

УДК 539.21

К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(Харьков, Украина, avratov@nas.gov.ua)*

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА НАНОТРУБОК

Колебания углеродистых нанотрубок (УНТ) чрезвычайно важны для многих наномеханических устройств, таких как детекторы заряда, датчики, прибор для автоэлектронной эмиссии [1]. Колебания УНТ часто наблюдаются во время процессов обработки и получения нанокомпозитов. Волновые процессы в наноустройствах, содержащих УНТ, подробно изучаются в статьях [2, 3].

Получена модель нелинейных колебаний углеродистой нанотрубки, которая основывается на теории оболочек. На основании вариационных принципов выведена система трех уравнений в частных производных относительно трех проекций перемещений точек срединной поверхности. При выводе этих уравнений используется геометрически нелинейная модель деформирования оболочек Сандерса–Коитера и нелокальная упругость, которая изменяет форму записи закона Гука. Система трех уравнений в частных производных является нелинейной. Предполагается, что в колебаниях оболочки при геометрически нелинейном деформировании участвуют сопряженные формы колебаний. С помощью этого предположения и метода Галеркина получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат конструкции, которая описывает свободные нелинейные колебания наноконструкции. Полученная динамическая система содержит квадратичные и кубические нелинейные слагаемые. Для расчета свободных нелинейных колебаний используется метод гармонического баланса, который использует представление колебаний в виде ряда Фурье. В результате использования этого метода рассчитывались скелетные кривые свободных нелинейных колебаний. Скелетные кривые являются мягкими. Устойчивость полученных периодических колебаний исследовалась прямым численным интегрированием уравнений движения. Показано, что свободные нелинейные колебания углеродистой нанотрубки теряют устойчивость вследствие бифуркации Неймарка–Сакера. В результате этой бифуркации рождаются почти периодические колебания.

1. Gibson R.F., Ayorinde E.O., Wen Y.-F. Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 67. P. 1-28.
2. Sirtori C. Applied physics: bridge for the terahertz gap. *Nature*. 2002. Vol. 417. P. 132-133.
3. Jeon T., Kim K. Terahertz conductivity of anisotropic single walled carbon nanotube films. *Applied Physics Letters*. 2002. Vol. 80. P. 3403-3405.

УДК 539.3

К.В. Аврамов¹, д-р техн. наук, проф.

С.Е. Малышев²

О.Ф. Полищук¹, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.

¹Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (Харьков, Украина, avratov@nas.gov.ua)

²Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (Харьков, Украина)

ЧИСЛЕННЫЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ДЫШАЩИМИ ТРЕЩИНАМИ

Динамические нагрузки, действующие на конструкцию, могут привести к образованию трещин и к разрушению всей конструкции. Знание особенностей нелинейного динамического поведения конструкций с трещинами поможет выявить трещины на начальной стадии их развития и тем самым предотвратить катастрофы.

Рассмотрим колебания стержня с дышащими трещинами (рис.1). Отметим, что нами также изучаются колебания балки с одной дышащей трещиной. Рассмотрена возможность моделирования нелинейных изгибных колебаний разными математическими моделями, которые являются нелинейными уравнениями в частных производных.

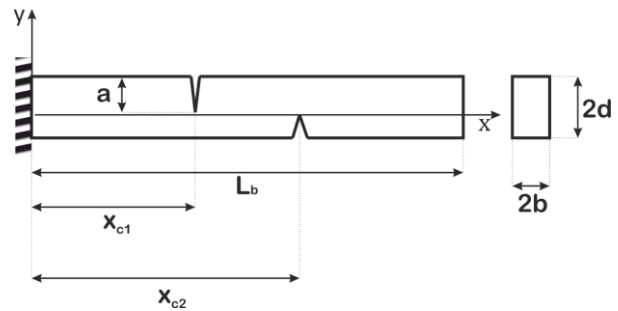


Рис. 1. Эскиз балки с двумя трещинами

Дифференциальные уравнения колебаний балок с трещинами получено в работах [1, 2]. В работе [1] рассматривается модель, которая учитывает локальное изменение жесткости стержня. В статье [2] рассматривается возмущенное напряженно-деформируемое состояние в окрестности трещины. Проведено детальное сравнение двух моделей и сделан вывод, что модель из работы [1] более выгодна для численного анализа. Представлены результаты моделирования бифуркационного поведения конструкций.

В работе будут докладываться экспериментальные результаты по анализу нелинейных колебаний балки с дышащей трещиной. Проводилось сравнение с теоретическими результатами.

1. Caddemi S., Calio I. Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks. *J. of Sound and Vibr.* 2009. Vol. 327, Iss.3-5. P. 473-489.
2. Shen M.-H. H., Chu Y. C. Vibrations of beams with a fatigue crack. *Computers and structures.* 1992. Vol. 45. P. 79-93.

УДК 539.3

С.Н. Гребенюк, д-р техн. наук, доц.

М.И. Клименко, канд. физ.-мат. наук, доц.

Запорожский национальный университет
(Запорожье, Украина, m1655291@gmail.com)

МОДУЛЬ СДВИГА ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С ТРАНСТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСТРОПНЫМ УПРУГИМ ВОЛОКНОМ

Одним из наиболее распространенных методов получения механических характеристик композиционного материала является гомогенизация, предполагающая представление композита в виде однородного анизотропного материала с характеристиками, зависящими от соответствующих показателей матрицы и армирующих волокон, а также объемной доли последних в композите. Такие характеристики для композиционного материала с упругими трансстропным волокном и изотропной матрицей получены в [1]. Модуль сдвига композита на основе применения энергетического критерия согласования найден в [2]. В [3, 4] рассматриваются проблемы прогнозирования вязкоупругих свойств композитов при наличии вязкоупругих составляющих. Задача определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов на основе применения метода операторных цепных дробей рассмотрена в [6].

Целью данной работы является разработка методики определения эффективного модуля сдвига для вязкоупругого однонаправленного волокнистого композита, ячейка которого состоит из вязкоупругой трансстропной матрицы и упругого трансстропного волокна. Их плоскости изотропии совпадают и перпендикулярны оси волокна. Геометрической моделью композита является комбинация двух коаксиальных бесконечных цилиндров – полого, моделирующего матрицу, и вставленного в него сплошного цилиндра, моделирующего волокно. Для описания вязкоупругих свойств композита используются соотношения наследственной теории Больцмана – Вольтерра. При этом искомый модуль сдвига определяется в виде интегрального оператора с разностным ядром

$$\tilde{G}_{12}[y(t)] = G_{12} \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau \right),$$

где G_{12} – мгновенный модуль сдвига; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации.

Для получения его характеристик рассматриваются две краевые задачи: о продольном сдвиге трансверсально-изотропного вязкоупругого сплошного цилиндра, моделирующего композит, и совместном продольном сдвиге полого и сплошного цилиндров, моделирующих соответственно материал матрицы и материал волокна. Предполагается непрерывность осевых перемещений и касательных напряжений на поверхности контакта матрицы и волокна. На

внешней поверхности цилиндрической поверхности ячейки задается касательная гармоническая нагрузка. В качестве условия согласования использовано равенство осевых перемещений матрицы и композита на наружной поверхности моделирующего его цилиндра. Для решения данных задач используется преобразование Лапласа.

Применение предложенной методики позволило определить характеристики интегрального оператора, задающего модуль сдвига для вязкоупругого композита. Для мгновенного модуля сдвига получена формула:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^*(G_{12}^\circ(1+f) + G_{12}^*(1-f))}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)G_{12}^*},$$

где G_{12}^* и G_{12}° – соответственно мгновенный модуль сдвига матрицы и модуль сдвига волокна; f – объемная доля волокна в ячейке композита.

Изображение ядра релаксации композита имеет вид

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1 x^2 + C_2 x + C_3}{C_4(x + C_5)},$$

где $x = 1 - \tilde{R}^*(p)$, \tilde{R}^* – изображение ядра релаксации матрицы; $C_1 = (f - 1)(G_{12}^*)^2$; $C_2 = G_{12}^*(G_{12} - G_{12}^\circ)(1 + f)$; $C_3 = G_{12}G_{12}^\circ(1 - f)$; $C_4 = G_{12}G_{12}^*(1 + f)$; $C_5 = \frac{G_{12}^\circ(1 - f)}{G_{12}^*(1 + f)}$.

Рассмотрен пример применения этой методики. Построены зависимости, позволяющие исследовать реологические свойства вязкоупругого композита. Использование различных типов кинематических условий согласования позволяет модифицировать предлагаемый подход для определения других эффективных механических характеристик, описывающих вязкоупругие свойства композита.

1. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109-144.

2. Гребенюк С.Н. Модуль сдвига волокнистого композита с трансверсально-изотропными матрицей и волокном. *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78, Вып. 2. С. 270-276.

3. Плуме Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа. *Механика композитных материалов*. 1992. № 4. С. 557-566.

4. Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Ползучесть однонаправленно армированных полимерных композитов. *Механика композитных материалов*. 1984. № 2. С. 215-223.

5. Каминский А.А., Селиванов М.Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41, № 5. С. 9-21.

УДК 539.3

С.Б. Ковальчук, канд. техн. наук

О.В. Горик, д-р техн. наук, проф.

Полтавська державна аграрна академія

(Полтава, Україна, stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua)

ЗАГАЛЬНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ДВООПОРНИХ БАГАТОШАРОВИХ БАЛОК ПІД ЗОСЕРЕДЖЕНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Із розвитком технологій створення композитних матеріалів, вони знаходять все ширше застосування у конструкціях різного призначення. Достовірне прогнозування напружено-деформованого стану (НДС) композитних елементів різного типу є однією із заporук створення надійної конструкції із оптимальними параметрами. Сучасні чисельні методи та програмні комплекси, побудовані на їх основі, добре вирішують дану проблему. Однак не менш корисними, особливо на етапі проектування та при розв'язанні задач оптимізації, є аналітичні методи визначення НДС композитних елементів.

Окремим типам композитних, зокрема багатошарових, елементів, таких як плити та оболонки, присвячена значна кількість наукових праць вітчизняних та закордонних науковців [1 – 8], у яких розроблені ефективні аналітичні та чисельно-аналітичні методи визначення НДС. Водночас деформування композитних стержнів (брусів, балок) досліджено значно менше [4, 5, 10], хоча такі елементи конструкцій є одними із найбільш поширених.

Через складність урахування неоднорідної будови багатошарових композитних стержнів при побудові аналітичних теорій їх деформування дуже поширені наближені методи розв'язання задач теорії пружності, зокрема ітераційний [9 – 11]. Незважаючи на уведені спрощення, побудовані за таким методом моделі деформування на високих кроках уточнення виявляються дуже громіздкими і складними у реалізації.

Точні розв'язки теорії пружності отримані лише для задач згину вузьких консолей із окремими типами навантажень [12, 13]. Хоча такі розв'язки видаються достатньо обмеженими в частині врахування різних закріплень та навантажень, у порівнянні із ітераційними моделями, однак на їх основі можна побудувати доволі прості прикладні розв'язки типових задач згину балок, які дозволяють з високою точністю оцінити загальний НДС.

Метою даної роботи є розкриття підходів до визначення загального НДС двоопорних композитних багатошарових балок із зосередженим навантаженням (сила, момент) на основі загального розв'язку теорії пружності для багатошарової консолі із навантаженням на вільному торці [12].

У ході дослідження розглянуто вузьку композитну багатошарову балку, що має закріплення (жорстке або шарнірне) у крайніх перерізах, навантажену

зосередженою силою (під деяким кутом до осі балки) і моментом. Якщо знехтувати локальним напруженим станом, що виникає поблизу точки прикладання навантажень та закріплень, то напружений стан розрахункових ділянок такої балки буде подібним напруженому стану консолі із навантаженням на торці. Це дозволяє записати загальні розв'язки для напружень та переміщень на розрахункових ділянках балки, на основі розв'язків, отриманих у [12]. Такий розв'язок міститиме загалом дванадцять невідомих сталих, які мають визначатись статичними та кінематичними умовами, що накладають закріплення у крайніх перерізах балки та умовами сумісного деформування ділянок у перерізі на межі спряження.

Із використанням вказаного підходу були отримані загальні співвідношення для компонент НДС на розрахункових ділянках балки та побудована система рівнянь для визначення невідомих початкових та кінцевих параметрів. На основі отриманих співвідношень побудовані аналітичні розв'язки для різних комбінацій закріплень кінців багатошарової балки, які дають результати, близькі до моделювання методом скінченних елементів.

Побудований підхід у подальшому можна розширити на випадок багатошарової балки із довільною кількістю зосереджених сил та проміжних опор. А комбінація із іншими подібними розв'язками дозволить враховувати різні типи навантажень на поздовжніх гранях балки.

1. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор. *Механика композитных материалов*. 1998. № 3. С. 333-348.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Москва: Наука, 1987. 360 с.
3. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 374 с.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Москва: Наука, 1972. Т. 5. 271 с.
6. Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Ванин Г.А., Бабич И.Ю. Механика элементов конструкций. В 3 т. Т. 2: Механика композитных материалов и элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1983. 484 с.
7. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
8. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1987. 200 с.
9. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. *Механика композитных материалов*. 2003. Т. 39, № 1. С. 2-24.
10. Горик О.В., Пискунов В.Г., Чередніков В.М. Механіка деформування композитних брусків. Полтава-Київ: АСМІ, 2008. 402 с.
11. Goryk A.V. Modeling Transverse Compression of Cylindrical Bodies in Bending. *Intern. Applied Mechanics*. 2001. Vol. 37, Iss. 9. P. 1210-1221.
12. Goryk A.V., Kovalchuk S.B. Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54, Iss. 2. P. 179-190.
13. Горик О.В., Ковальчук С.Б. Решение задачи плоского поперечного изгиба слоистого консольного бруса под действием нормальной равномерной нагрузки. *Проблемы прочности*. 2018. Т. 50, Вып. 3. С. 49-63.

УДК 539.3

Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф.

Е.И. Любичкая, канд. техн. наук

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (Харьков, Украина, lyubitska@gmail.com)

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В данной работе предлагается подход к решению задач изгиба функционально-градиентных (ФГ) пологих оболочек на упругом основании типа Винклера под действием поперечной нагрузки.

Постановка задачи выполнена в рамках классической геометрически-нелинейной теории пологих оболочек. Предполагается, что модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона для составляющих компонентов функционально-градиентного материала (ФГМ-смесь керамики и металла) изменяются в одном направлении (вдоль толщины) согласно закону [1]

$$P(T, z) = (P_c(T)V_c(z) + P_m(T)V_m(z)), V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, V_c + V_m(z) = 1,$$

где V_c, V_m – объемные доли керамики и металла соответственно.

Линеаризация разрешающей системы уравнений выполнялась методом последовательных нагружений [2]. Через определенное число шагов по нагрузке решение уточнялось при помощи метода Ньютона-Канторовича. В общем случае, для конструктивных элементов сложной формы с различными условиями закрепления решение даже линеаризованных уравнений является непростой задачей. Для ее решения в работе предлагается использовать метод Ритца в сочетании с теорией R-функций (RFM) [3]. В рамках программирующей системы POLE-RL было разработано программное обеспечение, реализующее предложенный подход. Для сферической оболочки с прямоугольным планом полученные результаты сравнивались с данными, имеющимися в литературе [4]. Выполнено исследование для оболочек со сложной формой плана. Изучено влияние геометрических и физических параметров, а также показателя степени в законе распределения объемных долей керамики и металла на напряженно-деформируемое состояние ФГ пологих оболочек.

1. Shen H.S. Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of plates and Shells. Florida: CRC Press, 2009. 280 p.

2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Из-во Саратов. ун-та, 1975. 119 с.

3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.

4. Woo J., Meguid S.A Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Intern. J. Solid and Structures*. 2001. Vol. 38, Iss.42-43. P. 7409-7421.

УДК 517 (07)

Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф.

Т.В. Шматко, канд. техн. наук, доц.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический университет» (Харьков, Украина, kurpalidia@gmail.com)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В ТЕМПЕРАТУРНОЙ СРЕДЕ

Функционально-градиентные материалы (FGM) относятся к числу наиболее эффективных современных материалов, используемых для изготовления объектов, работающих в высокотемпературных условиях. Одной из основных проблем, послуживших созданию этих материалов, была разработка термического барьера для ядерных реакторов и космических самолетов. В настоящее время эти материалы широко используются в различных отраслях промышленности. В последние два десятилетия появилось большое количество статей, посвященных изучению линейных и нелинейных колебаний пластин и оболочек, изготовленных из FGM. Обзор основных достижений в этой области можно найти в публикациях [1 – 3] и др. Анализ большого количества публикаций показал, что практически нет исследований пластин и оболочек сложной формы с учетом температурной среды. В настоящей работе предлагается изучить эту проблему с помощью теории R-функций и вариационного метода Ритца, т.е. с помощью RFM [4].

Формулировка проблемы выполнена в рамках уточненной теории первого порядка (типа теории Тимошенко). Предполагается, что пологая оболочка изготовлена из смеси керамики и металла. Зависимость составляющих материалов от температуры учитывается по формуле [5]

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3), \quad (1)$$

где P_0, P_{-1}, P_2, P_3 – коэффициенты, которые имеют конкретные значения для составляющих материалов.

Предположим, что температура меняется только в направлении толщины. В этом случае температурное поле моделируется одномерным уравнением такого типа:

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0, \quad (2)$$

где $T = T_m$ при $z = -h/2$ и $T = T_c$ при $z = +h/2$.

Эффективные свойства материала $P(T, z)$, такие как модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , плотность массы ρ и коэффициент теплового расширения α , могут быть выражены как [5]

$$P(T, z) = (P_c(T)V_c(z) + P_m(T)V_m(z)), \quad (3)$$

где V_c, V_m – керамические и металлические объемные доли.

Ниже приведен закон распределения объемных долей металла и керамики, используемый в настоящей работе и соответствующий степенному закону [5]

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad V_m(z) = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k. \quad (4)$$

Алгоритм решения задачи о свободных колебаниях FGM оболочек в температурной среде существенно усложняется в силу того, что механические характеристики зависят не только от переменной z вдоль толщины, но и температуры, которая также изменяется вдоль толщины оболочки. Выражения для мембранных усилий, изгибающих и крутящего моментов имеют следующий вид [1, 5]:

$$\{N\} = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\}^T = [A]\{\varepsilon\} + [B]\{\chi\} - \{N^{th}\}, \quad (5)$$

$$\{M\} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^T = [B]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\} - \{M^{th}\}. \quad (6)$$

Элементы матриц $[A]$, $[B]$, $[D]$ вычисляются как $[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz$,

где

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{16} = Q_{66} = 0, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \nu)}.$$

Температурные усилия и моменты вычисляются в соответствии с формулами:

$$[N^{th}] = \{N_{xx}^{th}, N_{yy}^{th}, N_{xy}^{th}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(\alpha, \alpha, 0) \Delta T dz,$$

$$[M^{th}] = \{M_{xx}^{th}, M_{yy}^{th}, M_{xy}^{th}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(\alpha, \alpha, 0) z \Delta T dz.$$

Поэтому алгоритм решения задачи сводится к следующим этапам:

- 1) с помощью степенных рядов находится решение уравнения (2), т.е. определяется температура, как функция от z ;
- 2) вычисляются значения механических характеристик P_c, P_m по формуле (1);
- 3) формируются аналитические выражения для всех механических характеристик по формуле (3);
- 4) вычисляются элементы матриц $[A], [B], [D]$, а, следовательно, определяются усилия и моменты в соответствии с формулами (5), (6). Дальнейшее решение задачи может быть выполнено с помощью метода RFM [4].

В работе приведен ряд тестовых примеров и рассмотрены пологие оболочки со сложной формой плана, которые сделаны из разных FG материалов.

1. Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M. Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *J. Nonlinear Dyn.* 2011. Vol. 66, Iss. 251. P. 251-270.

2. Huang X.L., Shen H.S. Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *Intern. J. Solids and Structures.* 2004. Vol. 41, Iss. 9-10. P. 2403-2427.

3. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomech. Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates. *J. Therm. Stresses.* 1998. Vol. 21. P. 593-626.

4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.

5. Shen H.S. Functionally Graded M of plates and Shells. Florida: CRC Press, 2009. 280 p.

УДК 539.3

Г.І. Львов, д-р техн. наук, проф.

О.А. Костромицька

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(Харків, Україна, lvovdpm@ukr.net)

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ПРУЖНИХ ТА МІЦНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТКАНИХ КОМПОЗИТІВ

Робота присвячена розробці процедури чисельного визначення пружних характеристик і параметрів критерію міцності для двовісних плетених композитів. Знаходиться розподіл напружень у межах представницького об'єму (ПО) матеріалу, обчислюються середні напруження і середні пружні константи композита для випадків простого навантаження. Розрахунки виконані для розтягування і стискання в трьох напрямках, трьох розтягувань (або стискань) одночасно по двох напрямках і зсуву у трьох площинах. Для ортотропних структур число незалежних констант (і чисельних експериментів) дорівнює 12. Критерій міцності для еквівалентного однорідного матеріалу приймається у вигляді [1]

$$A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + B_{ij}\sigma_{ij} = 1, \quad (1)$$

де A_{ijkl} , B_{ij} – коефіцієнти, що визначаються за знайденими в результаті чисельних експериментів меж міцності в трьох напрямках $i, j = 1, 2, 3$; σ_{ij} – компоненти середніх напружень.

Якщо макронапружений стан еквівалентного континууму є однорідним, розподіли напружень і деформацій однакові в межах всіх ПО, а поля переміщень розрізняються на константу. Для кожного чисельного експерименту встановлено свої умови періодичності на граничних площинах ПО. Розрахунки напружено-деформованого стану здійснено в ПК ANSYS. Одна з різноманітних моделей ПО, що були розраховані, без матриці показана на рис. 1. Для цієї моделі для окремого випадку навантаження – двохосового розтягування/стискання в площині X0Y – на рис. 2 показані поля граничних напружень.

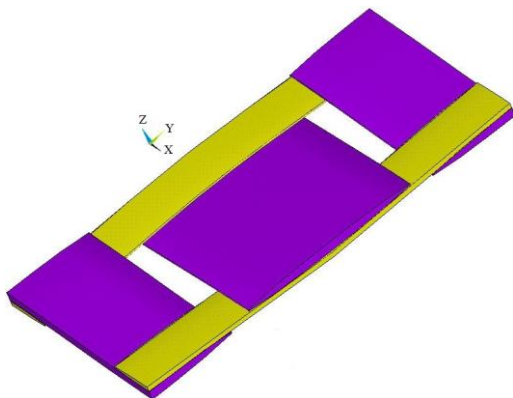


Рис. 1.

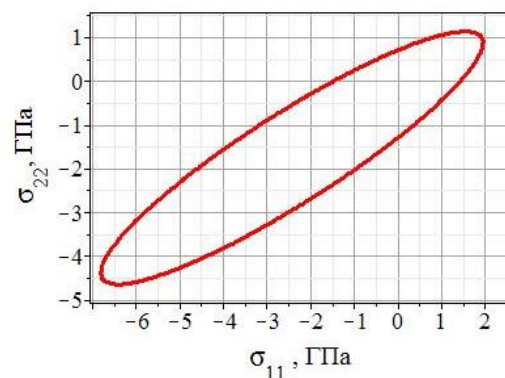


Рис. 2.

1. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *J. of Composite Materials*. 1971. Vol. 5. P. 58 – 80.

УДК 539.3

Х.І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук
Р.М. Мартиняк, д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України
(Львів, Україна, labmtd@iapmm.lviv.ua)*

ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ЩІЛИНОЮ, ЗАПОВНЕНОЮ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ

Розглянемо біматеріал з міжфазною щілиною (тріщиною), заповненою теплопровідною рідиною, що перебуває в умовах плоскої деформації за дії термічного і механічного навантаження. Біматеріал змодельовано кусково-однорідною площиною, складеною з двох півплощин, що характеризуються різними коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з'єднання півплощин розташована щілина завдовжки $2a$, що має початкову висоту $h_0(x)$, береги якої плавно зникаються у крайніх точках. Порожнина щілини заповнена стисливою рідиною з коефіцієнтом теплопровідності λ_f , що чинить на береги тріщини тиск P_f . На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний однорідний тепловий потік q , перпендикулярі до міжфазної лінії.

Вплив рідини на передачу тепла між берегами тріщини враховано умовами неідеального теплового контакту берегів зі змінним термоопором $r(x) = h(x)/\lambda_f$, де $h(x)$ – висота тріщини після прикладення навантаження. Тиск рідини P_f на берегах тріщини також змінюється в процесі навантаження і визначається з рівняння стану баротропної рідини [1]

$$V_f \exp\left(\frac{P_f}{B}\right) = \frac{m_f}{\rho_f},$$

де m_f – маса рідини; ρ_f – густина рідини; $V_f = l \int_{-a}^a h(x) dx$ – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини тріщини $l = 1\text{м}$ в поздовжньому напрямі; B – модуль об'ємної пружності рідини.

Температуру, напруження і переміщення в біматеріалі подано [2] через наперед невідомі функції стрибка температури між берегами тріщини $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$. Враховуючи гранично-контактні умови на берегах

тріщини, задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно $\gamma(x)$ та $h(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + B \ln \left(\frac{m_f}{\rho_f l \int_{-a}^a h(x) dx} \right) = -\frac{1}{2G^*} p + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_0(t)}{t-x} dt, \quad |x| < a, \quad (1)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad (2)$$

де $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}$; $G^* = \frac{G_1(1-\kappa_2)}{(1-\kappa_1\kappa_2)}$, $\kappa_n = 3-4\nu_n$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\eta_1 = \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}$,
 $\eta_2 = \frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}$ – термічні дистортивності матеріалів півплощин.

На кінцях тріщини функції $\gamma(x)$ та $h(x)$ задовольняють умови

$$h(\pm a) = 0, \quad \gamma(\pm a) = 0. \quad (3)$$

Використовуючи розроблену в монографії [2] ітераційну процедуру, що базується на методі послідовних наближень, нелінійну систему СІДР (1) – (2) зведено до послідовності лінійних систем СІДР, розв'язок яких подаємо у вигляді скінченних сум ряду за поліномами Чебишева. Для визначення коефіцієнтів при поліномах Чебишева отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано чисельно.

За початкове наближення вибрано випадок, коли різниця термічних дистортивностей матеріалів дорівнює нулю ($\eta^- = 0$), а тиск рідини

визначається початковою висотою тріщини $P_f = B \ln \left(\frac{m_f}{\rho_f l \int_{-a}^a h_0(x) dx} \right)$.

Для заданих параметрів розтягувальних зусиль p , теплового потоку q , маси рідини m_f та коефіцієнта теплопровідності рідини λ_f визначено розподіл розкриття тріщини та стрибка температури між її берегами. Проаналізовано вплив теплопровідності й тиску рідини на коефіцієнти інтенсивності міжфазних напружень.

1. Kaczyński A., Monastyrskyy B. On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium. *J. of Theoretical and Applied Mechanics*. 2004. Vol. 42, No. 1. P. 41-57.

2. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів: Растр-7, 2017. 168 с.

УДК 539.3

В.З. Станкевич, канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України*

(Львів, Україна, stan_volodja@yahoo.com)

ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТІВ З ТРІЩИНАМИ

Композитні матеріали (КМ) мають широке використання у різноманітних галузях промисловості. Завдяки поєднанню структурних елементів із різних матеріалів КМ можуть набувати цілої низки унікальних властивостей – високих механічних характеристик, довговічності, здатності витримувати великі динамічні навантаження, працювати в агресивних середовищах тощо. Окремим класом КМ є композити шаруватої структури. Наявність в КМ гострокінцевих дефектів типу тріщин може значно послабити міцність тіл. Це спонукає розробити ефективні підходи дослідження напружено-деформівного стану (НДС) шаруватих композитів з дефектами.

Мета досліджень – застосувати метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) для дослідження НДС КМ шаруватої структури з тріщинами під дією усталених в часі навантажень.

Розглядали дві моделі шаруватого композита. Перша модель представляє безмежний двохперіодичний композит, одна з компонент якого містить тріщину. Друга модель представляє шаруватий композит з тріщинами, симетричний відносно своєї серединної поверхні. На інтерфейсних поверхнях шарів виконуються умови ідеального контакту, протилежні поверхні тріщин зазнають дії усталених в часі крутих навантажень.

Для дослідження тривимірної динамічної задачі теорії пружності використано гранично-інтегральний підхід. Розв'язки задач вибрано у вигляді двовимірних потенціалів Гельмгольца з густинами, які характеризують розкриття тріщин та переміщення точок поверхонь спряження матеріалів композита. Після задоволення крайових умов задачі зведено до розв'язання системи двовимірних ГІР відносно невідомих функцій розкриття поверхонь тріщин. Інтегрування у рівняннях проводиться лише по скінченних областях, які займають дефекти; інтегрування по безмежних областях, які співпадають з інтерфейсними поверхнями композита відсутні, що суттєво для числової реалізації поставленої задачі. Ядра ГІР характеризують шарувату структуру тіл. Запропоновано стійкий алгоритм розв'язання отриманих рівнянь. За допомогою отриманих розв'язків досліджували динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) поздовжнього зсуву. Досліджували залежність ДКІН від частоти прикладеного навантаження, співвідношення пружних параметрів матеріалів компонент композита та їх порядку розташування у тілі тощо.

УДК 517 (07)

В.В. Ткаченко

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(Харків, Україна, viktoryatkachenko@gmail.com)*

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИЧНОЇ ТА ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ ПЛАНА

Багатошарові композитні пластини широко застосовуються для моделювання елементів тонкостінних конструкцій, навантажених стискаючими зусиллями. Тому дослідження на стійкість таких об'єктів у разі їх складної геометричної форми є актуальною проблемою. Раніше в роботах [1 – 2] було запропоновано метод розрахунку на динамічну стійкість пластин симетричної будови, який базувався на використанні теорії R-функцій (RFM) та варіаційних методах. У даній роботі цей метод розвинено на багатошарові пластини несиметричної будови з використанням уточненої теорії типу С.Тимошенка.

Багатошарова тонка гнучка пластина знаходиться під дією зусиль в серединній площині, що визначаються як $p = p_0 + p_t \cos \theta t$, де p_0 та p_t – це статична і динамічна частини навантаження, відповідно. Система рівнянь руху для пластини несиметричної будови більш складна, ніж для пластин симетричної будови та має вигляд [3]

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = -Nl_1(w) + m_1u_{,tt}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = -Nl_2(w) + m_1v_{,tt}, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{313}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = -Nl_3(u, v, w) - \varepsilon_d \rho h w_{,t} - m_1w_{,tt}, \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = m_2\psi_{,tt}, \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = m_2\psi_{,tt}, \end{cases} \quad (1)$$

де диференціальні оператори L_{ij} ($i, j = \overline{1,5}$) і Nl_i ($i = \overline{1,3}$) визначаються, як представлено в [1].

Система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами.

Алгоритм розв'язання задачі про параметричні коливання багатошарової пластини несиметричної будови містить у собі такі ж етапи, що і алгоритм для симетричної будови, але пункт, пов'язаний з вирішенням задачі про нелінійні коливання, суттєво ускладнюється. Як і раніше [1], невідомі функції u, v, w, ψ_x, ψ_y представляються як

$$\begin{cases} u(x, y, t) = y_1(t)u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)u_2(x, y), \\ v(x, y, t) = y_1(t)v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)v_2(x, y), \\ w(x, y, t) = y_1(t)w_1^{(c)}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \psi_x(x, y, t) = y_1(t)\psi_{xt}^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)\psi_{x2}(x, y), \\ \psi_y(x, y, t) = y_1(t)\psi_{yt}^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)\psi_{y2}(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

але $u_2, v_2, \psi_{x2}, \psi_{y2}$ повинні задовольняти наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} L_{11}u_2(x, y) + L_{12}v_2(x, y) + L_{14}\psi_{x2}(x, y) + L_{15}\psi_{y2}(x, y) = Nl_1(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{21}u_2(x, y) + L_{22}v_2(x, y) + L_{24}\psi_{x2}(x, y) + L_{25}\psi_{y2}(x, y) = Nl_2(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{41}u_2(x, y) + L_{42}v_2(x, y) + L_{43}w_2(x, y) + L_{44}\psi_{x2}(x, y) + L_{45}\psi_{y2}(x, y) = Nl_4(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{51}u_2(x, y) + L_{52}v_2(x, y) + L_{53}w_2(x, y) + L_{54}\psi_{x2}(x, y) + L_{55}\psi_{y2}(x, y) = Nl_5(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \end{cases} \quad (4)$$

Для розв'язання наведеної системи з відповідними граничними умовами побудовано новий функціонал, дискретизація якого виконується за допомогою R-функцій [1].

Після підстановки (2), (3) в (1) та використання методу Бубнова-Гальборкіна систему (1) зводимо до звичайного нелінійного диференціального рівняння наступного виду:

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \Omega_L^2(1 + \alpha p_t \cos \theta t + \gamma^2(t))y(t) = 0, \quad (5)$$

де вирази для α и γ обчислюються аналогічно, як і в роботах [1 – 2].

Для дослідження стійкості достатньо розглянути лінеаризоване рівняння [4], тобто при $\gamma = 0$

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2((1 - 2k \cos \theta t)y(t) = 0. \quad (6)$$

Для рівняння (6), (рівняння Матьє), головна область нестійкості (біля $\theta = 2\Omega_L$) обмежена кривими [4]

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}.$$

Запропонований метод розв'язання задач використано для тестування та дослідження пластин складної геометричної форми.

1. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Применение теории R-функции к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. 492с.

2. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American J. of Solids and Structures*. Rio de Janeiro, 2013. Vol. 10, No. 1. P. 175-188.

3. Reddy J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Second ed. London: CRC PRESS, 2004. 858 p.

4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва: Гостехиздат, 1956. 500 с.

УДК 534.1:539.3

С.В. Угрімов, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України
(Харків, Україна, sugrimov@ipmach.kharkov.ua)*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТІВ ПРИ РОЗПОДІЛЕНИХ І ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

В аерокосмічній техніці, судно- та автомобілебудуванні широко використовуються тонкостінні композитні конструкції, що обумовлено їх високою міцністю та відносно малою вагою. Удосконалення існуючих конструкцій, зростаюче використання нових композитних матеріалів із наноармуванням вимагає застосування уточнених моделей для описання процесу їх деформування. Особливого значення набувають дослідження напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій при наявності локалізованих силових впливів. Існує багато різних двовимірних теорій для розрахунку шаруватих композитних конструкцій. Однак, при використанні двовимірних моделей завжди необхідно враховувати той факт, що вони не є універсальними і мають певні границі застосовності, які залежать не тільки від параметрів самої конструкції (симетрія, товщина, ступінь різномірності механічних характеристик шарів конструкції), але й від умов її навантаження (розподілене або локалізоване, статичне або нестационарне).

У роботі розглянуто особливості моделювання НДС шаруватих композитів, сендвічей, а також композитів, армованих нановолокнами, при впливі поперечних розподілених та локалізованих навантажень. Розглядаються як задачі статички, так і динаміки, у тому числі задача про удар твердим тілом. Для моделювання поведінки композитів використовується двовимірна дискретно-структурна узагальнена модель шаруватих тонкостінних конструкцій, заснована на застосуванні розвинень шуканих переміщень у степеневі ряди за поперечною координатою, яка дозволяє у рамках єдиного підходу розв'язувати задачі деформування багатошарових конструкцій довільної композиції в умовах дії як розподілених, так і локалізованих впливів, а також дає можливість досліджувати з високим ступенем точності всі компоненти тензора напружень у шарах. У загальному випадку переміщення точки i -го шару описуються такими кінематичними залежностями [1, 2]:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{K_{\alpha}^j} h_j^k u_{\alpha k}^j + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}^i} (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i,$$

де $h_j^k = (h_j)^k$, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$; $u_{\alpha}^i (\alpha = \overline{1, 3})$ – переміщення точки

i -го шару у напрямку осі Ox_{α} ; u_{α} , $u_{\alpha k}^i$ – коефіцієнти розвинень переміщень у

степеневі ряди, що є функціями аргументів x_1, x_2, t ; K_α^i – кількість членів степеневого ряду для площинних ($\alpha = 1, 2$) і поперечних ($\alpha = 3$) переміщень точок i -го шару, які вибираються у залежності від необхідної точності розв’язання задачі.

На основі цієї моделі проведено дослідження НДС у багатошарових пластинах при статичних та імпульсних навантаженнях, а також при ударі твердим тілом. Наведено порівняння результатів розрахунку з даними, отриманими E. Carrera, L. Demasi, T. Kant, G. A. Kardomateas, H.R. Meyer-Piening, A. Nosier, N.J. Pagano, J.N. Reddy та іншими дослідниками. Особлива увага приділялася розрахунку НДС багатошарових конструкцій при локалізованих навантаженнях і розрахунку сендвічів.

На рис. 1 – 2 наведено характерний розподіл напружень $\bar{p}_{11}^i, \bar{p}_{13}^i$ вздовж товщини товстих тришарових симетричних пластин при статичному розподіленому навантаженні [1]. Кожен шар пластини являє собою графіто-епоксидний композит, кути армування – $0^0/90^0/0^0$. Суцільна лінія відповідає тривимірному розв’язку Pagano, пунктирна – класичній теорії, штрихпунктирна – теорії Григолюка-Чулкова, точки – узагальненій моделі.

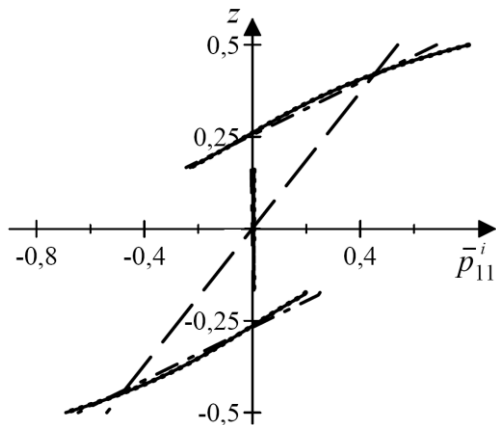


Рис. 1. Напруження \bar{p}_{11}^i

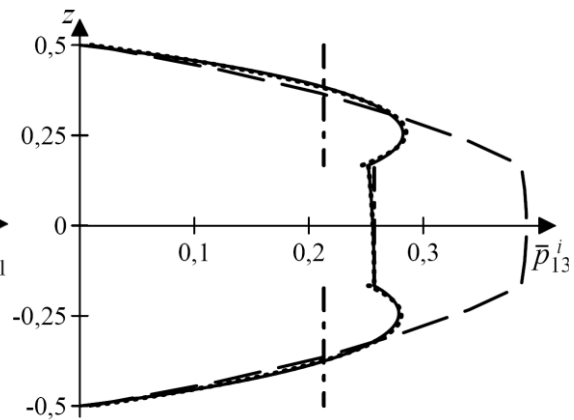


Рис. 2. Напруження \bar{p}_{13}^i

У результаті проведених досліджень встановлено, що застосування теорій, заснованих на гіпотезі ламаної лінії, є виправданим тільки при аналізі переміщень і згинних напружень у відносно тонких конструкціях та при аналізі переміщень у конструкціях середньої товщини при впливі навантажень, розподілених по областях, значно більших, ніж товщина шарів. Показано необхідність обов’язкового урахування нелінійного характеру розподілу переміщень по товщині пластин при їх локалізованому навантаженні, аналізі поперечних зсувних напружень, а також розв’язанні задачі про удар твердим тілом.

1. Ugrimov S.V., Shupikov A.N. Layered orthotropic plates. Generalized theory. *Composite structures*. 2015. Vol. 129, Iss. 1. P. 224-235.

2. Угримов С.В. Расчет трехслойных пластин с композитными обшивками. *Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*: сб. науч. тр. Харьк. нац. аэрокосмического ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». 2014. Вып. 3(79). С. 47-56.

УДК 534.1:539.3

С.В. Угрімов, д-р техн. наук, ст. наук. співроб.

В.Г. Ярещенко, канд. техн. наук, ст. наук. співроб.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України
(Харків, Україна, sugrimov@ipmach.kharkov.ua)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ САПФІРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Штучний сапфір або лейкосапфір має комплекс унікальних фізико-механічних і хімічних властивостей. Він є термоміцним, хімічно стійким і біологічно неактивним матеріалом, має високу механічну міцність і твердість. Твердість сапфіру по шкалі Мооса становить 9 одиниць. При цьому він є оптично прозорим матеріалом. Сапфір широко використовується у різних областях техніки, медицини, хімії, радіоелектроніки, він є перспективним матеріалом для армування композитів, що працюють при високих температурах, а також як елемент світлопрозорої броні. Незважаючи на широке застосування сапфіру, процеси його деформування, особливо у випадку нестационарного навантаження, все ще недостатньо вивчені.

Механічні властивості виробів із сапфіру обумовлені його типом симетрії та обраним напрямом орієнтації кристалографічних осей у виробі. Монокристал лейкосапфіру $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ (далі сапфір) належить до класу симетрії $\bar{3}m$ тригональної сингонії (L_33L_23PC), для якої характерна наявність шести незалежних пружних сталих [1]. Але у сапфірі одна з цих сталих є значно меншою за інші. Тому у багатьох роботах цим значенням нехтують і сапфір розглядають як гексагональне середовище. Кристалографічна діаграма лейкосапфіру наведена на рис. 1 [1, 2].

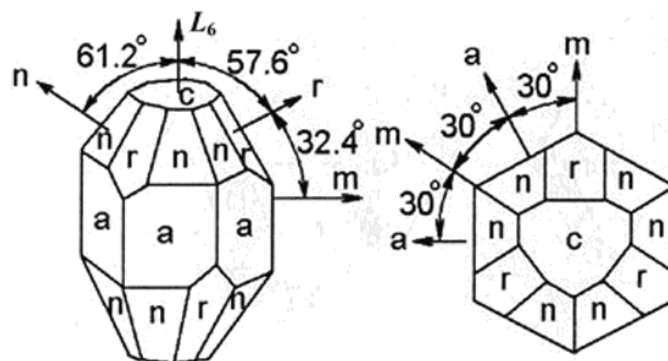


Рис. 1. Кристалографічна діаграма сапфіру

Робота присвячена теоретичному та експериментальному дослідженню процесу деформування елементів конструкцій із сапфіру (сапфірових стрижнів, багатошарових пластин із сапфіровим шаром) із різною орієнтацією кристалографічних осей у них при низькошвидкісному ударі.

Проведено теоретичне та експериментальне дослідження швидкості

поширення хвиль у сапфірі [2, 3]. Розглянуто процес поширення плоскої монохроматичної пружної хвилі у кристалах гексагональної та тригональної сингонії. Теоретичні дослідження проведено за допомогою одновимірних (класична модель, модель Релея) і тривимірної моделей. Особлива увага приділяється отриманим відмінностям у швидкостях розповсюдження хвиль при використанні спрощеної гексагональної та реальної тригональної моделі сапфіру.

Досліджено процес деформування сапфірового стрижня при низькошвидкісному поздовжньому ударі. Рівняння, що описує поздовжні деформації стрижня, розв'язується аналітично. Розв'язок задачі знаходиться у вигляді розвинення за власними формами коливань. Задача зводиться до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Експериментальні дослідження процесу деформування проведено на сапфірових стрижнях із різною орієнтацією кристалографічних осей методом динамічного широкосмугового тензометрування. Для експериментальних досліджень використовувалися сапфірові стрижні діаметром 19 мм і довжиною 550 мм із орієнтацією кристалографічних осей A , R , C [2]. Сапфірові стрижні вирощувалися в Інституті монокристалів НАН України за методом Степанова [2]. Результати теоретичного розрахунку та експериментальні дані порівнюються між собою.

На рис. 2 показані теоретичні та експериментальні значення поздовжніх деформацій стрижня C -орієнтації в точці, віддаленій на 4 см від точки удару. Суцільною лінією зображені дані експерименту, пунктиром – теоретичного розрахунку аналітичним методом.

Проведено дослідження процесу деформування тришарових пластин із сапфіровим шаром з A - та C -орієнтацією при поперечному ударі твердим тілом. Наведено результати розрахунку контактної сили, переміщень та полів напружень. Встановлено, що контактна сила для розглянутих пластин практично співпадає, а напруження у них відрізняються приблизно на 10,0 %.

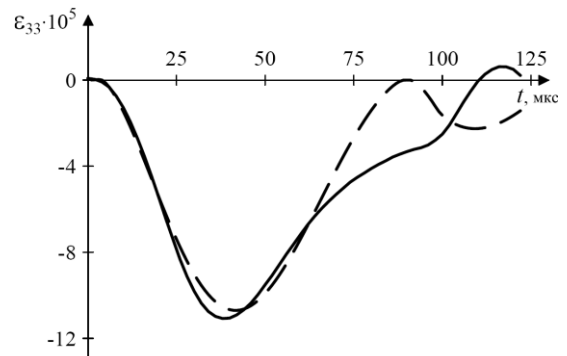


Рис. 2. Зміна деформацій стрижня у часі

1. Dobrovinskaya E., Lytvynov L., Pischik V. Sapphire in science and engineering. Kharkiv: STC "Institute for Single Crystals", 2007. 480 p.

2. Литвинов Л.А., Шупиков А.Н., Угримов С.В., Сотрихин С. Ю, Ярещенко В. Г., Андреев Е. П. Исследование волновых процессов деформирования сапфировых стержней при низкоскоростном ударе. *Кристаллические материалы для оптики и электроники: коллективная монография*. Под ред. акад. В. М. Пузикова. Харьков: Научно-технологический комплекс «Институт монокристаллов» НАН Украины, 2012. С. 305-329.

3. Ugrimov S.V., Shupikov A.N., Lytvynov L.A., Yareshchenko V.G Non-stationary response of sapphire rod on longitudinal impact. Theory and experiment. *Intern. J. of Impact Engineering*. 2017. Vol. 104. P. 55-63.

УДК 539.21

Б.В. Успенський¹, канд. техн. наук
Б.Г. Любарський², д-р техн. наук, проф.
К.В. Аврамов¹, д-р техн. наук, проф.
О.Я. Ніконов³, д-р техн. наук, проф.

¹*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України
(Харків, Україна, Uspensky.kubes@gmail.com)*

²*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(Харків, Україна)*

³*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ У ДИЗЕЛЬНІЙ МІНІЕЛЕКТРОСТАНЦІЇ

При проектуванні дизельних двигунів важливе місце займає проблема крутильних коливань силової передачі, які можуть входити в резонанс з різноманітними зовнішніми моментами та призводити до руйнування ланок передачі та виходу двигуна зі строю. Внаслідок конструктивних особливостей силової передачі її крутильні коливання є суттєво нелінійними, а їхній теоретичний аналіз є складною задачею [1].

Використання дизельного двигуна у складі електрогенератора породжує нові задачі, що пов'язані з можливістю виникнення резонансу між крутильними коливаннями передачі двигуна та змінною складовою магнітного моменту, яка виникає внаслідок нерівномірності магнітного поля між ротором та статором генератора [2].

Запропоновано методику аналізу гармонік вищого порядку магнітного моменту між ротором та статором генератора на базі скінченноелементного підходу. Розроблено метод аналізу коливань силової передачі дизельного двигуна з урахуванням наявності в ній кількох нелінійних муфт. Поєднання цих методів дозволяє робити висновки про можливість нелінійного резонансу між силовою передачею та тормозним моментом генератора. Проведено розрахунки коливань силової передачі двигуна та вищих гармонік тормозного моменту генератора на прикладі поєднання дизеля ЗТД-4 та генераторного обладнання ГС 530АМУЗ. Виявлено, що в такій установці можливе виникнення нелінійного резонансу між крутильними коливаннями силової передачі та тормозним моментом генератора.

Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Держаного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф76.

1. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. 456 с.
2. Шуйский В.П. Расчёт электрических машин. Ленинград: Энергия, 1968. 730 с.

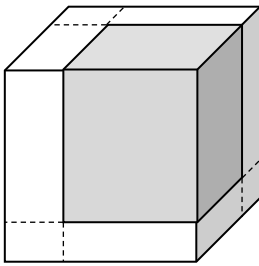
УДК 539.3

В.О. Федоров, канд. техн. наук, доц.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(Харків, Україна, victor_fedorov@ukr.net)

ГОМОГЕНІЗАЦІЯ ТА ГРАНИЧНІ ОЦІНКИ МОДУЛІВ ЗСУВУ ДИСПЕРСНО-ЗМІЩЕНИХ КОМПОЗИТІВ

Розв'язується задача гомогенізації модулів зсуву композита, що армований дисперсними частинками у вигляді паралелепіпедів розміром $2b_1 \times 2b_2 \times 2b_3$, які розташовані з періодом $2a_1 \times 2a_2 \times 2a_3$. Задані модулі зсуву ортотропних матриці G_{ij}^m та включення G_{ij}^f . Треба обчислити модулі зсуву композита \tilde{G}_{ij} . Задача розв'язується на мінімальній представницькій комірці



(рисунок), яка є коміркою симетрії [1], за допомогою віртуальних експериментів. Аналогічно з [2] застосовуються гіпотези, згідно з якими комірка розділяється на вісім елементів (по лініям на рисунку) з однорідним напружено-деформованим станом. Рівняння статички складаються з рівнянь рівноваги комірки та статичних рівнянь сполучення елементів. Рівняння кінематики складаються з рівнянь кінематики комірки та

кінематичних рівнянь сполучення елементів. Фізичні співвідношення складаються з рівнянь закону Гука комірки та з таких рівнянь елементів. Повна система рівнянь є несумісною. Для її регуляризації треба відмовитись від «зайвих» рівнянь. Будуються два типи математичних моделей гомогенізації. Статично сумісна модель відмовляється від кінематичних рівнянь сполучення елементів. Кінематично сумісна модель відмовляється від статичних рівнянь сполучення елементів. Для цих моделей будуються алгоритми обчислення, відповідно, статично сумісних \tilde{G}_{ij}^S та кінематично сумісних \tilde{G}_{ij}^K модулів зсуву. Застосуванням варіаційних принципів Лагранжа та Кастильяно доведено, що модулі \tilde{G}_{ij}^S є нижньою, а \tilde{G}_{ij}^K – верхньою границями для модулів зсуву композита. Наведено приклади розрахунку модулів зсуву за допомогою програмного комплексу [3] та порівняння їх з результатами наведених вище математичних моделей.

1. Fedorov V.A. Symmetry in the problem of shear of composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, No. 3. P. 265-276.

2. Fedorov V.A. Homogenization and boundary estimates of shear stiffness for the composites of the tetragonal structure. *Composites. Part B: engineering*. 2016. Vol. 85. P. 8-14.

3. Федоров В.А. Уравнения и методы расчета микромеханики неустановившейся ползучести металлических волокнистых композитов. *Вестник ХГПУ*. 1999. Вып. 53. С. 7-19.