелюстки

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 (\cos 2\varphi)^2 d\varphi. \quad (5.32)$$

Обмотка статора виконана із алюмінія, ізоляція обмотки із матеріалу міканіт.

Діаметр ротора $r_1 = 1.2\text{м}$, діаметр статора внутрішній $r_2 = 1.4\text{м}$, зовнішній $r_3 = 1.6\text{м}$, струм статора 200-500А.

На рис. 5.5 а), б) зображені температурні розподіли радіального перетину електричної машини з різними умовами теплообміну обмоток багатошарового статора з навколишнім середовищем.

На рис. 5.5 а) температура електричної машини нижче, ніж температура машини на рис 5.5 б), це викликано тим, що передача тепла від шару вздовж якого протікає електричний струм через ізоляцію в навколишнє середовище залежить від характеру передачі тепла в шарі ізоляції і коефіцієнта теплопровідності ізоляції.

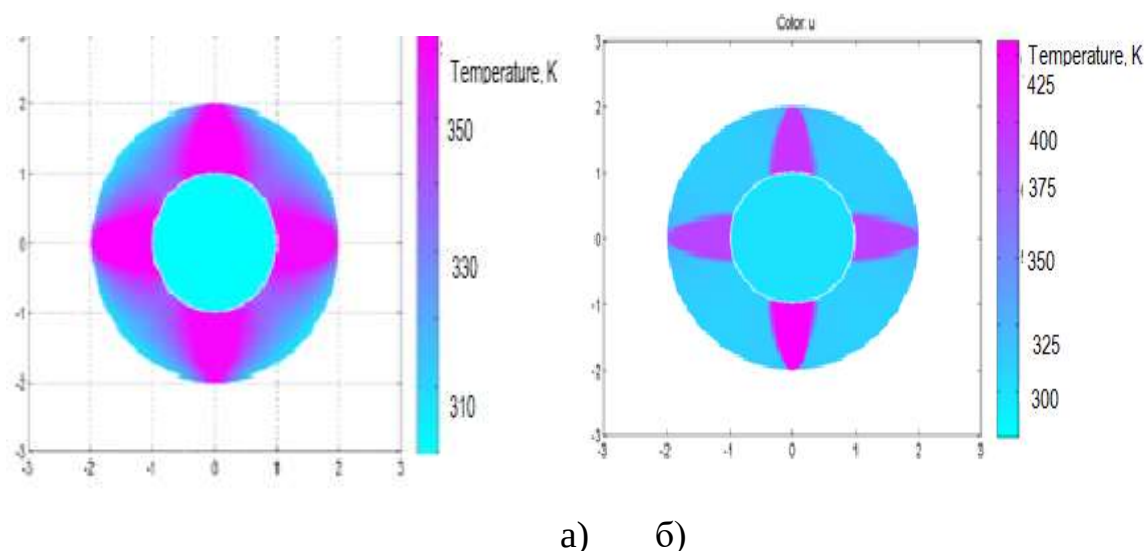


Рисунок 5.5. Розв'язок задачі (5.24)–(5.28)

За умовами числового експерименту вони різні в першому (Рис.5.5 а)) і в другому випадку (рис 5.5 б)). При розрахунках в першому випадку (рис. 5.5 а)) було взято, що обмотка статора машини, вздовж якої протікає електричний струм виконана з алюмінію, який ізолюваний тонким шаром міканіту, а частина статора, що залишилася виконана з електротехнічної сталі з високим коефіцієнтом теплопровідності. Тому в першому випадку відведення тепла в навколишнє середовище відбувається швидше і відповідно температура статора нижче. При розрахунках у другому випадку (рис. 5.5 б) прийнято, що обмотка статора машини виконана з алюмінію з тими ж геометричними і електричними параметрами, що і в першому випадку. Відмінністю є те, що весь об'єм між обмотками заповнений електротехнічно ізоляційним матеріалом – міканітом, у якого коефіцієнт теплопровідності значно нижче, ніж у електротехнічної сталі. Це і є причиною більш високої температури статора і меншою віддачею тепла з його поверхні в навколишнє середовище. Розрахунки температурного поля в електричній машині, які зроблені на основі математичної моделі (5.24)–(5.28), показують, що температура машини істотно залежить від матеріалів провідників вздовж яких тече електричний струм і властивостей електро- та теплоізоляційних матеріалів. Вона досягає свого максимального значення в

обмотці статора, де діє внутрішнє джерело тепла. Зокрема на малюнку 5.5 б показано, що температурний розподіл в обмотці досягає 400K.

5.3 Математична модель теплового процесу в синхронній машині з постійним магнітом, у формі спиць

Розглянемо математичну модель розподілу температурного поля в синхронній машині з постійним магнітом, у формі спиць. Математична модель враховує як радіальний, так і осьовий потоки передачі тепла і представляє собою крайову задачу в багат шаровій області з умовами спряження на границях шарів, з різними теплофізичними властивостями. Вся область дослідження розділена на п'ять типів простих підобластей, а саме: вал, внутрішній віялоподібний магніт, зовнішній віялоподібний магніт, пазовий отвір і паз. Причому, на границі внутрішнього і зовнішнього віялоподібних магнітів пазового отвору і пазу має місце ідеальний тепловий контакт. Задача розв'язується методом скінченних елементів.

Високошвидкісні електричні машини зі збудженням від постійних магнітів знаходять широке застосування у різних галузях промисловості, зокрема у автомобілебудуванні. Завдяки своїм унікальним достоїнствам, останнім часом, синхронні електричні машини з постійними магнітами стали застосовуватися в тяговому приводі гібридного електромобіля.

Листи статора і ротора мають пази відкритої, напівзакритої або закритої форми, в яких розташовуються провідники струму (обмотки). У статорі найчастіше застосовують напівзакриті пази прямокутної або овальної форми, в машинах великої потужності – відкриті пази прямокутної форми.

Розподіл провідників в щілинах значно впливає на максимальну температуру обмотки. У порівнянні з іншими дослідженнями теплових процесів в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом, оригінальність цього дослідження полягає в побудові комплексної теплової

моделі, яка враховує характер теплового обміну на межі розділу складових частин машини.

Розглянемо синхронну машину з постійним магнітом у вигляді[113] і побудуємо математичну модель температурного поля в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом, яка представлена у вигляді багат шарової області з різними теплофізичними характеристиками шарів.

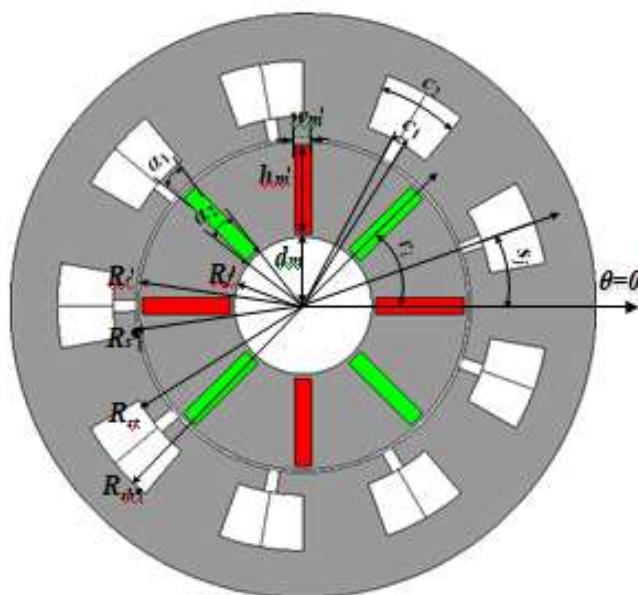


Рис 5.6. Геометрія області

де h_m – висота постійного магніту; w_m – ширина постійного магніту; d_m – мінімальна відстань між постійним магнітом та центром; θ – це положення радіус-вектора на колі, положення початкової осі визначається як $\theta=0$; r_i – кутове положення i -го магніту по відношенню до початкової осі; s_j – кутове положення j -го пазу; α_1 – кут ширини зовнішнього краю магніту; α_2 – кут ширини внутрішнього краю магніту; c_1 – кут ширини отвору паза; c_2 – кут ширини паза; r_1, r_3, r_4 та r_5 – це радіуси вала, отвору статора, верхньої частини паза та низу паза відповідно. Для досягнення поставленої мети вся область Рис.5.6 розділена на п'ять типів простих підобластей, а саме вал І, внутрішній віялоподібні магніт ІІ,

зовнішній віялоподібні магніт III, отвір пазу IV і паз V. В даній машині 4 пари полюсів і 9 слотів.

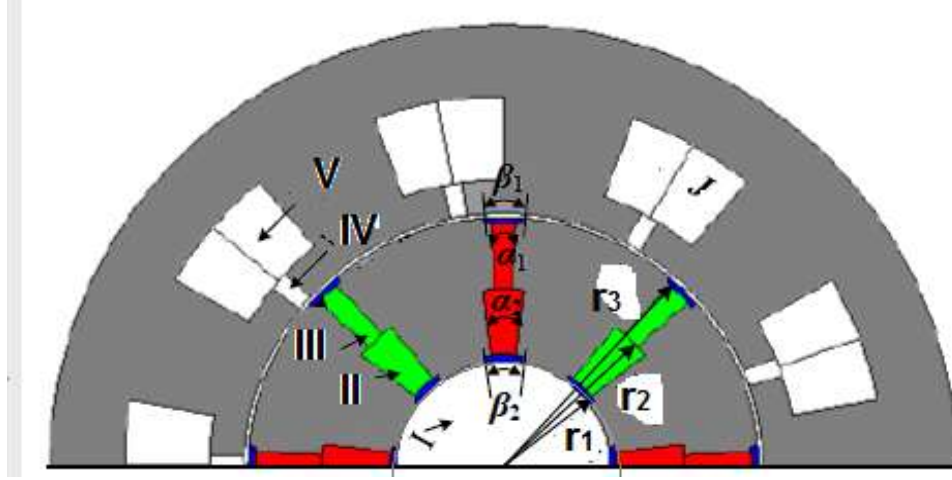


Рис 5.7. Розбиття складної системи на підобласті

Визначення температурного розподілу $T(r, \varphi)$ в багатошаровій області

$\Omega: \{0 < r < r_6, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, де внутрішнє джерело тепла зосереджено в обмотках, тобто в області V може бути записано як крайова задача з умовами спряження у вигляді

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0}{S^2}, & r_4 \leq r < r_5, s_j - \frac{c_2}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_2}{2}, j=1,2,.. \\ 0, & 0 < r < r_1, r_5 < r < r_6, (0 < \varphi < 2\pi) \quad r_1 < r < r_2, (r_i - \frac{\alpha_2}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_2}{2}), \\ & r_2 < r < r_3, (r_i - \frac{\alpha_1}{2} < \varphi < r_i + \frac{\alpha_1}{2}), r_3 < r < r_4, (s_j - \frac{c_1}{2} < \varphi < s_j + \frac{c_1}{2}) \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\lambda T_{3r}(r_3, \varphi) = -\alpha(T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma(T_3^4 - T_c^4), \quad (5.34)$$

$$T_{ir}(r_i - 0, \varphi) = T_{ir}(r_i + 0, \varphi), \quad (5.35)$$

$$T_i(r_i - 0, \varphi) = T_i(r_i + 0, \varphi), \quad i=1,2,4 \quad (5.36)$$

$$\lambda T_{4r}(r_3, \varphi) = -\alpha(T_4 - T_c) - \varepsilon \sigma(T_4^4 - T_c^4), \quad (5.37)$$

$$\lambda T_{5r}(r_5, \varphi) = -\alpha(T_5 - T_c) - \varepsilon \sigma(T_5^4 - T_c^4). \quad (5.38)$$

Тут S площа щілини, тобто області V . Для розрахунків були взяті параметри з [113].

На границі внутрішнього і зовнішнього віялоподібних магнітів, щілинного отвору і щілини має місце ідеальний тепловий контакт. Граничні умови при описі ідеального теплового контакту на границі внутрішнього і зовнішнього віялоподібних магнітів, пазового отвору і пазу розглядають рівність температур і теплових потоків на граничних поверхнях. Граничні умови четвертого роду дають по суті правило сполучення температурних полів по всіх підобластях. Задача розв'язується методом скінченних елементів. Наступні припущення для розрахунку температурного поля були прийняті при використанні методу скінченних елементів:

- 1) до уваги береться як конвективний, так і радіаційний теплообмін. Радіаційний теплообмін відчутний, особливо, коли швидкість обертання ротора дуже мала або ротор нерухомий;
- 2) джерела тепла рівномірно розподілені в обмотках статора;
- 3) у центрі слота розташовується обмотка, площа якої дорівнює сумі площ всіх мідних проводів.

Теплові параметри матеріалів машини

Таблиця 5.1.

Postion	Матеріал	Теплопровідність (Вт / м К)
Вал	45#	50.2
Серцевина ротора	DW 310-35	42.5
Обмотки	copper	387

Розв'язання задачі (5.33)–(5.38) реалізовано в Partial Differential Equation (PDE) Toolbox метом скінченних елементів [293–295]. Спочатку побудована область Ω складної форми за допомогою операцій об'єднання, перетину і віднімання. Потім задаємо рівняння (5.33) і після специфікації

коефіцієнтів диференціального рівняння будемо обчислювальну сітку використовуючи триангуляцію Делоне.

Розіб'ємо область Ω на трикутники, $\Delta_i, i=1,2,\dots,n$. Сторону, що має вигляд відрізка кривої замінюємо відрізком прямої і отриману область позначимо через $\bar{\Omega}_n$. Вершини трикутників нумеруємо. Нехай D_1 – множина вузлів, що належать границі, D_2 – множина внутрішніх вузлів, $D = D_1 \cup D_2$ – множина всіх вузлів триангуляції. Для кожної вершини трикутника $\Delta_i \subset \bar{\Omega}_n$ визначимо функцію $\psi_j^i(r, \varphi)$, що дорівнює одиниці в цій вершині і дорівнює нулю в інших вершинах (тут i – номер трикутника, j – номер вершини в множині всіх вузлів D). Найпростішою такою функцією є лінійна функція виду $z = ar + b\varphi + c$, причому $z = 1$ в одній з вершин трикутника і $z = 0$ в двох інших вершинах. Нехай вершини трикутника мають в множині D номери j_1, j_2, j_3 . Визначаємо нову функцію скінченний елемент

$$\varphi_i(r, \varphi) = \begin{cases} \bar{u}_{j_1} \psi_{j_1}^i(r, \varphi) + \bar{u}_{j_2} \psi_{j_2}^i(r, \varphi) + \bar{u}_{j_3} \psi_{j_3}^i(r, \varphi), & (r, \varphi) \in \Delta_i \\ 0, & (r, \varphi) \notin \Delta_i \end{cases}$$

Після триангуляції області Ω проводимо регуляризацію скінченно-елементної сітки.

Розрахунки зроблені при наступних робочих параметрах електричної машини $I = 6\text{ А}$, $J = 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ – щільність струму в пазах, кількість полюсних пар 4, кількість пазів 9.

З рисунка 5.8 видно, що найбільша температура спостерігається в обмотках синхронної машини з постійним, у формі спиць, магнітом. Значна частка полумок ЕМ пов'язана з обмотками статора. Статистика відмов у роботі електричної машини показує, що вони відбуваються під час експлуатації через перегрів обмоток.

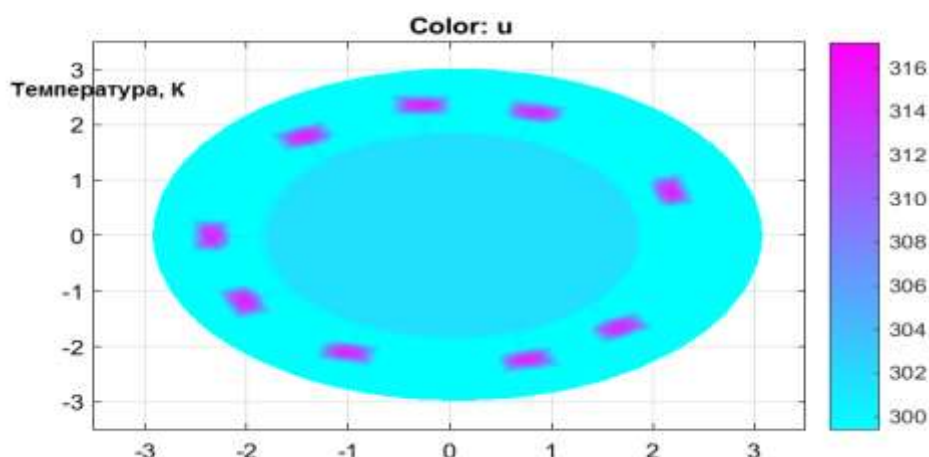


Рисунок 5.8. Температурні розподіли отримані із розв'язку задачі (5.33)–(5.38)

Температура електричної машини під час роботи підвищується при збільшенні сили струму пристрою, що може бути спровоковано зменшенням напруги в мережі живлення до 95% і нижче. Результати проведених досліджень є основою для проектування електричної машини, розробки алгоритму керування температурним полем синхронної машини з постійним, у формі спиць, магнітом, дозволяють враховувати температурні ефекти, особливо в тих підобластях, де робоча температура може змінюватися. Запропонована математична модель температурного поля в електричній машині та метод розв'язання задачі дозволяють розраховувати температуру в окремих елементах машини, що важливо для швидкого регулювання умов її експлуатації і охолодження.

5.4 Математична модель теплових процесів у складній електромеханічній системі

Складна електромеханічна система якою є синхронний двигун з постійним магнітом використовується у гібридних електромобілях середнього розміру. При роботі таких систем виділяється тепло за рахунок

втрат, які виникають при взаємних перетвореннях механічної та електричної енергії. У загальному випадку до цих втрат відносяться джоулеве тепло в провідниках, втрати на вихрові струми і перемагнічування в магнітних і провідних масах, втрати на тертя обертових частин і в підшипниках і втрати на циркуляцію охолоджувального середовища. Всі ці втрати є причиною нагрівання активних і конструктивних частин синхронних двигунів. Для синхронного двигуна складної структури з постійними магнітами (CS-PMSM) дуже важливо знати підвищення температури і розсіювання тепла, особливо коли CS-PMSM працює при повному навантаженні. З геометричної точки зору синхронна машина з постійним магнітом складної структури розглядається у вигляді складної дев'ятишарової області.

Математичну модель теплового процесу у такій області розглянемо у вигляді крайової задачі із зовнішніми і внутрішніми джерелами тепла в циліндричній системі координат [296–298]. Особливістю математичної моделі є те, що на границях шарів використовується умова ідеального теплового контакту у вигляді рівності похідних у напрямку заданого вектора.

Тепло в тілі двигуна викликане його нагріванням. Рівняння теплового балансу для двигуна запишемо в наступній формі

$$\lambda_i \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \pm w(P, u, t) = 0.$$

Перший член рівняння балансу характеризує втрати в двигуні, які перетворюються в тепло, другий - кількість тепла, що йде на нагрів двигуна, третій – кількість тепла, яке двигун віддає навколишньому середовищу.

Під час включення двигуна його температура мало відрізняється від температури навколишнього середовища, віддача тепла в навколишнє середовище відсутня і третій член рівняння балансу наближається до нуля. По мірі роботи та нагрівання двигуна все більша частина тепла, що

виділяється в двигуні передається в навколишнє середовище і при досягненні термодинамічної рівноваги між кількістю тепла, що виділяється і віддається в навколишнє середовище, температура двигуна стає постійною – усталеною. Визначення температури двигуна на основі математичної моделі найбільш ефективний метод дослідження теплового процесу в електричному двигуні складної структури.

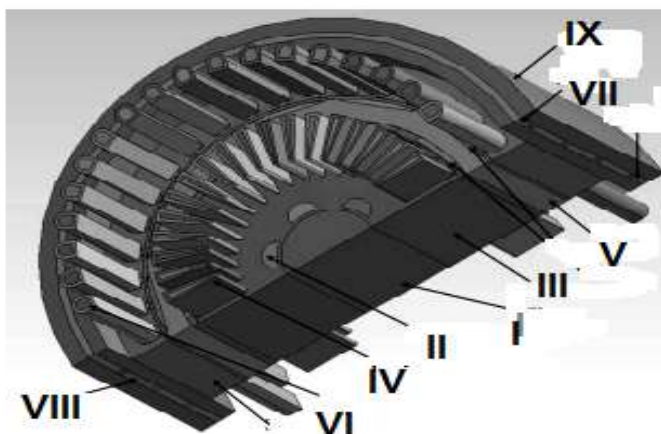


Рис 5.9 . Модель синхронного двигуна складної структури з постійними магнітами

За умови наявності відповідної моделі температура в будь-якій точці двигуна може бути розрахована за допомогою простих для вимірювання величин, таких як електричні струми або швидкість двигуна.

Побудуємо математичну модель теплового процесу в синхронному двигуні складної структури з постійними магнітами. Математичну модель теплового процесу будуємо у вигляді крайової задачі в складній дев'ятишаровій області з нелінійними граничними умовами на межі шарів Рис 5.9.

Для цього введемо наступні позначення для підобластей синхронної машини з постійним магнітом :

I Вал

II Осьові прорізи для охолодження $r_1 \leq r < r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi$ $0 < r < r_1$;

III Внутрішня серцевина ротора $r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi < r < r_3$;

IV Внутрішні обмотки ротора $r_3 < r < r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi$;

V Зовнішня серцевина ротора $r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi < r < r_5$;

VI Обмотки статора $r_5 < r < r_6$;

VII Корпус $r_6 < r < r_7$;

VIII Охолоджуючий водяний канал $r_7 < r < r_8$;

IX Корпус $r_8 < r < r_9$.

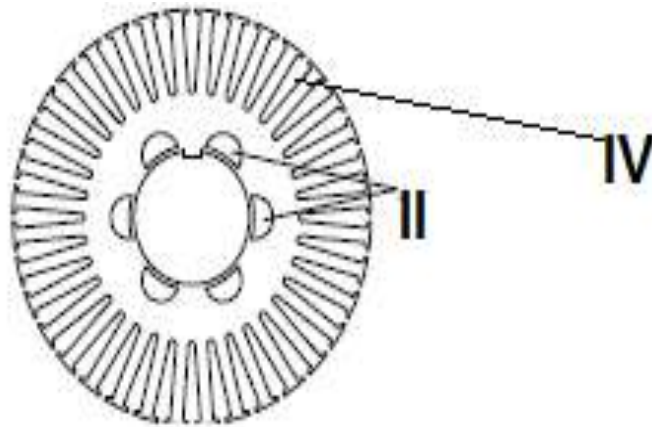


Рис 5.10. Підобласті синхронного двигуна складної структури

Області II-й IV (рис.5.10) представляємо у вигляді частини $2n$ пелюсткової троянди, яка вирізана кільцем, а область VI кільце з щільно укладеними колами, причому настільки щільно, що кільце можна вважати однорідним. Отже маємо 9 підобластей. Причому в VI, IV підобластях зосереджені внутрішні джерела тепла. Математична модель визначення теплового стану двигуна складної структури з постійними магнітами (CS-PMSM) у області $\Omega \times t: \{0 < r < r_9, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < t < t_0\}$ має вигляд

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \quad (5.39)$$

$$= \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_i)}{S^2}, & r_3 < r < r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi, r_5 < r < r_6 \\ 0, & 0 < r < r_1, r_1 \leq r < r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi, \\ & r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi < r < r_3, \\ & r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi < r < r_5, r_6 < r < r_9 \end{cases}$$

$$T_i(r, \varphi, 0) = T_0, \quad (5.40)$$

$$T_i(r, 0, \varphi, t) = T_0, \quad T_i(r, l, \varphi, t) = T_0, \quad (5.41)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.42)$$

$$\lambda_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = [-\alpha(T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma(T_3^4 - T_c^4)], \quad (5.43)$$

$$T_i(r_{i-0}, z, \varphi, t) = T_i(r_{i+0}, z, \varphi, t), \quad i = 3, 4, 5, 6, \quad (5.44)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=r_{i-0}} = \lambda_{i+1} \left. \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \right|_{r=r_{i+0}} \quad i = 3, 4, 5, 6, \quad (5.45)$$

Умови (5.39)–(5.45) є умовами ідеального теплового контакту. Крім того, умова (5.45) використовує похідну у напрямку заданого вектора. S – загальна площа перетину алюмінієвої деталі статора, зокрема $S = \{r_1 \leq r \leq r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi\}, n = 1, 2, \dots$

$$S = \pi r_2^2 - \frac{\pi r_1^2}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

В табл.5.2 наведені теплофізичні параметри частин електричної машини[299]

Теплофізичні параметри матеріалів машини

Таблица 5.2

	Матеріал	Щільність $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	Питома теплоємність ємність $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	Теплопровідність $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Корпус	45#	7850	480	50.2
серцевина статора	DW 310-35	7980	450	42.5
обмотки статора	Copper	8900	407	387
ізоляція обмотки статора				0.049
зовнішня серцевина ротора	20#	7880	480	48
внутрішня серцевина ротора	Copper	7980	450	42.5
внутрішні обмотки ротора		8900	407	387
ізоляція обмотки внутрішнього ротора				0.044
Вал	45#	7850	480	50.2

З розподілу температури поперечного перерізу на рис. 5.11 видно, що температура статора набагато нижча за температуру внутрішнього ротора, що свідчить про те, що охолодження, яке використовується в кожусі, ефективно впливає на зниження температури статора, за рахунок охолодження внутрішнього ротора. Крім того, температура внутрішнього

ротора досягла 510 К. В таблиці 5.3 представлені результати вимірювання температур всіх частин синхронного двигуна складної структури з постійними магнітами (взяті із [112]) та числові експерименти отримані з використанням моделі(5.39)–(5.45).

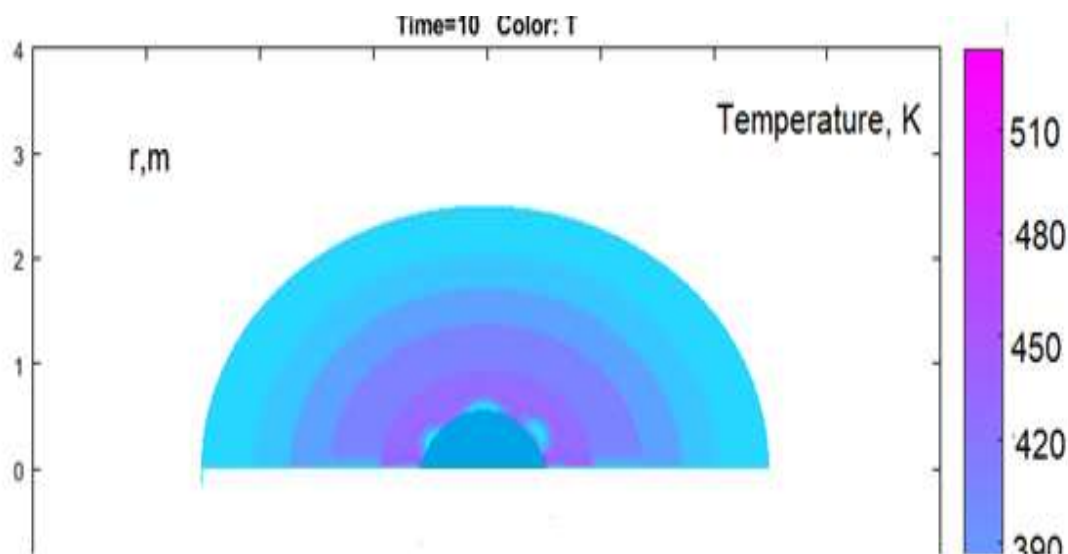


Рис. 5.11. Температурне поле в поперечному перерізі CS-PMSM за умови водяного охолодження

Порівняння результатів числового і натурного експерименту

Таблиця 5.3

Область	Значення температури отримані із побудованої моделі, К	Значення температури отримані із роботи [112],К
Внутрішня серцевина ротора	480	497
Зовнішня серцевина ротора	440	443
Сердечник статора	355	361
Обмотки статора в серцевині статора	362	379
Внутрішній ротор і обмотки	510	514

Результати порівняння температур (табл.5.3) свідчать про те, що математична модель (5.39)–(5.45) може бути використана для оцінки теплового стану електричного двигуна.

Розроблена модель надає розробнику можливість оцінити температури конструктивних частин CS-PMSM.

Математична модель теплового процесу в електричній машині представлена у вигляді крайової задачі для неоднорідного тривимірного рівняння тепла у складній циліндричній області. Особливістю математичної моделі є те, що на границях шарів використовується умова ідеального теплового контакту у вигляді рівності похідних у напрямку заданого вектора. В граничних умовах враховується радіаційний теплообмін.

5.5 Метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багат шаровому циліндрі

Математичні моделі, які дозволяють досліджувати електромагнітні та теплові поля у такій системі як електрична машина можна віднести до моделей про процеси, що відбуваються у складній багат шаровій циліндричній області [5]. Виходячи із вищезазначеного, у найпростішому випадку, процес теплообміну у електричній машині представимо у вигляді температурного поля у три шаровому циліндрі де у одному з шарів (обмотці) діють внутрішні джерела тепла, а у два інших тепло передається від одного шару до іншого. Більш проста задача дослідження температурного поля у дво шаровому циліндрі була розглянута у роботах [36, 45]. Схематичне зображення три шарового циліндра наведено на рисунку 5.12.

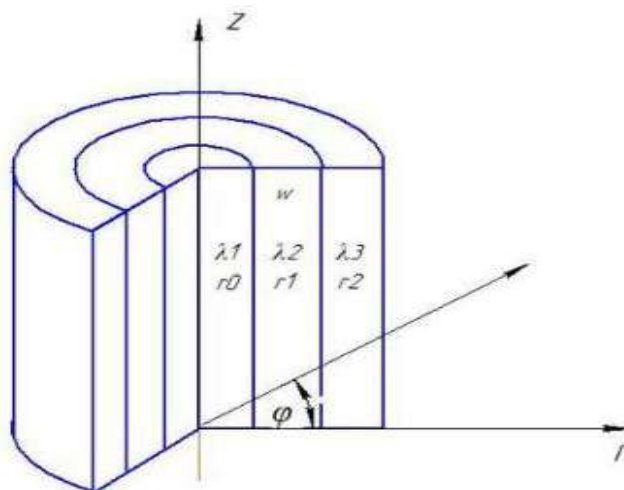


Рис. 5.12. Тришаровий циліндр з різними теплофізичними характеристиками шарів

Розглянемо математичну модель температурного поля у тришаровому циліндрі, у одному з шарів якого діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших, що мають різні теплофізичні властивості тепло передається теплопровідністю. Внутрішні джерела тепла представляють собою джоулеве тепло, що виділяється під час протікання електричного струму у одному із шарів. Для прикладу розглянемо температурне поле електричної машини, що складається з двошарового ротора, в якому відсутні джерела тепла та статора з обмотками із мідного дроту або алюмінієвих вставок, вздовж яких протікає електричний струм та виділяє джоулеве тепло Рис 5.12.

Визначення температурного розподілу $T(r, z, t)$ у тришаровому циліндрі, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішні шари тепло передається від зовнішнього теплопровідністю має вигляд наступної крайової задачі на спряження в області $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_i)}{S^2}, & r_1 \leq r < r_2 \\ 0, & 0 < r < r_0, r_0 < r < r_1, r > r_2 \end{cases} \quad (5.46)$$

$$T_i(r, z, 0) = T_0, \quad (5.47)$$

$$T_i(r, 0, t) = T_0, \quad T_i(r, l, t) = T_0, \quad (5.48)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \left[-\alpha (T_3 - T_c) - \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4) \right], \quad (5.49)$$

$$T_i(r_{i-0}, z, t) = T_{i+1}(r_{i+0}, z, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.50)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=r_i-0} = \lambda_{i+1} \left. \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \right|_{r=r_{i+0}} \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.51)$$

де λ_i , c_i , ρ_i , – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів частин електричної машини, α_i , I , ρ_0 , ε , σ – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір дроту обмотки, степінь чорноти та стала Стефана-Больцмана відповідно. Тут S – сумарна площа перетинів дроту в обмотках статора, зокрема $S_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ площа шару S_3 .

Задача у постановці (5.46)–(5.51) нелінійна, а тому аналітичного розв'язання такої задачі не існує. Будемо досліджувати стаціонарне температурне поле, знехтувавши похідною за часом та поклавши $\frac{\partial T_i}{\partial t} = 0$.

Щоб знайти аналітичний розв'язок, проведемо спрощення задачі згідно наступного алгоритму.

Для дослідження температурного розподілу у внутрішньому циліндрі достатньо знати усереднений температурний розподіл у третьому і другому шарі [74–75]. Тому для визначення теплового потоку через поверхню внутрішнього циліндра, помножимо рівняння (5.46) на rdr і зінтегруємо по товщині шару в межах від r_1 до r_2

$$\lambda_3 r \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_1}^{r=r_2} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{r_1}^{r_2} T_3 r dr - c_3 \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} T_3 r dr = -\frac{I^2 \rho_0}{S_3^2} \int_{r_1}^{r_2} (1 + \beta T_3) r dr, \quad (5.52)$$

$$\lambda_3 r \left. \frac{\partial T_3}{\partial r} \right|_{r=r_1}^{r=r_2} = -r_2 (\alpha_3 (T_3 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_3^4 - T_c^4)) - \lambda_3 r_1 \frac{\partial T_3(r_1, z, t)}{\partial r}.$$

Після перетворень та скориставшись співвідношенням [64–65]

$$u_3(z, t) = \frac{2}{S_3} \int_{r_1}^{r_2} T_3(r, z, t) r dr, \quad (5.53)$$

рівняння (5.52) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \lambda_3 r_1 \frac{S_3}{2} \frac{\partial T_3(r_1, z, t)}{\partial r} = & \frac{\lambda_3 S_3}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 S_3}{2} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2 S_3} u_3 + \frac{I^2 \rho_0}{S_3^2} \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) - \\ & - r_2 \left[\alpha(u_3 - T_c) + \varepsilon \sigma(u_3^4 - T_c^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Співвідношення (5.54) будемо розглядати як граничну умову імпедансного типу на межі зовнішнього та внутрішніх циліндрів. Якщо прийняти, що $u(z, t) \approx T_3(r_1, z, t) \approx T_2(r_1, z, t)$, крайову умову на межі другого і третього шарів циліндру з урахуванням напрямку теплового потоку, умова (5.54) має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_1, z, t)}{\partial r} = & \frac{\lambda_2}{r_1} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_1} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_1 S_3^2} T_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_1} - \\ & - \frac{2 \lambda_2 r_2}{r_1 S_3 \lambda_3} \left[\alpha(T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma(T_2^4 - T_c^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Після визначення граничної умови температурний розподіл у другому шарі циліндра зводиться до наступної задачі з умовою, що включає поряд з нормальною похідною дотичну похідну за напрямом

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (5.56)$$

$$r_0 < r < r_1, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (5.57)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l, \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_1, z, t)}{\partial r} = & \frac{\lambda_2}{r_1} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_1} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_1 S_3^2} T_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_1} - \\ & - \frac{2 \lambda_2 r_2}{r_1 S_3 \lambda_3} [\alpha (T_2 - T_c) + \varepsilon \sigma (T_2^4 - T_c^4)], \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\lambda_2 \frac{T_2(r_{1+0}, z, t)}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial T_1(r_{1-0}, z, t)}{\partial r}. \quad (5.60)$$

Друга гранична умова у такій постановці задачі (5.56)–(5.60) невизначена. Суть методу знаходження температурних розподілів у багатошаровому циліндрі в умовах невизначеності полягає у послідовному усередненні температурних полів уздовж радіуса та наступному визначенні температурного поля у першому шарі $0 < r < r_0$. По закінченні усереднення розпочинається зворотній процес визначення температурних розподілів у внутрішніх шарах $r_0 < r < r_1, r_1 < r < r_2, \dots, r_{N-1} < r < r_N$.

Якщо і у другому шарі циліндра температурним розподілом уздовж радіуса можна знехтувати, то провівши усереднення аналогічно (5.53) отримаємо граничну умову на межі першого та другого циліндрів

$$\begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0, z, t)}{\partial r} = & \frac{\lambda_2}{r_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 \rho_3 \lambda_2}{\lambda_3 r_0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_2}{\lambda_3 r_0 S_3^2} u_2 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_0} - \\ & - \frac{2 \lambda_2 r_2}{r_0 S_3 \lambda_3} [\alpha (u_2 - T_c) + \varepsilon \sigma (u_2^4 - T_c^4)] + \frac{\lambda_2}{r_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{c_2 \rho_2}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

У такий спосіб температурний розподіл у внутрішньому циліндрі (шарі S_1) визначається із розв'язання наступної задачі в області $\Omega_1 \times t = \{0 < r < r_0, 0 < z < l, t > 0\}$

$$\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0, \quad (5.62)$$

$$T_1(r, z, 0) = T_0, \quad (5.63)$$

$$T_1(r, 0, t) = T_0, \quad T_1(r, l, t) = T_l, \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0, z, t)}{\partial r} = & \frac{2\lambda_1}{r_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\lambda_1 c_3 \rho_3}{\lambda_3 r_0} + \frac{\lambda_1 c_2 \rho_2}{\lambda_2 r_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_1}{\lambda_3 r_0 S_3^2} u_1 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_1 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_0} - \\ & - \frac{2\lambda_1 r_2}{r_0 S_3 \lambda_3} \left[\alpha(u_1 - T_c) + \varepsilon \sigma(u_1^4 - T_c^4) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial T_1(0, z, t)}{\partial r} = 0. \quad (5.66)$$

Скористаємось оператором усереднення

$$u_1(z, t) = \frac{2}{S_1} \int_0^{r_0} T_2(r, z, t) r dr, \quad S_1 = \pi r_0^2, \quad (5.67)$$

$$\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0}^{r=r_0} + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{r_0} T_1 r dr - c_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_0} T_1 r dr = 0, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0}^{r=r_0} = & r_0 \left(\frac{2\lambda_1}{r_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\lambda_1 c_3 \rho_3}{\lambda_3 r_0} + \frac{\lambda_1 c_2 \rho_2}{\lambda_2 r_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta \lambda_1}{\lambda_3 r_0 S_3^2} u_1 + \frac{I^2 \rho_0 \lambda_1 (r_2^2 - r_1^2)}{\lambda_3 S_3^3 r_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda_1 r_2}{r_0 S_3 \lambda_3} \left[\alpha(u_1 - T_c) + \varepsilon \sigma(u_1^4 - T_c^4) \right] \right) - \\ & - \lambda_1 0 \frac{\partial T_1(0, z, t)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Підставимо (5.69) в (5.68) врахувавши (5.67) будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left(\frac{c_3 \rho_3}{3\lambda_3} + \frac{c_2 \rho_2}{3\lambda_2} + \frac{c_1 \rho_1}{3\lambda_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{3\lambda_3 S_3^2} - \frac{r_2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} \right) u_1 + \frac{I^2 \rho_0 (r_2^2 - r_1^2)}{3\lambda_3 S_3^3} + \\ + \left(\frac{2r_2 \alpha}{3S_3 \lambda_3} T_c + \frac{2r_2 \varepsilon \sigma T_c^4}{3S_3 \lambda_3} \right) - \frac{r_2 2\varepsilon \sigma}{3S_3 \lambda_3} u_1^4 = 0, \end{aligned} \quad (5.70)$$

приходимо до наступної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial v}{\partial t} + Av + Cv^4 = B, \quad 0 < z < l, \quad t > 0, \quad (5.71)$$

$$v(z, 0) = T_0, \quad (5.72)$$

$$v(0, t) = T_0, \quad v(l, t) = T_l, \quad (5.73)$$

де

$$A = \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{3\lambda_3 S_3^2} - \frac{r_2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} \right), \quad a^2 = \left(\frac{c_3 \rho_3}{3\lambda_3} + \frac{c_2 \rho_2}{3\lambda_2} + \frac{c_1 \rho_1}{3\lambda_1} \right), \quad C = -\frac{r_2 2\varepsilon \sigma}{3S_3 \lambda_3},$$

$$B = -\left(\frac{I^2 \rho_0 (r_2^2 - r_1^2)}{3\lambda_3 S_3^3} + \frac{r_2 2\alpha}{3S_3 \lambda_3} T_c + \frac{r_2 2\varepsilon \sigma T_c^4}{3S_3 \lambda_3} \right).$$

Припустивши, що $\varepsilon = 0$ задачу (5.71)–(5.73) можна розв'язати аналітично.

Зробивши заміну змінних

$$v = e^{\mu z + \lambda t} \cdot u, \quad \mu = 0, \quad \lambda = \frac{A}{a^2}, \quad f(z, t) = B e^{-\lambda t},$$

рівняння (5.26) можна звести до вигляду [300]

$$u_t = a^2 u_{zz} + f(z, t), \quad \forall t > 0, \quad 0 < z < l \quad (5.74)$$

з неоднорідними крайовими та початковою умовами

$$u(z, 0) = \varphi(z) = T_0 e^{-\mu z}, \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \gamma_1(t) = T_0 e^{-\lambda t}, \\ u(l, t) &= \gamma_2(t) = T_l e^{-\mu l - \lambda t}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Шукаємо розв'язок задачі (5.74)–(5.76) у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (5.77)$$

де $v(x, t)$ – нова шукана функція, а $w(x, t)$ – довільна функція, що задовольняє неоднорідним крайовим умовам

$$w(z, t) = \frac{z}{l} [\gamma_2(t) - \gamma_1(t)] + \gamma_1(t). \quad (5.78)$$

Функція $v(x, t)$ повинна задовольняти неоднорідне рівняння

$$v_t - a^2 v_{zz} = \bar{f}(z, t), \quad (5.79)$$

де

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - w_t - a^2 w_{zz}$$

та додатковим початковим і крайовим умовам

$$\begin{aligned} v(z, 0) &= \varphi(z) - w(z, 0), \\ v(0, t) &= \gamma_1(t) - w(0, t), \\ v(l, t) &= \gamma_2(t) - w(l, t). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Після підстановки (5.80) у (5.79) умови стають однорідними, а задача

(5.79)–(5.80) зводиться до задачі

$$\begin{aligned}u_t &= a^2 u_{zz} + f(z, t), t > 0, \quad 0 < z < l \\u(z, 0) &= 0, \\u(0, t) &= u(l, t) = 0.\end{aligned}$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\begin{aligned}u(z, t) &= \int_0^t \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\&= \int_0^t \int_0^l G(z, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.\end{aligned}\quad (5.81)$$

Задача (5.71)–(5.73) визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі визначена повністю. Будуємо скінченно-різницеву схему Кранка-Ніколсон [177].

В області $\bar{\Omega} \times t \quad \{0 \leq z \leq l, \quad t > 0\}$ вводимо рівномірні сітки по довжині (координата z) $\bar{\omega}_h = \{z_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M\}$ часову сітку (координата t) $\bar{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$ з інтервалами: $h = l / M, \quad \Delta t = t_0 / j_0$.

Розв'язок задачі в області Ω шукаємо у вигляді розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції u_{z_m, t_j} , яку позначимо як u_i^j .

$$a^2 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + Au_i^{j+1} + C(u_i^{j+1})^4 - B. \quad (5.82)$$

Розглянемо та розв'яжемо лінеаризовану задачу. Отриману матрицю значень температур використовуємо для розв'язання задачі (5.62)–(5.66) як

граничну умову. Для цього будемо скінченно-різницевою схемою Дугласа-Ганна для розв'язання методом змінних напрямів [177] в області $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq l, t > 0\}$ з інтервалами

$$h_1 = r_0 / N, \quad h_2 = l / M, \quad \Delta t = t_0 / j_0,$$

яка має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} = & \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ & + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} = & \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ & + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} \end{aligned}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для } n = 0,$$

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру.

На рисунку 5.13 зображено температурний розподіл за розв'язком задачі (5.79) – (5.80).

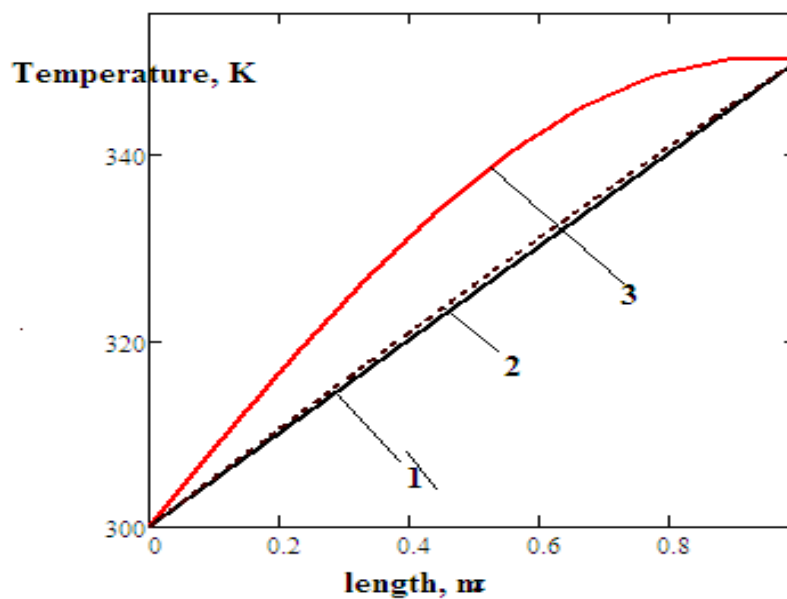


Рис 5.13. Розв'язки задачі (5.79) – (5.80)

Крива 1– $\alpha = 1 \frac{Дж}{с \cdot м^2 \cdot К}$, крива 2– $\alpha = 10 \frac{Дж}{с \cdot м^2 \cdot К}$, крива 3– $\alpha = 100 \frac{Дж}{с \cdot м^2 \cdot К}$.

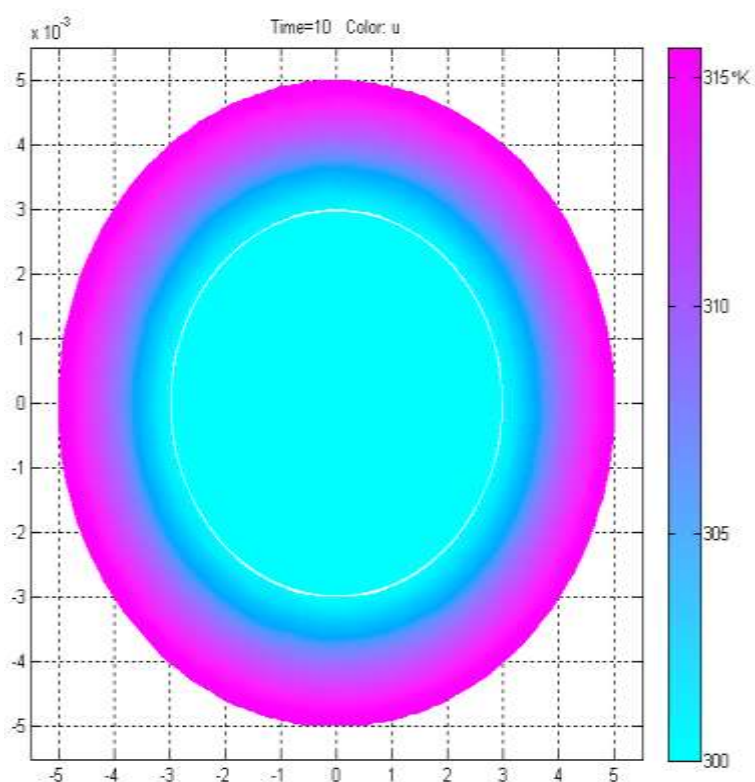


Рис 5.14. Температурний розподіл в циліндричній двошаровій області
вздовж радіусу

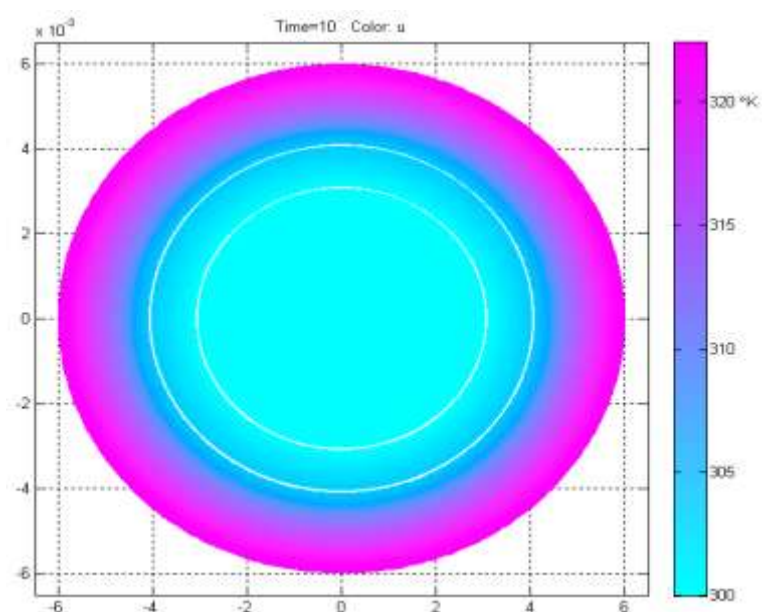


Рис 5.15. Температурний розподіл в циліндричній тришаровій області
вздовж радіусу

На рис. 5.15 зображені температурні розподіли побудовані за розв'язком
задачі (5.46)(5.51)

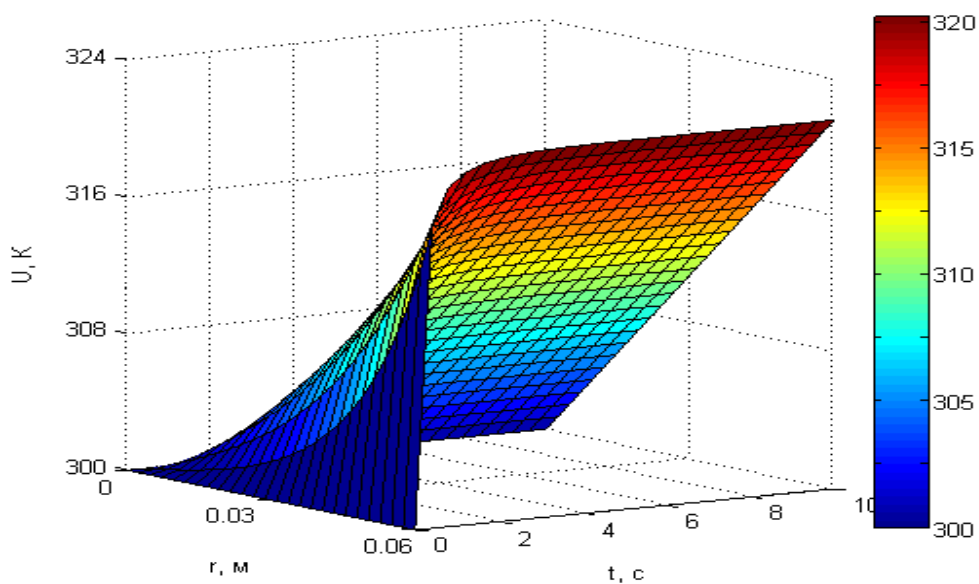


Рис 5.16. Температурний розподіл отриманий із
розв'язку (5.62) – (5.66)

5.6 Методики проведення експерименту

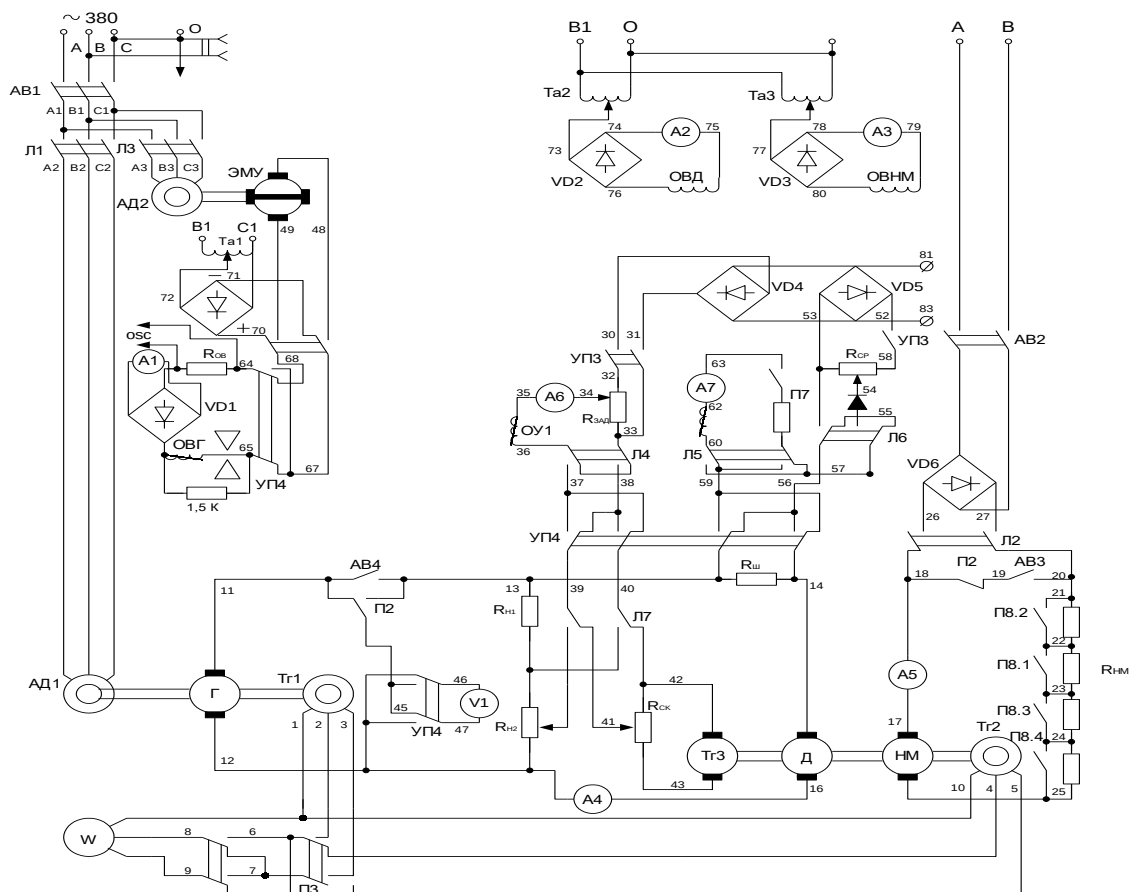


Рис 5.17. Стенд для дослідження характеристик і режимів роботи системи Г-Д

Склад стенда

Електричні машини Г, Д, НМ: тип ПЗ1М, $P=2,2$ кВт; $U=220$ В; $I=8,07$ А; $n=1500$ об/хв; $\eta=79\%$.

АД1: тип 4А90Л4У3: $P=2,2$ кВт; $U=220$ В; $I=7.8$ А; $n=1420$ об/хв; $\cos\varphi=0,83$; $\eta=80\%$

ЕМП: $P_{ДВ}=0,93$ кВт; $n_{ДВ}=2850$ об/хв; $P_{Г}=0,5$ кВт; ; $n_{Г}=2850$ об/хв.

В якості вимірювача температури застосовується термопара, що має точковий контакт із залізом статора, оскільки технічно дуже складно встановити датчик вимірювання температури безпосередньо на ротор, а статор не прогрівається рівномірно, то необхідно визначити базову точку, щодо якої буде вимірюватися температура еквівалентної обмотки маси.

Температура двигуна в будь-якій точці вимірюється за допомогою цифрового мультиметра з комплектом термопар і можливістю вимірювання температури в діапазоні від -20°C до 1000°C . Для вимірювання температури в бічній частині корпусу двигуна був просвердлений отвір, в який вставлялась термопара. Для вимірювання температури лобової частини був знятий підшипниковий щит, в корпусі просвердлений наскрізний отвір, протягнута термопара і закріплена безпосередньо на обмотці статора.

Плата АЦП вимірювальної системи працює спільно з програмою, що дозволяє осцилографувати процеси зміни швидкості, струмів, напруг і внутрішніх змінних силових перетворювачів в часі. Установка дозволяє знімати часові залежності струму, перегріву двигуна, і далі аналітично отримувати необхідні залежності. Так само є можливість реєструвати теплові залежності для будь-якого виду навантаження шляхом задання сигналу, що подається на ЦАП перетворювача, який формує задання на момент навантажувальної машини.

В таблиці представлені результати отримані за допомогою математичної моделі (5.14)–(5.18) та експериментально



Рис 5.18. Обладнання для експериментального дослідження

Порівняння результатів числового і натурального експериментів

Таблиця 5.4.

Область	Значення температури отримані із побудованої моделі, К	Значення температури отримані експериментально, К	Значення температури отримані експериментально, К
Внутрішня серцевина ротора	351	363	3%
Статор	325	333	2%
Обмотки	425	441	3%

5.7 Висновки за розділом 5

У розділі сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багат шарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем.

Запропоновано континуальний підхід до дослідження температурних розподілів у складній електромеханічній системі якою є електрична машина. Побудовані математичні моделі теплового процесу та запропоновані методи розв'язання крайових задач в складній електромеханічній системі. В розділі наведені результати натурних експериментів, а також порівняння числових та натурних експериментів.

Запропоновано метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багат шаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усередненні температурних розподілів за радіусом у внутрішніх

шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведені крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [6, 22, 24–26, 30–32, 38, 59].

ВИСНОВКИ

У дисертації на основі виконаних теоретичних і експериментальних досліджень отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, яке полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей температурних розподілів у складних системах та методів їх дослідження. Такі складні системи включають у себе багаточарові рухомі та нерухомі елементи циліндричної форми, що нагріваються зовнішніми чи внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються, та які враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Отримане рішення відрізняється від існуючих рішень більш повним відображенням процесів теплообміну, розробкою нових обчислювальних методів розв'язання початково-крайових та нелокальних задач, які виникають у математичних моделях, що дозволяє підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Проведено аналіз сучасного стану теорії та практики моделювання теплових процесів, які відбуваються під час основних технологічних процесів у порошковій металургії та електротехніці. Аналіз показав необхідність удосконалення математичних моделей теплових процесів (в складних областях та зі складними умовами теплообміну), методів розв'язання з урахуванням можливостей сучасної обчислювальної техніки. Це і сформуло проблему дисертаційного дослідження, і окреслило коло невирішених задач, що потребують розв'язання для досягнення мети дисертаційного дослідження.

У межах запропонованого напрямку на основі сформованих принципів побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей та методів розв'язання задач одержано такі наукові і практичні результати роботи, що мають істотні переваги перед відомими рішеннями.

Вперше:

- сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем;

- запропоновано метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усередненні температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведені крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Удосконалено:

- математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багатошарових областях при щільному та нещільному контакті шарів, які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів;

- методи розв'язання обернених крайових задач теплопровідності, які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв'язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв'язання обернених задач;

- математичні моделі процесів теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами;

– математичні моделі теплообміну між елементами складних систем, де, на відміну від існуючих математичних моделей у вигляді нелокальних задач, як нелокальна умова запропонована умова балансу тепла.

Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній роботі, базується на використанні методів математичного моделювання та апарату математичної фізики, забезпечується числовими експериментами, відповідністю моделей технологічним і фізичним процесам, результатами досліджень інших авторів та результатами натурних експериментів.

Проведено аналіз та порівняння результатів числових розрахунків зі значеннями температурних розподілів, отриманих шляхом вимірювання за допомогою приладів.

Упроваджено результати роботи в навчальний процес Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського і практику проектування технологічних процесів та обладнання на підприємствах України та за кордоном. Упровадження на практиці розроблених математичних моделей та комп'ютерних методів розв'язання задач дає можливість суттєво скоротити терміни проектування і матеріальні витрати на створення виробу, охорону навколишнього середовища, підвищити конкурентоспроможність продукції.

Таким чином, було досягнуто мету дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови теплообміну між багат шаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв'язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями. Це дозволяє підвищити точність визначення температурних розподілів у складних системах.

Результати, що отримані у роботі, становлять науковий інтерес і можуть бути використані під час подальшої розробки математичних моделей теплових процесів у складних системах та методів розв'язання нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Влияние высокоэнергетических воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов: сер. Фундаментальные проблемы современного материаловедения/ А. В. Аниськов, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2013. 375 с.
2. Влияние внешних энергетических воздействий на структуру, фазовый состав и свойства материалов / В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2012. 320 с.
3. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов / О. А.Троицкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2011. С. 2011. 210 с.
4. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатопарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 6. Ч. 1. С. 37–43. (*index copernicus*)
5. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 133–137.
6. Родькин Д. Й., Ченчевой В. В., Кобыльская Е. Б. Нелинейные преобразования с рядами Фурье в применении к задачам электротехники. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчук: КрНУ. 2015. Вип. 1(29). С. 82–93.
7. Ляшенко В. П., Черненко В. П., Кобильська О. Б., Анісков А. В. Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2014. Вип. 3(50). С. 350–354. (*РИНЦ (eLibrary)*).

8. Kobilskaya O., Lyashenko V. Mathematical model of thermal process with an unknown source. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 6/2016 (101). Ч. 1. С. 41–45. (*index copernicus*)
9. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Відновлення імпульсного джерела тепла в задачі теплопровідності. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 2/2016 (97). Ч. 1. С. 27–32. (*index copernicus*).
10. Кобильська О. Б. Задача керування джерелом тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 17. С. 65–71.
11. Кобильська О. Б. Обернена нелокальна задача з умовою інтегрального перевизначення. Математичне та комп'ютерне моделювання: сер. Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ. 2012. Вип. 7. С. 118–124. (BASE, Citefactor, General Impact Factor (GIF) та ін).
12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Застосування ітераційних методів до визначення параметрів керування температурним полем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2012. Вип. 4/2012 (75). С. 34–37. (*index copernicus*).
13. Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. Copper strip electroplastic rolling. *Metalurgical and Mining Industry*. 2015. № 2. P. 294 – 299. (*scopus*).
14. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471. (РИНЦ (*eLibrary*)).
15. Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2013. Вип. 21 (№ 1058). С. 43–49.

16. Кобильська О. Б. Моделювання імпульсного теплового процесу. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2013. Вип. 22 (№ 1063). С. 84–89.

17. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Нестационарні поздовжні хвилі в спадково-пружній циліндричній оболонці. *Вісник Тернопільського НТУ імені Івана Пулюя*. 2012. Вип. № 4 (68). С. 28–34.

18. Кобыльская Е. Б., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Троицкий О. А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2011. Вип. 4/2011 (69). Ч 1. С. 57–62.(index copernicus).

19. Троицкий О. А., Стащенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобыльская Е. Б. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. *Питання атомної науки і техніки*. 2011. Вип. 4/2011. С. 111 – 117. (scopus, web of science).

20. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2012. Вип. 19 (№ 1015). С. 167–172.

21. Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Математична модель теплообміну у валковому калібрі. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2019. Вип. 42 (№ 1015). С. 55–64.

22. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету*

ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2020. Вип. 45. С. 41–49.

23. Kobilskaya E., Lyashenko V., Hryhorova T. Integral conditions in the inverse heat conduction problems. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. [Vol. 7. № 2](#). P. 219–227. (scopus).

24. Kobilskaya E., Lyashenko V. A method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 46. С. 25–36.

25. Lyashenko V., Rod'kin D., Kobilskaya E., Martynenko M., Demyanchenko O. Thermal Process Mathematical Model in Electrical Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2017. P. 296–299. (IEEE, scopus).

26. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobilskaya E., Lyashenko V. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2017. [Vol. 1895. Issue 1](#). P. 090004-1–090004-9. (scopus).

27. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2016. [Vol. 1773. Issue 1](#). P. 040005-1 – 040005-7. (scopus).

28. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2014. Vol. 1629. Issue 1. P. 94–101. (scopus).

29. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact of Boundary-value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of*

Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings. Melville New York, 2015. Vol. 1684. Issue 1. P.080009-1 – 080009-10. (scopus).

30. Kobil'skaya E., Lyashenko V., Demyanchenko O., Nabok T. Thermal Process in Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremen'chuk, 2019. P. 334–338. (IEEE, scopus).

31. Lyashenko V., Kobil'skaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Nabok T. Temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2019. [Vol. 2164. Issue 1](#). P. 060018 – 080009. (scopus).

32. Lyashenko V., Kobil'skaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Hryhorova T. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2018. [Vol. 2025. Issue 1](#). P. 080006-1–080006-7. (scopus).

33. Aniskov A., Lyashenko V., Kobil'skaya E. The process control of electroplastic deformation ultrafine wire. *Proceeding of scientific and student's works in the field of Industrial Electrical Engineering*. 2013. Vol. 2. Part 1. Kosice, Slovakia. P. 87–90.

34. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового стану електричної машини. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях* : пр. міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 190 –192.

35. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: тези доп. міжнар. наук. конф, м. Рівне, 2–4 березня 2018 р. Рівне, 2018. С. 65.

36. Беззубченкова Т. С., Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р.* Кременчук, 2017. С. 55–57.

37. Жердєва А.І., Кобильська О. Б. Математичні моделі та методи розв'язку лінійних та нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р.* Кременчук, 2017. С. 58–60.

38. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Заїка А. В., Жердєва А. І. Розрахунок умов теплової рівноваги під час роботи електричної машини. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р.* Кременчук, 2017. С. 17–20.

39. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: материалы междунар. симпозиума, г. Харьков, 26–28 июня 2017 г.* Харьков, 2017. С. 59 – 62.

40. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Нелокальні задачі відновлення джерел тепла. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем: матеріали II всеукр. наук.-техн. конф. з міжнар. участю, м. Дніпро, 1–3 листопада 2016 р.* Дніпро, 2016. С.71–72.

41. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving Inverse Nonlocal Problems for Parabolic Equations. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Eight International Conference, Albena, 22–27 June 2016.* Albena (Bulgaria), 2016. P. 37–38.

42. Кобильська О. Б., Заїка А. В., Дем'янченко О. П. Алгоритм чисельного розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами теплообміну. *Математичне моделювання та математична фізика:*

матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 72–73.

43. Кобильська О. Б., Черненко В. П. Моделювання поширення нестационарних повздовжніх хвиль напруги в поропружному стрижні. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С.62–63.*

44. Черненко В. П., Кобыльская Е. Б. Математическая модель механического поведения вязкоупругого материала под действием периодической нагрузки. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 22–25 вересня 2015 г. Кременчук, 2015. С. 91–92.*

45. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Григорова Т. А. Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях: тр.международ. науч.-практ. конф., г. Харьков, 26–31 мая 2016 г. Харьков, 2016. С. 219 – 222.*

46. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Енергетичні умови в математичних моделях для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф. м. Кременчук, 22–25 вересня 2015г. Кременчук, 2015. С. 116–117.*

47. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact Boundary Value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Seventh International Conference. 28 June – 3 July 2015, Albena, Bulgaria. Albena (Bulgaria), 2015. P. 45.*

48. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Sixth International Conference. Albena, 1 July – 26 June 2014. Albena (Bulgaria), 2014. P. 28–29.*

49. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of process control system of wire drawing. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 28–31 мая 2014 г., Харьков, 2014. С. 259 – 261.

50. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of Process Control System of Wire Drawing. *37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics “MIPRO 2014”*, Opatija 26–30 May 2014. Opatija (Croatia), 2014. – P. 31

51. Bryl T., Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. System of control of pulse processing with hyperfine wire during electroplastic deformation. *XV International PhD Workshop OWD 2013*: conference archives PTETIS, Wisla, 19–22 october 2013. Vol.33. Wisla, 2013. P. 74 – 79.

52. Zagirnyak M., Kobilskaya E., Lyashenko V., Salenko A. Heat Surce Control During Additive Processes. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Twelfth International On-Line Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena, 24–29 June 2020. San Diego (Bulgaria), 2020. P. 53.

53. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Яковлева Д. М. Моделювання теплового процесу під час ультразвукового електропластичного плющення металу. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2013 г. Харьков, 2013. С. 242–245.

54. Kobilskaya E. Modeling of temperature distribution of the mobile enviroment with pulse sources of heat. *XIV International PhD Workshop OWD 2012*: conference archives PTETIS. Wisla, 19–22 october 2012. Vol.31. Wisla, 2012. P. 210–213

55. Ляшенко В. П., Кобыльская Е. Б. Определение параметров управления процессом электропластической деформации. *Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими*

токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах: материалы междунар. конф., г. Туапсе (Россия), 8–15 сентября 2012 г. Туапсе, 2012. С. 154–160.

56. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали конф., м. Київ, 10–11 вересня 2012 р. Київ, 2012. С. 66.

57. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв'язання задачі з рухомою границею. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 23–27 апреля 2012 г. Харьков, 2012. С. 278 – 280.

58. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Слесаренко А. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2011 г., Харьков, 2011. С. 211–214.

59. Kobilskaya E., Zaika A. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Tenth International Conference Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, 20–25 June 2018. Albena (Bulgaria), 2018. P. 39.

60. Блантер М. Е. *Металловедение и термическая обработка*. Москва: Машгиз, 1963. 416 с.

61. Натапов Б. С. *Термическая обработка металлов: учеб. пособие для вузов*. Киев: Вища школа, 1980. 288 с.

62. Слухоцкий А. Е., Рыскин С. Е. *Индукторы для индукционного нагрева*. Ленинград: Энергия, 1974. 264 с.

63. Гольдфарб Э. М. *Теплотехника металлургических процессов*. Москва: Металлургия, 1967. 439 с.

64. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учебник для вузов. Москва: Наука, 2004. 798 с.
65. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Гостехиздат, 1952. 392 с.
66. Коновалов Ю. В., Остапенко А. Л., Пономарев В. И. Расчет параметров листовой прокатки. Справочник. Москва: Металлургия, 1986. 430 с.
67. Технология процессов прокатки и волочения. Листопрокатное производство / М. М. Сафьян и др. Киев: Вища школа, 1988. 352 с.
68. Грудев А. П. Теория прокатки. Москва: Металлургия, 1998. 240 с.
69. Бровман М. Совмещенные процессы непрерывного литья и прокатки. Перспективы развития металлургической промышленности. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 627 с.
70. Чубенко В. А., Хіноцька А. А., Чубенко В. В. Дослідження ефективності суспензійної розливки рідкої сталі у ливарно-прокатні кліті для виготовлення тонких смуг. *Гірничий вісник*. 2016. Вип. 101. С. 183–187.
71. Федюкин В. К., Смагоринский М. Е. Термоциклическая обработка металлов и деталей машин. Ленинград: Машиностроение, 1989. 255 с.
72. Спицын В. И., Троицкий О. А. Электропластическая деформация металлов. Москва: Наука, 1985. 160 с.
73. Абрамов О. В. Воздействие мощного ультразвука на жидкие и твердые материалы. Москва: Наука, 2000. 312 с.
74. Ляшенко В. П., Кирилах Н. Г. Математична модель індукційного нагріву рухомого тіла. *Вісник Запорізького державного університету*. 2002. № 3. С. 64–69.
75. Ляшенко В. П., Григорова Т. А. Моделювання процесів пресування та спікання порошкових матеріалів. *Вісник Запорізького державного університету: сер. Фіз.-мат. науки*. 2008. № 1. С. 124–130.

76. Тофпенец Р. Л., Шиманский И. И., Анисович А. Г. и др. Физические основы термоциклической обработки стареющих сплавов. Мн.: Навука і тэхнжа, 1992. 342 с.

77. Невар Н. Ф., Фасевич Ю. Н. Исследование влияния термообработки на структуру и свойства бористых сплавов. *Литье и металлургия*. 2000. № 4. С. 72–74.

78. Невар Н. Ф. Свойства сплавов с повышенным содержанием бора. *Литье и металлургия*. 2000. № 2. С. 15–17.

79. Троицкий О. А. Электропластический эффект в металлах. *Черная металлургия. Бюллетень научно-технической и экономической информации*. 2018. № 9. 65–76.

80. Спицын В. И., Троицкий О. А. Электропластическая деформация металлов. Москва: Наука, 1985. 160 с.

81. Кобильська, О. Б. Нелокальні та крайові задачі для рівняння теплопровідності у металургії: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. Харків, 2011. 19 с.

82. Дубинко В. И., Карась В. И, Клепиков В. Ф., Остапчук П. Н., Потапенко И. Ф. Моделирование повышения пластичности материалов под действием импульсов электрического тока. *ВАНТ. Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение*. 2009. № 4. С. 158–166.

83. Ляшенко В. П., Григорова Т. А. Дискретизація одного рівняння теплопровідності з циклічними крайовими умовами. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2009. Вип. 11. № 847. С. 116–122.

84. Ляшенко В. П., Григорова Т. А. Математична модель температурного поля з імпульсними джерелами тепла. *Вестник ХНТУ*. 2009. Вып. 2(35). С. 279–283.

85. Григорова Т. А. Чисельні алгоритми розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності. *Вісник КДПУ ім. М. Остроградського*. 2009. № 6/(59). Ч. 1. С. 65–68.
86. Qiu Y., Zhang W., Cao M., Feng Y., Infield D. An Electro Thermal Analysis of a Variable-Speed Doubly-Fed Induction Generator in a Wind Turbine. *Energies*. 2015. Vol. 8. No. 5. P. 3386–3402.
87. Lee S.T., Kim H.J., Cho J.-H., Joo D.S., Kim D.K. Thermal Analysis of Interior Permanent-Magnet Synchronous Motor by Electromagnetic Field-Thermal Linked Analysis. *Journal of Electrical Engineering and Technology*. 2012. Vol. 7. No. 6. P. 905–910.
88. Mynarek P., Kowol M. Thermal analysis of a PMSM using fea and lumped parameter modeling. *Czasopismo Techniczne*. 2015. No.1 (8). P. 97–107.
89. Boglietti A., Cavagnino A., Lazzari M., Pastorelli M. A simplified thermal model for variable-speed self-cooled industrial induction motor. *IEEE Trans. Ind. Appl.* 2003. Vol. 39. No. 4. P. 945–952.
90. Boys J. T., Miles M. J. Empirical thermal model for inverter-driven cage induction machines. *Proc. Inst. Elect. Eng. Elect. Power Appl.* 1995. Vol. 141. No. 6. P. 360–372.
91. Mezani S., Talorabet N., Laporte B. A combined electromagnetic and thermal analysis of induction motors. *IEEE Trans. Magn.* 2005. Vol. 41. No. 5. P. 1572–157.
92. Trigeol J. F., Bertin Y., Lagonotte P. Thermal modeling of an induction machine through the association of two numerical approaches. *IEEE Trans. Energy Convers.* 2006. Vol. 21. No. 2. P. 314–323.
93. Staton D., Boglietti A., Cavagnino A. Solving the more difficult aspects of electric motor thermal analysis in small and medium size industrial induction motors. *IEEE Trans. Energy Convers.* 2005. Vol. 20. No. 3. P. 620–628.

94. Mejuto C., Mueller M., Shanel M., Mebarki A., Staton D. Thermal modelling investigation of heat paths due to iron losses in synchronous machines. *Proc. IEEE PEMD*. 2008. P. 225–229.
95. Gao Z., Colby R. S., Habetler T. G., Harley R. G. A model reduction perspective on thermal models for induction machine overload relays. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2008. Vol. 55. No. 10. P. 3525–3534.
96. Kral C., Haumer A., Buml T. Thermal model and behavior of a totally-enclosed-water-cooled squirrel-cage induction machine for traction applications. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2008. Vol. 55. No. 10. P. 3555–3565.
97. C. Cecati and F. de Monte A coupled electrothermal model for planar transformer temperature distribution computation. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2008. Vol. 55. No. 10. P. 3583–3590.
98. Marignetti F., Delli Colli V., Coia Y. Design of axial flux PM synchronous machines through 3-D coupled electromagnetic thermal and fluid-dynamical finite-element analysis. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2008. Vol. 55. No. 10. P. 3591–3601.
99. Hwang C. C., Wu S. S., Jiang Y. H. Novel approach to the solution of temperature distribution in the stator of an induction motor. *IEEE Trans. on Energy Conversion*. 2000. Vol. 15. No. 4. P. 401–406.
100. Perez I. J., Kassakian J. K. A stationary thermal model for smooth air-gap rotating electrical machines. *Elec. Mach. Electromech.* 1979. Vol. 3. P. 285–303.
101. Mellor P. H., Robert D., Turner D. R. Lumped parameter thermal model for electrical machines of TEFC design. *Proc. IEE*. 1991. Vol. 138. No. 5. P. 205–218.
102. Nategh S., Wallmark O., Leksell M., Zhao S. Thermal analysis of a PMaSRM using partial FEA and lumped parameter modeling. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2012. Vol. 27. No. 2. P. 477–488.

103. Staton D., Cavagnino A. Convection Heat Transfer and Flow Calculations Suitable for Electric Machines Thermal Models. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2008. Vol. 55. No 10. P. 3509–3516.

104. Mahdavi S. and all. Thermal Modeling as a Tool to Determine the Overload Capability of Electrical Machines. *International Conference on Electrical Machines and System*, Busan, Korea, October 26–29 2013. Busan, 2013. P. 454–458.

105. Krings A., Mousavi S. A., Wallmark O., and Soulard J. Temperature influence of NiFe steel laminations on the characteristics of small slot-less permanent magnet machines. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2013. Vol. 49. № 7. P. 4064–4067.

106. Осташевский Н. А., Шайда В. П. Математическая модель теплового состояния частотно управляемого асинхронного двигателя в нестационарных режимах. *Электромашиностроение и электрооборудование*. 2010. № 75. С. 46–51.

107. Петрушин В. С., Якимец А. М. Особенности тепловых расчетов неустановившихся режимов работы регулируемых асинхронных двигателей. *Электромашиностроение и электрооборудование*. 2008. № 71. С. 47–51.

108. Анучин А. С., Федорова К. Г. Двухмассовая тепловая модель асинхронного двигателя. *Электротехника*. 2014. № 2. С. 21–25.

109. Зализный Д. И., Широков О. Г., Попичев В. В. Адаптивная математическая модель тепловых процессов асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором. *Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого*. 2015. № 1. С. 31–43.

110. Счастливым Г. Г., Бандурин В. В., Остапенко В. Н., Остапенко С. Н. Математические модели теплопередачи в электрических машинах. Киев: Наукова думка, 1986. 183 с.

111. Matyuschenko A. V. Analysis of thermal state of traction brushless permanent motor for mine electric locomotive. *Electrical engineering & electromechanics*. 2016. No. 6. P. 15–18.

112. Jingang Bai, Yong Liu, Yi Sui, Chengde Tong, Quanbin Zhao and Jiawei Zhang. Investigation of the Cooling and Thermal-Measuring System of a Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Energies*. 2014. No 7. P. 1393–1426.

113. Peixin Liang, Feng Chai, Yi Li, and Yulong Pei Analytical Prediction of Magnetic Field Distribution in Spoke-Type Permanent-Magnet Synchronous Machines Accounting for Bridge Saturation and Magnet Shape. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*. 2017. Vol. 64. Issue 5. P. 3479–3488.

114. Eklund Petter, Sjölund Jonathan, Eriksson Sandra, Leijon Mats *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*. 2017. Vol. 11. No 3. P. 605–610.

115. Peixin Liang, Yulong Pei, Feng Chai and Shukang Cheng *COMPEL International Journal of Computations and Mathematics in Electrical*. 2015. Vol. 35. P. 3457–3462.

116. Dang Hoang K., Atallah K., Lazari P., Birchall J., Calverley S. Thermal Analysis and Control Development of Interior PM Traction Machines. *IECON 2019: Proceedings of 45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Lisbon, Portugal, 14-17 October 2019. Lisbon, 2019. P. 1399–1404,

117. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П. Теплова умова спряження у двошаровій області. *Вісник ХНТУ*. 2019. Вип. 2(69). Ч.3. С. 112–117.

118. Земенков Ю. Д., Моисеев Б. В., Налобин Н. В., Дудин С. М. Распределение температуры многослойного ортотропного цилиндра. *Современные наукоемкие технологии*. 2015. № 12. С. 601–605.

119. Матяшов Д. М., Губеладзе О. А. Определение температурного поля в двухслойном толстостенном цилиндре конечных размеров при действии источника тепла постоянной мощности. *Известия ЮФУ: сер. Технические науки*. №11 (88). С. 25–29.

120. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференц. Уравнения*. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
121. Данилкина О. Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием. *Вестник СамГТУ*. 2007. № 1(14). С. 5–9.
122. Данилкина О. Ю. Нелокальная задача для параболического уравнения. *Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения*. Рязань: Рязанский государственный университет. 2006. Т. 11. С. 70–71.
123. Данилкина О. Ю. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения. *Вестник СамГУ*. 2007. № 6(56). С. 141–154.
124. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода. *Изв. вузов. Матем.* 2012. № 4. С. 74–83.
125. Пулькина Л. С. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Инс-т. мат. СО РАН, 2005. С. 231–239.
126. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. Москва: Машиностроение, 1988. С. 107–121.
127. Іванчов М. І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. Київ: [б.в.], 1995. 84 с. – (Препр.: Ін-т системних досліджень освіти.)
128. Іванчов М. І., Сагайдак Р. В. Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболическому рівнянні. *Математичні методи та фіз.-мех. поля*. 2004. № 1. С. 7–16.
129. Иванчов Н. И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. *Укр. мат. Журнал*. 1993. Т. 45. № 8. С. 1066–1071.

130. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения. *Матем. сб.* 2013. Т. 204. № 10. С. 3–46.

131. Митропольський Ю. О., Мосєєнков Б. І. Лекції по застосуванню асимптотичних методів до розв'язку рівнянь у частинних похідних. Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1968. 414 с.

132. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Властивості 2π -періодичного розв'язку крайової задачі [Електронний ресурс]. *Доповіді НАН України*. 2010. № 10. С. 18–21.

133. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287 с.

134. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. Киев: Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, Наук. Думка, 2014. 339 с.

135. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. Москва: Наука, 1981. 416 с.

136. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло и массопереноса в пористых средах. Киев: Наукова думка, 1991. 264 с.

137. Ляшко И. И., Мистецкий Г. Е., Бугай Д. А. Численное интегрирование многомерного уравнения конвективной диффузии. *Вычислительная и прикладная математика*. 1989. Вып. 67. С. 50–55.

138. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса. Киев: Наукова думка, 1983. 352 с.

139. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. Киев: Наукова думка, 1995. 263 с.

140. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наукова думка, 2001. 606 с.

141. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наукова думка, 1998. 615 с.
142. Ляшенко В. П., Демьянченко О. П. К расчету температурного поля теплоизлучающего полого цилиндра. *Вестник ХГТУ*. 2002. Т. 2. № 15. С. 154–159.
143. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецкий В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Киев: Наукова думка, 2007. 92 с.
144. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 221 с.
145. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд. Москва: Наука, 1989. 616 с.
146. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
147. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. Москва: Наука, 2003. 316 с.
148. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
149. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Задачи с условиями сопряжения и высокоточные вычислительные алгоритмы их дискретизации. *Кибернетика и системный анализ*. 1999. № 6. С. 100–124.
150. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробагатько А. А. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики). Киев: Вища шк., 1977. 408 с.
151. Процюк Б. В., Горун О. П. Термопружний стан безмежного трискладового тіла за періодичної дії теплового потоку. *Вісник Донецького національного університету: сер. Природничі науки*. 2013. № 2. С. 64–70.

152. Процюк Б. В., Горун О. П., Можаровський В. В. Температурне поле безмежного трискладового термочутливого тіла під дією імпульсного теплового потоку. *Сучасні проблеми механіки та математики*: тези доп. Міжн. наук. конф., м. Львів, 2013. С. 164–166.

153. Изотов Б. В., Шаламов Ю. Н., Безчерев А. С. Математическое моделирование тепловой работы методической печи с импульсным отоплением. *Вісник Приазовського державного технічного університету*. 2009. Вип. 19. С. 222–226.

154. Прибытков И. А. О распределении тепловой нагрузки при импульсно-скоростном нагреве металла. *Известия вузов. Черная металлургия*. 1997. № 7. С. 66–69.

155. Березовский А. А., Ляшенко В. П. Об электроконтактном нагреве прутков. *Металлургия вольфрама и молибдена*. 1982. Т. 12. № 5. С. 48–50.

156. Березовский А. А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. Киев: Наукова думка, 1968. 165 с.

157. Березовский А. А., Ляшенко В. П. Температурное поле зоны электроконтактного нагрева движущейся проволоки. *Численно-аналитические методы решения задач теплопроводности и электродинамики*. 1979. С. 43–52.

158. Сидоренко С. И., Березовский А. А., Волошко С. М. Нелинейные задачи массопереноса. Киев: Наукова думка, 2002. 447 с.

159. Сидоренко С. И., Березовский А. А., Максимович Л. П., Никитина И. О. Взаимодиффузия с реакцией в системе двух контактирующих пленок. *Металлофизика и новейшие технологии*. 1998. № 11. С. 24–28.

160. Коляно Ю. М., Кулик А. П. Температурные напряжения от объемных источников. Киев: Наукова думка, 1983. 280 с.

161. Коляно Ю. М., Гирняк О. Ф. Учет скорости распространения тепла при определении двумерных динамических температурных

напряжений в полубесконечной пластинке. *Проблемы прочности*. 1971. № 6. С. 82–84.

162. Накорчевский А. И. Сопряженные задачи нестационарной теплопроводности при переменных внешних условиях. *Инженерно-физический журнал*. 1999. Т. 72. № 4. С. 782–791.

163. Забелин С. Ф., Тихонов А. С., Белов В. В. Повышение конструктивной прочности цементованных деталей термоциклической обработкой. Пути повышения конструктивной прочности металлов и сплавов. Москва: ВСНТО Маш. Пром., 1982. С. 195–198.

164. Термоциклическая обработка сталей, сплавов и композиционных материалов / под ред. М. Х. Шоршорова. Москва: Наука, 1984. 186 с.

165. Кобильська О. Б. Нелокальні та крайові задачі для рівняння теплопровідності у металургії: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. Харків, 2011. 19 с.

166. Дутка В. А. Комп'ютерне моделювання температурного поля в процесі спікання карбідних композитів при використанні індукційного та променевого нагрівання. *Сверхтвердые материалы*. 2013. № 1. С. 40–55.

167. Попович В. С., Заводовська Н. О. Термочутливий циліндр за конвективного теплообміну зі середовищами змінної температури. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. Т. 50. № 1. С. 25–31.

168. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища. *Вісник Запорізького національного університету: сер. Фізико-математичні науки*. 2008. № 1. С. 130–135.

169. Попович В., Заводовська Н. Температурне поле скінченного термочутливого циліндра за конвективного теплообміну з середовищами змінних температур. *Вісник ТНТУ*. 2013. № 4. С. 252–260.

170. Громик А. П., Конет І. М. Математичне моделювання нестационарних процесів теплопровідності в напівобмежених

багатошарових просторових середовищах. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. 2011. № 7. С. 76–82.

171. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. Чернівці: Прут, 2001. 312 с.

172. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.

173. Громик А. П., Конет І. М. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь*. 2007. Вип. 15. С. 67–82.

174. Ляшенко В. П., Григорова Т. А. Моделювання процесів спікання у контейнері. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2010. № 3(39). С. 292–296.

175. Тришевський О. І., Салтавець М. В. Система реєстрації температури в процесах обробки металів тиском. *Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні*. 2005. С. 107–110.

176. Тришевский О. И., Салтавец Н. В. Разработка математической модели теплового состояния валков при прокатке. *Сталь*. 2011. № 12. С. 22–23.

177. Тришевський О. І., Салтавець М. В., Бондаренко С. М. Аналіз теплового стану валків гарячої прокатки смуги при існуючих та перспективних схемах їх охолодження. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2012. № 47(953). С. 199–204.

178. Данченко В. Н. Прогрессивные процессы обработки металлов давлением. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. 2011. № 7. С. 1–8.

179. Минаев А. А. Совмещенные металлургические процессы. Донецк: Технопарк Дон ГТУ УНИТЕХ, 2008. 522 с.

180. Колпаков С. В. Энергосбережение в металлургии. *Сталь*. 2004. № 3. С. 71–73.
181. Парсункин Б. Н., Андреев С. М., Бушманова М. В. Оптимизация управления тепловым режимом нагревательных печей. *Сталь*. 2003. № 9. С. 65–67.
182. Тришевський О. І., Салтавець М. В. Поділ слябів сіткою при рішенні двовірної задачі нестационарної теплопровідності явним кінцево-від'ємним методом. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2015. № 48 (1167). С. 45–49.
183. Мартинсон Л. К., Чигирева О. Ю. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана: сер. Естественные науки*. 2015. № 3 С.88–98.
184. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. Москва: Наука, 1981. 216 с.
185. Венгеров И.Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели. Монография в 2-х томах. Базисные модели. Донецк: Донбасс, 2012. Т. 2. 684 с.
186. Рябов А. В., Неволин Д. В., Потапов В.И. Математическое моделирование обработки расплава порошковой проволокой. *Вестник ЮУрГУ: сер. Металлургия*. 2013. Т. 13. № 1. С. 194–198.
187. Тураев Т.Т., Батиров Я.А., Тожиев Б.А. Модернизация процесса волочения проволочного изделия. *Universum: технические науки: электрон. научн. журн.* 2019. № 3 (60). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/7049> (дата обращения: 14.11.2020)
188. Гурьянов Г.Н., Клековкина Н.А., Железков О.С., Баталов Г.В. Необходимость обеспечения требуемой точности для диаметра проволоки и её однородных механических свойств с целью повышения качества геофизических кабелей и винтовых пружин. *Метизы*. 2011. № 1 (23). С. 42–14.
189. Пачурин Г.В. Филиппов А.А.Эффект пластической деформации при волочении и термической обработки на структуру и свойства стального

проката. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2014. № 8 (Ч. 2). С. 93–98

190. Kustra P. [etc.] The process of ultra-fine wire drawing for magnesium alloy with the guaranteed restoration of ductility between passes. *Journal of Materials Processing Technology*. 2017. № 247. P. 234–242.

191. Kang S. H. [etc.] Deformation and heat treatment of cold drawn gold. *International Symposium on Fundamentals of Deformation and Annealing: Materials Science Forum*. Manchester (United Kingdom). 2007. № 550. P. 289 – 294.

192. Гурьянов Г. Н., Смирнов С. В. Выбор параметров деформации волочения проволоки на основе допустимых значений коэффициента запаса прочности и показателя напряженного состояния. *Проблемы черной металлургии и материаловедения*. 2017. № 4. С. 5–12.

193. Колмогоров Г. Л., Кошелева Н. А. Температурные режимы и критические скорости при волочении проволоки. *Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия*. 2016. № 3. С. 34–39.

194. Колмогоров Г. Л., Чернова Т. В., Бурдина Ю. А. Эффективность оптимизации геометрии технологического инструмента для волочения. *Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова*. 2015. № 3 (51). С. 55–58.

195. Васильев Г. П., Личман В. А., Песков Н. В. Численный метод оптимизации прерывистого режима отопления. *Математическое моделирование*. 2010. Т. 22. №11. С. 123–130.

196. Камынин В. Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения. *Математические заметки*. 2005. Т. 77. Вып. 4. С. 522–534.

197. Царькова Н. В. Обратная задача для уравнения колебаний струны с интегральным условием переопределения. *Математическое моделирование и краевые задачи: труды третьей Всероссийской научной конференции*. Самара: Изд-во СамГТУ, 2006. Часть 3. С. 221–223.

198. Кобильська О. Б. Дослідження нелокальної задачі для рівняння параболічного типу з інтегральною умовою. *Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів*. (Харків, 8–11 листопада 2010 р.) Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2010. С. 32.

199. Ляшенко В. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Вісник Київського університету: сер. Фізико-математичні науки*. 2010. № 4. С. 104–111.

200. Лукин С. В., Кочкин А. А., Кибардин А. Н., Антонова Ю. В., Мухин В. В., Игонин В. И. Алгоритм оптимизации режимов охлаждения термостатирования и нагрева слябов на линии «МНЛЗ - нагревательная печь». *Вестник Череповецкого государственного университета*. 2017. №2 (77). С. 23–30.

201. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 458 с.

202. Туголуков Е. Н., Карпук В. А., Рухов А. В. Решение обратных задач теплопроводности для многослойных тел канонической формы. *Вестник ТГТУ*. 2013. Т. 19. № 3. С. 577–583

203. Зайнуллов А. Р. Обратные задачи для уравнения теплопроводности. *Вестник СамГУ*. 2015. № 6(128). С. 62–75.

204. Сабитов К. Б. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2013. 352 с.

205. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 550 с.

206. Баранов Ю. В., Троицкий О. А., Авраамов Ю. С., Шляпин А. Д. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы. Москва: Изд-во МГИУ, 2001. 844 с.

207. Савицкий Е. М. Монокристаллы тугоплавких и редких металлов. Москва: Наука, 1971. 184 с.

208. Троицкий О. А., Сташенко В. И. Электропластическое резание металла. *Черная металлургия. Бюллетень научно-технической и экономической информации*. 2019. 75(6). С.735–740.
209. Асташов В. К., Разинкин А. В. Моделирование термомеханических процессов при ультразвуковом резании методом конечных элементов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2008. № 3. С. 68–74.
210. Скворцов О. Б., Сташенко В. И., Троицкий О. А. Упругие деформации проводников при действии импульсов тока. *Машиностроение и инженерное образование*. 2018. № 1. С. 33–42.
211. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 699 с.
212. Карманов В. Г. Математическое программирование. Москва: Физматлит, 2008. 264 с.
213. Хайрисламов М. З. Численное решение квазилинейного уравнения теплопроводности в задаче нагревания цилиндра движущимся теплоисточником. *Вестник ЮУрГУ*. 2015. Т. 7. № 3. С. 58–64.
214. Richtmyer R. D. Difference Methods for Initial Value Problems. New York: Interscience, 1957. 405 pp.
215. Khachfe R. A., Jarny Y. Numerical solution of 2-D non linear inverse heat conduction problems using finite element techniques. Numerical Heat transfer. *International Journal of Computation and Methodology*. 2000. Part B. 37. С. 45–68
216. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Киев: Наукова Думка, 2002. 408 с.
217. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
218. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988. 288 с.

219. Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами. *Известия РАН.* 2009. № 3. С. 22–33.

220. . Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами. *Автометрия.* 2009. Т. 45. № 5. С. 103–112.

221. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности. *Известия РАН. Энергетика.* 2002. № 5. С. 144–155.

222. Ляшенко В. П., Касьян Н. Н., Колесник А. С., Щекотихина Л. А. Применение блоков прецизионного интегрирования для автоматизации управления циклическими процессами в порошковой металлургии. *Научные разработки на службу технического перевооружения производства.* Кременчуг, 1990. 45 с.

223. Ляшенко В. П. Математична модель термоциклічної обробки металевих матеріалів. *Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету.* 2003. Вип. 6/2003 (23). С. 8–11.

224. Ляшенко В. П. Математичні моделі та методи розв'язку крайових задач у рухомій циліндричній області. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2012. Вип. 5/2012 (76). С. 28–33.

225. Ляшенко В. П., Ванін В. А. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії. *Вісник НТУ «ХПІ». Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2010. Вип. 68. С. 108–113.

226. Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. Рівне: Ассоль, 2016. 283 с.

227. Веселовский В. Б. Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 2002. 436 с.

228. Геренштейн А. В., Геренштейн Е. А., Машрабов Н. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности. *Вестник ЮУрГУ: сер. Математика. Механика. Физика*. 2010. № 9. С. 4–7.

229. Геренштейн А. В., Геренштейн Е. А., Машрабов Н. Устойчивые явные схемы уравнения теплопроводности для осесимметричной задачи. *Вестник ЮУрГУ: сер. Математическое моделирование и программирование*. 2008. № 15(115). С. 9–11.

230. . Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Москва: Наука, 1977. 440 с.

231. Григорова Т. А., Ляшенко В. П. Дослідження температурного поля двохшарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2010. Вип. 13. № 890. С. 47–52.

232. Дейнека В. С., Дианова Т. В., Кривонос И. Ю. Численное моделирование процессов в многокомпонентных средах с учетом разрывов полей и потоков: в 2 ч. Киев: Ин-т кибернетики, 1997. 69 с. (Препринт. Ин-т кибернетики НАН Украины).

233. Дейнека В. С. Математические модели и методы исследования процессов в составных цилиндрических стенках подземных хранилищ. Киев: Ин-т кибернетики, 2000. 48 с. (Препринт. Ин-т кибернетики НАН Украины)

234. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992. 279 с.

235. Ляшенко В. П., Аниськов О. В. Математична модель прокатки тонкої і надтонкої стрічки із тугоплавких і важкодеформованих металів.

Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. 2016. Вип. 42. С. 68–72.

236. Туголуков Е. Н., Карпук В. А., Рухов А. В. Решение обратных задач теплопроводности для многослойных тел канонической формы: *Вестник ТГТУ*. 2013. № 3. С. 577-583.

237. Усов А. В., Оборский Г. А., Дашенко А. Ф., Дмитришин Д. В. Моделирование систем. Одесса: Астропринт, 2013. 661 с.

238. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: кол. моногр. Рівне: О. Зень, 2017. 291 с.

239. Bomba A., Hladka O. Problems of Identification of the Parameters of Quasiideal Filtration Processes in Nonlinear Layered Porous Media. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2017. Vol. 220. Issue 2. P. 213 – 225.

240. Bomba A. Yu., Kuzlo M. T., Michuta O. R., Boichura M.V. On a method of image reconstruction of anisotropic media using applied quasipotential tomographic data. *Mathematical Modeling and Computing*. 2019. Vol. 6 (2). P. 211–219.

241. Bomba A., Safonyk A. Mathematical Simulation of the Process of Aerobic Treatment of Wastewater under Conditions of Diffusion and Mass Transfer Perturbations. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. Vol. 91. Issue 2. P. 318 – 323.

242. Скоб Ю. А., Угрюмов М. Л. Математическое моделирование последствий испарения аварийного пролива токсичного вещества на железнодорожном транспорте. Наука та прогрес транспорту. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту*. 2018. № 3 (75). С.52–63.

243. Atalyilmaz S. O. Experimental and numerical study of natural convection heat transfer from horizontal concentric cylinders. *International Journal of Thermal Sciences*. 2011. № 50. P. 1472–1483.

244. Botte G. G., Ritter and J. A., White R. E. Comparison of finite

difference and control volume methods for solving differential equations. *Computers and Chemical Engineering*. 2000. № 24. P. 2633–2554.

245. Nezhad Y. R., Asemi K., Akhlaghi M. Transient solution of temperature field in functionally graded hollow cylinder with finite length using multi-layered approach. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2011. № 7. P. 71–82.

246. Угрюмова Е. М., Волков С. Г., Угрюмов М. Л. Совершенствование сложных технических систем методом обратных задач. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2006. № 1. С. 91–95.

247. Ільків В. С., Магеровська Т. В. Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку. *Вісник Нац. університету «Львівська політехніка»: сер. Фіз.-мат. науки*. 2008. Вип. 625. С. 12–19.

248. Гасанов А. Б., Ильясов М. Х., Кийко И. А. Распространение нестационарных волн в вязкоупругом полупространстве с учетом внутреннего теплообразования и зависимости свойств материала от температуры. *Известия АН СССР, Механика твердого тела*. 1987. № 1. С. 124–130.

249. Ильясов М. Х., Гасанов А. Б. Нестационарные термовязкоупругие волны. Москва: ВИНТИ. 1982. 31 с.

250. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 309 с.

251. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 520 с.

252. Демьянченко О. П., Нартова О. Г. Температурное поле неограниченного теплоизлучающего цилиндра. *Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения*. Киев: Ин-т математики НАН Украины. 1999. С. 80–84.

253. Дяконюк Л. М., Савула Я. Г. Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям. *Вісник Львів. Університету: сер. Мех.-мат. науки*. 1998. Вип. 50. С. 93–95.

254. Евдокимов Д. В., Ивасишина Д. Н., Кочубей А. А., Поляков Н. В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое. *Дифференціальні рівняння та їх застосування*. Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. 2006. С. 141–156.

255. Kravchenko O., Suvorova I., Baranov I., Goman V. Hydrocavitation activation in the technologies of production and combustion of composite fuels. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. 4 /5 (88). P. 33–42.

256. Кравченко О. В., Суворова И. Г., Баранов И. А., Велигоцкий Д. А. Влияние водорода на течение и теплообмен в системе «трещина горной породы – флюид». *Інтегровані технології та енергозбереження. Щоквартальний науково-практичний журнал*. 2018. № 3. С. 35 – 47.

257. Suvorova I., Kravchenko O., Veligotskiy D., Goman V. Theoretical Foundations of Optimising Processes in Energy Conversion Systems to Increase the Effectiveness and Ecological Safety of Their Functioning . *European Journal of Sustainable Development*. 2019. 8/5. P. 171– 179.

258. Лучко Й. Й., Гембара В. М., Гембара Н. О. Моделювання теплопровідності тонких плит з багат шаровим покриттям. *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій: зб. наук. праць Фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка*. 2004. Вип. 6. С. 65–70.

259. Загирняк М. В., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Милевич Д. Моделирование процесса спекания изделий из порошковых материалов. *Порошковая металлургия*. 2010. № 11/12. С. 150–155.

260. Ляшенко В. П., Слесаренко А. П. Розрахунок температурного поля у двошаровому циліндрі. *Вісник КрНУ ім. М. Остроградського*. 2011. Вип. 6(71). Ч. 1. С. 63–68.

261. Ляшенко В. П. Температурное поле бесконечного цилиндра с движущимся источником тепла. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2013. Вип. 21. № 1058. С. 97–103.
262. Слесаренко А. П., Демьянченко О. П., Сафонов Н. А. Аналитическое моделирование тепловых процессов в теплоизлучающих телах с использованием S-функций. *Доповіді НАН України. Математика. Природознавство*. 2015. № 5. С. 71–76.
263. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях. *Проблемы машиностроения*. 2002. Т. 5. № 4. С. 72–80.
264. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
265. Haji-Sheikh A., Beck J. V. Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. 45. P. 1865–1877.
266. Garbai L., Krope J., Mehes S., Bartal I. Transient heat conduction in composite systems. *International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment: Proceedings of the 4th WSEAS International Conference, Elounda, Greece, August 21-23, 2006*. Elounda, 2006. P. 372–379.
267. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ: Либідь, 2014. 363 с.
268. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ: Либідь, 2004. 408 с.
269. Усов А. В., Савельєва О. С., Становська І. І., Перпері А. О. Математичні методи моделювання. Одеса: Пальміра, 2011. 498 с.
270. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. 489 с.

271. Шалумов М. А., Шалумов А. С. Фундаментальные основы моделирования тепловых процессов в радиоэлектронных средствах. *Фундаментальные исследования*. 2013. № 10. С. 1027–1032.
272. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. Москва: Энергия, 1975. 483 с.
273. Интеллектуальное моделирование физических проблем / под ред. Л. Н. Ясницкого. Москва Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2006. 200 с.
274. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры: 2-е изд., испр. Москва: Физматлит, 2005. 320 с.
275. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 550 с.
276. Levy G. N., Schindel R., Kruth J. P. Rapid manufacturing and rapid tooling with layer manufacturing (LM) technologies, state of the art and future perspectives. *CIRP Ann Manuf Technol*. 2003. 52. P. 589–609.
277. Adam G. A., Zimmer D. O. Design for additive manufacturing—element transitions and aggregated structures. *CIRP J Manuf Sci Technol*. 2014. 7. P. 20–28.
278. Childs T. H. C., Berzins M., Ryder G. R., Tontowi A. Selective laser sinter-ing of an amorphous polymer—simulations and experiments. *Proc Inst Mech Eng B*. 1999. No 213. P. 333–349
279. Bikas H., Stavropoulos P., Chryssolouris G. Additive manufacturing methods and modelling approaches: a critical review. *Int J Adv Manuf Technol*. 2016. 83/1–4. P. 389–405.
280. Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies: 3D Printing, Rapid Prototyping, and Direct Digital Manufacturing. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2015. 498 p.
281. Michaleris P. Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes. *Finite Elem Anal Des*. 2014. 86. P. 51–60.

282. LiY. Gu D. Parametric analysis of thermal behavior during selective laser melting additive manufacturing of aluminum alloy powder. *Mater Des.* 2014. 63. P. 856–867.

283. Riedlbauer D., Drexler M., Drummer D., Steinmann P., Mergheim J. Modelling, simulation and experimental validation of heat transfer in selective laser melting of the polymeric material PA12. *Comput Mater Sci.* 2014. 93. P. 239–248.

284. Dong L., Makradi A., Ahzi S., Remond Y. Three-dimensional transient finite element analysis of the selective laser sintering process. *J Mater Process Technol.* 2009. № 209. P. 700–706

285. Kolossov S., Boillat E., Glardon R., Fischer P., Locher M. 3D FE simulation for temperature evolution in the selective laser sintering process. *Int J Mach Tools Manuf.* 2004. 44. P. 117–123.

286. Liu F.R., Zhang Q., Zhou W.P., Zhao J. J., Chen J. M. Micro scale 3D FEM simulation on thermal evolution within the porous structure in selective laser sintering. *J Mater Process Technol.* 2012. P. 2058–2065

287. Loh L. E., Chua C. K., Yeong W. Y., Song J., Mapar M., Sing S. L., Liu Z. H., Zhang D. Q. Numerical investigation and an effective modelling on the selective laser melting (SLM) process with aluminium alloy 6061. *Int J Heat Mass Transf.* 2015. 80. P. 288–300

288. Ganeriwala R., Zohdi T. I. Multiphysics modeling and simulation of selective laser sintering manufacturing processes. *Procedia CIRP.* 2014. 14. P. 299–304.

289. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands. The Feynman lectures on physics. Mainly Electromagnetism and Matter. New York: New millennium edition, 2010. Vol. 2. 410 p.

290. Галанин М. П. , Попов Ю. П., Уразов С. С. Численное моделирование квазистационарных электромагнитных полей в многосвязных областях и областях с изменяющимися во времени границами. *Матем. Моделирование.* 2007.19:4.С. 3–18

291. Тамм И. Е. Основы теории электричества 10-е изд., испр. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 504 с.
292. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика электродинамика сплошных сред 2-е изд., испр. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 621 с.
293. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для вузов. Москва: Высшая школа, 1987. 248 с.
294. Cooper Jeffery. Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. Boston: Birkhäuser, MA, 1998. 294 p.
295. Woodford C., Phillips C. Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition. Dordrecht: Springer, 2011. 266 p.
296. Paepe De., Simon P., Moerkerke I., Hermann J. C. Controlling the temperature of the bar at the inlet to the finisher. *ECSC Steel RTD Programme*. 2000. P. 1–9.
297. . Борисенко А. И., Костиков О. Н., Яковлев А. И. Охлаждение промышленных электрических машин. Москва: Энергоатомиздат 1983. 296 с
298. Демьянченко О. П., Ляшенко В. П. Математическая модель температурного поля в сферической области. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали Всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2016 р.* Кременчук, 2016. С. 64–65.
299. Кикоин И. К. Таблицы физических величин. Москва: Атомиздат, 1976. 1009 с.
300. Eck Ch., Garcke H., Knabner P. Mathematical Modeling. Springer International Publishing AG, 2017. 509 p.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

1. Влияние высокоэнергетических воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов: сер. Фундаментальные проблемы современного материаловедения/ А. В. Аниськов, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. В.Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2013. 375 с.
2. Влияние внешних энергетических воздействий на структуру, фазовый состав и свойства материалов / В. П. Ляшенко, Е.Б. Кобыльская и др.; под. ред. В.Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2012. 320 с.
3. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов / О. А.Троицкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под. ред. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2011. С. 2011. 210 с.
4. Ляшенко В. П, Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 6. Ч. 1. С. 37–43. (*index copernicus*)
5. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б., Бриль Т.С., Дем'янченко О.П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 133–137.
6. Родькин Д.Й., Ченчевой В.В., Кобыльская Е.Б. Нелинейные преобразования с рядами Фурье в применении к задачам электротехники. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчук: КрНУ. 2015. Вип. 1(29). С. 82–93.
7. Ляшенко В.П., Черненко В.П., Кобильська О.Б., Анісков А.В. Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації.

Вісник Херсонського національного технічного університету. 2014. Вип. 3(50). С. 350–354. (РИНЦ (eLibrary)).

8. Kobilskaya O., Lyashenko V. Mathematical model of thermal process with an unknown source. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 6/2016 (101). Ч. 1. С. 41–45. (index copernicus)

9. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Відновлення імпульсного джерела тепла в задачі теплопровідності. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 2/2016 (97). Ч 1. С. 27–32. (index copernicus).

10. Кобильська О. Б. Задача керування джерелом тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 17. С. 65–71.

11. Кобильська О. Б. Обернена нелокальна задача з умовою інтегрального перевизначення. *Математичне та комп'ютерне моделювання: сер. Фізико-математичні науки*. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ. 2012. Вип. 7. С. 118–124. (BASE, Citefactor, General Impact Factor (GIF) та ін).

12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Застосування ітераційних методів до визначення параметрів керування температурним полем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2012. Вип. 4/2012 (75). С. 34–37. (index copernicus).

13. Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. Copper strip electroplastic rolling. *Metalurgical and Mining Industry*. 2015. № 2. Р. 294 – 299. (scopus).

14. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471. (РИНЦ (eLibrary)).

15. Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння. *Вісник Харківського національного*

університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2013. Вип. 21 (№ 1058). С. 43–49.

16. Кобильська О. Б. Моделювання імпульсного теплового процесу. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2013. Вип. 22 (№ 1063). С. 84–89.

17. Черненко В.П., Кобильська О. Б. Нестационарні поздовжні хвилі в спадково-пружній циліндричній оболонці. *Вісник Тернопільського НТУ імені Івана Пулюя.* 2012. Вип. № 4 (68). С. 28–34.

18. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Троицкий О.А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2011. Вип. 4/2011 (69). Ч 1. С. 57–62.(index copernicus).

19. Троицкий О. А., Стащенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. *Питання атомної науки і техніки.* 2011. Вип. 4/2011. С. 111 – 117. (scopus, web of science).

20. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2012. Вип. 19 (№ 1015). С. 167–172.

21. Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Математична модель теплообміну у валковому калібрі. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2019. Вип. 42 (№ 1015). С. 55–64.

22. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent

Magnet Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету*

ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2020. Вип. 45. С. 41–49.

23. Kobilskaya E., Lyashenko V., Hryhorova T. Integral conditions in the inverse heat conduction problems. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. [Vol. 7. № 2](#). P. 219–227. (scopus).

24. Kobilskaya E., Lyashenko V. A method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2020. Вип. 46. С. 25–36.

25. Lyashenko V., Rod'kin D., Kobilskaya E., Martynenko M., Demyanchenko O. Thermal Process Mathematical Model in Electrical Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2017. P. 296–299. (IEEE, scopus).

26. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobilskaya E., Lyashenko V. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2017. [Vol. 1895. Issue 1](#). P. 090004-1–090004-9. (scopus).

27. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2016. [Vol. 1773. Issue 1](#). P. 040005-1 – 040005-7. (scopus).

28. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2014. Vol. 1629. Issue 1. P. 94–101. (scopus).

29. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact of Boundary-value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2015. Vol. 1684. Issue 1. P.080009-1 – 080009-10. (scopus).

30. Kobilskaya E., Lyashenko V., Demyanchenko O., Nabok T. Thermal Process in Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2019. P. 334–338. (IEEE, scopus).

31. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Nabok T. Temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2019. [Vol. 2164. Issue 1](#). P. 060018 – 080009. (scopus).

32. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Hryhorova T. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2018. [Vol. 2025. Issue 1](#). P. 080006-1–080006-7. (scopus).

33. Aniskov A., Lyashenko V., Kobilskaya E. The process control of electroplastic deformation ultrafine wire. *Proceeding of scientific and student's works in the field of Industrial Electrical Engineering*. 2013. Vol. 2. Part 1. Kosice, Slovakia. P. 87–90.

34. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового стану електричної машини. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях: пр. міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р.* Харків, 2018. С. 190 –192.

35. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Сучасні проблеми математичного моделювання,*

обчислювальних методів та інформаційних технологій: тези доп. міжнар. наук. конф., м. Рівне, 2–4 березня 2018 р. Рівне, 2018. С. 65.

36. Беззубченкова Т. С., Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 55–57.*

37. Жердєва А.І., Кобильська О. Б. Математичні моделі та методи розв'язку лінійних та нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 58–60.*

38. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Заїка А. В., Жердєва А. І. Розрахунок умов теплової рівноваги під час роботи електричної машини. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 17–20.*

39. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: материалы междунар. симпозиума, г. Харьков, 26–28 июня 2017 г. Харьков, 2017. С. 59 – 62.*

40. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Нелокальні задачі відновлення джерел тепла. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем: матеріали II всеукр. наук.-техн. конф. з міжнар. участю, м. Дніпро, 1–3 листопада 2016 р. Дніпро, 2016. С.71–72.*

41. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving Inverse Nonlocal Problems for Parabolic Equations. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Eight International Conference, Albena, 22–27 June 2016. Albena (Bulgaria), 2016. P. 37–38.*

42. Кобильська О. Б., Заїка А. В., Дем'янченко О. П. Алгоритм чисельного розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами

теплообміну. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 72–73.*

43. Кобильська О. Б., Черненко В. П. Моделювання поширення нестационарних повздовжніх хвиль напруги в поропружному стрижні. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С.62–63.*

44. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Математическая модель механического поведения вязкоупругого материала под действием периодической нагрузки. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 22–25 вересня 2015 г. Кременчук, 2015. С. 91–92.*

45. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Григорова Т. А. Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях: тр.международ. науч.-практ. конф., г. Харьков, 26–31 мая 2016 г. Харьков, 2016. С. 219 – 222.*

46. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Енергетичні умови в математичних моделях для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика: матеріали всеукр. наук. конф. м. Кременчук, 22–25 вересня 2015г. Кременчук, 2015. С. 116–117.*

47. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact Boundary Value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Seventh International Conference . 28 June – 3 July 2015, Albena, Bulgaria. Albena (Bulgaria), 2015. P. 45.*

48. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: book of abstracts Sixth International Conference. Albena, 1 July – 26 June 2014. Albena (Bulgaria), 2014. P. 28–29.*

49. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of process control system of wire drawing. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 28–31 мая 2014 г., Харьков, 2014. С. 259 – 261.

50. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of Process Control System of Wire Drawing. *37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics “MIPRO 2014”*, Opatija 26–30 May 2014. Opatija (Croatia), 2014. – P. 31

51. Bryl T., Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. System of control of pulse processing with hyperfine wire during electroplastic deformation. *XV International PhD Workshop OWD 2013*: conference archives PTETIS, Wisla, 19–22 october 2013. Vol.33. Wisla, 2013. P. 74 – 79.

52. Zagirnyak M., Kobilskaya E., Lyashenko V., Salenko A. Heat Surce Control During Additive Processes. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Twelfth International On-Line Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena, 24–29 June 2020. San Diego (Bulgaria), 2020. P. 53.

53. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Яковлева Д. М. Моделювання теплового процесу під час ультразвукового електропластичного плющення металу. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2013 г. Харьков, 2013. С. 242–245.

54. Kobilskaya E. Modeling of temperature distribution of the mobile enviroment with pulse sources of heat. *XIV International PhD Workshop OWD 2012*: conference archives PTETIS. Wisla, 19–22 october 2012. Vol.31. Wisla, 2012. P. 210–213

55. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Определение параметров управления процессом электропластической деформации. *Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими*

токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах: материалы междунар. конф., г. Туапсе (Россия), 8–15 сентября 2012 г. Туапсе, 2012. С. 154–160.

56. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали конф., м. Київ, 10–11 вересня 2012 р. Київ, 2012. С. 66.

57. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв'язання задачі з рухомою границею. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 23–27 апреля 2012 г. Харьков, 2012. С. 278 – 280.

58. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Слесаренко А. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2011 г., Харьков, 2011. С. 211–214.

59. Kobilskaya E., Zaika A. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Tenth International Conference Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, 20–25 June 2018. Albena (Bulgaria), 2018. P. 39.

ДОДАТОК Б



J'atteste Guennadi OSSOKINE, Président Directeur Général de la Société
NEUTRONIC(France)

neutronic
34, rue de VALENGELIER
ZAC de la TUILERIE
77500 CHELLES
T : 01 84 73 58 95 - F : 01 84 73 88 04

« » 20 r.

ACTE

N° du

Concernant la mise en œuvre des résultats de la thèse :

« Modèles mathématiques des processus thermiques basés sur des problèmes limites et non locaux » (Mathematical models of thermal processes based on boundary and nonlocal problems) de Kobil'skaya Elena (Кобыльска́я Елена)

Nous soussignés, membres de la Commission :

L'ingénieur en chef Jérôme CORBLIN et le chef du département de conception et de technologie Cédric DELIGNAT ont rédigé le présent acte en ce que les sujets du travail de thèse de Kobil'skaya Elena « Modèles mathématiques des processus thermiques basés sur des problèmes limites et non locaux » et notamment des modèles mathématiques, des techniques de résolution de problèmes limites et non locaux ont été utilisés pour prévoir le développement d'incendie et calculer les températures dans les structures. Les sujets ont été également utilisés lors du développement d'équipements technologiques pour la production de systèmes d'extinction d'incendie dans des installations industrielles et bâtiments résidentiels à plusieurs étages.

L'impact économique de l'utilisation des articles de thèse n'a pas été calculé.

Le certificat a été délivré aux fins de présentation sur le site de la défense de cette thèse.

Ingénieur en chef

Chef de la division de conception et
développement

Jérôme CORBLIN

Cédric DELIGNAT

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор науково-виробничої
фірми «Карма» К.Т.Н.

 О.О.Ситник
«21» квітня 2020 р.

АКТ

№. 101 від 21 квітня 20

Про впровадження результатів дисертаційної роботи

Кобильської Олени Борисівни

На тему «Математичне та комп'ютерне моделювання теплових процесів у складних системах з рухомими та нерухомими осесиметричними елементами»

Ми, що нижче підписалися, комісія у складі:

Головного металурга В.Г. Овчарова та начальника конструкторського відділу О.К. Печененка склали цей акт у тому, що результати отримані у дисертаційному дослідженні «Математичне та комп'ютерне моделювання теплових процесів у складних системах з рухомими та нерухомими осесиметричними елементами» були використані під час розробки технологічного обладнання процесів спікання, гарячого пресування та високотемпературної деформації виробів канонічної та неканонічної форми із порошкових матеріалів.

Розрахунок економічного ефекту від впровадження матеріалів дисертаційної роботи не проводився.

Акт виданий для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Головний металург

Начальник конструкторського відділу



В.Г. Овчаров

О.К. Печененко

«ЗАТВЕРДЖУЮ»



Проректор з науково-
методичної роботи
Кременчуцького
національного університету
імені Михайла Остроградського
В. В. Костів
2020 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи

Кобильської Олени Борисівни

на тему «Математичні моделі теплових процесів на основі крайових та нелокальних задач» у навчальний процес Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського (КрНУ)

Члени комісії у складі декана факультету електроніки та комп'ютерної інженерії КрНУ, к.т.н., доцента Мосьпана В.О., завідувача кафедри «Інформатика і вища математика» д.т.н., проф. Ляшенка В.П., к.т.н. доцента кафедри «Інформатика і вища математика» Григорової Т.А. склали цей акт про те, що у КрНУ під час виконання курсових робіт студентами спеціальності 014 «Середня освіта (інформатика)» та 113 «Прикладна математика» та при вивченні курсів «Рівняння математичної фізики», «Обчислювальні методи у моделюванні технологічних та природничих процесів», «Основи комп'ютерного моделювання» впроваджені наступні результати дисертаційного дослідження к. ф.-м. н. доцента Кобильської Олени Борисівни:

- метод побудови математичних моделей та розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складних багат шарових виробах канонічної та неканонічної форми з умовами спряження 4-го роду;
- обернені задачі, зокрема з інтегральною умовою, для рівняння теплопровідності, що дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами у рухомих та нерухомих виробах;
- математичні моделі теплових процесів, що відбуваються під час імпульсної обробки виробів, та враховують особливості функцій джерел тепла у нелокальних та крайових задачах для рівняння теплопровідності;
- методики порівняльного аналізу адекватності математичних моделей з нелокальними та крайовими задачами, що описують один і той же процес теплообміну у складній системі.

Акт виданий для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Декан факультету ЕКІ КрНУ

Зав. каф. ІВМ КрНУ

К.т.н., доц. каф. ІВМ КрНУ

В.О. Мосьпан

В.П. Ляшенко

Т.А. Григорова