АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М.ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М.ПІДГОРНОГО

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЧУГАЙ АНДРІЙ МИХАЙЛОВИЧ

УДК 519.859

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____А.М. Чугай

Науковий консультант: Стоян Юрій Григорович, член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Чугай А.М. Математичне моделювання та методи розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи».

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України Харків, 2018.

Дослідженню задач оптимального розміщення геометричних об’єктів присвячені роботи науковців всього світу. Це обумовлено надзвичайною складністю оптимізаційних задач розміщення об’єктів та необхідністю широкого використання результатів в наукових дослідженнях та в практиці проектування в різних галузях промисловості. На даний час створено досить широкий спектр методів для розв’язання оптимізаційних задач розміщення двовимірних геометричних об’єктів. Найменш вивченими з фундаментальної точки зору залишаються задачі оптимального розміщення неорієнтованих (тобто таких, що дозволяють неперервні трансляції та довільні повороти) тривимірних тіл.

У зв'язку з цим актуальною проблемою є створення єдиного підходу до математичного моделювання і розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл на базі арсеналу засобів, розвинених в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування, що дозволить подивитись на дану проблему з єдиних позицій і залучити до розв’язання даного класу задач всю міць апарату сучасного математичного програмування.

Метою роботи є ефективне розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл шляхом побудови точних математичних моделей та розробки підходів, що базуються на застосуванні оптимізаційних методів нелінійного програмування та сучасних НЛП солверів.

Можливі сфери практичного застосування задач оптимальної упаковки тривимірних тіл умовно можна класифікувати таким чином: задачі оптимізації компоновочних рішень; комп’ютерне моделювання у матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях; оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва; інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів.

Відомо, що задачі 3*D* упаковки є *NP*-складними, через що дуже важко розробити методи, що дозволяють знайти оптимальні розв’язки. Більшість публікацій з упаковки тривимірних тіл присвячені розміщенню куль або прямих паралелепіпедів. Для об’єктів, які мають більш складну просторову форму, використовуються різні апроксимаційні підходи, що призводить до втрати властивостей задачі у її вихідній постановці. Крім того, основна маса робіт з дослідження проблеми тривимірних розміщень не дозволяє враховувати зміну орієнтації об'єктів. Деякі автори враховують тільки дискретні зміни в орієнтації на задані кути. Як наслідок, використання некоректних апроксимаційних моделей низької точності та наближених евристик не дає можливості знаходити оптимальні розв’язки задач упаковки тривимірних тіл та призводить до звуження можливих галузей практичного застосування цих задач. Недоліки використання апроксимаційних моделей та евристичних методів можуть бути усунені за рахунок побудови точних аналітичних моделей, які дозволяють адекватно описувати задачі упаковки в їх вихідній постановці та застосовувати для розв’язання сучасні оптимізаційні методи.

Усю множину тривимірних тіл, які розглядаються у роботі, можна поділити на дві основні групи. До першої групи відносяться опуклі тривимірні тіла, поверхня яких сформована циліндричними, конічними та сферичними поверхнями, та їх еквідистантні поверхні. До другої групи відносяться неопуклі багатогранники та довільні тривимірні тіла, що можуть бути апроксимовані за допомогою багатогранників.

Для розробки ефективних методів, які грунтуються на застосуванні

сучасних методів локальної та глобальної оптимізації, потрібна побудова адекватних математичних моделей, заснованих на аналітичному описі відносин реальних (без попередньої апроксимації) просторових форм об’єктів та врахуванні їх неперервних поворотів та трансляцій. Аналітичний опис взаємодії між тривимірними тілами є однією з найбільш важливих і складних задач комп'ютерного та математичного моделювання задач упаковки тривимірних тіл.

В роботі побудовано нові класи Ф-функцій та квазі-Ф-функцій як для орієнтованих, так і неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами.

Побудовано математичну модель загальної задачі оптимальної упаковки неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами. Основною перевагою побудованої математичної моделі є те, що вона представлена у вигляді задачі нелінійного програмування. Цей факт дозволяє розробити підходи до розв’язання задач упаковки тривимірних тіл з використанням сучасних NLP солверів. На основі побудованих класів Ф-функцій в залежності від форми та особливостей характеристик тривимірних тіл, виду контейнеру, функції цілі та технологічних обмежень побудовано реалізації загальної математичної моделі для таких задач: упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у багатозв’язну область; компоновки тривимірних тіл з урахуванням допустимих відстаней та зон заборони; упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль; упаковки тіл, поверхня яких формується циліндричними, конічними та сферичними поверхнями; упаковки паралелепіпедів з урахуванням їх ортогональних поворотів; упаковки опуклих неорієнтованих гомотетичних багатогранників; упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранників.

Завдяки тому, що математична модель загальної задач упаковки тривимірних тіл побудована у вигляді задачі математичного програмування, в

роботі була розроблена єдина методологія розв’язання задач упаковки, на всіх етапах якої застосовуються сучасні методи нелінійної оптимізації. Запропонована методологія використовує декілька підходів, принципова відмінність яких полягає в можливості зміни орієнтації тривимірних тіл під час пошуку розв’язку задач, адже довільні повороти об’єктів значно ускладнюють розв’язання задач та вимагають використання інших методів. Через це методологія використовує два основних підходи до розв’язання задач: упаковки орієнтованих тривимірних тіл та упаковки неорієнтованих тривимірних тіл.

Підхід до розв’язання задачі упаковки орієнтованих тіл використовує стратегію, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації. Підхід до розв’язання задачі упаковки неорієнтованих тіл використовує дві різні стратегії пошуку наближення до глобального розв’язку, які обираються в залежності від форми тіл. У випадку, якщо тіла мають опуклу форму, використовується стратегія, яка ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та пошуку перспективних точок. Оскільки при упаковці тривимірних тіл неопуклої форми складність задачі значно підвищується, то для її розв’язання використовується багатоетапна стратегія мультістарту, яка на початковому етапі використовує стратегію упаковки неорієнтованих опуклих тіл. Кожна із запропонованих стратегій грунтується на використанні послідовності таких методів: 1) методу побудови допустимих точок з області припустимих розв’язків; 2) методу локальної оптимізації; 3) методу глобальної оптимізації. Для кожної з запропонованих стратегій було розроблено свій набір методів, що враховує особливості задач, які необхідно розв’язати.

Основна ідея стратегії, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації, орієнтована на оптимізацію функції цілі, заданої на множині переставлень. Для побудови допустимих початкових точок з області припустимих розв’язків застосовуються методи, які використовують послідовність розміщення тривимірних тіл або послідовність координат їх центрів.

Усі методи стратегії, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях, використовують розширення розмірності задачі за рахунок введення змінних метричних характеристик об'єктів та їх гомотетичних перетвореннях.

Багатоетапна стратегія мультістарту орієнтована на пошук оптимальних розміщень неорієнтованих неопуклих тіл, що значно ускладнює процес розв’язання. Тому для скорочення значних обчислювальних та часових витрат виконується декомпозиція розв’язання задачі на декілька крупних етапів (підготовчий та багаторазового запуску) та їх підетапів. На підготовчому етапі виконується розв’язання серії допоміжних задач нелінійного програмування, які дозволяють визначити множину кластерів для побудови початкових точок основної задачі упаковки. На етапі багаторазового запуску відбувається побудова різних початкових допустимих точок та відповідних їм локальних мінімумів. Слід відзначити, що для побудови початкових точок розв’язується задача упаковки множини кластерів. Для розв’язання цієї задачі використовується стратегія, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок.

Для застосування методів локальної оптимізації необхідно побудувати початкові точки, які належать області припустимих розв’язків. Однією з вимог до методів побудови початкових точок для задач упаковки тривимірних тіл є забезпечення генерації різноманіття точок та зменшення обчислювальних витрат з метою їх швидкої побудови. В роботі були розроблені такі методи: для упаковки конгруентних тривимірних тіл - метод регулярних розміщень; для опуклих тіл, поверхня яких утворена конічними, циліндричними та сферичними поверхнями, – метод гомотетичних перетворень; для неопуклих багатогранних тіл – метод кластеризації.

Аналіз особливостей математичних моделей задач упаковки показав, що область припустимих розв’язків описується дуже великою кількістю нелінійних нерівностей. Цей факт потребує розробки методів, які дозолять ефективно розв’язати проблему великої розмірності задач. Основна ідея запропонованих методів локальної оптимізації ґрунтується на декомпозиції

основної задачі на підзадачі зі значно меншою кількістю обмежень та меншої розмірності. Для цього виконуються такі етапи: послідовна генерація підобластей області допустимих розв'язків, які містять початкову точку; визначення підсистеми ε – активних обмежень; пошук за допомогою сучасних НЛП солверів другого порядку локальних екстремумів на обраних підобластях; організація переходу до інших підобластей.

Однією з важливих властивостей задач упаковки є їх NP-складність. Через це здійсниити повний перебір локальних екстремумів не можливо. Тому для пошуку розв'язку таких задач, в основному, використовується стохастичний пошук, який не гарантує знаходження оптимального розв'язку. В роботі запропоновано методи глобальної оптимізації, які дозволяють знаходити наближення до глобальних екстремумів, використовуючи такі методи: 1) послідовної статистичної оптимізації за допомогою методу околів, що звужуються; 2) побудови перспективних розміщень та організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі. У першому випадку використовувалась модифікація методу околів, що звужуються. Цей метод дозволяє здійснити спрямований випадковий перебір локальних екстремумів та орієнтований на оптимізацію функцій, які задано на множині переставлень. Метод заснований на властивостях ймовірнісного розподілу локальних екстремумів функції цілі. Для його реалізації введено метрику на просторі перестановок. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на множині перестановок. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи методу інформації, обираються центри й радіуси нових околів. Якщо при переході до чергового кроку методу значення функції цілі не покращується, то радіус околів зменшується.

Ключова ідея методу побудови перспективних розміщень та організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі полягає у здійсненні багаторазових переходів від одного локального екстремуму до іншого, в якому значення функції цілі задачі буде покращено.

З метою здійснення таких переходів виконується пошук нових “перспективних” початкових точок, завдяки розв’язанню серії допоміжних задач з гомотетичними перетвореннями тіл. Для цього у точці поточного локального екстремуму, визначаються 2 групи об'єктів: 1) об'єкти, "навколо" яких існує вільний простір, а значить на їх місце можна встановити об'єкти, що мають більший об’єм; 2) об'єкти, навколо яких утворилося дуже щільне заповнення області розміщення, що не дозволяє покращити функцію цілі. Завдяки організації перестановки таких об'єктів можна здійснити перехід до нового локального екстремуму. Для визначення таких об'єктів розв’язуються допоміжні задачі НЛП, в яких тривимірні тіла допускають гомотетичні перетворення.

Деякі отримані результати було впроваджено на етапі конструкторського проектування при розв’язанні задач компонувального синтезу для авіаційної промисловості та у логістичних задачах на державному підприємстві “Харківський машинобудівний завод ”ФЕД”, про що свідчить акт впровадження результатів досліджень.

Достовірність отриманих у роботі результатів має високий рівень і підтверджується аргументованим викладенням матеріалу, застосуванням надійних конструктивних засобів математичного моделювання, використанням сучасних методів нелінійної оптимізації і геометричного проектування, проведенням ряду обчислювальних експериментів, у ході яких було проведено порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників та отримано покращення як результатів, так і часу розв’язання задач.

Ключові слова: упаковка, тривимірні тіла, геометричне проектування, Ф-функції, математичне моделювання, неперервні обертання, нелінійна оптимізація.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol. 105. P. 265-293.
2. Чугай А.М. Математическое и компьютерное моделирование при автоматизации объемно-планировочного проектирования машинного зала энергоблока. Науковий вісник будівництва. 2007. Вип. 43. С. 279-282.
3. Евсеева Л.Г., Чугай А.М. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму. Системи управління, навігації та зв'язку. 2007. Вип. 4. С. 121-128.
4. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений. Электронное моделирование. 2008. Т.30. №5. С. 3-21.
5. Stoyan Yu., Chugay A. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region. European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 197. P. 446-455.
6. Чугай А.М. Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки. Вестник двигателестроения. 2009. №3. С.122-126.
7. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета. Доповіді НАН України. 2009. № 10. С. 45-53.
8. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. Кибернетика и системный анализ. 2010. №5. С. 122-131.
9. Баранов А.В., Грицай Д.В., Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М. Розміщення прямокутних графічних елементів в поліграфічному виробництві. Бионика интеллекта. 2010. №1(72). С.29-32.

10. Stoyan Y.G., Zlotnik M.V. , Chugay A.M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region. Journal of the Operational Research Society. 2012. № 63(3). pp. 379391.
11. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 1. Mathematical model and its characteristics. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. № 1. P. 44-52.
12. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 2. A solution method and its realisation. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. №.2. P. 52-61.
13. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическое моделирование взаимодействия неориентированных выпуклых многогранников. Кибернетика и системный анализ. 2012. Т. 48. № 6. С. 36-44.
14. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника. Доповіді НАН України. 2011. № 12. С. 35-40.
15. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов. Доповіді НАН України. 2012. № 12. С. 41-48.
16. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованные Ф-функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцидиндром. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: зб. наук. праць. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2012. № 1037. С. 190-201.
17. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра. Доповіді НАН України. 2013. № 2. С. 36-41.
18. Стоян Ю. Г., Сёмкин В. В., Чугай А. М. Построение начальных точек и поиск локальних экстремумов задачи компоновки 3D объектов в цилиндрической области. Доповіді НАН України. 2013. № 12. С. 52-58.

19. Стоян Ю.Г., Сёмкин В.В., Чугай А. М. Оптимизация компоновки трёхмерных объектов в многосвязной области с учётом кратчайших расстояний. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 3. С. 58-70.
20. Сёмкин В.В., Чугай А.М., Панкратов А. В. Квази Ф-функция для сфероконусов с поворотами. Радиоэлектроника и информатика. 2014. № 1. С. 30-33.
21. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов. Искусственный интеллект. 2014. №1. С. 74-79.
22. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Размещение неориентированных трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний. Искусственный интеллект. 2014. № 2. С. 39-44.
23. Чугай А.М. Метод получения начальных размещений в задаче моделирования структуры систем плотноупакованных объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 2. С. 40-45.
24. Чугай А.М. Один из подходов к поиску хороших локальных минимумов в задаче размещения цилиндрических объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 3. С. 56-60.
25. Stoyan Y.G, Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. Advances in Decision Sciences. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, 19 p. http:.dx.doi.org.10.1155.2014.571743.
26. Pankratov A.V., Romanova T.E., Chugay A.M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. Journal of Mechanical Engineering. 2015. № 18 (2). P. 55-65.
27. Stoyan Y.G., Semkin, V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. iss. 2. P. 296-304.
28. Pankratov O.V., Romanova T.E., Stoyan Y.G., Chugay A.M. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 1 (4). P. 39-47.

29. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Задача упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл. Доповіді НАН України. 2017. № 10. С.28-33.
30. Чугай А.М., Панкратов О.В., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є. Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ 2017. № 6 (46). С. 127-130.
31. Chugay A., Stoian Ye. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid. Сучасні інформаційні системи. 2018. № 1. С.16-21.
32. Чугай А.М. Моделювання щільного пакування подібних 3D об'єктів. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ. 2018. Т.1 (48). С. 55-58.
33. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "3D layout optimization". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 51165, Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 06.09.2013.
34. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "Dense packing of 3D objects". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 55364. Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 19.06.2014.
35. Чугай А. М. Оптимизация при компоновке энергомашиностроительного оборудования. Физические и компьютерные технологии: труды 13-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2007. С. 516-518.
36. Чугай А. М. Математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров в призме с учётом минимально допустимых расстояний. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых учёных и специалистов. Харьков: ИПМАШ НАНУ, 2007. С. 27.
37. Чугай А. М. Решение некоторых задач оптимизационного геометрического проектирования модифицированным методом сужающихся окрестностей.

Физические и компьютерные технологии: труды 14-й междунар. науч.-техн. конф. Харьков, 2008. С.486-489.

38. Stoyan Yu., Chugay A. Optimization packing problem of equal circles. Proc. 23-rd European Conference on Operational Research, Bonn, 2009. P. 106.
39. Чугай А. М. Об одном из методов перебора локальных экстремумов в многоэкстремальных задачах упаковки одинаковых объектов. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов второй международной научной конференции, Минск, 2009. Ч. 2. С.198-199.
40. Чугай А. М. Построение Ф-функции для неориентированных параллелепипедов. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конф. молодых ученых и специалистов, Харьков. ИПМАШ НАНУ, 2009. С. 39.
41. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия параллелепипедов с учетом их произвольных поворотов. Физические и компьютерные технологии: труды 15-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2009. С. 448-451.
42. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия неориентированных многогранников, многогранника и шара. Системний аналіз та інформаційні технології - 2010: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф., Київ. ІПСА, 2010. С.340.
43. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия некоторых неориентированных 3D объектов. Інформаційно-комп’ютерні технології - 2010: тези V міжнар. наук.-техн. конф., Житомир: ЖДТУ, 2010. С.11-12.
44. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель задачи упаковки параллелепипедов и сфер в параллелепипеде. Інформатика та системні науки -2011: матеріали всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава: ПУСКУ, 2011. С. 297-300.

45. Чугай А.М. Упаковка неориентированных параллелепипедов и шаров в параллелепипеде. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 2011. С.40.
46. Чугай А.М., Яськов Г.Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей IX міжнар. наук.-практ. конф., Дніпропетровськ, 2011. С. 281-283.
47. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Математическое моделирование отношений геометрических объектов, построенных с помощью шаров и цилиндров. Математичне та імітаційне моделювання систем: тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф, Чернігів-Жукин, 2012. С. 238-240.
48. Чугай А.М. Метод решения задачи упаковки неориентированных параллелепипедов и шаров. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы III межд. конф., Кишинев, 2012. С. 536-539.
49. Stoyan Yu., Chugay A. Packing Cuboids and Spheres. Proc. of 10-th ESICUP Meeting. Lille (France), 2013. P. 21.
50. Чугай А. М., Злотник М.В., Сёмкин В.В, Лимаренко И.В. Один из подходов к улучшению функции цели в задачах упаковки. Системный анализ и информационные технологии: материалы 15-й межд. науч.-техн. конф. SAIT-2013. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2013. С. 217.
51. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 4-й междун. конф., Кишинёв, 2014. Т. 2. С. 416-420.
52. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Решение задачи плотной упаковки неориентированных трёхмерных объектов. Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-технической конференции SAIT-2014. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. С. 262.

53. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimal packing of convex polytopes. Информационные системы и технологии: тезисы докл. IV междун. науч.-техн. конф., Харьков: ХНУРЕ, 2015. С. 11-12

54. Chugay A., Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Packing and cutting problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тезисы докл. XIII межд. науч.-практ. конф., Днепропетровск, 2015. С. 224-225

55. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доповідей XXI всеукраїнської наук. конф., Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. С. 23-24.

56. Чугай А.М., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Сравнение двух подходов к моделированию и решению задачи упаковки многогранников. Информационные системы и технологии: тезисы докл. 6-й международной науч.-техн. конф., Коблево, 2017. С. 141-142.

57. Чугай А.М. Подходы к математическому моделированию задачи упаковки неориентированых многогранников. Інформатика та системні науки: матеріали VIII всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава, 2017. С. 292-294

58. Chugay A.M. Mathematical modelling of homothetic polytopes packing. Системний аналіз та інформаційні технології - 2017: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. Київ. ІПСА, 2017. С. 19.

59. Чугай А.М. Метод розв’язання задачі упаковки опуклих гомотетичних багатогранних тіл. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання - 2017”. 2 с. Режим доступу: http:.iapmm.lviv.ua.chyt2017.abstracts.Chugay.pdf

60. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Чугай А.М., Панкратов О.В. Задачі геометричного проектування у адитивних технологіях. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XV міжнар. наук.-практ. конф., Дніпро, 2017. С.193-194.

61. Pankratov A., Romanova T., Chugay A., Stoyan Yu. E. Optimization of the process of 3*D*-printing for SLS technologies of additive production. 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education» (ICAICTSEE-2017). Sofia. Bulgaria, 2017. FA24. 4 p.
62. Chugay A., Pankratov A., Romanova T., Stoyan Yu.E. An optimization technique in 3D printing design. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 6-й международной конференции, Кишинёв, 2018. Т.2. С. 416-420.
63. Chugay A. M. Optimization of packing polytopes using phi-function technique. Modern problems of mathematical modelling, computational methods and information technologies: proc. of International Scientific Conference, Rivne, 2018. C.17-18.
64. Чугай А.М. Кластерное размещение невыпуклых неориентированных многогранников. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків. 2018. С.20.

ABSTRACT

Chugay A.M. Mathematical modeling and methods for solving problems of optimal package of three-dimensional objects. – Manuscript.

The thesis for a Doctor's degree of technical sciences in speciality 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods.

A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine Kharkiv, 2018.

The studies of problems of optimal placement geometry are conducted by many researchers all around the world. This is due to the extreme complexity of the optimization problems and the necessity to implement the results in researches and design engineering in the various industries. Currently there is a wide range of established methods for solving optimization problems of placing two-dimensional geometric objects. From the perspective of fundamental research the problem of optimal allocation of non-oriented (that enable continuous translation and random rotations) three-dimensional objects remains the least studied.

In this context the creation of a unified approach to the mathematical modeling and solving three-dimensional bodies optimization problems by utilizing the spectrum of tools developed in the geometric design optimization framework is becoming a pretty challenging issue. Such approach allows to approach this issue from a unified standpoint and involve the powerful instruments of modern mathematical programming.

The aim of this study is to effectively solve three-dimensional bodies packing optimization problems by building accurate mathematical models and developing approaches based on the optimization techniques and the utilization of modern NLP solvers.

Possible areas of practical application of three-dimensional bodies optimal packing solutions can be roughly classified as follows: layout optimization problem

solutions; computer simulations in materials science, nanotechnology and powder metallurgy; optimization of 3D-printing technology for SLS additive production; information and logistics systems that ensure the optimization of transportation and storage.

The well-known fact is that 3D packaging problems are NP-complex, because it is very difficult to develop methods that would bring the optimal solutions. Most publications on the subject of three-dimensional bodies packing is devoted to the direct parallelepipeds or balls. For the objects that have a complex spatial form the various approximation approaches are used in the researches and as result the initial problem definition is distorted. In addition, most of the research publication on the subject of three-dimensional disposition of objects does not take into account the changes in their orientation. Some authors consider only discrete changes in the specified orientation angles. Consequently, the application of inaccurate low precision approximation models and approximate heuristics does not allow to find the optimal solutions for three-dimensional bodies packing problem and narrows the possibilities of the practical usage of the results of these researches. The shortcomings of approximation models and heuristic methods application can be eliminated by building accurate analytical models that help to adequately describe the problem in its initial definition and involve the modern optimization methods.

The entire set of three-dimensional bodies, which are considered in this work, can be divided into two main groups. The first group includes three-dimensional convex body whose surface is formed by cylindrical, conical and spherical surfaces, and their equidistant surfaces. The second group includes nonconvex polyhedra and any three-dimensional bodies that can be approximated using polyhedrons.

In order to develop the effective methods that will apply modern methods of local and global optimization we need to build the adequate mathematical models based on the analytical description of the real relationships (without first approximation) of spatial shapes of objects with consideration of their continuous rotations and translations. The analytical description of the interactions between three-dimensional bodies is one of the most important and difficult question in the

problematics of computer and mathematical modeling applied in the area of three-dimensional objects packing.

In our study we developed the new classes of F-functions and quasi F-functions for the oriented and non-oriented three-dimensional bodies whose surface is formed by the cylindrical, conical, spherical surfaces and planes.

Also, the mathematical model of the general issue of optimal packing for non-oriented three-dimensional bodies whose surface is formed by cylindrical, conical, spherical surfaces and planes, has been built in this work. The main advantage of the suggested mathematical model is that it is treated as a nonlinear programming issue. This fact allows us to get the solutions for three-dimensional bodies packing problems by using the advanced NLP solver.

On the basis of F-functions the realizations of the general mathematical models for the following problems have been developed in accordance to the shape and special characteristics of three-dimensional bodies, the container type, their objective function and the technological limitations: packing of the maximum number of the congruent cylinders in the multiconnected space; three-dimensional bodies layout considering the acceptable distances and forbidden areas; packing of the undirected parallelepipeds and spheres; packing of the bodies whose surface is formed by cylindrical, conical and spherical surfaces; packing of the parallelepipeds considering their orthogonal rotations; packing of the convex undirected homothetic polyhedra; packing of the nonconvex undirected polyhedra.

Due to the fact that in our study the mathematical model of the overall three-dimensional body packing problem had been treated as the mathematical programming problem, we managed to develop a methodology for packing solutions that involves the modern methods of nonlinear optimization at all stages of the problem resolution process. The proposed methodology uses several approaches; the fundamental difference between them is the ability to change the orientation of three-dimensional bodies while searching for the solution, because the random rotation of the objects considerably complicates the problem solving and requires the implementation of other methods. Therefore, this methodology applies two basic

approaches to the problem solving: for the directed three-dimensional bodies packing and for undirected three-dimensional bodies packing.

The problem-solving approach for packing of the directed bodies applies the strategy based on the successive statistical optimization. The problem-solving approach for the undirected bodies packing utilizes two different strategies to search for the approximation to the global solution depending on the bodies shape. If the body has a convex shape, the strategy based on the homothetic transformations and search of the promising points is used. In the process of packing of three-dimensional nonconvex bodies the complexity increases significantly, therefore the multi-start strategy is applied for resolution, which initially uses the undirected convex bodies packing strategy. Each of the proposed strategies is based on the use of the sequence of the following methods: 1) the method of constructing the admissible points in the permissible solutions area; 2) the local optimization method; 3) the global optimization method. For each of the proposed strategies we suggested a set of techniques that addresses the specific problems to be solved.

The main idea of the strategy based on the successive statistical optimization is focused on the optimization of the objective function, given in the set of permutations. In order to construct the admissible points in the permissible solutions area we employed methods that use the order of three-dimensional bodies or the sequence of their centers coordinates.

All methods of homothetic transformations-based strategy applies the extension of the problem dimension by introducing variable metric characteristics of the objects and their homothetic transformations.

A multi-start strategy is focused on the search of optimal placement for undirected nonconvex bodies, which greatly complicates the solution. Therefore, to reduce the significant time spent computing and solving the problem decomposition is performed at several major stages (preparatory and multiple launch) and their sub-stages. At the preparatory stage a series of auxiliary solving problems of nonlinear programming for determining a plurality of clusters to build the initial points of the main packing problem has been performed. On stage of multiple launch the different

initial admissible points and corresponding local minima have been constructed. It should be noted that to build the initial points we firstly solve the problem of packing for plurality of clusters. To solve this problem, we apply the strategy based on the homothetic transformations and search of the promising points.

In purpose to apply the local optimization methods it is necessary to construct the initial points that belong to the permissible solutions area. One of the requirements for methods of constructing the initial points for the problems of three-dimensional bodies packing is to ensure the generation of diversity of points and reduction of computing costs for their rapid construction. In this study we developed the following methods: for congruent three-dimensional b packing – the method of regular offerings; for convex bodies whose surface is formed by conical, cylindrical and spherical surfaces – the method of homothetic transformations; for nonconvex polyhedral bodies – the clustering method.

The analysis of the specifics of the mathematical models applied for packing problems demonstrated that the permissible solutions area is described by a very large number of nonlinear inequalities. This fact proves the necessity to develop the methods that will allow the solve effectively the issues of large-scale problems. The main idea proposed by the local optimization is built on the decomposition of the main task into subproblems with far fewer restrictions and lower number of dimensions. For this purpose the following steps are performed: the successive generation of subdomains of the permissible solutions area, that contain the starting point; the determination of $\varepsilon-$active constraints subsystem; the search using the advanced NLP solvers of the second derivative of local extrema in the selected subdomains; the arrangements of the transition to other subdomains.

The important specific characteristic of packing problems is their NP-complexity. Therefore, to find the exhaustive number of local extrema set is impossible. For this reason, to resolve such problems the stochastic search is mainly used, but it does not guarantee finding the optimal solution. Our research presents the methods of global optimization that allow you to find the approach to the global extrema using the following techniques: 1) the consistent statistical optimization

with the help of tapering neighborhoods method; 2) the construction of the promising placement and arrangements of the transitions to the local extrema with the best objective function value. In the first case a modification of tapering neighborhoods method is used. This method allows to perform the directed random search of local extrema and is focused on the optimizations of the features given in the set of permutations. The method is based on the properties of a probability distribution of local extrema of the objective function. For the implementation of this method a metric has been introduced in the permutations area. The search of the best values of the objective function is conducted in the neighborhoods defined in the set of permutations. At each step of the method the radiuses of new neighborhoods are elected based on the information accumulated in the cause of the application of the informational method. If after the transition to the next method step values of the objection function is not getting better, the radius of neighborhoods starts to decrease.

The main goal of the method the construction of the promising placement and arrangements of the transitions to the local extrema is to perform multiple transitions from one to another local extremum with better objective function value. To support such transitions we’re searching for the new "promising" initial points through resolving a series of auxiliary tasks of homothetic transformations of the bodies. For this purpose in the point of the current local extremum two groups of objects are defined: 1) the objects that have some free space "around", which means that they can be replaces with the objects of a bigger volume; 2) the objects with very narrow area location, that does not to improve the objective function value. By reshuffling such objects we can move to the new local extremum. To determine such objects, we need to resolve auxiliary NLP tasks with three-dimension objects that allow homothetic transformations.

Some of the results of our research were introduced at the design stage for solving the layout synthesis problems in the aviation industry and the logistics problems at the state enterprise "Kharkov machinery plant" FED ", as evidenced by the act of implementation of research results.

The reliability of the obtained results is high and is proved in the substantiated presentation of the materials, by the usage of the reliable design tools of mathematical modeling, the modern methods of nonlinear optimization and geometric design, in a series of numerical experiments, that included the comparison of the obtained results with the results presented by foreign researchers and confirmed the improvement the results and timing of problem solving.

Keywords: packing, three-dimensional bodies, geometric projection, Φ-functions, mathematical modeling, continuous rotations, nonlinear optimization.

LIST OF PUBLICATIONS OF THE APPLICANT

1. Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol. 105. P. 265-293.
2. Чугай А.М. Математическое и компьютерное моделирование при автоматизации объемно-планировочного проектирования машинного зала энергоблока. Науковий вісник будівництва. 2007. Вип. 43. С. 279-282.
3. Евсеева Л.Г., Чугай А.М. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму. Системи управління, навігації та зв’язку. 2007. Вип. 4. С. 121-128.
4. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений. Электронное моделирование. 2008. Т.30. №5. С. 3-21.
5. Stoyan Yu., Chugay A. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region. European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 197. P. 446-455.
6. Чугай А.М. Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки. Вестник двигателестроения. 2009. №3. С.122-126.

7. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета. Доповіді НАН України. 2009. № 10. С. 45-53.
8. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. Кибернетика и системный анализ. 2010. №5. С. 122-131.
9. Баранов А.В., Грицай Д.В., Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М. Розміщення прямокутних графічних елементів в поліграфічному виробництві. Бионика интеллекта. 2010. №1(72). С.29-32.
10. Stoyan Y.G., Zlotnik M.V. , Chugay A.M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region. Journal of the Operational Research Society. 2012. № 63(3). pp. 379391.
11. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 1. Mathematical model and its characteristics. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. № 1. P. 44-52.
12. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 2. A solution method and its realisation. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. №.2. P. 52-61.
13. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическое моделирование взаимодействия неориентированных выпуклых многогранников. Кибернетика и системный анализ. 2012. Т. 48. № 6. С. 36-44.
14. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника. Доповіді НАН України. 2011. № 12. С. 35-40.
15. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов. Доповіді НАН України. 2012. № 12. С. 41-48.
16. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованные Ф-функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцидиндром.

Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: зб. наук. праць. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2012. № 1037. С. 190-201.

17. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра. Доповіді НАН України. 2013. № 2. С. 36-41.
18. Стоян Ю. Г., Сёмкин В. В., Чугай А. М. Построение начальных точек и поиск локальних экстремумов задачи компоновки 3D объектов в цилиндрической области. Доповіді НАН України. 2013. № 12. С. 52-58.
19. Стоян Ю.Г., Сёмкин В.В., Чугай А. М. Оптимизация компоновки трёхмерных объектов в многосвязной области с учётом кратчайших расстояний. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 3. С. 58-70.
20. Сёмкин В.В., Чугай А.М., Панкратов А. В. Квази Ф-функция для сфероконусов с поворотами. Радиоэлектроника и информатика. 2014. № 1. С. 30-33.
21. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов. Искусственный интеллект. 2014. №1. С. 74-79.
22. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Размещение неориентированных трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний. Искусственный интеллект. 2014. № 2. С. 39-44.
23. Чугай А.М. Метод получения начальных размещений в задаче моделирования структуры систем плотноупакованных объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 2. С. 40-45.
24. Чугай А.М. Один из подходов к поиску хороших локальных минимумов в задаче размещения цилиндрических объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 3. С. 56-60.
25. Stoyan Y.G, Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. Advances in Decision Sciences. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, 19 p. http:.dx.doi.org.10.1155.2014.571743.

26. Pankratov A.V., Romanova T.E., Chugay A.M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. Journal of Mechanical Engineering. 2015. № 18 (2). P. 55-65.
27. Stoyan Y.G., Semkin, V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. iss. 2. P. 296-304.
28. Pankratov O.V., Romanova T.E., Stoyan Y.G., Chugay A.M. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 1 (4). P. 39-47.
29. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Задача упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл. Доповіді НАН України. 2017. № 10. С.28-33.
30. Чугай А.М., Панкратов О.В., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є. Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва. Системи управління, навігації та зв’язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ 2017. № 6 (46). С. 127-130.
31. Chugay A., Stoian Ye. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid. Сучасні інформаційні системи. 2018. № 1. С.16-21.
32. Чугай А.М. Моделювання щільного пакування подібних 3D об’єктів. Системи управління, навігації та зв’язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ. 2018. Т.1 (48). С. 55-58.
33. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп’ютерна програма "3D layout optimization". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 51165, Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 06.09.2013.
34. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп’ютерна програма "Dense packing of 3D objects". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 55364. Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 19.06.2014.
35. Чугай А. М. Оптимизация при компоновке энергомашиностроительного оборудования. Физические и компьютерные технологии: труды 13-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2007. С. 516-518.

36. Чугай А. М. Математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров в призме с учётом минимально допустимых расстояний. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых учёных и специалистов. Харьков: ИПМАШ НАНУ, 2007. С. 27.
37. Чугай А. М. Решение некоторых задач оптимизационного геометрического проектирования модифицированным методом сужающихся окрестностей. Физические и компьютерные технологии: труды 14-й междунар. науч.-техн. конф. Харьков, 2008. С.486-489.
38. Stoyan Yu., Chugay A. Optimization packing problem of equal circles. Proc. 23-rd European Conference on Operational Research, Bonn, 2009. P. 106.
39. Чугай А. М. Об одном из методов перебора локальных экстремумов в многоэкстремальных задачах упаковки одинаковых объектов. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов второй международной научной конференции, Минск, 2009. Ч. 2. С.198-199.
40. Чугай А. М. Построение Ф-функции для неориентированных параллелепипедов. Современенные проблемы машиностроения: тезисы докладов конф. молодых ученых и специалистов, Харьков. ИПМАШ НАНУ, 2009. С. 39.
41. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия параллелепипедов с учетом их произвольных поворотов. Физические и компьютерные технологии: труды 15-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2009. С. 448-451.
42. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия неориентированных многогранников, многогранника и шара. Системний аналіз та інформаційні технології - 2010: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф., Київ. ІПСА, 2010. С.340.

43. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия некоторых неориентированных 3D объектов. Інформаційно-комп'ютерні технології - 2010: тези V міжнар. наук.-техн. конф., Житомир: ЖДТУ, 2010. С.11-12.
44. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель задачи упаковки параллелепипедов и сфер в параллелепипеде. Інформатика та системні науки -2011: матеріали всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава: ПУСКУ, 2011. С. 297-300.
45. Чугай А.М. Упаковка неориентированных параллелепипедов и шаров в параллелепипеде. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 2011. С.40.
46. Чугай А.М., Яськов Г.Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей IX міжнар. наук.-практ. конф., Дніпропетровськ, 2011. С. 281-283.
47. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Математическое моделирование отношений геометрических объектов, построенных с помощью шаров и цилиндров. Математичне та імітаційне моделювання систем: тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф, Чернігів-Жукин, 2012. С. 238-240.
48. Чугай А.М. Метод решения задачи упаковки неориентированных параллелепипедов и шаров. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы III межд. конф., Кишинев, 2012. С. 536-539.
49. Stoyan Yu., Chugay A. Packing Cuboids and Spheres. Proc. of 10-th ESICUP Meeting. Lille (France), 2013. P. 21.
50. Чугай А. М., Злотник М.В., Сёмкин В.В, Лимаренко И.В. Один из подходов к улучшению функции цели в задачах упаковки. Системный анализ и информационные технологии: материалы 15-й межд. науч.-техн. конф. SAIT-2013. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2013. С. 217.
51. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов. Математическое моделирование,

оптимизация и информационные технологии: материалы 4-й междун. конф., Кишинёв, 2014. Т. 2. С. 416-420.

52. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Решение задачи плотной упаковки неориентированных трёхмерных объектов. Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-технической конференции SAIT-2014. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. С. 262.
53. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimal packing of convex polytopes. Информационные системы и технологии: тезисы докл. IV междун. науч.-техн. конф., Харьков: ХНУРЕ, 2015. С. 11-12
54. Chugay A., Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Packing and cutting problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тезисы докл. XIII межд. науч.-практ. конф., Днепропетровск, 2015. С. 224-225
55. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доповідей XXI всеукраїнської наук. конф., Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. С. 23-24.
56. Чугай А.М., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Сравнение двух подходов к моделированию и решению задачи упаковки многогранников. Информационные системы и технологии: тезисы докл. 6-й международной науч.-техн. конф., Коблево, 2017. С. 141-142.
57. Чугай А.М. Подходы к математическому моделированию задачи упаковки неориентированых многогранников. Інформатика та системні науки: матеріали VIII всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава, 2017. С. 292-294
58. Chugay A.M. Mathematical modelling of homothetic polytopes packing. Системний аналіз та інформаційні технології - 2017: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. Київ. ІПСА, 2017. С. 19.
59. Чугай А.М. Метод розв’язання задачі упаковки опуклих гомотетичних багатогранних тіл. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання

- 2017”. 2 с. Режим доступу: http:.iapmm.lviv.ua.chyt2017.abstracts.Chugay.pdf

60. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Чугай А.М., Панкратов О.В. Задачі геометричного проектування у адитивних технологіях. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XV міжнар. наук.-практ. конф., Дніпро, 2017. С.193-194.
61. Pankratov A., Romanova T., Chugay A., Stoyan Yu. E. Optimization of the process of 3*D*-printing for SLS technologies of additive production. 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education» (ICAICTSEE-2017). Sofia. Bulgaria, 2017. FA24. 4 p.
62. Chugay A., Pankratov A., Romanova T., Stoyan Yu.E. An optimization technique in 3D printing design. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 6-й международной конференции, Кишинёв, 2018. Т.2. С. 416-420.
63. Chugay A. M. Optimization of packing polytopes using phi-function technique. Modern problems of mathematical modelling, computational methods and information technologies: proc. of International Scientific Conference, Rivne, 2018. C.17-18.
64. Чугай А.М. Кластерное размещение невыпуклых неориентированных многогранников. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків. 2018. С.20.

ЗМІСТ

ВСТУП 8

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕНЬ 18

1.1 Сфери застосування задач упаковки тривимірних тіл 18

1.1.1 Задачі оптимізації компоновочних рішень 18

1.1.2 Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва 24

1.1.3 Комп'ютерне моделювання у матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях 29

1.1.4 Інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів. 32

1.2 Аналіз робіт, присвячених розв'язанню задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл 33

1.3 Вибір напряму дослідження. Теорія оптимізаційного геометричного проектування 48

1.4 Висновки за розділлом 1 51

РОЗДІЛ 2

МЕТОД Ф-ФУНКЦІЙ. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ОРІЄНТОВАНИХ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ 54

2.1 Опис множини тривимірних тіл, для яких розглядаються задачі оптимальної упаковки 54

2.2 Основи методу Ф-функції як конструктивного засобу математичного моделювання взаємодії тривимірних тіл в задачах оптимальної упаковки. 60

2.2.1 Ф-функція та її властивості 60

2.2.2 Квазі-Ф-функція 62

2.2.3 Псевдонормалізована Ф-функція 64

2.3 Побудова Ф-функцій для орієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами 64

2.3.1. Ф-функція сфероциліндрів 65

2.3.2. Ф-функція циліндра та сфероциліндра 67

2.3.3. Ф-функція сегментів кулі 70

2.3.5 Ф-функція сегменту кулі і кулі 73

2.3.6 Ф-функція циліндра і сегменту кулі 73

2.3.7 Ф-функція паралелепіпеда та сегменту кулі 75

2.3.8 Ф-функція сфероциліндра і сегменту кулі 84

2.3.9 Ф-функція паралелепіпеду та сфероциліндру 87

2.3.10 Умова включення циліндру у пряму призму, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл 89

2.4 Висновки за розділом 2 94

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ НЕОРІЄНТОВАНИХ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ 96

3.1 Ф-функція для двох опуклих неорієнтованих багатогранних тіл 96

3.2 Ф-функція для двох неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл 109

3.3 Ф-функція двох неорієнтованих паралелепіпедів 110

3.4 Ф-функція неорієнтованого паралелепіпеда та кулі 112

3.5 Ф-функція кулі та неорієнтованого багатогранного тіла 122

3.6 Нормалізовані Ф-функції для тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами, і півпростору 130

3.7 Квазі-Ф-функція тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, конічними та циліндричними поверхнями та площинами 140

3.8 Ф-функція параллелепіпедів, що припускають ортогональні повороти 143

3.9 Висновки за розділом 3 147

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ У РІЗНИХ ПОСТАНОВКАХ 148

4.1 Постановка загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл . 148

4.2 Математична модель загальної задачі оптимального упаковки тривимірних тіл 150

4.3 Математична модель та властивості задачі упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у пряму прямокутну багатозв'язну призму, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл 156

4.4 Математична модель та властивості задачі компоновки орієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких сформована конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами у багатозв'язний контейнер..... 161

4.5 Математична модель та властивості задачі упаковки неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами 166

4.6 Математична модель та властивості задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль 170

4.7. Математична модель та властивості задачі упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл..... 173

4.8 Математична модель та властивості задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл у кубоїд мінімального об'єму 177

4.9 Математична модель задачі упаковки паралелепіпедів з можливістю їх ортогональних поворотів 181

4.10 Висновки за розділом 4 183

РОЗДІЛ 5

МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ 185

5.1 Опис єдиної методології розв'язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл 185

5.2 Стратегія, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації ... 188

5.3 Стратегія, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок 193

5.4 Багатоетапна стратегія мультістарту 198

5.5 Висновки за розділом 5 202

РОЗДІЛ 6

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ 204

6.1 Методи побудови допустимих початкових точок 204

6.1.1 Метод регулярних розміщень 205

6.1.2 Метод гомотетичних перетворень 207

6.1.3 Метод кластеризації 212

6.1.4 Метод оптимізації за групами змінних 219

6.2 Методи локальної оптимізації 222

6.2.1 Метод можливих напрямів зі стратегією активного набору на підобластях 223

6.2.2 Метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції 226

6.2.3 Особливості застосування методу для задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл 230

6.3 Методи глобальної оптимізації 238

6.3.1 Метод околів, що звужуються 238

6.3.1.1 Опис модифікації методу 238

6.3.1.2 Особливості реалізації методу для задачі упаковки паралелепіпедів, які дозволяють ортогональні повороти 241

6.3.1.3 Особливості реалізації методу для задачі упаковки гомотетичних циліндрів 243

6.3.2 Метод побудови перспективних розміщень і організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі 248

6.3.2.1 Реалізація методу для різних тривимірних тіл 248

6.3.2.2 Реалізація методу для гомотетичних тривимірних тіл 252

6.4 Висновки за розділом 6 255

РОЗДІЛ 7

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ 258

7.1. Програмна реалізація розроблених методів 258

7.1.1 Опис загальних характеристик розробленого програмного забезпечення та умов проведення чисельних експериментів 258

7.1.2 Застосування технологій паралельних обчислень для розв’язання задач упаковки тривимірних тіл 259

7.2 Результати розв’язання задачі упаковки максимальної кількості однакових циліндрів у багатозв’язний контейнер 264

7.3 Результати розв’язання задач компоновки тривимірних тіл 267

7.4 Розв’язання задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль 277

7.5 Результати упаковки тривимірних тіл, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами 283

7.6 Результати упаковки неорієнтованих багатогранних тіл 292

7.6.1 Результати упаковки гомотетичних багатогранних тіл 292

7.6.2 Результати упаковки неорієнтованих неопуклих багатогранних тіл 296

7.6.3 Порівняння результатів упаковки багатогранних тіл зі світовими аналогами 297

7.7 Висновки за розділом 7 304

ВИСНОВКИ 306

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 308

Додаток А 336

Перелік праць здобувача 336

Додаток Б 344

Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір 344

Б1. Коп’ютерна програма «3D layout optimization» 344

Б2. Коп’ютерна програма «Dense packing of 3D objects» 345

Додаток В 346

Акти про впровадження результатів дисертаційної роботи 346

В.1 Впровадження у виробництво 346

В.2 Впровадження у навчальний процес 348

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із інструментів вивчення та оптимізації складних технічних систем з метою досягнення стану їх оптимального функціонування є теорія оптимізаційного геометричного проектування, яка призначена для розв'язання ряду прикладних оптимізаційних задач розміщення тривимірних тіл (розкрою, упаковки та покриття). Ці задачі пов’язані зі створенням енерго- та ресурсозберігаючих технологій в пріоритетних галузях народного господарства (енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, будівництві, хімічній промисловості, а також у наукових дослідженнях в області нанотехнологій, в сучасних задачах біології, мінералогії, медицини, матеріалознавства, у робототехніці, задачах кодування інформації, системах розпізнавання образів, системах керування космічними апаратами) при автоматизації та моделюванні процесів розміщення різних тривимірних тіл.

На даний час створено досить широкий спектр методів для розв’язання оптимізаційних задач розміщення двовимірних тривимірних тіл. Найменш вивченими з фундаментальної точки зору залишаються задачі оптимізаційного розміщення неорієнтованих (тобто таких, що дозволяють неперервні трансляції та довільні повороти) тривимірних тіл. Складність аналітичного опису області допустимих розв'язків, багатовимірність та багатоекстремальність цих задач, нелінійність функцій обмежень області припустимих розв'язків – все це виводить даний клас задач за рамки класичної теорії дослідження операцій. У зв'язку з цим велике наукове значення становить виявлення загальних закономірностей моделювання оптимізаційних задач геометричного проектування, що пов'язане з забезпеченням можливості застосування методів розв'язання одного класу задач до іншого, відмінного за своєю неформальною постановкою. Крім того, для успішного розв'язання наукових і практичних задач, що виникають в процесі обробки і оптимізації великих обсягів геометричної інформації,

необхідні не тільки розробка загальних принципів моделювання задач розміщення тривимірних тіл, але і побудова та дослідження адекватних проблемно-орієнтованих математичних моделей конкретних класів задач даної предметної області та ефективних методів і алгоритмів їх розв'язання.

Саме створення єдиного підходу до математичного моделювання і розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл на базі арсеналу засобів, розвинених в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування, дозволяє подивитися на дану проблему з єдиних позицій і залучити до розв’язання даного класу задач всю міць апарату сучасного математичного програмування. Тому розвиток теорії оптимізаційного геометричного проектування, розробка методології математичного та комп'ютерного моделювання оптимальної упаковки тривимірних тіл, з урахуванням їх неперервної трансляції, обертання, гомотетії та допустимих відстаней, а також розробка методів розв’язання цих задач, є надзвичайно важливою і актуальною проблемою, що і визначило мету даної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в період з 2007 р. по 2018 р. у відділі математичного моделювання й оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України і є частиною досліджень, що проводяться під керівництвом члена-кореспондента НАН України Стояна Ю.Г. відповідно до планів науково-дослідних робіт за такими держбюджетними темами: "Розробка конструктивних засобів та обчислювальних методів для розв'язання оптимізаційних задач упаковки та покриття" (2007-2011 рр., № ДР 0107U003662); "Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач розміщення тривимірних тіл довільних просторових форм" (2012-2016 рр., № ДР 0112U002488); “Розробка математичних моделей та комп’ютерних технологій розв’язання оптимізаційних задач компоновки тривимірних тривимірних тіл” (2017-2018 рр. № ДР 0117U000877).

Мета і задачі дослідження

Метою роботи є ефективне розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл шляхом побудови точних математичних моделей та розробки підходів, що базуються на застосуванні оптимізаційних методів нелінійного програмування та сучасних НЛП солверів.

Для досягнення сформульованої цілі в роботі поставлені такі задачі:

- ✓ розробити засоби математичного моделювання взаємодії у вигляді Ф-функцій та квазі-Ф-функцій для орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;
- ✓ побудувати базову математичну модель задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами та різні її реалізації в залежності від форми контейнеру, функції цілі, технологічних обмежень;
- ✓ провести дослідження властивостей побудованих математичних моделей;
- ✓ розробити єдину методологію розв'язання задачі упаковки тривимірних тіл;
- ✓ запропонувати ефективні підходи та стратегії для різних реалізацій базової математичної моделі упаковки тривимірних тіл;
- ✓ розробити методи побудови допустимих початкових точок, локальної та глобальної оптимізації;
- ✓ створити програмне забезпечення, що реалізує розроблені методи розв'язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл з використанням паралельних обчислень;
- ✓ провести чисельні експерименти.

Об'єкт дослідження - оптимальна упаковка тривимірних тіл з урахуванням різних обмежень розміщення (можливість зміни орієнтації тривимірних тіл, допустимі відстані між тілами, зони заборони).

Предмет дослідження - засоби математичного моделювання,

математичні моделі та методи розв'язання задач упаковки опуклих та неопуклих тривимірних тіл.

Методи дослідження. Роботу виконано з використанням методів аналітичної геометрії, геометричного проектування та нелінійної оптимізації. Для побудови функцій, що описують взаємодію тривимірних тіл, використовувались методи аналітичної геометрії. Для побудови математичних моделей задач упаковки використовувались методи геометричного проектування. Для побудови допустимих початкових точок використовуються методи нелінійного програмування, оптимізації за групами змінних та методи регулярних розміщень. Пошук локальних екстремумів відбувається за допомогою методів нелінійного програмування та методів декомпозиції. Перебір локальних екстремумів виконується за допомогою статистичних методів та методів нелінійної оптимізації.

Наукова новизна одержаних результатів:

- набув подальшого розвитку метод Ф-функції Стояна Ю.Г., що полягає в побудові нових класів функцій:
  - класу Ф-функцій для орієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;
  - класу Ф-функцій та квазі-Ф-функцій для неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними та сферичними поверхнями;
- вперше побудовано математичну модель загальної задачі оптимальної упаковки неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами та різні її реалізації в залежності від:
  - форми та особливостей характеристик тривимірних тіл (конгруентні, орієнтовані, неорієнтовані);
  - виду контейнеру (прямий паралелепіпед, пряма призма, основа якої утворена дугами кіл та відрізками прямих, куля);

- функції цілі (мінімізація висоти контейнеру, мінімізація об’єму контейнеру, максимізація кількості упакованих тіл);
- технологічних обмежень (мінімально допустимі відстані, зони заборони);

➢ вперше розроблено єдину методологію розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл, що допускають одночасно неперервні повороти та трансляції, яка ґрунтується на підходах до пошуку упаковки орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл;

➢ розроблено нові стратегії розв’язання задач упаковки тривимірних тіл, що ґрунтуються на:

- послідовній статистичній оптимізації за допомогою методу околів, що звужуються;
- гомотетичних перетвореннях та пошуку перспективних початкових точок;
- багатоетапному методі мультістарту.

➢ набули подальшого розвитку та удосконалення методи розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл, які враховують неперервні повороти та трансляції:

- методи побудови допустимих початкових точок для пошуку локальних екстремумів (регулярних розміщень, гомотетичних перетворень тривимірних тіл, кластеризації);
- методи локальної оптимізації, які грунтуються на використанні методу внутрішньої точки та методу можливих напрямів разом зі стратегіями активного набору, вибору підобластей та декомпозиції задачі на задачі меншої розмірності й обчислювальної складності;
- методи пошуку наближень до глобального екстремуму задач упаковки (модифікації методу околів, що звужуються, та методу побудови перспективних розміщень і організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі).

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні: створено нові математичні моделі, розроблено нові методи та сучасні інформаційні технології розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл.

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання підтверджено публікаціями у високорейтингових міжнародних і українських журналах, апробацією на міжнародних конференціях та симпозіумах, довідками про використання у виробництві, актами впровадження у навчальний процес і свідоцтвами про реєстрацію авторського права на твір.

Сукупність розроблених математичних моделей, методів, алгоритмів та програмних комплексів може використовуватися у вигляді оптимізаційного ядра в системах автоматизованого проектування різних технічних систем та пристроїв у машинобудуванні, при проведенні комп’ютерного моделювання структури різних матеріалів у матеріалознавстві, порошковій металургії, нанотехнологіях, при оптимізації процесу 3*D*-друку для *SLS*-технології адитивного виробництва, у інформаційно-логістичних системах, що забезпечують оптимізацію перевезення і зберігання різних вантажів.

Моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, що запропоновані в дисертаційній роботі, використані в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України під час виконання держбюджетних тем.

Деякі отримані результати було впроваджено на етапі конструкторського проектування при розв’язанні задач компонувального синтезу для авіаційної промисловості та у логістичних задачах на державному підприємстві “Харківський машинобудівний завод ”ФЕД”, про що свідчить акт впровадження результатів досліджень.

Крім того, запропоновані в роботі методи геометричного проектування впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті будівництва та архітектури при викладанні таких курсів: "Технології

розподілених систем та паралельних обчислень", "Методи прийняття рішень", "Комп'ютерне проектування".

Особистий внесок здобувача. Основні результати, які надано в дисертації, отримано здобувачем самостійно. Побудовано нові класи Ф-функцій для орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл, ґрунтуючись на яких побудовано нові математичні моделі задач оптимальної упаковки тривимірних тіл. Розроблено єдину методологію розв'язання задач упаковки тривимірних тіл, що допускають одночасно неперервні повороти та трансляції, розроблено нові підходи та стратегії розв'язання задач упаковки тривимірних тіл. Запропоновано модифікації методів побудови початкових точок, локальної та глобальної оптимізації.

В роботах, що виконані в співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному: [1] – розроблено підхід до упаковки опуклих неорієнтованих тривимірних тіл та проведено чисельні розрахунки; [3,8,9,10,50] – виконано модифікації методу пошуку наближення до глобального екстремуму; [4,5,7,11,12,38,44,46,49] запропоновано математичні моделі та методи розв'язання різних реалізацій базової математичної моделі задачі упаковки тривимірних тіл; [13,14] – побудовано Ф-функції для відповідних пар тривимірних тіл; [15,17,20,47,51] – здійснено постановку задачі, запропоновано підходи до побудови Ф-функції та квазі-Ф-функцій та досліджено їх властивості; [16, 47]- побудовано нормалізовану Ф-функцію для циліндра та сфероциліндра, сфероциліндра та кулі; [18,21] – запропоновано модифікацію методу локальної оптимізації; [19] – розроблено метод перебору локальних екстремумів; [22] – запропоновано стратегію декомпозиції; [25,27] – побудовано математичну модель, розроблено методологію розв'язання задачі, проведено чисельні дослідження; [26-28] – здійснено постановку задачі, побудовано математичну модель задачі та виконано чисельні експерименти; [29] – побудовано математичну модель та досліджено її властивості; [30,60-62]- запропоновано методологію застосування задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл для SLS технології

адитивного виробництва; [31]- розроблено багатоетапну стратегію розв’язання задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл; [33, 34] – запропоновано методології розв’язання задач упаковки тривимірних тривимірних тіл в різних областях, [52]- запропоновано методологію розв’язання задачі упаковки тривимірних неорієнтованих тіл; [53-56]- запропоновано підхід до розв’язання задач упаковки багатогранних тіл, який ґрунтується на використанні Ф-функцій.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися та дістали схвалення на міжнародних конференціях і наукових семінарах:

- міжнародній науковій конференції “European Conference on Operational Research” (2009 р., м. Бонн, Німеччина);
- міжнародній науковій конференції “ESICUP Meeting” (2013 р., м. Ліль, Франція);
- міжнародній науковій конференції “Application of information and communication technology and statistics in economy and education” (2017 р., м. Софія, Болгарія);
- міжнародній науковій конференції “Математическое моделирование и дифференциальные уравнения” (2009 р., м. Мінськ, Білорусь);
- міжнародній науковій конференції “Математичне моделювання, оптимізація та інформаційні технології” (2014-2018 рр., м. Кишинів, Молдова);
- міжнародній науково-технічній конференції “Системний аналіз та інформаційні технології (SAIT)” (2013-2017 рр., м. Київ, Україна);
- міжнародній науково-практичній конференції "Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем" (2010-2018 рр, м. Дніпро, Україна)";
- міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (2018 р., м.Рівне, Україна);

- міжнародній науково-практичній конференції “Математичне та імітаційне моделювання систем” (2012 р., м. Чернігів-Жукин, Україна);
- міжнародній науково-практичній конференції “Физические и компьютерные технологии” (2007-2016 рр., м. Харків, Україна);
- міжнародній науковій конференції “Информационные технологии в науке, технике и образовании” (2009 р., м. Севастополь, Україна);
- міжнародній науково-технічній конференції “Інформаційно-комп’ютерні технології” (2010 р., м. Харків, Україна);
- міжнародній школі-конференції “Тараповські читання – 2013. Сучасні проблеми математики, механіки та інформатики” (2013 р., м. Харків, Україна);
- міжнародній науковій конференції “Автоматика 2010” (2010 р., м. Харків, Україна);
- міжнародній науково-технічній конференції “Информационные системы и технологии ” (2015 р., м. Харків, Україна);
- міжнародному молодіжному форумі “Радіоелектроніка та молодь у XXI сторіччі” (2013–2016 рр., м. Харків, Україна);
- всеукраїнській науково-практичній конференції “Інформатика та системні науки ” (2007-2017 рр., м. Полтава, Україна);
- всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (2015 р., м. Львів, Україна);
- конференції молодих вчених “Підстригачівські читання ” (м. Львів, 2010-2018р.);
- конференціях молодих вчених і фахівців “Сучасні проблеми машинобудування” (м. Харків, ІПМаш НАН України, 2007–2018 рр.);
- на семінарах відділу математичного моделювання та оптимального проектування ІПМаш НАН України (м. Харків, 2007–2018 рр.).

Публікації. За темою дисертації опубліковані 64 наукових праці, у тому числі: 1 монографія (видавництво Springer Optimization and Its Applications, індексується науково-метричною базою Scopus), 32 статті у наукових фахових

виданнях, що входять до переліку наукових спеціалізованих видань, серед яких 8 статей в міжнародних журналах, що індексуються науково-метричною базою Scopus, з них 3 – у високорейтингових зарубіжних (European Journal of Operational Research, Journal of the Operational Research Society, Advances in Decision Sciences), 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, 30 тез та доповідей на міжнародних наукових конференціях (з них 3 – на міжнародних конференціях ESICUP, European Conference on Operational Research, Application of information and communication technology and statistics in economy and education).

Н-індекс цитування робіт дисертанта за науково-метричної міжнародною базою Scopus дорівнює 4 (11 робіт), за базою Google Scholar – 7.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕНЬ

Задачі пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл являють природну еволюцію класичної одновимірної та двомірної задач пошуку оптимального розміщення тривимірних тіл. Через значну складність математичного моделювання взаємодії тривимірних тіл публікацій на цю тему було видано помітно менше, ніж для одновимірних та двовимірних задач. Однак, зважаючи на промислову та економічну важливість таких задач, в останні роки помітне швидке зростання кількості публікацій з дослідженнями цієї проблеми, включаючи нові напрями пошуку розв’язків та сфер застосування цих задач.

В першому розділі розглядаються можливі сфери застосування задач тривимірної упаковки та виконується аналіз сучасних підходів до розв’язання цих задач.

1.1 Сфери застосування задач упаковки тривимірних тіл

На сьогоднішній день у багатьох галузях науки та техніки серед задач, що інтенсивно розв'язуються в останні десятиліття, можна виділити задачі комп’ютерного моделювання оптимального розміщення тривимірних тіл різної природи. Ці задачі стають дуже затребуваними через те, що заміна натурних експериментів комп’ютерним моделюванням дозволяє суттєво заощаджувати матеріальні ресурси та час. Тому це вимагає розробки моделей, методів і алгоритмів для розв'язання відповідних задач.

Розглянемо основні області застосування задач упаковки тривимірних тривимірних тіл.

1.1.1 Задачі оптимізації компоновочних рішень

Задачі компоновки пов’язані з пошуком оптимального розміщення тривимірних тіл різної фізичної природи, що задовольняє різними

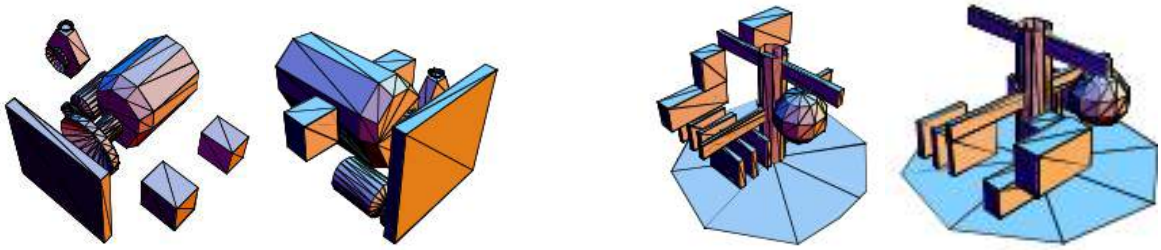
технологічним вимогам, наприклад таким як:

- розміщення тривимірних тіл на мінімально або максимально допустимих відстанях;
- врахування різного роду зон заборони на розміщення тривимірних тіл;
- збереження балансу системи;
- мінімізація довжини комунікацій, які пов’язують тіла.

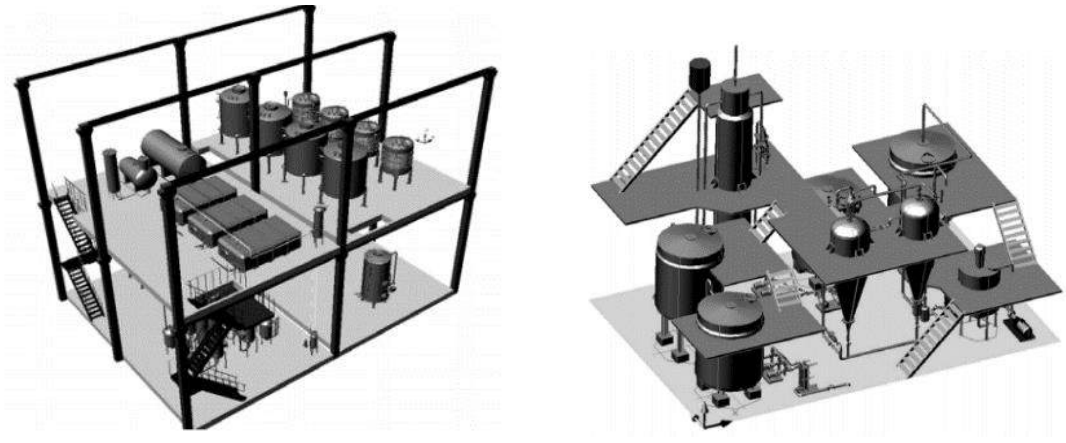
Здебільшого задачі компоновки, як правило, відрізняються величезною кількістю можливих варіантів допустимих розв’язків, невідомими характеристиками ідеального варіанта, великим об'ємом вхідної цифрової інформації, складністю реалізації кожного окремого варіанту компоновки. Тому складність задач компоновки змушує постійно вдосконалювати методи оптимального проектування [65-72].

Задачі компоновки виникають в різних галузях промисловості:

- у машинобудуванні при автоматизованому компонуванні різного обладнання (рис.1.1 а) [65];
- у аерокосмічній галузі при компонуванні приладів відсіків літальних апаратів (рис.1.1 б) [66-68];
- у хімічній промисловості при розв’язанні задач об'ємного-планування цехів промислових підприємства (рис.1.1 в) [69] ;
- у енергетиці при розв’язанні задач конструкторського проектування теплоенергетичних комплексів (рис.1.1 г) [70].



а б



в г

Рис.1.1. Приклади розв’язання задач компоновки в різних галузях промисловості:

а) компоновка обладнання відсіку розміщення автомобільного двигуна;

б) компоновка обладнання супутника;

в) компоновка обладнання цеху хімічного виробництва;

г) компоновка енергоблоку ТЕЦ.

Одним з перспективних напрямів підвищення ефективності проектування в енергетичному машинобудуванні є інтенсифікація використання засобів обчислювальної техніки в процесі проектування. Зокрема це стосується етапу компонування обладнання [69]. Вибір оптимальних об'ємно-планувальних розв’язків по компонуванню обладнання неможливий традиційними ручними методами. Підвищення якості проектних робіт з одночасним скороченням строків проектування можливе тільки на основі широкого використання сучасної обчислювальної техніки в процесі пошуку оптимальних проектних розв’язків, що у свою чергу неможливо без розробки моделей, методів і

алгоритмів для розв'язання відповідних задач. Крім того, розв'язання задач компонування вимагає наявності великої бази даних, що містить довідкову інформацію про конструктивні особливості обладнання, а також інформацію про типорозміри комунікацій, що у свою чергу ускладнює пошук оптимальних проектних розв’язків.

Змістовна постановка задачі компонування може бути сформульована в такий спосіб: визначити з урахуванням усіх правил, вимог і обмежень таке просторове розміщення обладнання технологічних систем (ТС) із заданою структурою технологічних зв'язків і такі габарити виробничого приміщення, при яких витрати на проектований об'єкт були б мінімальними [69].

Для математичного запису задачі необхідно виконати як мінімум три етапи:

- описати тіла компонування;
- запропонувати критерій оптимізації і розробити математичну модель;
- розробити методи розв’язання задачі.

Виконання проекту компонування пов'язане з визначенням просторового розміщення в об’єкті компонування всіх елементів ТС, найважливішими з яких є обладнання та зв’язуючи його комунікації.

При цьому пошук оптимального варіанта компонування пов'язаний з аналізом множини можливих варіантів розміщення устаткування й прокладки трас технологічних комунікацій, кожний з яких повинен бути перевірений на відповідність обмеженням математичної моделі, серед яких є умови неперетинання тривимірних тіл компонування, їх взаємного розміщення та ряд інших обмежень, пов'язаних з геометричною формою тіл, які необхідно розмістити. Тому від того, як будуть описані тіла компонування, багато в чому залежить час розв’язання задачі і якість самих розв’язків.

Для того, щоб отримати прийнятні розв’язки в задачах компоновки можно встановити такі припущення.

Об`єкти, які необхідно розмістити, апроксимуються більш простими за

формою тривимірними тілами (кулями, паралелепіпедами, багатогранного тілами, циліндрами, сфероциліндрами, конусами). Причому, кількість і вид таких тіл для апроксимації залежать від конфігурації об'єкта компонування. Просторове положення i-го об'єкта в найпростішому випадку задається вектором $u_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_i)$, де x_i, y_i, z_i - координати центру основи апроксимуючої фігури, а θ_i - кут повороту об'єкта щодо його початкового положення. Такий опис тривимірних тіл доцільно використовувати при попередньому компонуванні тривимірних тіл, наприклад, при розв’язанні задачі розміщення.

Більш складні описи тривимірних тіл застосовуються на етапах уточнення компонувальних розв’язків, коли розв`язуються спільно задачі розміщення тривимірних тіл і прокладки сполучних комунікацій.

У ряді випадків доводиться здійснювати компонування блоків, до складу яких входять різнотипні тіла (апарати, насоси, трубопроводи, арматури). Компонування елементів таких блоків необхідно розглядати як окрему задачу. У рамках же загальної задачі компонування, такі блоки доцільно описувати як єдиний елемент.

Геометричний опис сполучних комунікацій доцільно здійснювати за допомогою циліндрів, що не викликає великих складностей з перевіркою умов неперетинання тривимірних тіл. Для сполучних комунікацій, так само як і для розташовуваних тривимірних тіл, доцільно використовувати кілька рівнів складності їх опису залежно від деталізації опрацювання проекту.

При розв’язанні задачі трасування, крім простого з'єднання тривимірних тіл, часто доводиться мати справу з розгалуженими з'єднаннями. У цьому випадку доцільно використовувати більш детальний опис сполучних комунікацій, заснований на використанні «вузлів» і «ділянок». Під вузлом будемо розуміти точку перетину (з'єднання) двох або більше ділянок сполучних комунікацій за допомогою будь-яких із застосовуваних у промисловості способів їх з'єднання. Під ділянкою - сукупність усіх елементів, що входять до складу з'єднання, що з'єднує будь-які два вузли.

Даний спосіб опису систем розгалужених технологічних комунікацій дозволяє оперувати всіма її елементами (ділянками, місцями з'єднання трубопроводів, арматурами і т.д.).

Металоконструкції, драбини та інші будівельні елементи, а також зони обслуговування тривимірних тіл компонування, проходи й проїзди в цеху можна описувати найпростішими геометричними фігурами (паралелепіпед, циліндр) залежно від їхньої конфігурації.

Аналітична модель проектного задачі компоновки повинна включати такі основні блоки обмежень.

Блок 1. Конструкційні обмеження моделі:

– обмеження на гранично допустимі розміри цеху;

– кратність розміру цеху розміру будівельного модуля;

– розміщення обладнання усередині цеху;

– наявність зон для руху транспортних пристроїв;

– наявність зон для ремонту й обслуговування обладнання;

– зони вільні від розташовуваного обладнання;

– зони під канали для прокладки трубопроводів.

Блок 2. Обмеження на розміщення обладнання:

- важке обладнання розміщуються, як правило, на нижніх поверхах;

- розміщення однотипного обладнання в один ряд;

- ізольоване розміщення обладнання;

- фіксація розміщення окремих апаратів;

- забезпечення необхідної відстані між апаратами;

- відстань між апаратами й будівельними конструкціями;

Блок 3. Обмеження на прокладку трас трубопроводів:

- ортогональність фрагментів трубопроводів у просторі;

- прокладка трас трубопроводів у виділених областях;

- забезпечення проміжків між трасами;

- відстань між фрагментами трас і апаратами;

- відстань між трасами й будівельними конструкціями.

Блок 4. Технологічні обмеження:

- частину обладнання рекомендується розміщати один над одним;
- ізольоване розміщення обладнання у відділеннях;
- обмеження на довжину трубопроводів із в’язкими рідинами;
- забезпечення необхідної швидкості потоку в трубопроводах;
- обмеження на час завантаження-вивантаження обладнання;
- забезпечення транспорту самопливом;
- виключення застійних зон для рідин.

Крім цих умов у цю групу включені умови забезпечення транспорту за допомогою насосів, а також умови, що забезпечують міцність і безпеку устаткування та трубопроводів.

Блок 5. Умови неперетинання тривимірних тіл:

- неперетинання апаратів один з одним;
- неперетинання апаратів з будівельною конструкцією;
- неперетинання обладнання з допоміжними зонами;
- неперетинання трас;
- неперетинання трас із апаратами;
- неперетинання трас із будівельними конструкціями;
- траси не повинні проходити в зонах обслуговування обладнання.

Варіюючи обмеженнями моделі задачі компонування й видозмінюючи цільову функції, можна з вихідної постановки отримати практично будь-яку постановку задачі, що зустрічається на етапі прийняття об'ємно-планувальних розв’язків виробництва.

1.1.2 Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва

Актуальною задачею для сучасних підприємств є оптимізація матеріальних і фінансових ресурсів, підвищення ефективності виробництва та зміна в цілому світогляду промислового виробництва. Прискорити процеси проектування, розробки та виготовлення конструкторських деталей сьогодні

дозволяють адитивні технології (3*D*-друк).

У зв’язку з швидким розвитком інноваційних технологій 3D-друку дослідженню проблем, що виникають у даній предметній області, присвячено багато публікацій, серед яких слід зазначити [73-77].

У період формування інформаційного суспільства 3D-моделювання та 3D-друк виробів знаходить застосування в усіх сферах промисловості. 3D-моделювання дозволяє створювати тривимірну модель будь-якого об'єкту на комп'ютері та за допомогою 3D-принтера отримати повноцінний фізичний об'єкт, який відповідає заданим параметрам. Переваги використання 3D-принтерів: зниження собівартості виготовлення продукції, скорочення часу на створення та термінів її появи на ринку, моделювання тривимірних тіл будь-якої форми та складності, швидкість та висока точність виготовлення, можливість використання новітніх надміцних матеріалів.

Сучасне проектування та виробництво застосовують технології тривимірного адитивного виробництва, яке дозволяє швидко створювати дослідні зразки або працюючі моделі системи для демонстрації замовникові, або перевірки можливості реалізації абсолютно нової ідеї – пошарового формування тривимірних тривимірних тіл за їх комп'ютерними моделями. Ці технології називаються адитивними й відомі під різними термінами:

- SLM – Selective Laser Mentoring;,
- SLS – Selective Laser Sintering;
- FDM – Fused Deposition Modeling;
- STL – stereolithography;,
- PJ – PolyJet.

Так, наприклад, на рис.1.2 наведено принципову схему SLS технології.

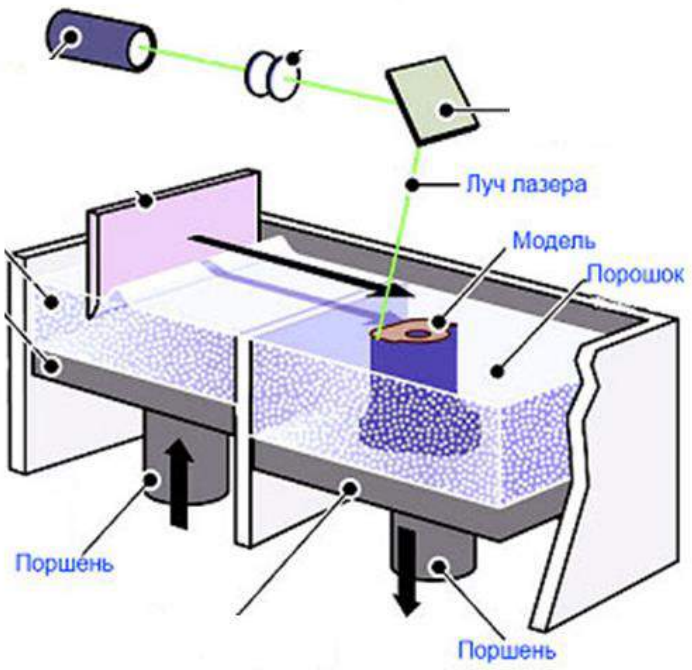


Рис.1.2. SLS – технологія адитивного виробництво

Слід відзначити, що основною перешкодою для широкого впровадження адитивних технологій у виробництво є їх висока вартість, обумовлена витратами на закупівлю, супровід та експлуатацію 3D-принтеру. Так, вартість використання однієї SLM-машини за рік у Великій Британії становить 78 тисяч фунтів стерлінгів. За оцінками європейських вчених, що були представлені на міжнародній конференції ESICUP-2017 (Бельгія), оптимізація упаковки виробів у робочій камері принтеру для SLM-друку, запропонована для корпорації Rolls-Royce, дозволяє на етапі експлуатації заощадити витрати до 24% [78].

В останні 10 років технології 3D-друку бурхливо розвиваються: з'являються нові, удосконалюються існуючі, з'являються нові напрями використання існуючих технологій.

Тому на сьогоднішній день актуальним питанням є розробка інформаційних технологій, які дозволять суттєво зменшити фінансові витрати та вдосконалити процес промислового виробництва, що застосовують сучасні

адитивні технології, за рахунок економії часу, енергії та видаткового матеріалу.

Економію часу та енергії можна досягнути завдяки: максимізації кількості виробів, що одночасно виготовляються; мінімізації кількості шарів друку за один робочий цикл 3D-принтеру. Економії видаткового матеріалу з одночасним підвищенням якості друку можна досягти шляхом оптимізації топології виробів.

Процес створення виробів за допомогою технологій адитивного виробництва включає дві основні складові: створення віртуальних (аналітичних) моделей та виготовлення виробів за створеними моделями.

На першому етапі необхідно створити віртуальні моделі 3D-тривимірних тіл (комп'ютерних моделей прототипів). Використання запропонованих у проекті методів дозволяє створювати аналітичні моделі 3D-тривимірних тіл, які мають складну просторову форму, та максимально спростити роботу проектувальника.

Одним із завдань другого етапу є скорочення часу та вартості виготовлення виробів.

Процедура 3D-друку з використанням SLS-технології є досить тривалою за часом (багато годин або навіть днів) та потребує великих фінансових витрат, пов'язаних із запуском принтеру, нагрівом камери та стабілізацією температури. Необхідно відзначити, що час, необхідний для спікання порошку, є значно меншим, ніж час, необхідний для підготовки кожного шару порошку.

Математичні моделі та методи оптимізації упаковки тривимірних тіл можуть бути успішно застосовані для оптимізації процесу 3D-друку за наступними показниками:

- ✓ максимізувати кількість виробів, що можуть одночасно вироблятись за один запуск принтера (наприклад, на рис.1.3 наведено результат випікання максимальної кількості виробів за один запуск принтера, наведений на сайті

https://www.sculpteo.com/blog/2017/07/19/3d-printing-software-how-we-optimize-our-batch-using-our-nesting-tool)

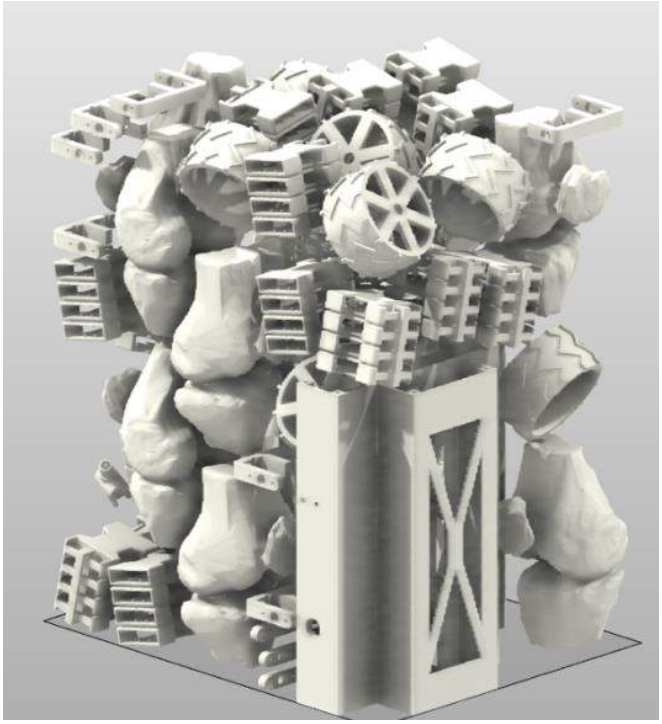


Рис.1.3. Результат випікання максимальної кількості виробів за один запуск принтера

- ✓ мінімізувати висоту зайнятої частини робочої камери принтеру (наприклад, на рис.1.4 представлено результат упаковки деталей у робочу камеру принтеру мінімальної висоти, виконаний за допомогою програми Fusion 360 компанії Avtodesk та представлений на її офіційному сайт https://forums.autodesk.com/t5/fusion-360-ideastation/nesting-for-3d-printing-sls/idi-p/7967548?lightbox-message-images-7967548=494555iB32DC8E144B171E4i);
- ✓ оптимізувати топологію геометрії промислових виробів, забезпечивши збереження їх міцності та підвищення якості друку.

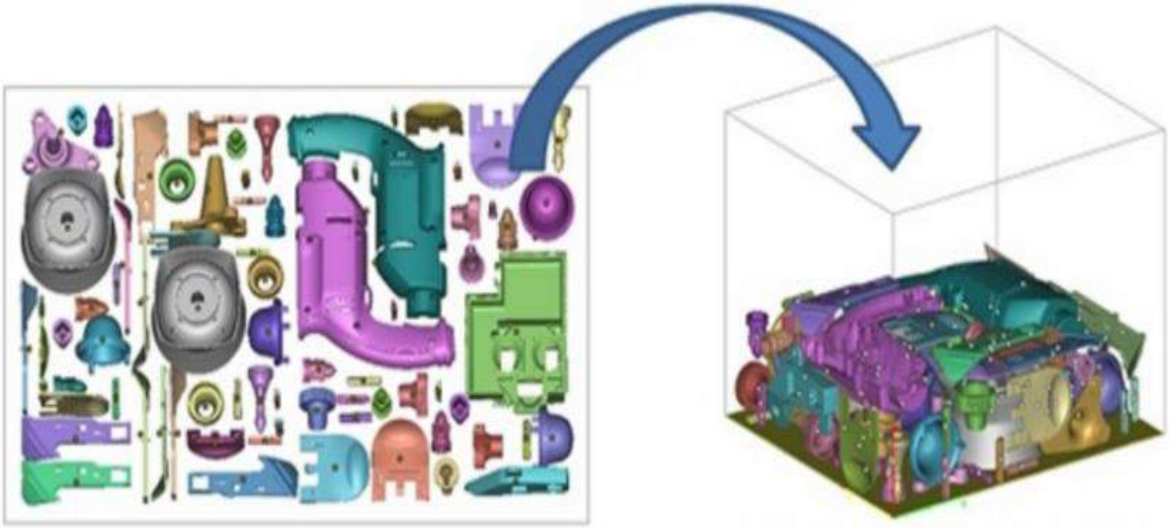


Рис.1.4. Мінімізація висоти зайнятої частини робочої камери принтеру

Результатом застосування моделей та методів упаковки тривимірних тіл стане мінімізація часу та вартості створення промислових виробів за рахунок: істотного скорочення циклів друку та кількості запусків принтеру; забезпечення необхідної міцності конструкцій та економії матеріалу під час їх виробництва.

1.1.3 Комп’ютерне моделювання у матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях

На сьогоднішній день методи моделювання матеріалів активно використовуються в освіті, науці та промисловості. Науковці всього світу давно досліджують різні особливості побудови математичних моделей і застосування чисельних методів для віртуального проектування нових матеріалів. Ці задачі стають дуже затребуваними через те, що заміна натурних експериментів комп’ютерним моделюванням дозволяє суттєво заощаджувати матеріальні ресурси та час. Тому це вимагає розробки моделей, методів і алгоритмів для розв'язання відповідних задач.

Метою цих досліджень є пошук найбільш щільних просторових структур матеріалів з тривимірних частинок складної форми. В силу труднощів

проведення відповідних натурних експериментів для розв’язання таких задач використовують методи комп'ютерного моделювання задачі упаковки тривимірних тіл різної форми.

Можна відзначити такі напрями наукових досліджень, в яких знаходять застосування задачі упакування тривимірних тіл:

- імітаційне моделювання наноструктурованих матеріалів (моделювання і розрахунок властивостей мікроструктури (пористості, діелектричної проникності, щільності та ін.);
- моделювання адсорбційних і дифузних процесів; конструювання, дослідження та оптимізація властивостей молекулярних структур);
- візуалізація тривимірних структур;
- дослідження властивостей фільтруючих матеріалів;
- дослідження властивостей матеріалів в порошковій металургії;
- дослідження властивостей твердого ракетного палива;
- оптимізація пористої структури вогнетривких матеріалів;
- моделювання газопроникності шарів в полідісперсійних породах;
- моделювання структури мікроплівок (вивчення оптичних властивостей наноструктурованих матеріалів);
- дослідження властивостей проводимості в електродах;
- дослідження проникності нафтоносних порід;
- моделювання сучасних теплоізоляційних матеріалів (пінобетон, пінопласт, пінорезина і ін.);
- самозборка ансамблів наночастинок .

Актуальним застосуванням задач упаковки багатогранних тіл є тривимірне моделювання мікроструктури різних матеріалів. Останні досягнення в цій галузі пов’язані з розробкою комп’ютерної технології 3D томографічного аналізу мінеральних частинок [79]. У статті [80] розглядається застосування задачі упаковки багатогранних тіл у порошковій металургії.

Дослідникам дуже часто доводиться стикатися з матеріалами, в структурі яких переважають тривимірні частинки складної форми. Слід відзначити, що упаковка частинок довільної форми є ресурсномісткою задачею навіть для сучасних комп'ютерів. Тому для розв’язання задач упаковки частинок складної форми можуть використовуватись різні наближення до реальної форми частинок (кулі, циліндри, багатогранні тіла).

Крім того, проводиться багато досліджень, в яких вивчається залежність просторової структури матеріалу від форми, розмірів та орієнтації частинок матеріалу. Деякі фізико-структурні характеристики композитних матеріалів залежать від геометричної форми частинок заповнювача, дослідження яких на математичних моделях пов'язане з урахуванням відхилення їх форми від сферичної. В цьому випадку будуються заповнення прийнятого об’єму матеріалу несферичними елементами. Моделювання упаковок сферичними і несферичними елементами підпорядковується деяким загальним принципам. В основу процесу заповнення входить перевірка умов неперетинання частинок, як між собою, так і з межами гіпотетичного контейнера.

Принципова відмінність заповнень сферичними і несферичними елементами полягає в тому, що число параметрів кожного елемента значно більше в порівнянні з сферичними елементами, а кількість їх визначається формою частинок. У цих випадках значно зростають труднощі аналізу умов неперетинання елементів один з одним і з гранями контейнера. Причому, якщо випадкове заповнення представлено елементами однієї форми, ці умови можуть бути систематизовані. Якщо частки в упаковці мають різну форму, то число різних видів порівняння різнойменних елементів визначається номінальним коефіцієнтом з числа форм по два, ускладнюючи програму моделювання і приводячи до різкого зростання витрат машинного часу. У цьому випадку доводиться оптимізувати процедуру вибору форм елементів заповнення.

Математичне моделювання задач упаковки тривимірних частинок дозволяє врахувати більш тонкі структурні особливості матеріалів, які не

вдається фіксувати експериментальними методами. Дослідження проводяться сучасними комп'ютерними засобами, що дозволяють виконувати великий обсяг необхідних обчислень з високою точністю і в короткий час. Дослідження структури матеріалів методами математичного моделювання, дозволяє гнучко і оперативно виробляти необхідні поправки і уточнення методики дослідження. Методи математичного моделювання дозволяють досліджувати властивості широкого класу матеріалів від моноатомарних рідин до матеріалів типу бетонів з різними розмірами елементів композицій різної форми [81,82].

Наприклад, в роботі [83] запропоновано наближення форми частинок у вигляді сферопаралелепіпеду, що дозволяє більш точно моделювати просторову структуру матеріалів. За результатами проведених експериментальних досліджень автори роблять висновок про правильну роботу генератора щільних упаковок сфероподіедрів і його придатності для методу реконструкції тривимірної пористої структури.

1.1.4 Інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів.

Кожного разу, коли потрібно розмістити різні грузи на складі або завантажити їх в транспортний засіб, необхідно розв’язати задачу упаковки вантажу таким чином, щоб він займав якомога менше місця.

На сьогоднішній день розробляється багато інформаційно-логістичних систем, в яких однією із задач є пошук оптимального розміщення вантажів на складах або розв’язання задачі пошуку щільної упаковки вантажів у контейнери та пошуку оптимального завантаження цих контейнерів у транспортні засоби з метою скорочення фінансових витрат на перевезення та зберігання вантажів [84,85]. З аналізу публікацій можна зробити висновок, що цей клас задач є найбільш поширеним серед дослідників.

Упаковка вантажів в контейнер, кузов транспортного засобу або на паллету є однією з найскладніших проблем упаковки через наявність обмежень, які виникають в реальному житті. Наприклад, при спробі

організувати оптимальну упаковку з найбільш ефективним використанням наявних ресурсів недооцінка кількості необхідних контейнерів для транспортування може обійтися дуже дорого через затримку і перевезення додаткових контейнерів, які недостатньо повно використовуються.

Відносно розміщення вантажу існує багато обмежень, пов'язаних з розподілом ваги, укладанням, стійкістю упаковки. Більш того, можуть існувати обмеження на вантажі, які необхідно перевозити разом або, наприклад, розвантаження транспорту може відбуватися в декількох місцях.

Вантажі при транспортуванні можуть піддаватись вертикальному та горизонтальному тиску. Щоб запобігти пошкодженню вантажу, а також максимально збільшити корисне завантаження, необхідно забезпечити упаковку вантажів з урахуванням всіх обмежень.

Крім перерахованих основних обмежень залежно від конкретної задачі можуть виникати різні допоміжні обмеження, пов’язані з орієнтацією коробок [86], їх стабільністю, щільністю упаковки, розподілом ваги, максимально можливим звисанням коробок, пріоритетом розміщення коробок. Більш детально всі ці обмеження розглянуто та класифіковано в роботі [87].

1.2 Аналіз робіт, присвячених розв’язанню задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл

Незважаючи на промислову та економічну важливість задач упаковки тривимірних тіл, публікацій з даної тематики було видано помітно менше, ніж для одновимірних та двовимірних задач упаковки. Однак в останні роки помітне швидке зростання досліджень з цієї проблеми, які включать нові напрямки пошуку розв’язків.

Серед задач упаковки тривимірних тіл більшість робіт розглядають задачу упаковки тіл правильної форми (88, 89). Bortfeldt та Wäscher в роботі [87] відзначають, що тільки 1.8% зі всіх опублікованих робіт присвячені упаковці тіл неправильної форми.

Складність задач пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл змушує постійно вдосконалювати методи пошуку оптимальних розв’язків.

Задачі упаковки належать до класу *NP*-складних задач [91]. Отже, в загальному випадку точне розв’язання задачі упаковки неможливо отримати за час, обмежений поліномом, ступінь якого дорівнює розмірності задачі.

Відомі підходи до розв'язання тривимірних задач упаковки можна розділити на наступні групи:

- евристичні методи (наприклад, евристики, які грунтуються на релаксації інформації про форму тривимірних тіл [92], генетичні алгоритми [93], алгоритми, засновані на ідеї імітаційного відпалу [94], мурашині алгоритми [94], алгоритми, що використовують розширений пошук за зразком [95]);

-традиційні методи лінійної й нелінійної оптимізації [96];

-комбіновані підходи, що використовують евристики й методи математичного програмування [97].

У роботі [98] автори роблять висновок про те, що процес розв'язання задач упаковки складних тривимірних тіл зводиться до циклічного виконання наступних кроків: формування послідовності тіл; формалізація умов неперетинання тіл; обчислення цільової функції.

У більшості робіт, присвячених тривимірним упаковкам, не допускаються безперервні обертання тривимірних тіл. Наприклад, у роботах [100, 101] використовується тільки трансляція тривимірних тіл. Лише у роботі [101] автори пропонують алгоритм HAPE3D, який дозволяє повороти багатогранних тіл навколо кожної координатної осі дискретно на кути, кратні 45 градусам.

Відомий дослідник задач упаковки Wäscher в своїй роботі [102] запропонував класифікацію задач упаковки, розширивши тим самим класифікацію, яку було введено у роботі [105]. Згідно із запропонованою класифікацією задачі упаковки можна розділити на два великі класи:

- Output maximisation;
- Input minimisation.

До першого класу відносяться задачі, в яких необхідно упакувати максимальну кількість тривимірних тіл із заданої множини у контейнер фіксованих розмірів. У свою чергу, даний клас включає в себе такі типи задачі упаковки тривимірних тіл:

- упаковка однакових тривимірних тіл (Identical Item Packing Problem),
- упаковка близьких за розмірами тривимірних тіл (Placement Problem),
- упаковка різних за розмірами тривимірних тіл (Knapsack Problem).

До другого класу відносяться задачі Open Dimension Problem, в яких необхідно мінімізувати метричні характеристики області розміщення. Кожен із зазначених типів задач досліджується великою кількістю вчених в усьому світі.

Слід зазначити, що в більшості робіт розглядаються задачі упаковки куль [106], та в меншій кількості паралелепіпедів [107].

На сьогоднішній день розроблено велику кількість методів упаковки куль [108-112]. В роботі [113] вказується, що алгоритми упаковки куль можуть бути віднесені до таких груп:

- послідовно-поодиноке розміщення,
- колективна перестановка,
- градієнтні оптимізаційні методи.

Однак у багатьох ситуаціях інженери і вчені стикаються з задачами, в яких нерегулярні просторові структури можуть бути інтерпретовані як системи щільно упакованих твердих частинок, що мають різну форму. Їх щільна упаковка використовується при моделюванні структури та вивченні властивостей різних композитних і склоподібних матеріалів, колоїдних розчинів, гранульованих і пористих середовищ, сумішевих палив. Підходи, які застосовуються для розв’язання задач упаковки тривимірних тіл, що мають довільну просторову форму, істотно відрізняються від підходів, що застосовуються для упаковки куль або паралелепіпедів.

Внаслідок комбінаторної і геометричної складності для упаковки тривимірних тіл довільної просторової форми часто застосовуються різні апроксимаційні підходи. Для розв’язання задач упаковки таких тривимірних тіл будуються наближені моделі таких тіл. Такі моделі можуть бути поділені на моделі цифрової дискретизації та збірні моделі. Ці моделі ґрунтуються на простих «ідеалізованих» представленнях геометричної форми тривимірних тіл. Моделі з першого класу ґрунтуються на дискретизації тривимірних тіл тривимірною решіткою, комірки якої є кубоїдами (рис.1.5) [114, 115].

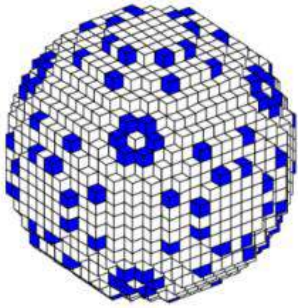


Рис.1.5. Приклад моделі цифрової дискретизації

Збірні моделі ґрунтуються на представленні тривимірних тіл довільної форми в вигляді кінцевого об'єднання куль різного радіусу [116,117] (рис.1.6).

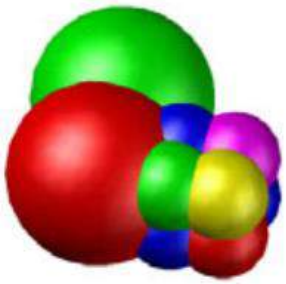


Рис.1.6. Приклад збірної апроксимаційної моделі

Взаємодія тривимірних тіл описується умовою неперетину цих куль. Перевага такої збірної моделі полягає в простоті визначення взаємодії куль і в можливості апроксимувати кулями тіла різноманітної форми. З іншого боку вагомим недоліком є груба аппроксимація просторової форми тривимірного тіла, внаслідок чого втрачається можливість отримання оптимального

розв’язку. Даний підхід використовується китайськими дослідниками для пошуку оптимальної упаковки сфероциліндрів, циліндрів, конусів, куль і кубів.

Недоліки апроксимаційних моделей можуть бути усунені за рахунок побудови точних аналітичних моделей, які дозволяють адекватно описувати задачі упаковки і застосовувати для їх розв’язання сучасні методи нелінійної оптимізації.

В роботі [118] автор описує аналітичну модель ортогональної упаковки «тетрісоподібних» елементів. В [119] будується математична модель упаковки сфероподіедрів і досліджується швидкий алгоритм розв’язання задачі. Запропонований підхід ґрунтується на цілочисельному програмуванні.

Дослідження [120] пропонує ефективний метод розв’язання задач упаковки орієнтованих багатогранних тіл в багатогранний контейнер. В цій роботі запропоновано використовувати задачі упаковки різних багатогранних тіл при створенні фізичних прототипів тривимірних комп'ютерних моделей, необхідних на ранніх стадіях виробництва прототипів нових виробів. В даному випадку метою щільної упаковки тривимірних тіл є максимізація площі пошарового запікання порошку.

В роботі [121] автори запропонували новий метод моделювання щільних матеріалів на основі алгоритму упаковки сферопаралелепіпедів (тривимірних тіл, утворених за допомогою суми Мінковського кулі і паралелепіпеда). Запропонований в роботі метод може бути застосований для віртуального проектування новітніх матеріалів, які складаються з частинок несферичної форми. В [122] розглядається оптимізаційний підхід до імітаційного моделювання різних мікроструктур. Авторами розв’язані задачі оптимізації функції пористості і пошуку оптимальної моделі гранулометричного складу досліджуваної мікроструктури. Актуальним додатком запропонованого підходу є задача тривимірної реконструкції мікроструктури образців гірних порід.

В роботі [123] запроповано методику, яка дозволяє побудувати щільні випадкових упаковки сфероциліндрів. Описаний метод дозволяє проводити моделювання структури анізотропних порошків та колоїдних речовин.

В роботі [124] дослідники наводять комп'ютерну модель, призначену для визначення щільності гранульованих матеріалів шляхом упаковки еліпсоїдів. Запропоновано спеціальний підхід, що запобігає блокування частинок по мірі їх просування вглиб контейнера. Впроваджено процес вибіркового обстеження для визначення середньої щільності упаковки або в усьому контейнері, або в будь-який його частини. Отримані результати порівнюються з розподілом часток у звичайному піску.

Стаття [125] присвячена огляду робіт, в яких упаковуються циліндри та тіла довільної форми в задачах порошкової металургії. Описані в роботі підходи засновані на різних апроксимаціях довільних частинок і використанні метаевристик.

Розв’язанню задачі оптимального розміщення вантажних контейнерів різних форм (циліндри, паралелепіпеди і інші нестандартні форми, утворені за допомогою паралелепіпедів) присвячені статті [126-128].

Серед найбільш важливих задач потрібно виділити задачі пошуку найбільш вигідного взаємного розміщення тривимірних тіл різної природи з урахуванням різних обмежень. До таких задач належать задачі автоматизованого компонування різного устаткування [129], компонування приладових відсіків літальних апаратів, автоматичного проектування генеральних планів на етапі компонування та об’ємного-планування цехів промислових підприємств, конструкторського проектування теплоенергетичних комплексів і багато інших [130]. При розв’язанні такого роду задач важливе дотримання мінімально допустимих відстаней між розміщеними тілами, щоб уникнути різного роду впливів (теплового, електромагнітного і т.п.) одного тіла на інше.

В роботі [131] досліджується щільна упаковка багатогранних тіл. Автори формулюють задачу побудови упаковки тривимірних тіл у

фундаментальну сітку з урахуванням граничних умов як оптимізаційної задачі, яку вони називають адаптивною схемою стискання осередків.

Методика розв’язання задач, в яких розміщується набір капсул в довільному контейнері, представлена в роботі [132]. В цьому дослідженні на розміщення тривимірних тіл можуть накладатись обмеження на відстані між капсулами і на кути повороту. Запропонований метод грунтується на схемі локального пошуку, в якій кожна капсула переміщується в одному з напрямків або повертається так, щоб забезпечувалося виконання обмежень.

Автори роботи [133] застосували генетичний алгоритм для пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл в циліндричний контейнер. При цьому використовується метод штрафних функцій, в якому на неприпустимі розв’язки накладається штраф. Розрахунок перетину між тілами грунтується на перетині трикутників, що покривають поверхню тривимірних тіл. Щоб скоротити кількість обчислень при визначенні перетину тривимірних тіл, в першу чергу перевіряються на перетин рамки, які їх обмежують.

При розв’язанні задач упаковки застосовується безліч оптимізаційних алгоритмів. Деякі з підходів ефективні тільки для задач певного типу, але часто накладають обмеження на геометрію тривимірних тіл, допустимі ступені свободи і формулювання функції цілі. Інші підходи можуть бути застосовані до більш широкого спектру задач, але вимагають непомірно великих затрат часу при розв’язанні навіть найпростіших задач. Методи упаковки можуть бути розділені на різні категорії: генетичні алгоритми [133], алгоритми імітаційного відпалу [134, 135], алгоритми пошуку за шаблоном [136], і різні змішані алгоритми, наприклад [137].

Алгоритми, що ґрунтуються на різних практичних правилах найбільш часто використовуються для розв’язання задач упаковки паралелепіпедів. Підґрунтям для таких алгоритмів є набір правил з метою отримання ефективної упаковки тривимірних тіл. Наприклад, такі вимоги, як стабільність і простота упаковки, можуть бути заздалегідь включені в правила упаковки замість того, щоб перевіряти їх уже після отримання результату.

Хоча правила можуть бути досить простими, діапазон допустимих змін, які використовуються для покращення упаковки, може бути досить широким [138]. Очевидно, що неможливо перебрати всі варіанти всіх правил упаковки, і неможливо знати заздалегідь, які з них приведуть до кращого результату для конкретної задачі.

Одними з найбільш поширених методів розв’язання задач упаковки прямокутних паралелепіпедів в контейнер є підходи побудови стін [139,140], в яких в першу чергу заповнюються секції контейнера по всій ширині і висоті. Існує і ряд інших заснованих на правилах алгоритмів розв'язання задач упаковки прямокутних паралелепіпедів: гільйотинне різання [141], упорядкування паралелепіпедів [142], алгоритми пошуку із правилами заборони [143].

Автори роботи [144] запропонували спеціальний алгоритм для отримання упаковки тривимірних тіл різних форм. В роботі [145] було використано представлення октадерева для апроксимації геометричних форм тривимірних тіл. Алгоритм упаковки заснований на ідеї відповідності вузлів октадерева для визначення належного порядку і орієнтації тривимірних тіл. Тіла упаковуються в контейнер послідовно і допускаються тільки повороти, кратні 90 градусам. Метод досить ефективний в тих випадках, коли загальний обсяг тривимірних тіл набагато менше, ніж у контейнера, але не для задач щільної упаковки.

Алгоритми, засновані на правилах, є детермінованими методами, які ефективно використовувати для конкретних типів задач. Однак важко встановити правила, які застосовуються для упаковки тривимірних тіл різних просторових форм або для різних типів функції цілі.

Традиційні оптимізаційні алгоритми, такі як методи гілок і меж, методи лінійного програмування і градієнтні методи, також можуть бути використані для розв’язання задач упаковки.

Дослідники з Німеччини в роботі [146] розробили алгоритм гілок і меж для обчислення оптимальних розв’язків задач одновимірного розкрою, де цільова функція і обмеження є лінійними функціями.

Італійські вчені у дослідженнях [147, 148] представили алгоритм гілок і меж для задач про ранці і, заснований на цьому алгоритмі, метод гілок і меж для 3D задач упаковки різних прямокутних паралелепіпедів в мінімальну кількість однакових прямокутних контейнерів.

Для розв’язання тривимірних задач розкрою у роботі [149] запропоновано алгоритм пошуку вглиб і алгоритм динамічного програмування. Враховуються обмеження на орієнтацію і обмеження гільйотинного розкрою. Автор провів чисельні експерименти для 64 задач, в яких розглядалося аж до 50 тривимірних тіл, і отримав оптимальні розв’язання для більшості прикладів.

Градієнтні алгоритми використовують інформацію про похідні для пошуку оптимальних розв’язків. Обчислюючи градієнт цільової функції, ми обмежуємо пошук шляхом виділення конкретного напрямку. У випадках, коли неможливо обчислити градієнт аналітично, можуть бути використані різницеві апроксимації.

Автори роботи [150] використовують градієнтні методи упаковки тривимірних тіл в контейнерах відповідно до критеріїв, які визначаються властивостями простору і маси. Тіла моделюються за допомогою контурного подання. Мінімальна відстань між парою тривимірних тіл розраховується шляхом знаходження двох найближчих одна до одної точок на відповідних тілах. Відстань накладення розраховується як відстань, на яку один об'єкт повинен бути трансльований в певному напрямку від іншого об'єкта так, щоб тіла торкнулися один одного. Обидва види відстаней обчислюються шляхом розв'язання оптимізаційної задачі з обмеженнями.

Градієнтні методи є детермінованими, що може значно зменшити час обчислень, необхідний для отримання локально-оптимального розв’язання, оскільки множина напрямків пошуку обмежена лише перспективними

напрямками. Однак розв’язок в цих випадках є лише найближчим локальним оптимумом по відношенню до початкової точки. Тому необхідні багаторазові повторення процесу розв’язання для різних початкових точок. При відсутності можливості обчислити градієнти явно, як це має місце для багатьох задач упаковки, різницеві апроксимації можуть бути неточними, що може привести до помилок в пошуку напрямку руху.

Для пошуку розв’язків задач упаковки широко застосовуються генетичні алгоритми. Вони широко використовуються при створенні надвеликих інтегральних схем [151-154]. В роботі [155] запропонований генетичний алгоритм для 3D упаковки прямокутних паралелепіпедів в контейнер.

Генетичні алгоритми є стохастичними алгоритмами, в яких закладена велика ступінь випадковості. Це алгоритми нульового порядку, для яких потрібні тільки значення функцій. Вони надійні і ефективні в разі негладких і розривних функцій. Ціна, яку потрібно платити за таку універсальність, полягає в тому, що ці методи часто вимагають великої кількості обчислень функцій для досягнення оптимального розв’язку, навіть для найпростіших задач. Тому вони вважаються найбільш корисними для задач, в яких обчислення функцій не коштують великих витрат.

Імітаційний відпал [156] є загальним застосуванням стохастичного методу, який заснований на аналогії між процесом відпалу металів і розв’язанням комбінаторних оптимізаційних задач великої розмірності. В алгоритмі вибирається початкова точка і для неї обчислюється значення цільової функції. Робиться крок з метою переходу в нову точку шляхом застосування оператора з доступного набору рухів. Обчислюється значення цільової функції в новій точці. Якщо крок призводить до поліпшення цільової функції, нова точка приймається і стає поточною. Якщо цільова функція погіршується, крок все ще може бути прийнятий з певною ймовірністю. Ця ймовірність залежить від параметра, званого температурою. Чим більше температура, тим вище ця вірогідність. Спочатку, коли значення температури

велике, алгоритм приймає будь-яке новий стан незалежно від того, наскільки воно добре. Це призводить до випадкових блукань в просторі. Потім температура повільно зменшується, досягаючи, в кінці кінців, нуля, після чого алгоритм вироджується в звичайний алгоритм локального пошуку. Швидкість, з якою знижується температура, називається розкладом охолодження. Чим більше за часом «розтягується» це розклад, тим довше йде дослідження простору пошуку.

Алгоритми імітаційного відпалу успішно застосовуються при компонуванні мікросхем [157,158]. У роботі [159] за допомогою імітаційного відпалу представили розв’язання міжкомірочних (inter-cell) і внутрішньокомірочних (intra-cell) задач упаковки, суть якого полягає в такому взаємному розміщенні тривимірних тіл, при якому зводиться до мінімуму загальний матеріальний потік між ними. Застосування алгоритму імітаційного відпалу було порівняно із застосуванням інших методів упаковки тривимірних тіл, і при розв’язанні кожної з множини класичних тестових задач, було отримано або таке ж, або краще розв’язання.

У [160,161] дослідники розширили застосування вказаного підходу на тривимірні механічні та електромеханічні компонування. У представленому підході в якості тривимірних тіл виступають паралелепіпеди і циліндри, які допускають повороти, кратні 90 градусам. Використовувався підхід, заснований на збуреннях, в якому неприпустимі точки з перетином тривимірних тіл і порушеннями обмежень визначаються і штрафуються [162]. Множина можливих рухів включає трансляцію тривимірних тіл, їх повороти і перестановки.

Адаптивний розклад відпалу [163] було використано для контролю температури, а стратегія імовірнісного вибору руху [164] була використана для вибору рухів на основі попередніх характеристик.

Комплексний підхід до задач тривимірного компонування і задачам трасування був представлений у роботі [165]. Проведені експерименти показали, що одночасне виконання компоновки та розв`язання задачі

трасування призводять до значно кращих результатів, ніж при типовому підході, коли спочатку відбувається компонування, а тільки потім трасування.

Автори статті [166] узагальнили роботу [160], послабивши обмеження на геометричну форму тривимірних тіл і повороти. Для швидкої оцінки перетину між частинами тривимірних тіл складних форм використовуються октадерева. Можна регулювати рівень деталізації октадерева, використовуваного на певній стадії алгоритму імітаційного відпалу, щоб зробити алгоритм більш ефективним.

Імітаційний відпал є загальним методом для найрізноманітніших комбінаторних задач. Метод є гнучким, а також потужним. Для алгоритму імітаційного відпалу потрібна велика кількість обчислень, щоб алгоритм зійшовся до хорошого розв’язку. Коли цільова функція є складною, обчислення можуть бути дорогими і займати багато часу. У [167] автори використовували ієрархічний аналіз теплопередачі з метою зменшення часу обчислень при розміщенні тепловиділяючих електронних компонент.

Алгоритми прямого пошуку за шаблоном є підмножиною алгоритмів прямого пошуку, представлених у [168]. Автори цієї роботи представили алгоритми, які ефективні у випадках, коли функція цілі є нелінійною, багатоекстремальною, і для якої недоступна інформація про похідні.

Методи прямого пошуку визначаються як послідовне дослідження пробних розв’язків, що включають порівняння кожного пробного розв’язку з найкращим вже отриманим розв’язком, а також стратегію визначення наступного пробного розв’язку.

Основний метод пошуку за шаблоном полягає в наступному: вибирається початкова точка, і в цій точці обчислюється значення функції цілі. Уздовж шаблонного напрямку здійснюється крок певної довжини до нової точки, і в цій точці знову обчислюється функція цілі. Порівнюються два значення, і вибирається краще з них; відповідна точка приймається як поточна точка. Пошук триває, починаючи з поточної точки, уздовж наступного шаблонного напрямку, слідуючи тому ж критерію прийняття поточної точки.

Після дослідження всіх шаблонних напрямків на даній ітерації, довжина кроку для наступної ітерації або залишається незмінною, якщо сталося хоча б одне поліпшення цільової функції, або зменшується. Пошук припиняється, коли довжина кроку стає менше, ніж наперед задана величина. В статті [169] автори розвинули загальну ключові поняття та визначили загальну концепцію методу пошуку за шаблоном.

У порівнянні з ймовірнистними методами імітаційного відпалу, методи пошуку за шаблоном досліджують простір розв’язків в більш обмеженій манері. Рух допускається тільки уздовж шаблонних напрямків. Довжина кроку змінюється відповідно до певних правил так, що спочатку кроки великі і в процесі пошуку поступово зменшуються. Це дозволяє методам пошуку за шаблоном сходитися за меньшу кількість ітерацій, ніж в методі імітаційного відпалу.

Автори роботи [170] вперше застосували алгоритм пошуку за шаблоном до тривимірних задач упаковки. Вони вводять п'ять модифікацій, направлених на покращення результатів розв’язання задач упаковки, що в результаті призвело до розширеного алгоритму пошуку за шаблоном. Цей метод був застосований до ряду тестових задач і до промислових додатків [170], і показав покращення в швидкості на два порядки в порівнянні з алгоритмом імітаційного відпалу для розв’язків аналогічної якості. В алгоритм були включені різні евристики, щоб вести пошук вздовж перспективних напрямків [171].

У розширеному алгоритмі пошуку за шаблоном безліч шаблонних напрямків може бути оновлено відповідно до ефективності попередніх ітерацій. Дозволені як перетворення трансляції, так і повороти. Перестановки використовуються тільки тоді, коли при даній довжині кроку неможливо перейти в кращу точку шляхом трансляцій і поворотів. Порядок вибору компонент для пробних рухів і напрямків пошуку випадковий, що робить послідовність цих рухів менш детермінованою щоб уникнути попадання в одні і ті ж точки локального екстремуму. Крок-стрибки можуть бути застосовані,

щоб дозволити довжині кроку час від часу збільшуватися, що робить пошук більш вичерпним, відкладаючи виконання критерію зупинки.

Розширений алгоритм пошуку за шаблоном більш детермінований, ніж алгоритми імітаційного відпалу з точки зору напрямку руху, довжини кроку і прийняття нової точки в якості поточної. Тим не менш, він має також і стохастичні елементи.

Для розв’язання 3D компонувальних задач у [172] розробили спеціальний алгоритм пошуку за шаблоном, в якому функції цілі і обмеження об'єднуються в одну оцінну функцію. Цей алгоритм автори назвали алгоритмом пошуку за шаблоном, заснованим на функції цілі (objective function-based pattern search). В першу чергу застосовується рух, який призводить до найбільших змін (поліпшення) цільової функції. Це дозволило скоротити час розв’язання задач в середньому на 30%.

Змішані підходи мають переваги двох або більше алгоритмів пошуку і поєднують їх в процесі розв’язання задач. Так у роботі [144] представлено змішаний підхід, що поєднує в собі евристичні правила і алгоритм нейронних мереж, для розв’язання задач компонування. Задача двовимірного компонування зіставляється з нейронною мережею, в якій висота і ширина прямокутників представляється нейронами, а невикористана частина області розміщення - функцією енергії. Евристичні правила засновані на алгоритмі, запропонованому у [153], і служать для визначення порядку розміщення та орієнтації прямокутників. Для просторового компонування автори у роботі [154] описали додаток, що використовує поєднання методу імітаційного відпалу і техніки, заснованої на системі накопичення даних. Система накопичення даних містить в собі накопичений інженерно-конструкторський досвід у формулюванні умов задачі і в оцінюванні варіантів її розв’язання. Алгоритм імітаційного відпалу використовується для генерації початкових розміщень для подальшого маніпулювання системою накопичення даних. При цьому використовується клітинне розбиття всього простору розміщення, що призводить до обмеження щільності упаковки.

В роботі [155] запропонували спеціальний змішаний алгоритм для ортогональної упаковки прямокутних паралелепіпедів (блоків) в прямокутний контейнер мінімальної довжини, ширина і висота якого фіксовані. Метод складається з двох основних етапів: евристичний і метаевристичний алгоритми. На початковому етапі за допомогою евристичного алгоритму виконується швидка упаковка певної кількості блоків. Цей алгоритм автори назвали алгоритмом тривимірної максимальної відповідності умовам. Метаевристичний етап служить для упаковки решти блоків. Як показано, така комбінація покращує одержання розв'язання в порівнянні з розв'язаннями, які отримуються тільки за допомогою евристичного етапу.

У роботі [156] дослідники представили змішаний алгоритм для розв'язання задачі завантаження контейнера. Допускається тільки ортогональна упаковка блоків в контейнер. Спочатку автори вводять основний евристичний алгоритм, що полягає в отриманні допустимого розв'язання. При цьому використовується спеціальна структура, яка називається послідовністю упаковки, що служить для вибору завантажується блоку на кожному етапі упаковки. Далі розглядається алгоритм імітаційного відпалу для пошуку наближення до оптимального розв'язання.

У [157] з метою розрахунку місткості багажників автомобілів запропонували новий підхід до розв'язання задачі розміщення максимальної кількості прямокутних паралелепіпедів в область складної форми. Цей підхід поєднує в собі заснований на сітках комбінаторний метод і метод імітаційного відпалу. Примітно, що паралелепіпеди допускають довільні повороти.

У [158] автори представили загальний метод для розв'язання двовимірної задачі розміщення тривимірних тіл довільної форми. Запропонований метод поєднує в собі генетичний алгоритм і алгоритм поділу (separation algorithm). Генетичний алгоритм використовується як глобальний оптимізатор, який відповідає за ефективне дослідження простору пошуку. Алгоритм поділу служить для виконання обмежень розміщення. Запропоновано модифікації методу для розв'язання 3D задач.

У роботах [159-178] розглянуто різні модифікації відомих евристичних методів для розв’язання задач упаковки тривимірних тіл правильної форми.

Аналіз сучасних публікацій з розміщення тривимірних тіл показав, що у жодній з відомих робіт не розв’язується задача тривимірного упакування тривимірних тіл з урахуванням можливості одночасного неперервного обертання та трансляції. Через складність побудови адекватної математичної моделі та проведення великого об’єму обчислень автори використовують лише дискретні повороти тривимірних тіл.

В більшості досліджень використовуються різні апроксимаційні підходи, що призводить до втрати властивостей задачі у її вихідній постановці. Як наслідок, використання некоректних апроксимаційних моделей низької точності та наближених евристик не дає можливості знаходити оптимальні розв’язки задач упаковки тривимірних тіл та призводить до звуження можливих галузей практичного застосування цих задач. Оскільки більшість методик розв’язання даного класу задач є наближеними, тому актуальним є продовження досліджень в області розробки точних засобів розв’язання задач упаковки з метою отримання наближення до глобального екстремуму.

1.3 Вибір напряму дослідження. Теорія оптимізаційного геометричного проектування

Виконуючи системний аналіз бібліографії зарубіжних робіт, можна зробити такі висновки. Якщо в статті розглядається питання побудови математичної моделі певної задачі розміщення тривимірних тіл в термінах теорії дослідження операцій, тоді, як правило, відсутній опис алгоритму і його чисельна реалізація, які побудовані на основі підходу, який пропонується.

З іншого боку, якщо в роботі йдеться про чисельні результати і наводяться приклади розв'язання задач, то методологія розв’язання є евристичною.

Недоліки використання апроксимаційних моделей та евристичних методів можуть бути усунені за рахунок побудови точних аналітичних моделей, які дозволяють адекватно описувати задачі упаковки в їх вихідній постановці та застосовувати для розв’язання сучасні оптимізаційні методи.

Важливим кроком вперед, який дозволив аналітично описувати тіла складної геометричної форми і використовувати математичний апарат класичного аналізу для їх дослідження, було створення академіком НАН України В. Л. Рвачовим теорії R-функцій [179]. Завдяки роботам академіка НАН України В.Л. Рвачьова розпочато новий науковий напрям - оптимальне розміщення геометричних тривимірних тіл. У його роботах було введено поняття канонічного рівняння геометричного об'єкта, рівняння загального положення геометричного об'єкта, запропонована загальна ідея підходу до побудови умов взаємного неперетинання тривимірних тіл.

Надалі для аналітичного опису умов взаємного неперетину, науковою школою під керівництвом чл.-кор. НАН України, професора Ю.Г. Стояна був розроблений новий науковий напрямок теорії геометричного проектування [180]. В рамках цієї теорії були сформульовані основні положення, необхідні для побудови конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання відносин між тривимірними тілами, які виникають в задачах оптимальної упаковки. Розглянуто поняття Ф-функції [181], і наведені основні її властивості. Наведено деякі аспекти застосування теорії Ф-функцій в геометричному проектуванні, в тому числі: визначаються поняття псевдонормалізованої Ф-функції, квазі-Ф-функції і псевдонормалізованої квазі-Ф-функції [182].

У класі задач геометричного проектування як математичні моделі матеріальних тривимірних тіл вибираються φ -тіла [180]. Подання інформації про φ-тіла як про математичні моделі матеріальних тривимірних тіл в задачах геометричного проектування пов'язано з поняттям геометричної інформації [180], введеної як сукупність трьох елементів: просторової форми φ-об'єкта, що характеризує конфігурацію об'єкта; метричних характеристик, що

визначають "розміри" φ-об'єкта; параметрів розміщення, які задають місце розміщення φ-об'єкта у відповідному просторі.

У роботах [183, 184] було введено поняття функції щільного розміщення, яке є аналітичним визначенням умови торкання пари геометричних тривимірних тіл. Засоби побудови годографа функції щільного розміщення, які були запропоновані в роботі [185], розпочали методологію послідовно-поодинокого розміщення тіл. У роботах [186,187] була застосована методологія послідовно-поодинокого розміщення для знаходження наближення до локальних екстремумів для задачі нерегулярного розміщення тривимірних тіл. Багатоекстремальність задачі викликала необхідність перебору одержуваних наближень [188].

Поняття Ф-функції [181] пари φ-тривимірних тіл дозволило побудувати математичну модель основної задачі геометричного проектування, формалізувати відношення взаємного неперетинання пари геометричних тривимірних тіл і відношення приналежності тіла контейнеру. Це визначення поклало початок дослідженням з математичного моделювання задач розміщення.

Формулювання задачі розміщення як задачі математичного програмування стало можливим з появою апарату структур лінійних нерівностей [189], що дозволило використовувати розроблені в рамках теорії математичного програмування підходи як основу для розробки методів розв’язання. Застосування сучасних обчислювальних засобів розв'язання оптимізаційних задач теорії дослідження операцій до предметної області задач геометричного проектування стимулювало появу робіт, в яких, зокрема, розглядалися підходи до побудови аналітичних моделей задач розміщення неопуклих орієнтованих [190] і неорієнтованих [191] тривимірних тіл.

Наближеним і точним методам розв’язання оптимізаційних задач розміщення присвячені численні роботи наукової школи Ю.Г. Стояна. Серед розроблених і детально описаних методів слід виділити метод оптимізації за групами змінних та метод околів, що звужуються. [195-197].

Поряд з розвитком теорії і методів розв'язання двовимірних задач розміщення закладалися основи методології розв'язання тривимірних задач розміщення. У перших роботах наукової школи професора Стояна Ю.Г. розглядалася щільна упаковка паралелепіпедів в паралелепіпеді [198] з урахуванням додаткових обмежень [199, 200]. В [200] було досліджено клас задач тривимірного періодичного розміщення. Задача розміщення опуклих багатогранних тіл досліджена в [201]. Методи локальної оптимізації в задачах упаковки опуклих багатогранних тіл наведені в [201, 202]. Для цих робіт важливе значення мали дослідження, присвячені аналітичному опису умов торкання багатогранних тіл [204]. У всіх перерахованих вище роботах в якості контейнеру виступає прямокутний паралелепіпед. При цьому ні в одній роботі не вводилися технологічні обмеження на упаковку (зони заборони на розміщення тривимірних тіл та мінімально допустимі відстані між тілами).

До останнього часу залишалося відкритим питання аналітичного опису Ф-функцій тривимірних тіл, що мають довільні просторові форми. До останніх публікацій, присвячених розвитку апарату Ф-функцій, а також сучасним підходам до розв'язання оптимізаційних $3D$ задач розміщення, слід віднести роботи [205-250].

Дана дисертаційна робота є продовженням досліджень задач геометричного проектування і спрямована на розв'язання задач пошуку оптимальної упаковки неорієнтованих тривимірних тіл.

1.4 Висновки за розділом 1

Перший розділ дисертації присвячений розгляду сфер практичного застосування задач оптимальної упаковки тривимірних тіл у різних галузях науки та техніки, огляду існуючих підходів до розв'язання задач за темою дисертації та визначенню напрямів дослідження.

Можливі сфери практичного застосування задач оптимальної упаковки тривимірних тіл умовно можна класифікувати таким чином: задачі оптимізації компоновочних розв'язків; комп'ютерне моделювання у матеріалознавстві,

порошковій металургії та нанотехнологіях; оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва; інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів.

Задачі 3*D* упаковки є NP-складними, через що дуже важко розробити методи, що дозволяють знайти оптимальні розв'язки. Огляд робіт, присвячених розв'язанню тривимірних задач упаковки, показує, що дослідники використовують велику кількість різноманітних методів, які можна розділити на наступні групи: евристичні методи (евристики, засновані на різних правилах розміщення, генетичні алгоритми, алгоритми, що грунтуються на ідеї імітаційного відпалу, мурашині алгоритми, розширений пошук за зразком); традиційні методи оптимізації; змішані підходи, які використовують евристики і методи нелінійної оптимізації.

Більшість публікацій з упаковки тривимірних тіл присвячені розміщенню куль або прямих паралелепіпедів. Для тривимірних тіл, які мають більш складну просторову форму, використовуються різні апроксимаційні підходи, що призводить до втрати властивостей задачі у її вихідній постановці. Основна маса робіт з дослідження проблеми тривимірних розміщень не дозволяє враховувати зміну орієнтації тривимірних тіл. Деякі автори враховуються тільки дискретні зміни в орієнтації на задані кути 45 або 90 градусів.

Як наслідок, використання некоректних апроксимаційних моделей низької точності та наближених евристик не дає можливості знаходити оптимальні розв'язки задач упаковки тривимірних тіл та призводить до звуження можливих галузей практичного застосування цих задач.

Оскільки більшість методик розв'язання даного класу задач є наближеними, тому актуальним є продовження досліджень в області розробки точних засобів розв'язання задач упаковки з метою отримання наближення до глобального екстремуму.

Недоліки використання апроксимаційних моделей та евристичних методів можуть бути усунені за рахунок побудови точних аналітичних

моделей, які дозволяють адекватно описувати задачі упаковки в їх вихідній постановці та застосовувати для розв’язання сучасні оптимізаційні методи.

Слід відзначити, що існуючі підходи до розв'язання задач оптимізації останнім часом набули розвитку. Це зумовлено появою сучасних методів нелінійної оптимізації, які значно підвищують надійність, швидкість і точність пошуку локальних екстремумів та можуть бути реалізовані за допомогою зовнішніх потужних НЛП солверів.

Тому створення єдиного підходу до моделювання і розв’язання оптимізаційних задач розміщення на основі арсеналу засобів, розвинених в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування, дозволяє подивитися на проблему розміщення тривимірних тіл з єдиних позицій і залучити до розв’язання даного класу задач всю міць апарату сучасного математичного програмування.

Оскільки найменш дослідженими є задачі упаковки тривимірних тіл, які разом з неперервними трансляціями допускають і неперервні повороти, то виникає необхідність в розробці методології математичного та комп'ютерного моделювання процесу оптимізації упаковки тривимірних тіл, що допускають неперервні трансляції та повороти.

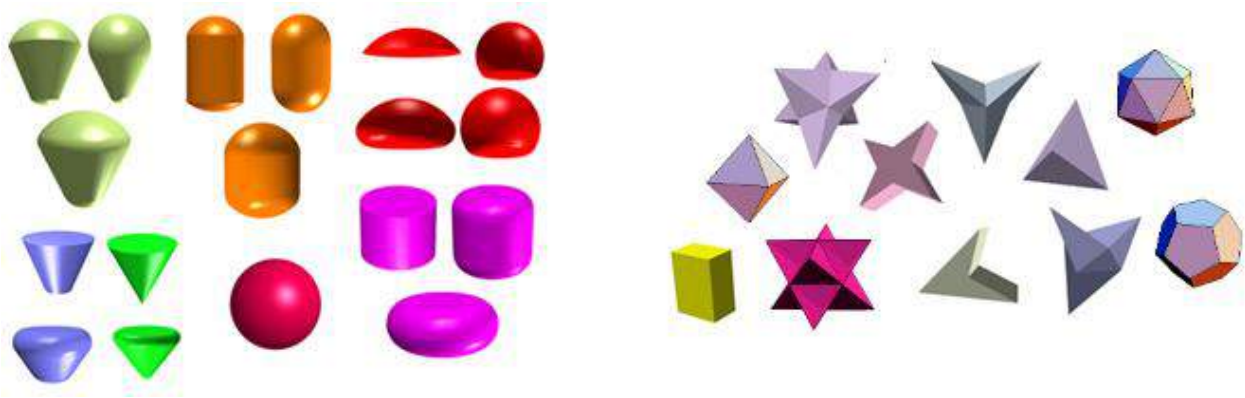
РОЗДІЛ 2
МЕТОД Ф-ФУНКЦІЙ. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ОРІЄНТОВАНИХ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

Одна з найбільш важливих і складних задач комп'ютерного та математичного моделювання задач упаковки тривимірних геометричних тіл – це аналітичний опис взаємодії між тілами.

В цьому розділі розглядаються основи методу Ф-функцій та будується клас Ф-функцій для орієнтованих (які мають наперед задану орієнтацію, що не може змінюватись при пошуку розв’язку задачі) тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами.

2.1 Опис множини тривимірних тіл, для яких розглядаються задачі оптимальної упаковки

В роботі як математичні моделі реальних тривимірних тіл (тривимірних тіл) використовуються зв'язні обмежені $3D$ φ-тіла (непусті канонічно замкнуті точкові множини $O \subset R^3$, гомотопічний тип внутрішності і замикання яких співпадають). Усю множину тривимірних тіл, які розглядаються у роботі можна поділити на дві основні групи. До першої групи відносяться опуклі тривимірні тіла, поверхня яких утворена циліндричними, конічними та сферичними поверхнями, та їх еквідистантні поверхні (рис.2.1 а). До другої групи відносяться неопуклі багатогранні тіла та довільні тривимірні тіла, що можуть бути апроксимовані за допомогою багатогранних тіл (рис. 2.1 б).



а) б)

Рис.2.1. Множина тривимірних тіл:

а) опуклі тіла, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;

б) опуклі та неопуклі багатогранні тіла.

Усі тривимірні тіла (тіла) O з першої групи у рамках даного дослідження описуються загальним поняттям сферичного конусу SC_i (рис. 2.2).

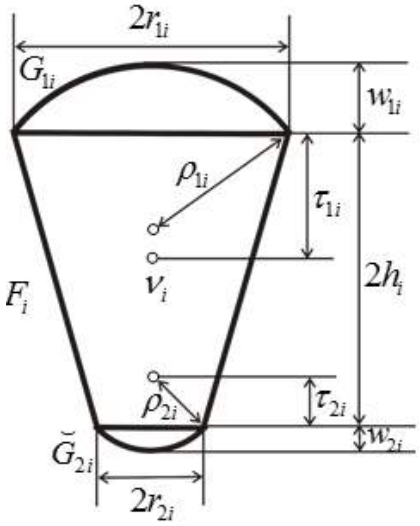


Рис. 2.2. Параметри сферичного конусу

Сферичним конусом SK_i (рис. 2.2) будемо назвемо тривимірне тіло, яке можна представити у вигляді

$$SK_i = G_{1i} \cup F_i \cup G_{2i},$$

де C_i - усічений конус висоти $2h_i$, радіусів верхньої і нижньої основ r_{1i} і r_{2i} відповідно, G_{1i} і G_{2i} - сегменти кулі висоти w_{ki} і радіусів основ $r_{ki}, k \in \{1,2\}$, відповідно.

Радіуси куль S_{ki}, за допомогою яких отримані сегменти, визначаються як $\rho_{ki} = \dfrac{r_{ki}^2 + w_{ki}^2}{2w_{ki}}, k \in \{1,2\}$. Позначимо $\tau_{ki} = \rho_{ki} - w_{ki}, k \in \{1,2\}$, і $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i})$ - вектор метричних характеристик сферичного конусу sK_i.

Опуклість об'єкта sK_i забезпечується умовами

$$\begin{aligned} &2(y_{1i} - r_{1i})h_i + (z_{1i} - h_i)(r_{2i} - r_{1i}) \geq 0, \\ &2(y_{2i} - r_{1i})h_i + (z_{2i} - h_i)(r_{2i} - r_{1i}) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $2(y - r_{1i})h_i + (z - h_i)(r_{2i} - r_{1i}) = 0$ - рівняння прямої l_i, що проходить через точки $A_{1i}(r_{1i}, h_i)$ і $A_{2i}(r_{2i}, -h_i)$, $(y_{1i}, z_{1i}) = \left(\dfrac{r_{1i}^2 + h_i \tau_{1i}}{r_{1i}}, 0\right)$,

$(y_{2i}, z_{2i}) = \left(\dfrac{r_{2i}^2 + h_i \tau_{2i}}{r_{2i}}, 0\right)$.

Точка $T_{1i}(y_{1i}, z_{1i})$ належить дотичній

$$l_{1i} = \left\{(y,z) \in R^2 : (y - r_{1i})r_{1i} + (z - h_i)\tau_{1i} = 0\right\}$$

до кола $\left\{(y,z) \in R^2 : y^2 + \left(z - (h_i - \tau_{1i})\right)^2 - \rho_{1i}^2 = 0\right\}$ в точці $A_{1i}(r_{1i}, h_i)$, а точка $T_{2i}(y_{2i}, z_{2i})$ належить дотичній

$$l_{2i} = \left\{(y,z) \in R^2 : (y - r_{2i})r_{2i} - (z + h_i)\tau_{2i}^0 = 0\right\}$$

до кола $\left\{(y,z) \in R^2 : y^2 + \left(z + h_i - \tau_{2i}\right)^2 - \rho_{2i}^2 = 0\right\}$ в точці $A_{2i}(r_{2i}, -h_i)$ (рис. 2.3).

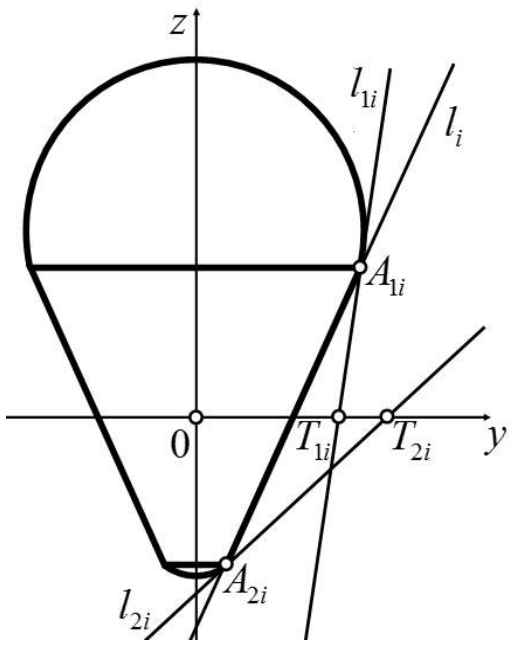


Рис. 2.3. Умови опуклості

Підставляючи точки (y_{1i}, z_{1i}) і (y_{1i}, z_{1i}) в нерівності (2.1), отримаємо

$$\tau_{1i} + \frac{r_{1i}(r_{1i} - r_{2i})}{2h_i} \geq 0, \;\; \tau_{2i} + \frac{r_{2i}(r_{2i} - r_{1i})}{2h_i} \geq 0.$$

Змінюючи метричні характеристики вектора μ_i сферичного конусу sK_i, можна отримати такі тривимірні тіла:

- сфероциліндр sC_i ($\mu_i = (h_i, r_{i1}, r_{i2}, w_{i1}, w_{i2})$, $r_{i1} = r_{i2}$);
- сферичний диск D_i ($\mu_i = (0, r_i, r_i, w_{i1}, w_{i2})$);
- куля S_i ($\mu_i = (0, r_i, r_i, r_i, r_i)$);
- сегменти кулі G_i ($\mu_i = (0, r_i, 0, w_i, 0)$) або $\breve{G}_i$ ($\mu_i = (0, 0, r_i, 0, w_i)$);
- конус K_i ($\mu_i = (h_i, r_i, 0, 0, 0)$ або $\mu_i = (h_i, 0, r_i, 0, 0)$);
- усічений конус F_i ($\mu_i = (h_i, r_{i1}, r_{i2}, 0, 0)$);
- циліндр C_i ($\mu_i = (h_i, r_i, r_i, 0, 0)$).

Також введемо в розгляд прямокутний паралелепіпед P_i довжини $2a_i$, ширини $2b_i$ і висоти $2c_i$. Вектор його метричних характеристик записується у вигляді $\mu_i = (a_i, b_i, c_i)$.

Крім того, розглянемо тривимірні тіла $O_i^{\zeta_i} = O_i \oplus B_i^{\zeta_i}$, які можна утворити в результаті суми Мінковського сферичного конусу та кулі $B_i^{\zeta_i}$ радіусу $\zeta_i \geq 0$. Такі тіла будемо називати еквідистантними, оскільки їх поверхня є еквідистантною поверхнею сферичного конусу (або тіл, які можна утворити за допомогою сферичного конусу).

Так, наприклад, еквідистантна поверхня для паралелепіпеду $P_i^{\zeta_i}$, $a_i \neq 0, b_i \neq 0, c_i \neq 0$, наведена на рис. 2.4а. У випадку, якщо $a_i = 0, b_i \neq 0, c_i \neq 0$, або $a_i \neq 0, b_i = 0, c_i \neq 0$, або $a_i \neq 0, b_i \neq 0, c_i = 0$, то об'єкт $P_i^{\zeta_i}$ має просторову форму, наведену на рис. 2.4 б.

а б

Рис. 2.4. Тривимірні тіла $P_i^{\zeta_i} = P_i \oplus B_i^{\zeta_i}$

Еквідистантне тривимірне тіло $C_i^{\zeta_i} = C_i \oplus B_i^{\zeta_i}, r_i \neq 0, h_i \neq 0$, наведено на рис. 2.5 а. Якщо ж встановити $r_i \neq 0, h_i = 0$, то в цьому випадку отримаємо тривимірне тіло $C_i^{\zeta_i}$, вигляд якого наведено на рис. 2.5 б (опукла оболонка тору).

а б

Рис. 2.5. Тривимірні тіла $C_i^{\zeta_i} = C_i \oplus B_i^{\zeta_i}$

Еквідистантні тривимірні тіла $K_i^{\zeta_i}, F_i^{\zeta_i}$, $G_i^{\zeta_i}, sK_i^{\zeta_i}$ і $D_i^{\zeta_i}$, наведено на рис.2.6, відповідно.

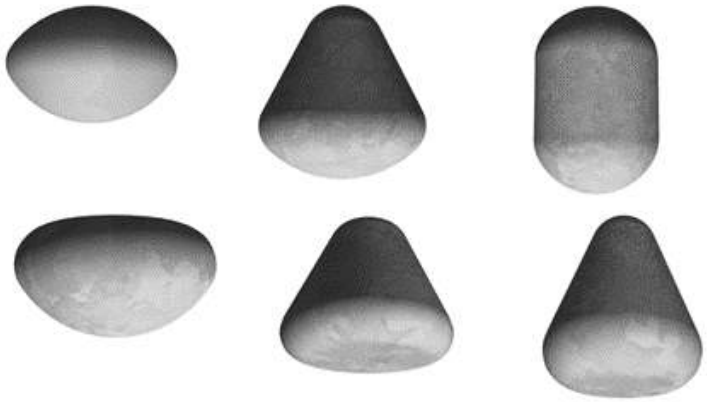


Рис. 2.6. Приклади можливих форм тривимірних тіл

Опуклі багатогранні тіла P_i задамо таким чином:

$$P_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : f_{ij}(X) = A_{ij}x + B_{ij}y + C_{ij}z + D_{ij} \le 0, j \in G_i = \{1, 2, ..., \delta_i\} \right\}, \quad i = 1, 2 .$$

Для багатогранних тіл введемо наступні позначення: H_{ij} – грані P_i, $j \in G_i$; $p_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ - вершини P_i, $j \in W_i = (1, 2, ..., w_i)$, задані щодо власної системи координат $O_i x_i' y_i' z_i'$ багатогранного тіла P_i; $e_{it} = [p_{it_1}, p_{it_2}]$ – ребра P_i, $t \in T_i = \{1, 2, ..., \zeta_i\}$, $t_1, t_2 \in W_i$ (згідно формули Ейлера $\zeta_i = w_i + \delta_i - 2$).

Усі тривимірні тіла (тіла) O, що розглядаються в роботі, припускають конгруентні та гомотетичні перетворення. Таким чином, об'єкту O можна співставити вектор змінних $u_o = (v_o, \theta_o, g_o) \in \mathrm{R}^7$, де $v_o = (x_o, y_o, z_o)$ – вектор трансляції, $\theta_o = (\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ – вектор кутів обертання і g_o – коефіцієнт гомотетії.

Об'єкт O, заданий у власній системі координат, трансльований на вектор $v_o = (x_o, y_o, z_o)$, обернений на кути $\theta_o = (\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ та помножений на коефіцієнт гомотетії λ_o, позначимо як $O(u)$ і визначимо таким чином:

$$O(u)=\{p: p=v_o+\lambda_o\cdot M(\theta_o)\cdot\tilde{p}, \forall\tilde{p}\in O(0,0,0,1)\},$$

де $O(0,0,1)$ - позначає вихідний об'єкт O, $\tilde{p}$ - довільна точка тіла O у власній системі його координат, $M(\theta_0)$ - матриця повороту тривимірного тіла, яка визначається таким чином

$$M(\theta_0)=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{21} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} r_{11}&=\cos\beta\cos\gamma, & r_{21}&=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma, \\ r_{12}&=-\cos\beta\sin\gamma, & r_{22}&=-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma, \\ r_{13}&=\sin\beta, & r_{23}&=-\sin\alpha\cos\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{31}&=-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma, \\ r_{32}&=\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma, \\ r_{33}&=\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Надалі розглянемо методи математичного моделювання задач упаковки тривимірних геометричних тіл.

2.2 Основи методу Ф-функції як конструктивного засобу математичного моделювання взаємодії тривимірних тіл в задачах оптимальної упаковки

2.2.1 Ф-функція та її властивості

Нехай задані замкнуті обмежені тіла $A, B\subset R^3$. Однією з найбільш важливих проблем при моделюванні задач розміщення є побудова такої функції, яка б описувала взаємодії між парою Ф-тривимірних тіл A і B.

За допомогою такої функції повинні відрізнятися наступні ситуації:

- тіла A і B перетинаються, тобто $\operatorname{int}A\cap\operatorname{int}B\neq\varnothing$, де $\operatorname{int}A$ внутрішність множини A;

- тіла A і B не мають спільних точок, тобто $A \bigcap B = \varnothing$;

- тіла A і B торкаються, тобто $\mathrm{fr}\, A \bigcap \mathrm{fr}\, B \neq \varnothing$ і $\mathrm{int}\, A \bigcap \mathrm{int}\, B = \varnothing$, де $\mathrm{fr}\, A$ - межа множини A.

Крім того, необхідно, щоб значення цієї функції були мірою перетину A і B в першому випадку, або оцінкою найкоротших відстаней між об'єктами A і B. Зазначеним вище вимогам задовольняє Ф-функція описна у [181].

Безперервна, усюди визначена функція $\Phi^{AB} : R^{14} \to R^{1}$, називається Ф-функцією тривимірних тіл $A(u_A)$ і $B(u_B)$, якщо вона задовольняє таким характеристичним властивостям (2.2)

$$\begin{gathered} \Phi^{AB}(u_A, u_B) < 0, \textit{якщо}\ \mathrm{int}\, A(u_A) \bigcap \mathrm{int}\, B(u_B) \neq \varnothing, \\ \Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0, \textit{якщо}\ \mathrm{int}\, A(u_A) \bigcap \mathrm{int}\, B(u_B) = \varnothing, frA(u_A) \bigcap frB(u_B) \neq \varnothing, \\ \Phi^{AB}(u_A, u_B) > 0, \textit{якщо}\ clA(u_A) \bigcap clB(u_B) = \varnothing. \end{gathered} \tag{2.2}$$

З метою визначення відстаней між геометричними об'єктами використовується поняття нормалізованої Ф-функції [181].

Ф-функція $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між тілами $A(u_A)$ і $B(u_B)$, за умови $(u_A, u_B) \in G$, $G = \left\{ (u_A, u_B) \middle| \mathrm{int}\, A(u_A) \bigcap \mathrm{int}\, B(u_B) = \varnothing \right\}$, тобто

$$\begin{gathered} \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = dist(A(u_A), B(u_B)), \textit{якщо}\ \mathrm{int}\, A(u_A) \bigcap \mathrm{int}\, B(u_B) = \varnothing, \\ \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{якщо}\ \mathrm{int}\, A(u_A) \bigcap \mathrm{int}\, B(u_B) \neq \varnothing, \end{gathered}$$

де $dist(A(u_A), B(u_B)) = \min\limits_{x_A \in A, x_B \in B} dist(x_A, y_B)$ позначає евклідову відстань між замкнутими множинами.

Позначимо через $\gamma = \left\{ (u_A, u_B) \in R^{8} : \Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0 \right\}$ поверхню 0-рівня Ф-функції.

Нехай у тривимірних тіл A і B зафіксовані метричні характеристики, коефіцієнти гомотетії і кути повороту. Тоді Ф-функція $\Phi^{AB}(v_A, v_B)$ залежить тільки від двох векторів трансляцій v_A і v_B. Оскільки Ф-функція визначається відносним положенням двох тривимірних тіл, справедливо

$$\Phi^{AB}(v_A, v_B) = \Phi^{AB}(v_A - v_B, 0) = \Phi^{AB}(0, v_B - v_A),\ \forall (v_A, v_B).$$

Таким чином, для опису Ф-функції досить зафіксувати положення одного з тривимірних тіл і виконати трансляції тільки другого тіла. При цьому поверхня нульового рівня Ф-функції $\gamma^{AB} = \left\{ \mathrm{v} \in R^2 : \Phi^{AB}(0, v) = 0 \right\}$ відіграє особливу роль, оскільки вона описує всі трансляції тіла B, при яких вона торкається тіла A. Ця множина конгруентна межі суми Мінковського двох тіл, тобто $\gamma^{AB} \simeq frT$, де $T = A(0) \oplus -B(v)$ - сума Мінковського множин $A(0)$ і $-B(v)$. Сума Мінковського двох множин визначається як

$$A \oplus B = \{x + y \in R^2 : x \in A, y \in B\}.$$

Множина γ^{AB} є годографом функції щільного розміщення. Варто зазначити, що $\gamma^{AB} = -\gamma^{BA}$.

Якщо A і B є центрально симетричними об’єктами та їх полюси розміщуються в їх центрах, то Ф-функція визначається таким чином:

$$\Phi^{AB}(v, 0) = \Phi^{AB}(0, v).$$

2.2.2 Квазі-Ф-функція

З метою зменшення обчислювальної складності опису в аналітичному вигляді умов взаємного неперетину, розширення класу тривимірних тіл, для яких умови взаємного неперетину записуються у вигляді системи нерівностей та для моделювання обмежень на максимально припустимі відстані між об'єктами у роботі [182] Стояна Ю.Г., Романової Т.Є. та Панкратова О.В. введено поняття квазі-Ф-функції.

Квазі-Ф-функцією Φ'^{AB} для опуклих тривимірних тіл $A(u_A)$ та $B(u_B)$ називається безперервна функція, яка задовольняє умовам:

$$\max_{u\in U}\Phi'^{AB}(u_A,u_B,\mathrm{u}_p)<0,\ \text{якщо}\ \operatorname{int}A(u_A)\bigcap\operatorname{int}B(u_B)\neq\varnothing,$$

$$\max_{u_p\in U}\Phi'^{AB}(u_A,u_B,u_p)=0,\ \text{якщо}\ \operatorname{int}A(u_A)\bigcap\operatorname{int}B(u_B)=\varnothing, \tag{2.3}$$

$$frA(u_A)\bigcap frB(u_B)\neq\varnothing,$$

$$\max_{u_p\in U}\Phi'^{AB}(u_A,u_B,u_p)>0,\ \text{якщо}\ A(u_A)\bigcap B(u_B)=\varnothing,$$

де $u_p\in R^3$.

Властивості (2.3) можна записати також в компактному вигляді

$$\operatorname{sgn}\max_{u\in U}\Phi'^{AB}=\operatorname{sgn}\Phi^{AB}, \tag{2.4}$$

де sgn - знакова функція.

Умови (2.3) і (2.4) також означають, що функція $\max_{u\in U}\Phi'^{AB}$ є Ф-функцією, оскільки задовольняє умові (2.2).

Поняття квазі-Ф-функцій може бути поширене на моделювання обмежень на допустимі відстані між об'єктами у вигляді класу, так званих, псевдонормалізованних квазі-Ф-функцій.

Використання квазі-Ф-функцій замість звичайних Ф-функцій дозволяє спростити аналітичний опис умов неперетинання тривимірних тіл і формалізувати обмеження на мінімально припустимі відстані. Перевагою квазі-Ф-функцій є те, що вони можуть бути використані для різних форм тривимірних тіл, для яких звичайні Ф-функції є занадто складними або не побудовані. Однак використання квазі-Ф-функцій має свої недоліки, пов'язані із введенням додаткових змінних, які визначають парамерти поділяючої площини між тілами. Це значно підвищує розмірність задачі.

2.2.3 Псевдонормалізована Ф-функція

Нехай задано обмеження на допустиму відстань ρ між тілами A і B, тобто dist (A, B)$\geq \rho^-$, якщо $\rho = \rho^-$ або dist (A, B)$\leq \rho^+$, якщо $\rho = \rho^+$ (ρ^- (ρ^+) - мінімально (максимально) допустима відстань між тілами A і B, dist (A, B) = $\min\limits_{a \in A, b \in B} d(a,b)$, $d(a,b)$ - евклідова відстань в R^2). У термінах Ф-функцій обмеження dist (A, B)$\geq \rho^-$ еквівалентно $\Phi^{AB} \geq \rho^-$, а dist (A, B)$\leq \rho^+$ $\Leftrightarrow$ $0 \leq \Phi^{AB} \leq \rho^+$, ($\Phi^{AB}$ - нормалізована Ф-функція тривимірних тіл A і B).

Побудова нормалізованих Ф-функцій для довільних тривимірних тіл - досить складна процедура. Крім того, нормалізовані Ф-функції неминуче містять радикали, що небажано для розв’язання оптимізаційних задач упаковки із застосуванням градієнтних методів оптимізації. У зв'язку з цим для моделювання допустимих відстаней між тривимірними тілами пропонується використовувати вільні від радикалів псевдонормалізовані Ф-функції.

Безперервна всюди визначена функція Φ^{AB} називається псевдонормалізованою Ф-функцією тіл A і B, якщо виконуються наступні властивості (2.3):

$$\begin{aligned} &\hat{\Phi}_-^{AB}(u_1,u_2) < 0, \textit{якщо } \mathrm{dist}(A,B) < \rho^-, \\ &\hat{\Phi}_-^{AB}(u_1,u_2) = 0, \textit{якщо } \mathrm{dist}(A,B) = \rho^-, \\ &\hat{\Phi}_-^{AB}(u_1,u_2) > 0, \textit{якщо } \mathrm{dist}(A,B) > \rho^-. \end{aligned} \tag{2.5}$$

З виразу (2.5) випливає, що dist (A, B)$\geq \rho^-$ $\Leftrightarrow$ $\Phi^{AB} \geq \rho^-$ $\Leftrightarrow$ $\Phi^{AB} \geq 0$, а рівність $\Phi^{AB} = \rho^-$ визначає $\Phi^{AB} = 0$.

2.3 Побудова Ф-функцій для орієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами

2.3.1. Ф-функція сфероциліндрів

Для побудови нормалізованої Ф-функції $\Phi_{ij}^{ss}(u_i,u_j)$ для $S_i(u_i)$ й $S_j(u_j)$ введемо наступні функції:

1) $\psi_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}$, де $x=x_j-x_i$, $y=y_j-y_i$, $R_{ij}=r_i+r_j$;

2) $\varphi_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{x^2+y^2+\left((z_j+l_{j2})-(z_i-l_{i1})\right)^2}-\rho_{j2}-\rho_{i1}$,

$$\varphi_{ij2}(u_i,u_j)=\sqrt{x^2+y^2+\left((z_j-l_{j1})-(z_i+l_{i2})\right)^2}-\rho_{j1}-\rho_{i2},$$

де $\rho_{ij}=\dfrac{r_i^2+w_{ij}^{\ 2}}{2w_{ij}}$, $l_{ij}=\rho_{ij}-(h_i+w_{ij})$, $j=1,2$;

3) $\eta_{ij1}(u_i,u_j)=z-H_{ij}$, $\eta_{ij2}(u_i,u_j)=-z-H_{ij}$, де $z=z_j-z_i$, $H_{ij}=h_i+h_j$;

4) $\omega_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+\left(z-H_{ij}\right)^2}$,

$\omega_{ij2}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+\left(z+H_{ij}\right)^2}$ (якщо $h_j=0$ й $w_{j1}=w_{j2}=r_j$, то

$\omega_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z-H_{ij}\right)^2}-r_j$ й

$\omega_{ij2}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z+H_{ij}\right)^2}-r_j$);

5) $\theta_{ij1}(u_i,u_j)=A_{ij}\sqrt{x^2+y^2}+B_{ij}z-C_{ij}$, $\theta_{ij2}(u_i,u_j)=A_{ij}\sqrt{x^2+y^2}-B_{ij}z-C_{ij}$, $C_{ij}=B_{ij}H_{ij}+A_{ij}R_{ij}$, де $\theta_{ij1}(u_i,u_j)=0$ й $\theta_{ij2}(u_i,u_j)=0$ визначають поверхні конусів, утворених обертанням відповідно прямих l_{ij1} і l_{ij2} навколо осі Oz_j (рис.2.7).

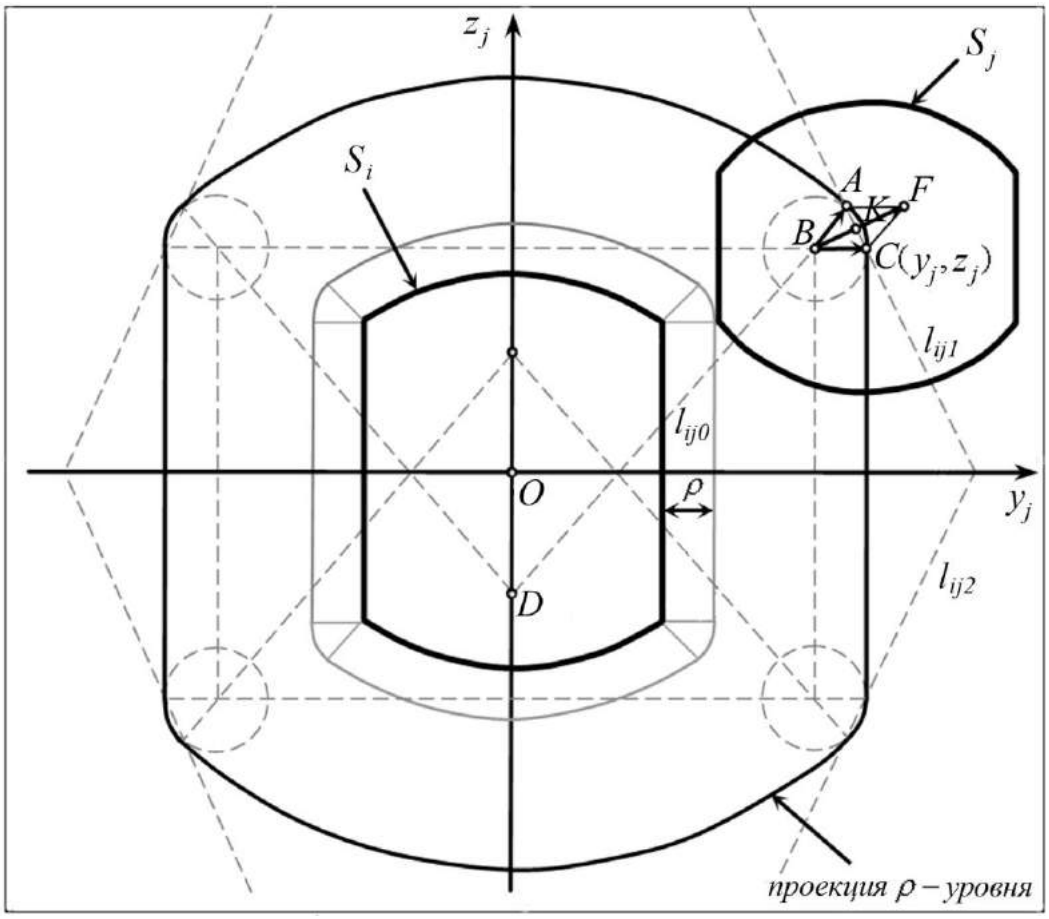


Рис.2.7. Проекція поверхні ρ – рівня нормалізованої Ф-функції $S_i(0,0,0)$ та $S_j(0, y_j, z_j)$ на площину $z_j O y_j$

Для визначення A_{ij} й B_{ij} побудуємо нормальне рівняння прямої l_{ij0}, що лежить у площині $z_j O y_j$ й проходить через точки $D(0, -(l_i + l_j))$ й $B(R_{ij}, H_{ij})$ (рис.2.7)

$$a'_{ij} y_j + b'_{ij} z_j + c'_{ij} = 0,$$

де $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}}$, $b'_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}}$, $a_{ij} = -(H_{ij} + l_i + l_j)$, $b_{ij} = R_{ij}$.

Оскільки $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = (1 + b'_{ij}, -a'_{ij})$, де $\overrightarrow{BC} = (1,0)$ й $\overrightarrow{BA} = (b'_{ij}, -a'_{ij})$, то нормальне рівняння прямої l_{ij1} має вигляд

$$\frac{1+b_{ij}^{'}}{\sqrt{a_{ij}^{'2}+(1+b_{ij}^{'})^2}}y_j-\frac{a_{ij}^{'}}{\sqrt{a_{ij}^{'2}+(1+b_{ij}^{'})^2}}z_j+\frac{c_i^{'}}{\sqrt{a_{ij}^{'2}+(1+b_{ij}^{'})^2}}=0.$$

Виходячи з того, що $BK=\rho\cdot\cos\lambda$, $\cos\lambda=\sqrt{\frac{1+\cos\mu}{2}}$, $\cos\mu=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=b_{ij}^{'}$ ($\lambda=\angle KBC$, $\mu=\angle ABC$ (Рис.2)), $BK=\rho\frac{\sqrt{1+b_{ij}^{'}}}{\sqrt{2}}$, $\rho=BK\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+b_{ij}^{'}}}$, отримуємо що

$$A_{ij}=\frac{\sqrt{2}(1+b_{ij}^{'})}{\sqrt{a_{ij}^{'2}+a_{ij}^{'2}b_{ij}^{'}+(1+b_{ij}^{'})^3}} \text{ та } B_{ij}=-\frac{\sqrt{2}a_{ij}^{'}}{\sqrt{a_{ij}^{'2}+a_{ij}^{'2}b_{ij}^{'}+(1+b_{ij}^{'})^3}}.$$

Тоді, нормалізована Ф-функція для $S_i(u_i)$ й $S_j(u_j)$ має вигляд:

$$\Phi_{ij}^{ss}(u_i,u_j)=\max_{k=1,2,3,4,5}\left\{\psi_{ijk}(u_i,u_j)\right\},$$

де

$\psi_{ij2}(u_i,u_j)=\min\left\{\eta_{ij1}(u_i,u_j),\varphi_{ij1}(u_i,u_j)\right\}$, $\psi_{ij3}(u_i,u_j)=\min\left\{\eta_{ij2}(u_i,u_j),\varphi_{ij2}(u_i,u_j)\right\}$,

$\psi_{ij4}(u_i,u_j)=\min\left\{\omega_{ij1}(u_i,u_j),\theta_{ij1}(u_i,u_j)\right\}$ і $\psi_{ij5}(u_i,u_j)=\min\left\{\omega_{ij2}(u_i,u_j),\theta_{ij2}(u_i,u_j)\right\}$.

2.3.2. Ф-функція циліндра та сфероциліндра

Для побудови нормалізованої Ф-функції $\Phi_{ij}^{cs}(u_i,u_j)$ для $C_i(u_i)$ й $S_j(u_j)$ введемо наступні функції:

1) $\chi_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}$;

2) $\chi_{ij2}(u_i,u_j)=\eta_{ij1}(u_i,u_j)-w_{j2}$, $\chi_{ij3}(u_i,u_j)=\eta_{ij2}(u_i,u_j)-w_{j1}$;

3) $\omega_{ij1}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+\left(z-H_{ij}\right)^2}$,

$$\omega_{ij2}(u_i,u_j)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+\left(z+H_{ij}\right)^2},$$

(якщо $h_j = 0$ й $w_{j1} = w_{j2} = r_j$, то $\omega_{ij1}(u_i, u_j) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_i\right)^2 + \left(z - H_{ij}\right)^2} - r_j$ й

$\omega_{ij2}(u_i, u_j) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_i\right)^2 + \left(z + H_{ij}\right)^2} - r_j$);

4) $\varpi_{ij1}(u_i, u_j) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_i\right)^2 + \left(z - (h_i - l_{j2})\right)^2} - \rho_{j2}$,

$\varpi_{ij2}(u_i, u_j) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_i\right)^2 + \left(z + (h_i - l_{j1})\right)^2} - \rho_{j1}$,

5) $\theta^*_{ij1}(u_i, u_j) = A^*_{ij}\sqrt{x^2+y^2} + B^*_{ij} z - C^*_{ij}$, $\theta^*_{ij2}(u_i, u_j) = A^*_{ij}\sqrt{x^2+y^2} - B^*_{ij} z - C^*_{ij}$,

$C^*_{ij} = B^*_{ij} H_{ij} + A^*_{ij} R_{ij}$;

6) $\tilde{\theta}_{ij1}(u_i, u_j) = \tilde{A}_{ij}\sqrt{x^2+y^2} + \tilde{B}_{ij} z - \tilde{C}_{ij}$, $\tilde{\theta}_{ij2}(u_i, u_j) = \tilde{A}_{ij}\sqrt{x^2+y^2} - \tilde{B}_{ij} z - \tilde{C}_{ij}$,

$\tilde{C}_{ij} = \tilde{B}_{ij} H_{ij} + \tilde{A}_{ij} R_{ij}$, де $\tilde{\theta}_{ij1}(u_i, u_j) = 0$ й $\tilde{\theta}_{ij2}(u_i, u_j) = 0$ визначають поверхні конусів, утворених обертанням відповідно прямих l_{ij3} і l_{ij4} навколо осі Oz_j (рис.2.8).

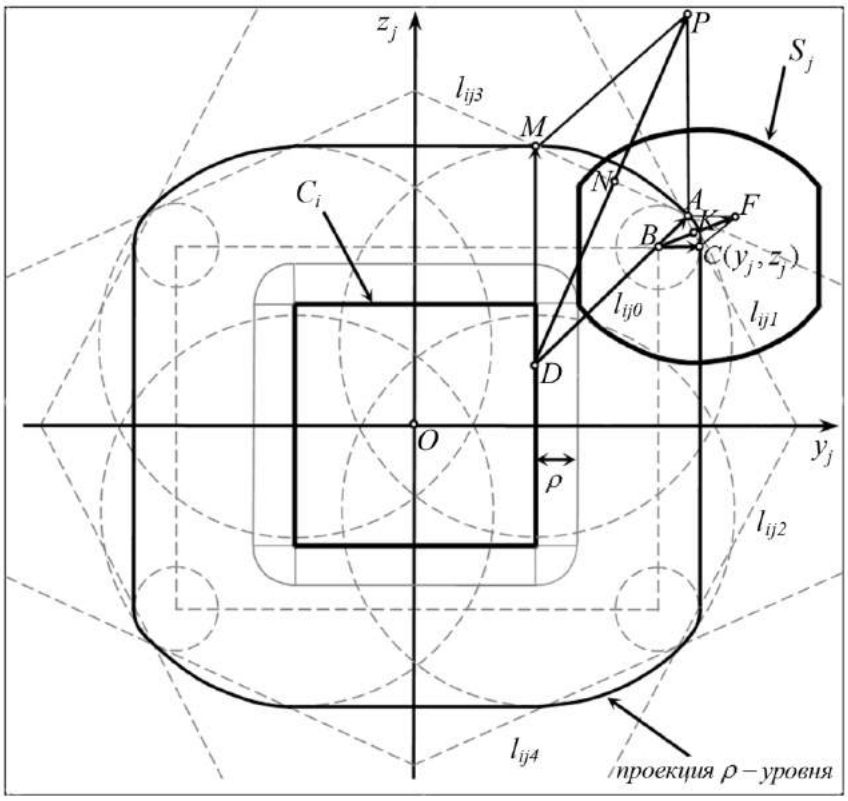


Рис. 2.8. Проекція поверхні ρ – рівня нормалізованої Ф-функції $C_i(0,0,0)$ й $S_j(0, y_j, z_j)$ на площину $z_j O y_j$

Коефіцієнти A_{ij}^{*} й B_{ij}^{*} визначаються аналогічно A_{ij} й B_{ij}. При цьому, для розглянутого випадку пряма l_{ij0} проходить через точки $D(r_i, h_i - l_{j2})$ й $B(R_{ij}, H_{ij})$ (рис.2.8) і $a_{ij} = -(H_{ij} - h_i + l_{j2})$, $b_{ij} = R_{ij} - r_i$.

Коефіцієнти $\tilde{A}_{ij}$ й $\tilde{B}_{ij}$ визначаються в такий спосіб. Оскільки $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM} = (b_{ij}^{'}, 1 - a_{ij}^{'})$, де $\overrightarrow{DA} = (b_{ij}^{'}, -a_{ij}^{'})$ й $\overrightarrow{DM} = (0,1)$, то нормальне рівняння прямої l_{ij3} має вигляд

$$\frac{b_{ij}^{'}}{\sqrt{(1-a_{ij}^{'})^2 + b_{ij}^{'2}}} y_j + \frac{1-a_{ij}^{'}}{\sqrt{(1-a_{ij}^{'})^2 + b_{ij}^{'2}}} z_j + \frac{c_i^{'}}{\sqrt{(1-a_{ij}^{'})^2 + b_{ij}^{'2}}} = 0 .$$

Через те , що $DN = \rho \cdot \cos\lambda$, $\cos\lambda = \sqrt{\frac{1+\cos\mu}{2}}$,

$$\cos\mu = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = -a_{ij}^{'}$$

($\lambda = \angle NDA$, $\mu = \angle MDA$ (рис.2.8)), $DN = \rho \frac{\sqrt{1-a_{ij}^{'}}}{\sqrt{2}}$, $\rho = DN \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-a_{ij}^{'}}}$, то

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{\sqrt{2} b_{ij}^{'}}{\sqrt{(1-a_{ij}^{'})^3 + b_{ij}^{'2} - a_{ij}^{'} b_{ij}^{'2}}} \text{ й } \tilde{B}_{ij} = \frac{1-a_{ij}^{'}}{\sqrt{(1-a_{ij}^{'})^3 + b_{ij}^{'2} - a_{ij}^{'} b_{ij}^{'2}}} .$$

Тоді, нормалізована Ф-функція для $C_i(u_i)$ й $S_j(u_j)$ визначається так:

$$\Phi_{ij}^{cs}(u_i, u_j) = \max_{k=1,2,\ldots,7} \left\{ \chi_{ijk}(u_i, u_j) \right\},$$

де

$$\chi_{ij4}(u_i, u_j) = \min\left\{ \omega_{ij1}(u_i, u_j), \theta_{ij1}^{*}(u_i, u_j) \right\}, \ \chi_{ij5}(u_i, u_j) = \min\left\{ \omega_{ij2}(u_i, u_j), \theta_{ij2}^{*}(u_i, u_j) \right\},$$

$$\chi_{ij6}(u_i, u_j) = \min\left\{ \varpi_{ij1}(u_i, u_j), \tilde{\theta}_{ij1}(u_i, u_j) \right\} \text{ і } \chi_{ij7}(u_i, u_j) = \min\left\{ \varpi_{ij2}(u_i, u_j), \tilde{\theta}_{ij2}(u_i, u_j) \right\}.$$

2.3.3. Ф-функція сегментів кулі

Зафіксуємо положення полюса сегмента G_i на початку нерухомої системи координат XYZ. Розглянемо перетин простору R^3 площиною $\Pi^{YZ} = \{(x, y, z) \in R^3 : x = 0\}$.

Одиничний дотичний вектор до кола $C_j = fr(B_j \cap \Pi^{YZ})$ в точці $M_j(y_j - r_j, z_j) \in \Lambda_j$ має координати $\bar{t} = \left(-\frac{\tau_j}{\rho_j}, -\frac{r_j}{\rho_j}\right)$. Точка на колі $C_i = fr(B_i \cap \Pi^{YZ})$, в якій одиничний дотичний вектор до C_i збігається з вектором $\bar{t}$, має координати $M_i\left(\rho_i \frac{r_j}{\rho_j}, -\rho_i\left(\frac{\tau_j}{\rho_j} + \frac{\tau_i}{\rho_i}\right)\right)$ (рис. 2.9).

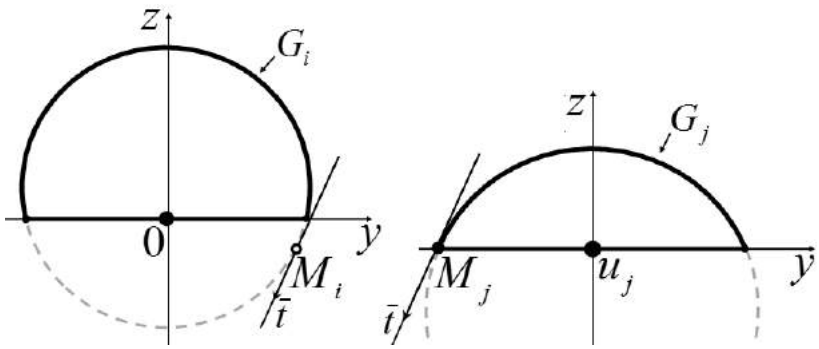


Рис. 2.9. Розміщення точки M_i

Можливі два випадки: якщо $f(\mu_i, \mu_j) = \frac{\tau_i}{\rho_i} + \frac{\tau_j}{\rho_j} \le 0$, то $M_i \in G_i$; якщо $f(\mu_i, \mu_j) > 0$, то $M_i \notin G_i$ (рис. 2.10). Взаємодія сегментів кулі залежить від знака функції $f(\mu_i, \mu_j)$. Тому знак функції $f(\mu_i, \mu_j)$ обумовлює вид Ф-функції для сегментів G_i і G_j.

Побудуємо функцію

$$\Phi_+^{GG}(u_i, u_j) = \max_{k=1,\ldots,5} \phi_k(u_j - u_i),$$

де

$$\phi_k(u) = \min\{\omega_k(u), \theta_k(u)\}, k \in \{1,2,3\},\ \phi_4(u) = z - w_i,\ \phi_5(u) = -z - w_j,$$

$$\omega_1(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_j\right)^2+\left(z+\tau_i\right)^2}-\rho_i,$$

$$\theta_1(u)=\frac{w_i}{r_i}\sqrt{x^2+y^2}+z-\frac{w_i}{r_i}R_{ij},$$

$$\omega_2(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+z^2},\theta_2(u)=\frac{2}{\lambda}\left(\lambda_1\sqrt{x^2+y^2}+\lambda_2 z-\lambda_1 R_{ij}\right),$$

$$\omega_3(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z-\tau_j\right)^2}-\rho_j,$$

$$\theta_3(u)=\frac{w_j}{r_j}\sqrt{x^2+y^2}-z-\frac{w_j}{r_j}R_{ij},$$

$$\lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2,\ \lambda_1=\frac{r_i}{\rho_i}+\frac{r_j}{\rho_j},\ \lambda_2=\frac{\tau_i}{\rho_i}-\frac{\tau_j}{\rho_j},\ R_{ij}=r_i+r_j.$$

Тепер розглянемо випадок $f\left(\mu_i,\mu_j\right)=\frac{\tau_i}{\rho_i}+\frac{\tau_j}{\rho_j}\le 0$. Побудуємо функцію

$$\Phi_-^{GG}\left(u_i,u_j\right)=\max_{k=1,\ldots,5}\phi_k\left(u_j-u_i\right),$$

де

$$\phi_k(u)=\min\left\{\omega_k(u),\theta_k(u)\right\},k\in\{1,2,3\},\ \phi_4(u)=z-w_i,\ \phi_5(u)=-z-w_j,$$

$$\omega_1(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_j\right)^2+\left(z+\tau_i\right)^2}-\rho_i,\ \theta_1(u)=\frac{r_j}{w_j}\sqrt{x^2+y^2}+z+2\rho_j-w_j+w_i,$$

$$\omega_2(u)=\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\tau_i-\tau_j\right)^2}-\left(\rho_i+\rho_j\right),\ \theta_2(u)=\frac{2}{\lambda}\left(\lambda_1\sqrt{x^2+y^2}+\lambda_2 z-\lambda_1 R_{ij}\right),$$

$$\omega_3(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z-\tau_j\right)^2}-\rho_j,\ \theta_3(u)=\frac{r_i}{w_i}\sqrt{x^2+y^2}-z+2\rho_i-w_i+w_j,$$

$$\lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2,\ \lambda_1=\frac{r_i}{\rho_i}+\frac{r_j}{\rho_j},\ \lambda_2=\frac{\tau_i}{\rho_i}-\frac{\tau_j}{\rho_j},\ R_{ij}=r_i+r_j.$$

Зафіксуємо положення полюса сегмента $\breve{G}_i$ кулі на початку нерухомої системи координат XYZ. Розглянемо перетин простору площиною $\Pi^{YZ} = \{(x, y, z) \in R^3 : x = 0\}$.

Одиничний дотичний вектор до кола $C_j = fr(B_j \cap \Pi^{YZ})$ в точці $M_j(y_j - r_j, z_j) \in \Lambda_j$ має координати $\bar{t} = \left(-\frac{\tau_j}{\rho_j}, -\frac{r_j}{\rho_j}\right)$. Точка кола $\breve{C}_i = fr(\breve{B}_i \cap \Pi^{YZ})$, в якій одиничний дотичний вектор до $\breve{C}_i$ збігається з вектором $\bar{t} = \left(-\frac{\tau_j}{\rho_j}, -\frac{r_j}{\rho_j}\right)$ має координати $\breve{M}_i\left(\rho_i \frac{r_j}{\rho_j}, \rho_i\left(\frac{\tau_i}{\rho_i} - \frac{\tau_j}{\rho_j}\right)\right)$ (рис. 2.10).

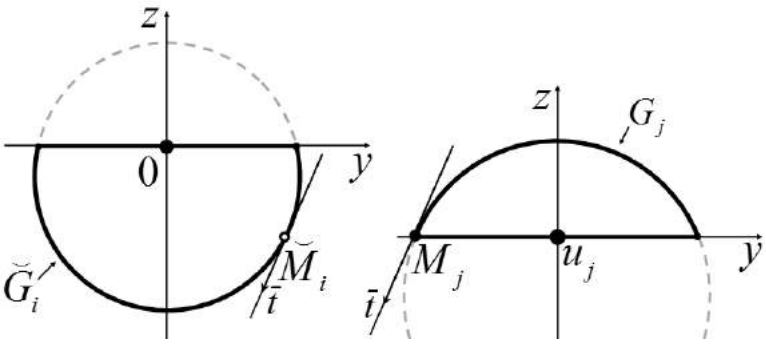


Рис. 2.10. Розміщення точки $\breve{M}_i$

Можливі два випадки: $\breve{M}_i \in G_i$, тобто $g(\mu_i, \mu_j) = \frac{\tau_i}{\rho_i} - \frac{\tau_j}{\rho_j} \le 0$ (рис. 2.10), і $\breve{M}_i \notin G_i$, тобто $g(\mu_i, \mu_j) > 0$. Як і в випадку сегментів кулі G_i і G_j, Взаємодія сегментів кулі $\breve{G}_i$ і G_j залежить від того, де розташована точка $\breve{M}_i$.

В разі $g(\mu_i, \mu_j) \ge 0$ Ф-функція може бути представлена у вигляді

$$\Phi_+^{\breve{G}G}(u_i, u_j) = \max_{k=1,\ldots,4} \phi_k(u_j - u_i),$$

де

$\phi_k(u)=\min\{\omega_k(u),\theta_k(u)\}, k\in\{1,2\}$, $\phi_3(u)=\sqrt{x^2+y^2+(z-\tau_i-\tau_j)^2}-(\rho_i+\rho_j)$,

$\phi_4(u)=z$, $\omega_1(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+z^2}$, $\theta_1(u)=\frac{r_j}{w_j}\sqrt{x^2+y^2}+z-\frac{r_j}{w_j}R_{ij}$,

$\omega_2(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+(z-\tau_j)^2}-\rho_j$, $\theta_2(u)=\frac{2}{\lambda}\left(\lambda_1\sqrt{x^2+y^2}-\lambda_2 z-\lambda_1 R_{ij}\right)$,

$\lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2$, $\lambda_1=\frac{r_i}{\rho_i}+\frac{r_j}{\rho_j}$, $\lambda_2=\frac{\tau_i}{\rho_i}+\frac{\tau_j}{\rho_j}$, $R_{ij}=r_i+r_j$.

Зауважимо, що $g(\mu_i,\mu_j)=-g(\mu_j,\mu_i)$. Звідси, якщо $g(\mu_i,\mu_j)\le 0$, то $g(\mu_j,\mu_i)\ge 0$. Отже, в разі $g(\mu_i,\mu_j)\le 0$, нормалізована Ф-функція сегментів кулі $\breve{G}_i(u_i)$ і $G_j(u_j)$ набуває вигляду: $\Phi_-^{\breve{G}G}(u_i,u_j)=\Phi_+^{\breve{G}G}(u_j,u_i)$.

2.3.5 Ф-функція сегменту кулі і кулі

Нормалізована Ф-функція для кулі $S_i(u_i)$ і сегменту кулі $G_j(u_j)$ може бути записана у вигляді

$$\Phi^{SG}(u_i,u_j)=\max_{k=1,2,3}\phi_k(u_j-u_i),$$

де

$\phi_1(u)=\min\{\omega(u),\theta(u)\}$, $\phi_2(u)=\sqrt{x^2+y^2+(z-\tau_j)^2}-(r_i+\rho_j)$, $\phi_3(u)=z-r_i$,

$\omega(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_j\right)^2+z^2}-r_i$, $\theta(u)=\frac{r_j}{w_j}\sqrt{x^2+y^2}+z-(\tau_j+r_i+\rho_j)$.

2.3.6 Ф-функція циліндра і сегменту кулі

Для сегменту кулі G_j можливі дві ситуації: висота w_j сегмента або перевищує радіус ρ_j кулі B_j, з якого утворений даний сегмент ($\tau_j=\rho_j-w_j<0$), або не перевищує його ($\tau_j=\rho_j-w_j\ge 0$). Від цих двох випадків залежить вид нормалізованої Ф-функції для циліндра і сегменту кулі.

Нормалізована Ф-функція для циліндра $C_i(u_i)$ і сегменту кулі $G_j(u_j)$ в разі $\tau_j \geq 0$ може бути записана у вигляді

$$\Phi_+^{CG}(u_i, u_j) = \max_{k=1,\ldots,6} \phi_k(u_j - u_i),$$

де

$\phi_k(u) = \min\{\omega_k(u), \theta_k(u)\}, k \in \{1,2,3\}$, $\phi_4(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_{ij}$, $\phi_5(u) = z - h_i$,

$\phi_6(u) = -z - (h_i + w_j)$, $\omega_k(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{ij}\right)^2 + \left(z + (-1)^k h_i\right)^2}$, $k \in \{1,2\}$,

$$\omega_3(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_i\right)^2 + \left(z + h_i - \tau_j\right)^2} - \rho_j,$$

$$\theta_1(u) = \sqrt{x^2 + y^2} + z - (R_{ij} + h_i), \theta_2(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{r_j - w_j}{r_j + w_j} z - \left(R_{ij} + \frac{r_j - w_j}{r_j + w_j} h_i\right),$$

$$\theta_3(u) = \frac{w_j}{r_j}\sqrt{x^2 + y^2} - z - \left(\frac{w_j}{r_j} R_{ij} + h_i\right), R_{ij} = r_i + r_j.$$

Якщо ж $\tau_j < 0$, то нормалізована Ф-функція для цих тривимірних тіл може бути записана наступним чином:

$$\Phi_-^{CG}(u_i, u_j) = \max_{k=1,\ldots,6} \phi_k(u_j - u_i),$$

де

$\phi_k(u) = \min\{\omega_k(u), \theta_k(u)\}, k \in \{1,2,3\}$, $\phi_4(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - (r_i + \rho_j)$, $\phi_5(u) = z - h_i$, $\phi_6(u) = -z - (h_i + w_j)$,

$$\omega_k(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_i\right)^2 + \left(z + (-1)^k h_i - \tau_j\right)^2} - \rho_j, k \in \{1,2\};$$

$$\omega_3(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{ij}\right)^2 + (z - h_i)^2},$$

$$\theta_1(u)=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{r_j-w_j}{r_j+w_j}z-\left(R_{ij}-\frac{r_j-w_j}{r_j+w_j}h_i\right),\theta_2(u)=\sqrt{x^2+y^2}-z-\left(r_i+h_i+w_j\right)$$

$$,\ \theta_3(u)=\frac{r_j}{w_j}\sqrt{x^2+y^2}+z-\left(\frac{r_j}{w_j}R_{ij}+h_i\right),R_{ij}=r_i+r_j.$$

2.3.7 Ф-функція паралелепіпеда та сегменту кулі

Для Ф-функції сегмента $G_j(u_j)$ кулі і прямокутного паралелепіпеда $P_i(u_i)$, можливі два випадки: $\tau_j<0$ або $\tau_j\geq 0$.

Пронумеруємо вершини і ребра паралелепіпеда P_i так, щоб з вершини з номером $k=k_x+2k_y+4k_z+1$ виходили ребра з номерами $k_1=k_x+2k_y+1$, $k_2=k_y+2k_z+5$ і $k_3=k_x+2k_z+9$, $k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}$ (рис. 2.11).

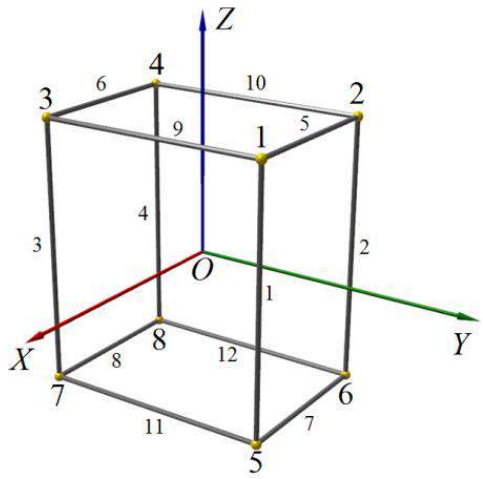


Рис. 2.11. Нумерація вершин і ребер паралелепіпеда

Побудуємо еквідистантну поверхню P_i^d для паралелепіпеда P_i на відстані d. Її можна представити у вигляді

$$P_i^d=\left(\bigcup_{t=1}^{8}V_{ti}^d\right)\cup\left(\bigcup_{t=1}^{12}E_{ti}^d\right)\cup\left(\bigcup_{t=1}^{6}F_{ti}^d\right),$$

де $V_{ti}^d, t\in\{1,\ldots,8\}$ - частина кулі з центром в t вершині паралелепіпеду P_i , $E_{ti}^d, t\in\{1,\ldots,12\}$, - частина циліндра, вісь якого проходить через ребро t

паралелепіпеда, і $F_{ti}^{d}, t \in \{1,\ldots,6\}$, - частина площини, що паралельна грані t паралелепіпеда (рис. 2.12).

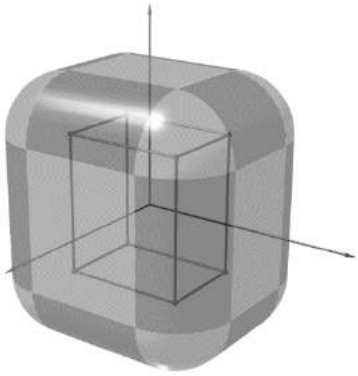


Рис. 2.12. Еквідистантна поверхня

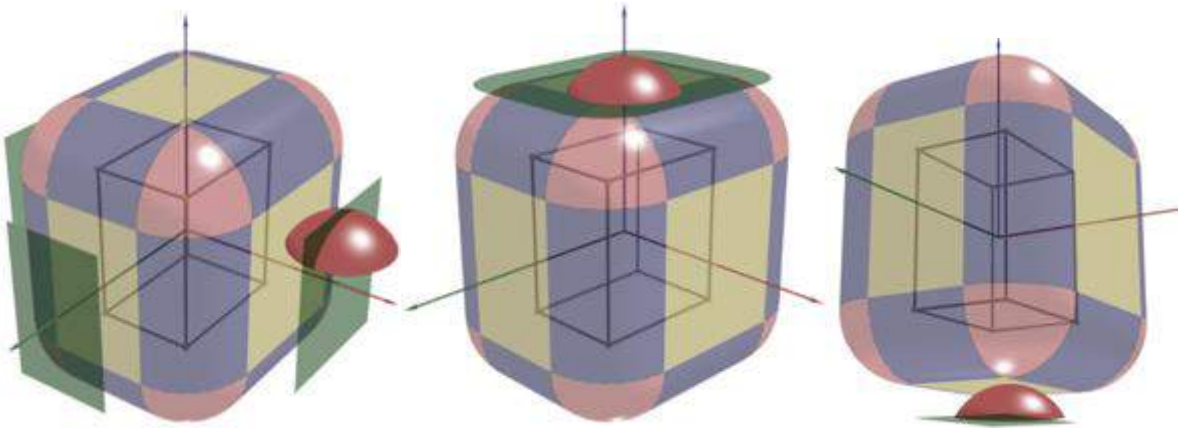
Таким чином, необхідно розглянути всі можливі види торкання сегменту кулі G_j і цих частин поверхні P_i^d для випадку $\tau_j \geq 0$.

1) розглянемо дотик сегменту кулі G_j і $F_{ti}^{d}, t \in \{1,\ldots,6\}$.

а) якщо дотик здійснюється між $\Lambda_j \subset G_j$ і площинами $F_{ti}^{d}, t \in \{1,\ldots,4\}$, еквідистантними до бічних граней паралелепіпеда P_i (рис. 2.13 а), то полюс сегменту кулі належить одній з наступних площин: $\{u \in R^3 : \eta_1(u) = d\}$, $\{u \in R^3 : \eta_2(u) = d\}, \{u \in R^3 : \eta_3(u) = d\}$ або $\{u \in R^3 : \eta_4(u) = d\}$.

б) якщо основа Ω_j сегмента кулі торкається площини F_{5i}^{d}, еквідистантної до верхньої межі паралелепіпеда P_i (рис. 2.13 б), то полюс сегмента G_j належить площині $\{u \in R^3 : \eta_5(u) = d\}$.

в) якщо сегмент G_j кулі і площина F_{6i}^{d}, еквідистантна до нижньої межі паралелепіпеда P_i, торкаються в точці $W_j \in S_j \subset G_j$ (рис. 2.13 в), то полюс сегмента належить площині $\{u \in R^3 : \eta_6(u) = d\}$.



а б в

Рис. 2.13. Взаємодія сегменту з гранями

Таким чином, якщо $\chi_1(u) = \max\limits_{l=1,\ldots,6} \eta_l(u) = d > 0$, то $P_i \cap G_j = \varnothing$ і тіла знаходяться на відстані d.

2) Розглянемо дотик сегменту кулі G_j і $E_{ti}^d, t \in \{1,\ldots,12\}$.

а) якщо сегмент G_j торкається частин $E_{ti}^d, t \in \{1,\ldots,4\}$, які є частинами циліндрів, осі яких збігаються з бічними ребрами паралелепіпеда P_i, то полюс сегмента описує частини циліндрів $\{u \in R^3 : \upsilon_{k_1}(u) = d\}$, що відсікаються площинами $\{u \in R^3 : \sigma_{k_1}(u) = d\}$, $k_1 = k_x + 2k_y + 1$ (рис. 2.14).

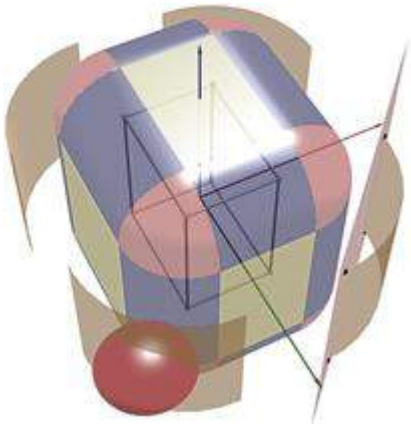


Рис. 2.14. Взаємодія сегмента з бічними ребрами

б) якщо сегмент G_j торкається частин $E_{ti}^d, t \in \{5,6,9,10\}$, які є частинами циліндрів, осі яких збігаються з верхніми ребрами паралелепіпеда P_i, то полюс сегмента належить частинам циліндрів $\{u \in R^3 : \upsilon_{2k_2}(u) = d\}$ і

$\left\{u \in R^3 : \upsilon_{2k_3}(u) = d\right\}$, що відсікаються площинами $\left\{u \in R^3 : \sigma_{2k_2}(u) = d\right\}$ і $\left\{u \in R^3 : \sigma_{2k_3}(u) = d\right\}, k_2 \in \{5,6\}, k_3 \in \{9,10\}$, відповідно (рис. 2.15).

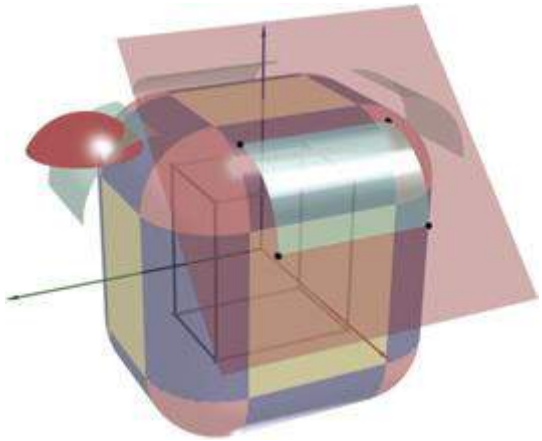
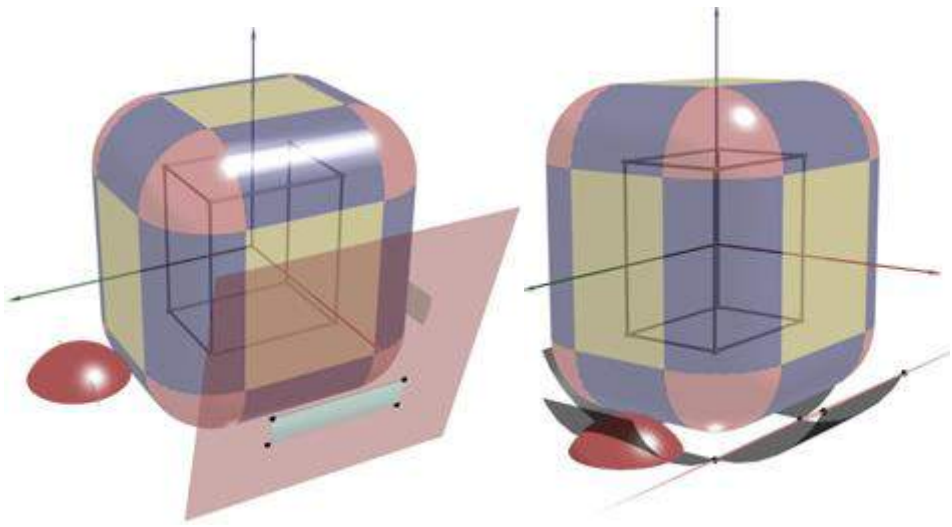


Рис. 2.15. Взаємодія сегмента з верхніми ребрами

в) У разі торкання сегмента і $E_{ti}^d, t \in \{7,8,11,12\}$, які є частинами циліндрів, осі яких збігаються з нижніми ребрами паралелепіпеда P_i, можливі дві ситуації:

і. Дотик відбувається між $\Lambda_j \subset G_j$ і $E_{ti}^d, t \in \{7,8,11,12\}$. Тоді полюс сегменту кулі належить частинам циліндрів $\left\{u \in R^3 : \upsilon_{2k_2}(u) = d\right\}$ і $\left\{u \in R^3 : \upsilon_{2k_3}(u) = d\right\}$, що відсікаються площинами $\left\{u \in R^3 : \sigma_{2k_2}(u) = d\right\}$ і $\left\{u \in R^3 : \sigma_{2k_3}(u) = d\right\}, k_2 \in \{7,8\}, k_3 \in \{11,12\}$, відповідно (рис. 2.16 а).

іі. Дотик відбувається між $S_j \subset G_j$ і $E_{ti}^d, t \in \{7,8,11,12\}$. Тоді полюс сегменту належить частинам циліндрів $\left\{u \in R^3 : \upsilon_{1k_2}(u) = d\right\}$ і $\left\{u \in R^3 : \upsilon_{1k_3}(u) = d\right\}$, що відсікаються площинами $\left\{u \in R^3 : \sigma_{1k_2}(u) = d\right\}$ і $\left\{u \in R^3 : \sigma_{1k_3}(u) = d\right\}$, $k_2 \in \{7,8\}, k_3 \in \{11,12\}$, відповідно (рис. 2.16 б).



а б

Рис. 2.16. Взаємодія сегмента з нижніми ребрами

Якщо $\chi_3(u) = \max\limits_{s=1,\ldots,12} \gamma_s(u) = d > 0$, то $P_i \cap G_j = \varnothing$ і тіла знаходяться на відстані d .

3) Розглянемо дотик сегменту кулі G_j і $V_{ti}^d, t \in \{1,\ldots,8\}$.

а) Якщо сегмент G_j торкається частин куль $V_{ti}^d, t \in \{1,\ldots,4\}$ (з центром в верхніх вершинах паралелепіпеда P_i), то полюс сегмента описує частину поверхні тора $\{u \in R^3 : \omega_k(u) = d\}$. Необхідна частина тора відсікається площиною $\{u \in R^3 : \delta_k(u) = d\}$ і трьома конусами $\{u \in R^3 : \kappa_{1k}(u) = d\}$, $\{u \in R^3 : \kappa_{2k}(u) = d\}$ і $\{u \in R^3 : \kappa_{3k}(u) = d\}$, $k \in \{1,\ldots,4\}$ (рис. 2.17).

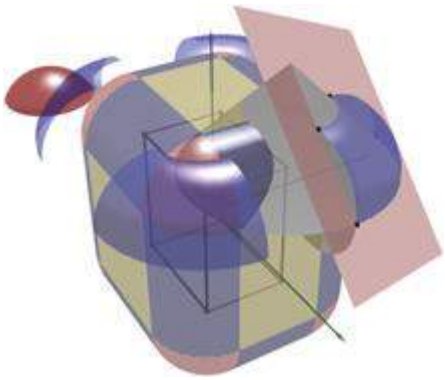
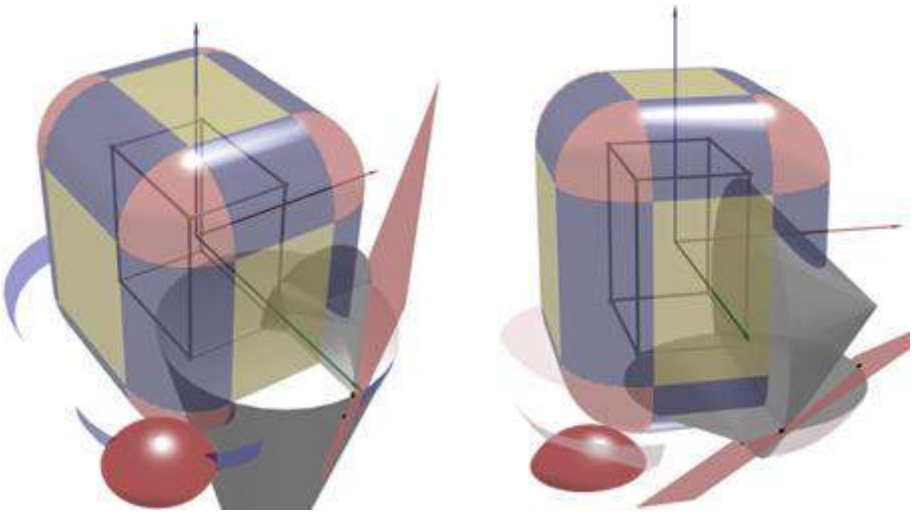


Рис. 2.17. Взаємодія сегмента з верхніми вершинами паралелепіпеда

б) При торканні сегмента G_j частин куль $V_{ti}^d, t \in \{5,\ldots,8\}$, виникають дві можливості:

-дотик відбувається між $\Lambda_j \subset G_j$ і $V_{ti}^d, t \in \{5,\ldots,8\}$. В такому випадку полюс сегмента належить частини тора $\{u \in R^3 : \omega_k(u) = d\}$, яка відсікається площиною $\{u \in R^3 : \delta_k(u) = d\}$ і трьома конусами $\{u \in R^3 : \kappa_{1k}(u) = d\}$, $\{u \in R^3 : \kappa_{2k}(u) = d\}$ і $\{u \in R^3 : \kappa_{3k}(u) = d\}$, $k \in \{5,\ldots,8\}$ (рис. 2.18а).

-дотик відбувається між $S_j \subset G_j$ і $V_{ti}^d, t \in \{5,\ldots,8\}$. Тоді полюс сегменту кулі знаходиться на поверхні частини кулі $\{u \in R^3 : \vartheta_k(u) = d\}$, яка відсікається площиною $\{u \in R^3 : \sigma_k(u) = d\}$ і трьома конусами $\{u \in R^3 : \theta_{1k}(u) = d\}$, $\{u \in R^3 : \theta_{2k}(u) = d\}$ і $\{u \in R^3 : \theta_{3k}(u) = d\}$ (рис. 2.18 б).



а б

Рис. 2.18. Взаємодія сегмента з нижніми вершинами

Очевидно, якщо $\chi_3(u) = \max\limits_{k=1,\ldots,8} \psi_k(u) = d > 0$, то $P_i \cap G_j = \varnothing$, і тіла знаходяться на відстані d.

Якщо хоча б одна з функцій $\chi_k(u), k \in \{1,2,3\}$, дорівнює $d > 0$, то сегмент і паралелепіпед знаходяться на відстані d.

Отже для випадку $\tau_j \geq 0$ Ф-функція матиме такий вигляд:

$$\Phi_+^{PG}\left(u_i, u_j\right) = \max_{k=1,2,3} \chi_k\left(u_j - u_i\right),$$

де

$$\chi_1(u) = \max_{l=1,\ldots,6} \eta_l(u),\ \chi_2(u) = \max_{k=1,\ldots,8} \psi_k(u),\ \chi_3(u) = \max_{s=1,\ldots,12} \gamma_s(u),$$

$$\eta_1(u) = x - \left(a_i + r_j\right),\ \eta_2(u) = y - \left(b_i + r_j\right),\ \eta_3(u) = -x - \left(a_i + r_j\right),$$

$$\eta_4(u) = -y - \left(b_i + r_j\right),\ \eta_5(u) = z - c_i,\ \eta_6(u) = -z - \left(c_i + w_j\right);$$

$$\psi_k(u) = \begin{cases} \psi_{2k}(u), & k \in \{1,\ldots,4\} \\ \max\left\{\psi_{1k}(u), \psi_{2k}(u)\right\}, & k \in \{5,\ldots,8\} \end{cases},$$

$$\psi_{1k}(u) = \min\left\{\vartheta_k(u), \sigma_k(u), \theta_{1k}(u), \theta_{2k}(u), \theta_{3k}(u)\right\},$$

$$\psi_{2k}(u) = \min\left\{\omega_k(u), \delta_k(u), \kappa_{1k}(u), \kappa_{2k}(u), \kappa_{3k}(u)\right\};$$

$$\vartheta_k(u) = \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u) + \left(\phi_z(u) + \tau_j\right)^2} - \rho_j,$$

$$\sigma_k(u) = \frac{w_j}{r_j}\phi_x(u) + \frac{w_j}{r_j}\phi_y(u) + \phi_z(u) - w_j,$$

$$\theta_{1k}(u) = \frac{w_j}{r_j}\sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} + \phi_z(u) - w_j,$$

$$\theta_{2k}(u) = \sqrt{\phi_y^2(u) + \left(\phi_z(u) + \tau_j\right)^2} + \phi_x(u) - \rho_j,$$

$$\theta_{3k}(u) = \sqrt{\phi_x^2(u) + \left(\phi_z(u) + \tau_j\right)^2} + \phi_y(u) - \rho_j,$$

$$\omega_k(u) = \sqrt{\left(\sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} - r_j\right)^2 + \phi_z^2(u)},\ \delta_k(u) = \phi_x(u) + \phi_y(u) + C\phi_z(u) - r_j,$$

$$\kappa_{1k}(u) = \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} + C\phi_z(u) - r_j,\ \kappa_{2k}(u) = \sqrt{\left(\phi_y(u) - r_j\right)^2 + \phi_z^2(u)} + \phi_x(u),$$

$$\kappa_{3k}(u) = \sqrt{\left(\phi_x(u) - r_j\right)^2 + \phi_z^2(u)} + \phi_y(u);$$

$$\gamma_s(u) = \begin{cases} \varphi_s(u), & s \in \{1,\ldots,4\} \\ \varphi_{2s}(u), & s \in \{5,6,9,10\} \\ \max\left\{\varphi_{1s}(u), \varphi_{2s}(u)\right\}, & s \in \{7,8,11,12\} \end{cases},$$

$$\varphi_{k_1}(u)=\min\left\{\upsilon_{k_1}(u),\sigma_{k_1}(u)\right\},\ \varphi_{1k_2}(u)=\min\left\{\upsilon_{1k_2}(u),\sigma_{1k_2}(u)\right\},$$

$$\varphi_{2k_2}(u)=\min\left\{\upsilon_{2k_2}(u),\sigma_{2k_2}(u)\right\},\ \varphi_{1k_3}(u)=\min\left\{\upsilon_{1k_3}(u),\sigma_{1k_3}(u)\right\},$$

$$\varphi_{2k_3}(u)=\min\left\{\upsilon_{2k_3}(u),\sigma_{2k_3}(u)\right\},$$

$$\upsilon_{k_1}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}-r_j,\ \sigma_{k_1}(u)=\phi_x(u)+\phi_y(u)-r_j,$$

$$\upsilon_{1k_2}(u)=\sqrt{\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)+\tau_j\right)^2}-\rho_j,\ \sigma_{1k_2}(u)=\frac{w_j}{r_j}\phi_y(u)+\phi_z(u)-w_j,$$

$$\upsilon_{2k_2}(u)=\sqrt{\left(\phi_y(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)},\ \sigma_{2k_2}(u)=\phi_y(u)+C\phi_z(u)-r_j,$$

$$\upsilon_{1k_3}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\left(\phi_z(u)+\tau_j\right)^2}-\rho_j,\ \sigma_{1k_3}(u)=\frac{w_j}{r_j}\phi_x(u)+\phi_z(u)-w_j,$$

$$\upsilon_{2k_3}(u)=\sqrt{\left(\phi_x(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)},\ \sigma_{2k_3}(u)=\phi_x(u)+C\phi_z(u)-r_j,$$

$$C=\begin{cases}1, & k\in\{1,\ldots,4\},k_2\in\{5,6\},k_3\in\{9,10\}\\ \dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}, & k\in\{5,\ldots,8\},k_2\in\{7,8\},k_3\in\{11,12\}\end{cases},$$

$$\phi_x(u)=(-1)^{k_x}\cdot x-a_i,\ \phi_y(u)=(-1)^{k_y}\cdot y-b_i,\ \phi_z(u)=(-1)^{k_z}\cdot z-c_i,$$

$$k_1=k_x+2k_y+1,$$

$$k_2=k_y+2k_z+5,\ k_3=k_x+2k_z+9,\ k=k_x+2k_y+4k_z+1,\ k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}. \quad (2.9)$$

Аналогічним чином побудуємо Ф-функцію для випадку $\tau_j<0$:

$$\Phi_-^{PG}(u_i,u_j)=\max_{k=1,2,3}\chi_k(u_j-u_i),$$

де

$$\chi_1(u)=\max_{l=1,\ldots,6}\eta_l(u),\ \chi_2(u)=\max_{k=1,\ldots,8}\psi_k(u),\ \chi_3(u)=\max_{s=1,\ldots,12}\gamma_s(u),$$

$$\eta_1(u)=x-(a_i+\rho_j),\ \eta_2(u)=y-(b_i+\rho_j),\ \eta_3(u)=-x-(a_i+\rho_j),$$

$$\eta_4(u)=-y-(b_i+\rho_j),\ \eta_5(u)=z-c_i,\ \eta_6(u)=-z-(c_i+w_j);$$

$$\psi_k(u)=\begin{cases}\max\{\psi_{1k}(u),\psi_{2k}(u)\}, & k\in\{1,\ldots,4\}\\ \psi_{1k}(u), & k\in\{5,\ldots,8\}\end{cases},$$

$$\psi_{1k}(u)=\min\{\vartheta_k(u),\sigma_k(u),\theta_{1k}(u),\theta_{2k}(u),\theta_{3k}(u)\},$$

$$\psi_{2k}(u)=\min\{\omega_k(u),\delta_k(u),\kappa_{1k}(u),\kappa_{2k}(u),\kappa_{3k}(u)\},$$

$$\vartheta_k(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)+(-1)^m\tau_j\right)^2}-\rho_j,$$

$$\sigma_k(u)=\begin{cases}\phi_x(u)+\phi_y(u)-\dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}\phi_z(u)-r_j, & k\in\{1,\ldots,4\}\\ \phi_x(u)+\phi_y(u)+\phi_z(u)-w_j, & k\in\{5,\ldots,8\}\end{cases},$$

$$\theta_{1k}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}+\phi_z(u)-\left(\tau_j+\rho_j\right),$$

$$\theta_{2k}(u)=\sqrt{\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)+(-1)^m\tau_j\right)^2}+\phi_x(u)-\rho_j,$$

$$\theta_{3k}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\left(\phi_z(u)+(-1)^m\tau_j\right)^2}+\phi_y(u)-\rho_j\ ,$$

$$\omega_k(u)=\sqrt{\left(\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)},$$

$$\delta_k(u)=\frac{r_j}{w_j}\left(\phi_x(u)+\phi_y(u)\right)+\phi_z(u)-\left(\tau_j+\rho_j\right),$$

$$\kappa_{1k}(u)=\frac{r_j}{w_j}\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}+\phi_z(u)-\left(\tau_j+\rho_j\right),$$

$$\kappa_{2k}(u)=\sqrt{\left(\phi_y(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)}+\phi_x(u),\ \kappa_{3k}(u)=\sqrt{\left(\phi_x(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)}+\phi_y(u);$$

$$\gamma_s(u)=\begin{cases}\varphi_s(u), & s\in\{1,\ldots,4\}\\ \max\{\varphi_{1s}(u),\varphi_{2s}(u)\}, & s\in\{5,6,9,10\}\\ \varphi_{1s}(u), & s\in\{7,8,11,12\}\end{cases},$$

$$\upsilon_{k_1}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}-\rho_j,\ \sigma_{k_1}(u)=\phi_x(u)+\phi_y(u)-\rho_j,$$

$$\upsilon_{1k_2}(u)=\sqrt{\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)+(-1)^m\tau_j\right)^2}-\rho_j;$$

$$\sigma_{1k_2}(u)=\begin{cases}\phi_y(u)-\dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}\left(\phi_z(u)-\tau_j\right)-\rho_j, & k_2\in\{5,6\}\\ \phi_y(u)+\phi_z(u)-w_j, & k_2\in\{7,8\}\end{cases},$$

$$\upsilon_{2k_2}(u)=\sqrt{\left(\phi_y(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)},\ \ \sigma_{2k_2}(u)=\frac{r_j}{w_j}\phi_y(u)+\phi_z(u)-\left(\tau_j+\rho_j\right),$$

$$\upsilon_{1k_3}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\left(\phi_z(u)+(-1)^m\tau_j\right)^2}-\rho_j,$$

$$\sigma_{1k_3}(u)=\begin{cases}\phi_x(u)-\dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}\left(\phi_z(u)-\tau_j\right)-\rho_j, & k_3\in\{9,10\}\\ \phi_x(u)+\phi_z(u)-w_j, & k_3\in\{11,12\}\end{cases},$$

$$\upsilon_{2k_3}(u)=\sqrt{\left(\phi_x(u)-r_j\right)^2+\phi_z^2(u)},\ \sigma_{2k_3}(u)=\frac{r_j}{w_j}\phi_x(u)+\phi_z(u)-\left(\tau_j+\rho_j\right),$$

$$\varphi_{k_1}(u)=\min\left\{\upsilon_{k_1}(u),\sigma_{k_1}(u)\right\},\ \varphi_{1k_2}(u)=\min\left\{\upsilon_{1k_2}(u),\sigma_{1k_2}(u)\right\},$$

$$\varphi_{2k_2}(u)=\min\left\{\upsilon_{2k_2}(u),\sigma_{2k_2}(u)\right\},\ \varphi_{1k_3}(u)=\min\left\{\upsilon_{1k_3}(u),\sigma_{1k_3}(u)\right\},$$

$$\varphi_{2k_3}(u)=\min\left\{\upsilon_{2k_3}(u),\sigma_{2k_3}(u)\right\},$$

$$m=\begin{cases}1, & k\in\{1,\ldots,4\},k_2\in\{5,6\},k_3\in\{9,10\}\\ 2, & k\in\{5,\ldots,8\},k_2\in\{7,8\},k_3\in\{11,12\}\end{cases},$$

$$\phi_x(u)=(-1)^{k_x}\cdot x-a_i,\ \phi_y(u)=(-1)^{k_y}\cdot y-b_i,\ \phi_z(u)=(-1)^{k_z}\cdot z-c_i,$$

$$k_1=k_x+2k_y+1,\ k_2=k_y+2k_z+5,\ k_3=k_x+2k_z+9,\ k=k_x+2k_y+4k_z+1,$$

$$k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}.$$

2.3.8 Ф-функція сфероциліндра і сегменту кулі

Ф-функція залежить від того, чи перевищує висота сегмента G_j радіус кулі, з якої він утворений ($\tau_j\geq 0$).

Нехай $\tau_j \geq 0$. Тоді нормалізована Ф-функція сфероциліндра $sC_i(u_i)$ і сегменту кулі $G_j(u_j)$ може бути записана, як

$$\Phi_+^{sCG}(u_i, u_j) = \max_{k=1,\ldots,7} \phi_k(u_j - u_i),$$

де $\phi_k(u) = \min\{\theta_k(u), \omega_k(u)\}$, $k \in \{1,\ldots,4\}$, $\phi_5(u) = \min\{\vartheta(u), \sigma(u)\}$,

$\phi_6(u) = z - (w_{1i} + h_i)$, $\phi_7(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_{ij}$,

$$\theta_k(u) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + (-1)^{k-1}\dfrac{r_i - w_{1k}}{r_i + w_{1k}} z - \left(R_{ij} + \dfrac{r_i - w_{1k}}{r_i + w_{1k}} h_i \right), & f(\mu) < 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} + (-1)^{k-1}\dfrac{r_j - w_j}{r_j + w_j} z - \left(R_{ij} + \dfrac{r_j - w_j}{r_j + w_j} h_i \right), & f(\mu) \geq 0 \end{cases}, \; k \in \{i, j\},$$

$$\theta_3(u) = \frac{w_{1i}}{r_i}\sqrt{x^2+y^2} + z - \left(\frac{w_{1i}}{r_i} R_{ij} + h_i \right),$$

$$\theta_4(u) = \frac{2}{\lambda}\left(\lambda_1 \sqrt{x^2+y^2} - \lambda_2 z - (\lambda_1 R_{ij} + \lambda_2 h_i) \right),$$

$$\omega_t(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - R_{ij}\right)^2 + \left(z + (-1)^t h_i\right)^2}, \; t \in \{1, 2\},$$

$$\omega_3(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_j\right)^2 + (z + \tau_{1i} - h_i)^2} - \rho_{1i},$$

$$\omega_4(u) = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_j\right)^2 + (z - \tau_{2i} + h_i)^2} - \rho_{2i}, & f(\mu) < 0 \\ \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_i\right)^2 + (z - \tau_j + h_i)^2} - \rho_j, & f(\mu) \geq 0 \end{cases},$$

$$\vartheta(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \tau_{2i} - \tau_j + h_i)^2} - (\rho_{2i} + \rho_j),$$

$$\sigma(u)=\begin{cases}-z-\left(w_{2i}-\rho_{2i}\dfrac{w_j}{\rho_j}+h_i\right), & f(\mu)<0\\ -z-\left(w_j-\rho_j\dfrac{w_{2i}}{\rho_{2i}}+h_i\right), & f(\mu)\geq 0\end{cases},\ \lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2,\ \lambda_1=\frac{r_i}{\rho_{2i}}+\frac{r_j}{\rho_j},$$

$$\lambda_2=\frac{\tau_{2i}}{\rho_{2i}}+\frac{\tau_j}{\rho_j},\ f(\mu)=\frac{\tau_{2i}}{\rho_{2i}}-\frac{\tau_j}{\rho_j}.$$

В разі $\tau_j<0$ нормалізована Ф-функція для цих тривимірних тіл набуває вигляду

$$\Phi_-^{sCG}(u_i,u_j)=\max_{k=1,\ldots,7}\phi_k(u_j-u_i),$$

де

$$\phi_k(u)=\min\{\theta_k(u),\omega_k(u)\},\ k\in\{1,\ldots,4\},\ \phi_5(u)=\min\{\vartheta(u),\sigma(u)\},$$

$$\phi_6(u)=z-(w_{1i}+h_i),\ \phi_7(u)=\sqrt{x^2+y^2}-(r_i+\rho_j),$$

$$\theta_1(u)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{r_i-w_{1i}}{r_i+w_{1i}}z-\left(r_i+\rho_j+\dfrac{r_i-w_{1i}}{r_i+w_{1i}}(\tau_j+h_i)\right), & g(\mu)<0\\ \sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{r_i-w_{1i}}{r_i+w_{1i}}z-\left(r_i+\rho_j+\dfrac{r_i-w_{1i}}{r_i+w_{1i}}(-\tau_j+h_i)\right), & g(\mu)\geq 0\end{cases},$$

$$\theta_2(u)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{r_i-w_{2i}}{r_i+w_{2i}}z-\left(r_i+\rho_j-\dfrac{r_i-w_{2i}}{r_i+w_{2i}}(\tau_j-h_i)\right), & g(\mu)<0\\ \sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}z-\left(r_i+\rho_j-\dfrac{r_j-w_j}{r_j+w_j}(\tau_j+h_i)\right), & g(\mu)\geq 0\end{cases},$$

$$\theta_3(u)=\begin{cases}\dfrac{r_j}{w_j}\sqrt{x^2+y^2}+z-(2\rho_j-w_j+w_{1i}+h_i), & g(\mu)<0\\ \dfrac{w_{1i}}{r_i}\sqrt{x^2+y^2}+z-\left(\dfrac{w_{1i}}{r_i}r_j+w_{1i}+h_i\right), & g(\mu)\geq 0\end{cases},$$

$$\theta_4(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}\left[\lambda_1\sqrt{x^2+y^2}+\lambda_2 z-\left(\dfrac{r_i}{\rho_{1i}}\lambda_1\left(\rho_{1i}+\rho_j\right)+\lambda_2\left(\tau_j+\rho_j\dfrac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}+h_i\right)\right)\right], & g(\mu)<0\\ \dfrac{2}{\lambda}\left[\lambda_1\sqrt{x^2+y^2}+\lambda_2 z-\left(\lambda_1 R_{ij}+\lambda_2 h_i\right)\right], & g(\mu)\geq 0\end{cases}$$

,

$$\omega_k(u)=\begin{cases}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z-\tau_j+(-1)^k h_i\right)^2}-\rho_j, & g(\mu)<0\\ \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_i\right)^2+\left(z-\tau_j+(-1)^{k-1} h_i\right)^2}-\rho_j, & g(\mu)\geq 0\end{cases},\ k\in\{1,2\},$$

$$\omega_3(u)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_j\right)^2+\left(z+\tau_{1i}-h_i\right)^2}-\rho_{1i},$$

$$\omega_4(u)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\tau_{1i}-\tau_j-h_i\right)^2}-\left(\rho_{1i}+\rho_j\right), & g(\mu)<0\\ \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{ij}\right)^2+\left(z-h_i\right)^2}, & g(\mu)\geq 0\end{cases},$$

$$\vartheta(u)=\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\tau_{2i}-\tau_j+h_i\right)^2}-\left(\rho_{2i}+\rho_j\right),\ \sigma(u)=-z-\left(w_j-\rho_j\frac{w_{2i}}{\rho_{2i}}+h_i\right);$$

$$\lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2,\ \lambda_1=\frac{r_i}{\rho_{1i}}+\frac{r_j}{\rho_j},\ \lambda_2=\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}-\frac{\tau_j}{\rho_j},\ g(\mu)=\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}+\frac{\tau_j}{\rho_j}.$$

2.3.9 Ф-функція паралелепіпеду та сфероциліндру

Нормалізована Ф-функція для прямокутного паралелепіпеда $P_i(u_i)$ і сфероциліндра $sC_j(u_j)$ може бути записана у вигляді

$$\Phi^{PsC}(u_i,u_j)=\max_{k=1,2,3}\chi_k(u_j-u_i),$$

де

$$\chi_1(u)=\max_{l=1,\ldots,6}\eta_l(u),\ \chi_2(u)=\max_{k=1,\ldots,8}\psi_k(u),\ \chi_3(u)=\max_{s=1,\ldots,12}\varpi_s(u),$$

$$\eta_1(u)=x-\left(a_i+r_j\right),\ \eta_2(u)=y-\left(b_i+r_j\right),\ \eta_3(u)=-x-\left(a_i+r_j\right),$$

$$\eta_4(u)=-y-\left(b_i+r_j\right),\ \eta_5(u)=z-\left(c_i+h_j+w_{2j}\right),\ \eta_6(u)=-z-\left(c_i+h_j+w_{1j}\right);$$

$$\psi_{1k}(u)=\min\left\{\vartheta_k(u),\sigma_k(u),\theta_{1k}(u),\theta_{2k}(u),\theta_{3k}(u)\right\},$$

$$\psi_{2k}(u)=\min\left\{\omega_k(u),\theta_k(u),\delta_k(u)\right\},\ \psi_k(u)=\max\left\{\psi_{1k}(u),\psi_{2k}(u)\right\},$$

$$\vartheta_k(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)-h_j+\tau_{mj}\right)^2}-\rho_{mj},$$

$$\sigma_k(u)=\frac{w_{mj}}{r_j}\phi_x(u)+\frac{w_{mj}}{r_j}\phi_y(u)+\phi_z(u)-h_j-w_{mj},$$

$$\theta_{1k}(u)=\frac{w_{mj}}{r_j}\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}+\phi_z(u)-h_j-w_{mj},$$

$$\theta_{2k}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\left(\phi_z(u)-h_j+\tau_{mj}\right)^2}+\phi_y(u)-\rho_{mj},$$

$$\theta_{3k}(u)=\sqrt{\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)-h_j+\tau_{mj}\right)^2}+\phi_x(u)-\rho_{mj},$$

$$\omega_k(u)=\sqrt{\left(\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}-r_j\right)^2+\left(\phi_z(u)-h_j\right)^2},$$

$$\theta_k(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}+\frac{\tau_{mj}}{\rho_{mj}+r_j}\left(\phi_z(u)-h_j\right)-r_j,$$

$$\delta_k(u)=\phi_x(u)+\phi_y(u)+\frac{\tau_{mj}}{\rho_{mj}+r_j}\left(\phi_z(u)-h_j\right)-r_j;$$

$$\varpi_{k_1}(u)=\min\left\{\upsilon_{k_1}(u),\vartheta_{k_1}(u)\right\},\varpi_{tk_2}(u)=\min\left\{\upsilon_{tk_2}(u),\vartheta_{tk_2}(u)\right\},$$

$$\varpi_{tk_3}(u)=\min\left\{\upsilon_{tk_3}(u),\vartheta_{tk_3}(u)\right\},\ t\in\{1,2\},$$

$$\varpi_{k_2}(u)=\max\left\{\varpi_{1k_2}(u),\varpi_{2k_2}(u)\right\},\ \varpi_{k_3}(u)=\max\left\{\varpi_{1k_3}(u),\varpi_{2k_3}(u)\right\},$$

$$\upsilon_{k_1}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\phi_y^2(u)}-r_j,\ \vartheta_{k_1}(u)=\phi_x(u)+\phi_y(u)-r_j,$$

$$\upsilon_{1k_2}(u)=\sqrt{\phi_y^2(u)+\left(\phi_z(u)-h_j+\tau_{mj}\right)^2}-\rho_{mj},\ \vartheta_{1k_2}(u)=\frac{w_{mj}}{r_j}\phi_y(u)+\phi_z(u)-h_j-w_{mj},$$

$$\upsilon_{1k_3}(u)=\sqrt{\phi_x^2(u)+\left(\phi_z(u)-h_j+\tau_{mj}\right)^2}-\rho_{mj},\ \vartheta_{1k_3}(u)=\frac{w_{mj}}{r_m}\phi_x(u)+\phi_z(u)-h_j-w_{mj},$$

$$\upsilon_{2k_2}(u)=\sqrt{\left(\phi_y(u)-r_j\right)^2+\left(\phi_z(u)-h_j\right)^2},$$

$$\vartheta_{2k_2}(u)=\phi_x(u)+\frac{\tau_{mj}}{\rho_{mj}+r_j}\left(\phi_z(u)-h_j\right)-r_j,$$

$$\upsilon_{2k_3}(u)=\sqrt{\left(\phi_x(u)-r_j\right)^2+\left(\phi_z(u)-h_j\right)^2},$$

$$\vartheta_{2k_3}(u)=\phi_x(u)+\frac{\tau_{mj}}{\rho_{mj}+r_j}\left(\phi_z(u)-h_j\right)-r_j,$$

$$m=\begin{cases}1, & k\in\{1,\ldots,4\},k_2\in\{7,8\},k_3\in\{11,12\}\\ 2, & k\in\{5,\ldots,8\},k_2\in\{5,6\},k_3\in\{9,10\}\end{cases},$$

$\phi_x(u)=(-1)^{k_x}\cdot x-a_i$, $\phi_y(u)=(-1)^{k_y}\cdot y-b_i$, $\phi_z(u)=(-1)^{k_z}\cdot z-c_i$,

$k_1=k_x+2k_y+1$, $k_2=k_y+2k_z+5$, $k_3=k_x+2k_z+9$, $k=k_x+2k_y+4k_z+1$,

$k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}$.

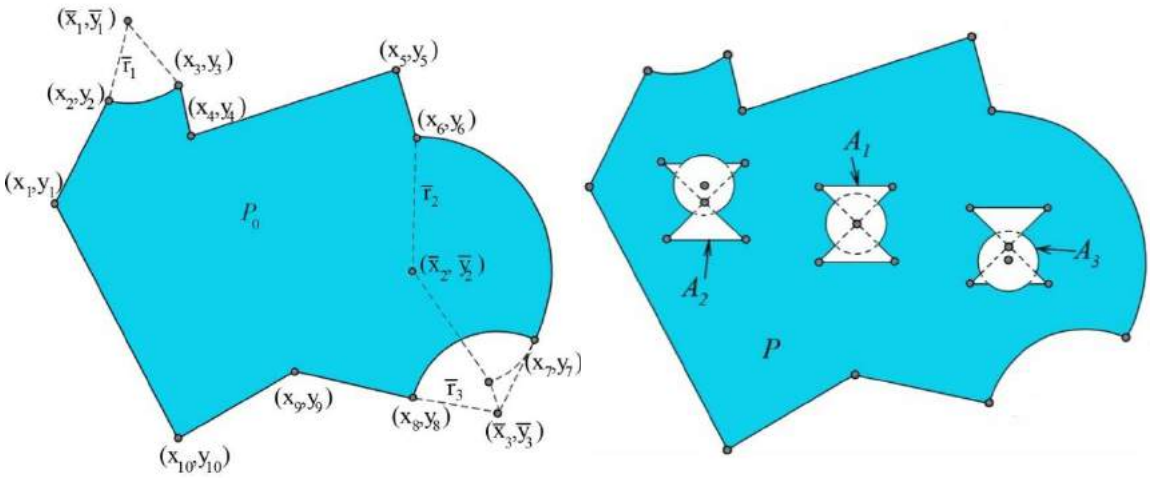
2.3.10 Умова включення циліндру у пряму призму, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл

Розглянемо умову включення циліндру у пряму призму, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл. Нехай основою такої призми є багатозв’язна область $P\subset R^2$. При цьому вважаємося, що P сформована в такий спосіб (рис. 2.19): $P=P_0\setminus\operatorname{int}\bigcup_{l=1}^{\sigma}A_l$, де $\operatorname{int}(\cdot)$ – внутрішність; P_0 - однозв'язна множина, границя якої сформована послідовністю відрізків прямих $\left[x_i,y_i,x_{i+1},y_{i+1}\right]$ і дуг кіл $\left[x_i,y_i,x_{i+1},y_{i+1},\overline{x}_j,\overline{y}_j,\overline{r}_j\right]$ (рис. 2.19 а); (x_i,y_i) і (x_{i+1},y_{i+1}) – координати кінців прямих відрізків або дуги; $(\overline{x}_j,\overline{y}_j)$ і $\overline{r}_j$ – координати центру й радіус кола відповідно;

$A_l=\left(\bigcup_{g=1}^{\psi}C_{lg}\right)\bigcup\left(\bigcup_{q=1}^{\vartheta}M_{lq}\right), l\in I_\sigma=\{1,2,...,\sigma\}$,– області заборони ;

$C_{lg}=\{(x,y)\in R^2:(x-x_{lg}^0)^2+(y-y_{lg}^0)^2-(\rho_{lg}^0)^2\le 0\}$, $g\in I_\psi=\{1,2,...,\psi\}$;

M_{lq} – опуклий багатокутник, заданий m_{lq} вершинами, $q \in I_{\vartheta} = \{1, 2, ..., \vartheta\}$, тобто кожна область заборони – неопукла множина, яка може бути представлена кінцевим об'єднанням різних кіл та опуклих багатокутників.



а б

Рис. 2.19. Основа контейнеру P:

а) однозв'язна область P_0; б) багатозв'язна область P

Для того, щоб формалізувати умови розміщення циліндрів C_i в межах P за допомогою Φ - функції введемо наступну множину $G = R^2 \setminus \operatorname{int} P_0$.

Ця множина може бути завжди представлена кінцевим об'єднанням основних тривимірних тіл $Q_{ij}, i = 1, 2, 3, 4$, наведених на рис. 2.20, тобто

$$G = \left(\bigcup_{j=1}^{\delta} Q_{1j} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\gamma} Q_{2j} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\xi} Q_{3j} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\zeta} Q_{4j} \right),$$

де

$Q_{1j} = \{(x, y) \in R^2 : \chi_{1j}(x, y) \geq 0\}$, $j \in J_{\delta} = \{1, 2, ..., \delta\}$;

$\chi_{1j}(x, y) = a_{1j} x + b_{1j} y + c_{1j}$;

$Q_{2j} = \{(x, y) \in R^2 : \chi_{2jl}(x, y) \geq 0, l = 1, 2\}$, $j \in J_{\gamma} = \{1, 2, ..., \gamma\}$;

$\chi_{2jl}(x,y) = a_{2jl}x + b_{2jl}y + c_{2jl}$;

$Q_{3j} = \{(x,y) \in R^2 : \widehat{\omega}_{3j}(x,y) \geq 0\}$, $j \in J_\xi = \{1,2,...,\xi\}$;

$\widehat{\omega}_{3j}(x,y) = \widehat{r}_j^2 - (x - \widehat{x}_j)^2 - (y - \widehat{y}_j)^2$;

$Q_{4j} = \{(x,y) \in R^2 : \chi_{4jl}(x,y) \geq 0, \breve{\omega}_{4j}(x,y) \geq 0, l = 1,2\}$, $j \in J_\zeta = \{1,2,...,\zeta\}$;

$\chi_{4jl}(x,y) = a_{4jl}x + b_{4jl}y + c_{4jl}$;

$\breve{\omega}_{4j}(x,y) = (x - \breve{x}_j)^2 + (y - \breve{y}_j)^2 - \breve{r}_j^2$;

$\rho(A,B) \geq 2r$;

$\rho(A,B)$ – відстань між точками A і B.

У такий спосіб Q_{1j} – півплощина, Q_{2j} – опуклий конус, Q_{3j} – коло й Q_{4j} – перетинання півплощини й доповнення кола до R^2

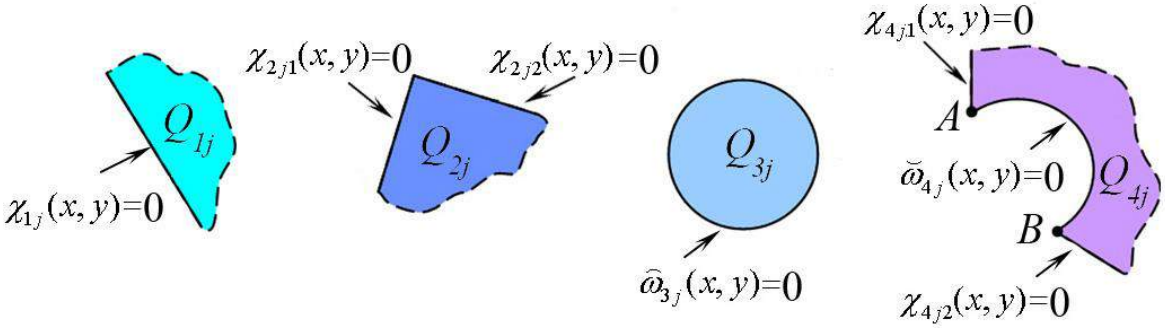


Рис. 2.20. Тіла Q_{1j}, Q_{2j}, Q_{3j}, Q_{4j}

Наприклад, набір G для області P_0, зображений на рис. 2.19, може бути отриманий у такий спосіб (рис. 2.21):

$$G = \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{1j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{2j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{3j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{1} Q_{4j}\right).$$

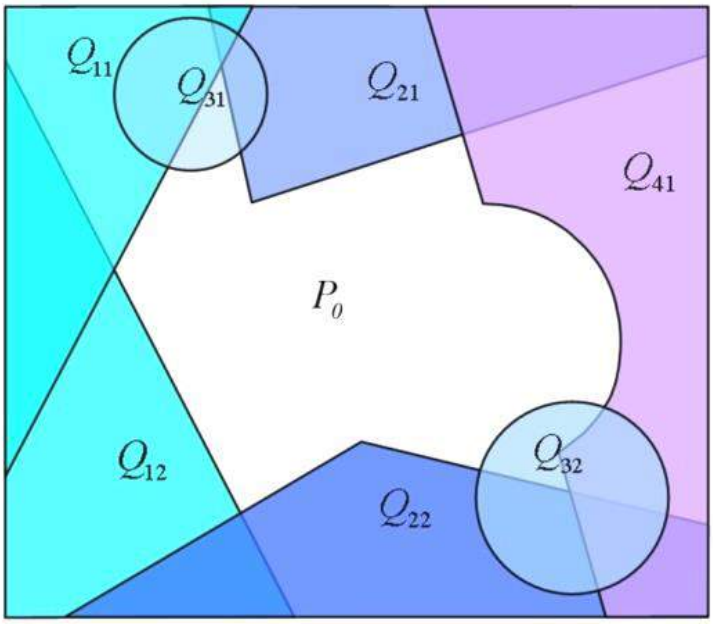


Рис. 2.21. Представлення множини G

Ф-функція для C_i та $G_1 = cl(R^2 \setminus P)$ може бути представлена в такий спосіб:

$$\Phi_i(u_i, r_i) = \min\left\{\Phi_{il}^{CA}(u_i, r_i),\ \Phi_i^{CG}(u_i, r_i),\ \ l \in I_\sigma\right\},$$

де

$\Phi_{il}^{CA}(u_i, r_i) = \min\left\{\Phi_{ilg}^{CC}(u_i, r_i), \Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i), g \in I_\psi, q \in I_\vartheta\right\}$ – Ф-функція для C_i й A_l;

$\Phi_{ilg}^{CC}(u_i, r_i) = (x_i - x_{lg}^0)^2 + (y_i - y_{lg}^0)^2 - (r_i + \rho_{lg}^0)^2$ – Ф-функція для C_i й C_{lg};

$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) = \max\limits_{k=1,2,\ldots,m_{lq}} \left\{\max\left\{\min\{\psi_{ilqk}(u_i, r_i), \omega_{ilqk}(u_i, r_i)\}, \chi_{ilqk}^*(u_i, r_i)\right\}\right\}$ –

Ф-функція для C_i та M_{lq};

$\Phi_i^{CG}(u_i, r_i) = \min\begin{Bmatrix} \Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i, r_i),\ j \in I_\delta, \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i),\ j \in I_\gamma, \\ \Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i, r_i),\ j \in I_\xi, \Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i),\ j \in J_\zeta \end{Bmatrix}$ – Ф-функція для C_i й G;

$\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i, r_i) = \chi_{i1j}^*(u_i, r_i) = -\chi_{1j}(u_i) - r_i$;

$\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) = \max\left\{\min\{\psi_{ij}(u_i, r_i), \omega_{ij}(u_i, r_i)\}, \chi_{i2j1}^*(u_i, r_i), \chi_{i2j2}^*(u_i, r_i)\right\}$;

$\Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i)=(x_i-\hat{x}_j)^2+(y_i-\hat{y}_j)^2-(r_i+\hat{r}_j)^2$;

$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)=\max\left\{\varphi_{ij1}(u_i,r_i),\varphi_{ij2}(u_i,r_i),\varphi_{ij3}(u_i,r_i),\omega_{ij3}(u_i,r_i),\chi_{i4j1}^{*}(u_i,r_i),\chi_{i4j2}^{*}(u_i,r_i)\right\}$;

$\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i),\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i),\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$ – Ф-Функції для C_i й Q_{1j}, C_i і Q_{2j}, C_i і Q_{3j}, C_i і Q_{4j} відповідно.

Компоненти функції $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$ мають вигляд:

$\varphi_{ij1}(u_i,r_i)=\min\left\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\omega_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij3}(u_i,r_i)\right\}$,

$\varphi_{ij2}(u_i,r_i)=\min\left\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij4}(u_i,r_i)\right\}$, $\varphi_{ij3}(u_i,r_i)=\min\left\{\omega_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij5}(u_i,r_i)\right\}$,

$\omega_{ij1}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j1})^2+(y_i-y_{j1})^2-r_i^2$, $\omega_{ij2}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j2})^2+(y_i-y_{j2})^2-r_i^2$,
$\omega_{ij3}(u_i,r_i)=(\breve{r}_j-r_i)^2-(x_i-\breve{x}_j)^2-(y_i-\breve{y}_j)^2$,

$\psi_{ij1}(u_i,r_i)=a_{j1}x_i+b_{j1}y_i+c_{j1}$, $a_{1j}=y_{j4}-y_{j3}$, $b_{j1}=-(x_{j4}-x_{j3})$,
$c_{1j}=-(a_{1j}x_{j3}+b_{1j}y_{j3})$,

$\psi_{ij2}(u_i,r_i)=a_{j2}x_i+b_{j2}y_i+c_{j2}$, $a_{j2}=y_{j6}-y_{j5}$, $b_{j2}=-(x_{j6}-x_{j5})$,
$c_{j2}=-(a_{j2}x_{j5}+b_{j2}y_{j5})$,

$\psi_{ij3}(u_i,r_i)=a_{j3}x_i+b_{j3}y_i+c_{j3}$, $a_{j3}=y_{j5}-y_{j4}$, $b_{j3}=-(x_{j5}-x_{j4})$,
$c_{j3}=-(a_{j3}x_5+b_{j3}y_5)$,

$\psi_{ij4}(u_i,r_i)=a_{j4}x_i+b_{j4}y_i+c_{j4}$, $a_{j4}=y_{j3}-y_{j7}$, $b_{j4}=-(x_{j3}-x_{j7})$,
$c_{j4}=-(a_{j4}x_{j3}+b_{j4}y_{j3})$,

$\psi_{ij5}(u_i,r_i)=a_{j5}x_i+b_{j5}y_i+c_{j5}$, $a_{j5}=y_{j8}-y_{j6}$, $b_{j5}=-(x_{j8}-x_{j6})$,
$c_{j5}=-(a_{j5}x_{j6}+b_{j5}y_{j6})$,

$\chi_{i4j1}^{*}(u_i,r_i)=-\chi_{4j1}(u_i)-r_i$, $\chi_{i4j2}^{*}(u_i,r_i)=-\chi_{4j2}(u_i)-r_i$,

де (x_{j1},y_{j1}), (x_{j2},y_{j2}), (x_{j3},y_{j3}), (x_{j4},y_{j4}), (x_{j5},y_{j5}), (x_{j6},y_{j6}), (x_{j7},y_{j7}) і (x_{j8},y_{j8}) – координати точок A, Б, D, E, F, G, M і N відповідно (рис. 2.22).

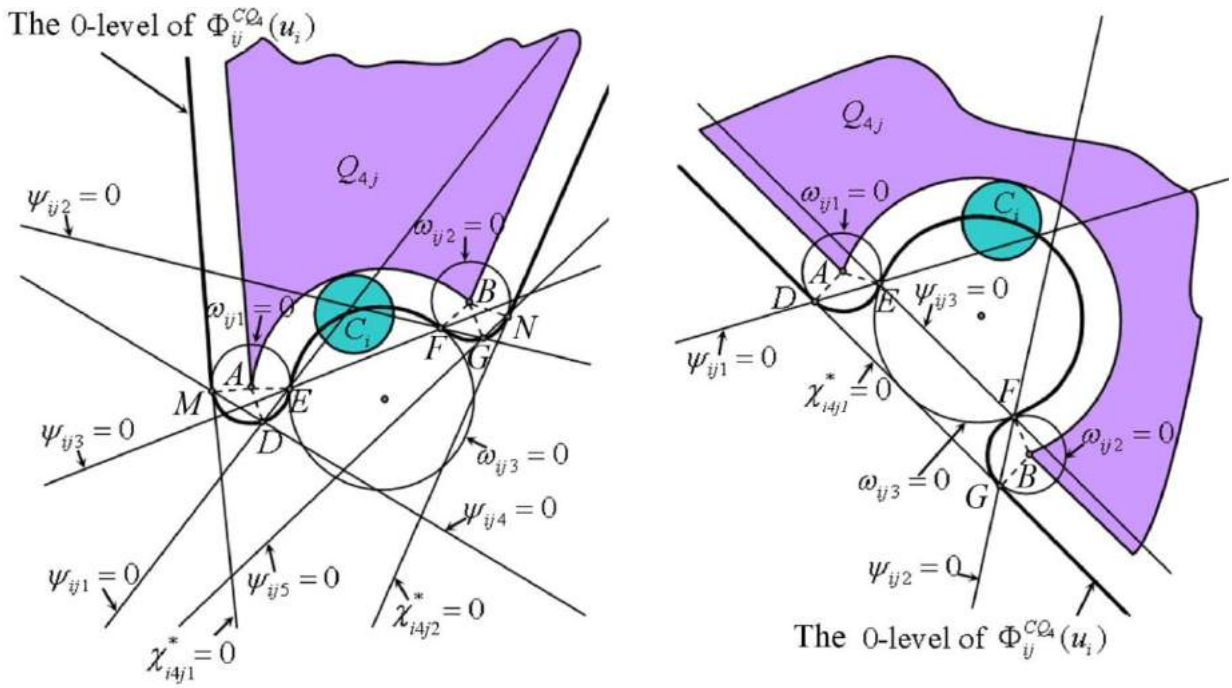


Рис. 2.22. 0-рівень $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i)$

Якщо границя Q_{4j} сформована однієї прямою лінією (рис. 2.22), тоді $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i)$ може бути записана в більш простій формі:

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)=\max\left\{\varphi_{ij1}(u_i,r_i),\omega_{ij3}(u_i,r_i),\chi^*_{i4j1}(u_i,r_i)\right\}.$$

2.4 Висновки за розділом 2

В другому розділі сформульовано основні положення, необхідні для побудови конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання відношень між геометричними об'єктами, що виникають у задачах оптимальної упаковки тривимірних тіл.

В роботі як математичні моделі реальних тривимірних тіл використовуються зв'язні обмежені 3D тіла. Усю множину тривимірних тіл, які розглядаються у роботі можна поділити на дві основні групи. До першої групи відносяться опуклі тривимірні тіла, поверхня яких утворена циліндричними, конічними та сферичними поверхнями, та їх еквідистантні поверхні. До другої групи відносяться неопуклі багатогранні тіла та довільні

тривимірні тіла, що можуть бути апроксимовані за допомогою багатогранних тіл.

Одна з найбільш важливих і складних задач комп'ютерного та математичного моделювання задач упаковки тривимірних геометричних тіл – це аналітичний опис взаємодії між об’єктами.

Як засіб математичного моделювання взаємовідносин тривимірних тіл було обрано метод Ф-функцій. Розглянуто основи методу Ф-функції як конструктивного засобу математичного моделювання взаємодії тривимірних тіл в задачах оптимальної упаковки.

Побудовано клас Ф-функцій для орієнтованих (які мають наперед задану орієнтацію, що не може змінюватись при пошуку розв’язку задачі) тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами. Побудовано нормалізовані Ф-функції для наступних пар тривимірних тіл: два сегмента кулі, сегмент кулі і куля, сегмент кулі і циліндр, сегмент кулі і прямокутний паралелепіпед, сегмент кулі і сфероциліндр, сфероциліндр і прямокутний паралелепіпед, сфероциліндр та циліндр, два сфероциліндра.

Результати другого розділу опубліковано у таких роботах: [2-6],[16-19],[35-39],[46-47].

РОЗДІЛ 3
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ НЕОРІЄНТОВАНИХ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

Аналіз сучасних публікацій з розміщення тривимірних тіл показав, що у жодній з відомих робіт не розв'язується задача упаковки тривимірних тіл з урахуванням можливості одночасного неперервного обертання та трансляції. Наприклад, у роботі [102] через складність побудови адекватної математичної моделі та проведення великого об'єму обчислень автори використовують лише дискретні повороти тривимірних тіл.

Для побудови точних математичних моделей таких задач в цьому розділі будуються Ф-функції для тривимірних тіл, що дозволяють виконувати над ними операції одночасного повороту та трансляції. Такі тривимірні тіла надалі будуть називатись неорієнтованими.

3.1 Ф-функція для двох опуклих неорієнтованих багатогранних тіл

Нехай задані опуклі багатогранні тіла

$$P_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : f_{ij}(X) = A_{ij}x + B_{ij}y + C_{ij}z + D_{ij} \le 0,\ j \in G_i = \{1, 2, ..., \delta_i\} \right\},$$
$$i = 1, 2.$$

Введемо наступні позначення: H_{ij} – грані P_i, $j \in G_i$; $p_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ - вершини P_i, $j \in W_i = (1, 2, ..., w_i)$, задані щодо власної системи координат $O_i x_i' y_i' z_i'$ багатогранного тіла P_i ; $e_{it} = [p_{it_1}, p_{it_2}]$ – ребра P_i , $t \in T_i = \{1, 2, ..., \zeta_i\}$, $t_1, t_2 \in W_i$ (згідно формули Ейлера $\zeta_i = w_i + \delta_i - 2$).

Багатогранник P_i може бути трансльований на вектор $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ і повернутий на кути $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$, навколо осей *Ox*, *Oy* и *Oz* відповідно. Матрицю перетворення повороту, яка переводить точку, задану відносно поверненої на кути $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ власної системи координат $O_i x_i' y_i' z_i'$

багатогранного тіла P_i, у точку, задану відносно нерухомої системи координат $Oxyz$, представимо в наступному вигляді:

$$R_i = \begin{pmatrix} g_i \\ r_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

де

$$g_{i1} = \cos\beta_i \cos\gamma_i,$$
$$g_{i2} = -\cos\beta_i \sin\gamma_i,$$
$$g_{i3} = \sin\beta_i,$$
$$r_{i1} = \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \cos\alpha_i \sin\gamma_i,$$
$$r_{i2} = -\sin\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \cos\alpha_i \cos\gamma_i,$$
$$r_{i3} = -\sin\alpha_i \cos\beta_i,$$
$$q_{i1} = -\cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \sin\alpha_i \sin\gamma_i,$$
$$q_{i2} = \cos\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \sin\alpha_i \cos\gamma_i,$$
$$q_{i3} = \cos\alpha_i \cos\beta_i.$$

Виходячи з виду матриці (3.1), отримаємо матрицю перетворення, яка переводить точку з нерухомої системи координат $Oxyz$ у точку в системі координат $O_i x_i' y_i' z_i'$:

$$R_i' = \begin{pmatrix} g_i' \\ r_i' \\ q_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1}' & g_{i2}' & g_{i3}' \\ r_{i1}' & r_{i2}' & r_{i3}' \\ q_{i1}' & q_{i2}' & q_{i3}' \end{pmatrix},$$

де

$$g_{i1}' = \cos\beta_i \cos\gamma_i, \qquad r_{i1}' = -\sin\gamma_i \cos\beta_i,$$
$$g_{i2}' = \sin\gamma_i \cos\alpha_i + \cos\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i, \quad r_{i2}' = \cos\gamma_i \cos\alpha_i - \sin\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i,$$
$$g_{i3}' = \sin\gamma_i \sin\alpha_i - \cos\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i, \quad r_{i3}' = \sin\alpha_i \cos\gamma_i + \sin\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i,$$

$$q'_{i1} = \sin\beta_i,$$
$$q'_{i2} = -\cos\beta_i \sin\alpha_i,$$
$$q'_{i3} = \cos\alpha_i \cos\beta_i.$$

Вектор руху P_i позначимо через $u_i = (v_i, \theta_i) \in R^6$, де $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Тоді, багатогранник P_i, зміщений на вектор u_i, позначимо через $P_i(u_i)$, $i = 1,2$, і задамо наступною системою нерівностей

$$\begin{cases} f_{i1}(R'_i X) = A_{i1} g'_i\ x + B_{i1} r'_i\ y + C_{i1} q'_i\ z + D_{i1} \le 0 \\ f_{i2}(R'_i X) = A_{i2} g'_i\ x + B_{i2} r'_i\ y + C_{i2} q'_i\ z + D_{i2} \le 0 \\ \vdots \\ f_{i\delta_i}(R'_i X) = A_{i\delta_i} g'_i\ x + B_{i\delta_i} r'_i\ y + C_{i\delta_i} q'_i\ z + D_{i\delta_i} \le 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Для вершин і ребер багатогранного тіла $P_i(u_i), i = 1,2$, задамо наступні позначення (рис.3.1): $p_{ij}(\theta_i) = R_i p_{ij}$, $p_{ij}(u_i) = v_{ij} + p_{ij}(\theta_i)$, $j \in W_i$, $e_{it}(u_i) = [p_{it_1}(u_i), p_{it_2}(u_i)]$, $t \in T_i$.

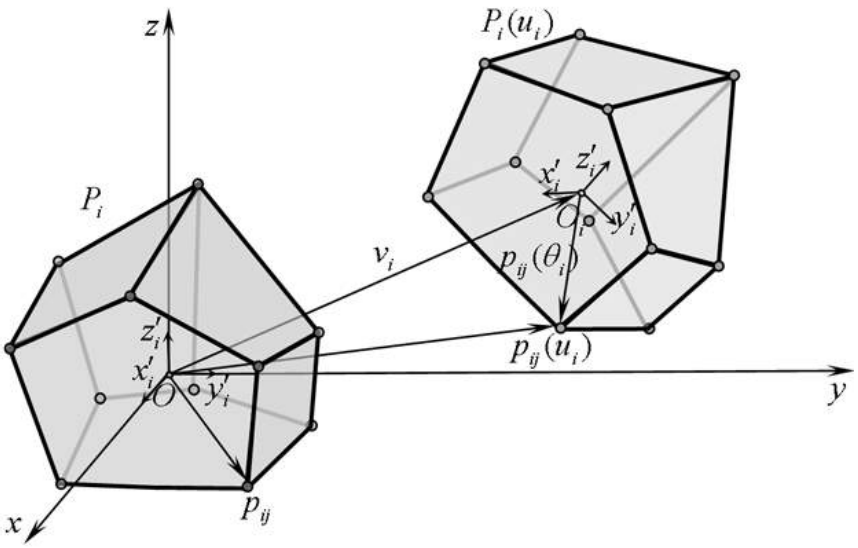


Рис.3.1. Багатогранне тіло $P_i(u_i)$

Необхідно представити в аналітичному вигляді опис відношень включення, перетинання та торкання для пари неорієнтованих опуклих багатогранних тіл.

Для розв'язання поставленої задачі скористаємося методом Ф-Функцій і побудуємо для пари неорієнтованих опуклих багатогранних тіл $P_1(u_1)$ та $P_2(u_2)$ Ф-Функцію $\Phi(u_1,u_2): R^{12} \to R^1$, яка задовольняє наступним характеристичним властивостям:

1) $\Phi(u_1,u_2) > 0,$ якщо $cl\ P_1(u_1) \cap cl\ P_2(u_2) = \varnothing$;

2) $\Phi(u_1,u_2) = 0,$ якщо $\operatorname{int} P_1(u_1) \cap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$ и $fr\ P_1(u_1) \cap fr\ P_2(u_2) \neq \varnothing$;

3) $\Phi(u_1,u_2) < 0,$ якщо $\operatorname{int} P_1(u_1) \cap \operatorname{int} P_2(u_2) \neq \varnothing$.

Пропонуємий метод побудови Ф-Функції заснований фактично на моделюванні дотику двох довільних неорієнтованих багатогранних тіл. Очевидно, що при будь-якому дотику опуклих багатогранних тіл має місце один або комбінація декількох типів дотику елементів їх границь:

1) вершина $P_1(u_1)$ торкається грані $P_2(u_2)$;

2) ребро $P_1(u_1)$ торкається (має спільні точки) грані $P_2(u_2)$;

3) грань $P_1(u_1)$ торкається (має спільні точки) грані $P_2(u_2)$;

4) вершина $P_2(u_2)$ торкається грані $P_1(u_1)$;

5) ребро $P_2(u_2)$ торкається (має спільні точки) грані $P_1(u_1)$;

6) ребро $P_1(u_1)$ торкається (має одну спільну точку) ребра $P_2(u_2)$.

Для неорієнтованих опуклих багатогранних тіл усі можливі дотики можна змоделювати, використовуючи наступні три види дотиків:

1) вершина $P_2(u_2)$ торкається грані $P_1(u_1)$, тобто $p_{2j}(u_2) \in frP_1(u_1) \bigcap frP_2(u_2)$, $j \in W_2$, і $\operatorname{int} P_1(u_1) \bigcap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$ (рис.3.2 а);

2) вершина $P_1(u_1)$ торкається грані $P_2(u_2)$, тобто $p_{1j}(u_1) \in frP_1(u_1) \bigcap frP_2(u_2)$, $j \in W_1$, і $\operatorname{int} P_1(u_1) \bigcap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$ (рис.3.2 б);

3) ребро $P_1(u_1)$ торкається (має одну спільну точку) ребра $P_2(u_2)$ (рис.3.2 в).

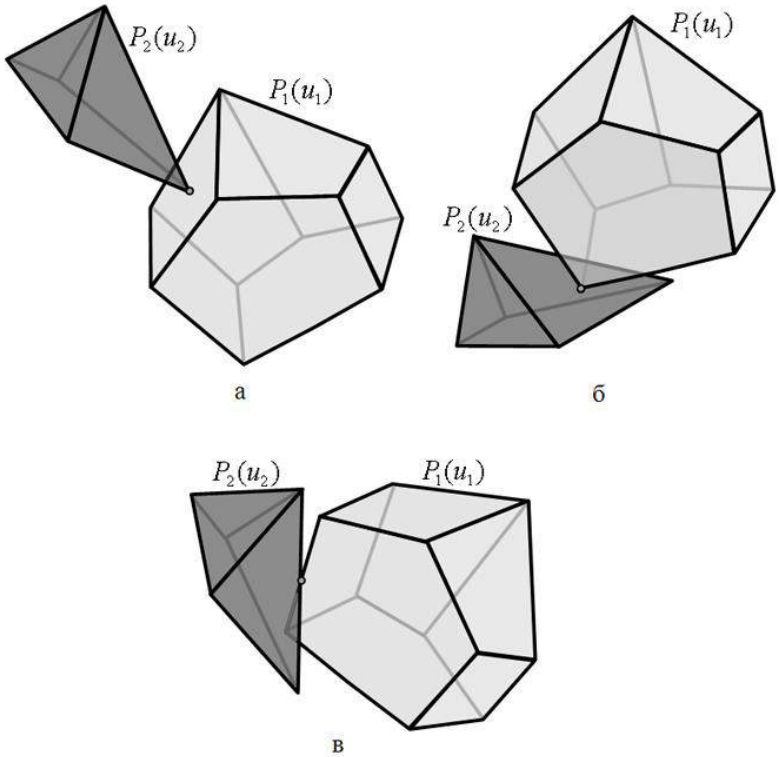


Рис. 3.2. Види дотику багатогранних тіл

Для того щоб в аналітичному вигляді описати зазначені три види дотику запишемо наступну умову дотику багатогранних тіл. Якщо $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$ торкаються, то існує, принаймні, одна пара точок $\gamma^*(\theta_1) \in frP_1(u_1)$ і $\gamma^*(\theta_1) \in frP_1(u_1)$, для яких виконується рівність (рис.3.3)

$$\gamma^*(\theta_1) = v_2 - v_1 + \gamma^{**}(\theta_2). \tag{3.3}$$

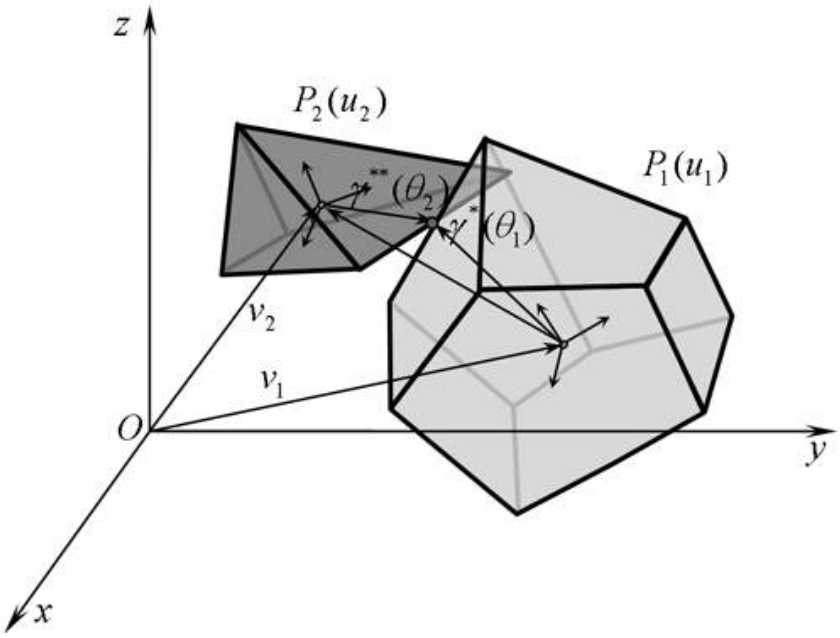


Рис.3.3. Умова дотику багатогранних тіл

Використовуючи дану умову, виконаємо аналітичний опис кожного виду дотику.

Перший вид дотику.

Нехай вершина $p_{2j}(u_2) \in P_2(u_2)$ торкається грані $P_1(u_1)$. Для простоти покладемо спочатку, що $u_1 = 0$. Тоді, як випливає з (3.3), площина, що проходить через грань $H_{1p} \subset P_1(0)$, яка визначається рівністю $f_{1p}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)) = 0$, розділяє $P_1(0)$ і $P_2(u_2)$. Інакше кажучи, якщо для $u_2 \in R^6$ виконується дана рівність, то це означає, що $P_1(0)$ і $P_2(u_2)$ торкаються, принаймні, у точці $p_{2j}(u_2) \in frP_1(0) \bigcap frP_2(u_2)$.

Отже, якщо для $u_2 \in R^6$ виконується нерівність $f_{1p}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)) \geq 0$, то $p_{2j}(u_2) \notin \operatorname{int} P_1(0)$. Із цього випливає, що якщо нерівність $\min\{ f_{1pj}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)),\ j \in W_2\} \geq 0$ виконується, то $p_{2j}(u_2) \notin \operatorname{int} P_1(0)$, $j \in W_2$. Звідси, якщо виконується нерівність

$$\max\{\min\{ f_{1pj}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)),\ j \in W_2\},\ p \in G_1\} \geq 0, \qquad (3.4)$$

то багатогранні тіла $P_1(0)$ і $P_2(u_2)$ не перетинаються.

Покладемо тепер $u_1 \in R^6$ також змінною. Виходячи з рівняння $f_{1p}(R_1'X) = 0$ із системи (3.2) і виразу (3.3), побудуємо рівняння площини, що проходить через грань $H_{1p} \subset P_1(u_1)$ в наступному вигляді

$$F_{1pj}(u_1, u_2) = f_{1pj}(R_1'(v_2 - v_1 + R_2 p_{2j})) = 0. \tag{3.5}$$

Очевидно, що якщо $F_{1pj}(u_1, u_2) \geq 0$ для $j \in W_2$, то дана площина розділяє $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$, тобто $p_{2j}(u_2) \notin intP_1(u_1)$, $j \in W_1$, і $\operatorname{int} P_1(u_1) \bigcap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$. Виходячи з виразів (3.4) і (3.5), побудуємо функцію

$$\Psi_1(u_1, u_2) = \max\left\{\min\left\{F_{1pj}(u_1, u_2), j \in W_2\right\}\right\}, \; p \in G_1\Big\}, \tag{3.6}$$

яка має наступну властивість: якщо $\Psi_1(u_1, u_2) \geq 0$, то багатогранні тіла $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$ не перетинаються.

Другий вид дотику.

Враховуючи міркування, наведені вище, розглянемо другий вид дотику. Нехай вершина $p_{1j}(u_1) \in P_1(u_1)$ торкається грані $H_{2k} \subset P_2(u_2)$. Тоді, ґрунтуючись на рівнянні $f_{2k}(R_2'X) = 0$ із системи (3.2) і виразі (3.3) ми можемо побудувати рівняння площини, що проходить через грань $H_{2k} \subset P_2(u_2)$ у наступному вигляді

$$F_{2kj}(u_1, u_2) = f_{2kj}(R_2'(v_2 - v_1 - R_1 p_{1j})) = 0. \tag{3.7}$$

Очевидно, що якщо $F_{2kj}(u_1,u_2) \geq 0$ для $j \in W_1$, то дана площина розділяє $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$, тобто $p_{1j}(u_1) \notin intP_2(u_2)$, $j \in W_1$, і $\operatorname{int} P_1(u_1) \bigcap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$. Ґрунтуючись на виразі (3.7) побудуємо функцію

$$\Psi_2(u_1,u_2) = \max\left\{\min\left\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j \in W_1\right\}\right\},\ \ k \in G_2\Big\}, \tag{3.8}$$

яка має наступну властивість: якщо $\Psi_2(u_1,u_2) \geq 0$, то багатогранні тіла $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$ не перетинаються.

Слід зазначити, що при моделюванні взаємодії $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$ може виникнути ситуація, коли $\Psi_i(u_1,u_2) < 0$, $i = 1,2$, однак, $\operatorname{int} P_1(u_1) \bigcap \operatorname{int} P_2(u_2) = \varnothing$. Така ситуація може виникнути, наприклад, коли багатогранні тіла торкаються ребрами.

Третій вид дотику.

Нехай ребро $e_{1j}(u_1) = [p_{1j_1}(u_1), p_{1j_2}(u_1)] \subset P_1(u_1)$ торкається ребра $e_{2t}(u_2) = [p_{2t_1}(u_2), p_{2t_2}(u_2)] \subset P_2(u_2)$. Тоді, площина, що розділяє багатогранні тіла, буде проходити через ці два ребра. Для того, щоб побудувати поділяючу площину, сполучимо вершини $p_{1j_1}(u_1)$ і $p_{2t_1}(u_2)$. У цьому випадку вектор $\eta_{jt}(\theta_1,\theta_2)$, який визначає розміщення власної системи координат $P_2(u_2)$ відносно власної системи координат $P_1(u_1)$, буде рівний $\eta_{jt}(\theta_1,\theta_2) = p_{1j_1}(\theta_1) - p_{2t_1}(\theta_2)$.

Виходячи із цього, вектор $\tau_{jt}(\theta_1,\theta_2)$, який визначає координати $p_{2t_2}(\theta_2)$ відносно власної системи координат $P_1(u_1)$, буде рівний $\tau_{jt}(\theta_1,\theta_2) = p_{1j_1}(\theta_1) - p_{2t_1}(\theta_2) + p_{2t_2}(\theta_2)$ (рис.3.4).

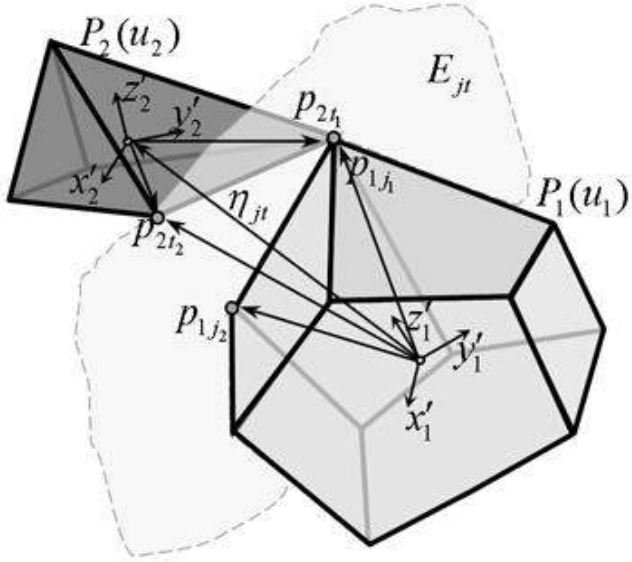


Рис.3.4. Побудова поділяючої площини для третього виду дотику

Тоді, площина $E_{jt}(\theta_1,\theta_2)$, що проходить через точки $p_{1j_1}(\theta_1)$, $p_{1j_2}(\theta_1)$ і $\tau_{jt}(\theta_1,\theta_2)$, буде визначатися рівнянням

$$\begin{aligned}\Omega_{jt}(X,\theta_1,\theta_2) = (x - g_1 p_{1j_1}^T)\tilde{A}_{jt}(\theta_1,\theta_2) + \\ (y - r_1 p_{1j_1}^T)\tilde{B}_{jt}(\theta_1,\theta_2) + \\ (z - q_1 p_{1j_1}^T)\tilde{C}_{jt}(\theta_1,\theta_2),\end{aligned} \tag{3.9}$$

де коефіцієнти $\tilde{A}_{jt}(\theta_1,\theta_2)$, $\tilde{B}_{jt}(\theta_1,\theta_2)$ і $\tilde{C}_{jt}(\theta_1,\theta_2)$ визначаються через координати точок $p_{1j_1}(\theta_1)$, $p_{1j_2}(\theta_1)$ і $\tau_{jt}(\theta_1,\theta_2)$.

На основі виразів (3.3) і (3.9) побудуємо рівняння

$$\Gamma_{jt}(u_1,u_2) = \Omega_{jt}(v_2 - v_1 + p_{2t_1}(\theta_2),\theta_1,\theta_2) = 0,\ j \in T_1,\ t \in T_2. \tag{3.10}$$

Очевидно, що, якщо точка $(u_1,u_2) \in R^{12}$ задовольняє рівності (3.10), то $e_{1j}(u_1), e_{2t}(u_2) \subset E_{jt}$.

Нехай площина E_{jt} ділить простір R^3 на “додатне” Π_{jt}^{+} і “від’ємне” Π_{jt}^{-} півпростори. Слід зазначити, що функція $\Gamma_{jt}(u_1,u_2)$ бере участь у формуванні Ф-Функції в одному з наступних двох випадків:

1) якщо $P_2(u_2)\subset\Pi_{jt}^{+}$ і $P_1(u_1)\subset\Pi_{jt}^{-}$;

2) якщо $P_2(u_2)\subset\Pi_{jt}^{-}$ і $P_1(u_1)\subset\Pi_{jt}^{+}$.

Для того щоб визначити умову участі $\Gamma_{jt}(u_1,u_2)$ у формуванні Ф-Функції досить обчислити значення рівняння (3.9) у вершинах $\tilde{p}_{1j_1}^{1}(\theta_1)$ і $\tilde{p}_{1j_1}^{2}(\theta_1)$, суміжних до вершини $p_{1j_1}(\theta_1)$ ребра $e_{1j}(\theta_1)$ багатогранного тіла $P_1(u_1)$, а також у вершинах $\tilde{p}_{2t_1}^{1}(\theta_2)$ і $\tilde{p}_{2t_1}^{2}(\theta_2)$, суміжних до вершини $p_{2t_1}(\theta_2)$ ребра $e_{2t}(\theta_2)$ багатогранного тіла $P_2(u_2)$ (рис.3.5).

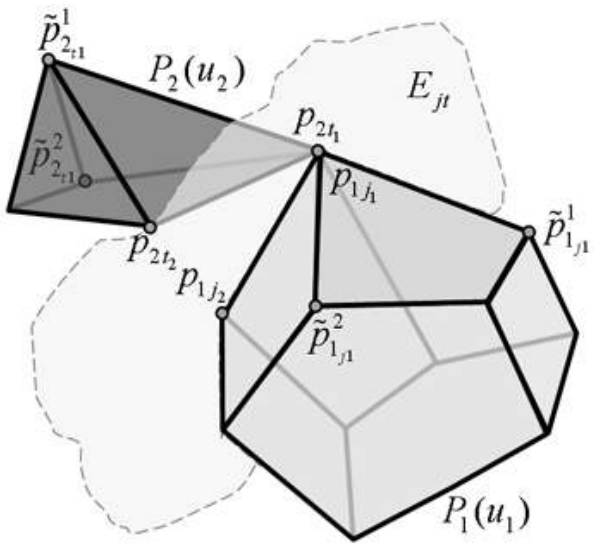


Рис.3.5. Вершини, у яких перевіряється умова участі $\Gamma_{jt}(u_1,u_2)$

Виходячи з вище викладеного, побудуємо наступну функцію:

$$F_{3jt}(u_1,u_2)=\begin{cases}\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ -\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ \sigma, & \text{если } \chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)<0,\end{cases} \tag{3.11}$$

де

$$\chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2)=\min\left\{-\Omega_{jt}(\tilde{p}^i_{1j}(\theta_1),\theta_1,\theta_2),\ \Omega_{jt}(\eta_{jt}+\tilde{p}^i_{2j}(\theta_2),_1\theta,\theta_2), i=1,2\right\},$$

$$\chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)=\min\left\{\Omega_{jt}(\tilde{p}^i_{1j}(\theta_1),\theta_1,\theta_2),-(\ \Omega_{jt}(\eta_{jt}+\tilde{p}^i_{2j}(\theta_2),\theta_1,\theta_2)), i=1,2\right\},$$

$$\chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)=\max\left\{\chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2),\chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)\right\}.$$

Оскільки будь-яка Ф-функція обмежена знизу для обмежених тривимірних тіл, то $\sigma<\min\Phi(u_1,u_2)$. Це значить, що $\Gamma_{jt}(u_1,u_2)$ бере участь у формуванні $\Phi(u_1,u_2)$ тільки у випадку, якщо $\chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0$.

Слід зазначити, що площина E_{jt} розділяє $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$, коли $F_{3jt}(u_1,u_2)\geq 0$.

Ґрунтуючись на виразі (3.11), побудуємо функцію

$$\Psi_3(u_1,u_2)=\max\left\{F_{3jt}(u_1,u_2),\ j\in T_1,\ t\in T_2\right\}, \tag{3.12}$$

яка має наступну властивість: якщо $\Psi_3(u_1,u_2)\geq 0$, то багатогранні тіла $P_1(u_1)$ і $P_2(u_2)$ не перетинаються.

Оскільки розглянуті три види дотиків дозволяють описати всі можливі види дотиків, то на підставі функцій (3.6), (3.8) і (3.12) Ф-функція для двох неорієнтованих опуклих багатогранних тіл може бути представлена в такий спосіб

$$\Phi(u_1,u_2)=\max\left\{\Psi_i(u_1,u_2), i=1,2,3\right\}= \tag{3.13}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \min\left\{F_{1pj}(u_1,u_2),\ j \in J_1\right\},\ p \in K_1, \\ \min\left\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j \in J_2\right\}, \\ k \in K_2,\ F_{3jt}(u_1,u_2),\ j \in T_1,\ t \in T_2 \end{array} \right\}.$$

Умову неперетину двох багатогранних тіл (3.13) у разі їх взаємодії за допомогою ребер можна записати в іншій формі. Нехай $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ буде ребром P_i , котре лежить на прямій лінії, яка утворена перетином площин $\zeta_{ir}(X,u_i)=0$ та $\zeta_{i,r+1}(X,u_i)=0$. А $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ буде ребром P_j , котре лежить на прямій лінії, яка утворена перетином площин $\zeta_{jl}(X,u_i)=0$ та $\zeta_{j,l+1}(X,u_i)=0$. Площини формують двохгранні кути Δ_{ir} та Δ_{jl} такі, що $P_i \subset \Delta_{ir}$ та $P_j \subset \Delta_{jl}$. Вочевидь, ці двохгранні кути не перетинаються, якщо $P_i \cap P_j = \varnothing$. Тому сформулюємо умову неперетину двохграних кутів у аналітичному вигляді.

Транслюючи ребро $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ на вектор $\overline{p_{ik}(u_i) - p_{js}(u_j)}$ та ребро $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ на вектор $\overline{p_{js}(u_j) - p_{ik}(u_i)}$ ми отримуємо

$$[p_{ik}(u_i) - p_{js}(u_j) + p_{jv}(u_j), p_{js}(u_j)] = [p_{io}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i,u_j)]$$

$$[p_{io}(u_j) - p_{js}(u_i) + p_{ik}(u_j), p_{js}(u_j)] = [p_{io}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i,u_j)],$$

де $a_{ij}^{ab}(u_i,u_j) = (a_{ij}^{1ab}(u_i,u_j), a_{ij}^{2ab}(u_i,u_j), a_{ij}^{3ab}(u_i,u_j))$, a та b номери ребер, та $[p_{io}(u_j) - p_{js}(u_i) + p_{ik}(u_j), p_{jv}(u_j)] = [a_{ij}^{ba}(u_i,u_j), p_{io}(u_j)]$ відповідно.

Далі побудуємо рівняння площини Q_{ij}^{ab} , що проходить через точки $p_{io}(u_j), p_{iv}(u_j)$ $p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)$ та $a_{ij}^{ab}(u_i,u_j)$

$$F_{ij}^{ab}(X,u_i,u_j) = (x - p_{io}^1(u_j))(x - p_{iv}^1(u_j))(x - a_{ij}^{ab}(u_j))$$
$$+ (y - p_{io}^2(u_j))(y - p_{iv}^2(u_j))(y - a_{ij}^{ab}(u_j))$$
$$+ (z - p_{io}^3(u_j))(z - p_{iv}^3(u_j))(z - a_{ij}^{ab}(u_j)) = 0$$

та площини Q_{ij}^{ba}, що проходить через точки $p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)$ та $a_{ij}^{ba}(u_i,u_j)$

$$F_{ij}^{ba}(X,u_i,u_j) = (x - p_{js}^1(u_j))(x - p_{jv}^1(u_j))(x - a_{ij}^{ba}(u_j))$$
$$+ (y - p_{js}^2(u_j))(y - p_{jv}^2(u_j))(y - a_{ij}^{ba}(u_j))$$
$$+ (z - p_{js}^3(u_j))(z - p_{jv}^3(u_j))(z - a_{ij}^{ba}(u_j)) = 0$$

Площина Q_{ij}^{ab} проходить через ребра $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ та $[p_{ik}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i,u_j)]$, а площина Q_{ij}^{ba} проходить через ребра $[p_{js}(u_i), p_{jv}(u_i)]$ та $[a_{ij}^{ba}(u_i,u_j), p_{io}(u_j)]$. Оскільки $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ паралельно $[a_{ij}^{ba}(u_i,u_j), p_{io}(u_j)]$ та $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ паралельно $[p_{ik}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i,u_j)]$, то площини Q_{ij}^{ab} та Q_{ij}^{ba} є паралельними.

Для того, щоб площина Q_{ij}^{ab} (Q_{ij}^{ba}) була розділяючою площиною для Δ_{ir} та Δ_{jt}, необхідно щоб виконувались нерівності

$$\min\{\phi_{ij}^{31ab}(u_i,u_j), \phi_{ij}^{32ab}(u_i,u_j)\} = \min\{F_{ij}^{ab}(p_{i,k-1}(u_i),u_i,u_j), F_{ij}^{ab}(p_{i,k+1}(u_i),u_i,u_j)\} \geq 0,$$
$$\min\{\phi_{ij}^{33ba}(u_i,u_j), \phi_{ij}^{34ba}(u_i,u_j)\} = \min\{F_{ij}^{ba}(p_{j,v-1}(u_j),u_i,u_j), F_{ij}^{ba}(p_{j,v+1}(u_j),u_i,u_j)\} \geq 0,$$
$$\phi_{ij}^{35ab}(u_i,u_j) = F_{ij}^{ab}(p_{jv}(u_i),u_i,u_j) \geq 0,$$

де $p_{i,k-1}(u_i), p_{i,k+1}(u_i) \in Q_{ij}^{ab}$ - це суміжні вершини до вершини $p_{ik}(u_i)$, а $p_{j,v-1}(u_j), p_{j,v+1}(u_j) \in Q_{ij}^{ba}$ - це суміжні вершини до вершини $p_{jv}(u_i)$.

Таким чином нерівність

$$\Psi_{ij}^{3ab}(u_i,u_j)=\min\{F_{ij}^{ab}(p_{i,k-1}(u_i),u_i,u_j),F_{ij}^{ab}(p_{i,k+1}(u_i),u_i,u_j),F_{ij}^{ba}(p_{j,v-1}(u_j),u_i,u_j),$$
$$F_{ij}^{ba}(p_{j,v+1}(u_j),u_i,u_j),F_{ij}^{ab}(p_{jv}(u_i),u_i,u_j)\}>0$$

буде виконуватись, якщо $\Delta_{ir}\cap\Delta_{jt}=\varnothing$.

Звідси випливає, що якщо хоча б одна з нерівностей структури

$$\Psi_{ij}^{3ab}(u_i,u_j)>0,\quad a,b\in\{1,2,...,\upsilon=\varepsilon+\chi-2\}\ ,$$

тоді $P_i\cap P_j=\varnothing$. Для зручності позначимо $\Psi_{ij}^{ab}(u_i,u_j)$, $a,b\in\{1,2,...,\upsilon=\varepsilon+\chi-2\}$, як $\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j)=\min\{\phi_{ij}^{3cl}(u_i,u_j),\quad c\in M\}$, $l\in L$. Тоді, якщо функція $\max\{\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j),l\in L,\}>0$, то $P_i\cap P_j=\varnothing$.

3.2 Ф-функція для двох неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл

Нехай є пара багатогранних тіл P_i , які є об'єднанням опуклих багатогранних тіл

$$P_i=\bigcup_{k=1}^{\varepsilon_i}P_{ik},\ i=1,2.$$

Багатогранні тіла P_{ik} визначаються вершинами

$$p_{ikt}=(p_{ikt}^1,p_{ikt}^2,p_{ikt}^3),\ i\in I,\ k\in K_i=\{1,2,...,\varepsilon_i\},\ t\in T_{ik}=\{1,2,...,\rho_{ik}\}.$$

Через те, що $P_i=\bigcup_{s=1}^{\varepsilon_i}P_{is}$ і $P_j=\bigcup_{p=1}^{\varepsilon_j}P_{jp}$, то $P_i\cap P_j=\varnothing$ якщо $P_{is}\cap P_{jp}=\varnothing$, $s\in K_i$, $p\in K_j$. Це означає, що

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\min\{\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j),\ s\in K_i,\ p\in K_j\},$$

де $\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)$ є $\Phi-$функцією P_{is} і P_{jp}. Отже, $\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0$,якщо

$$\min\{\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j), s\in K_i, p\in K_j\}\geq 0.$$

3.3 Ф-функція двох неорієнтованих паралелепіпедів

Нехай задано паралелепіпед

$$P_i=\left\{(x,y,z,)\in R^3: -l_i\leq x\leq l_i, -w_i\leq y\leq w_i, -h_i\leq z\leq h_i\right\},\ i=1,2.$$

У цьому випадку функція (3.6) буде виглядати таким чином:

$$\Psi_1(u_1,u_2)=\max\left\{\min\left\{F_{1pj}(u_1,u_2),\ j\in\{1,2,...,8\}\right\},\ p\in\{1,2,...,6\}\right\},$$

де

$$F_{11j}(u_1,u_2)=g'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)+g'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)+g'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-l_1,$$
$$F_{12j}(u_1,u_2)=-g_{11}(g_2p_{2j}^T+x)-g'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)-g'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-l_1,$$
$$F_{13j}(u_1,u_2)=r'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)+r'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)+r'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-w_1,$$
$$F_{14j}(u_1,u_2)=-r'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)-r'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)-r'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-w_1,$$
$$F_{15j}(u_1,u_2)=q'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)+q'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)+q'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-h_1,$$
$$F_{16j}(u_1,u_2)=-q'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)-q'_{12}(r_2\,p_{2j}^T+y)-q'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-h_1,$$
$$x=x_2-x_1,\ \ y=y_2-y_1,\quad z=z_2-z_1.$$

Функція (3.8) буде виглядати:

$$\Psi_2(u_1,u_2)=\max\left\{\min\left\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j\in\{1,2,...,8\}\right\},\ k\in\{1,2,...,6\}\right\},$$

де

$$F_{21j}(u_1,u_2)=g'_{21}(x-g_1p_{1j}^T)+g'_{22}(y-r_1p_{1j}^T)+g'_{23}(z-q_1p_{1j}^T)-l_2,$$
$$F_{22j}(u_1,u_2)=-g'_{21}(x-g_1p_{1j}^T)-g'_{22}(y-r_1p_{1j}^T)-g'_{23}(z-q_1p_{1j}^T)-l_2,$$
$$F_{23j}(u_1,u_2)=r'_{21}(x-g_1p_{1j}^T)+r'_{22}(y-r_1p_{1j}^T)+r'_{23}(z-q_1p_{1j}^T)-w_2,$$
$$F_{24j}(u_1,u_2)=-r'_{21}(x-g_1p_{1j}^T)-r'_{22}(y-r_1p_{1j}^T)-r'_{23}(z-q_1p_{1j}^T)-w_2,$$
$$F_{25j}(u_1,u_2)=q'_{31}(x-g_1p_{1j})+q'_{32}(y-r_1p_{1j})+q'_{33}(z-q_1p_{1j})-h_2,$$
$$F_{26j}(u_1,u_2)=-q'_{31}(x-g_1p_{1j})-q'_{32}(y-r_1p_{1j})-q'_{33}(z-q_1p_{1j})-h_2.$$

Функція (3.12) буде виглядати:

$$\Psi_3(u_1,u_2)=\max\left\{F_{3jt}(u_1,u_2),\ j,t\in\{1,2,...,12\}\right\},$$

де

$$F_{3jt}(u_1,u_2)=\begin{cases}\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ -\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ \sigma, & \text{если } \chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\end{cases}$$

$\sigma=\max\{2l_i\ \ 2w_i,2h_i,\ i=1,2\}$.

Тоді, Ф-функцію для двох неорієнтованих паралелепіпедів можна записати у вигляді

$$\Phi(u_1,u_2)=\max\left\{\min\left\{F_{1pj}(u_1,u_2),\ j\in(1,2,..,8)\right\},\right.$$

$$\min\left\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j\in(1,2,..,8)\right\},\ p,k\in\{1,2,...,6\},$$

$$\left.F_{3jt}(u_1,u_2),\ j,t\in\{1,2,...,12\}\right\}.$$

Приналежність неорієнтованого паралелепіпеда $P_i=\left\{(x,y,z,)\in R^3:-l_i\leq x\leq l_i,-w_i\leq y\leq w_i,-h_i\leq z\leq h_i\right\}$ паралелепіпеду $\Omega=\left\{(x,y,z,)\in R^3:-l\leq x\leq l,-w\leq y\leq w,-h\leq z\leq h\right\}$ можна записати у вигляді Ф-функції для P_i і об'єкта $cl(R^3\setminus\Omega)$:

$$\Phi(u_i)=\min\left\{F_{kj}(u_i),\ k\in\{1,2,...,6\},\ j\in\{1,2,...,8\}\right\},$$

де

$$F_{1j}(u_i)=X_i+p_i(\theta_i)-l,\ \ F_{2j}(u_i)=-(X_i+p_i(\theta_i))-l,$$
$$F_{3j}(u_i)=X_i+p_i(\theta_i)-w,F_{4j}(u_i)=-(X_i+p_i(\theta_i))-w,$$
$$F_{5j}(u_i)=X_i+p_i(\theta_i)-h,\ F_{6j}(u_i)=-(X_i+p_i(\theta_i))-h,$$

$$X_i=x_i+y_i+z_i\ \ .$$

3.4 Ф-функція неорієнтованого паралелепіпеда та кулі

Нехай задано паралелепіпед

$$P_i = \{X = (x, y, z) \in R^3:\ -l_i^0 \le x \le l_i^0,\ -w_i^0 \le y \le w_i^0,\ -h_i^0 \le z \le h_i^0\},$$

і куля

$$S_j = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - r_j^2 \le 0\}.$$

Координати вершин P_i індексуються таким чином (рис.3.6):

$V_1 = (l^0, w^0, h^0)$, $V_2 = (-l^0, w^0, h^0)$, $V_3 = (l^0, -w^0, h^0)$,

$V_4 = (-l^0, -w^0, h^0)$, $V_5 = (l^0, w^0, -h^0)$, $V_6 = (-l^0, w^0, -h^0)$,

$V_7 = (l^0, -w^0, -h^0)$ і $V_8 = (-l^0, -w^0, -h^0)$.

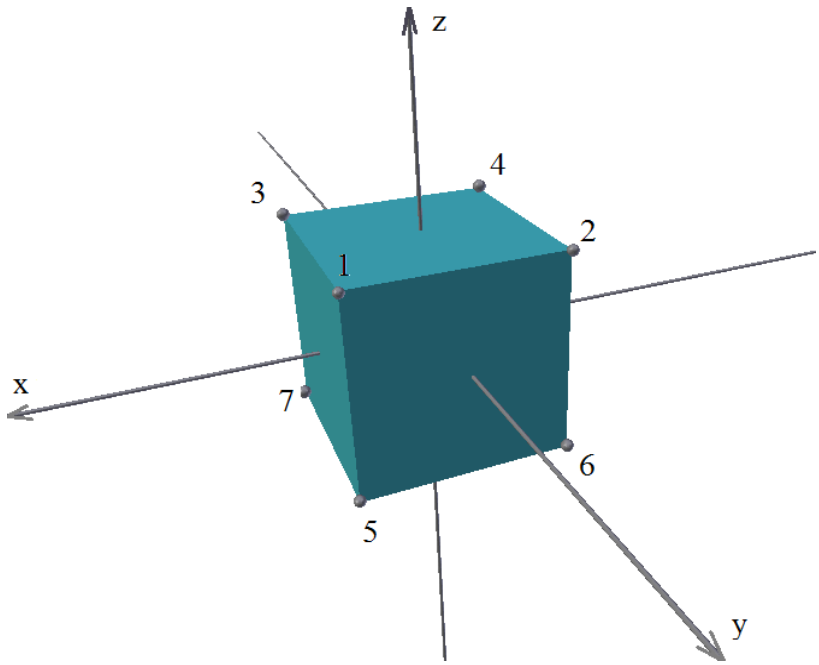


Рис.3.6. Нумерація вершин $P_i(u_i)$

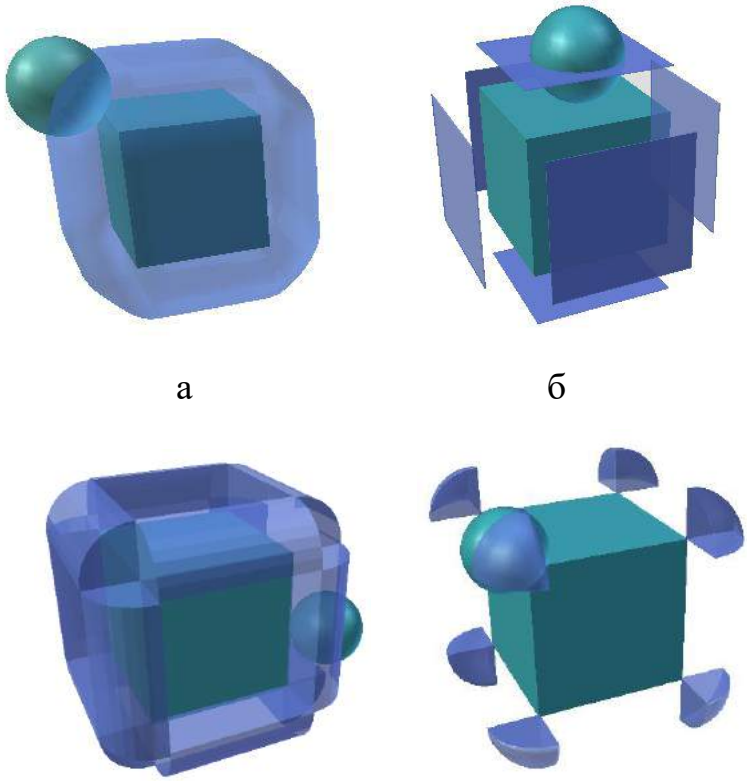
Ф-функція $\Phi_{ij}^{PS}(u_i, u_j)$ для паралелепіпеда $P_i(u_i)$ і кулі $S_j(u_j)$ повністю визначається такими видами взаємодії:

1) сферична поверхня $S_i(u_i)$ і площини $P_j(u_j)$;

2) сферична поверхня $S_i(u_i)$ і ребра $P_j(u_j)$;

3) сферична поверхня $S_i(u_i)$ і вершини $P_j(u_j)$,

Встановимо, що $u_i = 0$. Тоді поверхня 0-рівня $\Phi_{ij}^{PS}(0,u_j)$ має форму, зображену на рис.3.7 а. Легко бачити, що поверхня 0-рівеня складається з поверхонь площин (рис. 3.7 б), циліндрів (3.7 в) та куль (3.7 г).



а б

в г

Рис. 3.7. 0-рівень поверхні $\Phi_{ij}^{PS}(0,u_j)$

Перше вид торкання (рис.3.7 б) описується функціями $\chi_i(u_i,u_j)$, $i=1,\ldots 6$, які визначені в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
&\chi_1\left(u_i,u_j\right) = x(u_i,u_j) - l_i - r_j, \quad \chi_2\left(u_i,u_j\right) = -x(u_i,u_j) - l_i - r_j,\\
&\chi_3\left(u_i,u_j\right) = y(u_i,u_j) - w_i - r_j, \chi_4\left(u_i,u_j\right) = -y(u_i,u_j) - w_i - r_j,\\
&\chi_5\left(u_i,u_j\right) = z(u_i,u_j) - h_i - r_j, \quad \chi_6\left(u_i,u_j\right) = -z(u_i,u_j) - h_i - r_j,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

де $x(u_i,u_j) = R_i(x_j - x_i)$, $y(u_i,u_j) = R_i(y_j - y_i)$, $z(u_i,u_j) = R_i(z_j - z_i)$,

$$R_i = \begin{pmatrix} g_i \\ p_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{pmatrix},$$

$g_{i1} = \cos\beta_i \cos\gamma_i,$

$g_{i2} = \sin\gamma_i \cos\alpha_i + \cos\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i,$

$g_{i3} = \sin\gamma_i \sin\alpha_i - \cos\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i,$

$r_{i1} = -\sin\gamma_i \cos\beta_i,$

$r_{i2} = \cos\gamma_i \cos\alpha_i - \sin\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i,$

$r_{i3} = \sin\alpha_i \cos\gamma_i + \sin\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i,$

$q_{i1} = \sin\beta_i,\ q_{i2} = -\cos\beta_i \sin\alpha_i,\ q_{i3} = \cos\alpha_i \cos\beta_i.$

Легко перевірити, що, якщо хоча б одна нерівність виду $\chi_l(u_i, u_j) > 0$, то $P_i(u_i) \bigcap S_j(u_j) = \varnothing$.

Тоді побудуємо функцію

$$\chi\left(u_i, u_j\right) = \max_{l=1,\ldots 6} \chi_l\left(u_i, u_j\right) . \tag{3.15}$$

Таким чином, якщо $\chi(u_i, u_j) > 0$ виконується, тоді $P_i(u_i) \bigcap S_j(u_j) = \varnothing$. З іншого боку, якщо $\chi(u_i, u_j) < 0$ то може бути як $P_i(u_i) \bigcap S_j(u_j) = \varnothing$ і $P_i(u_i) \bigcap S_j(u_j) \neq \varnothing$ (рис.3.7 в або рис.3.7 г).

Друга форма торкання формується частинами циліндричних поверхонь (рис.3.7в). Частини належить циліндрам, осі яких проходять через ребро $P_i(u_i)$ і визначаються наступними рівняннями

$$\begin{aligned} &\psi_l(u_i, u_j) = \varphi^2_{xk_x}(u_i, u_j) + \varphi^2_{yk_y}(u_i, u_j) - r_j^2 = 0,\ l = k_x + 2k_y + 1, \\ &\psi_l(u_i, u_j) = \varphi^2_{yk_y}(u_i, u_j) + \varphi^2_{zk_z}(u_i, u_j) - r_j^2 = 0,\ l = k_y + 2k_z + 5, \\ &\psi_l(u_i, u_j) = \varphi^2_{xk_x}(u_i, u_j) + \varphi^2_{zk_z}(u_i, u_j) - r_j^2 = 0,\ l = k_x + 2k_z + 9, \end{aligned} \tag{3.16}$$

де $\varphi_{k_x}(u_i,u_j)=(-1)^{k_x}x(u_i,u_j)-l_i$, $\varphi_{yk_y}(u_i,u_j)=(-1)^{k_y}y(u_i,u_j)-w_i$,

$\varphi_{zk_z}(u_i,u_j)=(-1)^{k_z}z(u_i,u_j)-h_i$, $k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}$,

Для того, щоб виділити необхідні частини циліндрів сформуємо такі рівняння площин:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{\chi}}_l\left(u_i,u_j\right)=\varphi_{xk_x}(u_i,u_j)+\varphi_{yk_y}(u_i,u_j)-r_j=0,\ l=k_x+2k_y+1,\\
&\tilde{\tilde{\chi}}_l\left(u_i,u_j\right)=\varphi_{yk_y}(u_i,u_j)+\varphi_{zk_z}(u_i,u_j)-r_j=0,\ l=k_y+2k_z+5,\\
&\tilde{\tilde{\chi}}_l\left(u_i,u_j\right)=\varphi_{xk_x}(u_i,u_j)+\varphi_{zk_z}(u_i,u_j)-r_j=0,\ l=k_x+2k_z+9,
\end{aligned}\qquad(3.17)$$

які паралельні ребрам $P_i(u_i)$ і проходять через пару точок, що лежать на відстані r_j від вершин V_i на продовженні ребер $P_i(u_i)$ (рис.3.8).

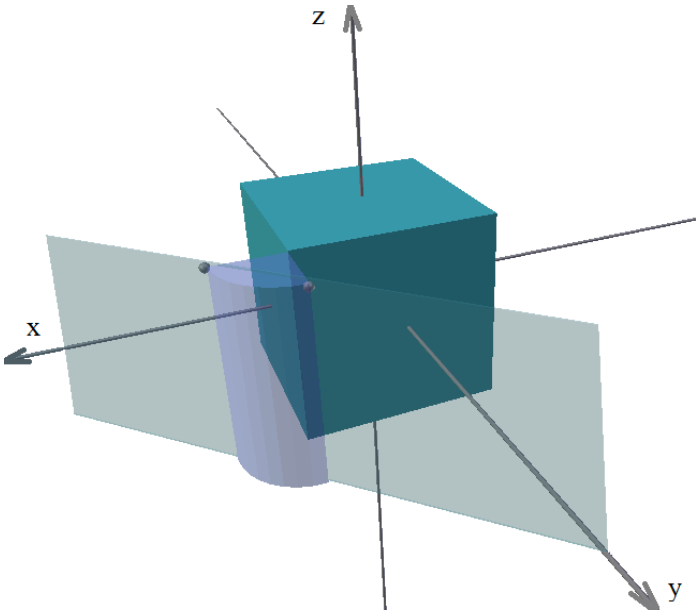


Рис. 3.8. Допоміжна площина для ребра (V_1,V_5)

Використовуючи функції $\psi_l(u_i,u_j)$ (3.16) і $\tilde{\tilde{\chi}}_l\left(u_i,u_j\right)$(3.17), $l=1,2,\ldots12$, сформуємо такі функції

$$\tau_l\left(u_i,u_j\right)=\min\left\{\psi_l\left(u_i,u_j\right),\tilde{\tilde{\chi}}_l\left(u_i,u_j\right)\right\},$$

Очевидно, якщо хоча б одна з нерівностей $\tau_l\left(u_i,u_j\right)>0$, $l=1,\ldots 12$, виконується, то $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$. Ця властивість дозволяє побудувати функцію

$$\tau\left(u_i,u_j\right)=\max_{l=1,\ldots 12}\tau_l\left(u_i,u_j\right), \qquad (3.18)$$

Таким чином, якщо $\tau(u_i,u_j)>0$, то $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$. З іншого боку, якщо $\tau_l(u_i,u_j)<0$, то може бути як $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$ або $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)\neq\varnothing$ (рис. 3.7 в).

Форма третього торкання (рис.3.7 в) створює сферичні частини поверхні 0-рівня $\Phi_{ij}^{PS}(u_i,u_j)$. Частини належать кулям, які описуються рівняннями

$$\phi_s\left(u_i,u_j\right)=\varphi_{xk_x}^2(u_i,u_j)+\varphi_{yk_y}^2(u_i,u_j)+\varphi_{zk_z}^2(u_i,u_j)-r_j^2=0, \qquad (3.19)$$

де $s=k_x+2k_y+4k_z+1,\ k_x,k_y,k_z\in\{0,1\}$, $s=1,2,\ldots,8$,

Слід зазначити, що центри куль збігаються з вершинами V_s, $s=1,2,\ldots,8$, паралелепіпеда $P_i(u_i)$. Нам потрібно виділити необхідні сферичні сектори куль (рис.3.7 в).

З цією метою побудуємо для кожної з вершини V_s, $s=1,2,\ldots,8$, з $P_i(u_i)$ три еліптичні циліндри, орієнтовані спеціальним чином по відношенню до $P_i(u_i)$ і допоміжну площину.

Розглянемо цей випадок детально. Нехай рівняння еліптичних циліндрів $C_k^0, k=1,2,3$, (рис.3.9) мають вигляд:

$$C_1^0=2x^2+y^2-r^2=0,\ C_2^0=x^2+2z^2-r^2=0,\ C_3^0=2y^2+z^2-r^2=0.$$

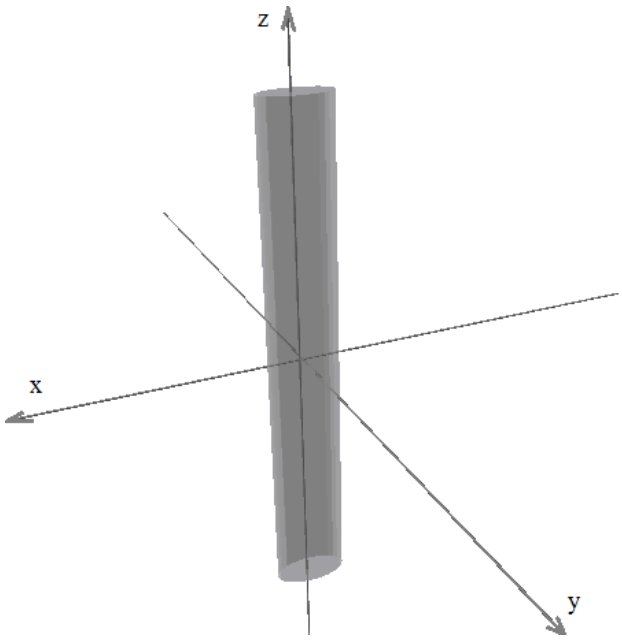


Рис. 3.9. Еліптичний циліндр C_1^0

Повернемо циліндри $C_1^0, C_2^0,$ і C_3^0 на кути $\pi/4$ і $-\pi/4$ навколо вісей Oy, Ox і Oz відповідно. Як результат, отримані циліндри $C_t^1, t = 1,2,\ldots,6,$ (рис.3.10) задаються рівняннями відповідно

$$C_1^1 = (x+z)^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad C_2^1 = (x-z)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$C_3^1 = x^2 + (y+z)^2 - r^2 = 0, \quad C_4^1 = x^2 + (z-y)^2 - r^2 = 0,$$
$$C_5^1 = (x+y)^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad C_6^1 = (y-x)^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

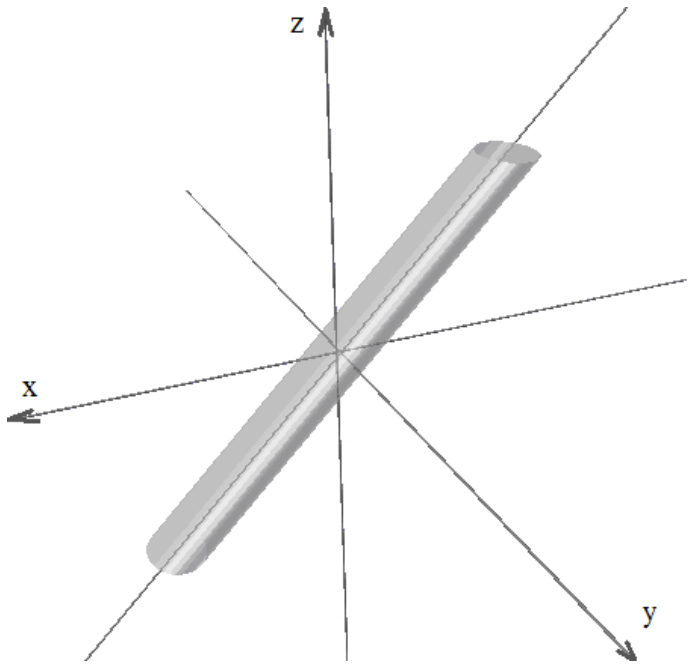


Рис. 3.10. Еліптичний циліндр C_1^1

Очевидно, що перетин координатної площини xOy і циліндрів C_1^1, C_2^1 координатної площини xOz і циліндрів C_3^1, C_4^1 координатної площини yOz і циліндрів C_5^1, C_6^1 є колом радіуса r_j. Обернемо циліндри $C_t^1, j = 1, 2, \ldots, 6,$ на кути $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4,$ і $7\pi/4$ наступним чином: циліндри C_1^1 і C_2^1 обертаємо навколо осі Oz і в результаті отримуємо циліндри $C_{zt}^2, t = 1, 2, \ldots 8,$ (рис.3.11); циліндри C_3^1 і C_4^1 обертаємо навколо осі Oy і в результаті отримуємо циліндри $C_{yt}^2, t = 1, 2, \ldots 8,$; циліндри C_5^1 і C_6^1 обертатаємо навколо осі Ox і в результаті отримуємо циліндри $C_{xt}^2, t = 1, 2, \ldots 8$.

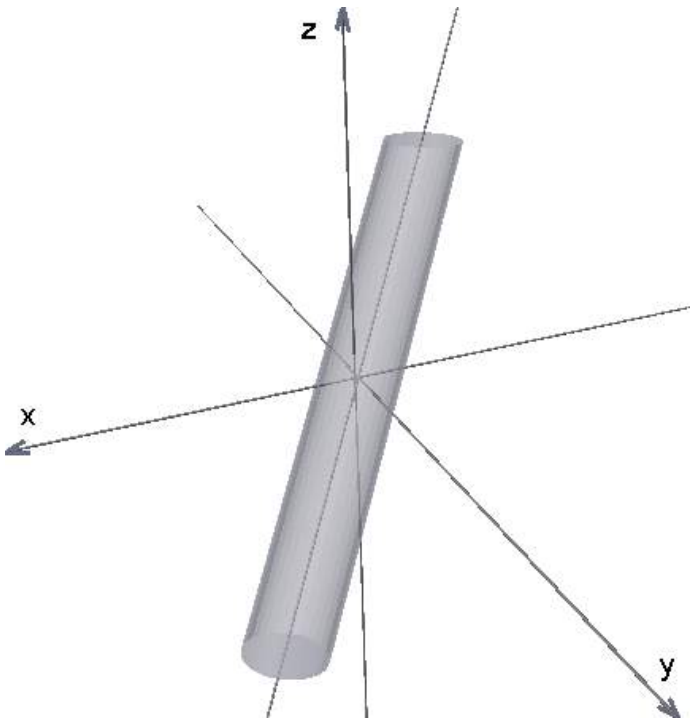


Рис. 3.11. Еліптичний циліндр C_{z1}^2

Виконаємо трансляцію трійки циліндрів $C_{xt}^2, C_{yt}^2, C_{zt}^2$, $t \in \{1,2,...8\}$, на вектори V_s, $s = 1,2,\ldots,8$. Таким чином, отримуємо в кожній з вершин V_s, $s = 1,2,\ldots,8$, з $P_i(u_i)$ три еліптичні циліндри $C_{xt}^3, C_{yt}^3, C_{zt}^3$ (рис.3.12), які описуються наступними рівняннями

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_{s1}\left(u_i,u_j\right) = \left(\sqrt{2}\varphi_{xk_x}(u_i,u_j) + \varphi_{yk_y}(u_i,u_j) + \varphi_{zk_z}(u_i,u_j)\right)^2 \\
&+\left(\varphi_{zk_z}(u_i,u_j) - \varphi_{yk_y}(u_i,u_j)\right)^2 - 2r_j^2 = 0, \\
&\tilde{\phi}_{s2}\left(u_i,u_j\right) = \left(\varphi_{xk_x}(u_i,u_j) + \sqrt{2}\varphi_{yk_y}(u_i,u_j) + \varphi_{zk_z}(u_i,u_j)\right)^2 \\
&+\left(\varphi_{zk_z}(u_i,u_j) - \varphi_{xk_x}(u_i,u_j)\right)^2 - 2r_j^2 = 0, \\
&\tilde{\phi}_{s3}\left(u_i,u_j\right) = \left(\varphi_{xk_x}(u_i,u_j) + \varphi_{yk_y}(u_i,u_j) + \sqrt{2}\varphi_{zk_z}(u_i,u_j)\right)^2 \\
&+\left(\varphi_{yk_y}(u_i,u_j) - \varphi_{xk_x}(u_i,u_j)\right)^2 - 2r_j^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

де $s = k_x + 2k_y + 4k_z + 1,\ k_x, k_y, k_z \in \{0,1\}$,

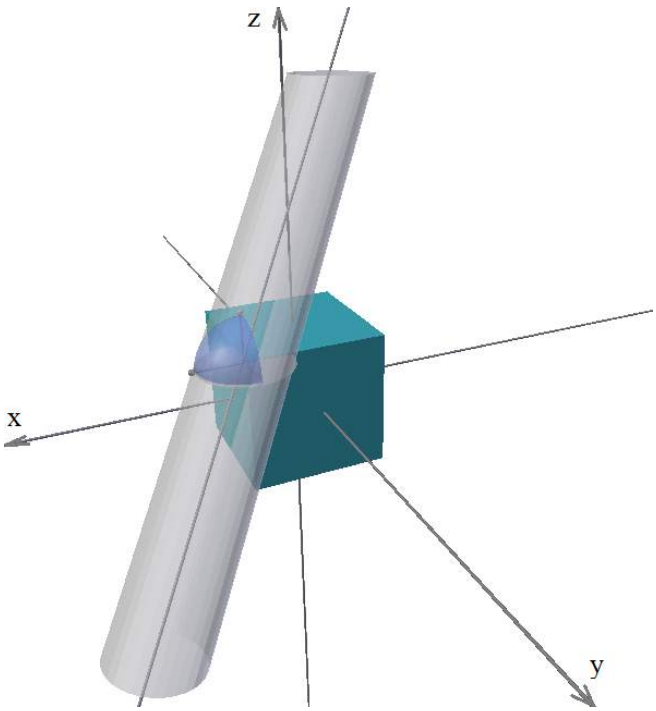


Рис. 3.12. Еліптичний циліндр C_{z1}^3

Для того, щоб виділити необхідні частини еліптичних циліндрів в кожній вершині $P_i(u_i)$ ми формуємо такі рівняння допоміжних площин, які проходять через трійки точок, що лежать на відстані r_j з вершин V_i на продовженні ребер $P_i(u_i)$ (рис.3.13):

$$\tilde{\chi}_s\left(u_i, u_j\right) = \varphi_{xk_x}(u_i, u_j) + \varphi_{yk_y}(u_i, u_j) + \varphi_{zk_z}(u_i, u_j) - r_j, \qquad (3.21)$$

де $s = k_x + 2k_y + 4k_z + 1,\ k_x, k_y, k_z \in \{0,1\}$,

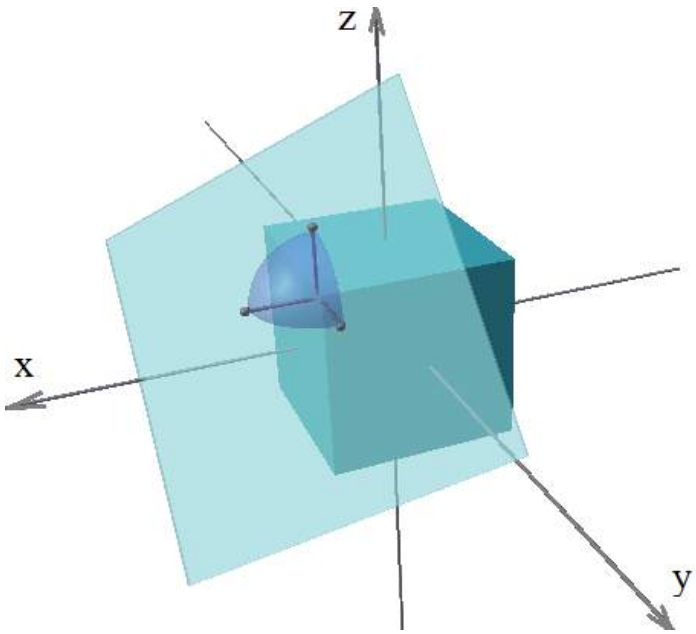


Рис. 3.13. Допоміжна площина для вершини V_1

Використовуючи функції (3.19) - (3.21) , формуємо функцію

$$\zeta_s\left(u_1,u_2\right)=\min\left\{\phi_s\left(u_i,u_j\right),\tilde{\chi}_s\left(u_i,u_j\right),\tilde{\phi}_{sk}\left(u_i,u_j\right),k=1,2,3\right\},s=1,\ldots,8. \qquad (3.22)$$

Легко перевірити, що якщо хоча б одна з нерівностей $\zeta_i\left(u_i,u_j\right)>0$, $s=1,\ldots,8,$ виконується, то $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$. На підставі (3.22) побудуємо функцію

$$\zeta\left(u_i,u_j\right)=\max_{s=1,\ldots 8}\zeta_s\left(u_i,u_j\right), \qquad (3.23)$$

Таким чином, якщо $\zeta\left(u_i,u_j\right)>0$ потім $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$,

Звернемо увагу, що якщо хоча б одна з нерівностей або $\chi(u_i,u_j)>0$, або $\tau(u_i,u_j)>0$, або $\zeta(u_i,u_j)>0$ (3.23) виконується, то $P_i(u_i)\bigcap S_j(u_j)=\varnothing$.

Це дозволяє нам будувати Ф-функцію для паралелепіпеда $P_i(u_i)$ і кулі $S_j(u_j)$:

$$\Phi_{ij}^{PS}(u_i,u_j)=\max\left\{\chi(u_i,u_j),\tau(u_i,u_j),\zeta(u_i,u_j)\right\}.$$

Ф-функція $P_i(u_i)$ і $cl(R^3\setminus P)$ має вигляд

$$\Phi_i^P(u_i)=\min\left\{F_{kj}(u_i),\ k\in\{1,2,...,6\},\ j\in\{1,2,...,8\}\right\},$$

де

$$F_{1j}(u_i)=-x_i-g_iV_j+l\,,F_{2j}(u_i)=x_i-g_iV_j+l\,,$$

$$F_{3j}(u_i)=-y_i-r_iV_j+w,F_{4j}(u_i)=y_i-r_iV_j+w\,,$$

$$F_{5j}(u_i)=-z_i-q_iV_j+h_2\,,\ \ F_{6j}(u_i)=z_i-q_iV_j-h_1,$$

Ф-функція $S_i(u_i)$ і $cl(R^3\setminus P)$ може бути сформульована як

$$\Phi_i^s(u_i)=\min\left\{F_k(u_i),\ k\in\{1,2,...,6\}\right\},$$

де

$$F_1(u_i)=-x_i-r_i+l\,,\ F_2(u_i)=x_i-r_i+l\,,$$

$$F_3(u_i)=-y_i-r_i+w\,,\ F_4(u_i)=y_i-r_i+w\,,$$

$$F_5(u_i)=-z_i-r_i+h_2\,,\ F_6(u_i)=z_i-r_i-h_1\,.$$

3.5 Ф-функція кулі та неорієнтованого багатогранного тіла

Нехай задана куля

$S=\{(x,y,z)\in R^3:(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2-r^2=0\}$,

де $u_s=(x_s,y_s,z_s)$ координати центру S, і випуклий багатогранник P з вершинами $V_j=(e_j,f_j,h_j),\ j\in J=\{1,2,...,n\}$, які задані відносно власної системи координат $Ox'y'z'$ багатогранного тіла P. Положення системи

координат $Ox'y'z'$ відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ визначається вектором $v_p = (x_p, y_p, z_p)$.

Вважаємо, що нормальні рівняння площин, що проходять через грані F_i, $i \in I$, багатогранного тіла P мають вигляд

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0,\ i \in I = \{1, 2, ..., m\} .$$

Для прямої L_k, що проходить через ребро E_k, визначимо направляючі косинуси

$$\xi_k = (\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k) = \left(\frac{e_{k_s} - e_{k_e}}{g_k}, \frac{f_{k_s} - f_{k_e}}{g_k}, \frac{h_{k_s} - h_{k_e}}{g_k} \right) , \qquad (3.24)$$

де $g_k = \sqrt{(e_{k_s} - e_{k_e})^2 + (f_{k_s} - f_{k_e})^2 + (h_{k_s} - h_{k_e})^2}$,$(e_{k_s}, f_{k_s}, h_{k_s})$, $(e_{k_e}, f_{k_e}, h_{k_e})$ – координати вершин ребра E_k , $k \in K = (1, 2, ..., q = n + m - 2)$.

Багатогранник P може повертатися на кути α', β', γ', навколо осей Ox, Oy и Oz відповідно. Матриця перетворення повороту, яка переводить точку, задану відносно нерухомої системи координат $Oxyz$, у точку, задану відносно системи координат $Ox'y'z'$, має вигляд

$$R' = \begin{pmatrix} \cos\beta'\cos\gamma' & \sin\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma'\sin\beta'\sin\alpha' & \sin\gamma'\sin\alpha' - \cos\gamma'\sin\beta'\cos\alpha' \\ -\sin\gamma'\cos\beta' & \cos\gamma'\cos\alpha' - \sin\gamma'\sin\beta'\sin\alpha' & \sin\alpha'\cos\gamma' + \sin\gamma'\sin\beta'\cos\alpha' \\ \sin\beta' & -\cos\beta'\sin\alpha' & \cos\alpha'\cos\beta' \end{pmatrix}.$$

Вектор руху P позначимо через $u_p = (v_p, \vartheta_p) \in R^6$, де $\vartheta_p = (\alpha', \beta', \gamma')$. Багатогранник P, зміщений на вектор u_p, позначимо через $P(u_p)$. Сферу S, трансльовану на вектор u_s, позначимо через $S(u_s)$.

Для побудови $\Phi-$функції для $S(u_s)$ й $P(u_p)$ необхідно врахувати наступні види дотиків:

1) куля $S(u_s)$ торкається грані P_i багатогранного тіла $P(u_p)$;

2) куля $S(u_s)$ торкається ребра E_k багатогранного тіла $P(u_p)$;

3) куля $S(u_s)$ торкається вершини V_j багатогранного тіла $P(u_p)$.

Розглянемо докладно кожний вид дотику при $u_p = 0$. Для моделювання першого виду дотику введемо площини, які визначаються наступними рівняннями

$$\Psi_{1i}(u_s) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i - r = 0,\ i \in I\ .$$

Побудуємо функцію

$$\Psi_1(u_s) = \max\{\Psi_{1i}(u_s),\ i \in I\}. \tag{3.25}$$

Очевидно, що якщо $\Psi_1(u_s) > 0$, то $\operatorname{int} P(0) \cap \operatorname{int} S(u_s) = \varnothing$, де $\operatorname{int} D$ внутрішність D.

Для другого виду дотику поверхня $0-$рівня $\Phi-$функції складається із частин поверхонь циліндрів C_j радіуса r, осі яких проходять через ребра E_k, $k \in K$. Для того, щоб визначити необхідні частини поверхонь цих циліндрів виконаємо наступні побудови. Використовуючи направляючі косинуси (1), визначимо кути

$$\begin{aligned} \sin\theta_k &= \frac{\cos\beta_k}{\sqrt{\cos^2\alpha_k + \cos^2\beta_k}}, \\ \cos\theta_k &= \frac{\cos\alpha_k}{\sqrt{\cos^2\alpha_k + \cos^2\beta_k}}, \\ \sin\gamma_k &= \sqrt{1-\cos^2\gamma_k}, k \in K. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Використовуючи кути (3.26) і рівняння $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ циліндра C, побудуємо рівняння циліндрів C_k, отриманих у результаті повороту циліндра

C на кут γ_k навколо осі Oy й кут θ_k навколо осі $Oz: x''^2 + y''^2 - r^2 = 0$, де x'' й y'' – компоненти вектора $X'' = (x'', y'', z'')^{\mathrm{T}}$, $X'' = R_{\gamma\theta k} X$,

$$R_{\gamma\theta k} = \begin{pmatrix} \cos\gamma_k \cos\theta_k & \cos\gamma_k \sin\theta_k & -\sin\gamma_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k & 0 \\ \sin\gamma_k \cos\theta_k & \sin\gamma_k \sin\theta_k & \cos\gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^x_{\gamma\theta k} \\ R^y_{\gamma\theta k} \\ R^z_{\gamma\theta k} \end{pmatrix}$$

або $(R^x_{\gamma\theta k} X)^2 + (R^y_{\gamma\theta k} X)^2 - r^2 = 0$, $k \in K$.

Тоді рівняння циліндрів C_k, трансльованих на вектори $V_{k_s} = (e_{k_s}, f_{k_s}, h_{k_s})$ (вершина ребра k) будуть мати вигляд:

$$\Gamma_{1k}(u_s) = \left(R^x_{\gamma\theta k}(X - V_{k_s})\right)^2 + \left(R^y_{\gamma\theta k}(X - V_{k_s})\right)^2 - r^2 = 0,\ k \in K.$$

У кожній вершині $V_j = (e_j, f_j, h_j)$, $j \in J$, побудуємо точки

$$\begin{aligned} T^0_{jk_t} &= (\eta^0_{jk_t}, \chi^0_{jk_t}, \xi^0_{jk_t}) = (rA_{k_t}, rB_{k_t}, rC_{k_t}), \\ T^0_{jk_l} &= (\eta^0_{jk_l}, \chi^0_{jk_l}, \xi^0_{jk_l}) = (rA_{k_l}, rB_{k_l}, rC_{k_l}), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$T_{jk_t} = (\eta_{jk_t}, \chi_{jk_t}, \xi_{jk_t}) = V_j + T^0_{jk_t}, T_{jk_l} = (\eta_{jk_l}, \chi_{jk_l}, \xi_{jk_l}) = V_j + T^0_{jk_l},$$

де k_t й k_l – індекси граней багатогранного тіла P, перетинанням яких є ребро E_k, $k \in K$.

Тоді, рівняння площин, що проходять через трійки точок $\{T_{j_{k_s} k_t}, T_{j_{k_s} k_l}, T_{j_{k_e} k_l}\}$, мають вигляд

$$\Gamma_{2k}(u_s)=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ e_{j_{k_s}}+rA_{k_t} & f_{j_{k_s}}+rB_{k_t} & h_{j_{k_s}}+rC_{k_t} & 1 \\ e_{j_{k_s}}+rA_{k_l} & f_{j_{k_s}}+rB_{k_l} & h_{j_{k_s}}+rC_{k_l} & 1 \\ e_{j_{k_e}}+rA_{k_l} & f_{j_{k_e}}+rB_{k_l} & h_{j_{k_e}}+rC_{k_l} & 1 \end{vmatrix},$$

де j_{k_s}, j_{k_e} – індекси вершин ребра $E_k, k \in K$.

На підставі функцій $\Gamma_{1k}(u_s)$ і $\Gamma_{2k}(u_s), k \in K$, побудуємо функцію

$$\Psi_{2k}(u_s)=\min\{\Gamma_{1k}(u_s),\Gamma_{2k}(u_s)\},\ k \in K.$$

Очевидно, що якщо, принаймні, одна нерівність $\Psi_{2k}(u_s)>0$ виконується, то $P(0)\cap S(u_s)=\varnothing$. Це дозволяє побудувати функцію

$$\Psi_2(u_s)=\max\{\Psi_{2k}(u_s), k \in K\}. \tag{3.28}$$

Очевидно, що якщо $\Psi_2(u_s)>0$, то $P(0)\cap S(u_s)=\varnothing$.

У випадку третього виду дотику поверхня $0-$рівня $\Phi-$функції складається із частин поверхонь сфер S_j, які визначаються рівняннями

$$W_{1j}(u_s)=(x-e_j)^2+(y-f_j)^2+(z-h_j)^2-r^2=0,\ \ j \in J\ . \tag{3.29}$$

Для того, щоб виділити необхідні частини поверхонь сфер (3.29) виконаємо наступні побудови. У кожній вершині V_j введемо точки

$$V_{jk}^1=V_j+V_{jk}^0,\ j \in J, k \in \Omega_j,$$

де $V_{jk}^0 = \pm(r\cos\alpha_k, r\cos\beta_k, r\cos\gamma_k)$ (знак “+ ” береться, якщо направляючі косинуси визначаються вершиною V_j, а знак “– ” – в іншому випадку), Ω_j – множина індексів ребер багатогранного тіла, перетином яких є вершина V_j.

Легко перевірити, що V_{jk}^1 є точками перетину прямих L_k, що проходять через ребра E_k та куль S_j, $j \in J$, $k \in \Omega_j$.

Нехай E_k – ребро з вершинами V_j і V_p. Для вершини V_j візьмемо суміжні пари точок $\{T_{jk_t}^0 = (\eta_{jk_t}^0, \chi_{jk_t}^0, \xi_{jk_t}^0),\ T_{jk_l}^0 = (\eta_{jk_l}^0, \chi_{jk_l}^0, \xi_{jk_l}^0)\}$ (3.27). Повернемо $T_{jk_t}^0$, $T_{jk_l}^0$, V_j й V_p на кут $-\theta_k$ навколо осі Oz й на кут $-\gamma_k$ навколо осі Oy. У результаті одержимо наступні точки

$$T_{jk_t}^0(-\theta_k, -\gamma_k) = (\tilde{\eta}_{jk_t}, \tilde{\chi}_{jk_t}, \tilde{\xi}_{jk_t}) = (R_{\gamma\theta k} T_{jk_t}^0)^T,$$

$$T_{jk_l}^0(-\theta_k, -\gamma_k) = (\tilde{\eta}_{jk_l}, \tilde{\chi}_{jk_l}, \tilde{\xi}_{jk_l}) = (R_{\gamma\theta k} T_{jk_l}^0)^T,$$

$$V_j(-\theta_k, -\gamma_k) = (\tilde{x}_{jk}, \tilde{y}_{jk}, \tilde{z}_{jk}) = (R_{\gamma\theta k} V_j)^T,$$

$$V_p(-\theta_k, -\gamma_k) = (\tilde{x}_{pk}, \tilde{y}_{pk}, \tilde{z}_{pk}) = (R_{\gamma\theta k} V_p)^T, k \in \Omega_j,$$

де $\cos\gamma_k$ – направляючий косинус прямої L_k, що проходить через ребро E_k.

Очевидно, що після повороту ребро $E_k(-\theta_k, -\gamma_k)$, $k \in K$, стане паралельно осі Oz.

Кути ϕ_{jk} між прямими S_{jk}, що проходять через пари точок $T_{jk_t}^0(-\theta_k, -\gamma_k)$ і $T_{jk_l}^0(-\theta_k, -\gamma_k)$, $k \in K$, й віссю Ox рівні

$$\sin\varphi_{jk} = \frac{A_{jk}}{C_{jk}}, \cos\varphi_{jk} = \frac{B_{jk}}{C_{jk}}, j \in J, k \in \Omega_j,$$

де $A_{jk} = \tilde{\chi}_{jk_l} - \tilde{\chi}_{jk_t}$, $B_{jk} = \tilde{\eta}_{jk_t} - \tilde{\eta}_{jk_l}$, $C_{jk} = \sqrt{(A_{jk})^2 + (C_{jk})^2}$.

Розглянемо еліптичний циліндр Λ, заданий рівнянням $2x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Побудуємо рівняння циліндрів $\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $\Lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, отриманих у результаті повороту циліндра Λ на кути $\frac{\pi}{4}$ і $-\frac{\pi}{4}$ навколо осі Oy:

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right)=\{X\in R^3,(x-z)^2+y^2-r^2=0\},$$

$$\Lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\{X\in R^3,(x+z)^2+y^2-r^2=0\}.$$

Рівняння циліндрів $\Lambda_{jk}(\phi_k,\gamma_k,\theta_k)$, отриманих у результаті повороту циліндрів $\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right)$ або $\Lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ на кути ϕ_k навколо осі Oz, на кути γ_k навколо осі Oy й на кути θ_k навколо осі Oz, будуть мати такий вигляд :

$$W_{2jk}(u_s)=\begin{cases}\left(R^x_{\varphi\gamma\theta k}X\right)^2+\left(R^y_{\varphi\gamma\theta k}X-R^z_{\varphi\gamma\theta k}X\right)^2-r^2=0,\ \textit{если}\ \tilde{z}_{jk}>\tilde{z}_{pk},\\ \left(R^x_{\varphi\gamma\theta k}X\right)^2+\left(R^y_{\varphi\gamma\theta k}X+R^z_{\varphi\gamma\theta k}X\right)^2-r^2=0,\textit{если}\ \tilde{z}_{jk}<\tilde{z}_{pk},\end{cases}$$

де

$$R_{\varphi\gamma\theta k}=\begin{pmatrix}R^x_{\varphi\gamma\theta k}\\ R^y_{\varphi\gamma\theta k}\\ R^z_{\varphi\gamma\theta k}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi_k\cos\gamma_k\cos\theta_k+\sin\varphi_k\sin\theta_k & \cos\varphi_k\cos\gamma_k\sin\theta_k-\sin\varphi_k\cos\theta_k & -\cos\varphi_k\sin\gamma_k\\ \sin\varphi_k\cos\gamma_k\cos\theta_k-\cos\varphi_k\sin\theta_k & \sin\varphi_k\cos\gamma_k\sin\theta_k+\cos\varphi_k\cos\theta_k & -\sin\varphi_k\sin\gamma_k\\ \sin\gamma_k\cos\theta_k & \sin\gamma_k\sin\theta_k & \cos\gamma_k\end{pmatrix},$$

$j,p\in J,k\in\Omega_j$.

У результаті трансляції циліндрів $\Lambda_{jk}(\phi_{jk},\gamma_k,\theta_k)$ на вектори V_j отримаємо

$$W_{2jk}(u_s)=\begin{cases}\left(R^x_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)\right)^2+\left(R^y_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)-R^z_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)\right)^2-r^2=0,\ \tilde{z}_{jk}>\tilde{z}_{pk},\\ \left(R^x_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)\right)^2+\left(R^y_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)+R^z_{\varphi\gamma\theta k}(X-V_j)\right)^2-r^2=0,\tilde{z}_{jk}<\tilde{z}_{pk},\end{cases}$$

$j,p\in J, k\in\Omega_j$.

Побудуємо рівняння площин, що проходять через трійки точок V^1_{jk}, T_{jk_t}, T_{jk_l} у наступному вигляді:

$$W_{3jk}(u_s)=\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ e_j+r\cos\alpha_k & f_j+r\cos\beta_k & h_j+r\cos\gamma_k & 1\\ e_j+rA_{k_t} & f_j+rB_{k_t} & h_j+rC_{k_t} & 1\\ e_j+rA_{k_l} & f_j+rB_{k_l} & h_j+rC_{k_l} & 1\end{vmatrix}=0,$$

$j\in J, k\in\Omega_j$.

Використовуючи функції $W_{1j}(u_s)$, $W_{2jk}(u_s)$, і $W_{3jk}(u_s)$, $j\in J, k\in\Omega_j$, побудуємо для кожної $j-$ої вершини наступні функції

$$\Psi_{3j}(u_s)=\min\{W_{1j}(u_s),W_{2jk}(u_s),W_{3jk}(u_s),\ k\in\Omega_j\},\ j\in J\ .$$

Очевидно, що якщо хоча б одне з нерівностей $\Psi_{3j}(u_s)>0,\ \ j\in J$, виконується, то $intP(0)\cap intS(u_s)=\varnothing.$ Ця властивість дозволяє побудувати функцію

$$\Psi_3(u_s)=\max\{\Psi_{3j}(u_s),\ j\in J\}.$$

На підставі функцій $\Psi_i(u_s),\ i=1,2,3,$ побудуємо функцію

$$\tilde{\Phi}(u_s)=\max\{\Psi_i(u_s), i=1,2,3\}\ ,$$

яка має наступну властивість: $\tilde{\Phi}(u_s) \geq 0$, якщо виконується хоча б одне з нерівностей $\Psi_1(u_s) \geq 0, \Psi_2(u_s) \geq 0, \Psi_3(u_s) \geq 0$.

Таким чином, $\tilde{\Phi}(u_s)$ є Φ-функцією для $S(u_s)$ і $P(0)$.

Таким чином, Ф-функція для сфери $S(u_s)$ і неорієнтованого опуклого багатогранного тіла $P(u_p)$ буде мати такий вигляд

$$\Phi(u_s, u_p) = \tilde{\Phi}\left(R'(u_s - v_p)\right).$$

На основі побудованої Ф-Функції легко може бути отримана Ф-функція для кулі та неорієнтованого неопуклого багатогранного тіла. Для побудови такої Ф-Функції необхідно скористатися методом побудови Ф-Функції для складних тривимірних тіл.

3.6 Нормалізовані Ф-функції для тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами, і півпростору

Перш ніж будувати квазі-Ф-функції для пар тривимірних тіл, побудуємо нормалізовані Ф-функції для основних тривимірних тіл і замкнутого півпростору H_l, де

$$H_l = \left\{(x, y, z) \in R^3 : f_l(X, Y_l) = a_l(\alpha_l)x + b_l(\alpha_l, \beta_l)y + c_l(\alpha_l, \beta_l)z + \delta_l \leq 0\right\},$$
$$a_l(\alpha_l) = \sin\alpha_l, b_l(\alpha_l, \beta_l) = \sin\beta_l \cos\alpha_l, c_j(\alpha_l, \beta_l) = \cos\beta_l \cos\alpha_l, \qquad (3.30)$$
$$Y_l = (\alpha_l, \beta_l, \delta_l).$$

Неважко помітити, що кожному вектору $Y_l = (\alpha_l, \beta_l, \delta_l) \in R^3$ відповідає деякий напівпростір $H_l = \left\{X = (x, y, z) \in R^3 : f_l(X, Y_l) \leq 0\right\}$ і площина

$\Upsilon_l = fr H_l = \left\{ XR^3 : f_l\left(X, Y_l\right) = 0 \right\}$. Напівпростір H_l і площину Υ_l, яка відповідає вектору Y_l, позначимо $H_l\left(Y_l\right)$ і $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$ відповідно.

Вектор нормалі площини $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$ має вигляд

$$N_l = \left(a_l\left(\alpha_l\right), b_l\left(\alpha_l, \beta_l\right), c_l\left(\alpha_l, \beta_l\right)\right). \tag{3.31}$$

Оскільки $\|N_l\| = 1$, то величина $\left| f_l(X_0, Y_l) \right|$ дорівнює відстані від довільної точки простору $X_0 \in R^3$ до площини $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$.

Розглянемо опуклий багатогранник P_i, у якого вершини мають координати $p_{is} = \left(p_{is}^1, p_{is}^2, p_{is}^3\right), s \in \{1, \ldots, \sigma_i\}$, де σ_i - кількість вершин багатогранного тіла.

Положення багатогранного тіла P_i в тривимірному Евклідовому просторі R^3 задається вектором трансляції $\nu_i = \left(x_i, y_i, z_i\right)$ і трьома кутами повороту $\theta_i = \left(\varphi_i, \psi_i, \omega_i\right)$. Багатогранник P_i з вектором руху $u_i = \left(\nu_i, \theta_i\right) \in R^6$ позначимо $P_i\left(u_i\right)$.

Задамо матрицю повороту у вигляді

$$R_i = \begin{pmatrix} m_i \\ o_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} \\ o_{i1} & o_{i2} & o_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

де

$$m_{i1} = \cos\psi_i \cos\omega_i,$$
$$m_{i2} = \sin\phi_i \sin\psi_i \cos\omega_i + \cos\phi_i \sin\omega_i,$$
$$m_{i3} = -\cos\phi_i \sin\psi_i \cos\omega_i + \sin\phi_i \sin\omega_i,$$
$$o_{i1} = -\cos\psi_i \sin\omega_i,$$
$$o_{i2} = -\sin\phi_i \sin\psi_i \sin\omega_i + \cos\phi_i \cos\omega_i,$$
$$o_{i3} = \cos\phi_i \sin\psi_i \sin\omega_i + \sin\phi_i \cos\omega_i,$$
$$q_{i1} = \sin\psi_i,$$
$$q_{i2} = -\sin\phi_i \cos\psi_i,$$
$$q_{i3} = \cos\phi_i \cos\psi_i.$$

Функція

$$\Phi_{il}\left(u_i, Y_l\right) = \min\left\{ f_l\left(p_{is}\left(u_i\right), Y_l\right), s \in \left\{1, \ldots, \sigma_i\right\}\right\}, \qquad (3.32)$$

де $p_{is}\left(u_i\right) = \left(m_i^T p_{is} + x_i, o_i^T p_{is} + y_i, q_i^T p_{is} + z_i\right), s \in \left\{1, \ldots, \sigma_i\right\}$, є нормалізованої Ф-функцією для опуклого багатогранного тіла $P_i\left(u_i\right)$ і півпростору $H_l\left(Y_l\right)$.

Відомо, що функція виду $F(x) = \max(\min)\left\{ f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)\right\}$ є безперервною і всюди визначеною, якщо $f_k(x)$, K = 1,2, ..., m, безперервні і всюди визначены функції, $x \in R^n$. Тому функція (3.32) неперервна і всюди визначена.

Очевидно, вершини багатогранного тіла $P_i\left(u_i\right)$, повернутого на кути $\theta_i = \left(\varphi_i, \psi_i, \omega_i\right)$ і трансльованого на вектор $\nu_i = \left(x_i, y_i, z_i\right)$, мають координати

$$p_{is}\left(u_i\right) = \left(m_i^T p_{is} + x_i, o_i^T p_{is} + y_i, q_i^T p_{is} + z_i\right), s \in \left\{1, \ldots, \sigma_i\right\}.$$

Значить, відхилення вершини $p_{is}\left(u_i\right)$ багатогранного тіла $P_i\left(u_i\right)$ від $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$ $f_l\left(p_{is}\left(u_i\right), Y_l\right), s \in \left\{1, \ldots, \sigma_s\right\}$,

а величина $\Phi_{il}\left(u_i, Y_l\right) = \min\left\{ f_l\left(p_{is}\left(u_i\right), Y_l\right), s \in \left\{1, \ldots, \sigma_s\right\}\right\}$ дорівнює величині мінімального відхилення серед всіх вершин багатогранного тіла.

Функція $\Phi_{il}(u_i, Y_l) = \min\left\{ f_l\left(p_{is}(u_i), Y_l\right), s \in \{1, \ldots, \sigma_s\}\right\}$ є всюди визначеною і безперервної в силу всюди визначеності і безперервності функції $f_l(X, Y_l)$.

Оскільки багатогранник $P_i(u_i)$ є опуклим, то $\Phi_{il}(u_i, Y_l) > 0$, якщо жодна з його вершин не належить півпростору $H_l(Y_l)$, а значить $clP_i(u_i) \cap clH_l(Y_l) = \varnothing$. Очевидно, що в цьому випадку значення функції $\Phi_{il}(u_i, Y_l)$ дорівнює відстані між площиною $\Upsilon_l(Y_l)$ і найближчою до неї вершиною багатогранного тіла, тобто відстані від багатогранного тіла до півпростору $H_l(Y_l)$.

Рівність $\Phi_{il}(u_i, Y_l) = 0$ виконується в тому випадку, коли хоча б одна вершина багатогранного тіла $P_i(u_i)$ належить площині $\Upsilon_l(Y_l)$, і не існує вершин, що належать півпростору $H_l(Y_l)$, тобто $intP_i(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$ і $frP_i(u_i) \cap frH_l(Y_l) \neq \varnothing$.

Тому, $\Phi_{il}(u_i, Y_l) < 0$, якщо хоча б одна з вершин багатогранного тіла належить півпростору $H_l(Y_l)$, тобто $intP_i(u_i) \cap intH_l(Y_l) \neq \varnothing$.

Ф-функція сферичного конусу і півпростору. Оскільки положення сферичного конусу sK_i в тривимірному Евклідовому просторі R^3 визначається вектором трансляції $\nu_i = (x_i, y_i, z_i)$ і двома кутами повороту $\theta_i = (\varphi_i, \psi_i)$, то співвідношення (3.32) приймають вигляд

$$m_{i1} = \cos\psi_i, m_{i2} = \sin\phi_i \sin\psi_i, m_{i3} = -\cos\phi_i \sin\psi_i \ ,$$

$$o_{i1} = 0, o_{i2} = \cos\phi_i, o_{i3} = \sin\phi_i,$$

$$q_{i1} = \sin\psi_i, q_{i2} = -\sin\phi_i \cos\psi_i, q_{i3} = \cos\phi_i \cos\psi_i.$$

Перш, ніж побудувати нормалізовану Ф-функцію для сферичного конусу $sK_i(u_i)$ і півпростору $H_l(Y_l)$, побудуємо нормалізовану Ф-функцію для сегмента $G_{1i}(u_i) \subset sK_i(u_i)$ і півпростору $H_l(Y_l)$.

Введемо функції

$$\Phi_{il}^{01}\left(u_i,Y_l\right)=\max\left\{\min\left\{\phi_{1il}\left(u_i,Y_l\right),\phi_{2il}\left(u_i,Y_l\right)\right\},\phi_{3il}\left(u_i,Y_l\right)\right\},$$

де

$$\phi_{1il}\left(u_i,Y_l\right)=f_l\left(v_i,Y_l\right)+h_i\left(q_i,N_l\right)-r_{1i}\sqrt{1-\left(q_i,N_l\right)^2},$$

$$\phi_{2il}\left(u_i,Y_l\right)=f_l\left(v_i,Y_l\right)+\left(h_i+w_{1i}\right)\left(q_i,N_l\right)-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sqrt{1-\left(q_i,N_l\right)^2},$$

$$\phi_{3il}\left(u_i,Y_l\right)=f_l\left(v_i,Y_l\right)+\left(h_i-\tau_{1i}\right)\left(q_i,N_l\right)-\rho_{1i}.$$

Функція $\Phi_{il}^{01}\left(u_i,Y_l\right)$ є нормалізованою Ф-функцією для сегменту кулі $G_{1i}\left(u_i\right)$ і півпростору $H_l\left(Y_l\right)$.

Зауважимо, що сегмент G_{1i} радіусу основи r_{1i} і висоти w_{1i} представляється як перетин кулі S_{1i} радіусу ρ_{1i} з центром в точці M_i (рис. 3.14) і усіченого конуса F_{1i} висоти w_{1i} і радіусів підстав $L_i'A_{i1}=r_{1i}$ і $N_i'A_{i2}=\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}$ відповідно. Утворюючі цього усіченого конуса торкаються кулі S_{1i} в точках кола $S_{1i}^{xy}=\left\{\left(x,y\right)\in R^2:x^2+y^2-\left(r_{1i}\right)^2=0\right\}$.

Усічений конус F_{1i} і кулю S_{1i}, що відповідають сегменту $G_{1i}\left(u_i\right)$, позначимо $F_{1i}\left(u_i\right)$ і $S_{1i}\left(u_i\right)$ відповідно. Позначимо найближчі до площини $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$ точки основ конуса $F_{1i}\left(u_i\right)$ через A_{i1}, а точку кулі $S_{1i}\left(u_i\right)$, найближчу до $\Upsilon_l\left(Y_l\right)$, - через A_{i3}.

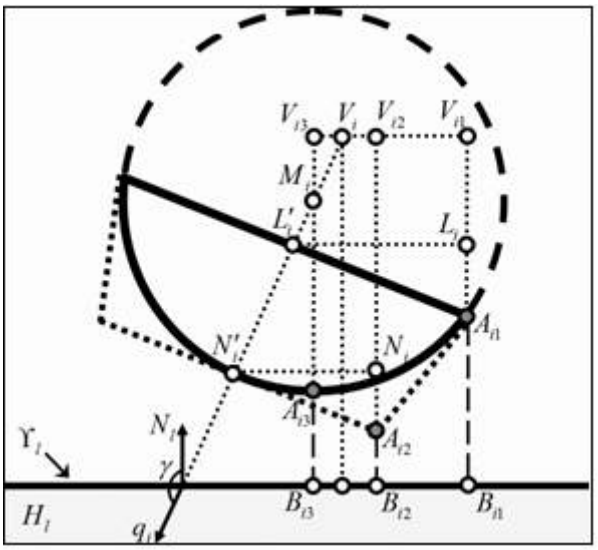


Рис. 3.14. Відхилення контрольних точок від площини $\Upsilon_l(Y_l)$

Значення функцій $f_l(A_{ik},Y_l), k=1,2,3,$ визначають відхилення точок $A_{ik}, k=1,2,3$, від площини $\Upsilon_l(Y_l)$ відповідно.

Вочевидь, що сегмент $G_{1i}(u_i)$ не має з півпростором $H_l(Y_l)$ загальних внутрішніх точок, якщо с цим півпростором не має загальних внутрішніх точок або усічений конус $F_{1i}(u_i)$, або куля $S_{1i}(u_i)$, тобто виконана хоча б одна з умов:

1) $f_l(A_{i1},Y_l)\geq 0$ і $f_l(A_{i2},Y_l)\geq 0$;

2) $f_l(A_{i3},Y_l)\geq 0$.

Нехай точка $V_i(\nu_i), \nu_i=(x_i,y_i,z_i)$, - початок власної системи координат сферичного конусу $sK_i(u_i)$. Обчислимо відхилення точки A_{i1} від площини $\Upsilon_l(Y_l)$:

$$f_l(A_{i1},Y_l)=A_{i1}B_{i1}=V_{i1}B_{i1}-V_{i1}L_i-L_iA_{i1}=f_l(V_{i1},Y_l)-V_iL_i'\sin(\angle V_iL_i'L_i)-$$
$$-L_i'A_{i1}\sin(\angle L_iL_i'A_{i1})=f_l(\nu_i,Y_l)-h_i\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)-r_{1i}\sin(\pi-\gamma)=f_l(\nu_i,Y_l)+h_i\cos\gamma-$$
$$-r_{1i}\sin\gamma=f_l(\nu_i,Y_l)+h_i\cos\gamma-r_{1i}\sqrt{1-\cos^2\gamma}=f_l(\nu_i,Y_l)+h_i(q_i,N_l)-r_{1i}\sqrt{1-(q_i,N_l)^2},$$

де γ - кут між векторами N_l і q_i, і оскільки $\|N_l\|=\|q_i\|=1$, то $\cos\gamma=(q_i,N_l)$.

Відхилення точки A_{i2} від площини $\Upsilon_l(Y_l)$ обчислюється таким чином:

$$f_l(A_{i2},Y_l)=A_{i2}B_{i2}=V_{i2}B_{i2}-V_{i2}N_i-N_iA_{i1}=$$
$$f_l(V_{i2},Y_l)-V_iN_i'\sin(\angle V_iN_i'N_i)-$$
$$-N_i'A_{i2}\sin(\angle N_iN_i'A_{i2})$$
$$=f_l(\nu_i,Y_l)-(h_i+w_{1i})\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sin(\pi-\gamma)=$$
$$=f_l(\nu_i,Y_l)+(h_i+w_{1i})\cos\gamma-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sin\gamma=$$
$$f_l(\nu_i,Y_l)+(h_i+w_{1i})\cos\gamma-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sqrt{1-\cos^2\gamma}=$$
$$=f_l(\nu_i,Y_l)+(h_i+w_{1i})(q_i,N_l)-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sqrt{1-(q_i,N_l)^2}.$$

Відхилення точки A_{i3}, може бути отримано за формулою

$$f_l(A_{i3},Y_l)=A_{i3}B_{i3}=V_{i3}B_{i3}-V_{i3}M_i-M_iA_{i3}=f_l(V_{i3},Y_l)-V_iM_i\cos(\angle V_{i3}M_iV_i)-$$
$$-M_iA_{i3}=f_l(\nu_i,Y_l)-(h_i-\tau_{1i})\cos(\pi-\gamma)-\rho_{1i}=f_l(\nu_i,Y_l)-(h_i-\tau_{1i})\cos\gamma-\rho_{1i}=$$
$$=f_l(\nu_i,Y_l)-(h_i-\tau_{1i})(q_i,N_l)-\rho_{1i}.$$

Позначимо $\phi_{kil}(u_i,Y_l)=f_l(A_{ik},Y_l),k=1,2,3$.

Нехай $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)>0$. тоді або $\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l)=\min\{\phi_{1il}(u_i,Y_l),\phi_{2il}(u_i,Y_l)\}>0$, або $\phi_{3il}(u_i,Y_l)>0$. Це означає що $clF_{1i}(u_i)\cap clH_l(Y_l)=\varnothing$ або $clS_{1i}(u_i)\cap clH_l(Y_l)=\varnothing$. Отже, $clG_{1i}(u_i)\cap clH_l(Y_l)=\varnothing$.

Розглянемо випадок $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)=\max\{\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l),\phi_{3il}(u_i,Y_l)\}=0$. Тоді $\phi_{3il}(u_i,Y_l)\le\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l)=0$ або $\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l)\le\phi_{3il}(u_i,Y_l)=0$. Тому $intF_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)=\varnothing$ і $frF_{1i}(u_i)\cap frH_l(Y_l)\ne\varnothing$, або $intS_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)=\varnothing$ і $frS_{1i}(u_i)\cap frH_l(Y_l)\ne\varnothing$. Звідси слідує, що $intG_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)=\varnothing$ і $frG_{1i}(u_i)\cap frH_l(Y_l)\ne\varnothing$.

Якщо $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)=\max\left\{\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l),\phi_{3il}(u_i,Y_l)\right\}<0$, то $\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l)<0$ і $\phi_{3il}(u_i,Y_l)<0$, тобто $intF_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)\neq\varnothing$ і $intS_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)\neq\varnothing$. значить, $intG_{1i}(u_i)\cap intH_l(Y_l)\neq\varnothing$.

Зауважимо, що $A_{i2}\notin G_{1i}$. Покажемо, що для будь-яких $u_i\in R^5$ і $Y_l\in R^3$ або $\Phi_{il}(u_i,Y_l)\neq\phi_{2il}(u_i,Y_l)$, або $\Phi_{il}(u_i,Y_l)=\phi_{1il}(u_i,Y_l)=\phi_{2il}(u_i,Y_l)=\phi_{3il}(u_i,Y_l)$.

Очевидно, якщо $\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l)=\min\left\{\phi_{1il}(u_i,Y_l),\phi_{2il}(u_i,Y_l)\right\}=\phi_{1il}(u_i,Y_l)$ або $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)=\max\left\{\Psi_{il}^{1}(u_i,Y_l),\phi_{3il}(u_i,Y_l)\right\}=\phi_{3il}(u_i,Y_l)$, то $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)\neq\phi_{2il}(u_i,Y_l)$. Інакше, можливий тільки один випадок: $\phi_{2il}(u_i,Y_l)\leq\phi_{1il}(u_i,Y_l)$ і $\phi_{2il}(u_i,Y_l)\geq\phi_{3il}(u_i,Y_l)$. З першої умови випливає, що $(q_i,N_l)\leq-\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$, а з другого - $(q_i,N_l)\geq-\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$. Тому $(q_i,N_l)=-\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$. Підставляючи це значення в $\phi_{kil}(u_i,Y_l),k=1,2,3$, отримуємо $\Phi_{il}(u_i,Y_l)=\phi_{1il}(u_i,Y_l)=\phi_{2il}(u_i,Y_l)=\phi_{3il}(u_i,Y_l)$.

В силу того, що функції $\phi_{2il}(u_i,Y_l)$, $\phi_{1il}(u_i,Y_l)$ і $\phi_{3il}(u_i,Y_l)$ є всюди визначеними і неперервними, функція $\Phi_{il}(u_i,Y_l)$ також усюди визначена і неперервна. Тому, функція $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l)$ є нормалізованої Ф-функцією сегмента $G_{1i}(u_i)$ і півпростору $H_l(Y_l)$.

У разі, якщо сферосегмент G_{1i} такий, що $\tau_{1i}>0$, то він може бути представлений як перетин кулі S_{1i} і конуса K_{1i} висоти $\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}$ і радіусу основи r_{1i}, утворюючі якого торкаються кулі S_{1i} у точках кола S_{1i}^{xy} (рис. 3.15).

Тоді замість відхилення $f_l(A_{i2},Y_l)$ точки A_{i2} можна розглядати відхилення $f_l(\tilde{A}_{i2},Y_l)$ вершини $\tilde{A}_{i2}$ конуса $K_{1i}(u_i)$.

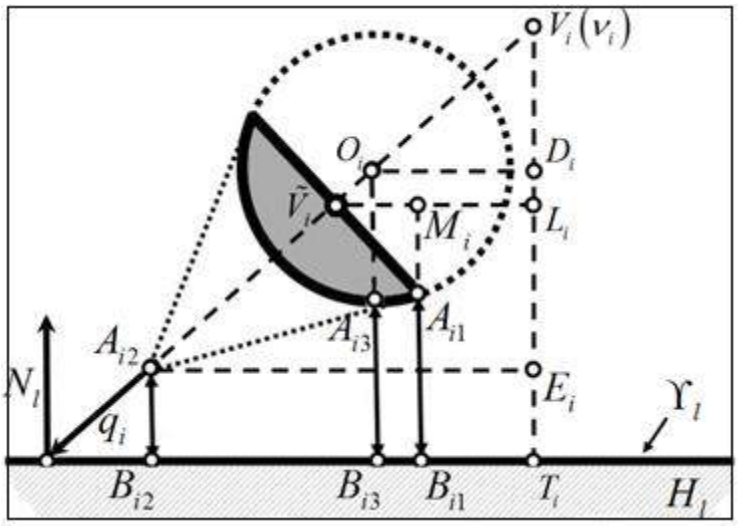


Рис. 3.15. Відхилення точки $\tilde{A}_{i2}$ від площини $\Upsilon_l(Y_l)$

Обчислимо відхилення точки $\tilde{A}_{i2}$ від площини $\Upsilon_l(Y_l)$ (рис. 3.14):

$$f_l\left(\tilde{A}_{i2},Y_l\right)=\tilde{A}_{i2}\tilde{B}_{i2}=\tilde{V}_{i2}\tilde{B}_{i2}-\tilde{V}_{i2}E_i=f_l\left(V_{i2},Y_l\right)-\tilde{V}_i\tilde{A}_{i2}\sin\left(\angle V_i\tilde{A}_{i2}E_i\right)=$$

$$=f_l\left(\nu_i,Y_l\right)-\left(h_i+\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)=f_l\left(\nu_i,Y_l\right)+\left(h_i+\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right)\cos\gamma=$$

$$=f_l\left(\nu_i,Y_l\right)+\left(h_i+\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right)\left(q_i,N_l\right).$$

Таким чином, в разі $\tau_{1i}>0$, функцію $\phi_{2il}\left(u_i,Y_l\right)=f_l\left(\nu_i,Y_l\right)+\left(h_i+w_{1i}\right)\left(q_i,N_l\right)-\frac{w_{1i}\rho_{1i}}{r_{1i}}\sqrt{1-\left(q_i,N_l\right)^2}$ можна замінити функцією $\tilde{\phi}_{2il}\left(u_i,Y_l\right)=f_l\left(\nu_i,Y_l\right)+\left(h_i+\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right)\left(q_i,N_l\right)$.

Нормалізована Ф-функція сегменту кулі $G_{2i}\left(u_i\right)\subset sK_i\left(u_i\right)$ і півпростору $H_l\left(Y_l\right)$ аналогічним чином запишеться у вигляді

$$\Phi_{il}^{02}\left(u_i,Y_l\right)=\max\left\{\min\left\{\phi_{1il}^2\left(u_i,Y_l\right),\phi_{2il}^2\left(u_i,Y_l\right)\right\},\phi_{3il}^2\left(u_i,Y_l\right)\right\},$$

де

$$\phi_{1il}^2(u_i,Y_l) = f_l(v_i,Y_l) - h_i(q_i,N_l) - r_{2i}\sqrt{1-(q_i,N_l)^2},$$

$$\phi_{2il}^2(u_i,Y_l) = f_l(v_i,Y_l) - (h_i + w_{2i})(q_i,N_l) - \frac{w_{2i}\rho_{2i}}{r_{2i}}\sqrt{1-(q_i,N_l)^2},$$

$$\phi_{3il}^2(u_i,Y_l) = f_l(v_i,Y_l) - (h_i - \tau_{2i})(q_i,N_l) - \rho_{2i}.$$

Оскільки сферичний конус $sK_i(u_i)$ є опуклою множиною, то він не має з півпростором $H_l(Y_l)$ загальних внутрішніх точок тоді і тільки тоді, коли з $H_l(Y_l)$ не має загальних внутрішніх точок жоден з сегментів кулі $G_{1i}(u_i)$ і $G_{2i}(u_i)$. Тоді нормалізована Ф-функція сферичного конусу $sK_i(u_i)$ і півпростору $H_l(Y_l)$ набуде вигляду

$$\Phi_{il}(u_i,Y_l) = \min\left\{\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l), \Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l)\right\}.$$

Дійсно, якщо $\Phi_{il}(u_i,Y_l) > 0$, то $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l) > 0$ і $\Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l) > 0$. тоді $clG_{1i}(u_i) \cap clH_l(Y_l) = \varnothing$ і $clG_{2i}(u_i) \cap clH_l(Y_l) = \varnothing$. Значить $cl\,sK_i(u_i) \cap clH_l(Y_l) = \varnothing$.

Якщо $\Phi_{il}(u_i,Y_l) = 0$, то $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l) = 0, \Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l) \geq 0$ або $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l) \geq 0, \Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l) = 0$.

В такому випадку $intG_{1i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$, $frG_{1i}(u_i) \cap frH_l(Y_l) \neq \varnothing$, $intG_{2i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$ або $intG_{2i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$, $frG_{2i}(u_i) \cap frH_l(Y_l) \neq \varnothing$, $intG_{1i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$. отже, $int\,sK_i(u_i) \cap intH_l(Y_l) = \varnothing$ і $fr\,sK_i(u_i) \cap frH_l(Y_l) \neq \varnothing$.

І нарешті, нехай $\Phi_{il}(u_i,Y_l) < 0$. тоді $\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l) < 0$ або $\Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l) < 0$, тобто $intG_{1i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) \neq \varnothing$ або $intG_{2i}(u_i) \cap intH_l(Y_l) \neq \varnothing$. Значить $int\,sK_i(u_i) \cap intH_l(Y_l) \neq \varnothing$.

Оскільки тривимірні тіла, поверхня яких утворена сферичними, конічними, циліндричними поверхнями та площинами можуть бути описані за допомогою сферичного конусу (тобто змінюючи вектор метричних характеристик сферичного конусу можна отримати конус, усічений конус, циліндр, сферосегмент, сфероциліндр, сферичний диск і кулю), то нормалізована Ф-функція для перерахованих тривимірних тіл і півпростору, може бути легко отримана з нормалізованої Ф-функції для сферичного конусу і півпростору.

При цьому, нормалізована Ф-функція для конуса $K_i(u_i)$ (усіченого конуса $F_i(u_i)$, циліндра $C_i(u_i)$) і півпростору $H_l(Y_l)$ запишеться у вигляді

$$\Phi_{il}(u_i,Y_l)=\min\left\{\phi_{1il}^1(u_i,Y_l),\phi_{1il}^2(u_i,Y_l)\right\}.$$

Дійсно, оскільки $w_{ki}=0, k\in\{1,2\}$, то $\frac{w_{ki}\rho_{ki}}{r_{ki}}=\frac{r_{ki}^2+w_{ki}^2}{2r_{ki}}=\frac{r_{ki}}{2}$, $k\in\{1,2\}$, звідки $\phi_{1il}^k(u_i,Y_l)\le\phi_{2il}^k(u_i,Y_l)$, $k\in\{1,2\}$. Значить, $\Phi_{il}^{0k}(u_i,Y_l)=\max\left\{\phi_{1il}^k(u_i,Y_l),\phi_{3il}^k(u_i,Y_l)\right\}$, $k\in\{1,2\}$, але оскільки $\lim\limits_{w\to0}\rho_{ki}=\lim\limits_{w\to0}\frac{r_{ki}^2+w_{ki}^2}{2w_{ki}}=\infty$, то $\Phi_{il}^{0k}(u_i,Y_l)=\phi_{1il}^k(u_i,Y_l)$, $k\in\{1,2\}$. Тому, $\Phi_{il}(u_i,Y_l)=\min\left\{\Phi_{il}^{01}(u_i,Y_l),\Phi_{il}^{02}(u_i,Y_l)\right\}=\min\left\{\phi_{1il}^1(u_i,Y_l),\phi_{1il}^2(u_i,Y_l)\right\}$.

Нормалізована Ф-функція для кулі $S_i(u_i)$ і $H_l(Y_l)$, прийме вигляд

$$\Phi_{il}(u_i,Y_l)=f_l(v_i,Y_l)-r_i,$$

де $r_i=r_{1i}=r_{2i}=w_{1i}=w_{2i}=\rho_{1i}=\rho_{2i}$ - радіус кулі.

3.7 Квазі-Ф-функція тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, конічними та циліндричними поверхнями та площинами

Розглянемо довільну площину $\Upsilon_{ij}\subset R^3$ виду

$$\Upsilon_{ij}\left(Y_{ij}\right)=\left\{\left(x,y,z\right)\in R^3:\ f_{ij}\left(X,Y_{ij}\right)=a_{ij}\left(\alpha_{ij}\right)x+b_{ij}\left(\alpha_{ij},\beta_{ij}\right)y+c_{ij}\left(\alpha_{ij},\beta_{ij}\right)z+\delta_{ij}=0\right\}$$

і два замкнутих півпростору щодо даної площини

$$H_{ij}\left(Y_{ij}\right)=\{X=\left(x,y,z\right)\in R^3:\ f_{ij}\left(X,Y_{ij}\right)=a_{ij}\left(\alpha_{ij}\right)x+b_{ij}\left(\alpha_{ij},\beta_{ij}\right)y+c_{ij}\left(\alpha_{ij},\beta_{ij}\right)z+\delta_{ij}\le 0\},$$

$$H_{ij}\left(\overline{Y}_{ij}\right)=\left\{X=\left(x,y,z\right)\in R^3:\ f_{ij}\left(X,\overline{Y}_{ij}\right)=-f_{ij}\left(X,Y_{ij}\right)\le 0\right\},$$

де $\overline{Y}_{ij}=\left(\pi+\alpha_{ij},\beta_{ij},-\delta_{ij}\right)$.

Відзначимо, що вектори Y_{ij} і $\overline{Y}_{ij}$ визначають одну і ту ж площину в Евклідовому просторі R^3, але з протилежно спрямованими одиничними векторами нормалі.

Квазі-Ф-функція тривимірних тіл $O_i\left(u_i\right)$ і $O_j\left(u_j\right)$, поверхня яких утворена сферичними, конічними та циліндричними поверхнями та площинами може бути представлена у вигляді

$$Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=\min\left\{\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right),\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)\right\},$$

де

$\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right)$ - Ф-функція об'єкта $O_i\left(u_i\right)$ і півпростору $H_{ij}\left(Y_{ij}\right)$,

$\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)$ - Ф-функція об'єкта $O_j\left(u_j\right)$ і півпростору $H_{ij}\left(\overline{Y}_{ij}\right)$.

Оскільки функції $\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right)$ і $\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)$ всюди визначені і неперервні, то функція $Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=\min\left\{\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right),\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)\right\}$ також є всюди визначеною і безперервною.

Нехай $\max\limits_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}^*\right)>0$. Тоді $\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}^*\right)>0$ і $\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}^*\right)>0$, а значить тіла $O_i\left(u_i\right)$ і $O_j\left(u_j\right)$ розташовані в різних півпросторах щодо площини $\Upsilon_{ij}\left(Y_{ij}^*\right)$. Звідси, $clO_i\left(u_i\right)\cap clO_j\left(u_j\right)=\varnothing$.

Умова $\max\limits_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}^*\right)=0$ означає, що не існує $Y_{ij}^{**}\in R^3$ такого, що $Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}^{**}\right)>0$. Значить, площина $\Upsilon_{ij}\left(Y_{ij}^*\right)$ є опорною для обох тривимірних тіл, причому $intO_i\left(u_i\right)\cap intO_j\left(u_j\right)=\varnothing$ і $frO_i\left(u_i\right)\cap frO_j\left(u_j\right)\neq\varnothing$.

Якщо ж $\max\limits_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)<0$, то для будь-якого $Y_{ij}^*\in R^3$ виконується $Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}^*\right)<0$, тобто справедливо хоча б одна з нерівностей $\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}^*\right)<0$ або $\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}^*\right)<0$. А значить, в просторі R^3 не існує площині, що розділяє тіла $O_i\left(u_i\right)$ і $O_j\left(u_j\right)$. Отже, $intO_i\left(u_i\right)\cap intO_j\left(u_j\right)\neq\varnothing$.

Якщо Ф-функції $\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right)$ і $\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)$ є нормалізованими, то значення $\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right)=d_i$ дорівнює відстані між тілом $O_i\left(u_i\right)$ і площиною $\Upsilon_{ij}\left(Y_{ij}\right)$ за умови $clO_i\left(u_i\right)\cap clH_{ij}\left(Y_{ij}\right)=\varnothing$, а значення $\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)=d_j$ дорівнює відстані між тілом $O_j\left(u_j\right)$ і площиною $\Upsilon_{ij}\left(Y_{ij}\right)$. Таким чином, $Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=\min\left\{\Phi_{ij}^1\left(u_i,Y_{ij}\right),\Phi_{ij}^2\left(u_j,\overline{Y}_{ij}\right)\right\}=\min\left\{d_i,d_j\right\}\leq\frac{1}{2}\left(d_i+d_j\right)=\frac{1}{2}d_{ij}$, $d_{ij}=d_i+d_j$.

Тоді функція $Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)=Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)-\frac{1}{2}d_{ij}$, $d_{ij}\geq 0$, є псевдонормалізованою квазі-Ф-функцією для тривимірних тіл $O_i\left(u_i\right)$ і $O_j\left(u_j\right)$.

Запишемо умови знаходження тривимірних тіл в прямокутному паралелепіпеді.

Розглянемо тривимірне тіло O_i, яке може приймати форму такого тіла: опуклий багатогранник, куля, конус, усічений конус, циліндр, сферосегмент, сфероциліндр, сферичний конус або сфередиск. Також розглянемо паралелепіпед $P=\left\{(x,y,z)\in R^3: 0\le x\le l, 0\le x\le w, \eta_1\le z\le \eta_2\right\}$.

Грані паралелепіпеда P належать площинам $\Upsilon_l^0=\left\{(x,y,z)\in R^3: f_l\left(X,Y_l^0\right)=0\right\}, l\in\{1,\ldots,6\}$, де $Y_1^0=\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$, $Y_2^0=\left(-\frac{\pi}{2},0,l\right)$, $Y_3^0=\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)$, $Y_4^0=\left(0,-\frac{\pi}{2},w\right)$, $Y_5^0=(0,0,-\eta_1)$ і $Y_6^0=(\pi,0,\eta_2)$.

Тоді вектор нормалі N_l кожної площині $\Upsilon_l^0\left(Y_l^0\right)$ направлений всередину паралелепіпеда P.

Виходячи з цього, нормалізована Ф-функція тривимірного тіла $O_i(u_i)$ і $cl\left(R^3\setminus P\right)$ записується, як

$$\Phi_i(u_i)=\min\left\{\Phi_{il}\left(u_i,Y_l^0\right), l=1,\ldots,6\right\},$$

де $\Phi_{il}\left(u_i,Y_l^0\right)$ - нормалізована Ф-функція для $O_i(u_i)$ і $H_l\left(Y_l^0\right)$.

Умови $\Phi_{il}\left(u_i,Y_l^0\right)-d_i^l\ge 0$, $l=1,\ldots,6$, означають, що тіло $O_i(u_i)$ знаходиться на відстані від межі $\Upsilon_l^0\left(Y_l^0\right)$, яка є не меншою ніж d_i^l, $l\in\{1,...,6\}$.

Покладемо $d_i^l=2\zeta_i^l+\rho_i^l, \rho_i^l\ge 0$, $l\in\{1,...,6\}$. Тоді умова $\Phi_{il}\left(u_i,Y_l^0\right)-d_i^l\ge 0$ забезпечує таке розміщення еквідистантних тіл $O_i^{\zeta_i}=O_i\oplus B_i^{\zeta_i}$ всередині паралелепіпеда P, що відстань від $O_i^{\zeta_i}(u_i)$ до межі $\Upsilon_l^0\left(Y_l^0\right)$ не менш ніж ρ_i^l, $l\in\{1,...,6\}$.

3.8 Ф-функція параллелепіпедів, що припускають ортогональні

повороти

Нехай задані n-вимірні паралелепіпеди (n-паралелепіпедів) $P_i \subset R^n$ виду

$$P_i = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, 0 \le x_k \le a_{ik}, k \in J_n = \{1, 2, ..., n\}\} \ ,$$

де $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ – вектор метричних характеристик (лінійних розмірів) n-паралелепіпеда $P_i, i \in J_N$, $J_N = \{1, 2, ..., N\}$.

Вважаємо, що n-паралелепіпеди P_i можуть повертатися на кут $\pi / 2$ щодо координатних площин простору R^n.

При цьому грані n-паралелепіпедів P_i, $i \in J_N$, паралельні відповідним граням n-паралелепіпеда D_0. Лінійні розміри D_0 дозволяють розмістити всі n-паралелепіпеди P_i, $i \in J_N$, тобто $b_{0k} \ge \max\limits_{i \in J_N, j \in J_n} a_{ij}$, $k = 2, 3, ..., n$.

З кожним n-паралелепіпедом $P_i, i \in J_N$, зв'яжемо ортогональну рухому систему координат $O_i x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n}$, а з областю D_0 – нерухому систему координат $Ox_1 x_2 ... x_n$. Початок власної (рухомої) системи координат n-паралелепіпеда P_i – точку O_i – приймемо в якості його полюса, $i \in J_N$. Координати $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$ полюса n-паралелепіпеда $P_i, i \in J_N$, щодо нерухомої системи координат $Ox_1 x_2 ... x_n$ є його параметрами розміщення й визначають положення n-паралелепіпеда в просторі R^n. Тоді вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{Nn}$ визначає розміщення паралелепіпедів $P_1, P_2, \ldots, P_N$ у просторі R^n.

Умову розміщення n-паралелепіпеда $P_j(u_j)$ в області D_0 можна представити у вигляді $\Phi_{0j}(u_0, u_j) \ge 0$, де $\Phi_{0j}(u_0, u_j)$ – Φ-функція тривимірних тіл $D_0^* = cl(R^n \setminus D_0)$ і $P_j(u_j)$, $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0n})$ – параметри розміщення тривимірних тіл D_0 і D_0^*. Φ-функції Φ_{ij} і Φ_{0j} орієнтованих n-паралелепіпедів мають такий вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\max\{u_{j1}-u_{i1}-a_{i1},-u_{j1}+u_{i1}-a_{j1},...,\\ u_{jn}-u_{in}-a_{in},-u_{jn}+u_{in}-a_{jn}\} \tag{3.33}$$

$$\Phi_{0j}(u_0,u_j)=\min\{u_{j1}-u_{01},-u_{j1}+u_{01}+b_{01}-a_{j1},...,\\ u_{jn}-u_{0n},-u_{jn}+u_{0n}+b_{0n}-a_{jn}\}.$$

Для математичного моделювання умови розміщення n-паралелепіпедів $P_i, i\in J_N$, в області D_0 й умови їх попарного неперетину з урахуванням можливостей поворотів n-паралелепіпедів P_i, $i\in J_N$, на кут $\pi/2$ щодо координатних площин простору R^n, модифікуємо відповідні Φ-функції (3.33).

Із цією метою кожному n-паралелепіпеду P_i поставимо у відповідність вектор його лінійних розмірів $a_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$, $i\in J_N$. Різні повороти кожного n-паралелепіпеда P_i на кут $\pi/2$ опишемо за допомогою впорядкування лінійних розмірів P_i. Перестановка

$$a_{it}=(a_{ik_{i1}},a_{ik_{i2}},...,a_{ik_{in}}),$$

де $\{k_{i1},k_{i2},...,k_{in}\}$ – перестановка елементів індексної множини $J_n, t\in J_M$, $M=n!$, відповідає всіляким поворотам n-паралелепіпеда P_i на кут $\pi/2$, $i\in J_N$.

Розглянемо n-паралелепіпеди $P_i(u_i)$ і $P_j(u_j)$. Задамо різні ортогональні орієнтації n-паралелепіпеда $P_i(u_i)$, задавши перестановки його лінійних розмірів як $a_{it}=(a_{ik_{i1}},a_{ik_{i2}},...,a_{ik_{in}})$, $t\in J_M$, $M=n!$. Відповідні орієнтовані паралелепіпеди позначимо як $P_i(u_i,v_i)$, $v_i=(k_{i1},k_{i2},...,k_{in})$. Тоді Φ-функція двох n-паралелепіпедів $P_i(u_i,v_i)$ і $P_j(u_j,v_j)$ буде мати вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j,v_i,v_j)=$$
$$=\max\{u_{j1}-u_{i1}-a_{ik_{i1}},-u_{j1}+u_{i1}-a_{jk_{j1}},...,$$
$$u_{jn}-u_{in}-a_{ik_{in}},-u_{jn}+u_{in}-a_{jk_{jn}}\}. \qquad (3.34)$$

Функція виду (3.34) задовольняє властивостям Ф-функції, оскільки відрізняється від Φ-функції (3.33) тільки порядком проходження лінійних розмірів n-паралелепіпедів. Інакше кажучи, $\Phi_{ij}(u_i,u_j,v_i,v_j)$ – це функція виду (3.33), яка обчислюється для різних пар n-паралелепіпедів з різною ортогональною орієнтацією й однаковими наборами лінійних розмірів з полюсами в точках u_i, u_j відповідно.

Зафіксуємо орієнтацію n-паралелепіпеда $P_i(u_i)$, задавши послідовність його лінійних розмірів у вигляді $a_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$. У цьому випадку Φ-функція двох n-паралелепіпедів $P_j(u_j)$ і $P_j(u_j,v_j)$ буде мати вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j,v_j)=\max\{u_{j1}-u_{i1}-a_{i1},-u_{j1}+u_{i1}-a_{jk_{j1}},...,$$
$$u_{jn}-u_{in}-a_{in},-u_{jn}+u_{in}-a_{jk_{jn}}\} \qquad (3.35)$$

Таким чином, Φ-функція виду (3.35) може бути використана для моделювання умов неперетину двох n-паралелепіпедів, що допускають повороти на кут $\pi/2$.

Умова розміщення в області n-D_0 паралелепіпеда $P_j(u_j,v_j)$, що допускає повороти на кут $\pi/2$, може бути описана за допомогою модифікації Φ-функції виду

$$\Phi_{0j}(u_0,u_j,v_j)=$$

$$= \min\{u_{j1} - u_{01}, -u_{j1} + u_{01} + b_{01} - a_{jk_{j1}}, \ldots, \\ u_{jn} - u_{0n}, -u_{jn} + u_{0n} + b_{0n} - a_{jk_{jn}}\}.$$

3.9 Висновки за розділом 3

В третьому розділі побудовано клас Ф-функцій та квазі-Ф-функцій для неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами.

Проведено математичне моделювання взаємодії для таких пар неорієнтованих тривимірних тіл: опуклих багатогранних тіл; неопуклих багатогранних тіл; багатогранного тіла та кулі; паралелепіпедів, які допускають ортогональні повороти; тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами.

Слід відзначити, що квазі-Ф-функції мають більш простий вигляд, ніж Ф-функції. Такий простий вид умов взаємного неперетинання неорієнтованих тривимірних тіл став можливим завдяки введенню додаткових змінних (які визначають параметри розділяючої площини). Але в той же час введення додаткових змінних для кожної пари тривимірних тіл значно збільшує розмірність задачі, що ускладнює пошук її розв’язку.

Побудовані в цьому розділі Ф-функції та квазі-Ф-функції дозволяють побудувати точні математичні моделі оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл.

Результати даного розділу представлені в роботах [8,9,13,14, 20,25, 40-45, 51,52].

РОЗДІЛ 4
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ У РІЗНИХ ПОСТАНОВКАХ

Як відомо, задачі пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл відносяться до класу *NP*-складних, для розв'язання яких використовуються, як правило, наближені евристичні та мета-евристичні алгоритми, що призводить до втрати оптимальних розв'язків.

Для розробки ефективних методів, заснованих на застосуванні сучасних методів локальної та глобальної оптимізації, потрібна побудова адекватних математичних моделей, заснованих на аналітичному описі відносин реальних (без попередньої апроксимації) просторових форм тривимірних тіл та врахуванні їх неперервних поворотів та трансляцій.

Представлені у другому та третьому розділах Ф-функції та квазі-Ф-функції можуть бути використані для побудови адекватних математичних моделей задач упаковки тривимірних тіл у різних постановках.

4.1 Постановка загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл

Незважаючи на різні постановки, усі задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл можуть бути описані за допомогою загальної постановки, яка може бути сформульована таким чином.

Задача. Розмістити задану множину тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$, у заданий контейнер Ω з урахуванням обмежень на положення тіл таким чином, щоб метричні характеристики контейнеру досягали оптимального значення (рис.4.1).

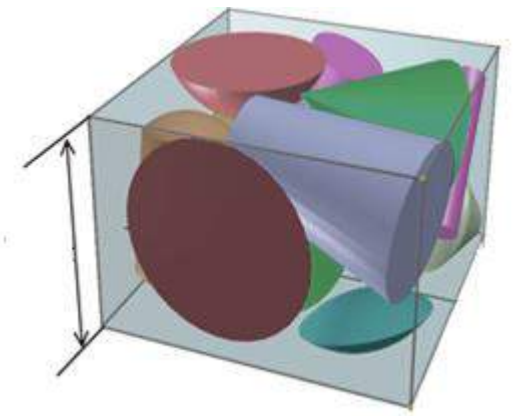


Рис.4.1. Приклад постановка задачі упаковки тривимірних тіл

Множина тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$, може складатись з таких видів тривимірних тіл:

- конгруентних циліндрів;
- тіл, поверхня яких утворена конічними, сферичними, циліндричними поверхнями та площинами (конус, циліндр, сфероциліндр, сферичний конус, сферосегмент, сферичний диск та їх еквідистантні поверхні);
- паралелепіпедів та куль;
- багатогранних тіл (опуклих, неопуклих, гомотетичних).

На розміщення тривимірних тіл можуть накладатись такі види обмежень:

- орієнтація тіл (орієнтовані (заданої незмінної орієнтації) та неорієнтовані (ортогональна зміна орієнтації чи довільна зміна орієнтації);
- мінімально допустимі відстані між тілами та між тілами и контейнером;
- зони заборони на розміщення тіл.

Контейнер Ω, в який необхідно упакувати тривимірні тіла, може приймати такі просторові форми (рис. 4.2):

- прямокутний паралелепіпед;

- куля;
- пряма призма з зонами заборони у вигляді циліндрів;
- пряма призма, границя основи якої утворена відрізками прямих та дугами кіл;
- циліндр із зонами заборони у вигляді прямих прямокутних призм.

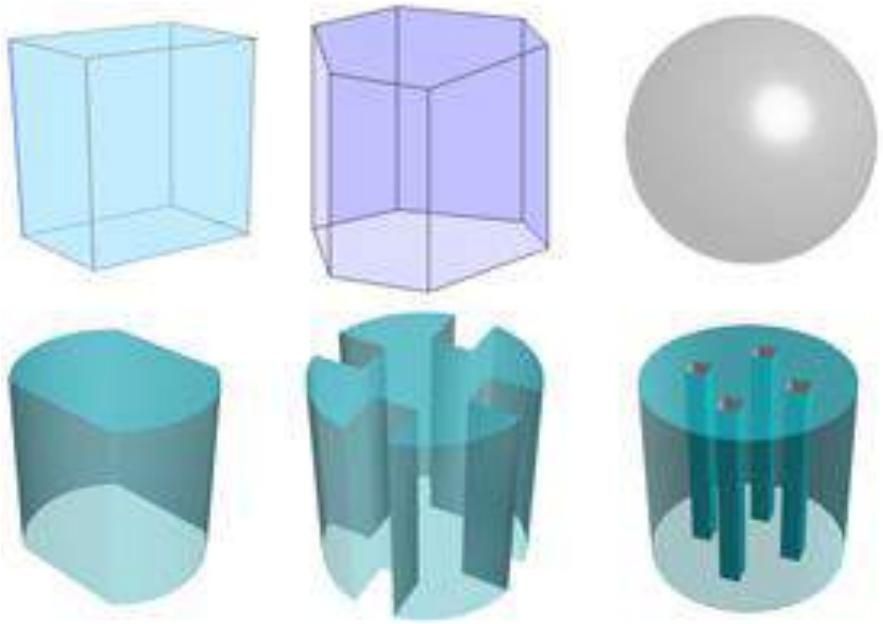


Рис.4.2. Приклади можливих просторових форм контейнеру Ω

Функція цілі задач упаковки може бути сформульована таким чином:

- мінімізувати висоту контейнеру;
- мінімізувати об’єм контейнеру;
- максимізувати кількість упакованих тіл у заданий контейнер.

4.2 Математична модель загальної задачі оптимального упаковки тривимірних тіл

На основі методу Ф-функцій математична модель загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл може бути представлена у такому вигляді:

$$F(X^*) = \underset{X \in W}{extr}\, F(X), \tag{4.1}$$

$$W = \{X \in R^{7n+3n_{qp}+n_\Omega} : \begin{array}{l} \Psi_1(X) \geq 0, \\ \Psi_2(X) \geq 0, \\ \Psi_3(X) \geq 0, \\ \Psi_4(X) \geq 0\} \end{array}, \tag{4.2}$$

де $F(X)$ – неперервна двічі диференційована функція;

n - кількість тривимірних тіл, $n_{qp} = 0.5\left(1 - n_q\right) / n_q$, n_q - кількість тривимірних тіл, для яких в моделі використовуються квазі-Ф-функції, n_Ω - кількість змінних метричних характеристик контейнеру Ω;

$X = (u_\Omega, u, u_p)$ – вектор змінних задачі, u_Ω – вектор метричних характеристик контейнера Ω, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор, що визначає параметри розміщення тривимірних тіл, $u_i = (v_i, \theta_i, g_i)$ – вектор, що визначає параметри розміщення тривимірного тіла $O_i(u_i)$, $i \in I_n$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції тривимірного тіла, $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ - вектор кутів повороту тіла $O_i(u_i)$, $i \in I_n$, навколо координатних вісей Ox, Oy, Oz відповідно, g_i – коефіцієнт гомотетії тривимірного тіла $O_i(u_i)$, $u_p = (u_{p_{12}}, u_{p_{13}}, ..., u_{p_{ij}}, ..., u_{p_{qq}})$ – вектор додаткових змінних, що визначають параметри поділяючих площин (якщо використовуються квазі-Ф-функції) для кожної пари тіл $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$, $(i, j) \in I_n$;

$$\Psi_1(X) = \min\{\Phi^{O_i\Omega^*}(X), i \in I_n\},$$

$$\Psi_2(X) = \min\{\Phi^{O_iO_j}(X), (i, j) \in I_n\},$$

$$\Psi_3(X) = \min\{\Phi^{O_iT_k}(X), i \in I_n, k \in I_z\},$$

$\Phi^{O_i\Omega^*}(X)$ – Ф-функція для тривимірних тіл O_i та $\Omega^* = cl(R^3 \setminus \Omega)$ (описує умови знаходження об’єкта в контейнері Ω);

$\Phi^{O_iO_j}(X)$ – Ф-функція (або квазі-Ф-функція) для пари тривимірних тіл $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$ (описує умови неперетину або знаходження на допустимій відстані тривимірних тіл $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$);

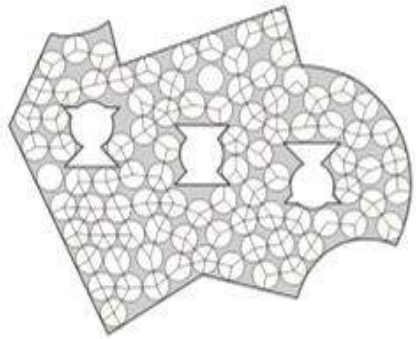
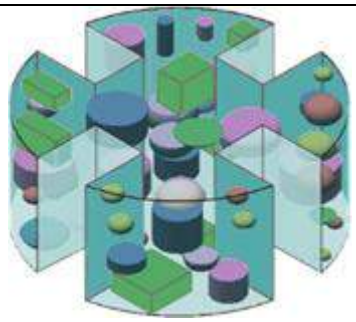
$\Phi^{O_iZ_j}(X)$ – Ф-функція для об'єкта $O_i(u_i)$ та зони заборони T_k;

$\Psi_4(X) \geq 0$ – система додаткових обмежень (наприклад, обмеження на метричні характеристики області розміщення або тривимірних тіл, що упаковуються).

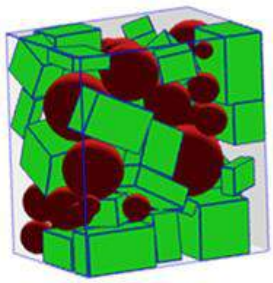
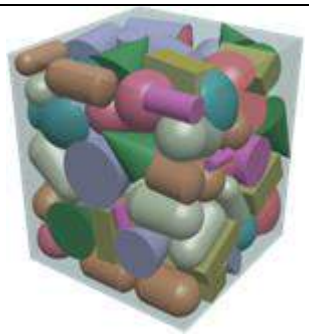
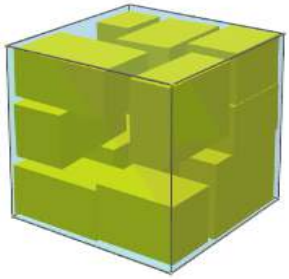
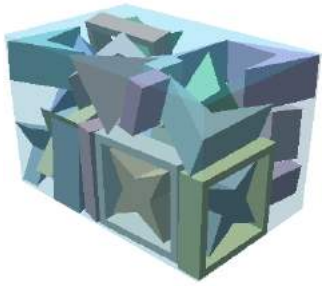
На основі побудованих у попередніх розділах класах Ф-функцій в залежності від форми та особливостей характеристик тривимірних тіл, виду контейнеру, функції цілі та технологічних обмежень побудовано різні реалізації базової математичної моделі для таких задач (табл.4.1).

Таблиця 4.1.

Реалізації загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл

Задача упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у складну область	
Задача компоновки з урахуванням допустимих відстаней та зон заборони	

Продовження таблиці 4.1

Задача упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль у прямий паралелепіпед	
Задача упаковки неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких формується циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами	
Задача упаковки паралелепіпедів з можливістю їх ортогональних поворотів	
Задача упаковки опуклих гомотетичних багатогранних тіл	
Задача упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл	

Для побудованої базової математичної моделі задачі упаковки

тривимірних тіл необхідно вказати деякі важливі особливості, які вплинули на розробку загальної методології розв’язання задач. До таких особливостей слід віднести наступне.

1. Модель (4.1)-(4.2) є точною математичною моделлю загальної задачі оптимального упакування тривимірних тіл, представлена у вигляді задачі математичного програмування і задає усі її глобальні розв'язки.

2. Область W припустимих розв’язків задачі в загальному випадку є незв’язною множиною, і кожна її компонента зв’язності має “яружний” характер (рис.4.3).

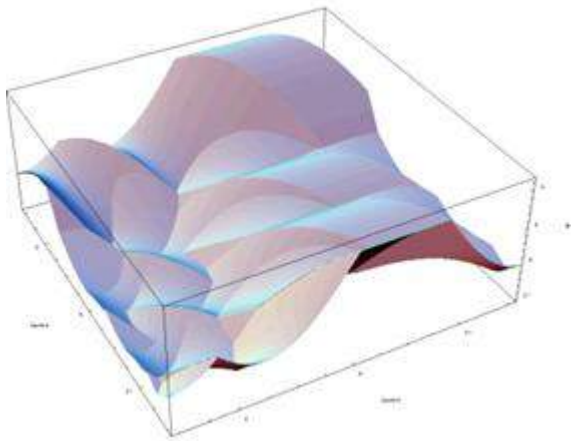


Рис.4.3. Яружний характер області припустимих розв’язків

3. Функція $\Psi_1(X)$ завжди задається Ф-функціями. Тому нерівність $\Psi_1(X) \geq 0$ є системою з неперервно-диференційованих функцій.

4. Функція $\Psi_2(X)$ в залежності від реалізації задачі (1)-(2) може бути задана або Ф-функціями або квазі-Ф-функціями. У випадку, використання Ф-функцій (які є максимінними функціями) нерівність $\Psi_2(X) \geq 0$ можна представити набором систем нерівностей з неперервно-диференційованих функцій. Це дозволяє представити поставлену задачу у вигляді задачі негладкої оптимізації.

5. Через те, що область припустимих розв'язків описується системою нерівностей з максимінних функцій, вона може бути представлена у вигляді об’єднання підобластей (рис. 4.4):

$$W = \bigcup_{q=1}^{\varsigma} W_q ,$$

де кожна з підобластей W_q визначається системою нерівностей з неперервно-диференційованих функцій.

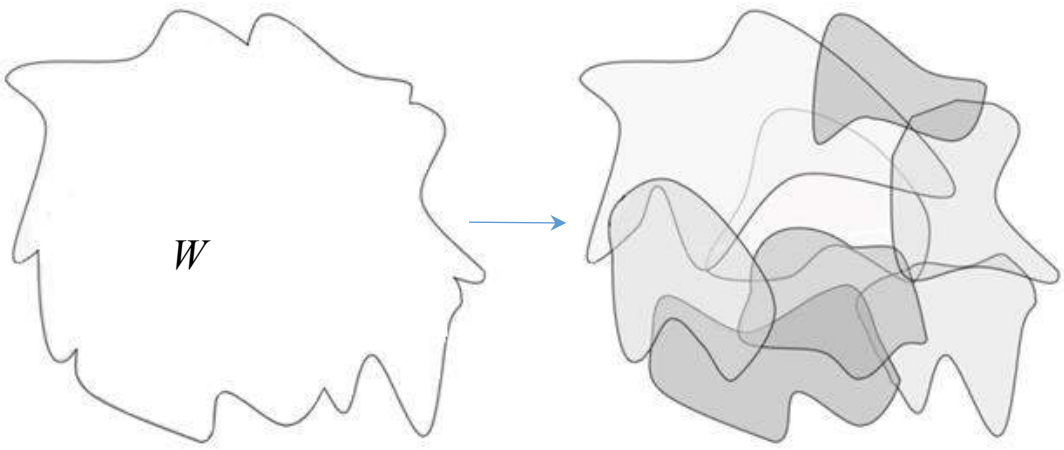


Рис.4.4. Представлення області як об’єднання підобластей

6. Таким чином, задачу (4.1)-(4. 2) можна представити так:

$$F(X^*) = extr\{F(X^{*q}), q = 1, 2, ..., \varsigma\},$$

де $F(X^{*q}) = \underset{X \in W_q}{extr}\, F(X)$.

При цьому кожна з підзадач є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування.

7. У випадку, коли область припустимих розв'язків задачі (4.1)-(4.2) задається лише квазі-Ф-функціями, вона описується системою нерівностей з неперервно-диференційованих функцій. У цьому випадку ми маємо справу з неопуклою задачею нелінійного програмування, для розв'язанні якої можуть бути безпосередньо використані сучасні солвери для глобальної та локальної оптимізації.

8. Задача (4.1)-(4.2) відноситься до класу *NP*- складних.

Розглянемо реалізації математичної моделі основної задачі розміщення для різних типів задач упакування тривимірних тіл.

4.3 Математична модель та властивості задачі упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у пряму прямокутну багатозв'язну призму, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл

Постановка задачі. Нехай задано множину $\{C_1, C_2, ..., C_i, ...\}$ циліндрів, конгруентних циліндру C радіусу r, і задано контейнер у вигляді прямої прямокутної багатозв'язної призми $P \subset R^2$, границя основи якої сформована відрізками прямих та дугами кіл. При цьому вважаємо, що P сформований таким чином (рис. 4.5)

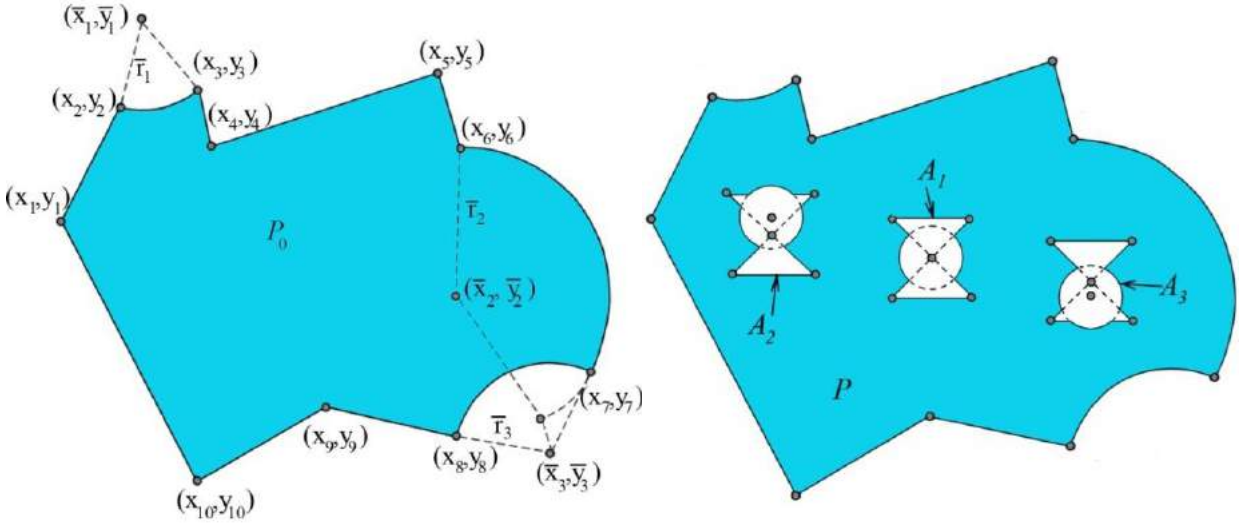
$$P = cl\left(P_0 \setminus \bigcup_{l=1}^{\sigma} A_l \right),$$

де $cl(\cdot)$ - замикання$(\cdot)$; P_0 однозв'язна множина (рис. 4.5, а), границя якої сформована послідовністю прямих відрізків $\left[x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}\right]$ і дуг кіл $\left[x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}, \overline{x}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j\right]$, де (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) координати кінців прямих відрізків або дуги, $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$ і $\overline{r}_j$ координати центру і радіус кола відповідно; A_l зони заборони (рис. 4.5 а), представлена у вигляді

$$A_l = \left(\bigcup_{g=1}^{\psi} C_{lg} \right) \bigcup \left(\bigcup_{q=1}^{\vartheta} M_{lq} \right),\ l \in I_\sigma = \{1, 2, ..., \sigma\};$$

$C_{lg} = \{(x, y) \in R^2 : (x - x_{lg}^0)^2 + (y - y_{lg}^0)^2 - (\rho_{lg}^0)^2 \le 0\}$, $g \in I_\psi = \{1, 2, ..., \psi\}$, M_{lq} багатокутник, заданий m_{lq} вершинами, $q \in I_\vartheta = \{1, 2, ..., \vartheta\}$, тобто кожна зона заборони - неопукла множина, що може бути представлена кінцевим

об'єднанням різних кіл та опуклих багатокутників.



а б

Рис. 4.5. Основа області P:

а) однозв'язна область P_0; б) багатозв'язна область P

Розміщення всіх C_i, $i \in I_\tau = \{1,2,...,\tau\}$, у контейнері P визначається вектором $u = (u_1,u_2,...,u_\tau) \in R^{2\tau}$. Надалі циліндр C_i , трансльований на вектор u_i, будемо позначати через $C_i(u_i)$.

Задача. Визначити вектор $u = (u_1,u_2,...,u_\tau) \in R^{2\tau}$, який гарантує розміщення максимального числа циліндрів $C_i(u_i)$, $i \in I_\tau$, без взаємного перетину в у заданому контейнері P.

Побудуємо математичну модель поставленої задачі як реалізацію загальної математичної моделі 4.1-4.2.

Оскільки висота циліндрів у поставленій задачі дорівнює висоті контейнеру, то задача може бути зведена до двовимірного випадку, в якому замість циліндрів будуть упаковуватись кола $C_i(u_i)$.

Для того, щоб розв’язати задачу, пропонується підхід, який дозволяє звести розв’язання поставленої задачі до розв’язання послідовності задач з лінійними функціями цілі. З цією метою радіуси r_i циліндрів C_i, $i \in I_\tau$, приймаються змінними. Таким чином радіуси формують вектор

$v^{\tau} = (r_1, r_2, ..., r_{\tau}) \in R^{\tau}$.

Використовуючи Φ-функцію, побудовану у підрозділі 2.3.10, математична модель послідовності задач може бути представлена таким чином:

$$F_n(X^{n*}) = \max F_n(X^n) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i ,$$

$$X^n = (u^n, v^n) \in W_n, \quad n = 1, 2, ..., \tau + 1, \tag{4.3}$$

$$W_n = \Big\{ X^n \in R^{3n} : \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i, j \in I_n = \{1, 2, ..., n\}, i < j,$$
$$\Phi_i(u_i, r_i) \geq 0, i \in I_n, \tag{4.4}$$
$$r - r_i \geq 0, \quad r_i \geq 0, \ i \in I_n \Big\},$$

де $\Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2$,

$\Phi_i(u_i, r_i)$ - Φ - функція для C_i і $G_1 = cl(R^2 \setminus P)$ (див. підрозд. 2.3.10).

Розглянемо деякі важливі особливості математичної моделі задачі

$$F_n(X^{n*}) = \max F_n(X^n) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i , \quad X^n = (u^n, v^n) \in W_n . \tag{4.5}$$

1. Якщо $F_n(X^{n*}) = nr$, то точка X^{n*} є глобальним максимумом задачі (4.3-4.4).

2. Якщо $F_{\tau+1}(X^{(\tau+1)*}) < (\tau+1)r$ і $F_{\tau}(X^{\tau*}) = F_{\tau}(u^{\tau*}, v^{\tau*}) = \tau \cdot r$, де $X^{(\tau+1)*}$ і $X^{\tau*}$ глобальні максимуми задачі (4.5), то розв'язок задачі досягається в точці $u^* = u^{\tau*}$, якій відповідає τ упакованих кіл.

3. Оскільки $F_n(X^n)$ лінійна, то локальні максимуми досягаються в екстремальних точках W_n.

4. Область припустимих розв'язків W_n визначається лінійними та нелінійними нерівностями.

5. $\Phi_i(u_i, r_i) \geq 0$, якщо принаймні одна з систем нерівностей виду

$$\Gamma_i^s(u_i, r_i) = \begin{cases} \Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i, r_i) \geq 0, j \in J_\delta, \\ \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \geq 0, j \in J_\gamma, \\ \Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i, r_i) \geq 0, j \in J_\xi, \\ \Phi_{ij}^{CQ_4}\zeta_{ij}(u_i, r_i) \geq 0, j \in J_\zeta, \\ \Phi_{ilg}^{CC}(u_i, r_i) \geq 0, l \in I_\sigma, g \in I_\psi, \\ \Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \geq 0, l \in I_\sigma, q \in I_\vartheta, \end{cases}$$

виконується, де $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \geq 0$ - одна з нерівностей $\overset{*}{\chi}_{i2j1}(u_i, r_i) \geq 0$, $\overset{*}{\chi}_{i2j2}(u_i, r_i) \geq 0$ або система нерівностей $\begin{cases} \omega_{ij}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij}(u_i, r_i) \geq 0; \end{cases}$ $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) \geq 0$ - одна з нерівностей $\omega_{ij3}(u_i, r_i) \geq 0$, $\overset{*}{\chi}_{i4j1}(u_i, r_i) \geq 0$, $\overset{*}{\chi}_{i4j2}(u_i, r_i) \geq 0$ або одна з систем нерівностей $\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \omega_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij3}(u_i, r_i) \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij4}(u_i, r_i) \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij5}(u_i, r_i) \geq 0; \end{cases}$

$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \geq 0$ - одна з нерівностей $\overset{*}{\chi}_{ilqk}(u_i, r_i) \geq 0$ або система нерівностей $\begin{cases} \omega_{ilqk}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ilqk}(u_i, r_i) \geq 0. \end{cases}$

6. З попереднього пункту випливає, що $\Phi_i(u_i, r_i)$ включає функції $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i)$, $j = 1, 2, ..., \gamma$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i)$, $j = 1, 2, ..., \zeta$, і $\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i)$, $l = 1, 2, ..., \sigma$, $q = 1, 2, ..., \vartheta$, кожна з яких є функцією виду

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) = \max\left\{\varphi_{ij1}(u_i, r_i), \varphi_{ij2}(u_i, r_i), \varphi_{ij3}(u_i, r_i), \omega_{ij3}(u_i, r_i), \overset{*}{\chi}_{i4j1}(u_i, r_i), \overset{*}{\chi}_{i4j2}(u_i, r_i)\right\}$$

Це означає що, якщо принаймні одна з функцій в фігурних дужках

позитивна, то відповідні функції $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$ або $\Phi_{ilq}^{CM}(u_i,r_i)$ теж позитивні. Так $\Phi_i(u_i,r_i)\geq 0$, якщо принаймні одна з систем нерівностей $\Gamma_i^s(u_i,r_i)\geq 0$, $s\in I_\varpi=\{1,2,...,\varpi=3^\gamma\cdot 6^\zeta\cdot\prod_{l=1}^{\sigma}\prod_{q=1}^{\vartheta}2m_{lq}\}$, виконується.

7. На основі попереднього пункту і математичної моделі (4.5) будь-яка упаковка *n* циліндрів у *P* описується системою нерівностей виду

$$\begin{cases}\Gamma_i^{s_t}(u_i,r_i)\geq 0, \quad i\in I_n,\\ \Phi_{ij}(u_i,u_j,r_i,r_j)\geq 0, \quad i,j\in I_n,\ i<j,\\ r-r_i\geq 0, \quad i\in I_n,\\ r_i\geq 0, \quad i\in I_n.\end{cases} \tag{4.6}$$

Система визначає деяку підобласть W_{nt}. Кожна система нерівностей (4.6) складається з не менш ніж $n(4+\sigma(\psi+\vartheta)+\frac{1}{2}(n+3))$ лінійних та нелінійних нерівностей. Ліві частини нерівностей, що визначають системи, є безперервно диференційованими функціями.

8. Виходячи з пункту 5, число підобластей $\eta=\varpi^n$. Таким чином, область W_n може бути представлена у вигляді

$$W_n=\bigcup_{t=1}^{\eta}W_{nt}.$$

Необхідно відзначити, що серед η системи існує багато несумісних систем.

9. Якщо точка $X^{nl*}\in W_{ni_0}$ є локальним максимумом щодо W_{ni_0} і одночасно $X^{nl*}\in W_{ni_j}$, $j\in J_l\subset\{1,2,...,\eta_0\}$, то необхідно довести, що X^{nl*} є локальним максимумом щодо W_n.

10. У загальному випадку локальні мінімуми є нестрогими.

4.4 Математична модель та властивості задачі компоновки орієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких сформована конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами у багатозв'язний контейнер

Постановка задачі. Нехай задано множину тривимірних тіл $O_i \in R^3$, $i \in I = \bigcup_{k=1}^{6} I_k$. Тривимірні тіла O_i в залежності від значення індексу i можуть приймати форму таких тривимірних тіл:

- кулі $S_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - \left(r_i^0\right)^2 \le 0 \right\}$, $i \in I_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}$;

- циліндра $C_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - \left(r_i^0\right)^2 \le 0, -h_i^0 \le z \le h_i^0 \right\}$,

$i \in I_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2 = n_1 + N_2\}$;

- паралелепіпеда

$P_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : -a_i^0 \le x \le a_i^0, -b_i^0 \le y \le b_i^0, -c_i^0 \le z \le c_i^0 \right\}$,

$i \in I_3 = \{n_2 + 1, \ldots, n_3 = n_2 + N_3\}$;

- сферосегменту

$G_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \left(z + \tau_{i1}^0\right)^2 - \left(\rho_{i1}^0\right)^2 \le 0, -z \le 0 \right\}$,

$i \in I_4 = I_4^1 \cup I_4^2 = \{n_3 + 1, \ldots, n_4 = n_3 + N_4\}$;

- сферосегменту

$\breve{G}_i = \left\{ X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \tau_{i2}^0\right)^2 - \left(\rho_{i2}^0\right)^2 \le 0, z \le 0 \right\}$,

$i \in I_5 = I_5^1 \cup I_5^2 = \{n_4 + 1, \ldots, n_5 = n_4 + N_5\}$, де $\tau_{qj}^0 = \rho_{qj}^0 - w_{qj}^0$, $w_{qj}^0 \in \left(0, 2\rho_{qj}^0\right)$ - висота сегменту, $q \in I_4 \cup I_5$, $j \in \{1, 2\}$, а підмножини індексів $I_4^1, I_4^2 \subset I_4, I_4^1 \cap I_4^2 = \varnothing, I_5^1, I_5^2 \subset I_5, I_5^1 \cap I_5^2 = \varnothing$ такі, що виконуються нерівності $\rho_{\alpha_1 1}^0 - w_{\alpha_1 1}^0 \ge 0, \alpha_1 \in I_4^1, w_{\alpha_2 1} - \rho_{\alpha_2 1} > 0, \alpha_2 \in I_4^2, \rho_{\beta_1 2}^0 - w_{\beta_1 2}^0 \ge 0, \beta_1 \in I_5^1$, $w_{\beta_2 2} - \rho_{\beta_2 2} > 0, \beta_2 \in I_5^2$, $card\left(I_p^k\right) = N_p^k, N_p^1 + N_p^2 = N_p, k \in \{1, 2\}, p \in \{4, 5\}$.

- сфероціліндру $SC_i = C_i \bigcup G_i \bigcup \breve{G}_i$, $i \in I_6 = \{n_5 + 1, \ldots, n = n_5 + N_6\}$, де

$\tau_{ij} = \rho_{ij}^0 - w_{ij}^0, \rho_{ij}^0 = \dfrac{\left(r_i^0\right)^2 + \left(w_{ij}^0\right)^2}{2w_{ij}^0}$, $j = 1,2$, w_{ij}^0 - висоти сегментів кулі.

Тіла $O_i, i \in I$, допускають лише афінні перетворення трансляції. Задано також багатозв'язний контейнер $\Omega \in R^3$, який може задаватись двома способами.

У першому випадку контейнер може задаватись в такому вигляді:

$$\Omega = cl(C \setminus (\bigcup_{t=1}^{\sigma} \Lambda_t)),$$

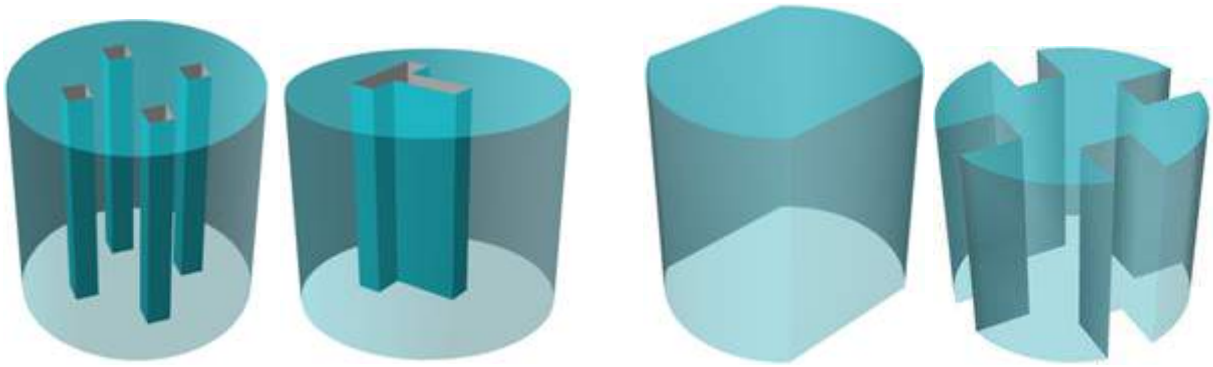
де clD - замикання множини D,

$C = \left\{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - r^2 \le 0, h_1 \le z \le h_2, h_1 > 0\right\}$ - прямий циліндр,

$\Lambda_t = \left\{X = (x, y, z) \in R^3 : -a_t^\Lambda \le x \le a_t^\Lambda, -b_t^\Lambda \le y \le b_t^\Lambda, h_1 \le z \le h_2\right\}$ - прямі прямокутні призми, які є зонами заборони на розміщення тривимірних тіл.

Контейнер Ω висоти $h = h_2 - h_1$ позначимо $\Omega(u_\Omega)$, де $u_\Omega = (h_1, h_2)$. Нехай початок власної системи координат зон заборони Λ_t знаходиться в точці $u_t^\Lambda = \left(x_t^\Lambda, y_t^\Lambda, 0\right) \in R^3, t \in I_\sigma = \{1, \ldots, \sigma\}$.

Розставляючи зони заборони T_k, $k \in I_\sigma$, певним чином, можна отримати різні види контейнеру: як багатозв'язні (рис. 4.6 а), так і однозв’язні (рис. 4.6 б).



а б

Рис. 4.6. Приклади можливих форм контейнера для першого випадку

У другому випадку область розміщення може задаватись в такому вигляді

$$\Omega = cl\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\mu} K_j \right) \right),$$

де

B - пряма призма, основою якої є багатокутник $D \in R^2$, границя якого складається з q сторін,

$K_j = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_j^*)^2 + (y - y_j^*)^2 \le \tau_j^2, 0 \le z \le h\}$ - циліндри,

$j \in I_3 = \{1, 2, ..., \mu\}$, при цьому, $K_j \cap B \ne \varnothing$, $j \in I_3$ (рис. 4.7).

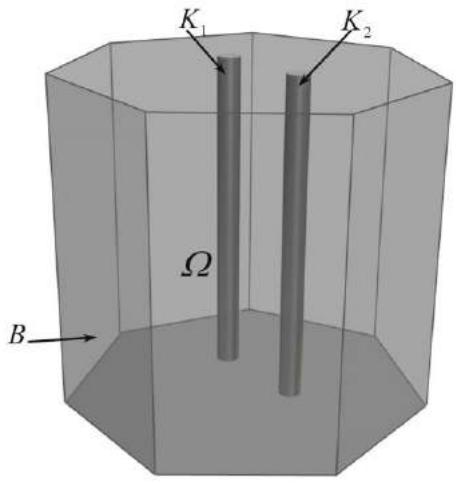


Рис.4.7. Приклад форми контейнера для другого випадку

Як було описано в підрозділі 1.1.1 обмеження на область допустимих розв’язків в задачах компоновки можна сформулювати у вигляді умов неперетинну тривимірних тіл між собою і розміщенням тривимірних тіл всередині області розміщення, а також розміщення тривимірних тіл на мінімально допустимих відстанях (для усунення механічних, теплових, електричних та інших впливів одного тривимірного тіла на інше).

Будемо вважати, що мінімально допустима відстань між тривимірним тілами А і В визначається наступним чином:

$$d = \rho(A,B) = \min_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Тоді, позначимо як

$$\rho(O_i, O_j) = d_{ij},\ 0 < i < j \in I\ ,\ \rho(O_k, \Lambda_t) = d_k^t,$$

$$\rho(O_k, \widehat{C}) = d_k,\ \rho(O_k, \overline{C}) = d_k^U,\ \rho(O_k, \underline{C}) = d_k^L,\ k \in I\ .$$

де $\widehat{C}$, $\overline{C}$ і $\underline{C}$ є відповідно бічній, верхньій та нижній гранями циліндра С.

Задані також наступні мінімально припустимі відстані: d_{ij} – між кожною парою тривимірних тіл O_i і O_j, $i, j \in I$; d_{ij}^k – між кожним тілом O_i, $i \in I$, і кожною зоною заборони K_j, $j \in I_3$; d_{ij}^b – між кожним тілом O_i, $i \in I$, і кожною гранню B, $k \in I_4 = \{1, 2, ..., q+2\}$ (рис.4.8).

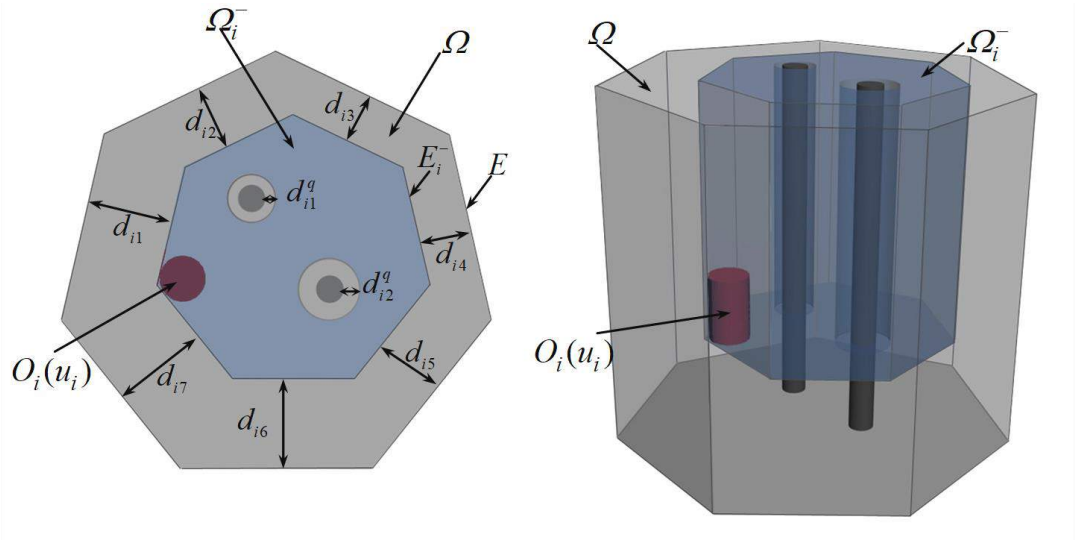


Рис. 4.8. Відстані d_i^k, d_{il}^q та об'єкт Ω_i^-

Постановка задачі. Необхідно знайти такий вектор $u \in R^{3n}$, що тіла O_i, $i \in I$, містяться в контейнері $\Omega(u_\Omega)$ з урахуванням заданих мінімальних відстаней між тілами та зонами заборони і висота h контейнеру досягає мінімуму.

Грунтуючись на загальній математичній моделі (4.1)-(4.2) та використовуючи Ф-функції, представлені у розділі 2, математична модель поставленої задачі може бути подана в такому вигляді:

$$h^* = \min_{X=(u,u_\Omega)\in W\subset R^{3n+2}} h, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} W = \Big\{ X = (u,u_\Omega) \in R^{3n+2} : & \Phi_{ij}^{OO}(u_i,u_j) - d_{ij} \ge 0, \\ & \Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k) - d_k^t \ge 0, \\ & \Phi_k^O(u_k) - d_k \ge 0, \\ & L_k^O(u_k,u_\Omega) - d_k^L \ge 0, \\ & U_k^O(u_k,u_\Omega) - d_k^U \ge 0, 0 < i < j \in I, k \in I, t \in I_\sigma \Big\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

де функція $\Phi_{ij}^{OO}(u_i,u_j)$ є нормалізованою Ф-функцією тривимірних тіл $O_i(u_i)$ і $O_j(u_j)$, нерівність $\Phi_{ij}^{OO}(u_i,u_j) - d_{ij} \ge 0$ забезпечує таке розміщення тривимірних тіл, при якому відстань між ними не менше величини d_{ij}; функція $\Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k)$ - нормалізована Ф-функція тривимірних тіл $O_k(u_k)$ і $\Lambda_t(u_t^\Lambda)$, нерівність $\Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k) - d_k^t \ge 0$ гарантує таке розміщення тривимірного тіла $O_k(u_k)$, при якому відстань до зони заборони Λ_t не менш ніж d_k^t; умови $\Phi_k^O(u_k) - d_k \ge 0$, $L_k^O(u_k,u_\Omega) - d_k^L \ge 0$, $U_k^O(u_k,u_\Omega) - d_k^U \ge 0$ описують таке розміщення тривимірного тіла $O_k(u_k)$ у контейнері $\Omega(u_\Omega)$, при якому виконуються умови на відстані між цим тілом і гранями контейнеру.

Для побудованої математичної моделі необхідно вказати деякі важливі особливості, які вплинули на вибір методу розв'язання задачі. До таких особливостей слід віднести наступне:

1) задача (4.7) - (4.8) є задачею обернено-опуклого програмування, оскільки нерівності з системи (4.8) задають доповнення опуклих множин до R^{3n+2};

2) ліві частини нерівностей, які формують область допустимих розв’язків задачі, є неперервно-диференційованими функціями;

3) для виконання кожної з нерівностей, які формують систему (4.8), необхідно, щоб виконувалася хоча б одна зі структур нерівностей, які формують відповідні Ф-функції;

4) область допустимих розв’язків задачі (4.7) - (4.8) в загальному випадку є незв'язною множиною, а кожна компонента зв'язності є багатозв’язною і має "яружний" характер;

5) область допустимих розв’язків можна представити у вигляді об'єднання кінцевого числа неопуклих підобластей, кожна з яких формується в загальному випадку лінійними і нелінійними обмеженнями;

6) матриця систем нерівностей є блочною і має розріджений вигляд.

4.5 Математична модель та властивості задачі упаковки неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами

Постановка задачі. Нехай задано набір тривимірних тіл $O_i, i \in I = \{1,...,n\}$, поверхня яких утворена сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами. Також задано контейнер у вигляді прямокутного паралелепіпеду P. Необхідно знайти вектор $u^* \in R^p$, що забезпечує таке розміщення тривимірних тіл O_i, $i \in I$, без взаємних перетинів, в паралелепіпеді $P(\eta)$, що його висота $H(\eta) = \eta_2 - \eta_1$ досягає мінімуму.

Грунтуючись на загальній математичній моделі (4.1)-(4.2) та використовуючи Ф-функції та квазі-Ф-функції, представлені у розділі 3, математична модель поставленої задачі може бути подана в такому вигляді:

$$H\left(\eta^*\right) = \min_{(u,Y,\eta)\in\Lambda\subset R^{p+\varepsilon+2}} H(\eta), \tag{4.9}$$

де

$$\Lambda = \{(u,Y,\eta) \in R^{p+\varepsilon+2} : Q_{ij}(u_i,u_j,Y_{ij}) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i,\eta) \geq 0, i \in I,$$
$$H(\eta_1,\eta_2) \geq 0, \eta_1 \geq 0\}, \qquad (4.10)$$
$$Y = (Y_{12},Y_{13},...,Y_{1n},Y_{23},Y_{24},...,Y_{2n},...,Y_{(n-1)n}) \in R^{\varepsilon},\ \varepsilon = 3\frac{n(n-1)-n_2(n_2-1)}{2}.$$

Умова $Q_{ij}(u_i,u_j,Y_{ij}) \geq 0$, де $Q_{ij}(u_i,u_j,Y_{ij})$ - квазі-Ф-функція для тривимірних тіл $O_i(u_i)$ і $O_j(u_j)$, $i < j \in I$, означає, що тіла не перетинаються. Умова $\Phi_i(u_i,\eta) = \min\left\{\Psi_{ik}\left(u_i,Y_k^0\right), k \in \{1,\ldots,6\}\right\} \geq 0$, $Y_1^0 = \left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$, $Y_2^0 = \left(-\frac{\pi}{2},0,l\right)$, $Y_3^0 = \left(0,\frac{\pi}{2},0\right)$, $Y_4^0 = \left(0,-\frac{\pi}{2},w\right)$, $Y_5^0 = (0,0,-\eta_1)$, $Y_6^0 = (\pi,0,\eta_2)$, забезпечує знаходження тіл O_i, $i \in I$, у $P(\eta)$, межі якого належать площинам $\Upsilon_k^0\left(Y_k^0\right) = \left\{X \in R^3 : f_k^0\left(X,Y_k^0\right) = 0\right\}$, $k \in \{1,\ldots,6\}$, і $\Psi_{ik}\left(u_i,Y_k^0\right)$ - Ф-функція для тіла $O_i(u_i)$, $i \in I$, і півпростору H_k^-, що визначається площиною $\Upsilon_k^0\left(Y_k^0\right)$, $k \in \{1,\ldots,6\}$.

Область допустимих розв’язків задачі може бути представлена у вигляді $\Lambda = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} \Lambda_\tau$, де $\zeta \leq 2^{(n_6+2n_7+2n_8+2n_9)(n+5)}$, Λ_τ - допустима підобласть, що задається системою нерівностей виду

$$F^\tau(u,Y,\eta) = \begin{cases} \chi_{1\tau}(\xi_1) \geq 0 \\ \chi_{2\tau}(\xi_2) \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{\mu\tau}(\xi_\mu) \geq 0 \end{cases}, \tau \in \{0,\ldots,\zeta\},$$

і $\chi_{l\tau}(\xi_l)$ - в загальному випадку кусково-гладкі неопуклі функції, $\xi_l \in \left\{\left(u_i,Y_{ij}\right),\left(u_i,\eta_1\right),\left(u_i,\eta_2\right),u_i\right\}, l \in \{1,...,\mu\}, i < j \in I$.

Зауважимо, що Ф-функція для об'єкта O_i і півпростору $H_{ij}, i < j \in I$, може бути еквівалентно представлена у вигляді

$$\Phi_{ij}\left(u_i,Y_{ij}\right) = \max\left\{\Psi_i^{k_i}\left(u_i,Y_{ij}\right), k_i = 1,\ldots,\wp_i\right\}, \qquad (4.11)$$

де $\wp_i = 1$, $i \in \bigcup_{t=1}^{5} I_t$, $\wp_i = 2$, $i \in I_6, \wp_i = 4$, $i \in \bigcup_{t=7}^{9} I_t$, і $\Psi_i^{k_i}\left(u_i, Y_{ij}\right) = \min\left\{\chi_{it}\left(u_i, Y_{ij}\right), t = 1,...,\ell_i^{k_i}\right\}$, $\chi_{it}\left(u_i, Y_{ij}\right)$ - в загальному випадку кусково-гладкі неопуклі функції, що входять до складу Ф-функцій для тривимірних тіл і півпростору (див. розділ 3). Кількість $\ell_i^{k_i}$ цих функцій залежить від об'єкта O_i.

Тоді з (4.11) випливає, що квазі-Ф-функцію для тривимірних тіл O_i і O_j, $i < j \in I$, можна записати у вигляді

$$Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) = \max\left\{\Psi_{ij}^{k_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right), k_{ij} = 1,..., \wp_{ij} = \wp_i \wp_j\right\}, \tag{4.12}$$

де $\Psi_{ij}^{k_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) = \min\left\{\Psi_i^{k_i}\left(u_i, Y_{ij}\right), \Psi_j^{k_j}\left(u_j, \bar{Y}_{ij}\right)\right\}$, $k_i \in \{1,..., \wp_i\}$, $k_j \in \{1,..., \wp_j\}$.

Наприклад, $\wp_{ij} = 1$, якщо O_i і O_j - циліндри, і $\wp_{ij} = 16$, якщо O_i і O_j - сферичний конуси.

З (4.12) випливає, що умова $Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) \geq 0$ виконується, якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{ij}^{k_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) \geq 0, k_{ij} \in \{1,..., \wp_{ij}\}$, $i < j \in I$, тобто виконується хоча б одна з систем нерівностей

$$F^{k_{ij}}(u, Y, \eta) = \begin{cases} \chi_{i1}\left(u_i, Y_{ij}\right) \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \chi_{i\ell_i^{k_i}}\left(u_i, Y_{ij}\right) \geq 0 \\ \chi_{j1}\left(u_j, \bar{Y}_{ij}\right) \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \chi_{j\ell_j^{k_j}}\left(u_j, \bar{Y}_{ij}\right) \geq 0 \end{cases}, \ i < j \in I.$$

Аналогічно, з (4.10) випливає, що Ф-функція для O_i і $cl\left(R^3 \setminus P(\eta)\right)$ може бути записана у вигляді

$$\Phi_i\,(u_i,\eta)=\max\left\{\Psi_i^{s_i}\,(u_i,\eta),s_i=1,\ldots,(\wp_i)^6\right\}, \tag{4.13}$$

де $\Psi_i^{s_i}\,(u_i,\eta)=\min\left\{\tilde{\chi}_{it}\,(\xi_i),t=1,...,\ell_i^{s_i}\right\}$.

Тому об'єкт O_i знаходиться в паралелепіпеді $P(\eta)$, якщо виконана система нерівностей виду

$$F^{s_i}\,(u,\eta)=\begin{cases}\tilde{\chi}_{i1}(\xi_i)\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \tilde{\chi}_{i\ell_i^{s_i}}\,(\xi_i)\geq 0\end{cases} \tag{4.14}$$

де $\xi_l=(u_i,\eta_1)$, або $\xi_l=(u_i,\eta_2)$, або $\xi_l=u_i$ в залежності від того, з якою гранню контейнеру $P(\eta)$ взаємодіє тіло O_i.

Таким чином, обравши для кожної з нерівностей $Q_{ij}\left(u_i,u_j,Y_{ij}\right)\geq 0, i<j\in I$, і $\Phi_i\left(u_i,\eta\right)\geq 0, i\in I$, по одній з систем нерівностей виду (4.12) і (4.14) відповідно, отримаємо систему виду

$$F^{\tau}\,(u,Y,\eta)=\begin{cases}\chi_{1\tau}\,(\xi_1)\geq 0\\ \chi_{2\tau}\,(\xi_2)\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \chi_{\mu_\tau\tau}\left(\xi_{\mu_\tau}\right)\geq 0\end{cases},\tau\in\{0,\ldots,q\}, \tag{4.15}$$

яка задає допустиму підобласть $\Lambda_\tau\subset\Lambda$. Оскільки число нерівностей в системах виду (4.12), (4.14) залежить від типів тривимірних тіл O_i і O_j, то підобласті Λ_r і $\Lambda_s, r\neq s$, можуть бути задані різними кількостями $\mu_r\neq\mu_s$, $r\neq s$, нерівностей.

Оскільки для кожного тривимірного тіла O_i існує $n-1$ площини, які поділяють її з іншими тілами $O_j, j\in I\setminus\{i\}$, то з огляду на (4.13), отримуємо, що кількість способів вибрати систему виду (4.15) дорівнює

$$q=\prod_{i=1}^{n}\wp_i^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\wp_i^{6}=\prod_{t=1}^{5}1^{n_t(n+5)}\cdot 2^{n_6(n+5)}\cdot\prod_{t=7}^{9}4^{n_t(n+5)}=2^{(n_6+2n_7+2n_8+2n_9)(n+5)}.$$

Тоді вся допустима область розв'язків Λ представляється у вигляді об'єднання не більш, ніж q підобластей Λ_τ. Але оскільки частина з підобластей можуть бути порожніми, то кількість ζ спільних систем в загальному випадку менше, ніж q. Це означає, що $\Lambda = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} \Lambda_\tau$.

4.6 Математична модель та властивості задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль

Постановка задачі. Нехай задано множину тривимірних тіл O_i, $i \in I = I_1 \bigcup I_2$, яка складається з:

1) підмножини паралелепіпедів

$$P_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 \colon -l_i^0 \le x \le l_i^0,\ -w_i^0 \le y \le w_i^0,\ -h_i^0 \le z \le h_i^0\},$$

$i \in I_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$;

2) підмножини куль

$$S_j = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - (r_j^0)^2 \le 0\},$$

$j \in I_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n = n_1 + n_2\}$.

Задано також контейнер у вигляді прямого паралелепіпеду

$$P = \left\{X = (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \colon -l \le x \le l,\ -w \le y \le w,\ h_1 \le z \le h_2, h_1 > 0\right\},$$

де h_1 і h_2 є змінними. Вважаємо, що паралелепіпед P_i може бути трансльований на вектор $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ і повернений на кути $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i \in I_1$, тобто розміщення P_i визначається вектором $v_i = (v_i, \theta_i) \in \mathrm{R}^6$.

Куля S_j може бути трансльована на вектор $u_j = (v_j, 0) = (x_j, y_j, z_j, 0, 0, 0)$, $j \in I_2$.

Таким чином, u_i - вектор руху тривимірного тіла O_i, де $O_i = P_i$, якщо $i \in I_1$ і $O_i = S_i$, якщо $i \in I_2$, $i \in I = I_1 \cup I_2$. Отже, вектор

$u=(u_1,u_2,...,u_{n_1},u_{n_1+1},u_{n_1+2},...,u_n)\in R^{\omega}$, де $\omega=6n_1+3n_2$, визначає розміщення паралелепіпедів P_i, $i\in I_1$ і куль S_j, $j\in I_2$ у евклідовому просторі R^3.

Надалі O_i зміщений на вектор u_i позначається як $O_i(\mathrm{u}_i)$, а контейнер P висоти $h=h_2-h_1$ позначається $P(u_\Omega)$, де $u_\Omega=(h_1,h_2)$.

Задача. Необхідно визначити вектор u, який забезпечує упаковку тривимірних тіл O_i, $i\in I$, у контейнері $P(u_\Omega)$, таким чином щоб висота h контейнеру $P(u_\Omega)$ досягала мінімального значення.

Математична модель та її властивості. Грунтуючись на загальній математичній моделі (4.1)-(4.2) та використовуючи Ф-функції для неорієнтованого паралелепіпеда та кулі та двох неорієнтованих паралелепіпедів (див. розділ 3), математична модель поставленої задачі може бути подана в такому вигляді:

$$h^* = \min_{X=(u,u_\Omega)\in W\subset R^{\omega+2}} h \tag{4.16}$$

де

$$\begin{aligned} W=\{X=(u,u_\Omega)\in \mathrm{R}^{\omega+2}:\ & \Phi_{it}^{PP}(u_\mathrm{i},u_\mathrm{t})\ge 0,\ i<t\in I_1,\\ & \Phi_{ij}^{PS}(u_\mathrm{i},u_\mathrm{j})\ge 0,\ i\in I_1,\ j\in I_2,\\ & \Phi_{qj}^{SS}(u_q,u_j)\ge 0,\ 0<q<j\in I_2,\\ & \Phi_i^{P}(u_i,u_\Omega)\ge 0,\ i\in I_1,\\ & \Phi_j^{S}(u_j,u_\Omega)\ge 0,\ j\in I_2\}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$\Phi_{it}^{PP}(u_i,u_t)\ge 0$, $\Phi_{ij}^{PS}(u_i,u_j)\ge 0$ та $\Phi_{ij}^{SS}(u_i,u_j)\ge 0$ - забезпечують неперетинання $P_i(u_i)$ і $P_t(u_t)$, $P_i(u_i)$ і $S_j(u_j)$, $S_i(u_i)$ і $S_j(u_j)$ відповідно; $\Phi_i^P(u_i,u_\Omega)\ge 0$ і $\Phi_j^S(u_j,u_\Omega)\ge 0$ - гарантують розміщення $P_i(u_i)$ і $S_j(\mathrm{u}_j)$ в $P(u_\Omega)$ відповідно.

Математична модель (4.16)-(4.17) має наступні характеристики.

1. Область допустимих розв’язків W задається системою нерівностей, яка включає в себе оператори «$\max$» і «$\min$». Ці оператори відповідають

теоретико-множинним операціям кон'юнкції та диз'юнкції відповідно. Таким чином, в нерівностях $\Phi_{ij}^{PP}(u_i,u_j)\geq 0$ і $\Phi_{ij}^{PS}(u_i,u_j)\geq 0$ оператори «max» відповідають об'єднанню або сукупності систем нерівностей, тоді як оператори «min» відповідають системам нерівностей. Це означає, що область допустимих розв'язків W завжди може бути представлена кінцевим об'єднанням підобластей, тобто $W=\bigcup_{\xi=1}^{\lambda} W_\xi$, де $\lambda=156^{s_1}\cdot 26^{s_2}$, 156 і 26 є кількість систем нерівностей в $\Phi_{it}^{PP}(u_i,u_t)$ і $\Phi_{ij}^{PS}(u_i,u_j)$ відповідно, $s_1=\frac{1}{2}n_1(n_1-1)$, $s_2=n_1n_2$.

2. Підобласті W_ξ задаються системами нерівностей виду

$$\begin{cases} \vartheta_{it}^{\xi\phi}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_t)\geq 0,\ 0<i<t\in I_1,\phi\in I_{it}, \\ \kappa_{ij}^{\xi\pi}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j)\geq 0,\ i\in I_1,\ j\in I_2,\pi\in I_{ij}, \\ \Phi_{qj}^{ss}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j)\geq 0,\ 0<q<j\in I_2, \\ \Phi_i^p(\mathrm{u}_i,h)\geq 0,\ i\in I_1, \\ \Phi_j^s(\mathrm{u}_j,h)\geq 0,\ j\in I_2, \end{cases} \qquad \xi\in J_\lambda=\{1,2,...,\lambda\}, \qquad (4.18)$$

де $\{\vartheta_{it}^{\xi\phi}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_t)\geq 0,\phi\in I_{it}$ та $\{\kappa_{ij}^{\xi\pi}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j)\geq 0,\pi\in I_{ij}$, - системи нерівностей з набору систем, які формують нерівності $\Phi_{it}^{PP}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_t)\geq 0$ і $\Phi_{ij}^{PS}(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j)\geq 0$. Слід зазначити, що функції у лівих частинах нерівностей в (4.18) є нелінійними і нескінченно диференційована. Таким чином, точка $X\in W$, якщо принаймні одна з систем нерівностей (4.18) виконана.

3. Оскільки деякі підобласті W_ξ, $\xi\in J_\lambda$, можуть бути порожніми або міститися в інших підобастях, то число σ систем набагато менше, ніж λ.

4. Деякі підобласті виду W_ξ можуть мати спільні точки. Це означає, що якщо точка u^* є локальним мінімумом щодо W_ξ, то необхідно дослідити всі

інші підобласті, що містять u^* щоб довести, що точка локального мінімуму по відношенню до W.

5. Матриця системи нерівностей (4.17) сильно розріджена.

4.7. Математична модель та властивості задачі упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл

Постановка задачі. Нехай задано гомотетичні опуклі багатогранні тіла P_i, $i \in I = \{1,2,...,n\}$, та контейнер у вигляді кубоїда $\Omega = \{X \in R^3 : w_1 \le x \le w_2, l_1 \le x \le l_2, \eta_1 \le x \le \eta_2\}$, де $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1$ та η_2 змінні. Вектор $u_\Omega = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$ визначає розміри Ω.

Багатогранні тіла P_i задані вершинами

$$p_{io} = g_i^\nabla (p_{io}^1, p_{io}^2, p_{io}^3), i \in I, o \in O = \{1,2,...,\varepsilon\}$$

де h_i^∇ - коефіцієнт гомотетії P_i.

Припускаємо, що $1 = g_1^\nabla \ge g_2^\nabla \ge ... \ge g_n^\nabla$ і принаймні одна нерівність є строгою.

Введемо систему нерівностей

$$\left\{\chi_{ik}(X) = a_k x + b_k y + c_k z + g_i^\nabla d_k \ge 0, i \in I, k \in K = \{1,2,...,\kappa\},\right.$$

яка визначає багатогранник P_i, $i \in I$.

Нехай F_{ik} є площинами, які визначені рівняннями $\chi_{ik}(X) = 0$, $k \in K$.

Контейнер Ω описується системою нерівностей

$$\left\{\varpi_r(X, u_\Omega) \ge 0, r \in \{1,2,...,6\},\right.$$

де $\varpi_1(X, u_\Omega) = x - w_1$, $\varpi_2(X, u_\Omega) = w_2 - x$, $\varpi_3(X, u_\Omega) = y - l_1$, $\varpi_4(X, u_\Omega) = l_2 - y$, $\varpi_5(X, u_\Omega) = z - \eta_1$ й $\varpi_6(X, u_\Omega) = \eta_2 - z$.

Розміщення багатогранного тіла P_i в евклідовому тривимірному арифцілічному просторі R^3 визначається вектором трансляції $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ та кутами обертання θ_i, $i \in I$. Таким чином, вектор руху $u_i = (v_i, \theta_i)$ визначає

розміщення P_i в R^3, а вектор $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in R^m$, де $m=6n$, визначає розміщення P_i, $i\in I$, в R^3.

Тоді координати вершин багатогранного тіла P_i можна записати в наступному вигляді

$$p_{io}(u_i)=(p_{io}^1(u_i),p_{io}^2(u_i),p_{io}^3(u_i))=$$
$$=(g_i^{\nabla}r_i(p_{ioj}^0)^T+x_i,g_i^{\nabla}l_i(p_{io}^0)^T+y_i,g_i^{\nabla}q_i(p_{io}^0)^T+z_i),i\in I,o\in O,$$

де $R_i=\begin{vmatrix} r_i \\ l_i \\ q_i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{vmatrix}$ - матриця обертання (3.1).

Система нерівностей, що визначає багатогранник прийме вид

$$\left\{\zeta_{ik}(X,u_i,u_\Omega)=\chi_{ik}((R_iX^T+v_i),u_\Omega)\geq 0,i\in I,k\in K.\right.$$

Надалі, P_i, що піддається одночасній трансляції v_i та обертанням на кути θ_i, позначимо як $P_i(u_i)$, а кубоїд C зі змінними розмірами u_p – як $\Omega(u_\Omega)$.

Задача. Визначити вектор $u\in R^m$, який забезпечує розміщення $P_i(u_i)$, $i\in I$, без їх взаємного перетинання в кубоїді $\Omega(u_\Omega)$ так, що об'єм кубоїду $H(u_\Omega)=(w_2-w_1)(l_2-l_1)(\eta_2-\eta_1)$ досягав би свого мінімального значення.

Грунтуючись на загальній математичній моделі (4.1)-(4.2) та використовуючи Ф-функції для двох неорієнтованих багатогранних тіл (див. розд. 3.1), математична модель поставленої задачі може бути подана в такому вигляді:

$$H(u_\Omega{}^*)=\min_{(X)\in W\subset R^{m+6}}H(u_\Omega) \tag{4.19}$$

де

$$W=\{X\in R^{m+6}:\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0,0<i<j\in I,\Phi_i(u_i,u_\Omega)\geq 0,i\in I, \tag{4.20}$$
$$w_1\geq 0,l_1\geq 0,\eta_1\geq 0,w_2-w_1\geq 0,l_2-l_1\geq 0,\eta_2-\eta_1\geq 0\}.$$

Нерівність $\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0$ забезпечує неперетинання P_i і P_j, а нерівність $\Phi_i(u_i,u_\Omega)\geq 0$ забезпечує знаходження P_i в $\Omega(u_\Omega)$. Відзначимо, що $\Phi_i(u_i,u_\Omega)$ Ф-функція для P_i та множини $A(u_\Omega)=R^3\setminus intC(u_\Omega)$, де $intC(\Upsilon)$ внутрішня частина C.

Розглянемо ряд особливостей математичної моделі.

1. Оскільки кожна Ф-функція для P_i та P_j має форму

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\max\{\Psi_{ij}^{1t}(u_i,u_j),\Psi_{ij}^{2d}(u_i,u_j),t,d\in \mathrm{K},\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j),l\in L=\{1,2,...,\upsilon^2\}\}$$

де $\upsilon=\varepsilon+\kappa-2$ число ребер P_1, то $\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0$, якщо принаймні одна з нерівностей

$$\Psi_{ij}^{1t}(u_i,u_j)\geq 0,t\in T,\Psi_{ij}^{2d}(u_i,u_j)\geq 0,d\in T,\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j)\geq 0,l\in L,$$

виконана. Таким чином, число нерівностей дорівнює $2\kappa+\upsilon^2$.

2. Оскільки $\Psi_{ij}^{1t}(u_i,u_j)=\min\{\phi_{ij}^{1to}(u_i,u_j),\quad o\in O\}\geq 0$, $\Psi_{ij}^{2d}(u_i,u_j)=\min\{\phi_{ij}^{2do}(u_i,u_j),\quad o\in O\}\geq 0$ і $\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j)=\min\{\phi_{ij}^{3lb}(u_i,u_j),$ $b\in M=\{1,2,...,5\}\}$ (див. розділ 3.1), то $\Psi_{ij}^{1t}(u_i,u_j)\geq 0$, $\Psi_{ij}^{2d}(u_i,u_j)\geq 0$ й $\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j)\geq 0$ еквівалентні системам нерівностей відповідно

$$\begin{cases}\phi_{ij}^{1t1}(u_i,u_j)\geq 0\\ \phi_{ij}^{1t2}(u_i,u_j)\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ \phi_{ij}^{1t\varepsilon}(u_i,u_j)\geq 0\end{cases},\begin{cases}\phi_{ij}^{2d1}(u_i,u_j)\geq 0\\ \phi_{ij}^{2d2}(u_i,u_j)\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ \phi_{ij}^{2d\varepsilon}(u_i,u_j)\geq 0\end{cases},\begin{cases}\phi_{ij}^{3l1}(u_i,u_j)\geq 0\\ \phi_{ij}^{3l2}(u_i,u_j)\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ \phi_{ij}^{3ls}(u_i,u_j)\geq 0\end{cases}.$$

де

$$\phi_{ij}^{1to}(u_i,u_j)=\zeta_{ik}(p_{jo}(u_j),u_i),\phi_{ij}^{2ko}(u_i,u_j)=\zeta_{jk}(p_{io}(u_i),u_j).$$

3. З пунктів 1 і 2 випливає, що багатогранні тіла P_i, $i\in I$, не перетинаються якщо виконується принаймні одна із систем нерівностей

$$G_\tau(u)=\begin{cases}\Psi_{12}^{\tau}(u_1,u_2)\ge 0\\ \Psi_{13}^{\tau}(u_1,u_2)\ge 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \Psi_{23}^{\tau}(u_2,u_3)\ge 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \Psi_{n(n-1)}^{\tau}(u_{n-1},u_n)\ge 0\end{cases},\tau=\Xi=\{0,1,...,\zeta=(2\kappa+\upsilon^2)^{\sigma}+1\}$$

де $\Psi_{ij}^{\tau}(u_i,u_j)$ чи $\Psi_{ij}^{1t}(u_i,u_j)$ або $\Psi_{ij}^{2d}(u_i,u_j)\ge 0$, або $\Psi_{ij}^{3l}(u_i,u_j)$, $\sigma=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4. Оскільки $\Phi_i(u_i,u_\Omega)=\min\{\Psi_i^r(u_i,u_\Omega),r\in R\}$, де $\Psi_i^r(u_i,u_\Omega)=\min\{\varphi_{io}^r(u_i,u_\Omega)=\varpi_r(p_{io}(u_i),u_\Omega),o\in O\}$, то $\Phi_i(u_i,u_\Omega)\ge 0$ еквівалентно системі нерівностей $\left\{\Psi_i^r(u_i,u_\Omega)\ge 0,r\in R.\right.$

5. З пунктів 2, 3 і 4 випливає, що точка $X\in W$, якщо виконується принаймні одна із систем нерівностей

$$F_\tau(u,\xi)=\begin{cases}G_\tau(u)\ge 0\\ \Phi_i(u_i,\Upsilon)\ge 0,i\in I\\ w_1\ge 0,l_1\ge 0,\eta_1\ge 0\\ w_2-w_1\ge 0\\ l_2-l_1\ge 0\\ \eta_2-\eta_1\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\varphi_{1\tau}(\xi_1)\ge 0\\ \varphi_{2\tau}(\xi_2)\ge 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_{\mu\tau}(\xi_\mu)\ge 0\end{cases},\tau\in\Xi,$$

де $\xi_t,t\in(1,2,...,\mu)$, чи (u_i,u_j) або (u_i,w_1), або (u_i,w_2), або (u_i,l_1), або (u_i,l_2), або (u_i,η_1), або (u_i,η_2), або (w_1,w_2), або (l_1,l_2), або (η_1,η_2), або w_1, або l_1, або η_2.

Таким чином, можлива область W може бути представлена у такий спосіб

$$W=\bigcup_{\tau=0}^{\zeta}W_\tau$$

де W_τ визначена системою нерівностей $F_\tau(u,\xi)\ge 0$.

6. Теоретично знайти точку глобального мінімуму задачі (4.19)-(4.20) можна як результат розв'язання наступної задачі:

$$H(u_\Omega^*) = \min\{H(u_\Omega^{*\tau}), \tau \in \Xi\}$$

де

$$H(u_\Omega^{*\tau}) = \min H(u_\Omega), \quad (u, u_\Omega) \in W_\tau \subset R^m, \tau \in \Xi.$$

4.8 Математична модель та властивості задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл у кубоїд мінімального об'єму

Нехай задано множину неопуклих багатогранних тіл P_i, $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, і контейнер у вигляді кубоїда

$$\Omega = \{X \in R^3, 0 \le w_1 \le x \le w_2, 0 \le l_1 \le x \le l_2, 0 \le \eta_1 \le x \le \eta_2\}$$

де $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1$ і η_2 є змінними, тобто вектор $u_\Omega = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$ визначає розміри Ω.

Багатогранні тіла P_i є об'єднанням опуклих багатогранних тіл

$$P_i = \bigcup_{k=1}^{\varepsilon_i} P_{ik}, \; i \in I,$$

а багатогранні тіла P_{ik} визначаються вершинами

$$p_{ikt} = (p_{ikt}^1, p_{ikt}^2, p_{ikt}^3), \; i \in I, \; k \in K_i = \{1, 2, ..., \varepsilon_i\}, \; t \in T_{ik} = \{1, 2, ..., \rho_{ik}\}.$$

Розміщення багатогранного тіла P_i в арифцілічному евклідовому 3D просторі R^3 визначається вектором трасляції $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ і кутами повороту $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i \in I$. Таким чином, вектор руху $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ визначає розміщення P_i у R^3. Звідси, вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{6n}$ визначає місце розміщення P_i, $i \in I$, в R^3, а, отже, повний набір змінних задачі буде визначатись вектором $X = (u, u_\Omega) = (u_{1i} u_2, ..., u_n, u_\Omega) \in R^m$, де $m = 6n + 6$.

Надалі багатогранник P_i , трасльований на вектор v_i і повернутий на кути α_i, β_i та γ_i позначимо як $P_i(u_i)$, а контейнер Ω зі змінними розмірами, що задаються вектором u_Ω позначимо як $\Omega(u_\Omega)$.

Нехай V_{ir}, $r \in J_i = \{1, 2, ..., \vartheta_i\}$, є вершинами опуклої оболонки P_i. Тоді розміщення V_{ir} і p_{ikt} (3) у R^3 визначаються співвідношеннями

$$V_{ir}(u_i) == R_i^T V_{ir} + v_i, i \in I, r \in J_i,$$

$$p_{ikt}(u_i) = R_i^T p_{ikt} + v_i, \ i, j \in I, k \in K_i, t \in T_{ik},$$

де R_i є оператором обертання.

Сформулюємо таку задачу. Знайти вектор $u \in R^m$, який забезпечує розміщення $P_i(u_i)$, $i \in I$, без взаємних перетинів у контейнері $\Omega(u_\Omega)$ таким чином, щоб об`єм $H(u_\Omega)$ досягав би мінімального значення.

Грунтуючись на загальній математичній моделі (4.1)-(4.2) та використовуючи Ф-функції для двох неорієнтованих неопуклих багатогранних тіл (див. розд. 3.3), математична модель поставленої задачі може бути подана в такому вигляді:

$$H(u_\Omega{}^*) = \min_{X \in W} H(u_\Omega) \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} W = \{X \in R^m : \quad & \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I, \\ & \Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0, i \in I, \\ & F(u_\Omega) \geq 0\} \end{aligned} \tag{4.22}$$

де

$$H(u_\Omega) = (w_2 - w_1)(l_2 - l_1)(\eta_2 - \eta_1), \ F(u_\Omega) = \min\{w_2 - w_1, l_2 - l_1, \eta_2 - \eta_1\}$$

$$\Phi_i(u_i, u_\Omega) = \min\{\phi_{io}^r(u_i, u_\Omega), o \in O_2 = \{1, 2, ..., 6\}, r \in J_i\},$$

$$\phi_{i1}^r(u_i, u_\Omega) = V_{1ir}(u_i) - w_1, \ \phi_{i2}^r(u_i, u_\Omega) = w_2 - V_{1ir}(u_i), \ \phi_{i3}^r(u_i, u_\Omega) = V_{2ir}(u_i) - l_1,$$

$$\phi_{i4}^r(u_i, u_\Omega) = l_2 - V_{2ir}(u_i), \ \phi_{i5}^r(u_i, u_\Omega) = V_{3ir}(u_i) - \eta_1, \ \phi_{i6}^r(u_i, u_\Omega) = \eta_2 - V_{3ir}(u_i).$$

При цьому нерівність $\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0$ забезпечує неперетинання P_i і P_j, а нерівність $\Phi_i(u_i,u_j)\geq 0$ забезпечує знаходження P_i у $\Omega(u_\Omega)$, тобто $\Phi_i(u_i,u_\Omega)$ є $\Phi-$функцією P_i і $B(u_\Omega)=R^3\setminus int\Omega(u_\Omega)$, де $int\Omega(u_\Omega)$ це внутрішність Ω.

Властивості математичної моделі

1. Так як $P_i=\bigcup_{s=1}^{\varepsilon_i}P_{is}$ і $P_j=\bigcup_{p=1}^{\varepsilon_j}P_{jp}$, то $P_i\bigcap P_j=\varnothing$, якщо $P_{is}\bigcap P_{jp}=\varnothing$, $s\in K_i$, $p\in K_j$. Це означає що $\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\min\{\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j),\ s\in K_i,\ p\in K_j\}$, де $\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)$ є $\Phi-$функція P_{is} і P_{jp}. Отже, $\Phi_{ij}(u_i,u_j)\geq 0$, якщо $\min\{\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j),s\in K_i,p\in K_j\}\geq 0.$

2. $\Phi-$функція $\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)$ для багатогранних тіл $P_{is}(u_i)$ і $P_{jp}(u_j)$ має вигляд

$$\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)=\max\{\Psi_{ij}^{spa}(u_i,u_j),a\in A_{is}=\{1,2,...,\chi_{is}\},$$

$$\Psi_{ij}^{spd}(u_i,u_j),d\in D_{jp}=\{\chi_{is}+1,\chi_{is}+2,...,\chi_{is}+\chi_{jp}\},$$

$$\Psi_{ij}^{spl}(u_i,u_j),l\in L_{ij}=\{\chi_{is}+\chi_{jp}+1,\chi_{is}+\chi_{jp}+2,...,\upsilon_{ij}^{sp}=\chi_{is}+\chi_{jp}+\kappa_{is}\kappa_{jp}\}\},$$

де χ_{is} - число граней $P_{is}(u_i)$, χ_{jp} - число граней $P_{jp}(u_j)$, $\kappa_{is}=\rho_{is}+\chi_{is}-2$ - число ребер $P_{is}(u_i)$, $\kappa_{jp}=\rho_{jp}+\chi_{jp}-2$ - число ребер $P_{jp}(u_j)$. Таким чином $\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)\geq 0$, якщо виконується хоча б одна з нерівностей

$$\Psi_{ij}^{spa}(u_i,u_j)\geq 0,a\in A_{is},\Psi_{ij}^{spd}(u_i,u_j)\geq 0,d\in D_{jp},\Psi_{ij}^{spl}(u_i,u_j)\geq 0,l\in L_{ij}^{sp}.$$

3. Так як $\Psi_{ij}^{spa}(u_i,u_j)=\min\{f_{ijt}^{spa}(u_i,u_j),\quad t\in T_{is}=\{1,2,...,\rho_{is}\}$, $\Psi_{ij}^{spd}(u_i,u_j)=\min\{f_{ijt}^{spd}(u_i,u_j),\quad t\in T_{jp}=\{1,2,...,\rho_{jp}\}\}$ і $\Psi_{ijt}^{spl}(u_i,u_j)=\min\{f_{ijt}^{spl}(u_i,u_j),\quad t\in T_e=\{1,2,...5\}$, то $\Psi_{ij}^{spa}(u_i,u_j)\geq 0$, $\Psi_{ij}^{spd}(u_i,u_j)\geq 0$ і $\Psi_{ij}^{spl}(u_i,u_j)\geq 0$ еквівалентні системі нерівностей

$$\Psi_{ij}^{spa}(u_i,u_j)=\left\{f_{ijt}^{spa}(u_i,u_j)\geq 0,t\in T_{is},\right.$$

$$\Psi_{ij}^{spd}(u_i,u_j)=\left\{f_{ijt}^{spd}(u_i,u_j)\geq 0,t\in T_{jp},\right.$$

$$\Psi_{ij}^{spl}(u_i,u_j)=\left\{ f_{ijt}^{spl}(u_i,u_j)\geq 0, t\in T_e.\right.$$

Треба звернути увагу, що функції $f_{ijt}^{kq\varsigma}(u_i,u_j)$ є нескінченно диференційованими по всім змінним.

4. Як випливає з попередніх пунктів, $\Phi_{ij}^{sp}(u_i,u_j)\geq 0$ якщо виконується хоча б одна з нерівностей систем виду

$$\Psi_{ij}^{sp\gamma}(u_i,u_j)=\begin{cases} f_{1\gamma}(u_i,u_j)\geq 0 \\ f_{2\gamma}(u_i,u_j)\geq 0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{\lambda\gamma}(u_i,u_j)\geq 0 \end{cases}, \gamma=0,1,2,\ldots,\gamma_{ij}^{sp}=\chi_{is}+\chi_{jp}+\kappa_{is}\kappa_{jp}-1,$$

де $\Psi_{ij}^{sp\gamma}(u_i,u_j)\geq 0$ це одна з систем нерівностей $\Psi_{ij}^{spk}(u_i,u_j)\geq 0$, $k\in A_{is}\cup D_{jp}\cup L_{ij}^{sp}$.

Отже, P_i і P_j, $i<j\in I$, не перетинаються, якщо виконується, одна з систем нерівностей

$$G_\tau(u)=\begin{cases} \Psi_{12}^{sp\tau}(u_1,u_2)\geq 0, s\in K_1, p\in K_2, \\ \Psi_{13}^{sp\tau}(u_1,u_3)\geq 0, s\in K_1, p\in K_3, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{(n-1)n}^{sp\tau}(u_{n-1},u_n)\geq 0, s\in K_{n-1}, p\in K_n, \end{cases},$$

де $\tau\in\Upsilon=\{0,1,\ldots,\zeta=\sum\limits_{i\neq j=1}^{n}\left(\sum\limits_{s=1}^{\varepsilon_i}\sum\limits_{p=1}^{\varepsilon_j}\gamma_{ij}^{sp}\right)\}$.

5. Грунтуючись на попередніх пунктах можна сформувати підсистеми W_τ, які визначаються за допомогою систем нерівностей

$$F_\tau(u,u_\Omega)=\begin{cases} G_\tau(u)\geq 0 \\ \Phi_i(u_i,u_\Omega)\geq 0, i\in I, \\ F(u_\Omega)\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} f_{1\tau}(\xi_1)\geq 0 \\ f_{2\tau}(\xi_2)\geq 0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{\mu\tau}(\xi_\mu)\geq 0 \end{cases}, \tau\in\Upsilon,$$

де ξ_t складається з компонент векторів u і u_Ω, і $\mu \geq \sum_{i<j=1}^{n} \lambda_{ij} + 6\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i + 6$,

Очевидно, що $W = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} W_\tau$.

6. Теоретично знайти точку глобального мінімуму задачі (4.21)-(4.22) можна як результат розв'язання послідовності задач

$$H(u_\Omega^*) = \min\{H(u_\Omega^{*\tau}), \tau \in \Upsilon\}$$

де

$$H(u_\Omega^{*\tau}) = \min H(u_\Omega), \quad (u, u_\Omega) \in W_\tau \subset R^m, \tau \in \Upsilon.$$

4.9 Математична модель задачі упаковки паралелепіпедів з можливістю їх ортогональних поворотів

Нехай задана множина з N прямокутних паралелепіпедів (n-паралелепіпедів) $P_i \subset R^n$ виду

$$P_i = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, 0 \leq x_k \leq a_{ik}, k \in J_n = \{1, 2, ..., n\}\},$$

де $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ – вектор метричних характеристик (лінійних розмірів) n-паралелепіпеда $P_i, i \in J_N$, $J_N = \{1, 2, ..., N\}$. Вважаємо, що n-паралелепіпеди P_i можуть повертатися на кут $\pi/2$ щодо координатних площин простору R^n. Задана область розміщення у вигляді n-паралелепіпеда D_0, який визначається як

$$D_0 = \{x \in R^n,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, 0 \leq x_k \leq b_{0k},\ k \in J_n\},$$

де $b_{01} = d$ – змінна величина, $b_0 = (b_{01}, b_{02}, ..., b_{0n})$ – вектор метричних характеристик n-паралелепіпеда D_0.

При цьому грані n-паралелепіпедів $P_i, i \in J_N$, паралельні відповідним граням n-паралелепіпеда D_0. Лінійні розміри D_0 дозволяють розмістити всі n-паралелепіпеди $P_i, i \in J_N$, тобто $b_{0k} \geq \max_{i \in J_N, j \in J_n} a_{ij}$, $k = 2, 3, ..., n$.

Задача. Необхідно упакувати n-паралелепіпеди $P_i, i \in J_N$, з урахуванням можливості їх поворотів на кут $\pi/2$ в n-паралелепіпеді D_0 так, щоб паралелепіпеди попарно не перетиналися й довжина d ребра b_{01}, що характеризує зайняту частину області D_0, була мінімальною.

Для побудови математичної моделі поставленої задачі використовуємо математичний апарат Φ-функцій.

Умова розміщення в області n-D_0 паралелепіпеда $P_j(u_j, v_j)$, що допускає повороти на кут $\pi/2$, може бути описана за допомогою модифікації Φ-функції (2) виду

$$\Phi_{0j}(u_0, u_j, v_j) =$$
$$= \min\{u_{j1} - u_{01}, -u_{j1} + u_{01} + b_{01} - a_{jk_{j1}}, ..., u_{jn} - u_{0n}, -u_{jn} + u_{0n} + b_{0n} - a_{jk_{jn}}\}.$$

Виходячи з наведеної постановки задачі й засобів аналітичного опису умов попарного неперетину й розміщення n-паралелепіпедів в області D_0, математичну модель задачі представимо в наступному вигляді:

$$X^* = \underset{X \in W \subset R^{Nn+1}}{\arg\min}\ F(X) \tag{4.23}$$

Де $F(X) = d$, $d = b_{01}, X = (u, v, d), u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, W – область допустимих рішень, яка описується системою нерівностей

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(u_i, u_j, v_i, v_j) \geq 0,\ i, j \in J_N, i < j, \\ \Phi_{0j}(u_0, u_j, v_j) \geq 0,\ j \in J_N. \end{cases} \tag{4.24}$$

Побудована математична модель (4.23)-(4.24) має ряд особливостей.

1. Задача є обернено опуклою.

2. Множина W в загальному випадку є незв’язною, а кожна її компонента зв’язності багатозв’язна.

3. Оскільки цільова функція $F(X)$ лінійна, то локальні мінімуми цільової функції досягаються в крайніх точках W.

4. У загальному випадку локальні мінімуми нестрогі.

4.10 Висновки за розділом 4

У четвертому розділі побудовано математичну модель (4.1)-(4.2) загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами та різні її реалізації. Проведено дослідження особливостей побудованих математичних моделей.

На основі побудованих у попередніх розділах класах Ф-функцій в залежності від форми та особливостей характеристик тривимірних тіл, виду контейнеру, функції цілі та технологічних обмежень побудовано реалізації базової математичної моделі для таких задач: упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у багатозв’язну область; компоновки тривимірних тіл з урахуванням допустимих відстаней та зон заборони; упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль; упаковки тіл, поверхня яких формується циліндричними, конічними та сферичними поверхнями; упаковки паралелепіпедів з урахуванням їх ортогональних поворотів; упаковки опуклих неорієнтованих гомотетичних багатогранних тіл; упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл.

Для побудованої базової математичної моделі задачі упаковки тривимірних тіл необхідно вказати деякі важливі особливості, які вплинули на розробку загальної методології розв’язання задач. До таких особливостей слід віднести наступне.

1. Використання апарату Ф-функцій дозволило побудувати математичну модель задачі у вигляді задачі математичного програмування.

2. Ліві частини нерівностей, що формують область припустимих розв’язків задачі, є неперервно-диференційованими функціями.

3. Для виконання кожної з нерівностей, що формують систему (4.2),

необхідно, щоб виконувалась хоча б одна зі систем нерівностей, які формують відповідні Ф-функції.

4. Область *W* припустимих розв’язків задачі в загальному випадку є незв’язною множиною, і кожна її компонента зв’язності має “яружний” характер.

5. Область припустимих розв’язків *W* можна представити у вигляді об'єднання скінченного числа неопуклих підобластей, кожна з яких формується в загальному випадку лінійними та нелінійними неопуклими обмеженнями.

6. Представлення області *W* у вигляді об’єднання підобластей теоретично дозволяє звести розв’язання задачі (4.1)-(4.2) до розв’язання послідовності задач нелінійного програмування на кожній з підобластей. Кожна з таких задач є багатоекстремальною задачею.

7. Локальні екстремуми в загальному випадку є нестрогими.

8. Задача (4.1)-(4.2) відноситься до класу *NP*- складних.

Основною перевагою побудованої математичної моделі є те, що вона представлена у вигляді задач нелінійного програмування. Цей факт дозволяє розробити підходи до розв’язання задач упаковки тривимірних тіл з використанням сучасних NLP солверів.

Результати представлені в розділі 4 опубліковано в роботах [1-8,19, 25, 29, 36, 41, 55].

РОЗДІЛ 5
МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

Важливе наукове значення становить виявлення загальних закономірностей моделювання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл. Це пов'язано із забезпеченням можливості застосування методів розв'язання одного класу задач оптимізаційного геометричного проектування до іншого, відмінного за своєю неформальною постановкою.

Тому саме створення єдиної загальної методології для розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл на базі арсеналу засобів, розвинених в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування, дозволяє подивитися на дану проблему з єдиних позицій і залучити до розв’язання даного класу задач упаковки тривимірних тіл всю міць сучасних методів нелінійної оптимізації.

5.1 Опис єдиної методології розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл

Запропонована у розділі 4 множина реалізацій узагальненої математичної моделі охоплює досить широкий клас задач упаковки тривимірних тіл. Як було показано в розділі 4, всі ці задачі мають загальні властивості: складність аналітичного опису області припустимих розв'язків, багатовимірність та багатоекстремальність, нелінійність функцій обмежень області припустимих розв'язків. Всі ці властивості виводять даний клас задач за рамки класичної теорії дослідження операцій.

Однією з проблем в розв’язанні задач упаковки є організація перебору багаточисельних локальних екстремумів. Слід відзначити, що при розміщенні навіть порівняно невеликого числа тривимірних тіл, здійснити прямий перебір локальних екстремумів неможливо. Тому проблема багатоекстремальності задач оптимальної упаковки тривимірних тіл потребує постійного

вдосконалення підходів до її розв’язання.

Аналіз властивостей задач оптимальної упаковки тривимірних тіл показав, що вони мають як спільні властивості, так і деякі відмінності. Наприклад, важливими загальними властивостями задач є те, що область припустимих розв’язків можна представити у вигляді об'єднання скінченного числа неопуклих підобластей, а ліві частини нерівностей, що формують підобласти є неперервно-диференційованими функціями. Ці властивості дозволяють розробити загальний метод локальної оптимізації, який буде ґрунтуватись на декомпозиції основної задачі на послідовність підзадач меншої розмірності та значно меншою кількістю нерівностей.

Слід відзначити, що деякі сформульовані в розділі 4 задачі за своєю постановкою та властивостями можуть значно відрізнятись рівнем складності та розмірності. Наприклад, можливість здійснювати одночасні неперервні обертання та трансляції тривимірних тіл, врахування мінімально припустимих відстаней між тілами або упаковка неопуклих тіл значно підвищує складність задачі та розмірність задач. В свою чергу рівень складності задач визначає різні підходи для побудови початкових точок та глобальної оптимізації. Наприклад, якщо для формування початкових точок можна обрати метод, який ґрунтується на послідовностях упаковки тривимірних тіл, то відповідно і для пошуку наближення до глобального екстремуму також необхідно обирати метод, який буде оптимізувати функцію цілі на множині переставлень в таких послідовностях. А от задачі упаковки неорієнтованих неопуклих багатогранних тіл мають найбільшу складність, що вимагає застосування зовсім інших підходів як для побудови початкових точок, так і для пошуку наближення до глобального екстремуму.

Основною перевагою математичної моделі (4.1)-(4.2) загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл є те, що вона побудована у вигляді задачі математичного програмування. Це дозволило розробити єдину методологія розв’язання задач упаковки, яка об’єднала в собі різні підходи до розв’язання задач пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл в різних

реалізаціях загальної задачі. На всіх етапах розробленої методології застосовуються сучасні методи нелінійної оптимізації.

Основна ідея розробленої методології схематично представлена на рис.5.1.

Рис.5.1. Методології розв'язання задач упаковки тривимірних тіл

Як видно зі схеми, запропонована методологія ґрунтується на аналізі вхідної інформації про реалізацію загальної задачі пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл. Вона використовує декілька підходів, принципова відмінність яких полягає в можливості зміни орієнтації тривимірних тіл під час пошуку розв'язку задачі, адже довільні повороти тривимірних тіл значно ускладнюють процес пошуку розв'язку та вимагають використання інших методів.

Через це розроблена методологія використовує два основних підходи до

розв’язання задач:

- упаковки опуклих орієнтованих тривимірних тіл
- упаковки неорієнтованих тривимірних тіл.

Можливість довільної зміни орієнтації тіл вимагає використання інших методів для пошуку початкових розміщень, а тому і застосування іншого підходу. У випадку неорієнтованих тіл підхід до розв’язання задачі використовує дві різні стратегії пошуку наближення до глобального розв’язку, які обираються в залежності від форми тіл. У випадку, якщо тіла мають опуклу форму, використовується стратегія, яка ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та пошуку перспективних точок. Оскільки при упаковці тривимірних тіл неопуклої форми складність задачі значно підвищується, то для її розв’язання використовується багатоетапна стратегія мультістарту, яка на початковому етапі використовує стратегію упаковки неорієнтованих опуклих тіл.

Кожна із запропонованих стратегій побудована на використанні послідовності таких методів:

1) методу побудови допустимих точок з області припустимих розв’язків;

2) методу локальної оптимізації;

3) методу глобальної оптимізації.

Для кожної з запропонованих стратегій розроблено свій набір методів, що враховує особливості задач, розглянутих в розділі 4.

Розглянемо кожну з запропонованих стратегій більш детально.

5.2 Стратегія, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації

Стратегія використовувалась для розв’язання таких реалізацій загальної задачі упаковки тривимірних тіл:

- упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів у багатозв’язну область;
- компоновки тривимірних тіл з урахуванням допустимих відстаней

та зон заборони;

- упаковки паралелепіпедів з урахуванням їх ортогональних поворотів.

Стратегія ґрунтується на використанні наступної послідовності методів:

1) для побудови початкових точок – метод регулярних розміщень та метод оптимізації за групами змінних;

2) для пошуку локальних екстремумів – модифікований метод можливих напрямів разом зі стратегією активного набору на підобластях;

3) для пошуку наближення до глобального екстремуму – модифікований метод околів, що звужуються.

Основна ідея стратегії орієнтована на оптимізацію функції цілі, заданої на множині перестановок. Для того, щоб пошук глобального екстремуму був ефективним, функція цілі повинна бути квазісепарабельною та багатоекстремальною. Число локальних екстремумів повинно бути таким, що можна стверджувати про закон їх розподілу, вважаючи кожний з них реалізацією випадкової величини.

Для побудови допустимих початкових точок з області припустимих розв’язків застосовуються методи, які використовують послідовність розміщення тривимірних тіл (метод оптимізації за групами змінних) або послідовність координат їх центрів (метод регулярних розміщень, орієнтований на розміщення конгруентних тривимірних тіл).

Завдяки тому, що для перелічених задач існує можливість встановити відповідність між перестановками тривимірних тіл і локальними екстремумами, для пошуку наближення до глобального екстремуму використовується стратегія, яка використовує модифікований метод околів, що звужуються.

Метод є спрямованим випадковий перебором, орієнтованим на оптимізацію функції цілі, яка задана на множині перестановок. Метод околів, що звужуються, заснований на властивостях імовірнісного розподілу локальних екстремумів функції цілі. Він дозволяє певним чином організувати

перебір послідовностей тривимірних тіл, які необхідно розмістити, та отримати за порівняно короткий час розв'язок задачі, близький до глобального екстремуму.

Для його реалізації необхідно ввести певну метрику на просторі перестановок. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на множині перестановок. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи статистичної інформації, обираються центри та радіуси нових околів. Якщо при переході до чергового етапу пошуку значення функції цілі не покращується, то радіус околів зменшується. Таким чином формується деяка збіжна послідовність. Умовно схему роботи методу околів, що звужуються, можна представити за допомогою схеми, зображеної на рис.5.2.

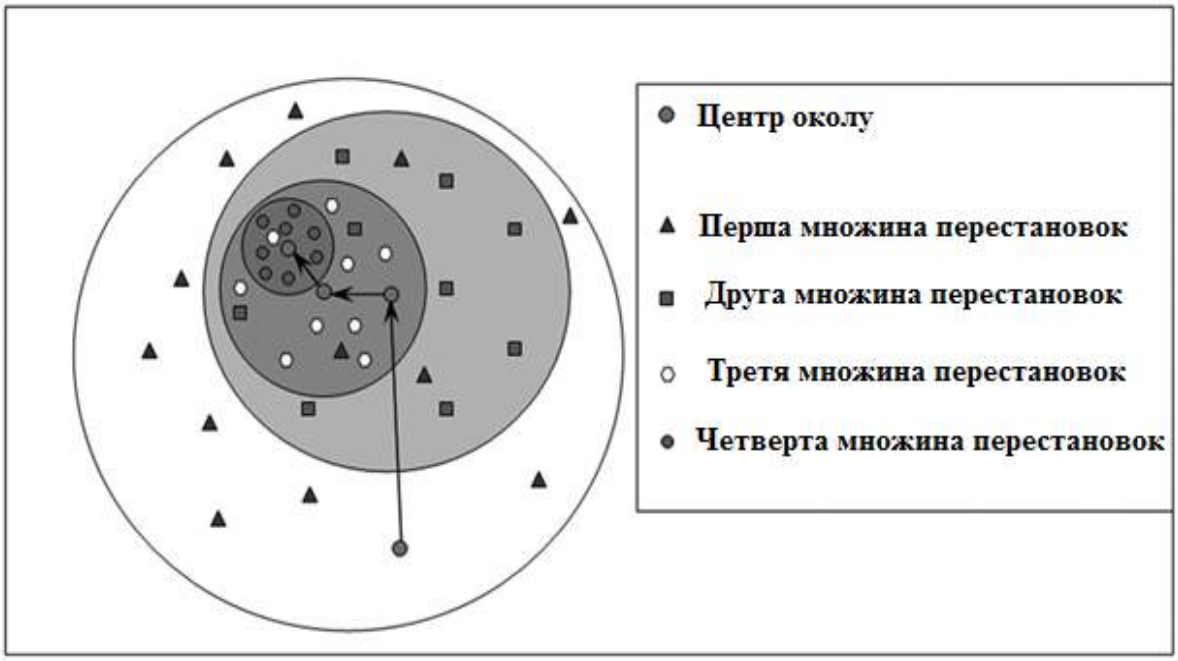


Рис.5.2. Схема методу околів, що звужуються

Як видно з представленої схеми, завдяки послідовному визначенню статистичних властивостей функції цілі у формуємих околах, алгоритм методу околів, що, звужуються, дозволяє сформувати збіжну послідовність центрів, в околах яких відбувається поступове спрямоване зрушення математичного очікування функції цілі у бік її глобального екстремуму.

Для реалізації методу околів, що звужуються, необхідно визначити:

- множину перестановок, на якій може бути задана функція цілі задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл;
- умови співставлення точок з множини переставлень і точками локальних екстремумів функції цілі задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл;
- метрику, що буде використовуватись, для визначення відстані між точками на множині переставлень;
- діаметр множини переставлень;
- умови формування репрезентативної випадкової вибірки точок з кожного околу на множині переставлень;
- визначати статистичні властивості функції цілі за сформованою вибіркою точок в околі обраного центу;
- правила формування центрів нових околів, в яких існує ймовірність покращити значення функції цілі;
- визначити алгоритм, за яким буде змінюватись розмір радіусу околів;
- умови припинення пошуку.

Загальна схема стратегії пошуку наближення до глобального екстремуму задачі оптимальної упаковки за допомогою методу околів, що звужуються, представлена на рис.5.3.

Представлений алгоритм дозволяє здійснити невичерпний випадковий “направлений” перебір локальних екстремумів задачі пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл та отримати деяке наближення до точки глобального екстремуму. Перебір будемо називати направленим, через те, що стратегія реалізує збіжний алгоритм, що здійснює поступове спрямоване зрушення математичного очікування функції цілі у бік її глобального екстремуму.

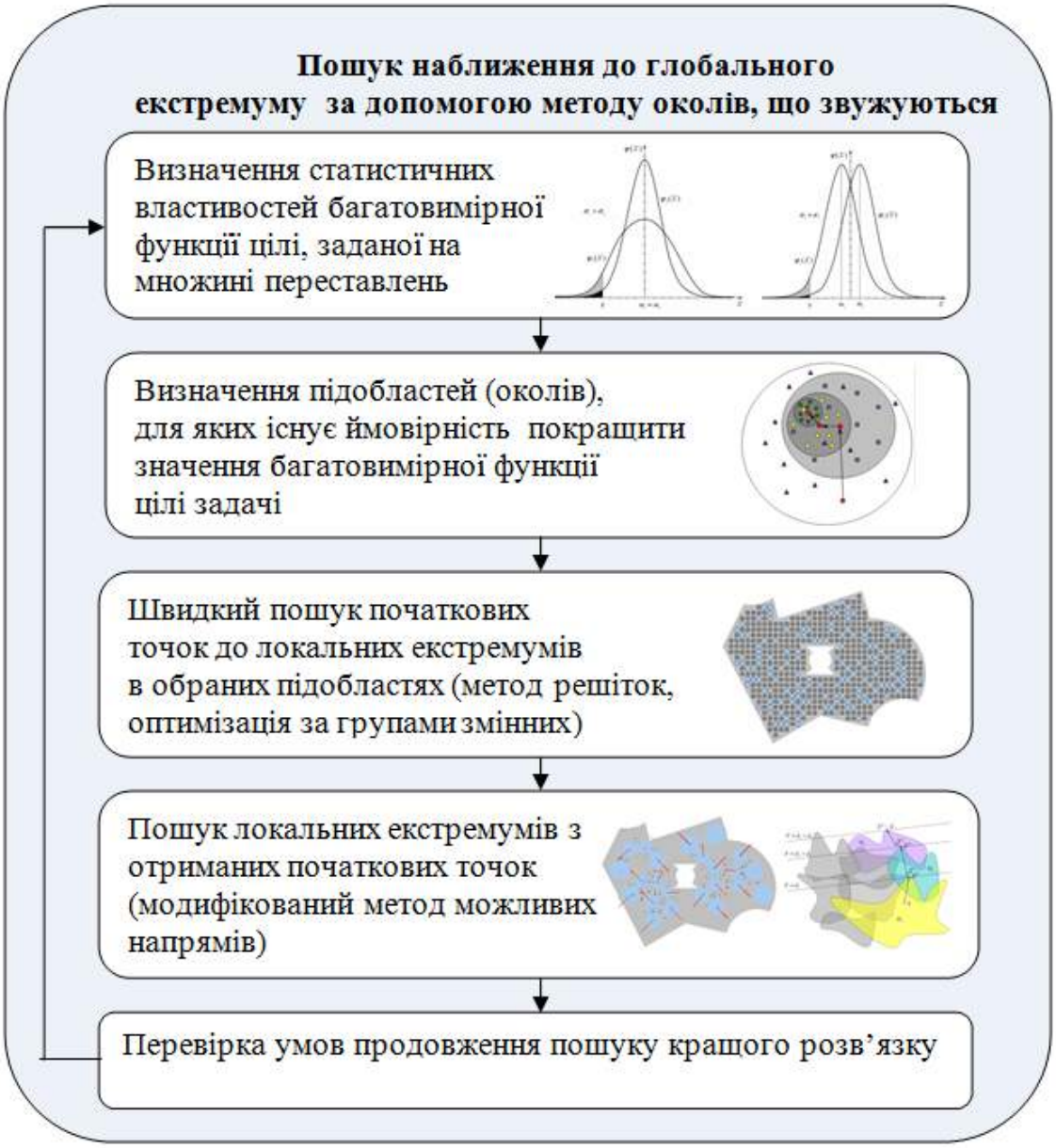


Рис. 5.3. Алгоритм стратегії, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації

Слід відмітити, що використання представленої стратегії не гарантує отримання глобального екстремуму задач упаковки тривимірних тіл, через те, що метод околів, що звужуються, є імовірнісним методом зі всіма властивими таким методам перевагами та недоліками. Але порівняння результатів, отриманих з допомогою цього методу, та звичайного випадкового пошуку дозволили зробити висновки про ефективність застосування описаної стратегії.

5.3 Стратегія, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок

З різними модифікаціями стратегія використовувалась для розв’язання таких задач:

- упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль;
- упаковки тривимірних тіл, поверхня яких формується циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;
- упаковки неорієнтованих опуклих гомотетичних багатогранних тіл.

Стратегія ґрунтується на використанні наступної послідовності методів:

1) для побудови початкових точок – метод гомотетичних перетворень;

2) для пошуку локальних екстремумів – метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції;

3) для пошуку наближення до глобального екстремуму – метод побудови перспективних розміщень.

Оскільки узагальнена математична модель (4.1)-(4.2) задачі пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл побудована у вигляді класичної задачі нелінійного програмування, то для її розв'язання можуть бути застосовані різні модифікації методів нелінійної оптимізації.

Як відомо, для застосування методів нелінійної оптимізації необхідно мати допустиму початкову точку. Серед методів, які застосовуються для побудови початкових точок, у задачах розміщення тривимірних тіл в основному використовуються різні модифікації “жадібних” алгоритмів. Однак, оскільки задачі упаковки тривимірних тіл є *NP*-складними, то застосування “жадібних” алгоритмів суттєво обмежує можливості перебору величезної кількості локальних екстремумів (кількість яких перевищує $n!$). Крім того, обчислювальні витрати для побудови початкових точок значно зростають в разі, якщо тіла допускають довільні повороти.

Використання методу Ф-функцій для побудови математичної моделі (4.1)-(4.2) дозволяє використовувати на всіх етапах розв’язання задачі (побудова початкових точок, пошук локальних екстремумів та перебір

локальних екстремумів) сучасні методи нелінійної оптимізації.

У зв'язку з цим для побудови допустимих початкових точок пропонується спеціальний підхід, основна ідея якого полягає у розширенні розмірності задачі за рахунок введення змінних метричних характеристик тривимірних тіл та їх гомотетичних перетвореннях.

Припустимо, що тривимірні тіла дозволяють гомотетичні перетворення. З цією метою приймемо коефіцієнти гомотетії тривимірних тіл змінними. Тоді для того, щоб визначити допустиму початкову точку виконується випадкова генерація координат розміщуваних тіл у контейнері. Після цього розв’язується задача нелінійного програмування, метою якої є максимізація суми коефіцієнтів гомотетії усіх тіл. Якщо в результаті розв’язання даної задачі буде знайдена точка локального максимуму, в якій усі коефіцієнти гомотетії дорівнюють одиниці, то така точка приймається як початкова для пошуку локального екстремуму основної задачі. Слід відзначити, що на відміну від “жадібних” алгоритмів побудови початкових точок, які можуть давати хоч і хороші, але однотипні точки, розроблений метод побудови початкових точок дозволяє отримувати різноманітні початкові точки за рахунок випадкового способу генерації координат центрів тривимірних тіл.

Оскільки область припустимих розв’язків задається дуже великою кількістю нерівностей, то безпосереднє застосування методів нелінійної оптимізації для пошуку локального екстремуму призведе до значних обчислювальних витрат. Тому для пошуку локальних екстремумів сформульованих оптимізаційних задач розроблено спеціальний метод декомпозиції, який дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати за рахунок значного зменшення кількості нерівностей у процесі пошуку локальних екстремумів. Ґрунтуючись на тому, що область допустимих розв’язків представляється у вигляді об'єднання підобластей, можна істотно зменшити час пошуку локального мінімуму, звівши його до розв’язання послідовності підзадач, в яких область допустимих розв’язків визначається значно меншою кількістю нерівностей.

Ключова ідея методу дозволяє на кожному етапі обрати підобласть області припустимих розв’язків та генерувати підмножини обраної підобласті на кожному кроці в такий спосіб. На основі аналізу початкової точки в систему обмежень задачі додається система додаткових обмежень на параметри розміщення кожного об’єкту, що дозволяють йому переміщуватися в межах індивідуального контейнера. Після цього видаляються нерівності для всіх пар тривимірних тіл, індивідуальні контейнери яких не перетинаються. Таким чином, ми зменшуємо число обмежень і, у випадку квазі-Ф-функцій, кількість додаткових змінних. Далі проводиться пошук точки локального мінімуму для побудованої підзадачі. Отриманий локальний екстремум підзадачи використовується як стартова точка для наступної ітерації. Схема реалізаціє запропонованого підходу надана на рис. 5.4.

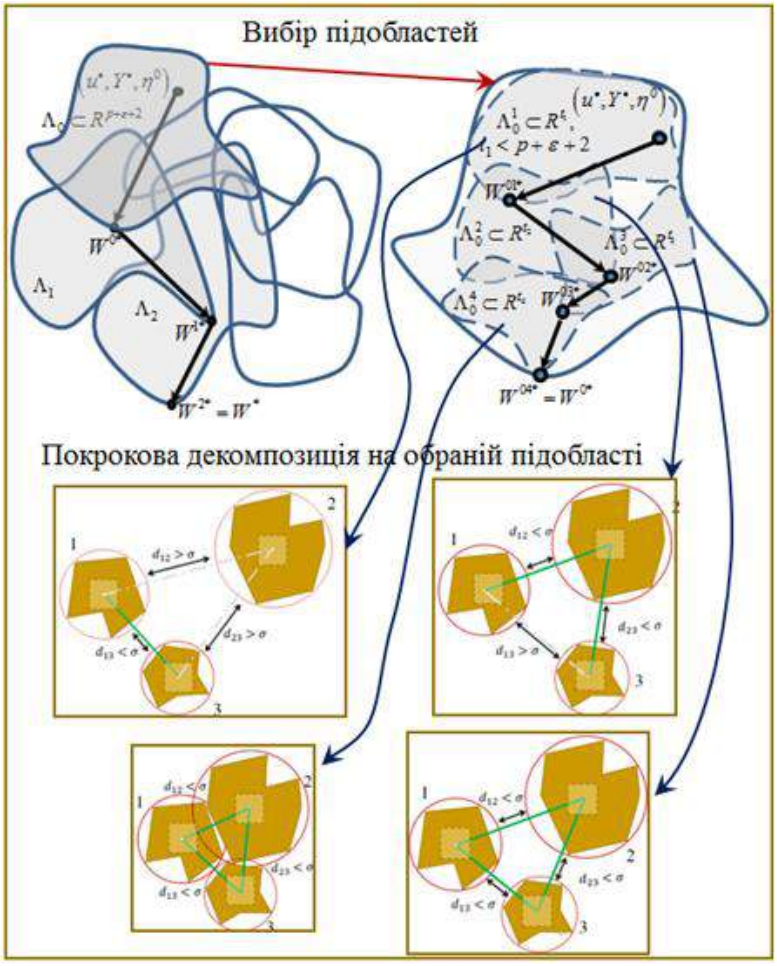


Рис.5.4. Стратегія декомпозиції задачі під час пошуку локального екстремуму

Глобальна оптимізація для даної стратегії ґрунтується на ідеї перебору локальних мінімумів за рахунок побудови нових перспективних початкових точок з використанням гомотетичних перетворень тривимірних тіл у отриманій точці локального мінімуму. Для цього в точці локального мінімуму розв’язується допоміжна задача нелінійного програмування. В результаті розв’язання такої задачі отримуємо точку, в якій можна визначити дві групи тіл:

1) тіла, поблизу яких існує вільний простір, а значить на місце цих тіл можна встановити тіла з більшим об’ємом ;

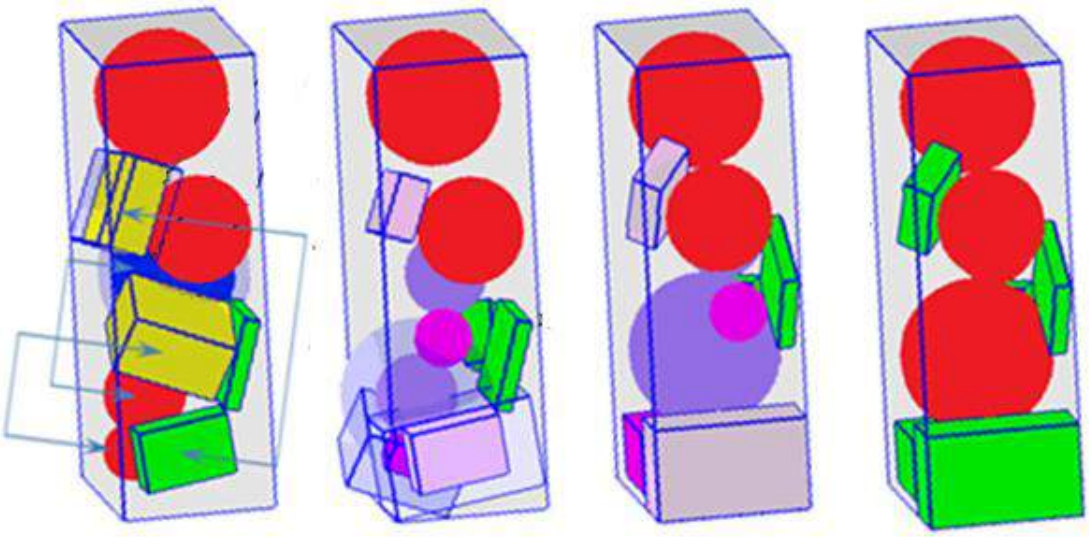
2) тіла, навколо яких утворилось дуже щільне заповнення контейнеру, внаслідок чого стає неможливим змінити їх положення з метою зменшення об’єму контейнера.

Для визначення таких відповідних груп тіл розв’язується спеціальна допоміжна задача нелінійної оптимізації, метою якої є зменшення об’єму контейнеру за умови, що розміщені у контейнері тіла припускають гомотетичні перетворення. Особливістю допоміжної задачі є відсутність обмежень на максимальне значення коефіцієнтів гомотетії тривимірних тіл. Через це відбувається зменшення об’єму контейнеру за рахунок того, що деякі тіла будуть зменшені, а деякі збільшені. Зміна розмірів тривимірних тіл дозволяє визначити описані дві групи тривимірних тіл. Оскільки при зменшенні об’єму контейнеру деякі тіла отримали розміри менші, ніж задані, то на наступному етапі необхідно розв’язати допоміжну задачу, яка дозволить збільшити розміри тривимірних тіл до їх заданих значень.

Для розв’язання цієї допоміжної задачі ітераційно виконуються спроби побудувати серію початкових точок, які назвемо "перспективним". Для побудови таких точок ми пробуємо в заданій послідовності виконати перестановку тривимірних тіл з першої групи з об'єктами з другої групи. Така перестановка тривимірних тіл дозволяє потрапити в підобласть, яка знаходиться в зоні тяжіння іншого локального мінімуму. Переставляючи тіла, ми зменшуємо їх розміри для того, щоб вони не перетиналися з сусідніми

об'єктами. Якщо вдається збільшити тіла до їх початкових розмірів, то точка, яка відповідає такому розміщенню тривимірних тіл приймається як початкова точка для пошуку нового локального мінімуму основної задачі.

Основні етапи побудови перспективної точки на прикладі задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль подано на рис.5.5.



а) б) в) г)

Рис.5.5. Схема процесу декомпозиції задачі локальної оптимізації:

а) результат розв’язання допоміжної задачі гомотетичних перетворень упакованих тіл з метою зменшення об’єму контейнеру та визначення двох груп тіл, які можуть бути переставлені;

б) побудована перспективна початкова точка для пошуку екстремуму наступної допоміжної задачі;

в) результат розв’язання допоміжної задачі максимізації суми коефіцієнтів гомотетії упакованих тіл;

д) отримана точка може бути прийнята як початкова точка для пошуку нового локального мінімуму основної задачі.

Якщо ж із серії побудованих перспективних точок не вдається знайти глобальний екстремум допоміжної задачі максимізації суми коефіцієнтів гомотетії упакованих тіл, то останній знайдений локальний мінімум приймається як наближення до розв’язку задачі.

Ефективність запропонованої стратегії досягається за рахунок реалізації послідовних змін розмірності простору розв'язків при здійсненні переходів між допоміжними задачами. Поступове покращення функції цілі відбувається за рахунок того, що точка локального екстремум однієї допоміжної задачі не є точкою локального екстремум для іншої допоміжної задачі. На рис.5.6 подано схему алгоритму описаної стратегії.

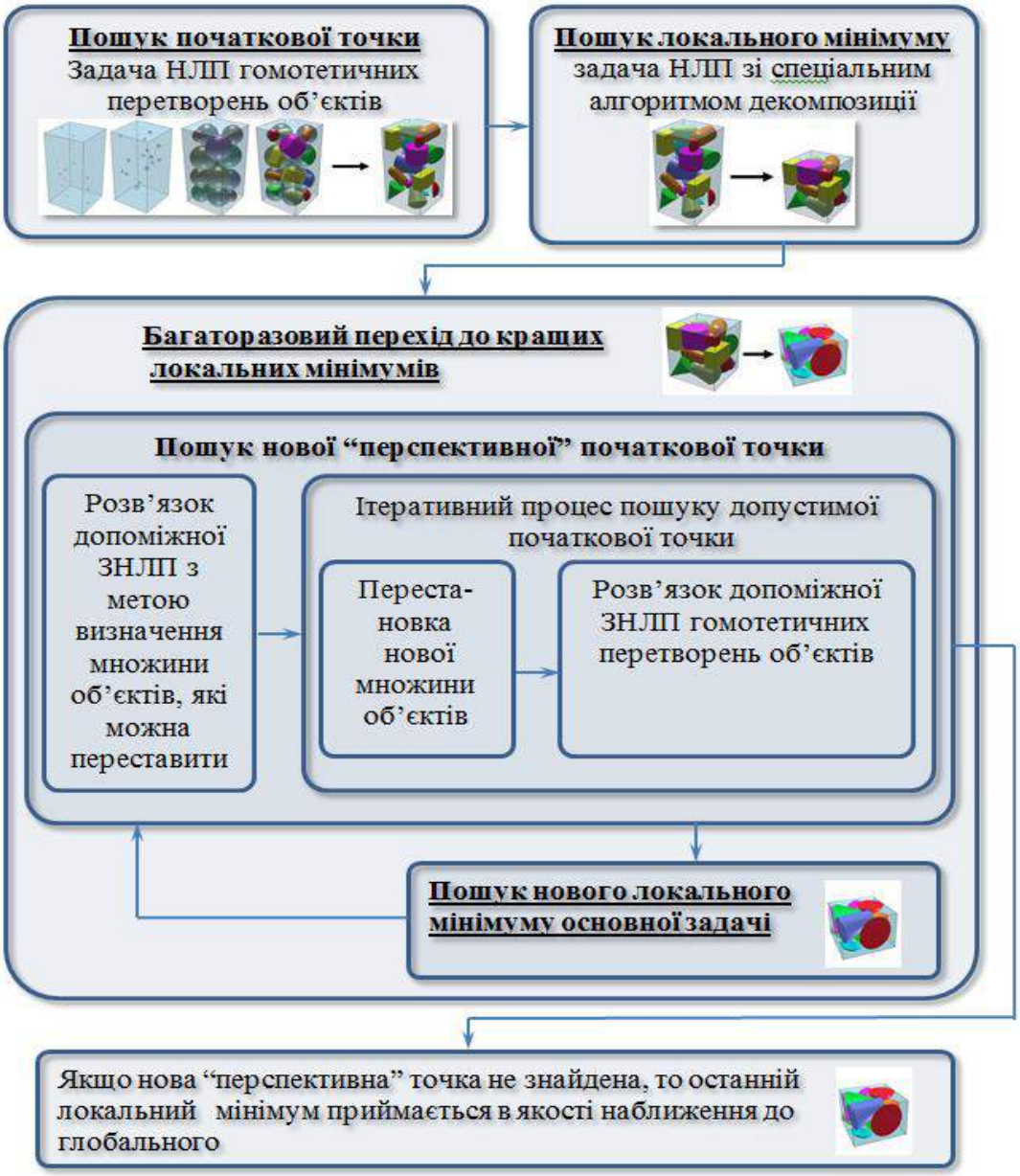


Рис.5.6. Схема алгоритму стратегії, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок

5.4 Багатоетапна стратегія мультістарту

Стратегія використовувалась для розв'язання задачі упаковки

неорієнтованих неопуклих тривимірних тіл. Вона ґрунтується на використанні наступної послідовності методів:

1) для побудови початкових точок – метод гомотетичних перетворень;

2) для пошуку локальних екстремумів – метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції;

3) для пошуку наближення до глобального екстремуму – метод мультістарту.

Стратегія орієнтована на пошук оптимальних розміщень неорієнтованих неопуклих тіл, що значно ускладнює процес розв'язання. Тому для скорочення великих обчислювальних та часових витрат виконується декомпозиція розв'язання задачі на декілька крупних етапів (підготовчий та багаторазового запуску) та їх під етапів (рис.5.7).

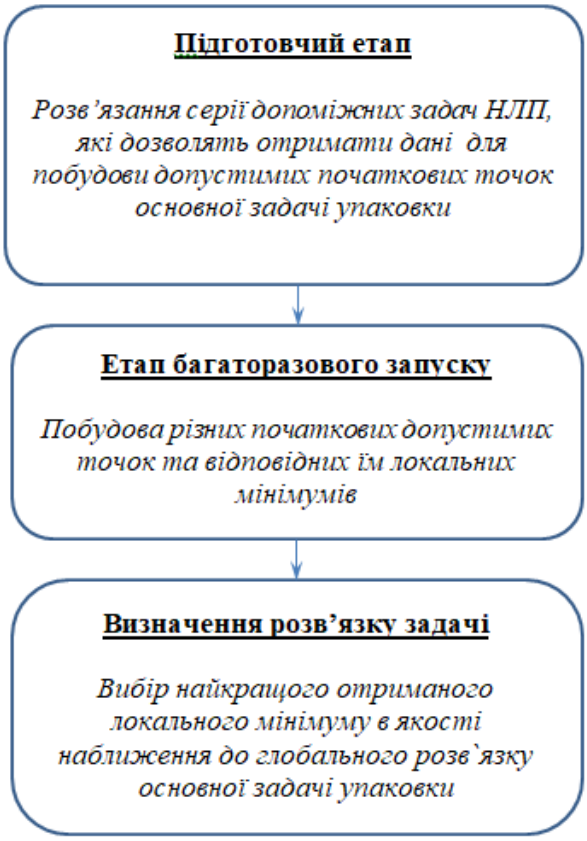


Рис.5.7 Основні етапи стратегії

Оскільки стратегія орієнтована на розміщення неорієнтованих неопуклих тіл, то для побудови допустимих початкових точок запропоновано метод

кластерізації. Локальна оптимізація виконувалась за допомогою методу внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції. Для перебору локальних екстремумів використовувалась стратегія мультістарту.

На підготовчому етапі виконується розв'язання серії допоміжних задач нелінійного програмування, які дозволяють отримати дані для побудови початкових точок основної задачі упаковки. Кроки підготовчого етапу подано на рис.5.8.

Рис.5.8. Підготовчий етап багатоетапної стратегії

На етапі багаторазового запуску відбувається побудова різних початкових допустимих точок та відповідних їм локальних мінімумів. Слід відзначити, що в залежності від форми кластерів використовується стратегія пошуку оптимальної упаковки або паралелепіпедів, які допускають ортогональні повороти, або куль, або неорієнтованих паралелепіпедів та куль. Для розв'язання цих задач використовується стратегія, що ґрунтується на

гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок. Детальний опис алгоритму етапу багаторазового запуску подано на рис. 5.9.

Рис.5.9. Алгоритм етапу багаторазового запуску

Завдяки методу кластерізації неопуклих неорієнтованих тривимірних тіл побудова початкових точок зводиться до розв'язання задачі упаковки вдвічі меншої кількості опуклих тіл значно простішої просторової форми

(паралелепіпедів та куль). Завдяки цьому значно скорочується час побудови початкових точок.

Слід зазначити, що зменшенню обчислювальних витрат також сприяє те, що пошук локального екстремуму задачі розбивається на два підетапи: етап розв'язання лінійної задачі за рахунок фіксацій кутів обертання та етап розв'язання нелінійної задачі. Крім того, оскільки для розміщення сформованої множини кластерів, застосовується стратегія пошуку наближення до глобального екстремуму, то побудована початкова точка є деяким наближенням до локального екстремуму основної задачі.

Як наближення до глобального мінімуму задачі обирається найкращий локальний мінімум отриманий в результаті виконання етапу багаторазового запуску.

5.5 Висновки за розділом 5

В розділі 5 представлено єдину методологію розв'язання задач упаковки тривимірних тіл, що допускають одночасно неперервні повороти та трансляції.

Розроблена методологія використовує два основних підходи до розв'язання задач:

- упаковки опуклих орієнтованих тривимірних тіл;
- упаковки неорієнтованих тривимірних тіл.

У випадку неорієнтованих тіл підхід до розв'язання задачі використовує дві різні стратегії пошуку наближення до глобального розв'язку, які обираються в залежності від форми тіл. У випадку, якщо тіла мають опуклу форму, використовується стратегія, яка ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та пошуку перспективних точок. Оскільки при упаковці тривимірних тіл неопуклої форми складність задачі значно підвищується, то для її розв'язання використовується багатоетапна стратегія мультістарту, яка на початковому етапі використовує стратегію упаковки неорієнтованих опуклих тіл.

Кожна із запропонованих стратегій грунтується на використанні послідовності таких методів:

1) методу побудови допустимих точок з області припустимих розв’язків;

2) методу локальної оптимізації;

3) методу глобальної оптимізації.

Враховуючи особливості різних задач упаковки тривимірних тіл, для кожної з запропонованих стратегій розроблено свій набір методів, які розглядаються в розділі 6.

Результати цього розділу представлено в роботах [1, 19, 22, 27-31,57-64].

РОЗДІЛ 6
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

Теоретично глобальний екстремум розглянутих у четвертому розділі задач упаковки тривимірних тіл може бути отриманий за допомогою розв'язання послідовності нелінійних багатоекстремальних задач на множині підобластей, об'єднання яких формує область припустимих розв'язків задачі. Однак, враховуючи той факт, що кількість таких підобластей більше ніж n! (задача є *NP*-складною), можна стверджувати, що відомі методи дослідження операцій поки не дозволяють одержати глобальний екстремум для практичних задач розміщення.

Через те, що задачі розміщення є задачами високої обчислювальної складності, для їх розв'язання в більшості випадків використовуються евристичні підходи, тобто замість повного перебору варіантів, що займає істотний час (або технічно неможливий), застосовується значно більш швидкий, але недостатньо обґрунтований теоретично, алгоритм. Враховуючи те, що евристичні методи не є повністю математично обґрунтованими, вони не гарантують знаходження кращого розв'язку. Тому важливою проблемою є розробка ефективних методів, заснованих на застосуванні сучасних методів локальної та глобальної оптимізації.

Основною перевагою побудованих у четвертому розділі математичних моделей є те, що вони представлені у вигляді задач нелінійного програмування. Цей факт дозволяє розробити підходи до розв'язання поставлених задач упаковки з використанням сучасних локальних і глобальних NLP солверів.

6.1 Методи побудови допустимих початкових точок

Для застосування методів локальної оптимізації необхідно побудувати початкові точки, які належать області припустимих розв'язків. Однією з вимог

до методів побудови початкових точок для задач упаковки тривимірних тіл є забезпечення генерації різноманіття точок (це забезпечить знаходження різних локальних екстремумів) та зменшення обчислювальних витрат з метою їх швидкої побудови.

В роботі були розроблені такі методи:

1) для упаковки конгруентних тривимірних тіл - метод регулярних розміщень;
2) для опуклих тіл, поверхня яких утворена конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами – метод гомотетичних перетворень;
3) для неопуклих багатогранних тіл – метод кластеризації;
4) для паралелепіпедів, які допускають ортогональні повороти, – модифікація методу оптимізації за групами змінних.

Розглянемо більш детально реалізацію цих методів.

6.1.1 Метод регулярних розміщень

Розглянемо реалізацію цього методу на прикладі задачі упаковки максимальної кількості конгруентних циліндрів C_j, $j \in I_n$, у пряму призму, границя основи P якої утворена дугами кіл та відрізками прямих. Для отримання початкових точок створюється прямокутна решітка. Довжина сторін комірок решітки встановлюється рівною $0.5r$, де r - радіус циліндру або кулі. Основа P області розміщення (контейнеру) покривається обраною решіткою. Після цього обираються комірки, які повністю належать області P. Кількість k комірок набагато більше кількості n тривимірних тіл, які необхідно розмістити. Координати центрів комірок формують вектор p довжини $2k$. Перші $2n$ координати векторів виду p визначають центри кіл і формують вектор u^n. Тоді вектори v^n і u^n визначають початкові точки $X^n = (u^n, v^n)$.

Початкова точка будується відповідно до наступного алгоритму.

1. Область P покривається решіткою, основний паралелограм (комірка) якої є квадратом $S=\left\{(x,y)\in R^2 : -0.5r \le x \le 0.5r, -0.5r \le y \le 0.5r\right\}$.

2. Визначається кількість $k>n$ квадратів, таким чином, що $S_i=\left\{(x,y)\in R^2 : a_i-0.5r \le x \le a_i+0.5r, b_i-0.5r \le y \le b_i+0.5r\right\} \subset P$, де (a_i,b_i) координати центру S_i, $i\in I_k=\{1,2,...,k\}$ (рис. 6.1).

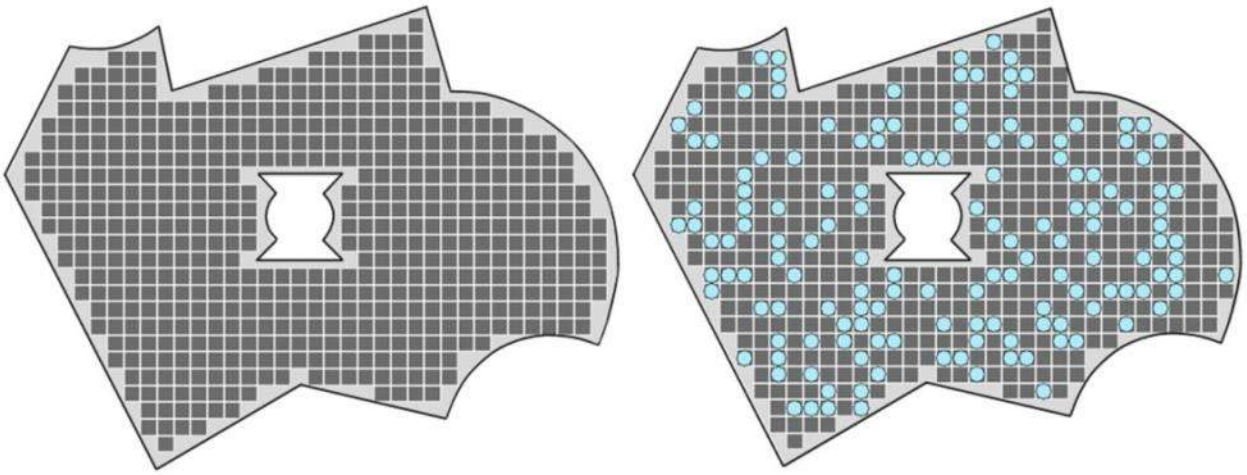


Рис.6.1. Побудова початкової точки за допомогою методу регулярних розміщень

3. Генерується випадковий вектор $p^i=(p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_n},...,p_{i_k})\in R^{2k}$, де $p_{i_j}=(a_{i_j},b_{i_j})$. При цьому очевидно, що число векторів p^i дорівнює $k!$, тобто вектори формують набір перестановок $\Pi \subset R^{2k}$ без повторень.

4. Беремо $v^{ni}=(\underbrace{r/2, r/2,...,r/2}_{n})$ і формуємо вектор $u^{ni}=(u_1^{ni},u_2^{ni},...,u_n^{ni})\in R^{2n}$ так, що $u_j^{ni}=p_{i_j}=(a_{i_j},b_{i_j})$, $j\in I_n$, тобто u^{ni} отриманий в результаті прирівнювання компонентів u^{ni} першим n компонентам вектора $p^i=(\underbrace{p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_n}}_{n},...,p_{i_k})$.

Таким чином, взявши (a_{i_j},b_{i_j}) як координати центру C_j, отримуємо

розміщення C_j радіусу $r/2$, $j \in I_n$, в P без взаємних перетинів.

Точки виду $X^{ni} = (u^{ni}, v^{ni}) \in R^{3n}$ приймаються як початкові точки, для обчислення локальних екстремумів задачі

$$F(X^*) = \max_{X \in W \subset R^{3n}} \sum_{i=1}^{n} r_i,$$

де

$$W = \left\{ X \in R^{3n}:\ \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0,\ i < j \in I, \Phi_i(u_i, u_\Omega^0) \geq 0,\ r_i^0 - r_i \geq 0,\ r_i \geq 0,\ i \in I_n \right\}.$$

6.1.2 Метод гомотетичних перетворень

Метод можна розбити на чотири основних етапи.

1. Визначення опуклих оболонок тривимірних тіл.

Кожне тривимірне тіло O_i покривається кулею S_i мінімального радіуса r_i^0, $i \in I$. Для цього розв'язується така допоміжна задача нелінійного програмування:

$$r_i^* = \min_{(v_i, R_i) \in D_i \subset R^4} r_i\ ,$$

де

$$D_i = \left\{ (v_i, r_i) \in R^4 : \Psi_{ij} = r_i^2 - (x_{ij}^{'} - x_i)^2 - (y_{ij}^{'} - y_i)^2 - (z_{ij}^{'} - z_i)^2 \geq 0, j \in T_i \right\}.$$

2. Упаковка куль за допомогою гомотетичних перетворень.

Вважаємо, що радіуси r_i, $i \in I$, побудованих на першому етапі куль є змінними та формують вектор $R = (r_1, r_2, ..., r_n)$. Крім того, перенесемо власну систему координат O_i у центр кулі S_i, $i \in I$.

Встановимо вектор параметрів u_Ω^0 області розміщення $\Omega(u_\Omega^0)$ таким чином, що буде гарантоване розміщення всіх куль $S_i, i \in I,$ в середині $\Omega(u_\Omega^0)$ без перетинань. Припустивши $r_i^\bullet = 0, i \in I,$ випадковим чином згенеруємо

вектор $v^{\bullet}$ таким чином, що $v_i^{\bullet} \in \Omega(u_{\Omega}^0)$, $i \in I$. У результаті ми отримаємо вектор $(v^{\bullet}, 0)$. Взявши точку $(v^{\bullet}, 0)$, розв'яжемо таку допоміжну задачу

$$\Upsilon(\mathrm{r}^*) = \max_{X \in G \subset R^{4n}} \sum_{i=1}^{n} r_i, \tag{6.1}$$

де

$$\begin{aligned} G = \{X \in R^{4n}:\ & \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0,\ i < j \in I, \Phi_i(u_i, u_{\Omega}^0) \geq 0, \\ & r_i^0 - r_i \geq 0,\ r_i \geq 0,\ i \in I\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Очевидно, що $X^{\bullet} \in G$. Задача (6.1)-(6.2) має таку властивість. Якщо в точці $X^* = (u^*, r^*)$ локального максимуму $\Upsilon(\mathrm{r}^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i^0$, то $(u^*, u_{\Omega}^0) \in W$, тобто кулі $S_i, i \in I,$ розміщені в $\Omega(u_{\Omega}^0)$. У такому випадку точка X^* є точкою глобального максимуму задачі (6.1)-(6.2) (рис.6.2).

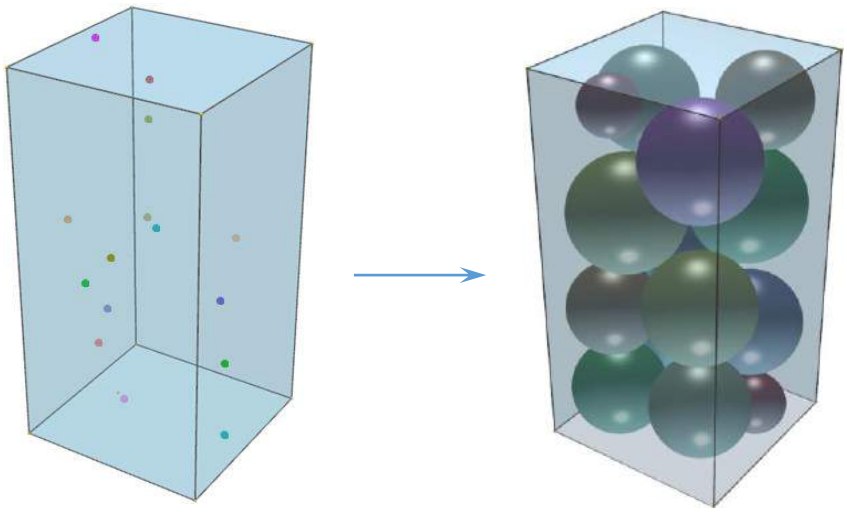


Рис. 6.2. У точці глобального екстремуму усі кулі розміщено у контейнері

Якщо ж глобальний максимум $X^* = (u^*, R^*)$ такий, що $\Upsilon(\mathrm{r}^*) < \sum_{i=1}^{n} r_i^0$, то тіла $O_i(u_i^*)$, $i \in I$, не розміщені в $\Omega(u_{\Omega}^0)$.

3. Визначення параметрів упаковки заданих тривимірних тіл.

На третьому етапі для побудови початкової точки $(u_\Omega, u^*, u_p) \in W$ основної задачі, випадково генеруються значення векторів кутів обертання $\theta_i \in [0, 2\pi], i \in I$ (рис.6.3).

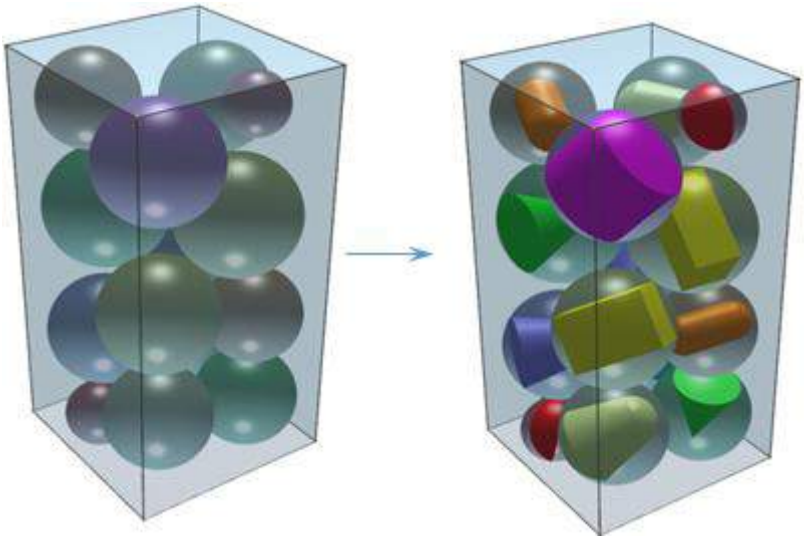


Рис. 6.3. Перехід до початкової точки основної задачі

Крім того, у разі використання квазі-Ф-функцій необхідно застосувати алгоритм побудови поділяючих площин для кожної пари тривимірних тіл та визначити вектор u_p.

Для того, щоб визначити компоненти $u_{p_{ij}}$ вектора u_p будуються поділяючі площини для кожної пари куль $S_i(v_i^*)$ і $S_j(v_j^*)$, $i < j \in I$. З цією метою спочатку будуємо рівняння прямих L_{ij}, що проходять через точки v_i^* і v_j^* у вигляді

$$\frac{x - x_i^*}{x_j^* - x_i^*} = \frac{y - y_i^*}{y_j^* - y_i^*} = \frac{z - z_i^*}{z_j - z_i^*}.$$

Після цього формуємо точки $(N_{ij}^{11}, N_{ij}^{12}, N_{ij}^{13}), (N_{ij}^{21}, N_{ij}^{22}, N_{ij}^{23})$, $0 < i < j \in I$, де

$$N_{ij}^{11} = x_i + r_i^0 (x_j^* - x_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$N_{ij}^{12} = y_i + r_i^0 (y_j^* - y_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$N_{ij}^{13} = z_i + r_i^0 (z_j^* - z_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$N_{ij}^{21} = x_j - r_j^0 (x_j^* - x_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$N_{ij}^{22} = y_j - r_j^0 (y_j^* - y_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$N_{ij}^{23} = z_j - r_j^0 (z_j^* - z_i^*) / \varsigma_{ij},$$

$$\varsigma_{ij} = \sqrt{\left(x_j^* - x_i^*\right)^2 + \left(y_j^* - y_i^*\right)^2 + \left(z_j^* - z_i^*\right)^2}.$$

Після цього будуємо рівняння площин N_{ij}, що проходять через точки $\left((N_{\text{ij}}^{11}+N_{\text{ij}}^{21})/2,(N_{\text{ij}}^{12}+N_{\text{ij}}^{22})/2,(N_{\text{ij}}^{13}+N_{\text{ij}}^{23})/2\right)$ перпендикулярно прямим L_{ij} в наступному вигляді:

$$\left(x - (N_{ij}^{11} + N_{ij}^{21})/2\right)\left(x_j^* - x_i^*\right) + \left(y - (N_{ij}^{12} + N_{ij}^{22})/2\right)\left(y_j^* - y_i^*\right) +$$

$$+\left(z - (N_{ij}^{13} + N_{ij}^{23})/2\right)\left(z_j^* - z_i^*\right) = 0,\ 0 < i < j \in I.$$

Очевидно, що N_{ij} є поділяючою площиною для куль $S_i(v_i^*)$ і $S_j(v_j^*)$. Тоді, взявши $a_{ij}^* = (x_j^* - x_i^*)/\varsigma_{ij}, b_{ij}^* = (y_j^* - y_i^*)/\varsigma_{ij}, c_{ij}^* = (z_j^* - z_i^*)/\varsigma_{ij}$,

$$d_{ij}^* = -\left((N_{ij}^{11} + N_{ij}^{21})(x_j^* - x_i^*) + (N_{ij}^{12} + N_{ij}^{22})(y_j^* - y_i^*) + (N_{ij}^{13} + N_{ij}^{23})(z_j^* - z_i^*)\right)/2\varsigma_{ij},$$

будемо мати нормальну рівняння

$$\left(x - (N_{ij}^{11} + N_{ij}^{21})/2\right)a_{ij}^* + \left(y - (N_{ij}^{12} + N_{ij}^{22})/2\right)b_{ij}^* + \left(z - (N_{ij}^{13} + N_{ij}^{23})/2\right)c_{ij}^* + d_{ij}^* = 0$$

площині N_{ij}. оскільки кулі $S_i(v_i^*)$ і $S_j(v_j^*)$ покривають тіла $O_i(v_i^*)$ і $O_j(v_j^*)$ відповідно, то площину N_{ij} є для них розділяє. Це дає можливість сформувати вектор $u_p^* = (u_{p_{11}}^*, u_{p_{12}}^*, ..., u_{p_{(n-1)n}}^*)$, де $u_{p_{ij}}^* = (\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*, d_{ij}^*)$, $\alpha_{ij}^{*/} = \arcsin a_{ij}^*$, $\beta_{ij}^* = \arcsin\left(b_{ij}^* / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{ij}^*}\right)$.

4. Забезпечення умов на мінімально допустимі відстані між тілами.

У випадку, коли між тривимірними тілами задано мінімально припустимі відстані (див. задачу (4.7)-(4.8)), для знаходження допустимої

точки, в якій будуть виконані обмеження на мінімально припустимі відстані, сформулюємо допоміжну задачу в такому вигляді

$$\bar{\chi} = \max_{L=(\nu,\lambda,\chi)\in D_\chi \subset \mathbf{R}^{4n+1}} \chi, \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered} D_\chi = \{L \in \mathrm{R}^{4n+1}: \Psi_{ij}\left(\nu_i, \nu_j, g_i, g_j\right) - d_{ij} - \chi \geq 0,\ i < j \in I, \\ \Psi_i\ \ (\nu_i, g_i) - \chi \geq 0, 1 - g_i \geq 0, g_i \geq 0, i \in I, -\chi \geq 0\}, \end{gathered} \tag{6.4}$$

де

$\Psi_{ij}\left(\nu_i, \nu_j, g_i, g_j\right)$ - нормалізована Ф-функція для куль $B_i(\nu_i, \lambda_i)$ і $B_j\left(\nu_j, \lambda_j\right)$, умова $\Psi_i\left(\nu_i, \lambda_i\right) = \min\left\{\Phi_i^k\left(\nu_i^\Diamond, \lambda_i^\Diamond\right) - d_i^k, k \in \{1,\ldots,6\}\right\} \geq 0$ забезпечує знаходження куль в області розміщення з урахуванням мінімально допустимих відстаней до граней паралелепіпеда $P(\eta)$.

В задачі (6.3)-(6.4) значення величини χ є мінімальним негативним значенням серед значень функцій $\Psi_{ij}\left(\nu_i, \nu_j, \lambda_i, \lambda_j\right) - d_{ij}, i < j \in I$, $\Phi_i^k(\nu_i, \lambda_i) - d_i^k$, $i \in I, k \in \{1,\ldots,6\}$.

На рис.6.4 наведено приклад побудови допустимої початкової точки, у випадку коли між об’єктами задано мінімально припустимі відстані.

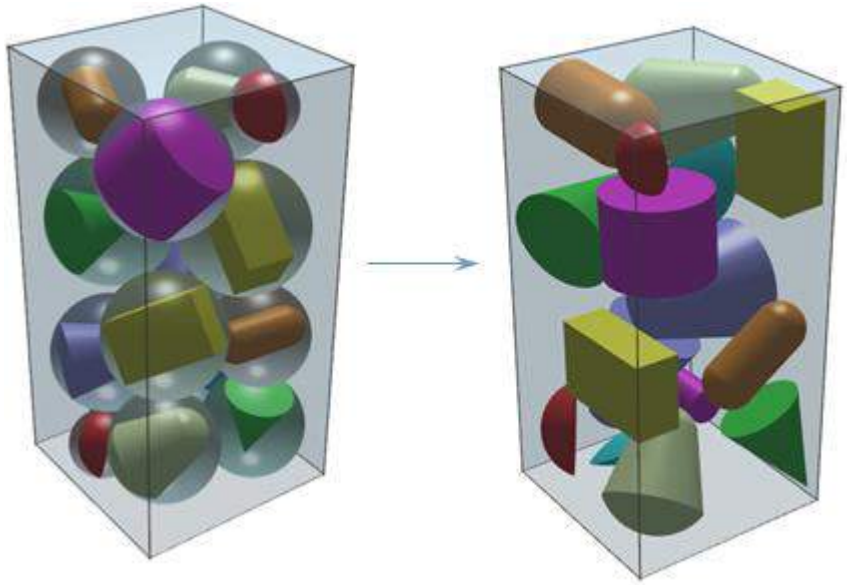


Рис.6.4. Приклад побудови припустимої початкової точки у випадку обмежень на мінімально припустимі відстані

6.1.3 Метод кластеризації

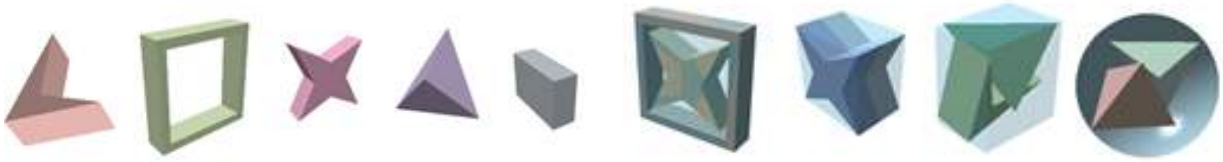
Для того, щоб побудувати допустиму початкову точку для задачі (4.1)-(4.2) у випадку, коли тривимірні тіла є неопуклими неорієнтованими багатогранного тілами, пропонується метод кластеризації, алгоритм якого полягає в наступному.

По-перше, задані багатогранні тіла (рис.6.5 а) попарно упаковуються в контейнери (кластери), що мають форму паралелепіпеда та кулі, мінімального об’єму. Після цього зі сформованої множини кластерів, яка складається з паралелепіпедів та куль, формується підмножина кластерів, що покриває множину заданих багатогранних тіл. Формування такої підмножини відбувається за критерієм максимального коефіцієнту заповнення кластерів багатогранного тілами (рис.6.5 б).

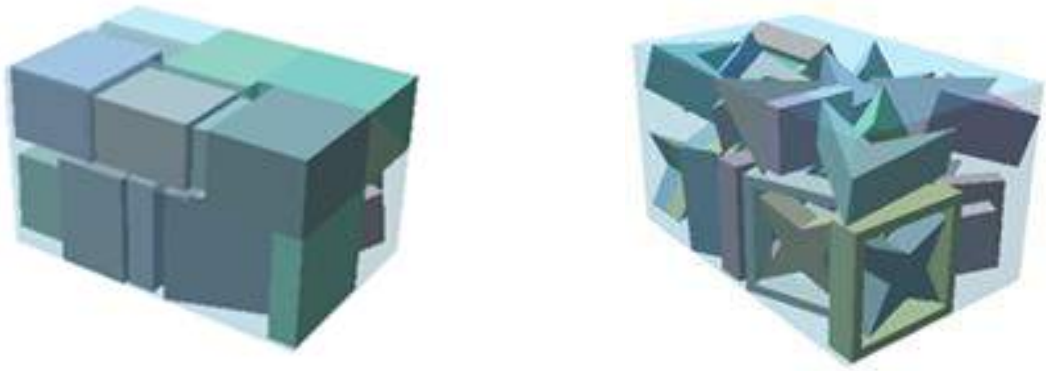
Надалі розв’язується задача упаковки сформованої підмножини кластерів у кубоїд мінімального об’єму. Для розв’язання цієї задачі в залежності від сформованої підмножини кластерів, застосовуються три різні стратегії:

- упаковки куль;
- упаковки паралелепіпедів, які допускають ортогональні повороти;
- упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль.

Після отримання результату упаковки кластерів для кожного багатогранного тіла згідно з отриманим розміщенням кластерів визначаються параметри розміщення багатогранних тіл. Для обчислення кутів обертання кожного з багатогранних тіл розв’язується задача нелінійного програмування (рис.6.5 в).



а) б)



в) г)

Рис.6.5. Побудова початкової точки за методом кластеризації

а) задані форми багатогранних тіл;

б) обрані форми кластерів за критерієм максимального коефіцієнту заповнення;

в) результат упаковки сформованої підмножини кластерів;

г) допустима початкова точка, яка відповідає розміщенню кластерів.

Розглянемо більш детально описаний алгоритм.

Нехай множина багатогранних тіл P_i, $i \in I_n$, складається з k груп, кожна з яких містить l_k ідентичних багатогранних тіл.

На першому етапі кожен неопуклий багатогранник P_i та кожна його опукла компонента покриваються кулею S_i мінімального радіусу r_i^*, $i \in I_n$. Для цього розв'язується задача нелінійного програмування:

$$r_i^* = \min_{(v_i, R_i) \in D_i \subset R^4} r_i \ ,$$

$$D_i = \left\{ (v_i, r_i) \in R^4 : \Psi_{ij} = r_i^2 - (x_{ij}^{'} - x_i)^2 - (y_{ij}^{'} - y_i)^2 - (z_{ij}^{'} - z_i)^2 \geq 0, j \in T_i \right\}$$

Полюс кожного багатогранного тіла P_i зміщується у точку v_i^*

На другому етапі розв’язується $C_n^2 + n$ задач попарної упаковки P_i, $i \in I_n$, у кубоїди C_{ij} мінімального об'єму D_{ij}^C

$$D_{ij}^c(u_{Q_{ij}}^*) = \min_{(u_i, u_j, u_{C_{ij}}) \in W_{ij} \subset R^{18}} D_{ij}^c(u_{C_{ij}}), \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} W_{ij} = \{(u_i, u_j, u_{C_{ij}}) \in R^{18} : & \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, \\ & \Phi_i(u_i, u_{C_{ij}}) \geq 0, \\ & \Phi_j(u_j, u_{C_{ij}}) \geq 0, \\ & F(u_{C_{ij}}) \geq 0\} \end{aligned} \tag{6.6}$$

де $i, j \in I_n$, $u_{C_{ij}} = (\mathrm{l}_2, \mathrm{l}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_1)$, $D_{ij}^c(u_{C_{ij}}) = (\mathrm{l}_2 - \mathrm{l}_1)(\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1)(\mathrm{h}_2 - \mathrm{h}_1)$, $F(u_{Q_{ij}}) = \min\{l_2 - l_1, w_2 - w_1, h_2 - h_1\}$, нерівність $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ гарантує, що $intP_i \cap intP_j = \varnothing$, $\Phi_i(u_i, u_{C_{ij}}) \geq 0$ та $\Phi_j(u_j, u_{C_{ij}}) \geq 0$ гарантують розміщення відповідно P_i та P_j у $C_{ij}(u_{C_{ij}})$.

Після цього розв’язується $C_n^2 + n$ задач попарної упаковки P_i, $i \in I_n$, у кулі S_{ij} мінімального об'єму D_{ij}^S

$$D_{ij}^S(r_{ij}^*) = \min_{(u_i, u_j, r_{ij}) \in W_{ij} \subset R^{13}} D_{ij}^c(r_{ij}), \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} W_{ij} = \{(u_i, u_j, r_{ij}) \in R^{13} : & \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, \\ & \Phi_i(u_i, r_{ij}) \geq 0, \\ & \Phi_j(u_j, r_{ij}) \geq 0, \\ & r_{ij} \geq 0\}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

де $i, j \in I_n$ $u_{S_{ij}} = (r_{ij})$, $D_{ij}^S(r_{ij}) = \dfrac{4}{3}\pi r_{ij}^3$.

Таким чином, результатом розв'язання задач (6.5)-(6.6) та (6.7)-(6.8) буде множина K кластерів, яка складається з $C_n^2 + n$ паралелепіпедів та $C_n^2 + n$ куль. Приклад кластерів з такої множини наведено на рис.6.6.

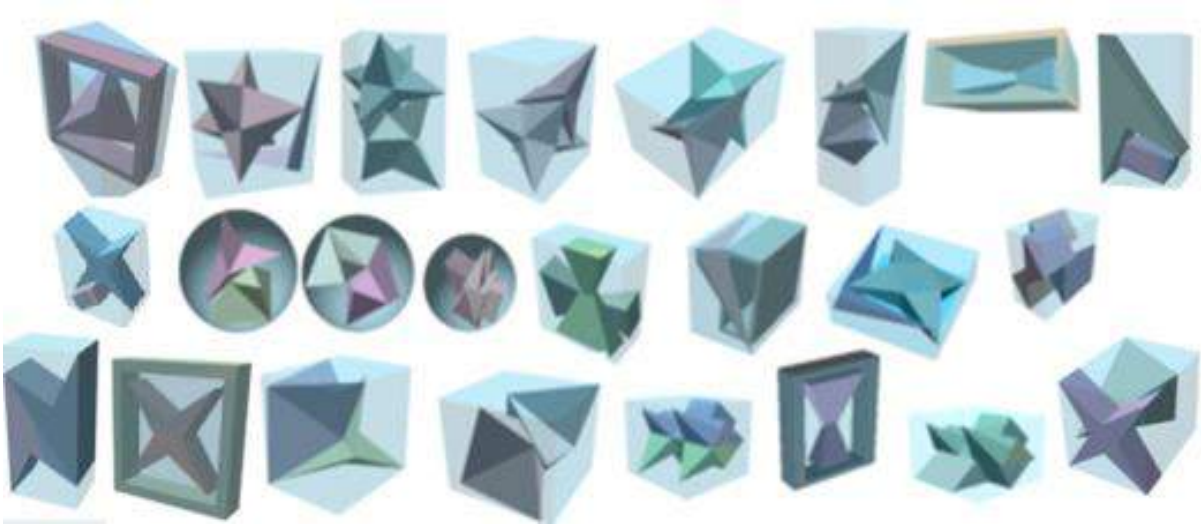


Рис.6.6. Приклад кластерів з множини K

На третьому етапі із отриманої множини K кластерів необхідно виділити за критерієм максимального коефіцієнту заповнення підмножину $\tilde{K}$ кластерів, в якій можна розмістити всі багатогранні тіла $P_i,\ i \in I_n$.

Формування такої підмножини відбувається наступним чином. Спочатку обчислимо коефіцієнти заповнення $\delta_{ij}^C = (D_i + D_j) / D_{ij}^C$ та $\delta_{ij}^S = (D_i + D_j) / D_{ij}^S$, $i < j \in K = \{1, 2, ...k\}$, для кожного кластера і знайдемо $\delta_{ij}^{cs} = \max\{\delta_{ij}^C, \delta_{ij}^S, i < j \in K\}$. Якщо $\delta_{ij}^{cs} = \delta_{ij}^C$, то формуємо кубоїди $Q_i = Q_{sp}$, $i = 1, 2, ..., k_{sp} = \min\{l_s, l_p\}$. Крім того, якщо $k_{sp} = l_s$ $(k_{sp} = l_p)$, то виключаємо $s(p)$ з K. Якщо $k_{sp} = l_s = l_p$, то ми опускаємо s і p з K. Якщо $\delta_{sp} = \delta_{ij}^S$, то ми формуємо однакові кулі $S_j = S_{sp},\ i = 1, 2, ..., k_{sp} = \min\{l_s, l_p\}\}$. Крім того, якщо $k_{sp} = l_s$ $(k_{sp} = l_p)$, то виключаємо $s(p)$ з K. Якщо $k_{sp} = l_s = l_p$, то виключаємо s і p з K. Надалі визначаємо $\delta_{rt} = \max\{\delta_{ij}^C, \delta_{ij}^S, i < j \in K \setminus \{\lambda_{sp}\}\}$, де $\lambda_{sp} = s$, або $\lambda_{sp} = p$, або $\lambda_{sp} = \{s, p\}$, і так далі до тих пір, поки множину K не буде

вичерпано. В результаті формується підмножина $\tilde{K}$ кубоїдів C_i, $i = 1, 2, ..., \mu_1$, та куль S_i, $i = 1 + \mu_1, 2 + \mu_1, ..., \mu = \mu_1 + \mu_2$. Задля зручності перейменуємо C_i, $i = 1, 2, ..., \mu_1$, і кулі S_i, $i = 1 + \mu_1, 2 + \mu_1, ..., \mu = \mu_1 + \mu_2$, як Q_i, $i \in M = \{1, 2, ..., \mu\}$..

Таким чином, кожен кластер Q_i містить пару багатогранних тіл P_{k_i} і P_{t_i} з параметрами розміщення $u_{k_i}^Q$ і $u_{t_i}^Q$ по відношенню до локальної системи координат Q_i.

На наступному кроці розв'язуємо задачу упаковки сформованої підмножини кластерів Q_i, $i \in M$, у кубоїд Ω мінімального об'єму. Тоді, грунтуючись на моделі (4.1)-(4.2), запишемо математичну модель задачі в такому вигляді:

$$H(\tilde{u}_\Omega^*) = \min_{(\tilde{u}, \tilde{u}_\Omega) \in \tilde{W} \subset R^{6\mu+6}} H(\tilde{u}_\Omega), \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} = \{(\tilde{u}, \tilde{u}_\Omega) \in R^{6\mu+6} : & \Phi_{ij}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) \geq 0, i < j \in M, \\ & \Phi_i(\tilde{u}_i, \tilde{u}_\Omega) \geq 0, i \in M, \\ & F(\tilde{u}_\Omega) \geq 0\}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

де

$\tilde{u}_\Omega = (\mathrm{l}_2, \mathrm{l}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_1)$, $H(\tilde{u}_\Omega) = (\mathrm{l}_2 - \mathrm{l}_1)(\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1)(\mathrm{h}_2 - \mathrm{h}_1)$,

$F(\tilde{u}_\Omega) = \min\{l_2 - l_1, w_2 - w_1, h_2 - h_1\}$.

В залежності від геометричної форми кластерів, які сформували підмножину $\tilde{K}$, результатом розв'язання задачі (6.7)-(6.8) буде оптимальна упаковка: або паралелепіпедів, або куль, або паралелепіпедів та куль. На рис.6.7 наведено приклади результатів упаковки різних підмножин $\tilde{K}$ кластерів.

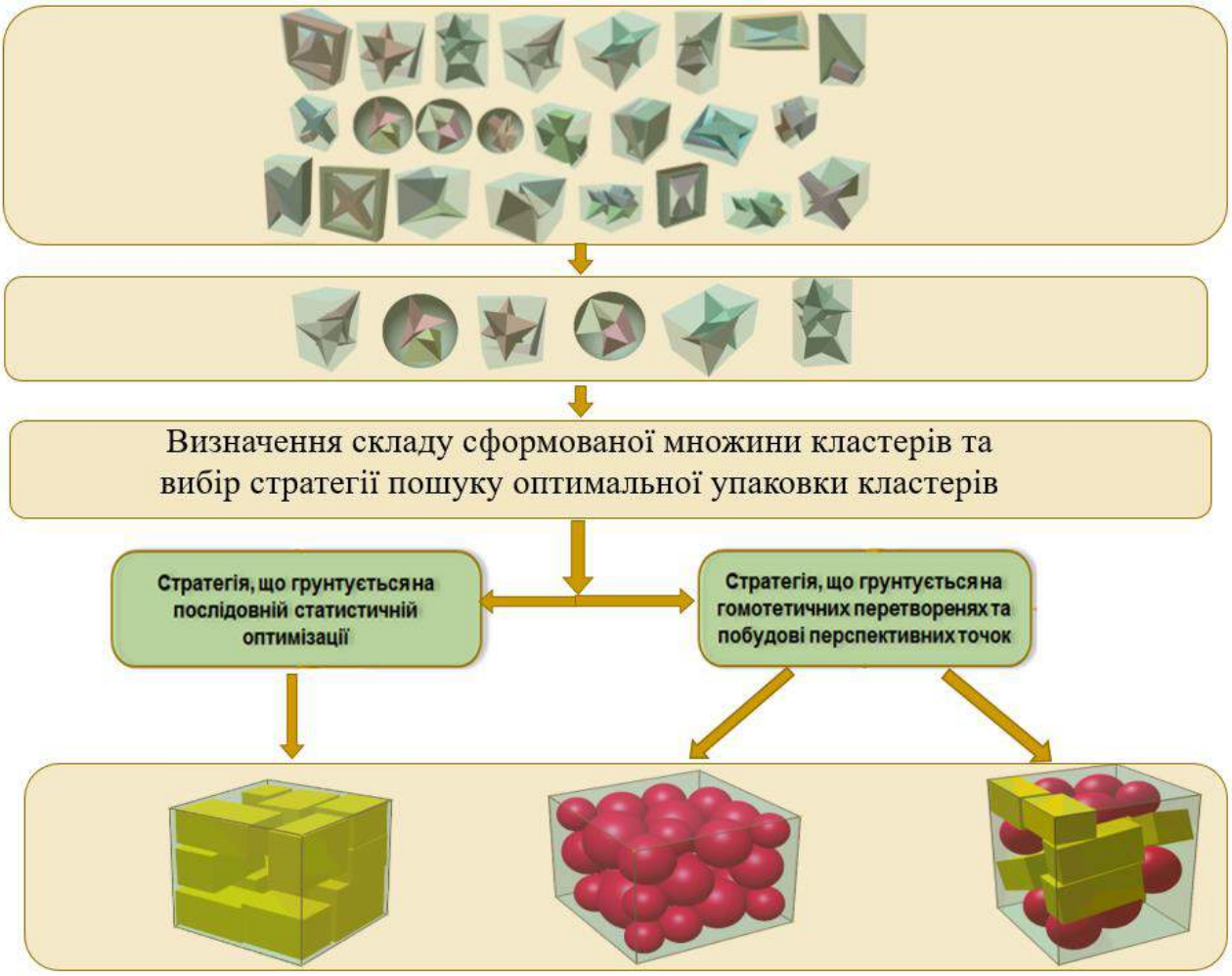


Рис.6.7. Приклади упаковок різних підмножини $\tilde{K}$ кластерів

Для розв'язання задачі (6.9)-(6.10) в залежності від складу підмножини $\tilde{K}$ кластерів використовуються стратегії, що представлені у розділі 5.

Нехай точка $(\tilde{u}^*, \tilde{u}^*_\Omega) \in R^{6\mu+6}$ буде наближенням до точки глобальної мінімуму задачі (6.9)-(6.10). Їй відповідає упаковка кластерів $Q_i(u_i^*)$, $i \in M$, в кубоїд $\Omega(u^*_\Omega)$, і кожен кластер містить пару багатогранних тіл P_{k_i} і P_{t_i} з параметрами розміщення $u^Q_{k_i}$ і $u^Q_{t_i}$ по відношенню до локальної системи координат Q_i.

Для того, щоб перейти до допустимої початкової точки $(u^0, u^0_\Omega) \in W$ задачі (4.21)-(4.22), необхідно відповідно до розміщення кластерів Q_i, $i \in M$, визначити параметри розміщення багатогранних тіл P_i, $i \in I_n$.

Встановимо $u_{\Omega}^{0} = \tilde{u}_{\Omega}^{*}$, координати полюсів багатогранних тіл P_i, $i \in I_n$, визначимо за формулою $v_i^0 = \tilde{v}_i^* + v_i^Q$. Для того, щоб визначити кути обертання θ_i^0 багатогранних тіл P_i, $i \in I_n$, необхідно розв'язати n задач нелінійного програмування виду:

$$r_{13}^{i*} = \min_{R_i \in D_i \subset R^9} r_{13}^i, \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} D_i = \{R_i \in R^9 : V_1^i R^i = \tilde{V}_1^i,\ V_2^i R^i = \tilde{V}_2^i, V_3^i R^i = \tilde{V}_3^i, \\ \sum_i r_{ij} r_{ik} = \delta_{jk}, \sum_i r_{ji} r_{ki} = \delta_{jk}, i = 1,2,3\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

де

$i \in I_n, V_1^i$, V_2^i, V_3^i - вектори вихідних координат перших трьох вершини багатогранного тіла P_i, $\tilde{V}_j^i = \tilde{R}_i^*(R_i^Q V_j^i + v_i^Q)$, $j = 1,2,3$, R_i-шукана матриця обертань

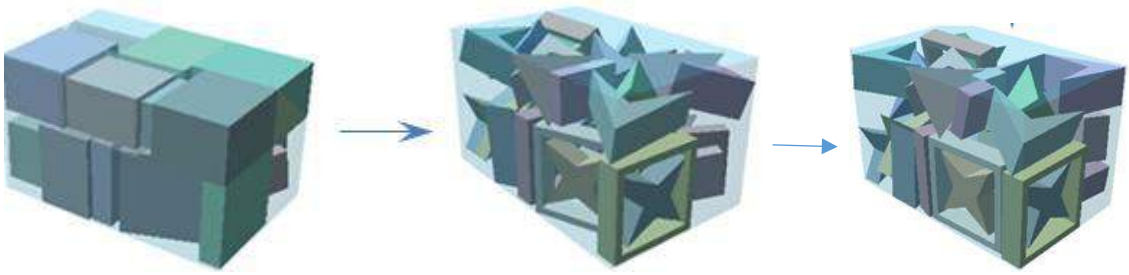
$$R_i = \begin{vmatrix} r_{11}^i & r_{12}^i & r_{13}^i \\ r_{21}^i & r_{22}^i & r_{23}^i \\ r_{31}^i & r_{32}^i & r_{33}^i \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} r_{11}^i &= \cos\beta_i \cos\gamma_i, \\ r_{12}^i &= -\cos\beta_i \sin\gamma_i, \\ r_{13}^i &= \sin\beta_i, \\ r_{21}^i &= \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \cos\alpha_i \sin\gamma_i, \\ r_{22}^i &= -\sin\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \cos\alpha_i \cos\gamma_i, \\ r_{23}^i &= -\sin\alpha_i \cos\beta_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{31}^i &= -\cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \sin\alpha_i \sin\gamma_i, \\ r_{32}^i &= \cos\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \sin\alpha_i \cos\gamma_i, \\ r_{33}^i &= \cos\alpha_i \cos\beta_i. \end{aligned}$$

Нехай R_i^* буде розв'язком задачі (6.11)-(6.12). Тоді кути обертання багатогранного тіла P_i можна визначити таким чином:

$$\beta_i = \arcsin r_{13}^{i*}, \quad \alpha_i = \arcsin(-r_{23}^{i*} / \cos\beta_i),\ \gamma_i = \arccos(-r_{12}^{i*} / \cos\beta_i).$$

На рис.6.8 наведено приклад визначення параметрів розміщення багатогранних тіл за згідно отриманої оптимальної упаковки кластерів.



а) б) в)

Рис.6.8. Приклад побудови початкової точки,
наближеної до локального мінімуму
а) результат упаковки кластерів;
б) побудована початкова точка;
в) обчислений локальний мінімум.

Як видно з рис.6.8 запропонований метод кластеризації дозволяє будувати початкові точки задачі (4.21)-(4.22), наближені до локального мінімуму.

6.1.4 Метод оптимізації за групами змінних

Для отримання локальних мінімумів задачі (4.23)-(4.24) розроблено модифікацію методу оптимізації за групами змінних для упаковки заданої послідовності n- паралелепіпедів P_i, $i \in J_N$, в n-паралелепіпеді D_0. Для отримання розміщення врахуємо, що n- паралелепіпед P_k включає n-паралелепіпед P_t, якщо виконується умова:

$$\begin{cases} u_{ki} > u_{ti}, \\ x_{ki} + a_{ki} < xt_i + a_{ti}, \ i \in J_n. \end{cases}$$

Позначимо включення n-паралелепіпеда P_t в P_k як $P_t \subseteq P_k$. Також введемо поняття контейнера - частини області розміщення D_0, в якій можна

розмістити n-паралелепіпед. Позначимо множину контейнерів через C. Кожен контейнер з C являє собою n-паралелепіпед $c_l = (u_l^c, a_l^c)$, де $a_l^c = (a_{l1}^c, ..., a_{ln}^c)$ - вектор лінійних розмірів контейнера, $u_l^c = (u_{l1}^c, ..., u_{ln}^c)$ - вектор координат його полюса, $l \in J_m$, m - кількість контейнерів.

Нехай задана послідовність n-паралелепіпедів P_i, $i \in J_N$, які необхідно упакувати в область D_0, і для кожного P_i, $i \in J_N$, задана перестановка його лінійних розмірів. Тоді алгоритм отримання локального мінімуму відповідно до методу послідовно-одиночного розміщення можна представити у вигляді наступних кроків.

1. *Установка лічильника паралелепіпедів.* Покладемо $c_p = 1$, $C = \{D_0\}$.

2. *Розміщення n-паралелепіпеда.* З списку P вибираємо n-паралелепіпед P_{c_p} і розміщуємо в перший контейнер з множини C, якщо $C \neq \varnothing$. Інакше - виходимо з алгоритму з повідомленням про помилку і порожній список контейнерів. Можливість розміщення n-паралелепіпеда в l-й контейнер забезпечується виконанням умови:

$$a_{c_p i} \le a_{li}^c, \ \forall i \in J_n. \tag{6.13}$$

Якщо умова (6.13) виконується, то n-паралелепіпед розміщується так, що $u_{c_p i}^c = u_{li}^c$, $i \in J_n$. В цьому випадку встановлюємо $c_p = c_p + 1$ і переходимо до кроку 3.

Якщо умова (6.13) не виконується, тоді переходимо до наступного контейнера $l = l + 1$ і повторюємо крок 2. Якщо умова (6.13) не виконується для всіх контейнерів з C, тоді виходимо з алгоритму з повідомленням про неможливість розмістити n-паралелепіпеди в заданій області розміщення.

3. *Процедура побудови нових контейнерів.* Після розміщення P_{c_p}, контейнер c_l розбиваємо на максимальні по включенню контейнери (рис. 6.9).

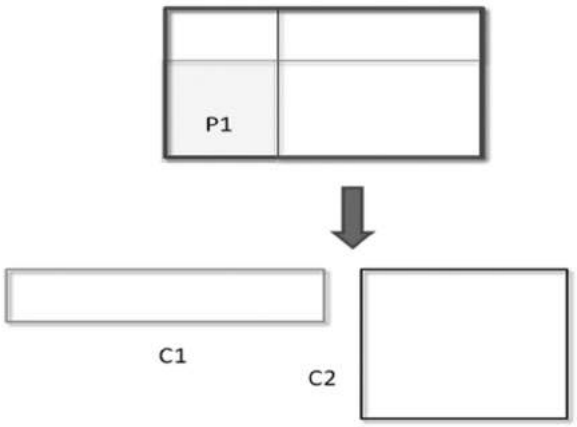


Рис. 6.9. Розбиття контейнера на максимальні по включенню контейнери

На рисунку p_1 - розміщений n-паралелепіпед, c_1, c_2 - отримані в результаті розміщення максимальні по включенню контейнери, $n = 2$.

Розбиття проходить за наступною схемою:

a. якщо $u_{c_p k} + a_{c_p k} < u_{lk}^c + a_{lk}^c$, то існує контейнер $c_z = \{u_z^c, a_z^c\}$, $u_z = \{u_{z1}^c, ..., u_{zn}^c\}$, $u_{zk}^c = u_{c_p k} + a_{c_p k}$, $u_{zj}^c = u_{lj}^c, a_z^c = \{a_{z1}^c, ..., a_{zn}^c\}$, $u_{zk}^c = (u_{lk}^c + a_{lk}^c) - (x_{c_p k} + a_{c_p k})$, $u_{zj}^c = u_{lj}^c$, $j = 1, ..., n$, $j \neq k$; $k = 1, .., n$. Додаємо новий контейнер c_z у множину C_{zh}.

b. якщо $u_{lk}^c < u_{c_p k}$, то існує контейнер $c_h = \{u_h^c, a_h^c\}$, $u_h = \{u_{h1}^c, ..., u_{hn}^c\}$, $u_{hj}^c = u_{lj}^c, \forall j \in J_n, a_h^c = \{a_{h1}^c, ..., a_{hn}^c\}$, $a_k^h = (u_{lk}^c - u_{c_p k})$, $a_{ht}^c = a_{lt}^c$, $t = 1, .., n$, $t \neq k$; $k = 1, .., n$. Додаємо новий контейнер c_h у множину C_{zh}. Видаляємо контейнер c_l з C.

4. *Видалення включених контейнерів.* В результаті виконання кроку 3 у множині C_{zh} виникає множина нових контейнерів. Кожен новий контейнер перевіряємо на включення в кожен контейнер з множини C. Якщо контейнер $c_z \subseteq c_j$, то видаляємо контейнер c_j з C. Якщо $c_j \subseteq c_z$, то видаляємо

контейнер c_z з C_{zh}, $z = 1,...,|C_{zh}|$, $j = 1,...,|C|$.

5. *Розбиття контейнерів.* Всі контейнери, що залишилися у множині C_{zh}, перевіряємо на перетин з вже розміщеними n-паралелепіпедамі з P. Таким чином, якщо $c_z \cap p_j \neq \varnothing$, $j = 1,...,c_p - 1$, то необхідно пройти процедуру побудови нових контейнерів (крок 3) для контейнера c_z і n-паралелепіпеда p_j. Доповнити множину C_{zh} контейнерами, отриманими в результаті розбиття всіх контейнерів, які перетинають вже встановлені n-паралелепіпеди. Додати всі контейнери з C_{zh} в множину C.

6. *Сортування списку контейнерів.* Відсортуємо доповнений список контейнерів C таким чином, щоб на першому місці у множині C був контейнер з найменшим значенням лінійного розміру з індексом 1. Знімаємо покажчик на поточний контейнер: $l = 1$.

7. *Вибір наступного n-паралелепіпеда з P.* Якщо множина P містить нерозміщені n-паралелепіпеди, тобто $c_p < |P| - 1$, то задаємо $c_p = c_p + 1$ і переходимо до кроку 2. Інакше виходимо з алгоритму з повідомленням про успішну упаковку n-паралелепіпедів в D_0.

Таким чином, паралелепіпеди упаковуються у область D_0 шляхом послідовно-одиночного розміщення. Після розміщення i-го паралелепіпеда поточний список контейнерів доповнюється новими шляхом розбиття знову зайнятого контейнера на максимальні по включенню контейнери. Процес розміщення закінчується, якщо все паралелепіпеди були розміщені або список контейнерів порожній. Результатом виконання алгоритму буде набір параметрів розміщення кожного n-паралелепіпеда з P.

6.2 Методи локальної оптимізації

Аналіз особливостей математичних моделей задач упаковки показав, що область припустимих розв’язків описується дуже великою кількістю нелінійних нерівностей. Цей факт потребує розробки методів, які дозолять

ефективно розв'язати проблему великої розмірності задачі. Основна ідея запропонованих методів локальної оптимізації ґрунтується на декомпозиції основної задачі на підзадачі зі значно меншою кількістю обмежень та меншої розмірності.

Для цього виконуються такі етапи:

1) послідовна генерація підобластей області припустимих розв'язків, які містять початкову точку;

2) визначення підсистеми $\varepsilon-$активних обмежень;

3) пошук за допомогою сучасних НЛП солверів другого порядку локальних екстремумів на обраних підобластях;

4) організація переходу до інших підобластей.

Розглянемо реалізацію цих кроків для різних методів.

6.2.1 Метод можливих напрямів зі стратегією активного набору на підобластях

Ґрунтуючись на властивостях побудованої математичної моделі (4.1)-(4.2), для пошуку локального мінімуму, що відповідає отриманій початковій точці $X^i \in W$, виділяється підобласть $W_{k_1} \subset W$, що містить X^i, і обчислюється локальний мінімум X^{1*} на цій підобласті. Якщо існують інші підобласті $W_{k_j} \subset W$, для яких $X^{1*} \in W_{k_j}$, $j = 1,2,...,\vartheta$, і X^{1*} не є локальним мінімумом, то знову розв'язується задача пошуку локального мінімуму на одній із цих підобластей. Процес повторюється доти, поки не буде знайдений локальний мінімум основної задачі виду (4.1)-(4.2). Таким чином, обчислення локального мінімуму задачі (4.1)-(4.2) може бути зведено до розв'язання послідовності задач нелінійного програмування виду

$$F(X^{j*}) = \min_{X \in W_{k_j}} F(X), \; j = 1,2,...,m << \eta_0 . \qquad (6.14)$$

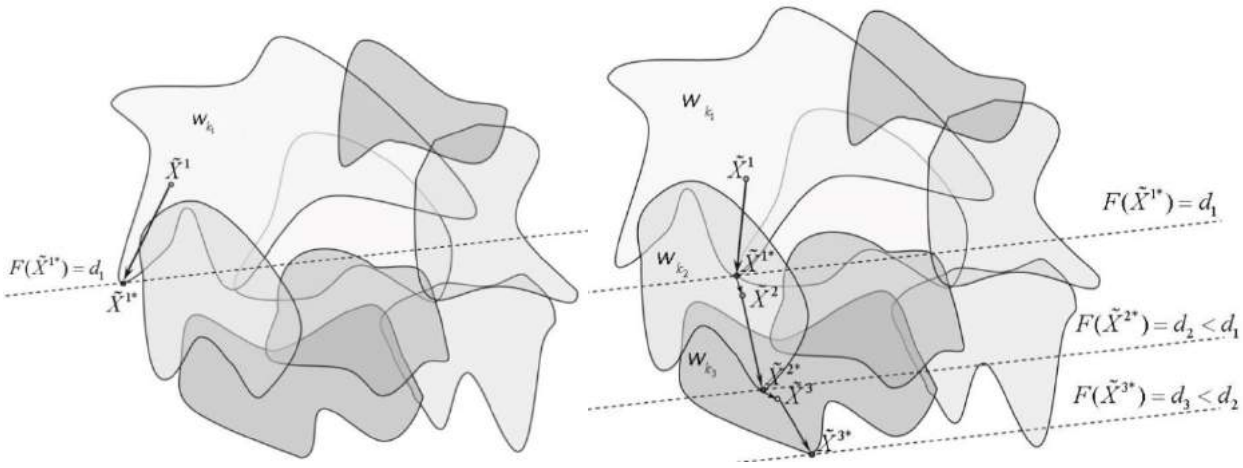
Для розв’язання задачі (5) використовується модифікація методу можливих напрямів Зойтендейка разом зі стратегією ε -активних нерівностей. Для відшукання локального мінімуму для кожної із задач (5) використовується стандартний ітераційний процес $X^{(k+1)} = X^k + tZ^k,\ k = 1,2,...,\zeta$, де $Z^k \in R^{3n+1}$ – розв’язання наступної задачі лінійного програмування

$$\max_{(\alpha^k, Z^k) \in G^k} \alpha^k , \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned} G^k = \Big\{ (\alpha^k, Z^k) \in R^{3n+1} : \Big(-\nabla F(X^k), Z^k \Big) \geq \alpha^k , \\ \Big(\nabla \Psi_{k_j}(X^k), Z^k \Big) \geq \alpha^k , \\ j = 1,2,...,\varsigma_k(\varepsilon_k), -1 \leq z_i^k \leq 1, i = 1,2,...,3n+1 \Big\}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

де $\Psi_{k_j}(X^k)$ – ліві частини ε -активних нерівностей із системи, що виділена із системи (4.2), у точці X^k.

Перехід від однієї задачі типу (6.14) до іншої здійснюється в такий спосіб. Нехай $X^i = \bar{X}^1 \in W$ – початкова точка. Тоді із системи, що задає підобласть W_{k_1}, обирається система, що визначає $W_{k_1} \subset W$, таку що $\bar{X}^1 \in W_{i_1}$. Використовуючи точку $\bar{X}^1$ як початкову точку, розв’язується задача $F(X^{1*}) = \min_{X \in W_{k_1}} F(X)$. Отримана точка X^{1*} може бути або локальним мінімумом щодо всієї області W (рис.6.10 а) , або тільки відносно підобласті W_{i_1} (рис.6.10 б).



а) б)

Рис.6.10. Схема пошуку локального мінімуму на підобластях області припустимих розв’язків

Для того, щоб визначити, чи є X^{1*} локальним мінімумом відносно W, необхідно дослідити підобласті W_{k_j} з $X^{1*} \in W_{k_j}$, $j \in \{1,2,...,\eta_0\}$. Для цієї цілі із системи (4.2) обираються всі $\varepsilon-$активні нерівності в X^{1*} та розв’язується задача (6.15)-(6.16). Якщо $\alpha > 0$, то X^{1*} не є локальним мінімумом основної задачі виду (4.1)-(4.2). Це дає можливість обчислити нову точку $\bar{X}^2 = (X^{1*} + tZ) \in W$, у якій $F(X^{1*}) > F(\bar{X}^2)$. Після цього формується нова система нерівностей, що визначає підобласть $W_{k_2} \subset W$, таку що $\bar{X}^2 \in W_{k_2}$. Використовуючи $\bar{X}^2$ як початкову точку, розв’язується задача $F(X^{2*}) = \min\limits_{X \in W_{k_2}} F(X)$. Описаний процес триває доти, поки не буде отриманий локальний мінімум основної задачі (рис.6.10 б).

Слід відмітити, що пошук локальних екстремумів на підобластях з області припустимих розв’язків дозволив значно скоротити обчислювальну складність методу та витрати часу на пошук локального екстремуму.

6.2.2 Метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції

Нехай точка $X^{\bullet} \in W$ є початковою точкою, побудованою одним з розроблених методів. Пошук локального екстремуму починається з виділення підобласті W_0, такої, що $X^{\bullet} \in W_0 \subset W$. Для того, щоб сформувати підобласть W_0, необхідно підставити точку $X^{\bullet}$ в нерівності, що формують систему виду (4.2). Оскільки квазі-Ф-функцію можна представити у вигляді

$$\widehat{\Phi}'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right) = \max\left\{\Psi^s_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right), s = 1, \ldots, \wp_{ij}\right\},$$

де $\wp_{ij}$ залежить від типу O_i і O_j, то допустима підобласть W_0 задається системою нерівностей, яка формується за рахунок вибору в кожній квазі-Ф-функції $\widehat{\Phi}'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right)$ однієї з функцій $\Psi^{a_{ij}}_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right)$, $a_{ij} \in \left\{1, \ldots, \wp_{ij}\right\}$, $i < j \in I$, такої що $\Phi'_{ij}\left(u^{\bullet}_i, u^{\bullet}_j, u^{\bullet}_{p_{ij}}\right) = \Psi^{a_{ij}}_{ij}\left(u^{\bullet}_i, u^{\bullet}_j, u^{\bullet}_{p_{ij}}\right) = \chi^{\bullet}_{ij}$. Аналогічним способом виділяються нерівності з $\Phi_i\left(u_i, u_\Omega\right) \geq 0, i \in I$. В результаті отримуємо систему нерівностей $\Upsilon^0\left(X\right) \geq 0$, яка і описує підобласть W_0.

Після цього розв'язується задача

$$F\left(u^{0*}_\Omega\right) = \min_{X \in W_0 \subset R^{\vartheta}} F\left(u_\Omega\right), \tag{6.17}$$

і обчислюється точка локального мінімуму X^{0*} для стартової точки $X^{\bullet} \in W_0$.

Далі в системі $\Upsilon^0\left(X^{0*}\right) \geq 0$ виділяємо активні нерівності $\varsigma_{j0}\left(\xi^{0*}_j\right) \geq 0$, $j \in \Gamma_0 = \{1, 2, ..., \mu_0\} \subset \Gamma = \{1, 2, ..., \mu\}$. Нехай виділені нерівності належать підсистемі нерівностей $\Psi^a_{ij}(u_i, u_j, u_{p_{ij}}) \geq 0$, $i \in I_{0\eta_1} \subset I$, $j \in I_{0\eta_2} \subset I$. Це дозволяє вибрати функції $\widehat{\Phi}'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right)$, які включають в себе функції $\Psi^a_{ij}(u_i, u_j, u_{p_{ij}})$, $i \in I_{0\eta_1}$, $j \in I_{0\eta_2}$, та обчислити їх значення в точці X^{0*}. Нехай $\widehat{\Phi}'_{ij}\left(u^{0*}_i, u^{0*}_j, u^{0*}_{p_{ij}}\right) = \Psi^c_{ij}(u^{0*}_i, u^{0*}_j, u^{0*}_{p_{ij}}) = \chi^0_{ij}$, $i \in I_{0\eta_1}$, $j \in I_{0\eta_2}$.

Якщо $\chi_{ij}^{0} > 0,$ $i \in I_{0\eta_1},$ $j \in I_{0\eta_2},$ то замінюємо підсистеми $\Psi_{ij}^{a}(u_i, u_j, u_{p_{ij}}) \geq 0$ на підсистеми $\Psi_{ij}^{c}(u_i, u_j, u_{p_{ij}}) \geq 0, i \in I_{0\eta_1},$ $j \in I_{0\eta_2}.$ В результаті отримуємо нову підсистему нерівностей, яка визначає нову допустиму підобласть $W_1 \subset W$. Вочевидь, $X^{0*} \in W_1.$ Взявши початкову точку $X^{0*},$ розв'язуємо задачу

$$F\left(u_{\Omega}^{1*}\right) = \min_{X \in W_1 \subset R^{\vartheta}} F\left(u_{\Omega}\right),$$

і обчислюємо точку локального мінімуму X^{1*}.

Обчислювальний процес триває ρ раз до тих пір, поки всі $\chi_{ij}^{\rho} = 0,$ $i \in I_{\rho\eta_1},$ $j \in I_{\rho\eta_2}$.

Якщо значення кожної з функцій $\Phi_{ij}^{'}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right)$ в точці $X^{\rho*}$ визначається лише однією функцією $\Psi_{ij}^{a}(u_i, u_j, u_{p_{ij}}) \geq 0,$ то точка $X^{\rho*}$ є точкою локального мінімуму щодо всієї області W. Інакше, необхідно досліджувати всі допустимі підобласті W_{ρ_t}, $t \in \Theta_{\rho}$, що містять точку $X^{\rho*}$. Це може призвести до великих обчислювальних витрат. Тому, в цьому випадку ми беремо точку $X^{\rho*}$ як наближення до точки локального мінімуму щодо області W. Слід зазначити, що аналогічна ситуація може бути отримана, якщо розв'язувати основну задачу виду (1)- (2) на всій області W.

Зменшення кількості обмежень. Системи нерівностей $\Upsilon^{\tau}\left(X\right) \geq 0$, що задають підобласті $W_{\tau}, \tau \in \{0, \ldots, \zeta\}$, складаються з великої кількості нерівностей. Очевидно, що для ефективного розв'язання задач упаковки необхідне суттєве зменшення кількості обмежень. З цією метою в роботі запропоновано спеціальний метод декомпозиції, суть якого полягає в зведенні розв'язання задач виду (6.17) до розв'язання послідовності оптимізаційних

підзадач. Для кожної такої підзадачі вводиться додаткова система обмежень на змінні, що дозволяє на кожному етапі пошуку локального екстремуму розглядати лише деякі обмеження зі всієї системи $\Upsilon^{\tau}(X) \geq 0$. Перевага цього підходу полягає не тільки в істотному скороченні числа обмежень, які задають допустимі області підзадач, а й в значному зменшенні їх розмірності (у випадку використання квазі-Ф-функцій).

Розглянемо детальніше описаний метод декомпозиції. Перш за все, задамо величину $\sigma > 0$, і серед нерівностей $\Phi'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right) \geq 0, i < j \subset I$, та $\Phi_i\left(u_i, u_\Omega\right) \geq 0$, виділимо нерівності $\Phi'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right) \geq 0$, такі, що

$$\left\| v_i^{(\tau-1)*} - v_j^{(\tau-1)*} \right\| - \left(R_i^0 + R_j^0\right) \leq \sigma,\ i \in \Pi_1 \subset I,\ j \in \Pi_2 \subset I, \tag{6.18}$$

і нерівності $\Phi_i\left(u_i, u_\Omega\right) \geq 0$, такі, що виконана хоча б одна з умов

$$\begin{aligned} & x_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 - l_1^{(\tau-1)*} \leq \sigma,\ y_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 - w_1^{(\tau-1)*} \leq \sigma, \\ & z_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 - h_1^{(\tau-1)*} \leq \sigma, \\ & l_2^{(\tau-1)*} - x_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 \leq \sigma,\ w_2^{(\tau-1)*} - y_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 \leq \sigma, \\ & h_2^{(\tau-1)*} - z_i^{(\tau-1)*} - R_i^0 \leq \sigma,\ i \in \Pi_3 \subset I. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Виділимо з системи $\Upsilon^{\tau}(X) \geq 0$ нерівності виду $\varsigma_{t\tau}(\xi_t) \geq 0$, які є частинами нерівностей $\Phi'_{ij}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}\right) \geq 0, i \in \Pi_1 \subset I,\ j \in \Pi_2 \subset I$, і $\Phi_i\left(u_i, u_\Omega\right) \geq 0$, $i \in \Pi_3 \subset I$. Виділені нерівності формують підсистему $\Upsilon^{\tau 0}(X) \geq 0$, що складається з t_{μ_0} нерівностей, і визначає підмножину $W_{\tau 0} \subset W_\tau$. Вочевидь, $\Upsilon^{\tau 0}\left(X^{(\tau-1)*}\right) \geq 0$ та $t_{\mu_0} < \mu_\tau$.

Підсистема $\Upsilon^{\tau 0} \geq 0$ описує підмножину точок $X^{\tau 0} \in W_{\tau 0} \subset R^{\vartheta - 3q_0}$. Взявши початкову точку $X^{(\tau-1)0*} \in W_{\tau 0}$, розв'яжемо задачу

$$F\left(u_\Omega^{\tau 0*}\right) = \min_{X_{\tau 0} \in W_{\tau 0} \subset R^{\vartheta - 3q_0}} F\left(u_\Omega\right), \tag{6.20}$$

де

$$W_{\tau 0} = \left\{ X^{\tau 0} \in R^{\vartheta - 3q_0} : \Upsilon^{\tau 0}(X^{\tau 0}) \geq 0, \frac{1}{2}\sigma - \left\| \nu_i^{(\tau-1)*} - \nu_i \right\| \geq 0,\ i \in I \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3), \right.$$

Таким чином, в процесі розв'язання задачі не будуються розділяючи площини (тобто не беруть участь компоненти $u_{p_{ij}}$ вектору u_p) для тіл, відстань між описаними кулями яких більше, ніж σ. Умови $\frac{1}{2}\sigma - \left\| \nu_i^{(\tau-1)*} - \nu_i \right\| \geq 0,\ i \in I \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3)$ гарантують неперетинання тривимірних тіл O_i, $i \in \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$, та їх розміщення в області Ω.

Нехай $X^{\tau 0*}$ – точка локального мінімуму задачі (6.20). Оскільки вектор $u_p^{\tau 0*}$ не містить всіх координат вектору u_p, то відсутні координати необхідно визначити, таким самим чином, як і при побудові початкової точки. Решта координат вектору u_p прирівнюються до відповідних координатах вектору $u_p^{\tau 0*}$.

Далі для точки $X^{\tau 0*}$ формуємо нову систему нерівностей $\Upsilon^{\tau 1}(X) \geq 0$. На підставі точки $X^{\tau 0*}$ сформуємо точку $X^{\tau 1} \in W_{\tau 1}$ і, взявши її як початкову, розв'язуємо задачу

$$F\left(u_\Omega^{\tau 1*}\right) = \min_{X^{\tau 1} \in W_{\tau 1} \subset R^{\vartheta - 3q_1}} F\left(u_\Omega\right),\ .$$

Таким чином, розв'язується послідовність підзадач

$$F\left(u_\Omega^{\tau k*}\right) = \min_{X^{\tau k} \in W_{\tau k} \subset R^{\vartheta - 3q_k}} F\left(u_\Omega\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

до тих пір, поки не буде виконана умова $F\left(u_\Omega^{\tau (k-1)*}\right) = F\left(u_\Omega^{\tau k*}\right)$.

Легко бачити, що чим менше величина σ, тим менше кількість нерівностей, які задають $W_{\tau k}$, і тим більше число k підзадач типу (6.20) необхідно розв'язати , щоб знайти точку локального мінімуму. З іншого боку, чим більше σ, тим більше нерівностей міститься в системі, яка задає $W_{\tau k}$,і потрібно затратити більше часу для розв'язання підзадач типу (6.20). Як

показали чисельні експерименти, значення величини σ вибирається рівним середньому радіусу куль, що покривають тіла.

На рис.6.11 наведено приклад пошуку локального мінімуму задачі упаковки тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, сферичними, конічними поверхнями та площинами.

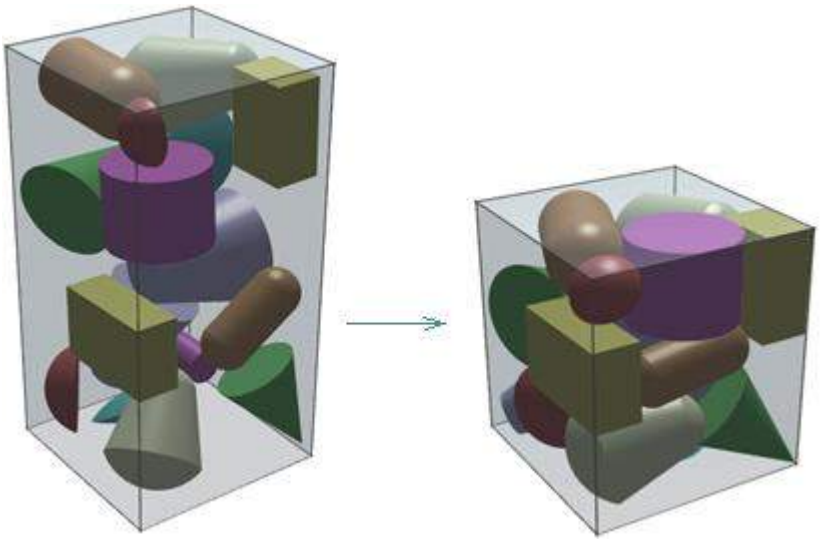


Рис.6.11. Приклад пошуку локального мінімуму

6.2.3 Особливості застосування методу для задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл

Особливості математичної моделі (4.21)-(4.22) задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл дозволяють виконати модифікацію методу локальної оптимізації з метою зменшення обчислювальних та часових витрат за рахунок зведення розв'язання задачі до розв'язання послідовності істотно більш простих підзадач.

Пошук локального мінімуму задачі (4.21)-(4.22) може бути розділений на два етапи: етап лінійної оптимізації та етап нелінійної оптимізації.

Етап лінійної оптимізації. Даний етап може бути реалізований за рахунок фіксації кутів обертання $\theta_i^0 = const$ багатогранних тіл P_i, $i \in I_n$ у початковій точці $(u^0, u_\Omega^0) \in W$. Фіксація кутів обертання дозволяє значно скоротити розмірність задачі (4.21)-(4.22), перейти до лінійних обмежень, які формують область припустимих розв'язків *W*, та модифікувати алгоритм

декомпозиції з метою зменшення кількості обмежень. Все це дозволяє значно скоротити обчислювальні витрати та швидше обчислити наближення до локального мінімуму.

На даному етапі математична модель задачі приймає вид

$$H(u_\Omega{}^*) = \min_{X \in W} H(u_\Omega) \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned} W = \{X = (v, u_\Omega) \in R^{3n+6}: \quad & \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, i < j \in I, \\ & \Phi_i(v_i, u_\Omega) \geq 0, i \in I, \\ & F(u_\Omega) \geq 0\}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Так як кути повороту фіксуються, то системи нерівностей виду $G_\tau \geq 0$ (див. розділ 4.8) є лінійними. Область припустимих розв'язків $W = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} W_\tau$,де W_τ задається системою нерівностей

$$\Upsilon_\tau(X) = F_\tau(v, u_\Omega) = \begin{cases} f_{i_1\tau}(\varsigma_1) \geq 0 \\ f_{i_2\tau}(\varsigma_2) \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{i_\mu\tau}(\varsigma_\mu) \geq 0 \end{cases} \tag{6.23}$$

де ξ_t складається з компонент вектору (v, u_Ω).

Нехай точка $X^\kappa = (v^\kappa, u_\Omega^\kappa) \in W$ (будемо вважати, що точка $X^0 = (v^0, u_\Omega^0) \in W$ є початковою точкою для $\kappa = 0$). Обираємо з області W_κ підобласть W_τ, $\tau \in \Theta$, яка містить точку X^κ. Підобласть W_κ задається системою нерівностей $\Upsilon_\kappa(X) = F_\kappa(v, u_\Omega) \geq 0$.

Для початкової точки X^κ обчислимо точку локального мінімуму $X^{\Delta(\kappa+1)}$ задачі

$$H(u_\Omega^{\Delta(\kappa+1)}) = \min_{X \in W_\kappa \subset R^{3n+6}} H(u_\Omega) \ . \tag{6.24}$$

Оскільки $X^{\Delta(\kappa+1)}$ в загальному випадку не є точкою локального мінімуму задачі (6.21)-(6.22), то необхідно перейти у іншу підобласть $W_{\kappa+1}$, в

якій значення $H(u_\Omega)$ буде зменшено. Виділимо підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^{spo}(v_i, v_j) \geq 0,\ i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa},\ s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa}, o = o_{ij}^{sp}$ де o_{ij}^{sp} або з A_{is} або D_{jp} або L_{ij}, які містять активні нерівності. При цьому $\Psi_{ij}^{spo}(v_i^{\Delta(\kappa+1)}, v_j^{\Delta(\kappa+1)}) = 0,$ $i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa}, s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa}.$

Далі вибираємо нерівності $\Phi_{ij}^{sp}(v_i, v_j) \geq 0$ з системи нерівностей (6.22), що включає в себе підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^{spo}(v_i, v_j) \geq 0,$ $i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa}, s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa},$ та обчислюємо $\Phi_{ij}^{sp}(v_i^{\Delta(\kappa+1)}, v_j^{\Delta(\kappa+1)}) = \chi_{ij},$ $i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa}, s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa}.$ Так як кожна з функцій $\Phi_{ij}^{sp}(v_i, v_j),$ $i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa}, s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa},$ включає в себе операцію $\max$, то деякі з $\chi_{ij},$ $i \in E_{1\kappa}, j \in E_{2\kappa}, s \in K_{i\kappa}, p \in K_{j\kappa},$ можуть бути додатними. Нехай $\Phi_{ij}^{qr}(v_i^{\Delta(\kappa+1)}, v_j^{\Delta(\kappa+1)}) = \Psi_{ij}^{spq}(v_i^{\Delta(\kappa+1)}, v_j^{\Delta(\kappa+1)}) = \chi_{ij} > 0,\ i \in E_{1\kappa}^0 \subset E_{1\kappa}^1, j \in E_{2\kappa}^0 \subset E_{2\kappa}^0,$ $s \in K_{i\kappa}^0 \subset K_{i\kappa},\ p \in K_{j\kappa}^0 \subset K_{j\kappa},$ де q або з A_{is}, або D_{jp}, або L_{ij}. Так як $o \neq q$ для усіх $i \in E_{1\kappa}^0, j \in E_{2\kappa}^0,$ $s \in K_{i\kappa}^0, p \in K_{j\kappa}^0,$ то можна отримати нову систему нерівностей $\Upsilon_{\kappa+1}(X) \geq 0$, що визначає нову підобласть допустимих розв'язків $W_{\kappa+1}$ заміною підсистем нерівностей $\Psi_{ij}^{spo}(v_i, v_j) \geq 0,$ $i \in E_{1\kappa}^0, j \in E_{2\kappa}^0, s \in K_{i\kappa}^0, p \in K_{j\kappa}^0,$ в системі $\Upsilon_\kappa(X) \geq 0$ на підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^{qrc}(v_i, v_j) \geq 0, i \in E_{1\kappa}^0, j \in E_{2\kappa}^0, q \in K_{i\kappa}^0, r \in K_{j\kappa}^0.$ Очевидно, що $X^{\Delta(\kappa+1)} \in W_{\kappa+1}.$

Таким чином, обчислення точки локального мінімуму X^* задач (6.21)-(6.22) може бути виконано в результаті розв'язання послідовності задач

$$H(u_\Omega^{\Delta(\kappa+1)}) = \min_{X \in W_\kappa \subset R^{3n+6}} H(u_\Omega), \kappa = 0,1,..., \tag{6.25}$$

де як початкова точка задачі береться точка локального мінімуму $X^{\Delta\kappa}$

Обчислювальний процес триває до тих пір, поки не буде виконана умова $H(u_{\Omega}^{\Delta(\kappa+1)}) = H(u_{\Omega}^{\Delta\kappa})$. В результаті точка локального мінімуму $X^* = X^{\Delta\kappa}$ береться в якості точки локального мінімуму задачі (6.21)-(6.22).

Оскільки системи нерівностей $\Upsilon_{\kappa}(X) \geq 0$ складається з великого числа нерівностей, то для обчислення точки локального мінімуму задачі (6.25) необхідно застосувати алгоритм декомпозиції.

Використаєм наступний очевидний факт: якщо точка $X^{\kappa t} \in W_{\kappa}$ то найкоротша відстань між деякими багатогранного тілами $P_i(v_i)$ і $P_j(v_j)$ більше 0. Це означає, що деякі нерівності в $\Upsilon_{\kappa}(v, u_{\Omega}) \geq 0$ строго більше, ніж деякі $\delta > 0$.

Нехай точка $X^{\kappa t} \in W_{\kappa}$. Встановимо $\delta > 0$ та виділимо $\Psi_{ij}^{spq}(v_i, v_j) \geq 0$, $i \in A_{1\kappa}^t$, $j \in A_{2\kappa}^t$, $s \in K_i$, $p \in K_j$, або $\omega_{io}^r(v_i, u_{\Omega}) \geq 0$, $i \in I_{o\kappa}^t, o \in O_1$, $r \in J_i$, або $\phi_{io}^r(v_i, u_{\Omega}) \geq 0$, $i \in I_{o\kappa}^t$, $o \in O_2$, $r \in J_i$, з системи нерівностей $\Upsilon_{\kappa}(X) \geq 0$ для яких в точці $X^{\kappa t}$ виконуються нерівності

$$\left\| v_i^{\kappa t} - v_j^{\kappa t} \right\| - (\rho_i^{\nabla} + \rho_j^{\nabla}) \leq \delta, i \in A_{1\kappa}^t, j \in A_{2\kappa}^t, D(X^{\kappa t}) \leq \delta,$$

де

$$D(X^{\kappa t}) = \begin{cases} f_{i1}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{1\kappa}^t, f_{i2}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{2\kappa}^t, f_{i31}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{3\kappa}^t, \\ \sigma_{i1}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{1\kappa}^t, \sigma_{i2}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{1\kappa}^t, \sigma_{i3}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{3\kappa}^t, \\ \sigma_{i4}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{4\kappa}^t, \sigma_{i5}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{5\kappa}^t, \sigma_{i6}(v_i^{\kappa t}, u_{\Omega}^{\kappa t}) \leq \delta, i \in I_{6\kappa}^t. \end{cases},$$

Використовуючи нерівності $\Psi_{ij}^{spq}(v_i, v_j) \geq 0$, $i \in A_{1\kappa}^{0t}, j \in A_{2\kappa}^{0t}, s \in K_i^t$, $p \in K_j^t$, і $\Omega_{io}^r(v_i, u_{\Omega}) \geq 0$, $i \in I_{o\kappa}^{0t}$, $o \in O$, $r \in J_i$, і $F(u_{\Omega}) \geq 0$, сформуємо систему нерівностей

$$\Upsilon_{\kappa t}(v,u_\Omega)=F_{\kappa t}(v,u_\Omega)=\begin{cases}\Psi_{ij}^{spq}(v_i,v_j)\ge 0, i\in A_{1\kappa}^{0t}, j\in A_{2\kappa}^{0t}, s\in K_i^t, p\in K_j^t,\\ \Omega_{io}^r(v_i,u_\Omega)\ge 0, i\in I_{o\kappa}^{0t}, o\in O, r\in J_i,\\ F(u_\Omega)\ge 0, \left\|u_\Omega^{\kappa t}-u_\Omega\right\|\le\dfrac{\delta}{2},\\ \left\|v_{is}(v_i^{\kappa t})-v_{is}(v_i)\right\|\le\dfrac{\delta}{2}, i\in A_{1\kappa}^{0t}, s\in K_i^t,\\ \left\|v_{jp}(v_j^{\kappa t})-v_{jp}(v_j)\right\|\le\dfrac{\delta}{2}, j\in A_{2\kappa}^{0t}, p\in K_i^t,\end{cases}$$

яка описує підобласть $W_{\kappa t}$.

З побудови системи випливає, що $X^{\kappa t}\in W_{\kappa t}$. Крім того, будь-яка точка $X\in W_{\kappa t}$ через нерівності $\left\|v_{is}(v_i^{\kappa t})-v_{st}(v_i)\right\|\le\dfrac{\delta}{2}$, $A_{1\kappa}^{0t}$, $s\in B_{i\kappa}^{0t}, \left\|v_{jp}(v_j^{\kappa t})-v_{jp}(v_j)\right\|\le\dfrac{\delta}{2}, j\in A_{2\kappa}^{0t}, p\in B_{j\kappa}^{0t}$, і $\left\|u_\Omega^{\kappa t}-u_\Omega\right\|\le\dfrac{\delta}{2}$ належить W_κ, тобто .$W_{\kappa t}\subset W_\kappa$.

Отже, пошук точки локального мінімуму задачі (6.24) може бути зведений до розв'язання послідовності підзадач

$$H(u_\Omega^{\Delta\kappa(t+1)})=\min_{(v,u_\Omega)\in W_{\kappa t}} H(u_\Omega^{\Delta\kappa(t+1)}),\ t=0,1,2,..,$$

де в якості початкової точки для задачі t береться точка локального мінімуму $(v^{\kappa t*},u_\Omega^{\kappa t*})$ з $(t-1)$ задачі.

Процес продовжується поки не буде виконана умова $H(u_\Omega^{\Delta\kappa(t+1)})=H(u_\Omega^{\Delta\kappa t})$. Точка $X^*=X^{\Delta\kappa}=X^{\Delta\kappa t}$ береться в якості точки локального мінімуму задачі (6.21-6.22).

Етап нелінійної оптимізації. Для пошуку локального мінімуму задачі (4.21)-(4.22) сформуємо початкову точку $(u^0,u_\Omega^0)=(v^*,\theta^0,u_\Omega^*)\in W$, де v^* і u_Ω^*

є компонентами точки X^*, яка є точкою локального мінімуму задачі (6.21-6.22).

За аналогією з етапом лінійної оптимізації, пошук локального мінімуму задачі (4.21)-(4.22) зводиться до розв'язання послідовності задач

$$H(u_\Omega^{\Delta(\kappa+1)}) = \min_{X \in W_\kappa \subset R^m} H(u_\Omega)\,,\ \kappa = 0,1,..., \tag{6.26}$$

де як початкова точка для κ-тої задачі береться точка локального мінімуму $(u^{\Delta\kappa}, u_\Omega^{\Delta\kappa})$ з $(\kappa-1)$-тої задачі і точка (u^0, u_Ω^0) є початковою точкою для $\kappa = 0$.

Розв'язання кожної задачі з послідовності задач (6.26) зводиться до розв'язання послідовності підзадач

$$H(u_\Omega^{\Delta\kappa(t+1)}) = \min_{X \in W_{\kappa t} \subset R^m} H(u_\Omega)\,, t = 0,1,..., \tag{6.27}$$

де $W_{\kappa t}$ задається системою нерівностей:

$$F_{\kappa t}(u, u_\Omega) = \begin{cases} \Psi_{ij}^{spq}(u_i, u_j) \ge 0, i \in A_{1\kappa}^{0t}, j \in A_{2\kappa}^{0t}, s \in K_i^t, p \in K_j^t, \\ \Omega_{io}^r(u_i, u_\Omega) \ge 0, i \in I_{o\kappa}^{0t}, o \in O, r \in J_i, \\ F(u_\Omega) \ge 0, \left\| u_\Omega^{\kappa\alpha} - u_\Omega \right\| \le \dfrac{\delta}{2}, \\ \left\| v_{is}(u_i^{\kappa t}) - v_{is}(u_i) \right\| \le \dfrac{\delta}{2}, i \in A_{1\kappa}^{0t}, s \in K_i^t, \\ \left\| v_{jp}(u_j^{\kappa t}) - v_{jp}(u_j) \right\| \le \dfrac{\delta}{2}, j \in A_{2\kappa}^{0t}, p \in K_j^t, \end{cases} = \begin{cases} f_{i_1\kappa t}(\xi_{i_1}) \ge 0 \\ f_{i_2\kappa t}(\xi_{i_2}) \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{i_q\kappa t}(\xi_{i_q}) \ge 0 \end{cases}, \tag{6.28}$$

Зауважимо, що кожна з нерівностей підсистем $\Psi_{ij}^{spa}(u_i, u_j) \ge 0,\ a \in A_{is}$, і $\Psi_{ij}^{spd}(u_i, u_j) \ge 0,\ d \in D_{jp}$, визначають відхилення вершини P_{is} від площини, що проходить через грань P_{jp} і відхилення вершини P_{jp} від площини, що проходить через грань P_{is}. У свою чергу, кожна нерівність $\Omega_{io}^r(u_i, u_\Omega) \ge 0$,

визначає відхилення вершини опуклої оболонки P_i від поверхні множини $B(u_\Omega^\kappa) = R^3 \setminus int\Omega(u_\Omega^\kappa)$. Тобто, чим більша кількість вершини багатогранного тіла P_i, $i \in I$, тим більше число q нерівностей в $F_{\kappa t}(u, u_\Omega) \geq 0$. Беручи до уваги, що приріст кутів α_i, β_i і γ_i, $i \in I$, при розв'язанні задачі (6.27) не перевищує $\frac{\pi}{4}$, можна виключити деякі обмеження з системи (6.28). Це може бути виконано наступним чином.

Нехай $(u^{\kappa t}, u_\Omega^{\kappa t}) \in W_{\kappa t}$. Обчислимо $\max\{ f_{ijt}^{spa}(u_i^{\kappa t}, u_j^{\kappa t}),\ a \in T_{is}\} = a_{ij}^{spa}$, $i \in A_{1\kappa}^{0t}, j \in A_{2\kappa}^{0t}, s \in K_i^t$, $p \in K_j^t$, $\max\{ f_{ijt}^{spd}(u_i^{\kappa t}, u_j^{\kappa t}),\ d \in T_{jp}\} = a_{ij}^{spd}$, $i \in A_{1\kappa}^{0t}, j \in A_{2\kappa}^{0t}, s \in K_i^t,\ p \in K_j^t$, і $\max\{\Omega_{io}^r(u_i^{\kappa t}, u_\Omega^{\kappa t}) \geq 0,\quad r \in J_i\} = a_{io},\quad i \in I_{o\kappa}^{0t}$, $o \in O$, та виділимо нерівності

$$f_{ij}^{spa}(u_i^{\kappa t}, u_j^{\kappa t}) \geq \varepsilon a_{ij}^{spa}, i \in A_{1\kappa}^{1t}, j \in A_{2\kappa}^{1t}, s \in K_i^t, p \in K_j^t,$$

$$f_{ij}^{spd}(u_i^{\kappa t}, u_j^{\kappa t}) \geq \varepsilon a_{ij}^{spd}, i \in A_{1\kappa}^{1t}, j \in A_{2\kappa}^{1t}, s \in K_i^t, p \in K_j^t,$$

$$\Omega_{io}^r(u_i^{\kappa t}, u_\Omega^{\kappa t}) \geq \varepsilon a_{io}, i \in I_{o\kappa}^{1t}, o \in O, r \in J_i^{1t} \subset J_i,$$

Далі ми виключаємо нерівності обрані нерівності з $F_{\kappa t}(u, u_\Omega^{\kappa t}) \geq 0$ (6.28). В результаті отримуємо «зменшену» систему нерівностей $F_{\kappa t}^0(u, u_\Omega^{\kappa t}) \geq 0$, яка задає підобласть $W_{\kappa t}^0$. Тоді обчислення точки локального мінімуму $(u^{*(t+1)}, u_\Omega^{*(t+1)})$ завдання (6.27) може бути представлено як результат розв'язання послідовності задач

$$H(u_\Omega^{\Delta\kappa(t+1)}) = \min_{X \in W_{\kappa t}^0 \subset R^m} H(u_\Omega),\ t = 0,1,...,$$

де як початкова точка для t-ої задачі береться точка локального мінімуму $(u^{*\kappa(t+1)}, u_\Omega^{*\kappa(t+1)})$ з $(t-1)$ задачі, а точка $(u^{*\kappa}, u_\Omega^{*\kappa})$ береться в якості початкової точки для $t = 0$.

Процес завершується, якщо $H(u_{\Omega}^{*\kappa(t+1)}) = H(u_{\Omega}^{*\kappa t})$. Точка $(u^{*\kappa}, u_{\Omega}^{*\kappa}) = (u^{*\kappa t}, u_{\Omega}^{*\kappa t})$ береться в якості точки локального мінімуму задачі (6.26).

На рис. 6.12 наведено приклад пошуку локального мінімуму задачі (4.21)-(4.22).

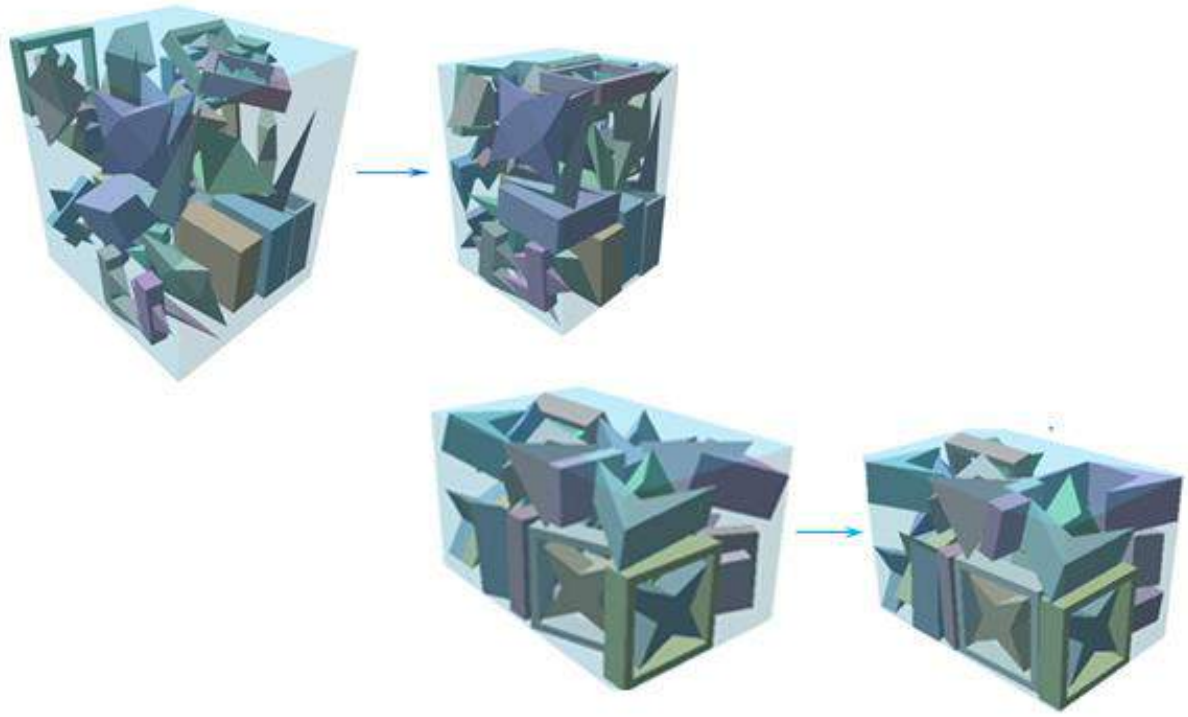


Рис.6.12. Приклад пошуку локального мінімуму задачі упаковки неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл

Для описаного обчислювального процесу можемо зробити такі висновки. Чим менше δ, тим швидшим є обчислення точки локального мінімуму задачі з послідовності (6.26) і більшим число ітерацій, які необхідно здійснити для обчислення точки локальної мінімуму задачі (4.21)–(4.22). Чим більше δ, тим більшими є витрати часу, які потрібні для розв’язання однієї задачі з послідовності (6.26). Отже, необхідний компроміс щодо вибору значення δ, яке гарантуватиме гарний ступінь збіжності до точки локального мінімуму задачі (4.21)–(4.22). Значення δ визначається експериментальним шляхом.

6.3 Методи глобальної оптимізації

Однією з важливих властивостей задач упаковки є їх *NP*-складність. Через це здійснити повний перебір локальних екстремумів не можливо. Тому для пошуку розв'язку таких задач в основному використовується стохастичний пошук, який не гарантує знаходження оптимального розв'язку.

В роботі запропоновано методи глобальної оптимізації, які дозволяють знаходити наближення до глобальних екстремумів, використовуючи такі методи:

1) послідовної статистичної оптимізації за допомогою методу околів, що звужуються;

2) побудови перспективних розміщень та організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі.

Розглянемо реалізацію цих методів більш детально.

6.3.1 Метод околів, що звужуються

6.3.1.1 Опис модифікації методу

У випадку, коли для задачі виду (4.1)-(4.2) існує можливість встановити відповідність між перестановками тіл, що розміщуються, і локальними екстремумами для пошуку наближення до глобального екстремуму задачі може бути застосований метод околів, що звужуються. Цей метод є спрямованим випадковим перебором та орієнтований на оптимізацію функцій, які задано на множині переставлень. Метод околів, що звужуються, заснований на властивостях ймовірнісного розподілу локальних екстремумів функції цілі. Для його реалізації необхідно ввести метрику на просторі перестановок. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на множині перестановок. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи методу інформації, обираються центри й радіуси нових околів. Якщо при переході до чергового кроку методу значення функції

цілі не поліпшується, то радіус околів зменшується. В роботі була розроблена модифікація методу.

Кожному тривимірному тілу $O_i(u_i)$, $i \in I_n$, поставимо у відповідність вектор $\kappa_i = (\kappa_{i1}, \kappa_{i2}, ..., \kappa_{ij}, ..., \kappa_{im}) \in R^m$, $i \in I_n$. Ці вектори описують метричні характеристики тривимірного тіла та умови їх розміщення, які задаються у вигляді мінімально припустимих відстаней. Тоді кожній випадковій послідовності $P^j = (p_1^j, p_2^j, ..., p_n^j)$, можна поставити у взаємнооднозначну відповідність вектор $\mathrm{K}^j = (\kappa_1^j, \kappa_2^j, ..., \kappa_n^j) \in R^{nm}$. Як відомо, кількість векторів K^j дорівнює $n!$.

Таким чином, різним послідовностям P^j тривимірних тіл відповідають різні послідовності тривимірних тіл, що розміщаються. Множина усіляких векторів P^j являє собою комбінаторну множину $V \subset R^n$ перестановок елементів p_i^j. Для реалізації методу околів, що звужуються, зроблена оцінка діаметра множини V, а також визначена мінімальна відстань між двома різними точками v^j та v^i $d(v^j, v^i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}(\kappa_{kl}^j - \kappa_{kl}^i)^2\right)}$.

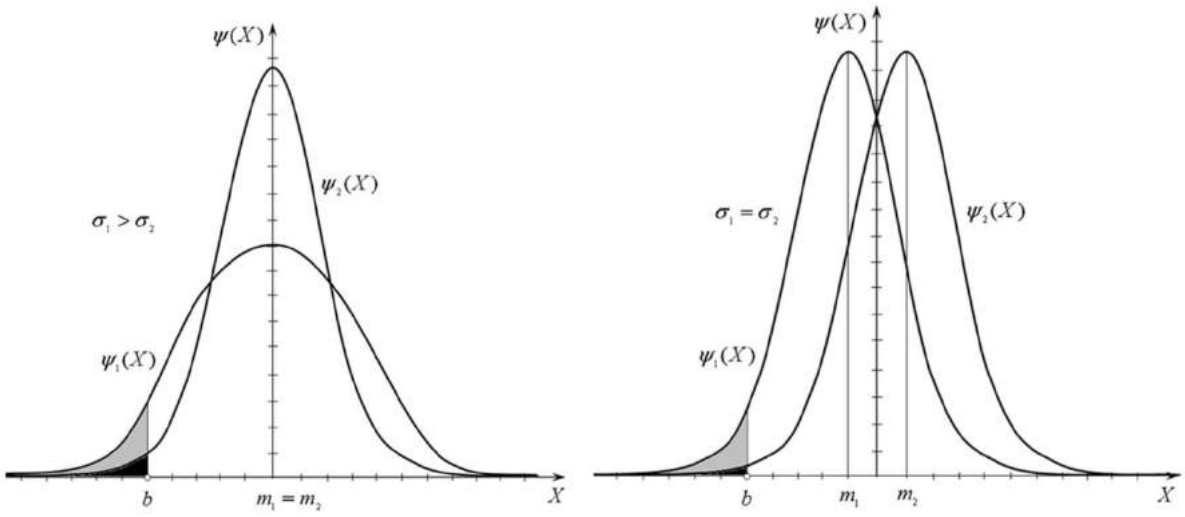
Множина V складається з вершин опуклого багатогранного тіла, вписаного в гіперсферу. Відстань між будь-якими двома точками множини V не перевищує діаметра гіперсфери, на якій лежать точки множини V.

Вибір перспективних перестановок (центрів нових околів) ґрунтується на ймовірності одержання менших значень функції цілі. Для обчислення ймовірності одержання кращого значення функції цілі необхідно задатися гіпотезою про характер розподілу значень функції цілі в локальних мінімумах. Припустимо, що кожний локальний екстремум є випадковою величиною й залежить від перестановки розташовуваних тривимірних тіл. Гістограми значень функції цілі, отримані в результаті чисельних експериментів, у яких генерувалися випадкові послідовності тривимірних тіл і їхніх лінійних розмірів, показали, що розподіл значень функції цілі близький до

нормального.

Очевидно, що перспективність перестановки залежить від вибіркової середньої й від вибіркової дисперсії значень функції цілі в околі розглянутого радіуса. При переході від “сліпого” випадкового перебору перестановок до формування випадкових перестановок в околах розглянутих центрів, отриманих спеціальним чином, відбувається зменшення математичного очікування.

Розглянемо на прикладі, як даний факт впливає на ймовірність одержання менших значень функції цілі для випадку нормального розподілу значень функції цілі. Нехай b – найменше отримане значення функції цілі та в околах двох різних центрів отримано математичні очікування m_1, m_2 і дисперсії σ_1, σ_2 відповідно. Тоді при однаковому математичному очікуванні для різних двох центрів околів ймовірність одержання значення функції цілі менш ніж b буде для центру з більшою дисперсією. При різних математичних очікуваннях і рівній дисперсії ймовірність одержання значення функції цілі менш, ніж b буде для центру з меншим математичним очікуванням (рис.6.12).



а б

Рис.6.12. Диференційні закони $\psi(X)$ випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом

Описані властивості дозволяють побудувати збіжний алгоритм, що

здійснює поступове спрямоване зрушення математичного очікування функції цілі у бік її глобального екстремуму.

6.3.1.2 Особливості реалізації методу для задачі упаковки паралелепіпедів, які дозволяють ортогональні повороти

Для реалізації методу скористаємося тим, що кожному n-паралелепіпеду P_i, $i \in J_N$, поставимо у відповідність вектор його лінійних розмірів $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, а перестановки a_{it} відповідають всіляким поворотам n-паралелепіпеда P_i на кут $\pi / 2$. Тоді для кожної послідовності розміщуються n-паралелепіпедів відповідає вектор $p^j = (p_1^j, p_2^j, ..., p_N^j) \in R^{Nn}$, де $p_i^j = a_{it}^j$, $i \in J_N$, $t \in J_M$. Кількість векторів p^j збігається з числом різних послідовностей n-паралелепіпедів і з урахуванням кількості перестановок a_{it}^j дорівнює $N! \cdot n!$.

Різні перестановки n-паралелепіпедів визначаються різними реалізаціями векторів p^j. Множина всіляких векторів p^j є комбінаторною множиною $\Pi \subset R^m$, $m = Nn$, перестановок елементів p_i^j, кожен з яких містить набір упорядкованих лінійних розмірів n-паралелепіпедів. Елементи множини Π відрізняються один від одного порядком елементів p_i^j і порядком елементів $a_{ik_{i1}}^j, a_{ik_{i2}}^j, ..., a_{ik_{in}}^j$ в наборі $a_{it}^j = p_i^j$, $i \in J_N$, $t \in J_M$. Множина Π є комбінаторною множиною композиції перестановок PW_m, яка введене та досліджена у [249].

Відстань між двома точками p^j і p^i множини Π визначимо наступним чином:

$$d(p^j, p^i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(c_k^s \sum_{l=1}^{n} (a_{kl}^j - a_{kl}^i)^2 \right)},$$

де $c_k^s = \left(\frac{n+1-k}{n} \right)^s$ - ваговий коефіцієнт елементів послідовності, який надає найбільшу вагу першим елементам послідовності, s - ступінь посилення вагового коефіцієнта, $s \in \{1,2,3\}$.

Множина Π складається з вершин опуклого багатогранного тіла, вписаного в гіперсферу, тобто множина Π міститься в деякій гіперсфері [249]. Відстань між будь-якими двома точками множини Π не перевищує діаметра гіперсфери, на якій лежать точки безлічі Π. В [249] виконано відображення безлічі PW_m в евклідів простір і визначено його діаметр. Це дає можливість використовувати досліджені властивості композиції перестановок у методі околів, що звужуються.

Для того щоб здійснити "спрямований" перебір локальних екстремумів на множині Π, використовується модифікація методу околів, що звужуються. Опишемо коротко її схему.

1. Етап налаштування.

1.1. Проводиться випадкова генерація перестановок, відповідно до яких визначаються локальні мінімуми задачі (4.23) - (4.24).

1.2. З множини згенерованих перестановок обираються 10 перестановок, які відповідають локальним екстремумам з найменшими отриманими значеннями функції цілі.

1.3. Досліджується "поведінка" значень функції цілі "поблизу" обраних послідовностей. Для цього в околицях с центрами в обраних 10 точках множини Π генеруються рівномірно розподілені випадкові вибірки перестановок з Π. При цьому, радіус околів приймається рівним чверті діаметра множини Π.

1.4. Відповідно зі згенерованими перестановками в околах обраних центрів визначаються локальні екстремуми задачі (4.23) - (4.24).

1.5. Обчислюються математичне очікування і середньоквадратичне відхилення значень функції цілі на множині локальних екстремумів, відповідно згенерованим вибіркам в околах обраних центрів.

1.6. Вибираються "перспективні" перестановки (центри околів для наступного ітераційного етапу). Вибір центрів ґрунтується на ймовірності отримання менших значень функції цілі.

2. Ітераційний етап.

2.1. Проводиться генерація випадкових вибірок перестановок в околах поточних центрів.

2.2. Відповідно зі згенерованими перестановками в околах поточних центрів визначаються локальні мінімуми задачі (4.23) - (4.24).

2.3. Обчислюються математичне очікування і середньоквадратичне відхилення значень функції цілі на множинах локальних екстремумів, відповідних згенерованим вибірках в околах поточних центрів.

2.4. Обираються центри нових трьох околів для наступної ітерації (вибір нових центрів ґрунтується на ймовірності отримання менших значень функції цілі).

2.5. Обчислюється радіус нових околів для наступної ітерації. У разі, якщо на поточній ітерації було отримано покращення значення функції цілі, то радіус околів збільшується, інакше - зменшується.

2.6. Перевіряються умови зупинки МСО. Якщо кількість локальних мінімумів з однаковими значеннями функції цілі перевищує 60%, то пошук припиняється, інакше здійснюється перехід до наступної ітерації (слід зазначити, що якщо радіус околів наближається до мінімального значення, то кількість однакових локальних мінімумів або локальних мінімумів з рівними значеннями функції цілі значно збільшується).

6.3.1.3 Особливості реалізації методу для задачі упаковки гомотетичних циліндрів

Розглянемо детально модифікацію методу околів, що звужуються, для

задачі упаковки гомотетичних циліндрів.

Виходячи з особливостей задачі, для її успішного розв'язання необхідно виконати наступні кроки.

Крок 1. Визначити n_0 так, щоб гарантувалось розміщення n_0 циліндрів в P. Надалі встановлюємо $n = n_0 + 1$ та переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Взявши $r_i = \frac{1}{2}r$, генеруємо за допомогою методу околів, що звужуються, вектори $u_i^{nl} \in P$, $i \in I_n$, $l \in I_\lambda = (1, 2, ..., \lambda)$, так щоб $X^{nl} = (u_1^{nl}, u_2^{nl}, ..., u_n^{nl}, \underbrace{\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, ..., \frac{1}{2}r}_{n}) \in W_n$.

Крок 3. Взявши точки X^{nl} як початкові точки, виконуємо пошук локальних максимумів X^{nl*}, $l \in J_\lambda$.

Крок 4. Обираємо кращий локальний максимум $\tilde{X}^{n*} = \arg\max\left\{F_n(X^{nl*}), l \in J_\lambda\right\}$.

Крок 5. Якщо $F_n(\tilde{X}^{n*}) = nr$, то досягнуто глобальний максимум задачі (4.5). В цьому випадку приймаємо $n = n + 1$ і розв'язуємо задачу знову, тобто повертаємося до кроку 2.

Крок 6. Якщо $F_n(\tilde{X}^{n*}) < nr$, але критерій зупинки методу околів не виконується, то повернення до кроку 2.

Крок 7. Якщо критерій зупинки методу околів виконується і $F_n(\tilde{X}^{n*}) < nr$, то приймаємо $u^* = \tilde{u}^{(n-1)*}$ як наближення до глобального максимуму задачі (4.3) - (4.4) і кількість упакованих циліндрів приймаємо $n - 1$.

Реалізація методу околів, що звужуються, для розв'язання задачі виконується наступним чином. Спочатку генерується випадкова вибірка з множини $\Pi \subset R^{2k}$ і обчислюється відповідний набір локальних максимумів. Після цього вибирається початкова точка, в якій значення функції цілі є найкращим. Точка береться в якості центру околу радіусу β (діаметр П), і після

цього генерується випадкова вибірка з обраного околу. Після цього обчислюємо відповідний набір локальних максимумів. Далі обираємо початкову точку, яка відповідає локальному максимуму, в якому цільова функція досягає найбільшого значення. Якщо значення менше попереднього, тоді зменшується радіус околів та генерується нова випадкова вибірка з нових околів. Якщо значення більше попереднього, то початкова точка, яка відповідає отриманому значенню, обирається в якості центру нового околу попереднього радіусу, та генерується випадкова вибірка в новому околі. Обчислювальний процес триває, поки радіус околів не стане менше, ніж задане значення. Локальний максимум, в якому функція цілі досягає максимального значення, приймається як наближення до глобального екстремуму.

Розглянемо більш детально етапи методу.

<u>I. Етап ініціалізації.</u>

На цьому етапі ми шукаємо перспективні центри околів для наступного етапу. Спочатку генерується випадкова вибірка векторів з набору *П*. На підставі згенерованих векторів формуються початкові точки, і обчислюються відповідні локальні максимуми. Вектори, яким відповідають ω кращих локальних максимумів беруться як центри околів. Для того, щоб обрати перспективні вектори з набору Π для подальшого ітеративного процесу генеруються випадкові вибірки в обраних околах. Також обчислюються середнє арифцілічне та середнє квадратичне відхилення вибірок для кожного околу.

Розглянемо покрокову реалізацію даного етапу.

Крок 1. Формуємо випадкову вибірку $\Pi_0 \subset \Pi$, що складається з λ точок, та будуємо множину $\mathrm{T}_0 = \left\{ X^{nj}, j \in J_\lambda = (1,2,...,\lambda) \right\} \subset \mathrm{T}$ з початкових точок та формуємо відповідну множину $L_0 = \left\{ X^{nj*}, j \in J_\lambda \right\} \subset L$ з локальних максимумів. Таким чином, кожному вектору $p^j \in \Pi_0$ ставиться у

відповідність локальний максимум $X^{nj*} \in L_0$.

Крок 2. Обираємо точки $X^{nj_l*} \in L_0$, $l \in I_\omega = \{1,2,...,\omega\}$, такі, що

$$F_n(X^{nj_1*}) > F_n(X^{nj_2*}) > ... > F_n(X^{nj_\omega*}) \geq \max\left\{F_n(X^{n*}) : X^{n*} \in L_0 \setminus \{X^{nj_l*}, l \in I_\omega\}\right\}.$$

Таким чином кожному локальному максимуму X^{nj_l*} ставиться у відповідність точка $p^{j_l} \in \Pi_0$, $l \in I_\omega$.

Обираємо точки $p^{j_l} \in \Pi_0$ як центри околів $N_{0l} \subset \Pi_0$, $l \in I_\omega$, радіуса $\rho^0 < \beta$. Генеруємо випадкові вибірки $S_{0l} \subset N_{0l}$, $l \in I_\omega$, з λ точок. Значення $\rho^0 = 0.25\beta$ дозволяє оцінити "поведінку" функції цілі $F_n(X^n)$ в локальних максимумах X^{nj_l*}, $l \in I_\omega$.

Крок 3. Формуємо множини $\mathrm{T}_{0l} \subset \mathrm{T}$ і $L_{0l} \subset L$, які відповідають $S_{0l} \subset N_{0l}$, $l \in I_\omega$.

Крок 4. Обчислюємо середнє арифцілічне m_{0l} і середньоквадратичне відхилення σ_{0l}, $l \in I_\omega$, значень $F_n(X^n)$ для кожного L_{0l}.

Крок 5. Визначаємо точку $\tilde{p}^0$, яка відповідає локальному максимуму

$$\tilde{X}^{n0*} = \arg\max\left\{F_n(X^{n*}),\ \text{s.t. } X^{n*} \in \bigcup_{l=1}^{\omega} L_{0l}\right\}.$$

<u>II. Поточний етап.</u>

На основі статистичних особливостей випадкових вибірок з попереднього етапу знайдено перспективні центри околів з множини переставлень Π. Вибір нових центрів виконується через припущення про нормальний закон розподілу значень функції цілі в локальних максимумах. Це дозволяє використовувати правило трьох сигм для обрання перспективних центрів. Якщо після виконання декількох ітерацій значення функції цілі не збільшується, то радіуси околів швидко зменшуються.

Ітеративний процес починається з $k = 1$.

Припустимо, що (k - 1) ітерацій було виконано. В результаті сформовано

множину $L_{(k-1)i}$, обчислено математичні очікування $m_{(k-1)i}$ та середньоквадратичні відхилення $\sigma_{(k-1)i}$, $i=1,2,3$, та визначена точка $\tilde{p}^{k-1}$, яка відповідає локальному максимуму $\tilde{X}^{n(k-1)*} = \arg\max\left\{F_n(X^{n*}),\ \text{s.t. } X^{n*} \in \bigcup_{i=1}^{3} L_{(k-1)i}\right\}$.

Крок 1. Обираємо центри c^{ki} околів N_{ki}, $i=1,2,3$:

- $$c^{k1} = \begin{cases} \tilde{p}^{k-1}, \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \\ \tilde{p}^{k-2}, \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) \le F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$$

  якщо $k=1$, тоді $c^{k1} = \tilde{p}^0$;

- $$c^{k2} = \begin{cases} c^{(k-1)1}, \text{ якщо } c^{k1} = \tilde{p}^{k-1} \text{ and } \tilde{X}^{n(k-1)*} \in L_{(k-1)1}, \\ c^{(k-1)2}, \text{ якщо або } c^{k1} = \tilde{p}^{k-1} \text{ та } \tilde{X}^{n(k-1)*} \in L_{(k-2)2}, \text{ або } c^{k1} = \tilde{p}^{k-2}, \\ c^{(k-1)3}, \text{ якщо } c^{k1} = \tilde{p}^{k-1} \text{ та } \tilde{X}^{n(k-1)*} \in L_{(k-1)3}, \end{cases}$$

  якщо $k=1$, тоді $c^{k2} = p^{j_l}$, де p^{j_l} центр N_{0l} в котрому $\tilde{p}^0$ одержаний;

- $c^{k3} = c^{(k-1)i}$, де $c^{(k-1)i}$ центр $N_{(k-1)i}$, в котрому отримано

  $\max\{m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i}, i=1,2,3\}$, $0 < \theta \le 3$ (якщо $k=1$, тоді $i=1,2,...,\omega$).

Крок 2. Визначаємо радіуси ρ_{ki} околів N_{ki}, $i=1,2,3$:

$$\rho_{ki} = \begin{cases} \mu\rho_{(k-1)i}\ , \text{ якщо } m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i} \le f^*_{k-1}, \\ \dfrac{1}{\mu}\rho_{(k-1)i} \le \rho_k, \text{ якщо } m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i} > f^*_{k-1}, \end{cases}$$

де

$$f^*_{k-1} = \begin{cases} F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}), \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \\ F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) \le F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \mu_1\rho_{k-1}, \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) \le F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}) \text{ та } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) \le F_n(\tilde{X}^{n(k-3)*}), \\ \dfrac{1}{\mu_1}\ \rho_{k-1}\ \le \beta, \text{ якщо } F_n(\tilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\tilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$$

$\mu = 0.8$ - коефіцієнт, який зменшує або збільшує радіуси околів на кожній ітерації, $\mu_1 = 0.6$ - коефіцієнт, який гарантує швидке зменшення радіусів околів в разі відсутності поліпшення $\tilde{X}^{nk*}$ (якщо $k = 1$, то $\rho_k = \rho_{k1} = \rho_{k2} = \rho_{k3} = \beta$).

Крок 3. Генеруємо випадкові вибірки $S_{ki} \subset N_{ki}$, будуємо множини $\mathrm{T}_{ki} \subset \mathrm{T}$ і $L_{ki} \subset L$, обчислюємо m_{ki}, σ_{ki}, $i = 1,2,3$, та визначаємо точку $\tilde{p}^k$.

Крок 4. Перевіряємо умови зупинки процесу. Якщо число ідентичних значень $F_n(X^n)$ на кожному з L_{ki}, $i = 1,2,3$, більше, ніж 0.6λ, то процес пошуку розв'язку завершується. Потрібно відзначити, що, якщо значення радіуса околів близький до мінімально допустимого ($\sqrt{2}r$), то число ідентичних локальних максимумів значно збільшується.

Крок 5. Встановлюємо $k \leftarrow k + 1$.

Вхідний параметр λ повинен бути обраний ретельно, бо надмірно велике значення λ призводить до великих обчислювальних витрат. З іншого боку, занадто маленьке λ призводить до погіршення розв'язку задачі. Зі статистичних експериментів випливає, що значення λ має бути більше або рівним 50 для того, щоб забезпечити достовірність значень m_{ki} і σ_{ki}.

6.3.2 Метод побудови перспективних розміщень і організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі

6.3.2.1 Реалізація методу для різних тривимірних тіл

Ключова ідея методу полягає у здійсненні багаторазових переходів від одного локального екстремуму до іншого, в якому значення функції цілі задачі буде покращено. З метою здійснення таких переходів виконується пошук нових "перспективних" початкових точок, завдяки розв'язанню серії допоміжних задач гомотетичних перетворень тривимірних тіл.

Для цього у точці поточного локального екстремуму, визначаються дві

групи тривимірних тіл:

1) тіла, "навколо" яких існує вільний простір, а значить на їх місце можна встановити тіла, що мають більший об’єм;

2) тіла, навколо яких утворилося дуже щільне заповнення області розміщення, що не дозволяє покращити функцію цілі.

Завдяки організації перестановки таких тривимірних тіл можна здійснити перехід до нового локального екстремуму. Для визначення таких тривимірних тіл будемо вважати, що тіла O_i допускають гомотетичні перетворення з коефіцієнтами гомотетії g_i, $i \in I_n$.

Обчислимо об’єми V_i тривимірних тіл $O_i(u_i), i \in I_n$, і сформулюємо наступну допоміжну задачу:

$$F\left(u_\Omega^*\right) = \min F\left(u_\Omega\right),\ X \in W \subset R^{7n+6}, \tag{6.29}$$

де

$$W = \left\{ X \in R^{7n+6} : \Phi_{ij}^{'}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}, \mathrm{g}_i, g_j\right) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i\left(u_i, u_\Omega, \mathrm{g}_i\right) \geq 0, \right.$$
$$\left. g_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} V_i g_i^3 - \sum_{i=1}^{n} V_i \geq 0,\ i \in I \right\}. \tag{6.30}$$

Нехай точка X^*- точка локального мінімуму задачі (4.1)-(4.2). Встановимо $g_i = 1, i \in I_n$, обчислимо вектор Z найшвидшого спуску в точці X^* для задачі (6.29)- (6.30) та побудуємо точку

$$X^k = X^* + 0.5^k Z^0, k \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Припустимо, що в точці X^k виконуються такі умови: $V_i(\mathrm{g}_i) > V_i(1),\ i \in J_1 \subset I$, та $V_i(\mathrm{g}_i) < V_i(1),\ i \in J_2 \subset I$. Це означає, що навколо тривимірних тіл O_i, $i \in J_1$, існує запас вільного простору. З іншого боку, якщо

$i \in J_2$, то розміри відповідних тривимірних тіл зменшуються, і навколо них немає запасу вільного простору.

Якщо $Z_0 \neq 0$, то існує окіл N точки X^*, в точках якого $F\left(u_\Omega\right) < F\left(u_\Omega^*\right)$ для будь-якого k, і в загальному випадку $X^k \subset W$. Це дозволяє нам визначити таке m, що якщо $k \geq m$, то $X^k \subset W$.

Покладемо $k = m$ та побудуємо точку X^{m0}, де $g_i^{m0} = 1$, якщо $i \in I \setminus J_2$ і $g_i^{m0} < 1$, якщо $i \in J_2$. Звідси слідує, що $\sum_{i=1}^{n} V_i g_i^3 - \sum_{i=1}^{n} V_i < 0$, якщо $J_2 \neq \varnothing$ При цьому $F\left(u_\Omega^m\right) < F\left(u_\Omega^*\right)$.

Оскільки в точці X^{m0} вектор $g^{m0} \neq 1$, то точка X^{m0} не може бути взята як початкова для розв'язання основної задачі виду (4.1) - (4.2). З метою знаходження такої початкової точки необхідно знайти глобальний максимум наступної допоміжної задачі:

$$H\left(g^*\right) = \max H\left(g\right) = \sum_{i=1}^{n} g_i, \; X \in W \subset R^{7n} \tag{6.31}$$

де

$$\begin{gathered} W = \{\mathrm{X} \in R^{7n} : \Phi_{ij}^{'}\left(u_i, u_j, u_{p_{ij}}, \mathrm{g}_i, g_j\right) \geq 0, \, i < j \in I, \, \Phi_i\left(u_i, u_\Omega, \mathrm{g}_i\right) \geq 0, \\ l_1 \geq i \in I, 1 - g_i \geq 0, \, g_i \geq 0, \, i \in I\}. \end{gathered} \tag{6.32}$$

Якщо в точці глобального максимуму $H\left(g^*\right) = n$, то тіла досягають своїх заданих розмірів і розміщуються в області $\Omega(u_\Omega^*)$.

Для розв'язання задачі (6.31)-(6.32) будується серія початкових точок, які назвемо "перспективними" через те, що вони дозволяють перейти до нового локального екстремуму основної задачі. Для цього на підставі отриманої точки X^{m0} спеціальним чином виконується ряд перестановок тривимірних тіл

$O_i\left(u_i^m\right), i \in J_1$, з тілами $O_i\left(u_i^m\right), i \in J_2$. Такі перестановки дозволяють побудувати точки X^{*p}, $p \in P$, які не потрапляють в "зону тяжіння" локального мінімуму X^* основної задачі виду (4.1)- (4.2).

Якщо в результаті розв'язання ряду задач виду (6.31)-(6.32) буде отримана хоча б одна точка X^{*p}, в якій всі $g_i = 1$, $i \in I_n$, то така точка приймається як початкова точка для пошуку нового локального мінімуму основної задачі виду (4.1)-(4.2). В іншому випадку останній знайдений локальний мінімум приймається як наближення до розв’язку задачі.

На рис.6.13 наведено приклад переходів до кращих локальних мінімумів задачі упаковки тривимірних тіл, поверхня яких сформована конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами.

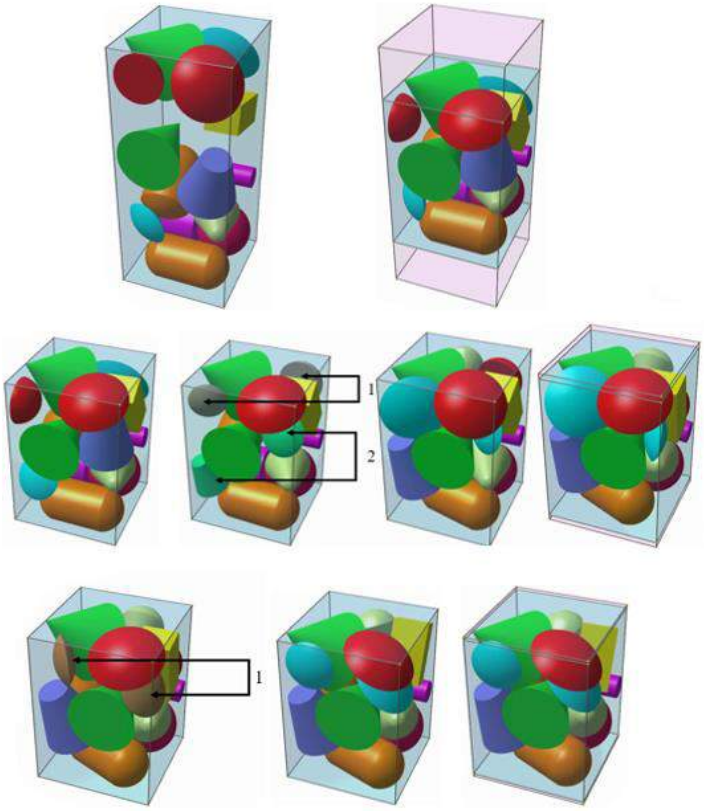


Рис.6.13. Приклад переходів до кращих локальних мінімумів

6.3.2.2 Реалізація методу для гомотетичних тривимірних тіл

Розглянемо реалізацію методу на прикладі задачі упаковки неорієнтованих опуклих гомотетичних багатогранних тіл, математична модель якої представлена в розділі 4.

Нехай $(u^{0*}, u_{\Omega}^{0*})$ буде точкою локальною мінімуму задачі (4.19)–(4.20), якій відповідає деяка упаковка гомотетичних багатогранних тіл $P_i(u^{0*}),\ i \in I$. Може бути виявлено, що навколо деякого багатогранного тіла P_i є «вільний простір», який дозволяє розмістити більший багатогранник $P_j \subset P_i$ замість багатогранного тіла P_i. Якщо можна виявити такі багатогранні тіла, то це дозволить переставляти багатогранні тіла без перетинання у розміщенні, що відповідає $P_i(u^{0*}),\ i \in I,$ так, щоб значення функції цілі не погіршилось. Нехай новому розміщенню багатогранних тіл відповідає точка $(u^0, u_{\Omega}^0) \in W$. Якщо обрати точку $(u^0, u_{\Omega}^0) \in W$ як початкову для задачі (4.19)–(4.20), то при обчисленні нової точки локального мінімуму $(u^{1*}, u_{\Omega}^{1*})$, отримаємо $H(u_{\Omega}^{1*}) \le H(u_{\Omega}^{0*})$.

Щоб виконати описаний підхід, припускаємо, що коефіцієнти гомотетії $g_i,\ i \in I,$ є змінними й формують вектор $g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in R^n,$ тобто вектор усіх змінних $X = (u, u_{\Omega}) \in R^{7n+6}$. Отже, Ф-функція для $P_i(u_i, h_i)$ та $P_j(u_j, h_j)$ залежить від h_i і h_j також, тобто вони набувають вигляду $\Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j),$ та Ф-функція для $P_i(u_i, h_i)$ й $A(\Upsilon)$ залежить від $h_i,$ тобто має форму $\Phi_i(u_i, h_i, \Upsilon)$. В такий спосіб ми можемо збільшувати й зменшувати розміри багатогранних тіл, змінюючи значення їх коефіцієнтів гомотетії $h_i,\ i \in I$. Оскільки для будь-якого $h_i \in (0, \infty)$ багатогранні тіла $P_i(u_i, h_i),\ i \in I,$ є гомотетичними, то Ф-функції $\Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j)$ для $P_i(u_i, h_i)$ і $P_j(u_j, h_j)$ й $\Phi_i((u_i, h_i, \Upsilon)$ для $P_i(u_i, h_i)$ й $A(\Upsilon)$ мають ту ж саму форму для будь-якого $h_i \in (0, \infty)$.

Сформулюємо таку допоміжну задачу:

$$H(u_{\Omega}^{*}) = \min_{X \in W \subset R^{7n+6}} H(u_{\Omega}) \ , \tag{6.33}$$

де

$$\begin{gathered} W = \{X \in R^{7n+6} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, u_{\Omega}) \geq 0, \\ g_i \geq 0, i \in I, \sum_{i=1}^{n} (g_i - g_{i1}^{\nabla}) \geq 0, \ w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, \\ w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0, H(u_{\Omega}^{0*}) - H(u_{\Omega}) \leq \varepsilon\}, \\ \varepsilon = (\frac{1}{2})^t 0.1 H(u_{\Omega}^{0*}), t = 0.1.2..... \end{gathered} \tag{6.34}$$

Сформуємо початкову точку X^{0*}, де $g_i = g_i^{\nabla}, i \in I,$ та обчислимо точку локального мінімуму X^{1*} задачі (6.33)-(6.34). Оскільки обмеження $g_i - g_i^{\nabla} \geq 0,$ $i \in I,$ відсутні, то значення деяких $g_i^{1*},$ $i \in I,$ можуть стати як менше 1, так і більше 1. Нехай $g_i^{1*} > g_i^{\nabla},$ $i \in k_1 = \{1, 2, ..., p\} \subset I,$ й $g_i^{1*} \leq g_i^{\nabla},$ $i \in k_2 = \{1, 2, ...q\} \subset I$. Крім того, чим більше $\varepsilon,$ тим більша кількість коефіцієнтів гомотетії $g_i,$ $i \in I,$ суттєво змінює своє значення (на це впливає нерівність $H(u_{\Omega}^{0*}) - H(u_{\Omega}) \leq \varepsilon$). Таким чином, деякі багатогранні тіла «збільшуються», тобто існує вільний простір навколо багатогранних тіл, а деякі багатогранні тіла «зменшуються», тобто виникає нестача вільного простору навколо багатогранних тіл. Отже, вектор $g^{1*} = (g_1^{1*}, g_2^{1*}, ..., g_2^{1*})$ може бути використаний для вказання того, що можна змінити так, щоб значення $H(u_{\Omega})$ не погіршилось.

Сформуємо таку послідовність:

$$g_{i_1}^{1*} \geq g_{i_2}^{1*} \geq .... \geq g_{in}^{1*} \ . \tag{6.35}$$

Якщо $i_j = i,\ i \in I,$ для всіх індексів, тоді точка (u^{0*}, u_Ω^{0*}) приймається як наближення до точки глобального мінімуму задачі (4.19)–(4.20). Якщо $i_j \neq i,$ принаймні, для двох індексів, тоді, взявши $g_j^{1*} = g_{i_j}^{1*},\quad j \in I,$ одержуємо послідовність

$$g_1^{1*} \geq g_2^{1*} \geq .... \geq g_n^{1*}.$$

Оскільки може бути, що $g_i^{1*} > g_i^{\nabla}$, для деяких $i \in I$, то обчислюємо $g_j^0 = \min\{g_j^{1*}, g_j^{\nabla}\},\quad j \in I.$ Це забезпечує нерівність $\sum_{i=1}^{n} g_i^0 < n.$ Тепер будуємо точки $\tilde{X},$ де $\tilde{u}_j = u_j^{1*},\quad \tilde{g}_j = g_j^{1*},\quad j \in I,$ і $\tilde{\tilde{X}}$, де $\tilde{\tilde{u}}_j = u_j^{1*}, \tilde{\tilde{g}} = g_j^0,\quad j \in I$. Відзначимо, що якщо $X^{1*} \neq \tilde{X}$, тоді розміщення, яке відповідає точці $\tilde{X}$, отримується від розміщення, що відповідає точці X^{1*} в результаті «перестановок» деяких багатогранних тіл місцями.

Якщо $X^{1*} \neq \tilde{X}$, тоді $\sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i < n,$ тобто деякі багатогранні тіла $P_i,\ i \in I,$ зменшені (стиснуті). Таким чином, необхідно збільшити розміри багатогранних тіл до їх початкових розмірів при $u_\Omega = u_\Omega^{1*}.$ Із цією метою розв'язуємо допоміжну задачу

$$\Pi(g^*) = \max \Pi(g) = \max_{X \in D \subset R^{7n}} \sum_{i=1}^{n} g_i \quad , \tag{6.36}$$

де

$$D = \{X \in R^{7n},\ \Phi_{ij}(u_i, u_j,) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i) \geq 0, \tag{6.37}$$

$$g_i^{\nabla} - g_i \geq 0, g_i \geq 0, i \in I\}.$$

Слід звернути увагу на те, що задача (6.36)-(6.37) дозволяє збільшити коефіцієнти гомотетії до їх початкових значень. Вочевидь, що $\tilde{\tilde{X}} \in D$.

Взявши початкову точку $\tilde{\tilde{X}}$ та розв'язуючи задачу (6.36)-(6.37), знаходимо локальну точку максимуму $\hat{X}$.

Задача має такі властивості:

1. Якщо $\Pi(\hat{g}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_i = \sum_{i=1}^{n} g_i^{\nabla} = n$, тоді $\hat{g} = g^{\nabla}$ й багатогранні тіла $P_i,\ i \in I,$ упаковані в $\Omega(u_{\Omega}^{1*})$. Це означає, що точка $\hat{X}$ є точкою глобального максимуму задачі (6.36)-(6.37).

2. Якщо принаймні один із $\hat{g}_i,\ i \in I,$ строго менше, ніж g_i^{∇} у точці глобального максимуму $\hat{X}$, то багатогранні тіла $P_i,\ i \in I,$ не можуть бути упакованими в $\Omega(u_{\Omega}^{1*})$.

Таким чином, можливі два випадки $\Pi(\hat{g}) = n$ і $\Pi(\hat{g}) < n.$

Очевидно, що якщо $\Pi(\hat{g}) = n$, то $(\hat{u}, u_{\Omega}^{1*}) \in W$ й $(\hat{u}, u_{\Omega}^{1*})$ в загальному випадку не є точкою локального мінімуму задачі (4.19)-(4.20). Отже, беремо початкову точку $(\hat{u}, u_{\Omega}^{1*})$, розв'язуємо задачу (4.19)-(4.20). У результаті буде обчислена нова точка локального мінімуму X^{1*}. Після цього знову розв'язуємо задачу (6.33)–(6.34) та будуємо нову послідовність (6.35). Після цього розв'язуємо задачу (6.36)-(6.37) і так далі поки не буде виконано умова $\Pi(\hat{g}) < n$.

Якщо $\Pi(\hat{g}) < n$, тоді збільшуємо t на 1 в (6.34) і для початкової точки X^{0*} розв'язуємо задачу (6.33)–(6.34) і так далі. Ітеративний процес повторюється до виконання умови $\varepsilon \le 10^3 H(u_{\Omega}^{0*})$.

6.4 Висновки за розділом 6

В шостому розділі представлено опис розроблених методів побудови

початкових точок, пошуку локальних екстремумів і наближення до глобального екстремуму задачі.

Для застосування методів локальної оптимізації необхідно побудувати початкові точки, які належать області припустимих розв'язків. Однією з вимог до методів побудови початкових точок для задач упаковки тривимірних тіл є забезпечення генерації різноманіття точок (це забезпечить знаходження різних локальних екстремумів) та зменшення обчислювальних витрат з метою їх швидкої побудови. В роботі були розроблені такі методи:
для упаковки конгруентних тривимірних тіл - метод регулярних розміщень;
для опуклих тіл, поверхня яких утворена конічними, циліндричними та сферичними поверхнями, – метод гомотетичних перетворень; для неопуклих багатогранних тіл – метод кластеризації.

Аналіз особливостей математичних моделей задач упаковки показав, що область припустимих розв'язків описується дуже великою кількістю нелінійних нерівностей. Цей факт потребує розробки методів, які дозолять ефективно розв'язати проблему великої розмірності задачі. Основна ідея запропонованих методів локальної оптимізації ґрунтується на декомпозиції основної задачі на підзадачі зі значно меншою кількістю обмежень та меншої розмірності. Для цього виконуються такі етапи: послідовна генерація підобластей області припустимих розв'язків, які містять початкову точку; визначення підсистеми ε – активних обмежень; пошук за допомогою сучасних НЛП солверів другого порядку (метод внутрішньої точки) локальних екстремумів на обраних підобластях; організація переходу до інших підобластей.

Однією з важливих властивостей задач упаковки є їх *NP*-складність. Через це здійснити повний перебір локальних екстремумів не можливо. Тому для пошуку розв'язку таких задач в основному використовується стохастичний пошук, який не гарантує знаходження оптимального розв'язку.

В роботі запропоновано методи глобальної оптимізації, які дозволяють знаходити наближення до глобальних екстремумів за рахунок: організації

направленого випадкового перебору локальних екстремумів; організації переходів до локальних екстремумів з кращими значеннями функції цілі, використовуючи гомотетичні перетворення тривимірних тіл.

Представлені результати опубліковано в роботах [4,5,8,10,12,18,21,23,24,25,26,31,32, 62-64].

РОЗДІЛ 7
ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

7.1. Програмна реалізація розроблених методів

7.1.1 Опис загальних характеристик розробленого програмного забезпечення та умов проведення чисельних експериментів

З метою автоматизації розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл було розроблено декілька видів програмного забезпечення, що реалізують розроблені засоби моделювання, методи та алгоритми. На деякі види програмного забезпечення було оформлено свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, представлені в додатку Б.

Програмне забезпечення розроблено з використанням мови C# та дозволяє об’єднати його в майбутньому у єдину інтелектуальну інформаційну систему упаковки тривимірних тіл.

Програмне забезпечення розроблено за принципом модульності і складається з таких модулів:

- модуль введення початкових даних;
- модуль обчислення Ф-функцій;
- модуль формування підзадач;
- модуль формування похідних та побудови матриць Якобі та Гессе;
- модуль формування початкових точок;
- модуль локальної оптимізації;
- модуль глобальної оптимізації;
- модуль рендерінга.

Модуль оптимізації для розробленого програмного забезпечення використовує сучасний ефективний НЛП солвер у вигляді безкоштовної бібліотеки IPOPT v.3.9.1. (Interior Point OPTimizer) [250].

Слід відзначити, що ефективність бібліотеки IPOPT обумовлена використанням методу внутрішньої точки другого порядку. Бібліотека

демонструє ефективність при розв'язанні задач з погано зумовленими матрицями, які мають блочну структуру і високу ступінь розрідженості.

Для формування підзадачі оптимізації використовувався підхід, запропонований в роботі [230]. Цей підхід використовує подання нерівностей у символьному вигляді. Для формування підзадач використовувався модуль, який для нерівностей, що формують область допустимих розв'язків, формував у символьному вигляді похідні першого та другого порядків.

Модульність програмного забезпечення дозволила виконати декомпозицію алгоритму та застосувати технології паралельних обчислень, які дозволили скоротити час розв'язання задач.

В ході дослідження розроблених математичних моделей та методів був розв'язаний широкий спектр задач пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл. Результати чисельних експериментів, проведених за допомогою розробленого програмного забезпечення, представлено в даному розділі.

Параметри комп'ютера, на якому проводились числові експерименти: процесор Intel Core I5 750 2,5 GHz, 6 Gb оперативної пам'яті.

7.1.2 Застосування технологій паралельних обчислень для розв'язання задач упаковки тривимірних тіл

Розроблені методи локальної оптимізації ґрунтуються на стратегії декомпозиції основної задачі у послідовність підзадач меншої вимірності та зі значно меншою кількістю нерівностей. Слід відзначити, що в залежності від обраної величини параметру декомпозиції така послідовність підзадач може бути досить великою, а витрати машинного часу на генерацію та перехід між під задачами є також суттєвими. Це обумовлено тим, що для того, щоб сформувати кожну підзадачу необхідно виконати підстановку отриманої початкової точку в систему нерівностей, яка описує основну задачу, та виділити із нею нову підсистему нерівностей. Оскільки система нерівностей, що описує область припустимих розв'язків основної задачі, задається досить великою кількістю нерівностей (оцінка числа нерівностей наведена у розділі

4), і кожна з таких нерівностей є нелінійною, то на обчислення таких нерівностей та формування із них нової підсистеми, що буде задавати область припустимих розв’язків основної задачі, витрачається досить багато часу.

Розв’язок описаної проблеми часових витрат прийнято було шукати у застосуванні сучасних технологій паралельних обчислень.

Просте перенесення послідовної програми на систему з багатьма процесорами без її суттєвої переробки, як правило, не призводить до прискорення обчислень. Зусилля, витрачені на цю переробку, в значній мірі залежать від типу задачі.

Для того щоб побудувати ефективний паралельний алгоритм слід провести такі етапи аналізу:

- розбиття задачі на відносно незалежні частини (підзадачі);
- виявлення інформаційних залежностей між під задачами;
- масштабування підзадач;
- балансування навантаження для кожного процесора.

Задача переробки алгоритму обчислень може звестися до розбиття масиву вихідних даних на фрагменти, обробка яких ведеться незалежно на різних процесорах.

Здатність алгоритму до розпаралелювання потенційно пов'язана з однією з двох (або одночасно з обома) внутрішніх властивостей, які характеризують як паралелізм задач і паралелізм даних. Якщо алгоритм грунтується на паралелелізмі задач, то задача розбивається на ряд відносно самостійних підзадач, кожна з яких завантажується в "свій" процесор. Кожна підзадача реалізується незалежно, але використовує спільні дані або обмінюється результатами своєї роботи з іншими підзадачами. Для реалізації такого алгоритму на багатопроцесорній системі необхідно виявляти незалежні підзадачі, які можуть виконуватися паралельно.

При наявності в алгоритмі властивості паралелізму даних, одна операція може виконуватися відразу над всіма елементами масиву даних. В цьому

випадку різні фрагменти масиву можуть оброблятися незалежно на різних процесорах.

Для того, щоб повною мірою використовувати структурні властивості алгоритму, необхідно, перш за все виявити, до якого типу він відноситься.

Аналіз алгоритму формування підзадач при пошуку локального екстремуму показав, що він підтримує як паралелізм задач так і паралелізм даних.

Розглянемо основний принцип розпаралелювання алгоритму на прикладі задачі упаковки неопуклих багатогранних тіл. Можливість розпаралелювання алгоритму ґрунтується на тому, що Ф-функція для двох неопуклих неорієнтованих багатогранних тіл є максимінною функцією.

Алгоритм формування підсистеми, що задає область припустимих розв’язків підзадачі, можна представити у вигляді графа у ярусно-паралельній формі (ЯПФ). Для ЯПФ графа алгоритму важливим є той факт, що операції, яким відповідають вершини одного ярусу, не залежать одна від іншої (не перебувають у відношенні зв'язку), і тому можлива паралельна реалізація алгоритму, в якій вони можуть бути виконані паралельно.

На рис.7.1. наведено ярусно-паралельну форму алгоритму формування підзадачі локальної оптимізації для задачі оптимальної упаковки неопуклих багатогранних тіл.

На представленій ярусно-паралельній формі видно, що алгоритм може бути представлений у вигляді 4 ярусів, на кожному з яких розташовані процедури, які можуть бути виконані паралельно.

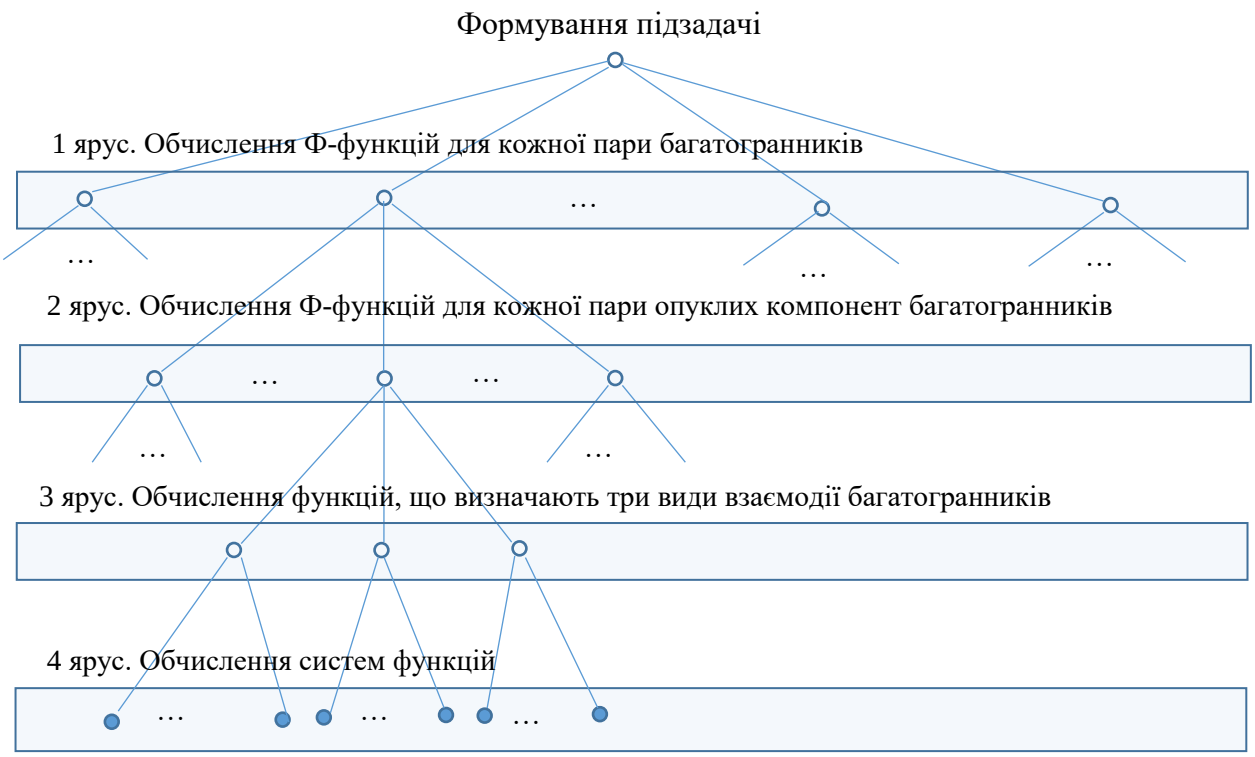


Рис.7.1. Ярусно-паралельна форма алгоритму формування підзадач

На першому ярусі розташовані процедури для обчислення функції $\Psi_2(X) = \min\{\Phi^{P_i P_j}(X), (i,j) \in I_n\}$ (див. підрозділ 4.2) для кожної пари багатогранних тіл P_i та P_j, $(i,j) \in I_n$. Для виконання кожної з процедур першого ярусу на другому ярусі виконується процедура обчислення Ф-функції для опуклих компонент багатогранних тіл P_i та P_j. На третьому ярусі для кожної процедури другого ярусу виконуються три процедури обчислення функцій $\Psi_{ij}(u_i, u_j)$. На четвертому ярусі виконуються процедури обчислення систем функцій.

Задачі перших трьох ярусів підтримують паралелізм даних, оскільки для їх виконання використовуються однакові обчислювальні процедури, але над різними масивами даних.

Задачі четвертого ярусу підтримують паралелізм задач, оскільки задачі цього ярусу реалізуються окремими процедурами.

Для реалізація паралельних обчислень за представленою ЯПФ алгоритму необхідно забезпечити синхронізацію виконання паралельних задач другого та третього ярусів, оскільки результати процедур цих ярусів залежать від результатів, отриманих на третьому та четвертому ярусах відповідно.

Отже для реалізація представленої схеми паралельних обчислень необхідно застосувати сучасні засоби паралельних обчислень, які забезпечать програму механізмами автоматичної генерації паралельних обчислювальних потоків, масштабування задача, синхронізацію потоків.

Оскільки програмне забезпечення створювалось за допомогою середовища .NET Framework, то як засоби паралельних обчислень була обрана бібліотека розпаралелювання задач (TPL). Ця бібліотека дозволяє значно удосконалити багатопоточне програмування за рахунок двох основних способів. По-перше, вона спрощує створення і застосування багатьох потоків. І по-друге, вона дозволяє автоматично використовувати кілька процесорів. Іншими словами, TPL відкриває можливості для автоматичного масштабування додатків з метою ефективного використання ряду доступних процесорів. Завдяки цим двом особливостям бібліотеки TPL вона рекомендується в більшості випадків до застосування для організації багатопотокової обробки, адже вони дають можливість легше використовувати системні ресурси. Застосовуючи TPL, паралелізм в програму можна ввести двома основними способами: за допомогою паралелелізму даних та паралелізму задач. Застосування бібліотеки TPL надає можливість автоматично масштабувати виконання коду на кілька процесорів. Бібліотека TPL дозволяє автоматично розподіляти навантаження додатків між доступними процесорами в динамічному режимі, використовуючи пул потоків CLR. Бібліотека TPL займається розподілом роботи, плануванням потоків, управлінням станом і іншими низькорівневими деталями. В результаті з'являється можливість максимізувати продуктивність додатків .NET.

Результати проведених числових експериментів показали, що використання технологій паралельних обчислень дозволило скоротити час розв'язання задач на 30%.

7.2 Результати розв'язання задачі упаковки максимальної кількості однакових циліндрів у багатозв'язний контейнер

Задано множину конгруентних циліндрів C_i, $i \in I_n$ з радіусом основи $r = 2{,}5$ та контейнер, основа P якого представлена на рис.4.5б. Границя P_0 задається послідовністю наступних лінійних сегментів та дуг кіл: $[x_1, y_1, x_2, y_2]$, $[x_2, y_2, x_3, y_3, \overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{r}_1]$, $[x_3, y_3, x_4, y_4]$, $[x_4, y_4, x_5, y_5]$, $[x_5, y_5, x_6, y_6]$, $[x_6, y_6, x_7, y_7, \overline{x}_2, \overline{y}_2, \overline{r}_2]$, $[x_7, y_7, x_8, y_8, \overline{x}_3, \overline{y}_3, \overline{r}_3]$, $[x_8, y_8, x_9, y_9]$, $[x_9, y_9, x_{10}, y_{10}]$, $[x_{10}, y_{10}, x_1, y_1]$, де $(x_1, y_1) = (10,\ 60)$, $(x_2, y_2) = (17.6,\ 75.19)$, $(x_3, y_3) = (28.15, 77.41)$, $(x_4, y_4) = (30, 70)$, $(x_5, y_5) = (60, 80)$, $(x_6, y_6) = (62.88, 70)$ $(x_7, y_7) = (80.26,\ 39.84)$, $(x_8, y_8) = (62.34,\ 30.95)$, $(x_9, y_9) = (45,\ 35)$, $(x_{10}, y_{10}) = (28,\ 25)$, $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (20,\ 90)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (63,\ 50)$, $(\overline{x}_3, \overline{y}_3) = (75,\ 28)$, $\overline{r}_1 = 15$, $\overline{r}_2 = 20$, $\overline{r}_3 = 13$.

Області заборони на розміщення циліндрів задаються таким чином:

$$A_l = C_{l1} \bigcup \left(\bigcup_{q=1}^{2} M_{lq} \right),\ l \in I_\sigma = \{1, 2, 3\},$$

де

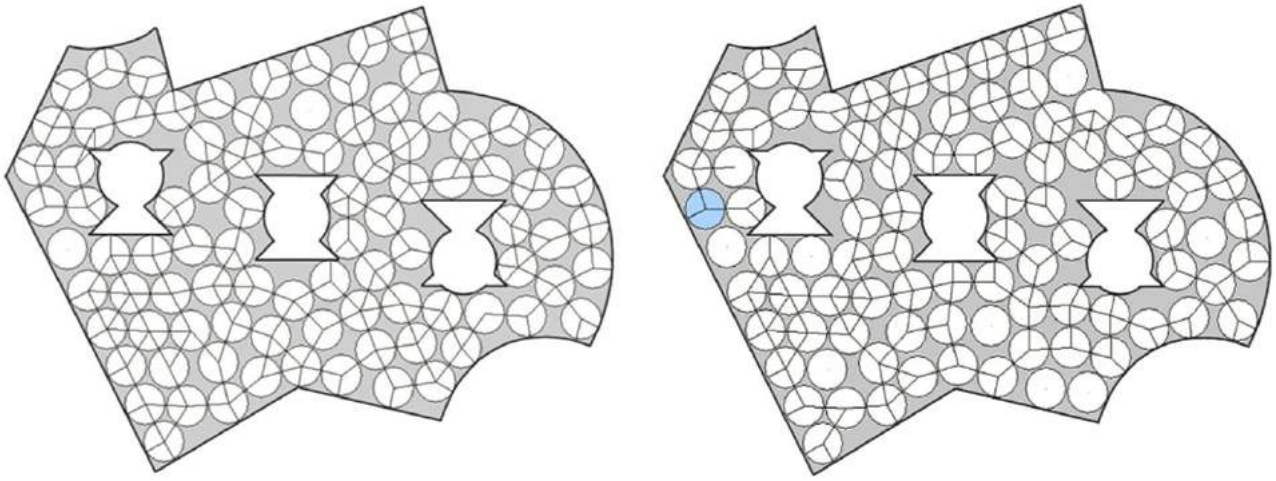
$C_{11} = \{(x, y) \in R^2 : (x - 45)^2 + (y - 55)^2 - 4^2 \le 0\}$,

$C_{12} = \{(x, y) \in R^2 : (x - 25)^2 + (y - 65)^2 - 4^2 \le 0\}$,

$C_{13} = \{(x, y) \in R^2 : (x - 65)^2 + (y - 50)^2 - 4^2 \le 0\}$, M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}, M_{31} и M_{32} трикутники, що задані координатами вершин: $(45,\ 55)$, $(50,\ 50)$ та $(40,\ 50)$; $(45,\ 55)$, $(40,\ 60)$ та $(50,\ 60)$; $(25,\ 58)$, $(30,\ 53)$ та $(20,\ 53)$; $(25,\ 58)$, $(20,\ 63)$ та $(30,\ 63)$; $(65,\ 52)$, $(70,\ 47)$ та $(60,\ 47)$; $(65,\ 52)$, $(60,\ 57)$ та $(70,\ 57)$ відповідно.

На рис.7.2а наведено упаковку 90 циліндрів, яка відповідає наближенню до глобального максимуму задачі (4.3)-(4.4). На рис. 7.2.б наведено упаковку

циліндрів, що відповідає наближенню до глобального максимуму задачі 4.5, у випадку коли $n = 91$ циліндрів. Радіус основи 91-го циліндру дорівнює 2.45, тобто 91 циліндр радіусу 2.5 не може бути упакований у P.

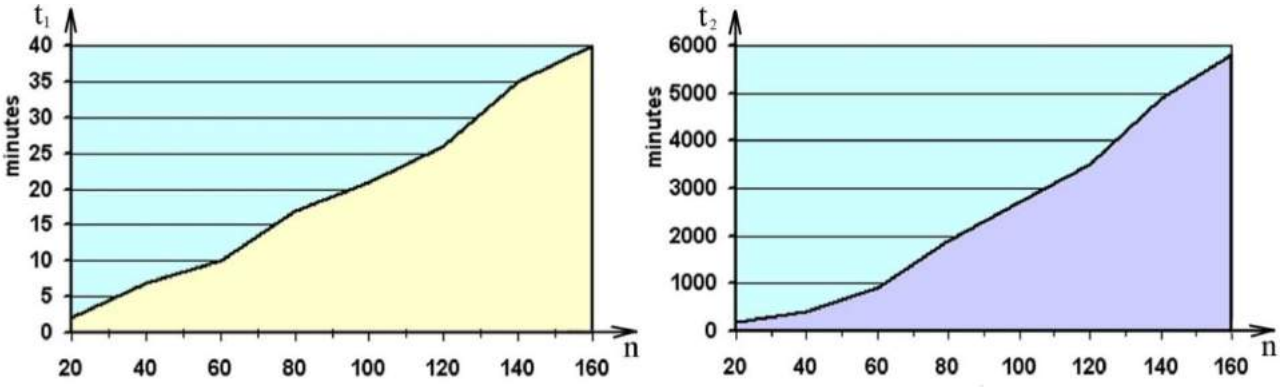


а б

Рис. 7.2. Результат упаковки конгруентних циліндрів

а) n=90; б) n=91.

Графіки, наведені на рис.7.3а демонструють залежність часу t_1 виконання програми від числа n циліндрів, які упаковуються. Слід відмітити, що час виконання t_1 залежить від оцінки n_0 кількості циліндрів, які гарантовано можуть бути упаковані у контейнер P. Рис. 7.3б демонструює час t_2, який було витрачено на те, щоб знайти розв'язок задачі (4.3)-(4.4) та довести, що $n+1$ циліндр вже не може бути упакований у P.



а б

Рис. 7.3. Залежність часу виконання від кількості циліндрів.

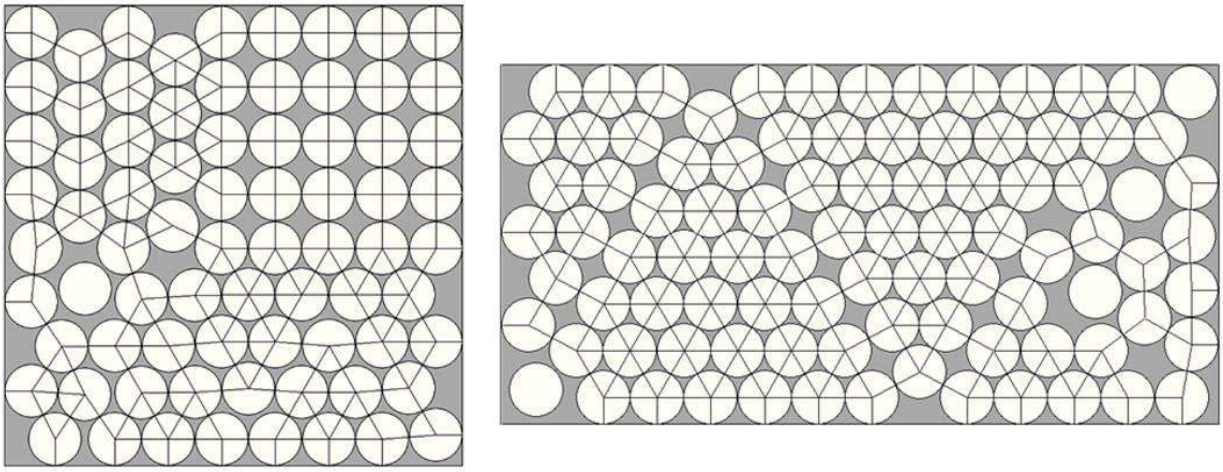
Порівняння результатів. Оскільки в жодному з відомих досліджень не розв'язується задача упаковки конгруентних циліндрів у багатозв'язний контейнер, то для дослідження ефективності розробленого підходу було виконано порівняння з результатами упаковки рівних циліндрів у паралелепіпеди, що мають однакову висоту з циліндрами [126]. В таблиці 7.1 представлено порівняння результатів, отриманих за допомогою методу GENPACK [126] та запропонованого в роботі підходу.

Таблиця 7.1.

Порівняння результатів упаковки однакових циліндрів

Задача			Результати упаковки однакових циліндрів				
			Correia и др. 2000)	GENPACK [126]		Розроблений в роботі підхід	
№	Розміри основи	Радіус циліндрів	Кількість упакованих циліндрів	Кількість упакованих циліндрів	Час, сек	Кількість упакованих циліндрів	Час, сек
1.1	160 x 80	6	90	91	734.05	**92**	5351
1.2	100 x 200	8	84	84	5791.83	84	4461
1.3	120 x 240	10	73	74	4065.91	74	3879
1.4	100 x 80	5	86	86	37108.39	86	9785
1.5	120 x 80	6	68	68	23.35	68	2311
1.6	120 x 100	6	87	87	2273.14	87	3456
1.7	80 x 80	5	68	68	12336.67	68	9874
1.8	100 x 100	6	70	71	225.57	71	2869
1.9	120 x 120	7	73	74	18.53	**75**	3985

На рис.7.4 наведено покращення результатів упаковки конгруентних циліндрів для двох задач 1.1 та 1.9, представлених у [126].



а) б)

Рис. 7.4. Результати покращення упаковки конгруентних циліндрів

На рис.7.4 а наведено результат упаковки циліндрів з радіусом 7 у паралелепіпед, розміри основи якого дорівнюють 120x120 (задача 1.9 в [126]). Результат з [126] було покращено на 1 циліндр.

На рис.7.4 б наведено результат упаковки циліндрів з радіусом 6 у паралелепіпед, розміри основи якого дорівнюють 160x800 (задача 1.1 в [126]). Результат з [126] було покращено на 1 циліндр.

7.3 Результати розв’язання задач компоновки тривимірних тіл

В даному підрозділі представлено деякі з отриманих результатів розв’язання задачі компоновки тривимірних тіл у різні області з урахуванням допустимих відстаней та зон заборони.

Задача компоновки сфероциліндрів та циліндрів у пряму призму. Задано множину тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$, яка складається зі сфероцилиндрів S_i, $i \in I_1 = \{1, 2, ..., 26\}$ та циліндрів C_i, $i \in I_2 = \{27, 28, 29, 30\}$. Метричні характеристик тривимірних тіл представлено у в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Метричні характеристики тривимірних тіл

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
r_i	2	2,6	1,5	2	3,3	3	2,5	2,5	3,5	4,2
$2h_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$w_{i1} = w_{i2}$	2	2,6	1,5	2	3,3	3	2,5	1	1,4	1,68
i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
r_i	2	2,5	4,1	2,3	1,5	4,2	3,2	1,9	2	2,5
$2h_i$	0	0	5	8,2	3,3	2,5	5,3	4,5	7,2	4
$w_{i1} = w_{i2}$	0,8	1	1,64	0,92	0,6	1,68	1,28	0,76	0,8	1
i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
r_i	2,3	3,4	4	2,3	4,5	2	1	2,3	3,4	2
$2h_i$	4	5	6	4	5	6	7	4	7	4,5
$w_{i1} = w_{i2}$	0,92	1,36	1,6	0,92	1,8	0,8	-	-	-	-

Також задано контейнер у вигляді прямої призми, основою якої є багатогранник D, який задано множиною вершин: (5, 27), (4, 45), (17, 51), (35, 45), (38, 30), (19, 17). Задано мінімально допустимі відстані: 1) $d_{ij} = (V_i + V_j) \cdot 10^{-2}$, $i, j \in I$; 2) $d_i^k = V_i \cdot 10^{-2}$, $k = 1,2,...,8$, $i \in I$, де V_i – об'єм тіла O_i. В результаті розв'язання задачі було отримано, що у точці $X^*(u^*, h^*)$ $h^* = 32,937967263$. Вектори u_i^*, $i = 1,2,...,n$, параметрів розміщення тривимірних тіл, що відповідають точці $X^*(u^*, h^*)$, наведено у таблиці 7.3 та зображено на рис.7.5.

Таблиця 7.3

Параметри розміщення

i		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1-7	x_i	10,16786183	7,79580943	5,67321637	7,00432744	31,99635047	24,04751091	32,79023508

Продовження таблиці 7.3

	y_i	45,45942745	37,23283727	44,01162397	42,39221687	30,93067562	30,60249026	40,86087212
	z_i	2,16755147	29,96985669	1,60338693	4,84889470	28,11439943	29,37248106	9,23222575
8-14	x_i	19,03385643	12,06110809	25,07478863	14,65413058	24,00535811	19,08868426	32,35959610
	y_i	20,22394821	39,14149741	43,36435622	47,44473210	23,69101554	25,78063721	39,11494354
	z_i	8,70339571	16,44870302	16,28696691	1,03212365	8,71034056	16,01471660	26,47468370
15-21	x_i	9,62198764	14,25617755	30,28159820	6,59716684	7,44686268	8,07007232	9,60904999
	y_i	34,16804932	27,85498833	30,92500613	42,52258938	36,27760283	33,17316760	30,19017941
	z_i	2,67357411	4,80577654	17,93622089	10,73271062	21,72020606	10,51024424	17,59923111
22-28	x_i	11,66047510	17,85869824	32,81354676	17,89667996	6,90842935	28,01461935	32,71568901
	y_i	28,97194973	40,88128675	39,63489749	41,74557920	43,25088347	24,74616319	40,79200708
	z_i	27,00200325	8,03949651	16,10007121	24,85401636	18,96144715	3,79495817	2,81870822
29-30	x_i	29,68269303	6,98120392	-	-	-	-	-
	y_i	32,07573531	37,58828987	-	-	-	-	-
	z_i	6,04217463	3,04634094	-	-	-	-	-

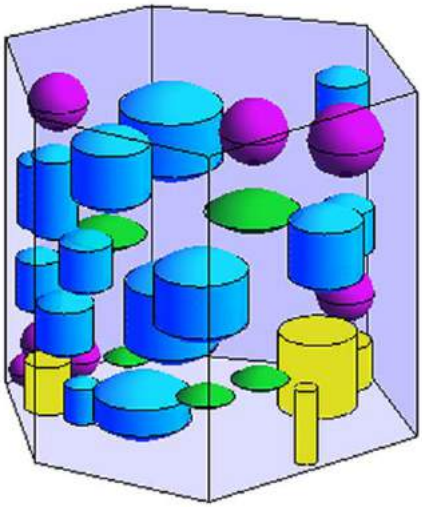


Рис. 7.5. Результат розв’язання задачі компоновки сфероциліндрів та циліндрів у прямій призмі

Компонування різних тривимірних тіл в багатозв'язний контейнер. Необхідно упакувати 30 тривимірних тіл O_i, $i \in \{1,\ldots,50\}$, серед яких 6 паралелепіпедів P_i, $i \in \{1,\ldots,6\}$, 3 кулі S_i, $i \in \{7,8,9\}$, 4 циліндри C_i, $i \in \{10,\ldots,13\}$, 5 сегментів кулі G_i, $i \in \{14,\ldots,18\}$, 6 сегментів кулі $\breve{G}_i$, $i \in \{19,\ldots,24\}$, 4 сфероциліндра sC_i, $i \in \{25,\ldots,28\}$, та 2 сферичних диски D_i $i \in \{29,30\}$, з урахуванням мінімально допустимих відстаней, у багатозв'язному контейнері $\Upsilon = cl\left(C \setminus \bigcup_{k=1}^{4} T_k\right)$ таким чином, щоб висота контейнеру досягала мінімуму. Метричні характеристики тривимірних тіл задано в таблицях 7.3-7.8. Значення мінімально допустимих відстаней наведені в таблицях 7.9-7.11.

Таблиця 7.3

Метричні характеристики паралелепіпедів

i	1	2	3	4	5	6
a_i^0	6,901	6,218	7,454	6,292	4,296	8,382
b_i^0	6,962	5,205	9,359	6,236	6,654	4,158
c_i^0	9,848	9,197	9,527	10,019	4,645	6,296

Таблиця 7.4

Радіуси куль

i	7	8	9
ρ_i^0	3,733	3,247	5,611

Таблиця 7.5

Метричні характеристики циліндрів

i	10	11	12	13
h_i^0	3,136	10,978	5,053	4,362
r_i^0	4,274	5,642	11,144	9,456

Таблиця 7.6

Метричні характеристики сегментів кулі G_i

i	14	15	16	17	18
r_i^0	3,769	6,924	14,994	13,076	8,519
w_i^0	6,224	8,286	8,52	6,221	4,685

Таблиця 7.7

Метричні характеристики сегментів кулі $\breve{G}_i$

i	19	20	21	22	23	24
r_i^0	3,857	8,677	8,846	9,178	10,834	7,297
w_i^0	6,171	9,588	5,854	4,13	5,055	3,665

Таблиця 7.8

Метричні характеристики сфероциліндрів

i	25	26	27	28	29	30
h_i^0	7,331	6,451	5,318	10,994	0	0
r_i^0	11,001	10,288	12,706	7,125	6,305	5,204
w_{1i}^0	5,591	3,354	2,322	2,48	3,633	4,777
w_{2i}^0	10,998	5,205	6,445	5,187	5,904	3,933

Таблиця 7.9

Мінімально допустимі відстані між тілами

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	12,808	5,008	6,152	10,248	8,424	6,72	12,328	10,28	10,48
2	12,808	0	12,6	11,056	6,6	8,864	10,856	5,72	6,632	7,44
3	5,008	12,6	0	10,96	5,296	11,832	6,08	9,136	5,392	12,8
4	6,152	11,056	10,96	0	7,856	10,24	9,856	6,536	10,488	11,896
5	10,248	6,6	5,296	7,856	0	11,224	6,12	10,624	9,512	8,192
6	8,424	8,864	11,832	10,24	11,224	0	7,736	7,04	9,864	7,176
7	6,72	10,856	6,08	9,856	6,12	7,736	0	9,56	9,32	12,232
8	12,328	5,72	9,136	6,536	10,624	7,04	9,56	0	5,624	8,384
9	10,28	6,632	5,392	10,488	9,512	9,864	9,32	5,624	0	7,024
10	10,48	7,44	12,8	11,896	8,192	7,176	12,232	8,384	7,024	0

Продовження таблиці 7.9

11	5,68	5,184	7,752	11,784	8,472	9,496	5,064	6,112	12,112	10,576
12	6,68	6,848	5,512	12,504	7,92	8,36	6,112	11,64	9,504	5,392
13	11,432	11,384	9,824	12,896	5,672	10,576	8,736	7,344	5,848	6,6
14	9,384	9,072	6,104	7,928	12,032	11,48	10,872	6,816	6,408	5,728
15	9,008	8,592	7,424	9,576	9,528	12,232	11,32	11,92	9,984	10,912
16	12,56	8,096	5,104	6,376	12,84	10,152	10,136	7,648	9,584	7,832
17	9,248	11,848	11,432	12,472	5,368	11,936	6,768	6,544	5,544	10,296
18	6,808	9,296	10,488	6,864	11,688	10,432	8,648	10,376	6,288	9,44
19	5,76	11,632	5,168	7,928	11,272	10,024	6,512	10,984	10,296	10,768
20	6,544	6,376	9,176	9,624	8,6	7,296	9,432	11,944	12,672	11,824
21	12,6	9,72	7,784	5,376	6,128	11,072	10,592	8,928	8,856	7,528
22	12,456	6,192	11,008	5,168	5,376	11,568	10,656	9,072	6,448	11,232
23	12,192	10,352	8,704	9,904	6,368	6,696	5,632	9,928	9,464	10,856
24	7,776	10,272	8,856	6,92	10,656	5,656	10,28	10,496	9,448	9,04
25	7,856	11,696	8,68	10,776	7,656	7,552	10,392	10,848	11,44	10,544
26	8,152	6,176	11,656	7,784	12,552	11,176	12,112	7,248	11,432	10,704
27	5,544	6,784	7,912	11,816	10,64	10,808	5,504	5,6	12,064	5,168
28	7,008	5,656	8,776	9,48	9,168	12,016	8,728	12,896	12,032	11,896
29	12,048	5,072	5,504	11,416	12,896	11,12	12,168	11,464	7,184	6,688
30	9,304	9,336	12,128	5,416	8,584	7,04	8,144	10,784	5,024	10,848

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5,68	6,68	11,432	9,384	9,008	12,56	9,248	6,808	5,76	6,544
2	5,184	6,848	11,384	9,072	8,592	8,096	11,848	9,296	11,632	6,376
3	7,752	5,512	9,824	6,104	7,424	5,104	11,432	10,488	5,168	9,176
4	11,784	12,504	12,896	7,928	9,576	6,376	12,472	6,864	7,928	9,624
5	8,472	7,92	5,672	12,032	9,528	12,84	5,368	11,688	11,272	8,6
6	9,496	8,36	10,576	11,48	12,232	10,152	11,936	10,432	10,024	7,296
7	5,064	6,112	8,736	10,872	11,32	10,136	6,768	8,648	6,512	9,432
8	6,112	11,64	7,344	6,816	11,92	7,648	6,544	10,376	10,984	11,944
9	12,112	9,504	5,848	6,408	9,984	9,584	5,544	6,288	10,296	12,672
10	10,576	5,392	6,6	5,728	10,912	7,832	10,296	9,44	10,768	11,824
11	0	7,96	11,744	5,376	9,424	6,384	6,248	9,304	8,256	12,2
12	7,96	0	6,536	5,576	7,176	11,4	6,304	8,736	11,048	9,92
13	11,744	6,536	0	11,992	12,408	11,304	6,824	10,136	11,096	7,824

Продовження таблиці 7.9

14	5,376	5,576	11,992	0	8,304	8,584	10,592	6,104	10,864	5,72
15	9,424	7,176	12,408	8,304	0	12,648	6,664	10,056	5,48	6,24
16	6,384	11,4	11,304	8,584	12,648	0	5,104	8,416	6,008	11,976
17	6,248	6,304	6,824	10,592	6,664	5,104	0	10,312	6,968	12,176
18	9,304	8,736	10,136	6,104	10,056	8,416	10,312	0	11,024	10,552
19	8,256	11,048	11,096	10,864	5,48	6,008	6,968	11,024	0	12,296
20	12,2	9,92	7,824	5,72	6,24	11,976	12,176	10,552	12,296	0
21	6,408	10,68	6,4	6,432	10,728	12,192	5,832	5,872	5,48	12,672
22	9,96	12,952	10,872	12,816	6,408	10,008	7,2	12,088	11,68	5,4
23	9,664	6,696	5,536	7,152	11,248	5,736	11,608	11	7,72	10,912
24	10,872	12,248	10,232	12,792	9,08	10,808	9,848	8,376	10,528	11,184
25	6,304	12,768	12,272	11,664	11,336	12,328	10,736	9,848	9,312	9,808
26	8,496	11,728	5,368	11,976	10,152	12,376	6,464	10,304	12,872	8,512
27	10,208	9,168	9,272	9,2	5,584	12,552	10,616	10,496	5,672	10,112
28	11,536	8,256	12,768	11,104	7,112	10,76	9,512	7,816	6,528	8,184
29	7,08	7,256	5,792	6,2	12,008	8,104	9,896	6,288	5,416	6,712
30	8,232	6,736	6,792	11,648	6,048	11,384	7,216	5,84	6,416	7,032

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	12,6	12,456	12,192	7,776	7,856	8,152	5,544	7,008	12,048	9,304
2	9,72	6,192	10,352	10,272	11,696	6,176	6,784	5,656	5,072	9,336
3	7,784	11,008	8,704	8,856	8,68	11,656	7,912	8,776	5,504	12,128
4	5,376	5,168	9,904	6,92	10,776	7,784	11,816	9,48	11,416	5,416
5	6,128	5,376	6,368	10,656	7,656	12,552	10,64	9,168	12,896	8,584
6	11,072	11,568	6,696	5,656	7,552	11,176	10,808	12,016	11,12	7,04
7	10,592	10,656	5,632	10,28	10,392	12,112	5,504	8,728	12,168	8,144
8	8,928	9,072	9,928	10,496	10,848	7,248	5,6	12,896	11,464	10,784
9	8,856	6,448	9,464	9,448	11,44	11,432	12,064	12,032	7,184	5,024
10	7,528	11,232	10,856	9,04	10,544	10,704	5,168	11,896	6,688	10,848
11	6,408	9,96	9,664	10,872	6,304	8,496	10,208	11,536	7,08	8,232
12	10,68	12,952	6,696	12,248	12,768	11,728	9,168	8,256	7,256	6,736
13	6,4	10,872	5,536	10,232	12,272	5,368	9,272	12,768	5,792	6,792
14	6,432	12,816	7,152	12,792	11,664	11,976	9,2	11,104	6,2	11,648
15	10,728	6,408	11,248	9,08	11,336	10,152	5,584	7,112	12,008	6,048
16	12,192	10,008	5,736	10,808	12,328	12,376	12,552	10,76	8,104	11,384

Продовження таблиці 7.9

17	5,832	7,2	11,608	9,848	10,736	6,464	10,616	9,512	9,896	7,216
18	5,872	12,088	11	8,376	9,848	10,304	10,496	7,816	6,288	5,84
19	5,48	11,68	7,72	10,528	9,312	12,872	5,672	6,528	5,416	6,416
20	12,672	5,4	10,912	11,184	9,808	8,512	10,112	8,184	6,712	7,032
21	0	5,704	7,824	8,8	7,608	5,448	6,648	8,864	5,016	10,384
22	5,704	0	5,704	12,264	12,136	11,712	12,808	6,288	7,32	8,888
23	7,824	5,704	0	8,232	5,024	10,336	6,152	7,208	9,688	8,912
24	8,8	12,264	8,232	0	7,2	7,256	6,952	9,624	5,624	8,352
25	7,608	12,136	5,024	7,2	0	10,112	10,48	11,72	6,992	6,424
26	5,448	11,712	10,336	7,256	10,112	0	5,568	12,296	9,864	6,528
27	6,648	12,808	6,152	6,952	10,48	5,568	0	5,616	12,144	10,36
28	8,864	6,288	7,208	9,624	11,72	12,296	5,616	0	8,416	6,12
29	5,016	7,32	9,688	5,624	6,992	9,864	12,144	8,416	0	5,368
30	10,384	8,888	8,912	8,352	6,424	6,528	10,36	6,12	5,368	0

Таблиця 7.10

Мінімально допустимі відстані між тілами та зонами заборони

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho_i^k, k \in \{1,...,4\}$	1,44	1,32	0,73	1,2	0,6	0,97	1,01	1,96	1,44	1,69
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\rho_i^k, k \in \{1,...,4\}$	1,95	1,71	1,16	1,71	2	1,75	1,5	0,48	0,53	1,97
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\rho_i^k, k \in \{1,...,4\}$	1,35	1,25	0,84	1,23	0,42	1,14	1,76	1,42	0,19	1,95

Таблиця 7.11

Мінімально допустимі відстані між тілами та поверхнями контейнеру

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_i	2,05	1,86	1,31	0,46	0,97	1,91	1,75	1,25	1,33	2,1
ρ_i^U	0,8	1,05	1,24	0,13	1,42	1,04	1,54	0,17	0,53	0,54
ρ_i^L	1,92	1,26	1,08	0,62	1,21	1,28	1,6	0,81	1,15	1,79
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Продовження таблиці 7.11

ρ_i	0,24	0,37	0,92	0,64	1,41	0,27	1,49	2,08	1,87	1,94
ρ_i^U	0,74	1,08	1,74	2,08	0,69	0,33	0,24	0,85	1,42	0,17
ρ_i^L	1,1	1	1,53	0,25	1,7	1,75	2,08	0,7	1,15	0,64
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ρ_i	1,91	1,03	0,74	1,92	1,42	1,75	1,94	1,97	0,23	2,01
ρ_i^U	1,05	0,82	1,11	1,27	1,41	1,62	1,8	0,27	1,4	1,1
ρ_i^L	1,34	0,96	1,92	0,12	0,5	0,36	0,55	1,77	1,34	2,04

Параметри контейнеру: C - циліндр радіусу $r = 60$, і $T_k, k \in \{1,\ldots,4\}$, - зони заборони у вигляді прямих прямокутних призм з векторами трансляції $\mathrm{u}_1^T = (-15, 25, 0)$, $\mathrm{u}_2^T = (-25, 10, 0)$, $\mathrm{u}_3^T = (15, -25, 0)$, $\mathrm{u}_4^T = (25, -10, 0)$, в основі яких лежать прямокутники зі сторонами $a_1^T = a_3^T = 15$, $a_2^T = a_4^T = 5$ і $b_1^T = b_3^T = 5$, $b_2^T = b_4^T = 10$.

В результаті розв’язання задачі отримано значення висоти контейнеру $H\left(u_\Omega^*\right) = 37{,}3592$. Параметри упаковки тривимірних тіл наведено в таблиці 7.12.

Таблиця 7.12.

Координати полюсів тіл у точці найкращого локального мінімуму

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i^*	-5,571	-29,125	39,119	-30,342	-26,888	44,792	52,013	-10,152	10,37	26,519
y_i^*	11,487	-40,959	-17,936	38,669	-41,329	19,23	-16,29	-54,491	-51,984	-46,414
z_i^*	4,12	-8,174	-8,073	8,531	12,565	-2,481	9,998	13,399	11,999	12,444
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i^*	-44,761	26,837	-2,347	53,105	-40,791	27,296	-3,154	52,35	-43,794	35,207
y_i^*	-30,417	40,382	-49,568	1,811	9,986	-41,668	-40,263	1,52	27,823	33,021

Продовження таблицы 7.12

z_i^*	1,045	-12,627	-11,657	-18,428	-16,793	-15,648	-0,191	9,311	-10,006	16,816
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i^*	39,326	-28,347	-11,72	36,989	-16,974	-47,566	2,281	15,946	-49,488	-50,332
y_i^*	-33,251	45,23	51,343	4,848	-13,809	-6,152	44,285	11,536	20,235	15,454
z_i^*	17,486	-8,414	-5,926	0,89	2,281	6,846	9,24	2,089	13,207	-2,393

Компоновка тривимірних тіл, яка відповідає знайденій точці, наведено на рис. 7.6.

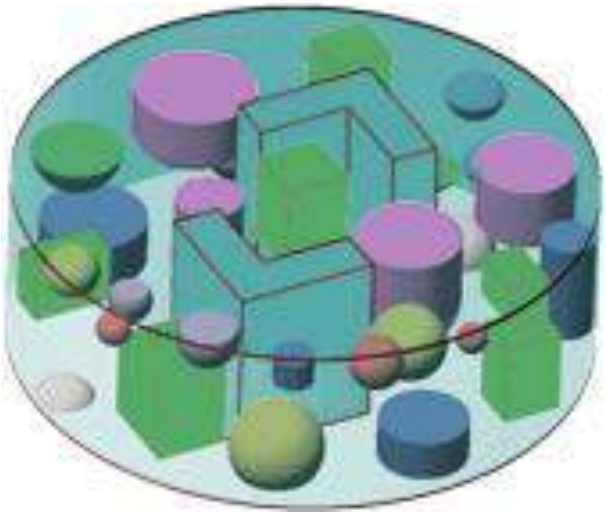


Рис. 7.6. Компоновка тривимірних тіл у багатозв’язному контейнері

На рис. 7.7 наведено приклади розв'язання задачі компоновки тривимірних тіл у контейнери різних конфігурацій.

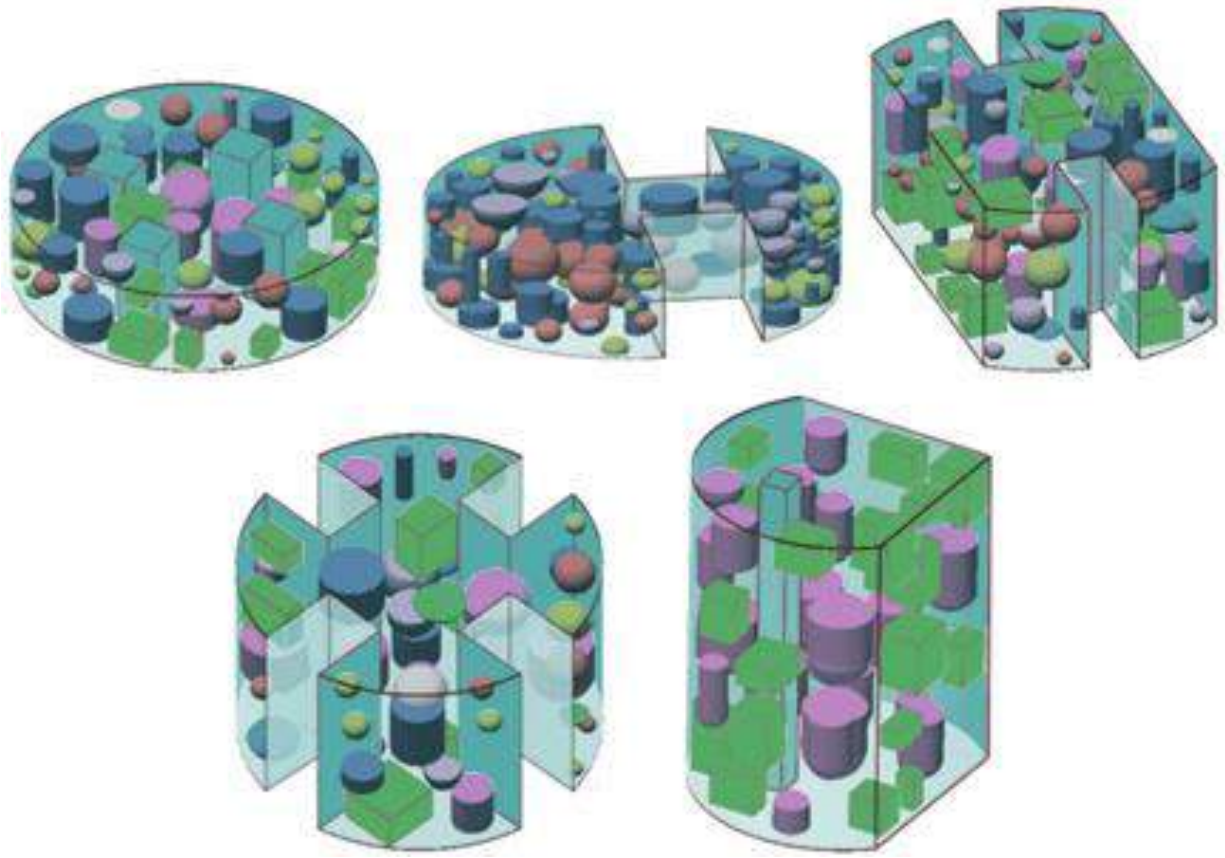


Рис. 7.7. Приклади розв’язання задач упаковки тривимірних тіл у контейнери різної конфігурації

7.4 Розв’язання задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль

Розглянемо приклади упаковки множини тривимірних тіл, яка складається від 10 до 300 неорієнтованих паралелепіпедів та куль. Результати розрахунків низки прикладів доступні на http://www1.datafilehost.com/d/d6736a2d. Деякі результати представлені на рис. 7.8.

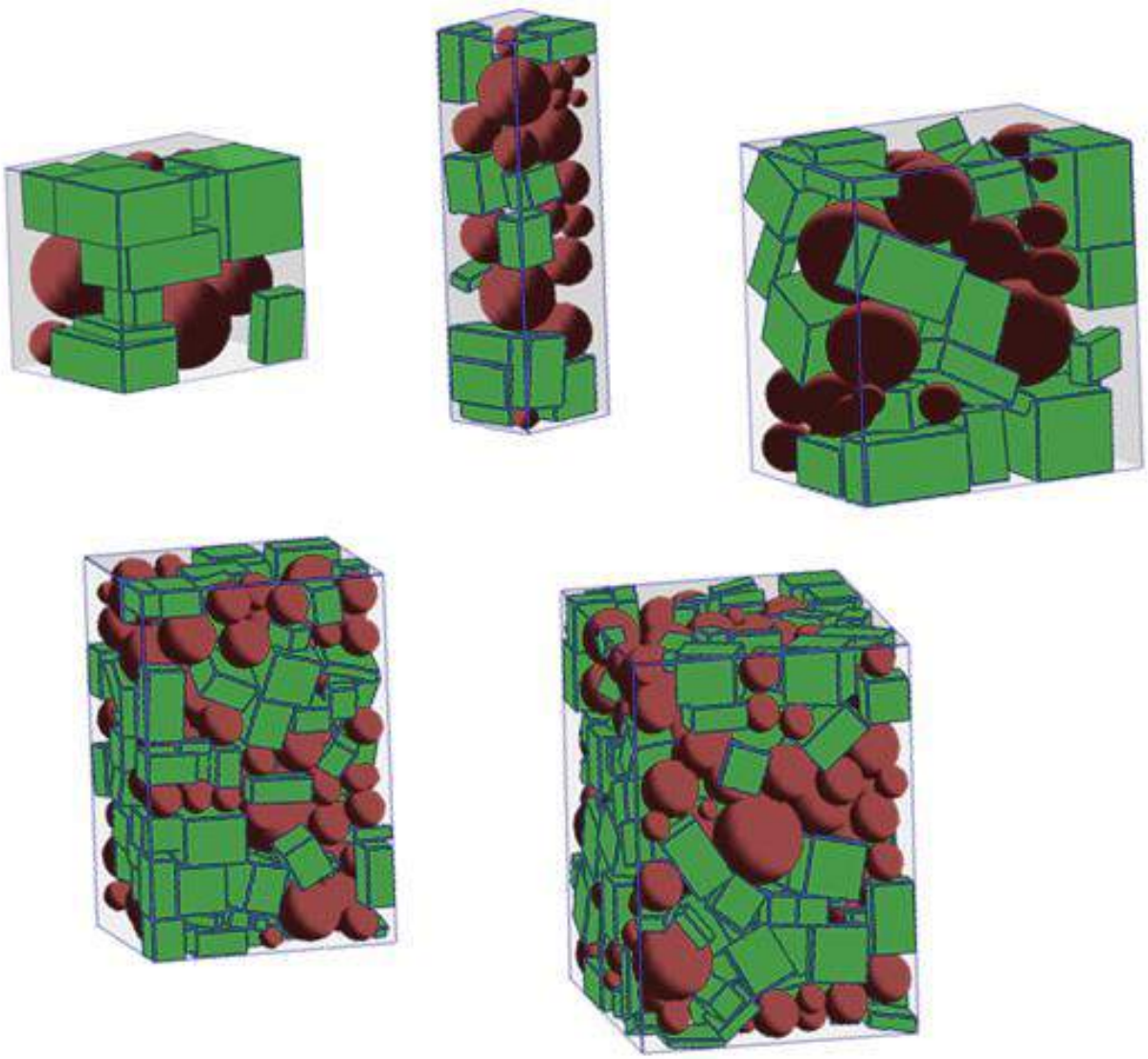


Рис. 7.8. Приклади результатів оптимальної упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль

Розглянемо два чисельних приклади.

Приклад 1. Упакувати п'ять паралелепіпедів та п'ять куль у паралелепіпед з базовими розмірами $l = 7$ і $w = 5$. Розміри паралелепіпедів P_i, $i = 1,2,3,4,5$ та куль S_j, $j = 1,2,3,4,5$, наведені у таблиці 1.

Таблиця 7.13

Метричні характеристики прямокутних паралелепіпедів та куль

i	l_i	w_i	h_i	r_i
P_1	2	3	3	-
P_2	2	1	3	-
P_3	5	3	2	-
P_4	3	0,5	3	-
P_5	1	2	1	-
S_6	-	-	-	4,4
S_7	-	-	-	1,9
S_8	-	-	-	5
S_9	-	-	-	3,5
S_{10}	-	-	-	2,7

Наближення до точки глобального мінімуму дорівнює 22.506 і досягається в точці локального мінімуму, координати якої наведені в таблиці 7.14.

Таблиця 7.14

Координати точки локального мінімуму

i	x_i	y_i	z_i	α_i	β_i	ϖ_i
P_1	+5,000	1,630	4,350	4,832	3,141	6,283
P_2	-5,680	-2,778	19,448	3,165	3,143	1,722
P_3	3,474	0,000	11,228	3,142	3,038	1,571
P_4	1,484	-4,479	17,854	3,159	4,767	6,296
P_5	-1,679	2,517	21,432	6,298	3,217	6,482
S_6	2,600	0,426	17,956	-	-	-

Продовження таблиці 7.14

S_7	3,867	-3,095	2,544	-	-	-
S_8	-2,000	0,000	5,000	-	-	-
S_9	-3,456	-1,492	13,247	-	-	-
S_{10}	-4,282	2,292	18,215	-	-	-

Упаковка тривимірних тіл, що відповідає отриманому розв’язку наведена на рис. 7.9.

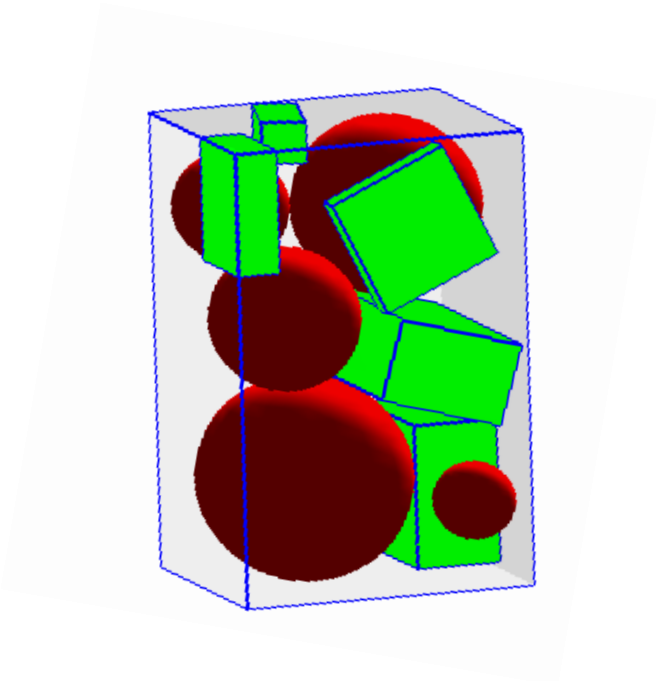


Рис. 7.9. Результат упаковки п’яти неорієнтованих паралелепіпедів та п’яти куль

Приклад 2. Упакувати тридцять паралелепіпедів у контейнер з розмірами основи $l = 14$ і $w = 10$. Метричні характеристики P_i наведені в таблиці 3. Слід зазначити, що діаметри P_1, P_{10} і P_{14} строго більше діаметра підстави контейнера.

Таблиця 7.15

Метричні характеристики паралелепіпедів

i	l_i	w_i	h_i	i	l_i	w_i	h_i	i	l_i	w_i	h_i
P_1	18,00	2,00	3,00	P_{11}	4,00	4,00	4,00	P_{21}	2,50	3,00	2,00
P_2	1,00	1,50	2,00	P_{12}	3,00	3,50	1,00	P_{22}	3,00	5,00	2,00
P_3	3,00	2,00	3,00	P_{13}	3,00	4,50	1,50	P_{23}	3,00	2,00	3,00
P_4	1,40	3,00	2,00	P_{14}	19,00	1,00	1,00	P_{24}	3,50	3,00	2,00
P_5	2,00	2,30	3,00	P_{15}	1,50	3,50	1,00	P_{25}	4,00	3,00	3,00
P_6	2,50	3,00	2,00	P_{16}	3,00	1,00	2,50	P_{26}	2,50	3,00	2,00
P_7	4,50	3,00	2,00	P_{17}	3,00	5,50	2,00	P_{27}	4,50	3,00	2,00
P_8	2,40	4,00	4,00	P_{18}	3,00	3,20	2,00	P_{28}	2,00	2,00	2,00
P_9	1,50	1,50	2,00	P_{19}	2,50	3,00	4,00	P_{29}	1,50	1,50	2,00
P_{10}	18,00	2,00	3,00	P_{20}	3,00	4,00	4,00	P_{30}	3,00	1,70	2,00

Наближення до глобального мінімуму дорівнює 32.032 і досягається в точці локального мінімуму, координати якої наведено в таблиці 7.16.

Таблиця 7.16

Координати точки локального мінімуму

i	x_i	y_i	z_i	α_i	β_i	ϖ_i
P_1	-0,001	-1,524	14,352	4,455	0,185	0,825
P_2	-6,879	-7,833	9,236	-0,067	2,159	0,126
P_3	-6,852	6,871	29,023	0,000	-0,002	-1,512
P_4	-4,374	-7,918	15,488	2,819	7,137	1,816
P_5	-3,160	-2,972	29,620	1,586	3,175	6,283
P_6	-9,269	-6,208	21,287	3,327	2,177	-0,402

Продовження таблиці 7.16

P_7	-10,558	-4,815	4,996	0,103	2,036	1,540
P_8	-0,218	5,765	23,823	4,682	-0,057	5,485
P_9	-1,144	-8,175	29,838	3,159	4,326	4,744
P_{10}	1,725	6,948	15,769	4,725	3,124	0,941
P_{11}	3,220	4,476	5,678	2,980	4,091	4,536
P_{12}	4,774	6,607	27,388	6,229	2,075	-1,596
P_{13}	10,647	2,411	25,246	4,732	-0,025	6,253
P_{14}	0,292	-2,042	18,639	4,968	6,023	0,807
P_{15}	11,740	-7,973	11,845	4,396	5,266	-0,323
P_{16}	11,361	-0,592	28,919	-0,133	1,606	3,279
P_{17}	7,748	-2,764	12,134	3,082	-0,807	1,168
P_{18}	5,483	-7,889	29,004	1,571	6,269	1,572
P_{19}	-9,286	3,421	10,742	6,319	5,342	0,000
P_{20}	8,176	-2,250	20,362	3,193	3,903	4,788
P_{21}	11,628	-5,950	29,048	0,338	1,618	-0,219
P_{22}	-7,529	-1,249	14,893	3,176	2,515	-2,036
P_{23}	0,675	-7,823	22,402	3,138	6,089	3,100
P_{24}	-10,430	-3,171	28,772	1,705	3,143	0,002
P_{25}	4,353	-1,800	29,014	3,734	1,575	0,979
P_{26}	0,672	-7,185	5,647	1,467	3,198	3,931
P_{27}	-4,361	6,529	16,071	2,652	-2,255	2,750
P_{28}	2,045	6,203	29,322	4,712	6,243	-2,673
P_{29}	-2,888	8,370	30,471	5,146	4,647	2,008
P_{30}	-5,977	-2,797	2,704	3,383	4,186	4,910

Упаковка паралелепіпедів, яка відповідає точці локального мінімуму показано на рис. 7.10.

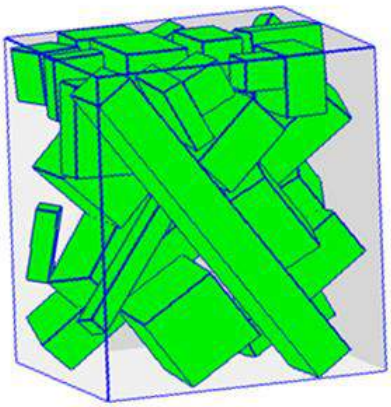


Рис.7.10. Результат упаковки неорієнтованих паралелепіпедів

Графік, наведений на рис.7.11 відображає залежність часу виконання від кількості паралелепіпедів та куль $n = n_1 + n_2$ ($n_1 = n_2$).

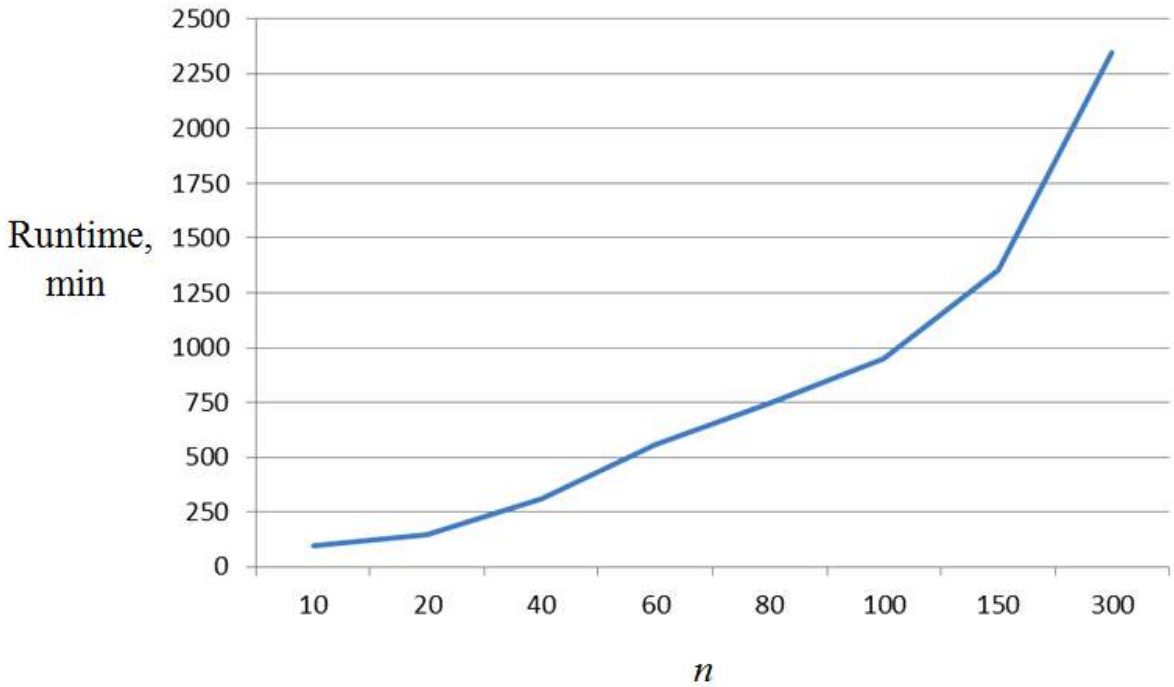


Рис.7.11. Залежність розв’язання задачі від кількості тіл n

7.5 Результати упаковки тривимірних тіл, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами

Задача. Упакувати 100 тривимірних тіл O_i, $i \in \{1,\ldots,100\}$, поверхня яких сформована циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами, серед яких: 11 паралелепіпедів P_i, $i \in \{1,\ldots,11\}$, 11 куль S_i, $i \in \{12,\ldots,22\}$, 11 конусів K_i, $i \in \{23,\ldots,33\}$, 11 усічених конусів F_i, $i \in \{34,\ldots,44\}$, 11 циліндрів C_i, $i \in \{45,\ldots,55\}$, 11 сегментів кулі G_i, $i \in \{56,\ldots,66\}$, 12 сфероциліндрів sC_i, $i \in \{67,\ldots,78\}$, 11 сферичний конусів sK_i, $i \in \{79,\ldots,89\}$, 11 сферичних дисків D_i, $i \in \{90,\ldots,100\}$.

Метричні характеристики тривимірних тіл наведені в таблицях 7.17-7.25.

Контейнер має форму паралелепіпеда P з розмірами основи $l = w = 70$.

Таблиця 7.17

Метричні характеристики паралелепіпедів

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i^0	9,308	9,499	11,095	11,209	11,614	10,151	10,97	10,044	10,555	10,213	10,448
b_i^0	6,389	5,471	6,289	5,158	6,415	6,129	6,586	5,563	5,72	5,076	6,115
c_i^0	4,553	4,427	4,372	4,263	4,646	4,734	4,522	4,396	4,126	4,041	4,153

Таблиця 7.18

Метричні характеристики куль

i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ρ_i^0	9,799	10,73	8,411	8,024	10,134	9,055	9,799	10,73	8,411	8,024	10,134

Таблиця 7.19

Метричні характеристики конусів

i	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
h_i^0	8,264	10,199	8,096	8,566	8,97	8,176	11,258	11,689	11,314	9,123	11,373
r_i^0	8,998	8,19	8,644	11,175	10,623	10,703	10,717	11,129	11,698	9,229	11,92

Таблиця 7.20

Метричні характеристики усічених конусів

i	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
h_i^0	10,394	10,99	9,326	11,695	11,426	11,32	10,956	10,426	11,742	11,245	11,672
r_{1i}^0	8,981	9,93	8,141	11,923	9,356	9,797	11,36	8,825	11,537	11,101	10,658
r_{2i}^0	4,985	5,114	4,995	5,921	5,116	4,333	5,726	4,995	4,911	5,689	4,418

Таблиця 7.21

Метричні характеристики циліндрів

i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
h_i^0	6,101	6,744	8,694	4,18	6,074	9,222	2,183	5,695	7,933	3,832	8,449
$r_{1i}^0 = r_{2i}^0$	8,417	6,117	8,983	4,372	2,134	4,637	8,929	2,65	3,921	2,67	9,472

Таблиця 7.22

Метричні характеристики сегментів кулі

i	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
r_i^0	9,674	8,023	10,523	11,082	11,903	9,366	10,683	11,98	9,694	10,767	8,572
w_i^0	4,997	4,46	4,485	4,15	3,076	4,199	3,653	3,268	3,583	4,296	3,701

Таблиця 7.23

Метричні характеристики сфероциліндрів

i	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
h_i^0	7,36	6,768	8,403	7,464	7,343	7,743	6,507	7,836	7,392	6,875	8,393	7,259
r_i^0	6,944	7,092	6,137	6,911	7,134	4,009	7,412	6,956	7,082	5,983	7,119	7,42
w_{1i}^0	6,325	6,596	6,106	6,037	4,725	3,153	5,462	3,683	2,473	2,162	3,523	6,186
w_{2i}^0	3,778	6,686	2,629	4,573	4,55	3,038	5,729	4,934	5,421	3,439	4,264	5,37

Таблиця 7.24

Метричні характеристики сферичних конусів

i	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
h_i^0	6,745	8,813	8,817	8,077	7,558	7,913	7,315	7,546	7,725	8,787	6,816
r_{1i}^0	6,841	6,539	7,878	5,618	7,668	7,968	6,989	6,596	7,893	5,59	6,981
r_{2i}^0	5,478	5,134	6,578	4,565	7,167	7,168	6,628	6,466	7,309	4,461	6,43
w_{1i}^0	4,583	5,733	7,115	5,352	5,921	7,424	4,474	4,006	4,211	4,601	4,322
w_{2i}^0	4,577	4,621	4,871	4,201	5,62	5,425	6,149	4,994	4,07	4,148	5,312

Таблиця 7.25

Метричні характеристики сферичних дисків

i	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
r_i^0	8,981	7,761	7,235	9,34	9,162	8,567	8,057	7,512	6,927	9,542	7,068
w_{1i}^0	3,946	2,405	3,302	3,647	2,82	4,209	3,352	3,123	3,114	2,063	2,752
w_{2i}^0	2,698	2,191	3,154	4,62	3,694	2,853	3,962	2,413	2,041	4,377	2,43

Знайдене значення висоти області розміщення дорівнює $H\left(\Omega^*\right) = 80,686.$ Отримані параметри розміщення тривимірних тіл наведені в таблиці 7.26.

Таблиця 7.26

Координати розміщення тривимірних тіл

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i^*	5,451	-4,949	12,209	-15,302	8,505	12,847	-24,03	-12,722	8,067	29,673
y_i^*	9,811	30,573	-28,711	23,482	-13,579	-23,663	-1,608	-24,925	29,28	-1,505
z_i^*	0,51	-23,307	-22,364	12,8	33,928	-35,609	-11,094	33,733	-5,748	-15,918
φ_i^*	0,273	4,712	3,142	2,069	1,571	0	1,358	-0,003	3,142	4,619
ψ_i^*	-0,506	0	2,667	3,958	1,792	3,142	0	0,532	1,205	3,142

Продовження таблиці 7.26

ω_i^*	-2,199	2,569	0	3,783	-3,142	-1,43	3,142	1,576	3,142	1,546
i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x_i^*	-18,017	-25,201	-2,329	20,319	26,976	-24,866	-4,896	11,967	-6,59	-26,876
y_i^*	-30,847	1,811	-0,524	5,11	26,976	-16,56	14,462	-1,314	-18,362	26,876
z_i^*	-9,71	4,93	-16,234	22,431	-32,07	-10,905	11,85	-30,381	1,282	18,64
φ_i^*	-1,571	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_i^*	3,142	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ω_i^*	2,734	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_i^*	22,57	4,158	31,048	-29,051	-26,15	26,32	-30,429	-28,74	-30,161	-29,976
y_i^*	-10,837	-5,957	-8,373	-9,989	12,698	13,3	21,184	11,34	-30,161	-0,396
z_i^*	30,665	16,871	18,556	36,543	14,644	-19,664	-22,021	-22,955	2,575	-35,318
φ_i^*	0	0	2,261	2,047	-1,802	2,969	-1,007	3,23	-0,496	4,216
ψ_i^*	0	0	5,785	0,623	4,803	1,573	0,535	0,872	0,444	2,697
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
x_i^*	4,61	-27,079	-14,298	24,483	14,793	-5,519	23,168	-1,26	0,162	-21,262
y_i^*	8,534	-25,816	-12,796	-14,834	22,88	15,174	2,164	27,885	-20,55	18,659
z_i^*	35,147	27,03	-31,771	-17,966	14,326	30,497	5,809	33,228	-33,475	32,069
φ_i^*	-0,023	3,131	5,857	5,156	1,043	-0,013	2,074	5,498	1,316	4,968
ψ_i^*	2,048	2,09	0,595	1,561	0,545	-3,026	1,576	1,832	-0,373	3,313

Продовження таблиці 7.26

ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
x_i^*	-5,539	5,614	-22,397	-21,239	-27,982	-10,455	14,03	-30,774	14,452	-16,825
y_i^*	-3,304	27,084	-4,049	27,717	11,851	-1,196	11,047	30,628	-32,714	-13,057
z_i^*	33,546	-32,427	22,629	-7,078	-10,073	10,11	-10,901	30,546	13,664	13,661
φ_i^*	1,373	0,785	5,649	3,403	-0,213	1,897	2,592	3,142	3,159	0,311
ψ_i^*	3,541	1,177	4,843	3,166	1,684	-0,091	2,173	-1,567	4,802	4,171
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
x_i^*	-8,601	-12,104	31,079	32,33	-25,527	-3,033	-26,711	19,31	-22,735	1,622
y_i^*	-32,684	28,936	-26,732	-7,678	-21,985	-23,218	18,874	14,527	8,056	8,16
z_i^*	3,308	-15,779	36,422	-6,848	-28,951	34,501	6,058	-29,205	28,771	-36,522
φ_i^*	1,571	-1,569	1,571	2,9	-0,378	0,127	3,532	-0,3	1,825	0,112
ψ_i^*	-0,001	0,003	3,142	3,142	3,142	0,486	3,32	-1,751	-0,17	3,381
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
x_i^*	13,054	-24,474	-23,023	-9,822	18,728	20,674	7,1	13,976	28,863	22,043
y_i^*	16,561	-30,198	23,309	-25,485	-12,596	0,247	-15,478	-22,147	8,374	28,089
z_i^*	3,902	-23,772	4,344	20,413	8,827	-22,066	-18,134	3,501	34,206	-14,424
φ_i^*	2,307	4,337	3,362	3,563	2,237	5,48	-3,142	1,259	4,712	0
ψ_i^*	2,682	2,969	3,167	-1,085	3,172	1,456	3,145	0,266	0	2,001
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

i	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
x_i^*	-2,787	23,717	27,588	28,043	-17,278	28,425	-12,019	-1,28	15,692	-6,459
y_i^*	15,764	30,99	-22,764	0,712	11,169	-25,962	13,268	-23,744	-5,244	29,182
z_i^*	-26,152	36,333	-32,931	-33,386	-33,261	10,971	-7,952	21,709	-10,585	21,425
φ_i^*	2,122	2,188	-4,712	4,712	1,571	1,578	3,07	-0,694	0,135	-0,184
ψ_i^*	-2,368	1,571	3,142	3,142	3,211	0,09	2,707	2,959	0,398	2,019
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

i	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
x_i^*	19,905	21,757	27,586	27,412	18,097	-23,949	-3,403	0,926	-22,288	22,613
y_i^*	-26,06	25,658	-21,828	21,379	-28,193	-21,626	27,404	-29,985	27,757	32,301
z_i^*	21,861	28,97	-2,391	-0,47	-12,821	17,128	-2,922	-9,067	-33,643	18,576
φ_i^*	3,432	0,645	-4,741	2,266	-0,051	5,218	6,242	0,075	-0,765	4,708
ψ_i^*	2,032	1,789	3,175	3,196	5,212	-1,049	3,545	3,679	1,515	3,143
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
x_i^*	-32,75	-9,551	11,316	30,822	-6,812	5,611	4,895	-23,68	-7,789	19,489
y_i^*	-12,841	-31,664	-30,421	16,666	-16,851	15,721	-6,335	-11,508	1,247	14,044
z_i^*	3,371	-26,553	31,861	18,653	-16,325	19,947	0,132	0,644	0,145	33,607
φ_i^*	-3,454	1,472	4,28	-4,798	2,555	-0,257	-2,117	-0,584	3,566	-0,176
ψ_i^*	1,545	0,03	3,142	4,392	2,626	1,288	0,053	-0,201	0,141	1,993
ω_i^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Отримана упаковка тривимірних тіл зображена на рис.7.12.

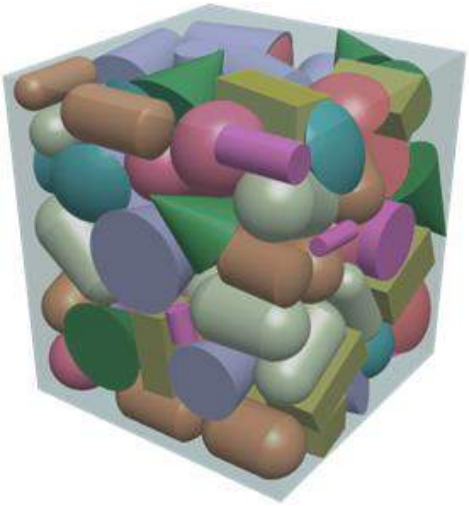


Рис.7.12. Упаковка тривимірних тіл, поверхня яких сформована конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами

Інші приклади упаковок тривимірних тіл. У процесі проведення числових експериментів було розв’язано багато інших прикладів упаковки тривимірних тіл.

Наприклад, на рис. 7.13 наведено результат упаковки 50 сферичний конусів та 60 сегментів кулі.

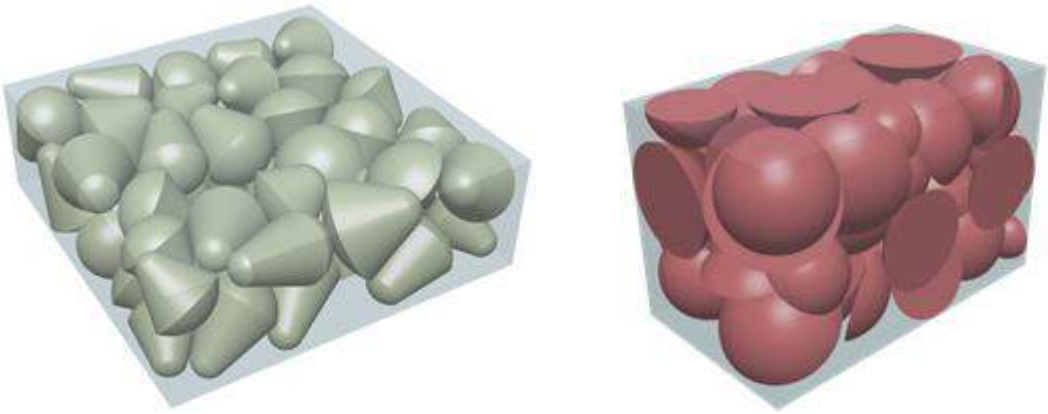
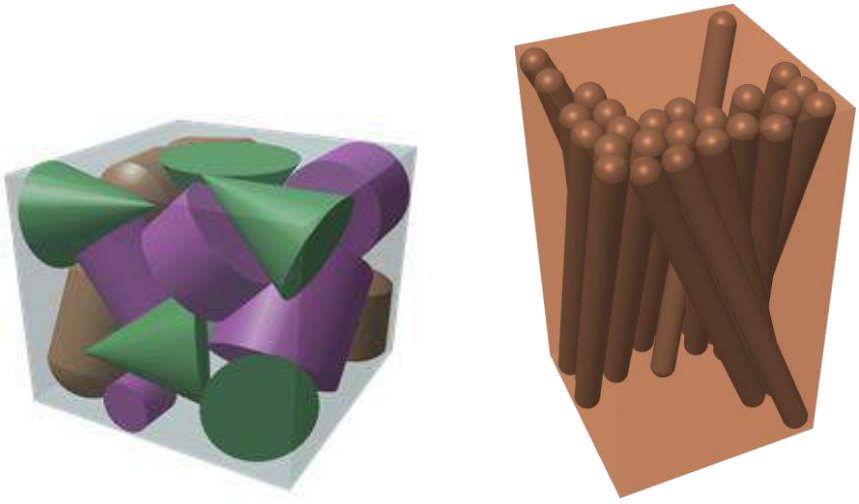


Рис.7.13. Результат упаковк сферичний конусів та сегментів кулі

Так, на рис. 7.14 а зображена упаковка 20 тіл, серед яких 7 конусів, 6 циліндрів і 7 сфероциліндрів, а на рис. 7.14 б - упаковка 25 сфероциліндрів.



а б

Рис. 7.14. Упаковка малої кількості тривимірних тіл

На рис. 7.15 наведені упаковки 60 конусів і циліндрів відповідно.

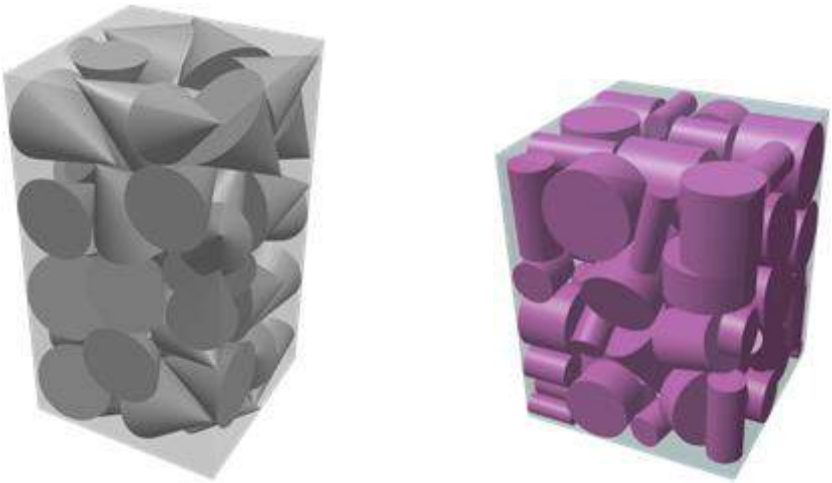


Рис. 7.15. Упаковка конусів і циліндрів

На рис. 7.16 наведені упаковки великої кількості тривимірних тіл: 100 сфероциліндрів (висота трьох з яких істотно перевершує висоти інших сфероциліндрів), 150 сферичних дисків і 200 сферичний конусів, відповідно.

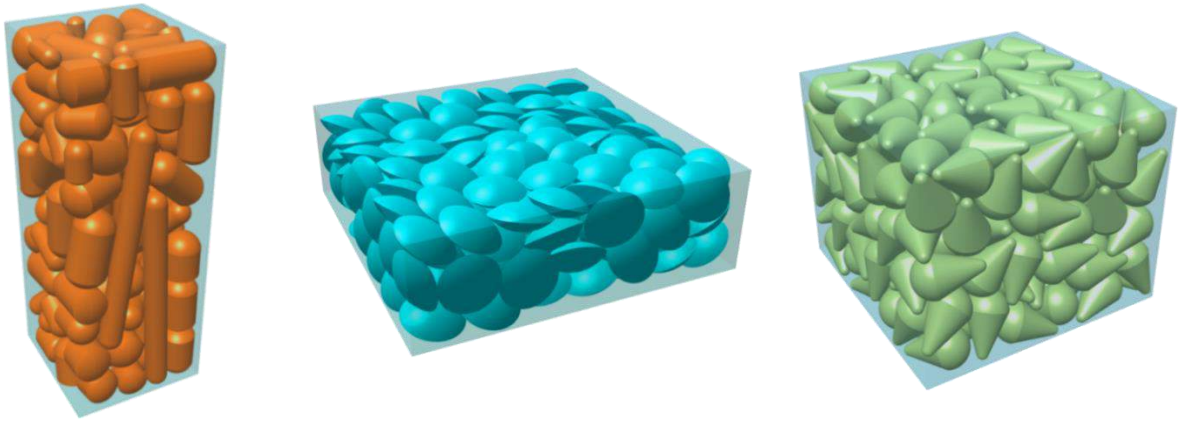


Рис. 7.16. Упаковка великої кількості тривимірних тіл

На рис.7.17 наведено графік часових витрат на розв’язання задачі упаковки тривимірних тіл, поверхня яких сформована сферичними, циліндричними, конічними поверхнями та площинами.

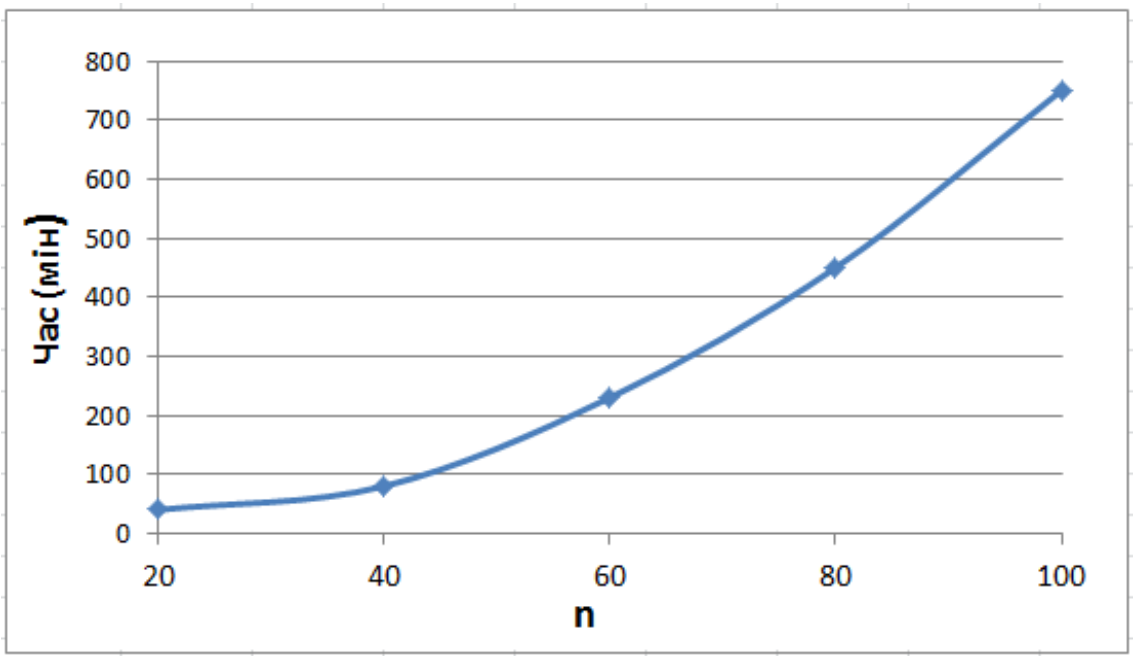


Рис.7.17. Часові витрати на розв’язання задач упаковки тривимірних тіл

7.6 Результати упаковки неорієнтованих багатогранних тіл

7.6.1 Результати упаковки гомотетичних багатогранних тіл

Представимо невеликий приклад, який можна використовувати в якості тестового. Нехай задано найпростіший опуклий багатогранник з такими координатами чотирьох вершин: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,-1). Необхідно

упакувати у прямий прямокутний паралелепіпед мінімального об’єму послідовність з 10 заданих багатогранних тіл з такими коефіцієнтами гомотетії: 0.93, 0.92, 0.89, 0.87, 0.83,0.84 0.77, 0.75, 0.72,0.7.

В результаті розв’язання задачі, використовуючи розроблений підхід, отримано точку локального мінімуму, у якій значення об’єму контейнеру дорівнює 2.4. Ця точка прийнята в якості наближення до глобального мінімуму задачі, координати її наведено у таблиці 7.27, а розміщення багатогранних тіл представлено на рис.7.18.

Таблиця 7.27

Параметри розміщення многогранників

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9.86	9.61	10.4	10.48	9.58	10.39	10.75	8.99	10.53	10.74
y_i	9.53	10.09	10.05	10.03	10.09	10.21	10.14	10.01	10.34	9.66
z_i	9.45	10.09	9.94	10.03	10.42	10.10	9.93	10.06	10.06	9.84
φ_i	5.55	2.25	3.68	3.67	1.52	1.17	3.31	2.28	4.19	3.52
ψ_i	4.71	-0.75	2.35	2.34	-0.9	3.97	2.53	3.14	5.43	5.53
ω_i	5.55	3.1	-1.23	0.38	-1.52	3.28	2.36	1.6	-1.43	4.84

На даний момент нам не відомі публікацій, в яких були б наведені результати розв'язання задачі, яка розглядається. Тому для того щоб продемонструвати ефективність побудованої математичної моделі та розробленого підходу до розв’язання задачі, ми розв’язали багато прикладів різної розмірності. У наших прикладах розглядаються набори з 10 до 500 багатогранних тіл та використовуються багатогранні тіла з різною кількістю вершин.

У таблиці 7.28 наведено обчислювальні витрати та результати розв'язання прикладів.

Таблиця 7.28

Обчислювальні результати

Кількість гомотетичних багатогранних тіл	Число вершин багатогранних тіл	Час	Результат упаковки багатогранних тіл
10	4	20 хв	рис. 7.18
20	16	1 год	рис. 7.19
50	4	3 год	рис. 7.20
100	5	8 год	рис. 7.21
300	4	14 год	рис. 7.22
400	16	30 год	рис. 7.23
500	4	34 год	рис. 7.24

На рис. 7.18–7.24 зображено результат упаковки багатогранних тіл.

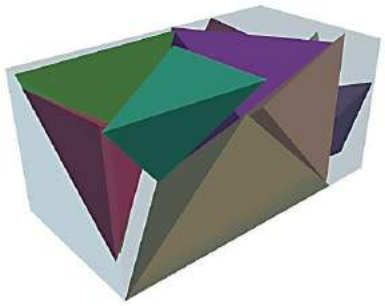


Рис. 7.18. Результат упаковки 10 багатогранних тіл

Рис. 7.19. Результат упаковки 20 багатогранних тіл

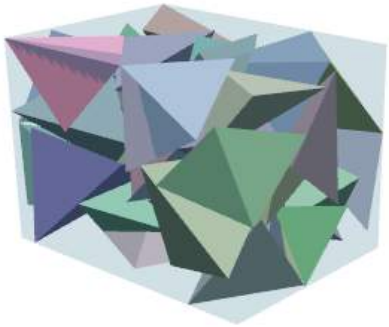


Рис. 7.20. Результат упаковки 50 багатогранних тіл

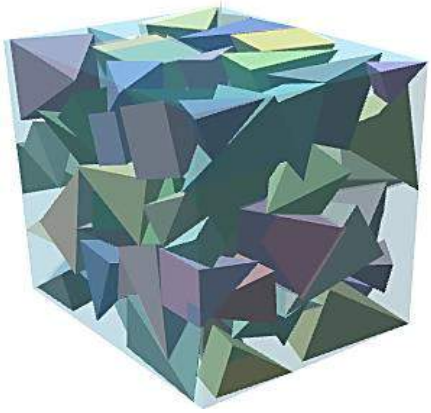


Рис. 7.21. Результат упаковки 100 багатогранних тіл

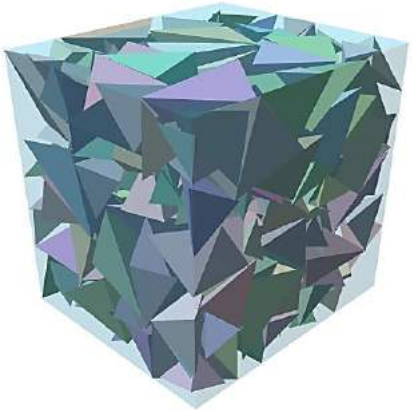


Рис. 7.22. Результат упаковки 300 багатогранних тіл

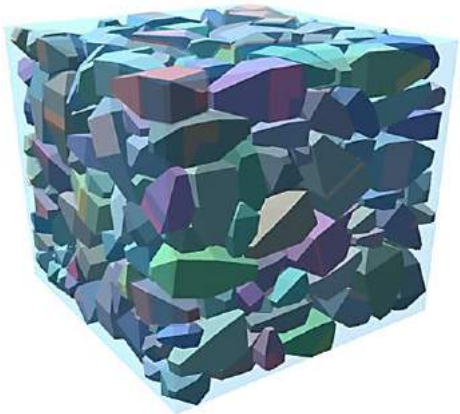


Рис. 7.23. Результат упаковки 400 багатогранних тіл

Рис. 7.24. Результат упаковки 500 багатогранних тіл

Отримані результати показують, що незважаючи на складність математичної моделі розроблений підхід дозволяє ефективно розв'язувати задачі великої розмірності.

7.6.2 Результати упаковки неорієнтованих неопуклих багатогранних тіл

Приклад. Нехай задана множина тривимірних тіл, яка складається з 6 груп неопуклих багатогранних тіл, форма яких представлена на рис. 7.25.

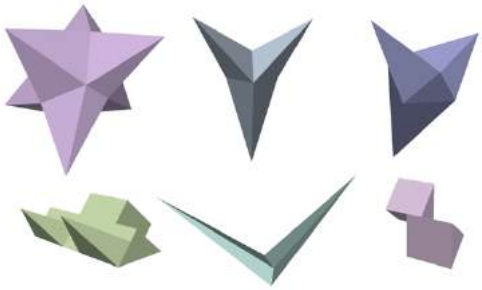
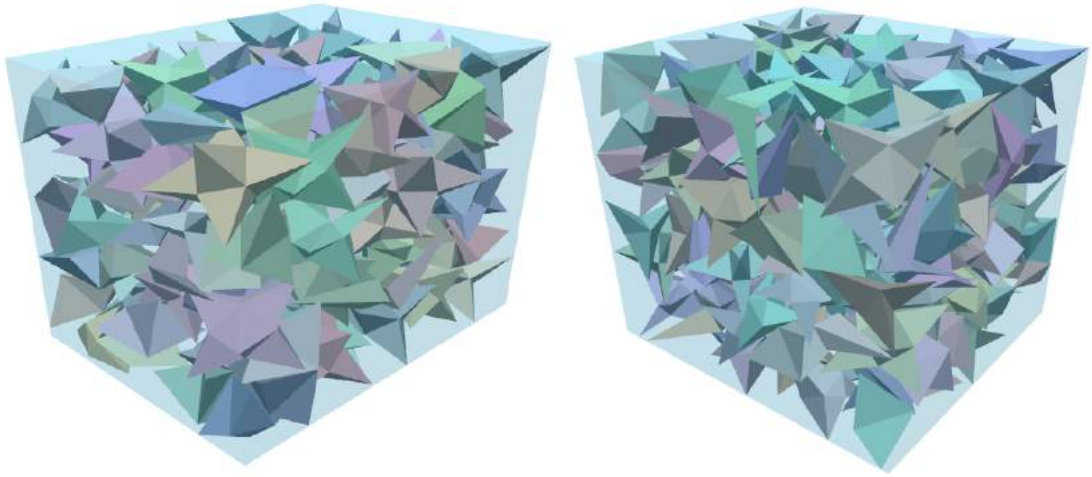


Рис.7.25. Форми багатогранних тіл, які необхідно упакувати

На рис.7.26 наведено види обраних кластерів, з яких була сформована підмножина $\tilde{K}$ кластерів, за допомогою якої виконувався пошук допустимої початкової точки.

Рис.7.26 Види кластерів, які сформували підмножину $\tilde{K}$

Задачу було розв’язано для множини багатогранних тіл, яка складається з 150 та 200 багатогранних тіл. Відповідні результати зображено на рис. 7.27.



а) б)

Рис. 7.27. Результат упаковки неопуклих багатогранних тіл:

а) 150 багатогранних тіл; 200) багатогранних тіл.

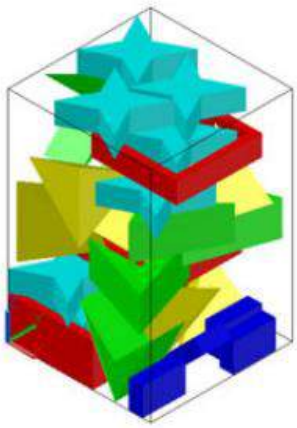
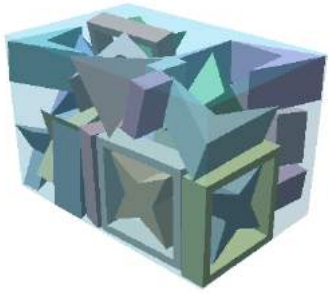
Час розв’язання задач склав 32 та 41 години відповідно.

7.6.3 Порівняння результатів упаковки багатогранних тіл зі світовими аналогами

Для того, щоб перевірити ефективність розробленого підходу, було розв’язано низку тестових прикладів, наведених у роботі [102] за допомогою методу HAPE3D. Отримані результати наведено в таблицях 7.29-7.33.

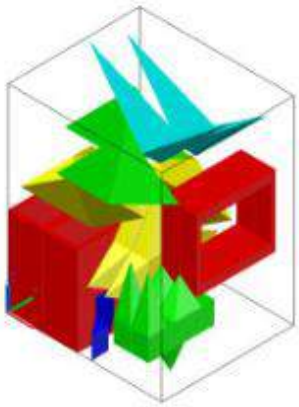
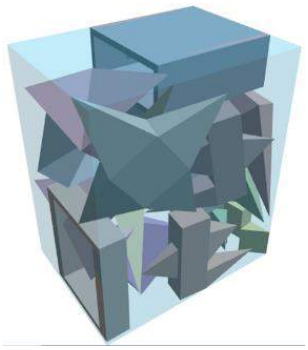
Таблиця 7.29

Порівняння результатів упаковки 36 багатогранних тіл

Підхід	HAPE3D	Розроблений підхід
Об`єм	12480	10720
Час (с)	9637	4789
Упаковка		

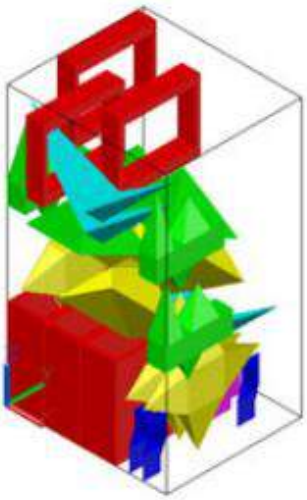
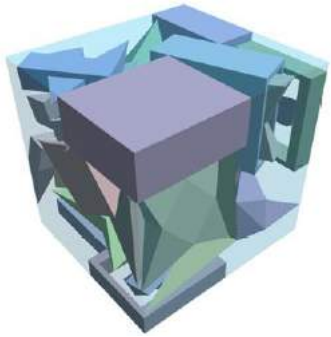
Таблиця 7.30

Порівняння результатів упаковки 20 багатогранних тіл

Підхід	HAPE3D	Розроблений підхід
Об`єм	32550	28500
Час (с)	26202	6656
Упаковка		

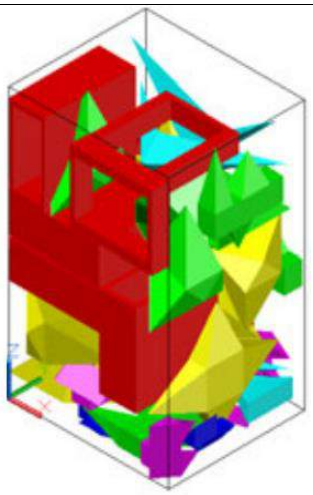
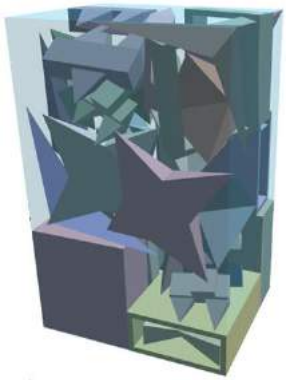
Таблиця 7.31

Порівняння результатів упаковки 30 багатогранних тіл

Підхід	HAPE3D	Розроблений підхід
Об`єм	48300	42450
Час (с)	53741	9543
Упаковка		

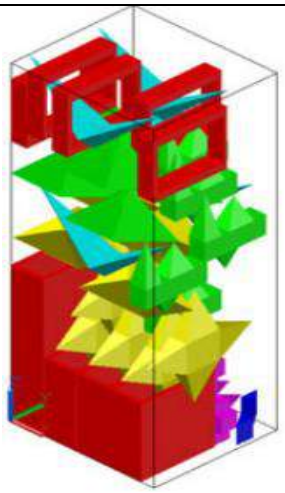
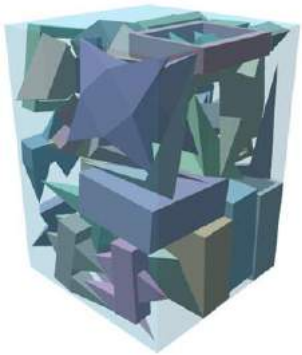
Таблиця 7.32

Порівняння результатів упаковки 40 багатогранних тіл

Підхід	HAPE3D	Розроблений підхід
Об`єм	61950	56012
Час (с)	99952	24543
Упаковка		

Таблиця 7.33

Порівняння результатів упаковки 50 багатогранних тіл

Підхід	HAPE3D	Розроблений підхід
Об`єм	77280	71800
Час (с)	125210	36543
Упаковка		

Як видно за наведених таблиць, в усіх тестових прикладах отримано покращення як за результатом, так і за часом розв’язання.

Таким чином, проведені числові експерименти підтверджують ефективність та достовірність розроблених методів.

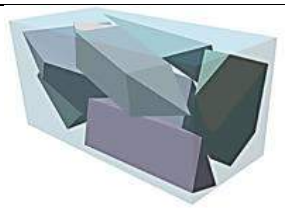
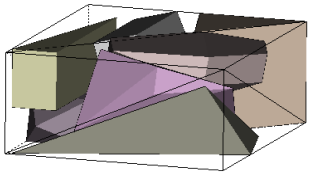
Порівняння підходів до розв'язання задачі оптимальної упаковки опуклих багатогранних тіл.

Під час проведення числових експериментів було виконано порівняння двох підходів, заснованих на використанні Ф-функції та квазі-Ф-функції для побудови математичної моделі задачі оптимального упакування опуклих багатогранних тіл, що допускають безперервні повороти та трансляції, у паралелепіпед мінімального об'єму.

Приклад 1. Використовувався набір багатогранних тіл (n=7) із прикладу 1, представленого в [26]. Результати розв’язання задачі двома підходами представлені в таблиці 7.34.

Таблиця 7.34

Порівняння результатів упаковки 7 багатогранних тіл

Засіб моделювання	Значення функції цілі	Час (сек)	Локально оптимальне розміщення багатогранних тіл
Ф-функція	1837	370	
квазі-Ф-функція	1699	323	

Приклад 2. Використовувався набір багатогранних тіл (n=12) із прикладу 2, представленого в [26]. Результати розв’язання задачі двома підходами представлені в таблиці 7.35.

Таблиця 7.35

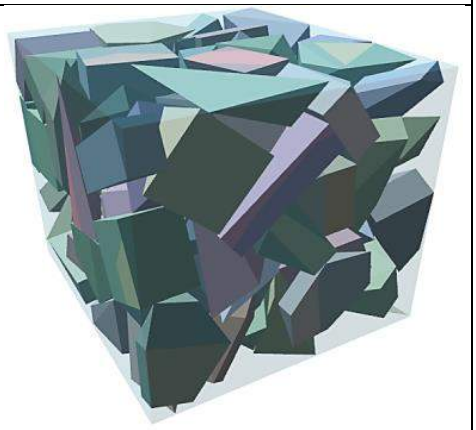
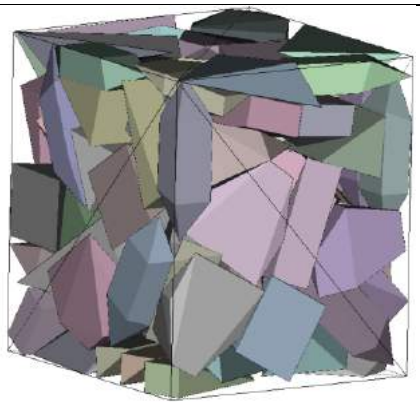
Порівняння результатів упаковки 12 багатогранних тіл

Засіб моделювання	Значення функції цілі	Час (сек)	Локально оптимальне розміщення багатогранних тіл
Ф-функція	3150	450	
квазі-Ф-функція	3131	410	

Приклад 3. Використовувався набір багатогранних тіл (n=98) із прикладу 4, представленого в [26]. Результати розв’язання задачі двома підходами представлені в табл. 7.36.

Таблиця 7.36

Порівняння результатів упаковки 98 багатогранних тіл

Підходи до розв'язання	Значення функції цілі	Час (година)	Локально оптимальне розміщення багатогранних тіл
Ф-функція	22623	7	
квазі-Ф-функція	23113	41	

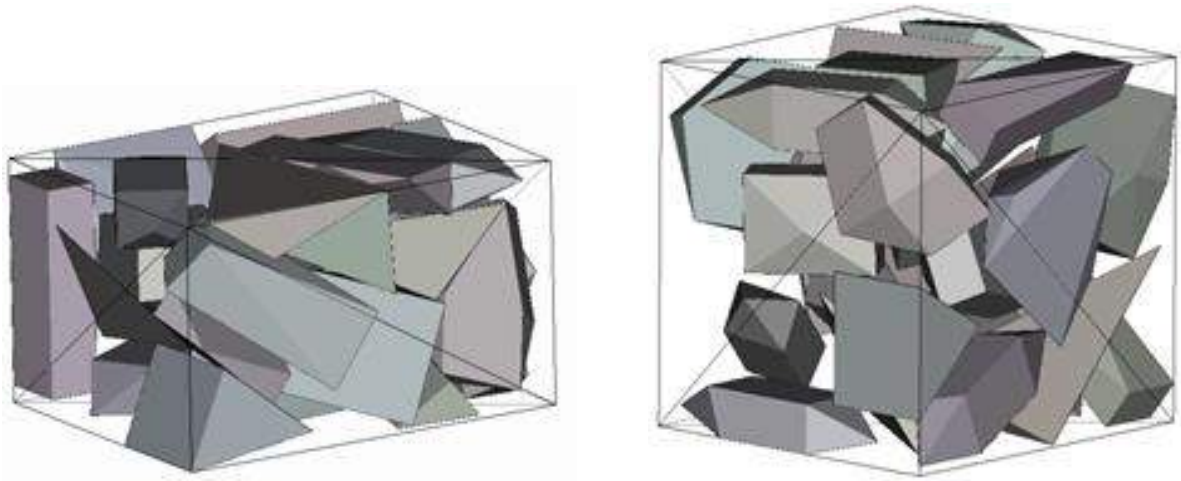
Результати обчислювальних експериментів дозволяють зробити наступні висновки.

1. Для задач невеликої розмірності отримані результати (значення функції цілі й час розв'язання) мають незначні відмінності.

2. Для задач великої розмірності (n>50), час розв'язання задачі за допомогою підходу, заснованого на використанні звичайних Ф-функцій, набагато менше. Цей результат є наслідком того, що математична модель задачі, побудована за допомогою Ф-функцій, має значно меншу розмірність (менше на $3m$).

3. Перевагою підходу, заснованого на використанні Ф-функцій, є можливість розв'язати задачі для великої кількості тривимірних тіл за прийнятний час. Так наприклад, час розв’язання задачі розміщення 400 опуклих багатогранних тіл з використанням Ф-функцій склав 30 годин. При використанні підходу, заснованого на квазі-Ф-функціях, для розв’язання задачі було встановлене обмеження – 48 годин, протягом якого розв'язок не був отриманий.

4. Перевагою підходу, заснованого на використанні квазі-Ф-функцій, є можливість одержати локально оптимальне розміщення опуклих багатогранних тіл з урахуванням заданих мінімально припустимих відстаней [20]. На рис.7.28 наведений приклад розміщення багатогранних тіл з урахуванням мінімально допустимих відстаней. Крім того, для розв’язання задач нелінійного програмування можна безпосередньо використовувати сучасні солвери для пошуку локальних і глобальних экстремумов.



а) б)

Рис.7.28. Результати упаковки багатогранних тіл:
а) без врахування мінімально припустимих відстаней;
б) з врахуванням мінімально припустимих відстаней.

Використання квазі-Ф-функцій замість звичайних Ф-функцій дозволяє спростити аналітичний опис умов неперетинання опуклих багатогранних тіл, і формалізувати обмеження на мінімально припустимі відстані. Квазі-Ф-

функції можуть бути використані для різних форм тривимірних тривимірних тіл, для яких звичайні Ф-фнкції є занадто складними (наприклад, неопуклі багатогранні тіла), або не побудовані (наприклад, еліпсоїди, циліндри, конуси, сфероциліндри). Однак використання квазі-Ф-функцій має свої недоліки, пов'язані із введенням додаткових змінних, що значно підвищує розмірність задачі.

7.7 Висновки за розділом 7

В даному розділі наведено результати чисельних експериментів, проведених за допомогою програмного забезпечення, яке реалізує розроблені математичні моделі та методи розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл.

В ході дослідження розроблених математичних моделей та методів було розв’язано широкий спектр задач пошуку оптимальної упаковки тривимірних тіл, а саме: задача упаковки конгруентних циліндрів у пряму призму, границя основи якої утворена дугами кіл ті відрізками прямих, задачі компоновки тривимірних тіл (сфероциліндрів, циліндрів, паралелепіпедів, куль, сферичних дисків) у циліндричну область із зонами заборони та з урахуванням допустимих відстаней між тілами (результати отримано разом з автором роботи [231]); задача упаковки неорієнтованих паралелепіпедів ті куль у паралелепіпед мінімальної висоти; задача упаковки паралелепіпедів, які припускають ортогональні повороти; задача упаковки тривимірних тіл, поверхня яких утворена конічними, циліндричними, сферичними поверхнями та площинами у кубоїд мінімального об’єму (результати отримано разом з автором роботи [231]) ; задачі упаковки багатогранних тіл (опуклих, неопуклих, гомотетичних) у кубоїд мінімального об’єму.

У ході проведення багаточисельних експериментів було виконано порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників та отримано покращення результатів як за функцією цілі, так і за часом розв’язання.

Проведені експерименти підтвердили ефективність розроблених математичних моделей та методів. Використання технологій паралельних обчислень дозволило скоротити час розв’язання задач на 30%.

Результати, наведені в данному розділі, представлено у наступних роботах: [1,5,12,19,26,29-33,52-56]

ВИСНОВКИ

У дисертації розв’язано важливу наукову проблему створення методології розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, включаючи розробку конструктивних засобів математичного моделювання, побудову нових математичних моделей, розробку нових ефективних методів геометричного проектування.

Основні наукові та практичні результати дисертації:

- ✓ на основі єдиного підходу вирішена важлива науково-технічна проблема, що полягає в розробці ефективних методів пошуку оптимальної упаковки неорієнтованих тривимірних тіл;
- ✓ отримано нові результати у класі задач оптимальної упаковки тривимірних тіл за рахунок одночасного врахування неперервних трансляцій і поворотів та використання на всіх етапах розв’язання задач сучасних НЛП солверів;
- ✓ побудовано нові класи Ф-функцій як для орієнтованих, так і неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;
- ✓ побудовано загальну математичну модель задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами, та різні її реалізації;
- ✓ проведено дослідження властивостей побудованих математичних моделей;
- ✓ розроблено єдину методологію розв’язання задач упаковки тривимірних тіл, яка ґрунтується на підходах пошуку оптимальної упаковки орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл;

✓ розроблено нові стратегії розв’язання задач упаковки тривимірних тіл, які ґрунтуються на гомотетичних перетвореннях тривимірних тіл, пошуку перспективних початкових точок та послідовній статистичній оптимізації:

✓ набули подальшого розвитку та удосконалення методи розв’язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл, а саме: методи побудови допустимих початкових точок для пошуку локальних екстремумів; модифікації методів локальної оптимізації, засновані на використанні методу внутрішньої точки та методу можливих напрямів разом зі стратегіями активного набору, вибору підобластей та декомпозиції основної задачі на задачі меншої розмірності й обчислювальної складності; методи пошуку наближень до глобального екстремуму задач упаковки;

✓ створено програмне забезпечення з використанням технології паралельних обчислень, що реалізує розроблені методи розв’язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл;

✓ ефективність запропонованих засобів підтверджується рядом обчислювальних експериментів, у ході яких було проведено порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників та отримано покращення результатів як за функцією цілі, так і за часом розв’язання;

✓ отримані результати є теоретичною і практичною основою для проведення інженерних розрахунків при автоматизації та моделюванні процесів розміщення різних тривимірних тіл;

✓ на розроблені програмні продукти оформлені свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір;

✓ деякі отримані результати було впроваджено на етапі конструкторського проектування при розв’язанні задач компонувального синтезу для авіаційної промисловості та у логістичних задачах на державному підприємстві “Харківський машинобудівний завод ”ФЕД”, а також у навчальному процесі у ХНУБА.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol. 105. P. 265-293.
2. Чугай А.М. Математическое и компьютерное моделирование при автоматизации объемно-планировочного проектирования машинного зала энергоблока. Науковий вісник будівництва. 2007. Вип. 43. С. 279-282.
3. Евсеева Л.Г., Чугай А.М. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму. Системи управління, навігації та зв'язку. 2007. Вип. 4. С. 121-128.
4. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений. Электронное моделирование. 2008. Т.30. №5. С. 3-21.
5. Stoyan Yu., Chugay A. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region. European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 197. P. 446-455.
6. Чугай А.М. Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки. Вестник двигателестроения. 2009. №3. С.122-126.
7. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета. Доповіді НАН України. 2009. № 10. С. 45-53.
8. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. Кибернетика и системный анализ. 2010. №5. С. 122-131.
9. Баранов А.В., Грицай Д.В., Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М. Розміщення прямокутних графічних елементів в поліграфічному виробництві. Бионика интеллекта. 2010. №1(72). С.29-32.

10. Stoyan Y.G., Zlotnik M.V. , Chugay A.M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region. Journal of the Operational Research Society. 2012. № 63(3). pp. 379391.
11. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 1. Mathematical model and its characteristics. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. № 1. P. 44-52.
12. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 2. A solution method and its realisation. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. №.2. P. 52-61.
13. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическое моделирование взаимодействия неориентированных выпуклых многогранников. Кибернетика и системный анализ. 2012. Т. 48. № 6. С. 36-44.
14. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника. Доповіді НАН України. 2011. № 12. С. 35-40.
15. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов. Доповіді НАН України. 2012. № 12. С. 41-48.
16. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованные Ф-функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцидиндром. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: зб. наук. праць. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2012. № 1037. С. 190-201.
17. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра. Доповіді НАН України. 2013. № 2. С. 36-41.
18. Стоян Ю. Г., Сёмкин В. В., Чугай А. М. Построение начальных точек и поиск локальних экстремумов задачи компоновки 3D объектов в цилиндрической области. Доповіді НАН України. 2013. № 12. С. 52-58.

19. Стоян Ю.Г., Сёмкин В.В., Чугай А. М. Оптимизация компоновки трёхмерных объектов в многосвязной области с учётом кратчайших расстояний. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 3. С. 58-70.

20. Сёмкин В.В., Чугай А.М., Панкратов А.В. Квази Ф-функция для сфероконусов с поворотами. Радиоэлектроника и информатика. 2014. № 1. С. 30-33.

21. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов. Искусственный интеллект. 2014. №1. С. 74-79.

22. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Размещение неориентированных трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний. Искусственный интеллект. 2014. № 2. С. 39-44.

23. Чугай А.М. Метод получения начальных размещений в задаче моделирования структуры систем плотноупакованных объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 2. С. 40-45.

24. Чугай А.М. Один из подходов к поиску хороших локальных минимумов в задаче размещения цилиндрических объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 3. С. 56-60.

25. Stoyan Y.G, Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. Advances in Decision Sciences. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, 19 p. http:.dx.doi.org.10.1155.2014.571743.

26. Pankratov A.V., Romanova T.E., Chugay A.M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. Journal of Mechanical Engineering. 2015. № 18 (2). P. 55-65.

27. Stoyan Y.G., Semkin, V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. iss. 2. P. 296-304.

28. Pankratov O.V., Romanova T.E., Stoyan Y.E., Chugay A.M. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 1 (4). P. 39-47.

29. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Задача упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл. Доповіді НАН України. 2017. № 10. С.28-33.

30. Чугай А.М., Панкратов О.В., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є. Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ 2017. № 6 (46). С. 127-130.

31. Chugay A., Stoian Y. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid. Сучасні інформаційні системи. 2018. № 1. С.16-21.

32. Чугай А.М. Моделювання щільного пакування подібних 3D об'єктів. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ. 2018. Т.1 (48). С. 55-58.

33. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "3D layout optimization". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 51165, Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 06.09.2013.

34. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "Dense packing of 3D objects". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 55364. Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 19.06.2014.

35. Чугай А. М. Оптимизация при компоновке энергомашиностроительного оборудования. Физические и компьютерные технологии: труды 13-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2007. С. 516-518.

36. Чугай А. М. Математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров в призме с учётом минимально допустимых расстояний. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых учёных и специалистов. Харьков: ИПМАШ НАНУ, 2007. С. 27.

37. Чугай А. М. Решение некоторых задач оптимизационного геометрического проектирования модифицированным методом сужающихся окрестностей.

Физические и компьютерные технологии: труды 14-й междунар. науч.-техн. конф. Харьков, 2008. С.486-489.

38. Stoyan Yu., Chugay A. Optimization packing problem of equal circles. Proc. 23-rd European Conference on Operational Research, Bonn, 2009. P. 106.

39. Чугай А. М. Об одном из методов перебора локальных экстремумов в многоэкстремальных задачах упаковки одинаковых объектов. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов второй международной научной конференции, Минск, 2009. Ч. 2. С.198-199.

40. Чугай А. М. Построение Ф-функции для неориентированных параллелепипедов. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конф. молодых ученых и специалистов, Харьков. ИПМАШ НАНУ, 2009. С. 39.

41. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия параллелепипедов с учетом их произвольных поворотов. Физические и компьютерные технологии: труды 15-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2009. С. 448-451.

42. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия неориентированных многогранников, многогранника и шара. Системний аналіз та інформаційні технології - 2010: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф., Київ. ІПСА, 2010. С.340.

43. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия некоторых неориентированных 3D объектов. Інформаційно-комп’ютерні технології - 2010: тези V міжнар. наук.-техн. конф., Житомир: ЖДТУ, 2010. С.11-12.

44. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель задачи упаковки параллелепипедов и сфер в параллелепипеде. Інформатика та системні науки -2011: матеріали всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава: ПУСКУ, 2011. С. 297-300.

45. Чугай А.М. Упаковка неориентированных параллелепипедов и шаров в параллелепипеде. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 2011. С.40.

46. Чугай А.М., Яськов Г.Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей IX міжнар. наук.-практ. конф., Дніпропетровськ, 2011. С. 281-283.

47. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Математическое моделирование отношений геометрических объектов, построенных с помощью шаров и цилиндров. Математичне та імітаційне моделювання систем: тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф, Чернігів-Жукин, 2012. С. 238-240.

48. Чугай А.М. Метод решения задачи упаковки неориентированных параллелепипедов и шаров. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы III межд. конф., Кишинев, 2012. С. 536-539.

49. Stoyan Yu., Chugay A. Packing Cuboids and Spheres. Proc. of 10-th ESICUP Meeting. Lille (France), 2013. P. 21.

50. Чугай А. М., Злотник М.В., Сёмкин В.В, Лимаренко И.В. Один из подходов к улучшению функции цели в задачах упаковки. Системный анализ и информационные технологии: материалы 15-й межд. науч.-техн. конф. SAIT-2013. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2013. С. 217.

51. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 4-й междун. конф., Кишинёв, 2014. Т. 2. С. 416-420.

52. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Решение задачи плотной упаковки неориентированных трёхмерных объектов. Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-

технической конференции SAIT-2014. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. С. 262.

53. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimal packing of convex polytopes. Информационные системы и технологии: тезисы докл. IV междун. науч.-техн. конф., Харьков: ХНУРЕ, 2015. С. 11-12

54. Chugay A., Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Packing and cutting problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тезисы докл. XIII межд. науч.-практ. конф., Днепропетровск, 2015. С. 224-225

55. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доповідей XXI всеукраїнської наук. конф., Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. С. 23-24.

56. Чугай А.М., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Сравнение двух подходов к моделированию и решению задачи упаковки многогранников. Информационные системы и технологии: тезисы докл. 6-й международной науч.-техн. конф., Коблево, 2017. С. 141-142.

57. Чугай А.М. Подходы к математическому моделированию задачи упаковки неориентированых многогранников. Інформатика та системні науки: матеріали VIII всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава, 2017. С. 292-294

58. Chugay A.M. Mathematical modelling of homothetic polytopes packing. Системний аналіз та інформаційні технології - 2017: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. Київ. ІПСА, 2017. С. 19.

59. Чугай А.М. Метод розв’язання задачі упаковки опуклих гомотетичних багатогранних тіл. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання - 2017”. 2 с. Режим доступу: http:.iapmm.lviv.ua.chyt2017.abstracts.Chugay.pdf

60. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Чугай А.М., Панкратов О.В. Задачі геометричного проектування у адитивних технологіях. Математичне та

програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XV міжнар. наук.-практ. конф., Дніпро, 2017. С.193-194.

61. Pankratov A., Romanova T., Chugay A., Stoyan Yu. E. Optimization of the process of 3D-printing for SLS technologies of additive production. 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education» (ICAICTSEE-2017). Sofia. Bulgaria, 2017. FA24. 4 p.
62. Chugay A., Pankratov A., Romanova T., Stoyan Yu.E. An optimization technique in 3D printing design. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 6-й международной конференции, Кишинёв, 2018. Т.2. С. 416-420.
63. Chugay A. M. Optimization of packing polytopes using phi-function technique. Modern problems of mathematical modelling, computational methods and information technologies: proc. of International Scientific Conference, Rivne, 2018. C.17-18.
64. Чугай А.М. Кластерное размещение невыпуклых неориентированных многогранников. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків. 2018. С.20.
65. Fadel G.M., Wiecek M.M. Packing Optimization of Free-Form Objects in Engineering Design. In: Fasano G., Pintér J. (eds) Optimized Packings with Applications. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol 105.
66. Гаврилов В. Н. Автоматизированная компоновка приборных отсеков летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1988. 36 с.
67. Huo J., Li G., Teng, H. Layout optimization of a satellite module using a parallel genetic-Powell-ant colony hybrid algorithm. J. Dalian Univ. Technol., 46(5): 679-684.
68. Fasano G., Lavopa C., Negri D., Vola M.C. CAST: A Successful Project in Support of the International Space Station Logistics. In: Fasano G., Pintér J. (eds)

Optimized Packings with Applications. Springer Optimization and Its Applications, 2015. Vol. 105.

69. Егоров С. Я. Аналитические и процедурные модели компоновки оборудования промышленных производств. М.: Машиностроение-1. 2007. 104 с.

70. Малыгин Е.Н., Егоров С.Я., Громов М.С. Информационная система компоновки оборудования промышленных производств. Информационные системы и процессы. 2006. № 4. С. 55-59.

71. Michael C. Georgiadis, Gordian Schilling, Guillermo E. Rotstein, Sandro Macchietto. General mathematical programming approach for process plant layout. Computers and Chemical Engineering. 1999. № 23. P.823- 840.

72. Schmidt-Traub H., Holtkotter T., Lederhose M., Leuders P. Ann Approach to Plant Layout Optimization. Chem. Eng. Taclinol. 1999. № 22. P. 499-504.

73. Martin Baumers, Phill Dickens, Chris Tuck , Richard Hague. The cost of additive manufacturing: machine productivity, economies of scale and technology-push. Technological Forecasting & Social Change 102. 2016. 193201.

74. Vanek J., Garcia Galicia, J. A., Benes, B., Mech, R., Carr, N., Stava, O., Miller, G. S.: PackMerger: A 3D Print Volume Optimizer. Computer graphics forum. 00: 111.2014.

75. Canellidis V., Giannatsis, J. and Dedoussis, V. Int J Adv Manufacture Technology. 2009. 45: 714. doi:10.1007.s00170-009-2006-y

76. Ramya A. 3D printing technologies in various applications.A. Ramya, Sai Vanapalli. International Journal of Mechanical Engineering and Technology. Vol. 7, № 3. 2016. P.396409.

77. Leary M., Merli L., Torti F., Mazur M, Brandt M. Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures. Materials and Design. 2014. 63. P.678690.

78. Baumers M. The cost of additive manufacturing: machine productivity, economies of scale and technology-push. Baumers M., Dickens P., Tuck C., Hague R. Technological Forecasting & Social Change. 2016. №102. P.193201.

79. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. Powder Technology. 2016. T. 301, C. 160168.

80. Korte A.C.J., Brouwers H.J.H. Random packing of digitized particles. Powder Technology. 2013. № 233. C. 319324.

81. Nolan G. T., Kavanagh P. E. Computer simulation of random packing of hard spheres. Powder Technology. 1992. № 72. P. 149155.

82. Nurkanov E. Yu., Kadushnikov R. M., Kamenin I. G. Investigation of the density characteristics of three dimensional stochastic packs of spherical particles using a computer model. Powder Metallurgy and Metal Ceramics. 2001. V. 40. № 56. - P. 229235.

83. Petrov M. S., Gaidukov V. V. Kadushnikov R. M. Numerical method for modelling the microstructure of granular materials. Powder Metallurgy and Metal Ceramics. 2004. V.43. № 78. P. 330335.

84. Gliozzi S., Castellazzo A., Fasano G. A Container Loading Problem MILP-Based Heuristics Solved by CPLEX: An Experimental Analysis. In: Fasano G., Pintér J. (eds) Optimized Packings with Applications. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol. 105.

85. Ambrosino D., Sciomachen A. Using a Bin Packing Approach for Stowing Hazardous Containers into Containerships. In: Fasano G., Pintér J. (eds) Optimized Packings with Applications. Springer Optimization and Its Applications.2015. Vol 105. Springer

86. Haessler R.W., Talbot F.B. Load planning for shipments of low density products. European Journal of Operational Research. 1990. Vol 44. Is.2. P. 289 299

87. Bortfeldt A., W¨ascher G. Constraints in container loading: a state-of-the-art review. European Journal of Operational Research. 2013. Vol. 229. Is.1. P. 120.

88. Allen S.D., Burke E.K., Kendall G. A hybrid placement strategy for the three-dimensional strip packing problem. Eur. J. Oper. Res. 2011. 209(3):219-227.

89. Al-Raoush R., Alsaleh M.2 Simulation of random packing of polydisperse particles. Powder Technol. 2007. 176(1):47-55.

90. Li S.X., Zhao J., Lu P., Xie Y. Maximum packing densities of basic 3D objects. China Science Bulletin. 2010. №55(2). С.114119.

91. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс/ 2005. 1296 с.

92. Karabulut K., İnceoğlu M. A Hybrid Genetic Algorithm for Packing in 3D with Deepest Bottom Left with Fill Method. Advances in Information Systems. 2004. T.3261,C. 441-450.

93. Pei Cao, Zhaoyan Fan, Robert Gao, Jiong Tang. A Multi-Objective Simulated Annealing Approach Towards 3D Packing Problems With Strong Constraints. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. T.2A, № DETC2015-47670, C. V02AT03A052.

94. Guangqiang L., Fengqiang Z., Rubo Z.; Du Jialu Du., Chen G.,Yiran Z. A Parallel Particle Bee Colony Algorithm Approach to Layout Optimization, Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 2016. T.13. №7. C. 4151-4157.

95. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. Computing Science and Statistics. 1998. №29. C. 396-401.

96. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. Journal of Global Optimization. 2016. № 65. pp. 709-743.

97. Fasano G.A. Global Optimization point of view for non-standard packing problems. Journal of Global Optimization. 2013. № 55. C. 279299.

98. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D Object Packing Problem into a Parallelepiped Container Based on Discrete-Logical Representation. IFAC-PapersOnLine. Vol.49. №12. C. 001005.

99. Egeblad J., Nielse B.K., Odgaar A. Fast neighborhood search for two- and three-dimensional nesting problems. European Journal of Operations Research. 2007. №183(3).C. 1249-1266.

100. Li S.X., Zhao J., Lu P., Xie Y. Maximum packing densities of basic 3D objects. China Science Bulletin. 2010. №55(2). C.114119.

101. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. Powder Technology. 2016. T. 301, C. 160168.

102. Liu X., Liu J., Cao A. HAPE3D-a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. Frontiers Inf Technol Electronic Eng. 2015. № 16. C. 380-390.

103. Wäscher G. An improved typology of cutting and packing problems. Gerhard Wäscher, Heike Haußner, Holger Schumann. European Journal of Operational Research 183. 2007. pp. 1109-1130.

104. Dyckhoff H. A typology of cutting and packing problems. Harald Dyckhoff. European Journal of Operational Research 44. 1990. pp. 145-159.

105. Hifi M. A Literature Review on Circle and Sphere Packing Problems: Models and Methodologies. Mhand Hifi and Rym M'Hallah. Advances in Operations Research. 2009. doi:10.1155.2009.150624.

106. Sriramya P. A State-of-the-Art Review of Bin Packing Techniques. P. Sriramya, P.B. Varthini. European Journal of Scientific Research. 2012. № 86(3). pp. 360-364.

107. Sutou A. Global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3D. A. Sutou, Y. Dai. Journal of optimization theory and applications. 2002. Vol. 114, № 3. pp. 671-694.

108. Stoyan Y. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. Y. Stoyan, G. Yaskov and G. Scheithauer. Central European Journal of Operations Research. 2003. № 11. pp. 389-407.

109. Stoyan Y. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. Y. Stoyan and G. Yaskov. Journal of Global Optimization. 2012. Vol. 52, № 4. pp. 855-868.

110. Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. G. Yaskov, Y. Stoyan and A. Chugay. Proceedings of the Workshop on Cutting Stock Problems. Miercurea-Ciuc, Romania. 2006. pp. 75-82.

111. Stoyan Y. G. Packing identical spheres into a cylinder. Y. G. Stoyan and G. N. Yaskov. International Transactions in Operational Research 17(1). 2010. pp. 51-70.

112. Zhao L. Numerical simulation of sphere packing with arbitrary diameter distribution. L. Zhao, S. X. Li, Y. W. Liu. Chin J Comput Phys. 2007. № 24(5). pp. 625-630.

113. Wu Y., Li W., Goh M., et al. Three-dimensional bin packing problem with variable bin height. Eur. J. Oper. Res. 2010.202(2):347-355

114. Korte A. C. J., Brouwers H. J. H. Random packing of digitized particles. Powder Technology. 2013. №. 233. pp. 319-324.

115. Jia X., Gan M., Williams R.A., Rhodes D. Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities. Powder Technology. 2007. №. 174. pp. 10-13.

116. Li S. X. Sphere assembly model and relaxation algorithm for packing of non-spherical particles. S. X. Li, J. Zhao. Chin J Comput Phys. 2009. Vol. 26, Issue 3. pp. 167-173.

117. Zhang W., Gao Y., Fang, L., et al., 2008. Three-dimensional component layout modeling and optimization design. Acta Aeronaut. Astronaut. Sin., 29(6):1554-1562

118. Fasano G. A Global Optimization point of view for non-standard packing problems. G. Fasano. Journal of Global Optimization. 2013. Vol. 55, Issue 2. pp. 279-299.

119. Petrov M. S. Numerical method for modelling the microstructure of granular materials. M. S. Petrov, V. V. Gaidukov, R. M. Kadushnikov. Powder Metallurgy and Metal Ceramics. 2004. Vol. 43, Issue 7-8. pp. 330-335.

120. Egelbad J., Nielsen B. K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes. Computational Geometry. 2009. Vol. 42, Issue 4. pp. 269-288.

121. Мизгулин В. В., Кадушников Р. М., Алиевский Д. М., Алиевский М. Моделирование плотных материалов методом упаковки сферополиэдров. Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, № 4. С. 757-766.

122. Мизгулин В.В., Косульников В.В., Кадушников Р.М. Оптимизационный подход к имитационному моделированию микроструктур. Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 4. С. 597-606.

123. Williams S. R. and Philipse A. P. Random packing of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction. Physics Review E. 2003. Vol. 67, Article ID 051301. pp. 051301-1051301-9.

124. Lee Y. A 3D ellipsoid-based model for packing of granular particles. Y. Lee, C. T. Yang, C. S. Chien. International Journal of Computer Applications in Technology. 2003. Vol. 17, Issue 3. pp. 148-155.

125. Gan M., Gopinathan N., Jia X., Williams R.A. Predicting packing characteristics of particles of arbitrary shapes. KONA. 2004. № 22. pp. 82-93.

126. Birgin E. G., Martinez J. M., Ronconi D. P. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container. European Journal on Operations Research. 2005. Vol. 160, Issue 1. pp. 19-33.

127. Egeblad J., Garavelli C., Lisi S., Pisinger D., Egeblad J. Heuristics for Container Loading of Furniture. European Journal of Operational Research. 2010. Vol. 200, Issue 3. pp. 881-892.

128. Fasano G. MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems. G. Fasano. 4OR: Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. 2008. Vol. 6, Issue 3. pp. 291-310.

129. Aladahalli C., Cagan J., Shimada K. Objective function effect based pattern search theoretical framework inspired by 3D component layout. Journal of Mechanical Design. 2007. Vol. 129, Issue 3. pp. 243-254.

130. Егоров С. Я. Аналитические и процедурные модели компоновки оборудования промышленных производств. М.: Машиностроение-1, 2007. 104 с.

131. Torquato S. Dense polyhedral packings: Platonic and Archimedean solids.S. Torquato, Y. Jiao. Physics Review E. 2009. Vol. 80, Article ID 041104. pp. 041104-1041104-21.

132. Egeblad J. Heuristics for multidimensional packing problems. PhD Thesis. Copenhagen, 2005. 236 p.

133. Ikonen I., Biles W., Kumar A., Wissel J. C., Ragade R. K. A genetic algorithm for packing three-dimensional non-convex objects having cavities and holes. Proceedings of 7th International Conference on Genetic Algorithms. 1997. pp. 591-598.

134. Cagan J., Degentesh D., Yin S. Cagan J. A simulated annealing-based algorithm using hierarchical models for general three-dimensional component layout. Computer Aided Design. 1998. Vol. 30, Issue 10. pp. 781-790.

135. Li N. A parallel simulated annealing algorithm based on functional feature tree modeling for 3D engineering layout design. Nan Li, Jianzhong Cha, Yiping Lu. Applied Soft Computing. 2010. Vol. 10, Issue 2. pp. 592-601.

136. Yin S., Cagan J. An extended pattern search algorithm for three-dimensional component layout. ASME Journal of Mechanical Design. 2000. Vol. 122, Issue 1. pp. 102-108.

137. Hills W. A new approach to spatial layout design in complex engineered products. W. Hills, N. Smith. Proceedings of the International Conference on

Engineering Design (ICED). Tampere, Finland. 19-21 August, 1997. pp. 691-696.

138. Dowsland W. B. Three-dimensional packing solution approaches and heuristic development. International Journal of Production Research. 1991. № 8. pp. 1673-1685.

139. George J.A., Robinson D.F. A heuristic for packing boxes into a container. Computers and Operational Research. 1980. № 7. pp. 147-156.

140. Pisinger D. Heuristics for the container loading problem. David Pisinger. European Journal of Operational Research. 2002. Vol. 141, Issue 2. pp. 382-392.

141. Brunetta L. and Grégoire P. A general purpose algorithm for three-dimensional packing. INFORMS Journal on Computing. 2005. Vol. 17, Issue 3. pp. 328-338.

142. Bortfeldt A., Gehring H., and Mack D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. Parallel Computing. 2003. Vol. 29, Issue 5. pp. 641-662.

143. Crainic T.G., Perboli G. and Tadei R. A Two-Stage Tabu Search Heuristic for the Three-dimensional Bin Packing Problem. European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 195, Issue 3. pp. 744-760.

144. Dai Z. An octree method for interference detection in computer aided 3-D packing. Z. Dai, J. Cha. Advances in Design Automation 1994: Proceedings of the 20th ASME Design Automation Conference. 1994. № 1. pp. 29-33.

145. Dai Z. An octree based heuristic algorithm for 3-D packing. Z. Dai, J. Cha. Advances in Design Automation 1994: Proceedings of the 20th ASME Design Automation Conference. 1994. № 2. pp. 125-133.

146. Sheithauer D., Terno J. A Branch & Bound algorithm for solving one-dimensional cutting stock problems exactly. G. Aplicationes Mathematicae. 1995. Vol. 23, Issue 2. pp. 151-167.

147. Martello S., Pisinger D. and Vigo D. The tree-dimensional bin packing problem. Operations Research. 2000. Vol. 48, Issue 2. pp. 256-267.

148. den Boef E. Erratum to “The tree-dimensional bin packing problem: Robot-Packable and orthogonal variants of packing problems”. E. den Boef, J. Korst, S. Martello, D. Pisinger and D. Vigo. Operations Research. 2005. Vol. 53, Issue 4. pp. 735-736.

149. Hifi M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: a comparative study.Computers & Operations Research. 2004. Vol. 31, Issue 5. pp. 657-674.

150. Landon M.D., Balling R.J. Optimal packaging of complex parametric solids according to mass property criteria. Journal of Mechanical Design. 1994. Vol. 116, Issue 2. pp. 375-381.

151. Cohoon J. P. Genetic placement. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1987. Vol. 6, Issue 6. pp. 956-964.

152. Schnecke V., Vornberger O. An adaptive parallel genetic algorithm for VLSI-layout optimization. Lecture Notes in Computer Science. 1996. Vol. 1141. pp. 859-868.

153. Valenzuela C. L. VLSI placement and area optimization using a genetic algorithm to breed normalized postfix expressions. C. L. Valenzuela, P. Y. Wang. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2002. Vol. 6, Issue 4. pp. 390-401.

154. Vinoth J. A., Batri K. Layout problem optimization in VLSI circuits using genetic algorithm. International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 2014. Vol. 3, Issue 4. pp. 711-716.

155. Muntean O. An evolutionary approach for the 3D packing problem. Oana Muntean. Proceedings of the International Conference on Knowledge Engineering, Principles and Techniques, KEPT2007. Cluj-Napoca, Romania. June 6-8, 2007. pp. 193-200.

156. Kirkpatrick S., Gellat C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing. Science. 1983. Vol. 220, № 4598. pp. 671-679.

157. Wong D.F. Simulated annealing for VLSI design. Wong D. F., Leong H. W., Liu C. L. Springer US, 1988. 202 p. (The Springer International Series in Engineering and Computer Science; Book 42).

158. Jang S.-H. A study on three dimensional layout design by the simulated annealing method. Seung-Ho Jang. Journal of Mechanical Science and Technology. 2008. Vol. 22, Issue 11. pp. 2016-2023.

159. Jajodia S. CLASS: Computerized Layout Solutions Using Simulated Annealing. S. Jajodia, I. Minis, G. Harhalakis, J. M. Proth. International Journal of Production Research. 1992. Vol. 30, Issue 1. pp. 95-108.

160. Szykman S. A simulated annealing approach to three-dimensional component packing. S. Szykman, J. Cagan. Journal of Mechanical Design. 1995. Vol. 95, Issue 2A. pp. 308-314.

161. Szykman S. Constrained three dimensional component layout using simulated annealing. S. Szykman, J. Cagan. Journal of Mechanical Design. 1997. Vol. 119, Issue 1. pp. 28-35.

162. Szykman S. Optimal product layout using simulated annealing. PhD Thesis. S. Szykman. Carnegie Mellon University, 1995.

163. Huang M. D., Romeo F. Sangiovanni-Vincentelli A. An efficient general cooling schedule for simulated annealing. IEEE International Conference on Computer Aided Design Digest of Technical Papers. Santa Clara, CA. 11-13 November, 1986. pp. 381-384.

164. Sangiovanni-Vincentelli Hustin A., TIM M.D. A new standard cell placement program based on the simulated annealing algorithm. IEEE Physical Design Workshop on Placement and Floorplanning. 1987. 122 p.

165. Szykman S.,Cagan J. Synthesis of optimal non-orthogonal routes. Journal of Mechanical Design. 1996. Vol. 118, Issue 3. pp. 419-424.

166. Kolli A., Cagan J., Rutenbar R. A. Packing od generic, three dimensional components based on multi-resolution modeling. Proceedings of the 22nd ASME Design Automation Conference (DAC-1479). Irvine, CA. 19-22 August, 1996.

167. Campbell M.I., Amon C.H., Cagan J. Optimal three-dimensional placement of heat generating electronic components. Journal of Electronic Packaging. 1997. Vol. 119, Issue 2. pp.106-113.

168. Hooke R., Jeeves T. A. Direct search solution of numerical and statistical problems. Journal of the Association for Computing Machinery. Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 8, Issue 2. pp. 212-229.

169. Torczon V. From evolutionary operation to parallel direct search: pattern search algorithms for numerical optimization. V. Torczon, M. Trosset. Computing Science and Statistics. 1998. Vol. 29. pp. 396-401.

170. Yin S., Cagan J., Hodges P., Li X. Layout of an automobile transmission using three-dimensional shapeable components. Journal of Mechanical Design. 2004. Vol. 126, Issue 1. pp. 188-191.

171. Yin S., Cagan J. Exploring the effectiveness of various patterns in an extended pattern search layout algorithm. Journal of Mechanical Design. 2004. Vol. 126, Issue 1. pp. 22-28.

172. Aladahalli C., Cagan J., Shimada K. Objective function effect based pattern search an implementation for 3D component layout. Journal of Mechanical Design 2007. Vol. 129, Issue 3. pp. 255-265.

173. Coffman E. G., Shor P. W. Average-case analysis of cutting and packing in two dimensions. European Journal of Operational Research. 1990. Vol. 44, Issue 2. pp. 134-144.

174. Smith N., Hills W., Cleland G. A layout design system for complex made-to-order products. Journal of Engineering Design. 1996. Vol. 7, Issue 4. pp. 363-375.

175. Allen S. D., Burke E. K., Kendall G. A hybrid placement strategy for the three-dimensional strip packing problem. European Journal of Operational Research. 2011. Vol. 209, Issue 3. pp. 219-227.

176. Peng Y., Zhang D., Francis Y., Peng Y. A hybrid simulated annealing algorithm for container loading problem. Chin. Proceedings of the first

ACM.SIGEVO Summit on Genetic and Evolutionary Computation. Shanghai, China. 12-12 June, 2009. pp. 919-928.

177. Eisenbrand F., Funke S., Karrenbauer A., Schömer E., Reichel J. Packing a trunk now even with a twist. Proceedings of ACM Symposium on Solid and Physical Modeling (SPM). Cambridge. 2005. pp. 197-206.

178. Jacquenot G., Bennis F., Maisonneuve J.-J., Wenger P. Jacquenot G. 2D multi-objective placement algorithm for free-form components. Proceedings of ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. San Diego, USA. August 30 - September 2, 2009.

179. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. В. Л. Рвачёв. К.: Наукова думка, 1982. 552 с.

180. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. Думка. 1986. 267 с.

181. Stoyan Yu. G. Ф-function and its basic properties. Докл. НАН Украины. Сер. А. 2001. № 8. С. 112-117.

182. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. Journal of Global Optimization. 2016. Vol. 65, Issue 2, pp 283307.

183. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Свойства и способы реализации функции плотного размещения. Киев, 1972. 46 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т кибернетики; № 72-18).

184. Гиль Н. И., Комяк В. М. Об одном подходе к построению годографа вектор-функции плотного размещения плоских геометрических объектов, устойчивого к вычислительной погрешности. Харьков. 1991. 23 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения ; № 350).

185. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Свойства и способы реализации функции плотного размещения. Киев, 1972. 46 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т кибернетики; № 72-18).

186. Stoyan Yu.G., Loiko A. F. Automation of arrangement design of engineering systems of block design. Mathematical model. Engineering simulation. 1998. № 15. P. 815-825.

187. Гиль Н. И. Математическое моделирование нерегулярного размещения плоских геометрических объектов в системах автоматизации проектирования (теоретические основы, методы, приложения): автореф.. доктора техн. наук: 05.12.13. Гиль Николай Иванович. Минск, 1990. 32 с.

188. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Метод асимптотического перебора локальных экстремумов. Харьков, 1974. 48 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 1-74).

189. . Магас С. Л. Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов на полосе: автореф. … канд. физ.-мат. наук : 01.05.03. Магас Сергей Леонидович. М., 1984. 20 с.

190. Стоян Ю. Г., Новожилова М. В. Метод поиска локального экстремума в задаче размещения многоугольников в полосе. Харьков, 1987. 24 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 263).

191. Пандорин А. К. Методы и алгоритмы построения раскладок в системах управления раскроем изотропных материалов: автореф.. канд. техн. наук : 01.05.03. Пандорин Александр Константинович. Харьков, 1988. 17 с.

192. Стоян Ю. Г., Галата А. Я. О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема. Кибернетика. 1972. № 2. С. 81-86.

193. Стоян Ю. Г., Пономаренко Л. Д. Алгоритм приближенного решения задачи плотнейшей упаковки набора параллелепипедов в параллелепипеде с областями запрета. Автоматика и вычислительная техника. 1975. № 1. С. 46-54.

194. Стоян Ю.Г., Винарский В.Я. Методы оптимального двухрядного периодического размещения трехмерных многогранников. Харьков, 1985. 26 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 211).

195. Яськов Г.Н., "Размещение максимального числа равных кругов в круге", Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2, 2012. - С. 57-64

196. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. К.: Наук. думка. 1980. 208 с.

197. Стоян Ю. Г. О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема. Кибернетика. 1972. № 3. С. 81-86.

198. Стоян Ю. Г., Пономаренко Л. Д. Алгоритм приближенного решения задачи плотнейшей упаковки набора параллелепипедов в параллелепипеде с областями запрета. Автоматика и вычислительная техника. 1975. № 1. С. 46-54.

199. Стоян Ю.Г., Винарский В.Я. Методы оптимального двухрядного периодического размещения трехмерных многогранников. Харьков, 1985. 26 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 211).

200. Пономаренко Л. Д., Туранов И. Н. Один подход к построению плотных упаковок выпуклых многогранников в заданной области трехмерного пространства. Харьков, 1979. 13 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 154).

201. Панкратов А. В., Пономаренко Л. Д. Линейная невыпуклая модель и метод локальной оптимизации в задачах упаковки выпуклых многогранников. Харьков, 1987. 28 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 262).

202. Панкратов А. В. Оптимизационная задача упаковки многогранников (линейная модель и метод решения). А. В. Панкратов, Л. Д. Пономаренко.

Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. 1987. № 83. С. 14-19.

203. Гиль Н. И., Черноморец А. А. Метод построения поверхности 0-уровня Ф-функции произвольных многогранников. Харьков, 1992. 29 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 358).

204. Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова Математическое моделирование ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами. Кибернетика и системный анализ. 2012. том 48, №3. С. 12-17

205. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Синявин В.О. «Информационная система решения задач оптимальной кластеризации 3D-объектов». Системи обробки інформації. Х.:ХУПС, 2012. Вид. 4(33). С. 178-181

206. Гребенник И.В., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б., Яськов Г.Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. Збірник наукових праць "Системи обробки інформації".- 2012. Вип. 7(105). С. 150-157.

207. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А."Математическое моделирование отношений эллипсов в задачах оптимальной кластеризации объектов". Искусственный интеллект. № 4. 2012. С.89-97.

208. Панкратов А.В., Романова Т.Е. "Эффективный алгоритм кластеризации 20-объектов в прямоугольной области минимальных размеров". Журнал обчислювальної та прикладної математики, №4, 2012. С.63-71.

209. Яськов Г.Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. Збірник наукових праць "Системи обробки інформації". 2013. Вип. 4(111). С. 97-100.

210. Коваленко А.А., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом

специальных ограничений поведения системы. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. № 1 (111). С. 126134.

211. Стоян Ю.Г., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Методи розв'язання задач кластеризації 2D-тривимірних тіл у крузі мінімального радіуса. Доповіді Національної академії наук України. 2013. № 8. С.106115.

212. Romanova T., Rublev B., Bashuk A., Sinyavin V. Phi-functions for oriented composed 3D-objects. Системи обробки інформації. 2013. 1(108). С. 182-187.

213. Коваленко А.А., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Размещение объектов в контейнере параболической формы с круговыми стеллажами с учетом ограничений поведения. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. №2 (112). С.7582.

214. Гиль Н.И., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А. Задача упаковки неориентированных эллипсов. Збірник наукових праць ХУПС вип. 2013. 4 (37). С. 152-156

215. Панкратов А.В. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов. Системи обробки інформації. 2013. 1(108). С. 182-186.

216. Стоян Ю.Г., Панкратов А.В., Романова Т. Е., Чернов Н.И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов. Доповіді Національної академії наук України. 2014. № 9. С. 49-54.

217. Коваленко А.А., Романова Т.Е. Phi-функции для моделирования ограничений включения в оптимизационных задачах компоновки». Журнал «Системи обробки інформації» №1(117) Харків: 2014. Вип. №1(117). С. 3439.

218. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А. Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2014. № 1(115). С. 27-34.

219. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А. Эффективный алгоритм упаковки неориентированных эллипсов. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. №5 (71) С. 28-35.

220. Гиль Н.И. Квази-phi-функции для эллиптических сегментов. Системи обробки інформації. Харків: Харківський університет повітряних сил ім. І. Кожедуба. 2014. №. 5 (117). С. 27-32.

221. G. N. Yaskov, Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. Пробл. Машиностроения. 2014. Т. 17, № 2. Р. 48-53.

222. Комяк В.М., Панкратов А.В., Приходько А.Ю., Светличная С.Д. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Коваленко А.А. Задача равновесной компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17., № 4. 11 с.

223. Коваленко А.А., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Задача балансной компоновки 3D-объектов: математическая модель и методы решения. Кибернетика и системный анализ. 2015. № 4, С 71-81.

224. Панкратов А.В. Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей. Радиоэлектроника и информатика, 2015. 2(69). С. 6-9.

225. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Коваленко А.А. Задача равновесной компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса. Проблемы Машиностроения. 2015. Т.18, № 1, С.60-66

226. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Хлуд О.М. Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов. Радиоэлектроника и информатика. 2015. №3. С. 14-20.

227. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стоян Ю.Е. Псевдонормализованные квази-phi-функции для многогранников Радиоэлектроника и информатика. 2015. № 3. С. 56-61.

228. Pankratov A, Romanova T, Khlud O. Quasi-Phi-Functions in Packing of Ellipsoids. Radioelectronics & Informatics, Scientific and Technical Journal. 2015. № 1 (68). P. 37-41.

229. Стоян Ю.Г., Шайтхауер Г., Яськов Г.Н. Упаковка неравных шаров в различные контейнеры. Кибернетика и системный анализ. 2016. № 3. С. 97105.

230. Панкратов О.В. Математичні моделі, методи та інформаційні технології розв’язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об’єктів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук : спец. 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи”. Панкратов О. В. Харків, 2013. 40 с.

231. Сьомкін В.В. Автореферат дисертаційної роботи «Упаковка опуклих тривимірних тривимірних тіл з поворотами у зв’язні області», науковий ступень кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 математичне моделювання та обчислювальні методи. 22 С. Науковий керівник: член-кор. НАНУ, д.т.н., проф. Стоян Ю.Г.

232. Субота І.О. Автореферат дисертаційної роботи «Задача оптимальної упаковки еліпсів: математичні моделі та методи розв'язання», науковий ступень кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 математичне моделювання та обчислювальні методи. 22 стр. Науковий керівник: д.т.н., проф. Романова Т.Є.

233. Коваленко А.А. Балансна компоновка 3D-тривимірних тіл: математичні моделі та методи розв’язання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня кандидата техн. наук : спец. 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи”.А. А. Коваленко. Харків, 2016. 22 с.

234. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. Journal of Global Optimization. 2012. Vol. 52(4). P. 855-868.

235. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. International Journal of Computer Mathematics. 2012. Vol. 89(10). P. 1355-1369.

236. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. Inti. Trans, in Op. Res.- 2012. P. 1-21, DOI: 10.111 l.j,1475-3995.2012.00’859.x.

237. Chernov N, Stoyan Y, Romanova T., Pankratov A, "Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs, "Advances in Operations Research, vol. 2012, Article ID 346358,plages, 2012. doi: 10.1155.2012.346358.

238. Stoyan Y., Stetsyuk P., Romanova T. Optimal Balanced Packing Using Phi-Function Technique. Chapter in book S. Butenko, E. L. Pasiliao, and V. Shylo (Editors), Examining Robustness and Vulnerability of Networked Systems, pages 251271. Volume: 37 of NATO Science for Peace and Security Series, IOS Press, New York (2014).

239. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects. Journal of Global Optimisation, 2014, doi 10.1007.S10898-014-0192-0. 27 p.

240. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. Optim Lett. 2014(8). P. 949970. (DOI 10.1007.s11590-013-0646-1).

241. Stoyan Yu.G. and Patsuk V. M. Covering a Convex 3D Polytope by a Minimal Number of Congruent Spheres. International Journal of Computer Mathematics. 2014. Vol. 91(9). P. 2010-2020.

242. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. Journal of Global Optimization. 2015. P. 1-25. DOI: 10.1007.s10898-015-0331-2)

243. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. (2015) On the global minimum in a balanced circular packing problem. Optimisation Letters. 2015. P. 1-14. DOI 10.1007.s11590-015-0937-9

244. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization. Journal of Operational Research Society. 2015. JORS-15-0080-P. P. 1-15.

245. Kovalenko A., Romanova T., Stetsyuk P. Balance layout problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods. Cybernetics and Systems Analysis. 2015. Vol. 51, No. 4. P. 556-565.

246. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. Optimisation Letters. 2016. vol10: pp 13471360 DOI 10.1007.s11590-015-0937-9

247. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization. Journal of Operational Research Society. 2016. Volume 67, Issue 5, pp. 786800.

248. Stoyan Yu. G. , Scheithauer G. , Yaskov G.N. Packing Unequal Spheres into Various Containers. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52(3). P. 419426.

249. Гребенник И.В., Баранов А.В. Решение некоторых эктремальных экстремальных задач на множестве композиций перестановок. Радиотехника. 2007. № 149. С. 12–17.

250. Wächter A. and Biegler L. T. On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. Mathematical Programming. 2006. 106(1). pp. 25-57.

Додаток А

Перелік праць здобувача

1. Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Springer Optimization and Its Applications. 2015. Vol. 105. P. 265-293.
2. Чугай А.М. Математическое и компьютерное моделирование при автоматизации объемно-планировочного проектирования машинного зала энергоблока. Науковий вісник будівництва. 2007. Вип. 43. С. 279-282.
3. Евсеева Л.Г., Чугай А.М. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму. Системи управління, навігації та зв'язку. 2007. Вип. 4. С. 121-128.
4. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений. Электронное моделирование. 2008. Т.30. №5. С. 3-21.
5. Stoyan Yu., Chugay A. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region. European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 197. P. 446-455.
6. Чугай А.М. Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки. Вестник двигателестроения. 2009. №3. С.122-126.
7. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета. Доповіді НАН України. 2009. № 10. С. 45-53.
8. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. Кибернетика и системный анализ. 2010. №5. С. 122-131.
9. Баранов А.В., Грицай Д.В., Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М. Розміщення прямокутних графічних елементів в поліграфічному виробництві. Бионика интеллекта. 2010. №1(72). С.29-32.

10. Stoyan Y.G., Zlotnik M.V. , Chugay A.M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region. Journal of the Operational Research Society. 2012. № 63(3). pp. 379391.
11. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 1. Mathematical model and its characteristics. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. № 1. P. 44-52.
12. Stoyan Y.G., Chugay A.M. An optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 2. A solution method and its realisation. Journal of Mechanical Engineering. 2011. Vol.14. №.2. P. 52-61.
13. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическое моделирование взаимодействия неориентированных выпуклых многогранников. Кибернетика и системный анализ. 2012. Т. 48. № 6. С. 36-44.
14. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника. Доповіді НАН України. 2011. № 12. С. 35-40.
15. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов. Доповіді НАН України. 2012. № 12. С. 41-48.
16. Сёмкин В. В., Чугай А.М. Нормализованные Ф-функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцидиндром. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: зб. наук. праць. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2012. № 1037. С. 190-201.
17. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра. Доповіді НАН України. 2013. № 2. С. 36-41.
18. Стоян Ю. Г., Сёмкин В. В., Чугай А. М. Построение начальных точек и поиск локальних экстремумов задачи компоновки 3D объектов в цилиндрической области. Доповіді НАН України. 2013. № 12. С. 52-58.

19. Стоян Ю.Г., Сёмкин В.В., Чугай А. М. Оптимизация компоновки трёхмерных объектов в многосвязной области с учётом кратчайших расстояний. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 3. С. 58-70.
20. Сёмкин В.В., Чугай А.М., Панкратов А. В. Квази Ф-функция для сфероконусов с поворотами. Радиоэлектроника и информатика. 2014. № 1. С. 30-33.
21. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов. Искусственный интеллект. 2014. №1. С. 74-79.
22. Сёмкин В. В., Чугай А. М. Размещение неориентированных трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний. Искусственный интеллект. 2014. № 2. С. 39-44.
23. Чугай А.М. Метод получения начальных размещений в задаче моделирования структуры систем плотноупакованных объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 2. С. 40-45.
24. Чугай А.М. Один из подходов к поиску хороших локальных минимумов в задаче размещения цилиндрических объектов. Проблемы машиностроения. 2014. Т.17. № 3. С. 56-60.
25. Stoyan Y.G, Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. Advances in Decision Sciences. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, 19 p. http:.dx.doi.org.10.1155.2014.571743.
26. Pankratov A.V., Romanova T.E., Chugay A.M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. Journal of Mechanical Engineering. 2015. № 18 (2). P. 55-65.
27. Stoyan Y.G., Semkin, V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. iss. 2. P. 296-304.
28. Pankratov O.V., Romanova T.E., Stoyan Y.G., Chugay A.M. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 1 (4). P. 39-47.

29. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Задача упаковки гомотетичних опуклих багатогранних тіл. Доповіді НАН України. 2017. № 10. С.28-33.
30. Чугай А.М., Панкратов О.В., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є. Оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ 2017. № 6 (46). С. 127-130.
31. Chugay A., Stoian Ye. Cluster packing of concave non-oriented polyhedra in a cuboid. Сучасні інформаційні системи. 2018. № 1. С.16-21.
32. Чугай А.М. Моделювання щільного пакування подібних 3D об'єктів. Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. Полтава: ПНТУ. 2018. Т.1 (48). С. 55-58.
33. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "3D layout optimization". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 51165, Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 06.09.2013.
34. Стоян Ю.Г., Сьомкін В.В., Чугай А.М. Комп'ютерна програма "Dense packing of 3D objects". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 55364. Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. 19.06.2014.
35. Чугай А. М. Оптимизация при компоновке энергомашиностроительного оборудования. Физические и компьютерные технологии: труды 13-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2007. С. 516-518.
36. Чугай А. М. Математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров в призме с учётом минимально допустимых расстояний. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых учёных и специалистов. Харьков: ИПМАШ НАНУ, 2007. С. 27.
37. Чугай А. М. Решение некоторых задач оптимизационного геометрического проектирования модифицированным методом сужающихся окрестностей.

Физические и компьютерные технологии: труды 14-й междунар. науч.-техн. конф. Харьков, 2008. С.486-489.

38. Stoyan Yu., Chugay A. Optimization packing problem of equal circles. Proc. 23-rd European Conference on Operational Research, Bonn, 2009. P. 106.
39. Чугай А. М. Об одном из методов перебора локальных экстремумов в многоэкстремальных задачах упаковки одинаковых объектов. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов второй международной научной конференции, Минск, 2009. Ч. 2. С.198-199.
40. Чугай А. М. Построение Ф-функции для неориентированных параллелепипедов. Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конф. молодых ученых и специалистов, Харьков. ИПМАШ НАНУ, 2009. С. 39.
41. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия параллелепипедов с учетом их произвольных поворотов. Физические и компьютерные технологии: труды 15-й междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 2009. С. 448-451.
42. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия неориентированных многогранников, многогранника и шара. Системний аналіз та інформаційні технології - 2010: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф., Київ. ІПСА, 2010. С.340.
43. Чугай А. М. Математическое моделирования взаимодействия некоторых неориентированных 3D объектов. Інформаційно-комп’ютерні технології - 2010: тези V міжнар. наук.-техн. конф., Житомир: ЖДТУ, 2010. С.11-12.
44. Стоян Ю.Г., Чугай А.М. Математическая модель задачи упаковки параллелепипедов и сфер в параллелепипеде. Інформатика та системні науки -2011: матеріали всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава: ПУСКУ, 2011. С. 297-300.

45. Чугай А.М. Упаковка неориентированных параллелепипедов и шаров в параллелепипеде. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 2011. С.40.
46. Чугай А.М., Яськов Г.Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей IX міжнар. наук.-практ. конф., Дніпропетровськ, 2011. С. 281-283.
47. Сёмкин В.В., Чугай А.М. Математическое моделирование отношений геометрических объектов, построенных с помощью шаров и цилиндров. Математичне та імітаційне моделювання систем: тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф, Чернігів-Жукин, 2012. С. 238-240.
48. Чугай А.М. Метод решения задачи упаковки неориентированных параллелепипедов и шаров. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы III межд. конф., Кишинев, 2012. С. 536-539.
49. Stoyan Yu., Chugay A. Packing Cuboids and Spheres. Proc. of 10-th ESICUP Meeting. Lille (France), 2013. P. 21.
50. Чугай А. М., Злотник М.В., Сёмкин В.В, Лимаренко И.В. Один из подходов к улучшению функции цели в задачах упаковки. Системный анализ и информационные технологии: материалы 15-й межд. науч.-техн. конф. SAIT-2013. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2013. С. 217.
51. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 4-й междун. конф., Кишинёв, 2014. Т. 2. С. 416-420.
52. Сёмкин В.В., Чугай А. М. Решение задачи плотной упаковки неориентированных трёхмерных объектов. Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-технической конференции SAIT-2014. Киев: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. С. 262.

53. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimal packing of convex polytopes. Информационные системы и технологии: тезисы докл. IV междун. науч.-техн. конф., Харьков: ХНУРЕ, 2015. С. 11-12

54. Chugay A., Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Packing and cutting problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тезисы докл. XIII межд. науч.-практ. конф., Днепропетровск, 2015. С. 224-225

55. Chugay A., Pankratov A., Romanova T. Optimized object packings using quasi-phi-functions. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доповідей XXI всеукраїнської наук. конф., Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. С. 23-24.

56. Чугай А.М., Панкратов А.В., Романова Т.Е. Сравнение двух подходов к моделированию и решению задачи упаковки многогранников. Информационные системы и технологии: тезисы докл. 6-й международной науч.-техн. конф., Коблево, 2017. С. 141-142.

57. Чугай А.М. Подходы к математическому моделированию задачи упаковки неориентированых многогранников. Інформатика та системні науки: матеріали VIII всеукраїнської наук.-практ. конф., Полтава, 2017. С. 292-294

58. Chugay A.M. Mathematical modelling of homothetic polytopes packing. Системний аналіз та інформаційні технології - 2017: тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. Київ. ІПСА, 2017. С. 19.

59. Чугай А.М. Метод розв’язання задачі упаковки опуклих гомотетичних багатогранних тіл. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання - 2017”. 2 с. Режим доступу: http:.iapmm.lviv.ua.chyt2017.abstracts.Chugay.pdf

60. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Чугай А.М., Панкратов О.В. Задачі геометричного проектування у адитивних технологіях. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доп. XV міжнар. наук.-практ. конф., Дніпро, 2017. С.193-194.

61. Pankratov A., Romanova T., Chugay A., Stoyan Yu. E. Optimization of the process of 3*D*-printing for SLS technologies of additive production. 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education» (ICAICTSEE-2017). Sofia. Bulgaria, 2017. FA24. 4 p.
62. Chugay A., Pankratov A., Romanova T., Stoyan Yu.E. An optimization technique in 3D printing design. Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 6-й международной конференции, Кишинёв, 2018. Т.2. С. 416-420.
63. Chugay A. M. Optimization of packing polytopes using phi-function technique. Modern problems of mathematical modelling, computational methods and information technologies: proc. of International Scientific Conference, Rivne, 2018. C.17-18.
64. Чугай А.М. Кластерное размещение невыпуклых неориентированных многогранников. Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків. 2018. С.20.

Додаток Б

Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір

Б1. Коп'ютерна програма «3D layout optimization»

УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 51165

Комп'ютерна програма "3D layout optimization"

(вид, назва твору)

Автор(и) Стоян Юрій Григорович, Сьомкін Володимир Володимирович, Чугай Андрій Михайлович

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 06.09.2013

Голова Державної служби інтелектуальної власності України М.В. Ковіня

Б2. Коп’ютерна програма «Dense packing of 3D objects»

УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 55364

Комп'ютерна програма "Dense packing of 3D objects"

(вид, назва твору)

Автор(и) Стоян Юрій Григорович, Сьомкін Володимир Володимирович, Чугай Андрій Михайлович

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 19.06.2014

Державна служба інтелектуальної власності України
Ідентифікаційний код 37552556
МП

Голова Державної служби інтелектуальної власності України
М.В. Ковіня

Додаток В

Акти про впровадження результатів дисертаційної роботи

В.1 Впровадження у виробництво

УкрОборонПром
Державний концерн

FED

Державний концерн «Укроборонпром»
ДЕРЖАВНЕ ПІДПРИЄМСТВО
«ХАРКІВСЬКИЙ МАШИНОБУДІВНИЙ ЗАВОД «ФЕД»
Україна, м. Харків, 61023, вул. Сумська, 132
тел.: (057) 700-42-70, факс: (057) 707-04-63
e-mail: khmz@ukroboronprom.com
http://www.fed.ua

10.11.2017 № 11/775 На № _____ від _____

ЗАТВЕРДЖУЮ
Головний інженер
ДП «Харківський машинобудівний завод «ФЕД»
_____ Ніколаєнко О.М.
_____ 2017 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційної роботи
докторанта Чугая Андрія Михайловича
"Математичне моделювання та методи розв`язання задач оптимального розміщення тривимірних геометричних об`єктів."

Цей акт складено про те, що результати дисертаційних досліджень докторанта Інституту проблем машинобудування ім.. А.М. Підгорного Національної Академії Наук України, к.т.н., с.н.с. відділу математичного моделювання та оптимального проектування Чугая Андрія Михайловича, присвячені математичному та комп`ютерному моделюванню задач оптимального розміщення тривимірних геометричних об'єктів, що припускають довільні повороти, успішно використовуються та впроваджені у практику на етапі конструкторського проектування при розв`язанні задач компонувального синтезу приладів для авіаційної промисловості та в логістичних задачах, пов`язаних з підготовкою та завантаженням готових виробів у контейнери для здійснення транспортних перевезень, на ДП «Харківський машинобудівний завод «ФЕД».

Підвищення ефективності від впровадження процедур розміщення деякого набору тривимірних об`єктів в заданій області з урахуванням технологічних обмежень, досягається за рахунок економії ресурсів при використанні оптимальних розв`язків задач розміщення, скорочення часу для аналізу вихідних даних, вдосконалення технологічних процесів на базі використання розробленого математичного та програмного забезпечення.

Даний документ не є підставою для отримання будь яких грошових винагород з фонду підприємства.

Головний механік Д.О. Тюпа

Головний технолог Є.В. Прокопенко

В.2 Впровадження у навчальний процес

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор
з науково-педагогічної роботи
Харківського національного університету будівництва та архітектури
Череднік Д.Л.

«10» травня 2018 р.

АКТ
про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Чугая Андрія Михайловича
на тему «Математичне моделювання та методи розв'язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл» на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Комісія у складі:
Голова – завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, д.т.н., доц. Старкова О.В.;
Члени комісії – (професор кафедри кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, д.фіз.-мат.н., проф. Сізова Н.Д., доцент кафедри кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, к.т.н., доц. Солодовник Г.В.)
цим Актом засвідчує, що результати дисертаційного дослідження Чугая Андрія Михайловича на тему «Математичне моделювання та методи розв'язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл» використані у навчальному процесі.
Запропоновані в дисертаційній роботі здобувача математичні моделі, методи локальної, глобальної оптимізації та алгоритми паралельних обчислень впроваджено в навчальний процес кафедри шляхом оновлення лекційних курсів із дисциплін «Технології розподілених систем та паралельних обчислень» та "Комп'ютерне проектування" для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

Голова комісії	(підпис)	**Старкова О.В.** (прізвище та ініціали)
Члени комісії	(підпис)	**Сізова Н.Д.** (прізвище та ініціали)
	(підпис)	**Солодовник Г.В.** (прізвище та ініціали)

«10» травня 2018 р.