

Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного

ЯСЬКОВ ГЕОРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ



УДК 519.859

**ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ГІПЕРКУЛЬ: МАТЕМАТИЧНІ
МОДЕЛІ, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ, ЗАСТОСУВАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України.

Науковий консультант

доктор технічних наук, професор
Романова Тетяна Євгеніївна,
Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу математичного моделювання та
оптимального проектування

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор
Комяк Валентина Михайлівна,
професор кафедри фізико-математичних дисциплін
Національного університету цивільного захисту
України МВС України

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Стецюк Петро Іванович,
завідувач відділу методів негладкої оптимізації
Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова
НАН України

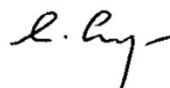
доктор технічних наук, професор
Жолткевич Григорій Миколайович,
декан факультету математики і інформатики,
професор кафедри теоретичної і прикладної
інформатики Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна МОН України

Захист відбудеться "16" січня 2020 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 при Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічній бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий "12" грудня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01
д.т.н., проф.



О.О. Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На сьогодні значно зростає інтерес до задач оптимального розміщення геометричних об'єктів інтерес через велику кількість практичних застосувань у різних галузях, зокрема, в хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, адитивних технологіях, будівництві, логістиці, робототехніці, біології, медицині тощо. Серед задач цього класу одними з найважливіших є задачі розміщення гіперкуль різної вимірності. Спектр використання таких задач – від вивчення властивостей атомів до моделювання космічних тіл, наприклад, імітаційне моделювання в матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях, планування радіохірургії та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині, вивчення біологічних структур (клітини, хромосоми тощо) в біології; проектування схем розміщення вантажів у відсіках транспортних засобів, оптимізація топології виробів для 3D-друку; кодування та захист інформації тощо.

Задачам розміщення гіперкуль (в тому числі кругів, куль) присвячені роботи багатьох учених. Значна кількість науковців досліджують регулярні ґратчасті розміщення гіперкуль у просторі (lattice sphere packing), наприклад, F. Toth, J. Conway, N. Sloane, T. Hales, М.С. В'язовська. З практичної точки зору важливими є задачі розміщення гіперкуль в обмежених областях. Слід відзначити публікації F. Stillinger, B. Lubachevsky, S. Torquato, J. Kallrath, G. Mueller, W. Huang, M. Hifi, E. Birgin, J. Oliveira, M. Gomes, G. Scheithauer, A. Bortfeldt, E. Specht, G. Fasano. Залежно від вимірності простору, кількості об'єктів, просторової форми області розміщення, критерію якості дослідники розглядають різноманітні постановки задач розміщення гіперкуль. При цьому важливу роль відіграють особливості метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів), співвідношення радіусів гіперкуль та розмірів і вигляду контейнера. У кожному конкретному випадку необхідний детальний аналіз факторів, які впливають на вибір методу розв'язання поставленої задачі. Задачі розміщення гіперкуль є *NP*-складними, тому для їх розв'язання найчастіше використовуються евристичні підходи, які дають можливість отримати наближені розв'язки. Автори шукають компроміс між якістю розв'язку та часом, необхідним для його пошуку. Для перевірки ефективності методів використовуються тестові приклади (benchmark instances), що доступні на сайтах <http://www.packomania.com>, <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing>.

Проте відкритим залишається питання розміщення гіперкуль в областях, які мають довільну просторову форму, з урахуванням зон заборони та обмежень на мінімально допустимі відстані та метричні характеристики гіперкуль.

Створення єдиної методології розв'язання задач розміщення гіперкуль в опуклих контейнерах довільної просторової форми з урахуванням додаткових обмежень, яка ґрунтується на аналізі особливостей постановки задачі, побудові точних математичних моделей у вигляді задач математичного програмування, розробці методів локальної й глобальної оптимізації та використанні сучасного програмного забезпечення (зокрема, LP&NLP Solvers на платформі GAMS – General Algebraic Modeling System), дозволить підвищити ефективність розв'язання

задач цього класу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в період з 2000 р. по 2019 р. у відділі математичного моделювання й оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України і є частиною досліджень, які проводяться під керівництвом члена-кореспондента НАН України Стояна Ю.Г. відповідно до планів науково-дослідних робіт за такими держбюджетними темами: "Розробка методів та алгоритмів оптимізації для розв'язання задач розміщення тривимірних геометричних об'єктів" (2001-2006 рр., № ДР 0102U001480); "Розробка конструктивних засобів та обчислювальних методів для розв'язання оптимізаційних задач упаковки та покриття" (2007-2011 рр., № ДР 0107U003662); "Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач розміщення тривимірних тіл довільних просторових форм" (2012-2016 рр., № ДР 0112U002488); "Розробка математичних моделей та комп'ютерних технологій розв'язання оптимізаційних задач компоновки тривимірних тіл" (2017-2019 рр. № ДР 0117U000877). Також робота виконувалась згідно з такими договорами та грантами: грант TE 207/7, 436 UKR 113/42/0, договір між Німецьким дослідним товариством (Deutsche Forschungsgemeinschaft) і НАН України; грант УНТЦ (проект 5710) "Комп'ютерні технології для задач розміщення і покриття: моделі, методи та програмне забезпечення – розробка програмно-алгоритмічного забезпечення для моделювання задач розміщення і покриття", договір № 338-28/270/21-2008 від 11.02.2008 р. між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та ВО "Знамена" (м. Полтава) "Розробка програми для імітаційного моделювання процесу властивостей сплаву в залежності від розміру гранул".

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є підвищення ефективності розв'язання задач розміщення гіперкуль шляхом створення методології, що ґрунтується на побудові нових засобів моделювання, математичних моделей, розробці методів розв'язання з використанням методів нелінійного й дискретного програмування та сучасного програмного забезпечення для задач лінійного та нелінійного програмування.

Для досягнення мети в роботі поставлені такі задачі:

- сформулювати задачу розміщення гіперкуль (HSOA – hypersphere optimal arrangement), множина реалізацій якої покриває широкий клас практичних та наукових задач у пріоритетних областях науки і техніки;
- побудувати засоби математичного моделювання обмежень розміщення, зокрема, побудувати Ф-функції для аналітичного опису відношень неперетину гіперкуль та розміщення гіперкуль на мінімально допустимих відстанях, включення гіперкулі в опуклий контейнер, обмежений гіперсферичними, гіперциліндричними поверхнями та гіперплощинами з урахуванням зон заборони (для $n = 2, 3$);
- розробити методологію розв'язання задач HSOA, в якій запропоновані стратегії для різних постановок залежно від функції цілі, кількості куль, особливостей метричних характеристик гіперкуль, просторової форми контейнера, додаткових обмежень (зон заборони, мінімально допустимих відстаней, обмежень

на радіуси гіперкуль), зокрема

- побудувати математичну модель задачі HSOA у вигляді задачі математичного програмування;
- дослідити особливості та властивості математичних моделей основних реалізацій задачі HSOA, сформульованих як задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP – open dimension problem) або задача про рюкзак (KP – knapsack problem) відповідно до міжнародної класифікації задач розкрою та упакування (Cutting&Packing Problems)¹;
- розробити методи побудови допустимих початкових точок, методи пошуку локальних екстремумів та наближень до локальних і глобальних екстремумів задачі HSOA;
- створити програмне забезпечення, яке реалізує розроблені методи та алгоритми;
- провести обчислювальні експерименти, здійснити порівняльний аналіз отриманих результатів з відомими розв'язками (benchmark instances) задач розміщення гіперкуль різної вимірності (кругів, куль, гіперкуль);
- надати рекомендації щодо практичних застосувань запропонованої методології.

Об'єкт дослідження – оптимальне розміщення гіперкуль.

Предмет дослідження – засоби математичного моделювання, математичні моделі та методи розв'язання задач розміщення гіперкуль в областях, обмежених циліндричними, сферичними поверхнями та площинами.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі для побудови засобів математичного моделювання умов розміщення гіперкуль застосовуються методи аналітичної й обчислювальної геометрії та метод Ф-функцій Стояна. Для побудови математичних моделей задач розміщення гіперкуль використовується теорія геометричного проектування. Для побудови допустимих початкових точок, наближених розв'язків, локальних екстремумів використовуються методи неперервного нелінійного програмування та методи геометричного проектування. Для пошуку наближень до глобального екстремуму застосовуються методи дискретної та неперервної нелінійної оптимізації й статистично-ймовірнісні методи.

Наукова новизна одержаних результатів

Створено методологію розв'язання оптимізаційних задач розміщення гіперкуль (HSOA), яка включає в себе нові засоби математичного моделювання, математичні моделі та ефективні методи розв'язання, у тому числі:

- набув подальшого розвитку метод Ф-функцій Стояна щодо побудови засобів аналітичного опису обмежень розміщення гіперкуль ($2D$, $3D$ та nD , $n \geq 4$) в областях довільної просторової форми, зокрема:
 - Ф-функцій для моделювання відношення включення гіперкулі у контейнер, який має форму гіперпрямокутника, гіперкулі, гіперциліндра, n -політопа;

¹ Waescher G., Haussner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130

- псевдонормалізованих Φ -функцій для гіперкуль як засіб математичного моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані між гіперкулями;
- Φ -функцій для тривимірних куль та об'єктів, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами, як засіб моделювання відношення неперетину гіперкуль та зон заборони;
- вперше побудовано математичну модель задачі HSOA та математичні моделі її реалізацій залежно від функції цілі (метрична характеристика контейнера – в задачах ODP або коефіцієнт заповнення контейнера – в задачах KP), розмірності гіперкуль ($2D$ – круг, $3D$ – куля, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), особливостей метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів, обмеження на метричні характеристики гіперкуль), просторової форми контейнера ($2D$ – круг, прямокутник, опуклий багатокутник, $3D$ – кубоїд, прямий круговий циліндр, куля, опуклий багатогранник, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), додаткових обмежень (мінімально допустимі відстані, зони заборони, обмеження на метричні характеристики контейнера);
- набула подальшого розвитку теорія геометричного проектування щодо розробки методів розв'язання задач HSOA, зокрема:
 - набули подальшого розвитку методи побудови допустимих початкових точок (метод ґратчастого розміщення, в якому, на відміну від відомих методів, застосовуються трансляції ґраток відносно контейнера); метод оптимізації за групами змінних, в якому, на відміну від відомих методів, застосовуються гомотетичні перетворення гіперкуль, що дозволяє підвищити швидкість отримання перспективних допустимих точок;
 - запропоновано модифікацію методу можливих напрямків, в якій застосовується нова стратегія активних нерівностей, що дозволяє поліпшити збіжність методу;
 - вперше запропоновано метод побудови наближень до локальних екстремумів, в якому використовується комбінація методу оптимізації за групами змінних, методу спуску та методу множників Лагранжа, що дозволяє розв'язувати задачі розміщення куль великої розмірності за прийнятний час;
 - набули подальшого розвитку методи пошуку наближень до глобального екстремуму задач ODP – нові модифікації методу околів, що звужуються, які дозволяють розв'язувати задачі розміщення рівних і нерівних куль в опуклому контейнері, що оптимізується.
 - вперше розроблено метод спрямованого перебору локальних екстремумів для отримання наближення до глобального екстремуму задачі розміщення гіперкуль в опуклому контейнері (ODP), що дозволяє підвищити якість розв'язків;
 - вперше розроблено метод пошуку наближення до глобального екстремуму для задачі розміщення рівних гіперкуль в опуклому контейнері (PPR), який ґрунтується на гомотетичних перетвореннях гіперкуль і дозволяє значно скоротити час обчислень та підвищити якість розв'язків;
 - вперше розроблено метод пошуку наближення до глобального екстремуму задачі KP для нерівних гіперкуль із застосуванням методу гілок і меж та гомотетичних перетворень гіперкуль за рахунок побудови дерева розв'язків, яке

враховує класи еквівалентності гіперкуль, та запровадження ефективних правил відтинання неперспективних гілок, що дозволяє отримати якісні розв'язки задач КР за прийнятний час;

- вперше запропонований підхід, який дозволяє розв'язувати задачу КР як послідовність задач ODP із застосуванням гомотетичних перетворень контейнера, що дає можливість застосовувати ефективні методи розв'язання задач ODP для задач КР і підвищити якість розв'язків.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання й обчислювальних методів у геометричному проектуванні. Створено єдину методологію розв'язання оптимізаційних задач розміщення гіперкуль, яка ґрунтується на побудові нових засобів математичного моделювання відношень геометричних об'єктів, та розробці нових методів розв'язання HSOA із застосуванням сучасних розв'язувачів для задач нелінійного програмування (NLP-solvers). Запропонована методологія дозволяє отримати розв'язки широкого кола практичних задач, що виникають у пріоритетних галузях науки й техніки.

Сукупність розроблених математичних моделей, методів, алгоритмів та програмних комплексів може використовуватися в системах автоматизованого проектування технічних систем та пристроїв у машинобудуванні та аерокосмічній промисловості, під час: моделювання властивостей сплаву в порошковій металургії; розробки технологій очищення газу; аналізу й розробки процесів у хімічних та ядерних реакторах, термічних теплообмінниках в хімічній промисловості та енергетиці; оптимізації топології виробів у адитивних технологіях (3D-друк); оптимізації перевезення й зберігання вантажів у інформаційно-логістичних системах; планування радіохірургії пухлин та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині; розв'язання задач кодування в цифрових комунікаціях і системах зберігання інформації.

Математичні моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, що запропоновані в дисертаційній роботі, використані в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України під час виконання держбюджетних тем.

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання підтверджується публікаціями у високореєтингових міжнародних і вітчизняних журналах, виступами на міжнародних конференціях, участю в міжнародних проектах.

Програмне забезпечення, розроблене в дисертаційній роботі, застосовується на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету "Львівська політехніка". Отримано свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір. Запропоновано засоби математичного моделювання та методи розв'язання задач розміщення впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки при викладанні курсів "Моделювання геометричних об'єктів" та "Теорія прийняття рішень".

Особистий внесок здобувача. Основні результати, які надано в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У роботах, що виконані в співавторстві,

особистий внесок здобувача полягає у такому: [1,3,13,31,33,35] – математична модель задачі, стратегія розв’язання, модифікації методу околів, що звужуються, та методу можливих напрямків, обчислювальні експерименти; [2] – особливості математичної моделі; [4] – математична модель, метод розв’язання, обчислювальні експерименти; [5] – метод розв’язання, обчислювальні експерименти; [8,11,14,39] – програмне забезпечення, обчислювальні експерименти; [15,16] – математична модель, методи побудови допустимих початкових точок, модифікація методу можливих напрямків, метод пошуку наближення до глобального екстремуму, обчислювальні експерименти; [17,44] – алгоритми для реалізації побудови множин Парето та Слейтера; [18,24,36,43,46,51,52,57,60] – математичні моделі, стратегії розв’язання, метод розв’язання, обчислювальні експерименти; [21,41] – математична модель, Ф-функції кулі та опуклого багатогранного кута, кулі та призми, кулі та двохгранного кута, стратегія та метод розв’язання, обчислювальні експерименти; [22] – математична модель задачі, стратегія та алгоритм розв’язання, теорема про поліпшення значень функції цілі, обчислювальні експерименти; [25] – алгоритм розв’язання; [27] – методологія розв’язання; [28,29] – алгоритм розв’язання та програмне забезпечення; [30] – математична модель та метод розв’язання задачі розміщення куль у паралелепіпеді; [32] – математична модель, метод розв’язання, обчислювальні експерименти; [40] – математична модель та методи розв’язання задачі розміщення куль; [50,54,55,58] – стратегія та алгоритм розв’язання задачі; [51] – математична модель; [60] – математична модель, стратегія розв’язання; [62] – методологія розв’язання задач розміщення гіперкуль.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися та отримали схвалення на міжнародних конференціях і наукових семінарах:

- міжнародній конференції "Computer, Communication and Control Technologies CCST '03" (2003 р., м. Орlando, Флорида, США);
- міжнародній науковій конференції "ESICUP Meeting" (2004 р., м. Віттенберг, Німеччина; 2005 р., м. Саутгемптон, Великобританія, 2008 р., м. Л'Аквіла, Італія; 2009 р., м. Валенсія, Іспанія; 2011 р., м. Копенгаген, Данія);
- міжнародному науковому семінарі "Cutting Stock Problems WSCSP2005" (2005 р., м. М'єркуря-Чук, Румунія);
- міжнародній конференції "Актуальні проблеми прикладної математики та механіки АППММ'06" (2006 р., м. Харків, Україна);
- міжнародній науково-технічній конференції "Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010" (2010 р., м. Полтава, Україна);
- міжнародній науково-технічній конференції "Інформаційно-комп'ютерні системи ІКТ-2010" (2010 р., м. Житомир, Україна);
- міжнародній науковій конференції "Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies MMOTI" (2012-2018 рр., м. Кишинів, Молдова);
- міжнародній конференції "European Conference on Operational Research EURO 2012" (2012 р., м. Вільнюс, Литва);
- міжнародній науковій конференції "Питання оптимізації обчислень ПОО-XL" (2013 р., смт. Кацівелі, Крим, Україна);
- міжнародній науково-технічній конференції "Штучний інтелект та

інтелектуальні системи AIPS'2016" (2016 р., м. Київ, Україна);

- міжнародній науково-технічній конференції "Інформаційні системи і технології ICT-2017" (2017 р., с. Коблеве, Миколаївська обл., Україна);

- міжнародній науковій конференції "Application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017" (2017 р., м. Софія, Болгарія);

- міжнародній науково-технічній конференції "Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні" (2017 р., м. Харків, Україна);

- міжнародній науково-практичній конференції "Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем" (2012–2018 рр., м. Дніпро, Україна);

- міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій" (2018 р., м. Рівне, Україна);

- семінарах Харківської секції Наукової ради з проблеми «Кібернетика» (Харків, Україна, 2000–2019, м. Харків, Україна).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 62 наукові праці, в тому числі: 1 монографія (видавництво Betriebswirtschaftlicher Verlag, Німеччина), 26 статей у наукових фахових виданнях, що входять до переліку наукових спеціалізованих видань, серед яких 7 статей у міжнародних журналах, що індексуються науково-метричною базою Scopus, з них 6 – у високореєтингових зарубіжних журналах (European Journal of Operational Research, International Transactions in Operational Research, Journal of Global Optimization, International Journal of Computer Mathematics, Optimization Letters), 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, 33 тези та доповіді на міжнародних наукових конференціях (з них 13 – за кордоном). H-індекс цитування робіт за науково-метричними міжнародними базами даних: Scopus – 7, Web of Science – 6, Google Scholar – 9.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація містить вступ, шість розділів, висновки по роботі, список використаних джерел з 299 найменувань на 30 сторінках та 3 додатків на 13 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 360 сторінок, з них 292 сторінок основного тексту (130 рисунків, 35 таблиць).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета і задачі дослідження, вказуються об'єкт, предмет і методи досліджень, визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів, наводяться відомості про публікації за темою дисертаційної роботи й апробацію результатів дослідження.

Перший розділ дисертації присвячується аналізу публікацій, в яких досліджуються задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів, зокрема задачі розміщення гіперкуль різної вимірності. Наводиться міжнародна класифікація задач розкрою та упакування (Cutting&Packing¹), у тому числі – задач розміщення гіперкуль. Описуються основні сфери застосування задач розміщення гіперкуль (кругів, куль). Розглядаються різноманітні постановки, способи

математичного моделювання, існуючі алгоритми та методи розв'язання. Обговорюються результати обчислювального моделювання. Вибирається напрям досліджень.

Розв'язанню задач оптимального розміщення гіперкуль ($d = 2$, $d = 3$ та $d \geq 4$) присвячено роботи багатьох закордонних учених: F. Stillinger, B. Lubachevsky, J. Conway, N. Sloane, G. Mueller, S. Torquatto, J. Kallrath (США), J. Oliveira, M. Gomes (Португалія), G. Scheithauer, A. Bortfeldt, E. Specht (Німеччина), G. Fasano (Італія), E. Birgin (Бразилія), W. Huang (Китай), А.С. Руднев (Росія), M. Hifi, L. Yousef (Франція) та ін.

В Україні дослідженням задач розміщення геометричних об'єктів займається наукова школа Ю.Г. Стояна, заснована видатним ученим В.Л. Рвачовим. У роботах М.І. Гіля, В.П. Путятіна, С.В. Яковлева, В.М. Комяк, М.В. Новожилової, Т.Є. Романової, Л.Д. Пономаренка й багатьох інших запропоновані моделі задач розміщення та різні підходи до їх розв'язання (модифікації методу оптимізації за групами змінних, методу гілок та меж, методи локальної й глобальної оптимізації).

В роботах С.В. Яковлева, О.О. Емця, І.В. Гребенніка, О.С. Пічугіної досліджуються задачі комбінаторної оптимізації.

Оптимізаційним задачам розміщення кругів і куль присвячено публікації В.М. Черепакіна, В.Г. Шміголя, А.М. Чугая, О.В. Карташова та інших. Задачі розміщення кругів та куль у опуклих контейнерах з урахуванням умов балансу механічної системи досліджуються в роботах Т.Є. Романової, Г.А. Коваленко, П.І. Стецюка, О.В. Панкратова.

Важливим відкриттям є метод Ф-функцій, запропонований Ю.Г. Стояном та визнаний найбільш потужним засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об'єктів у світі. Цей метод дозволяє описувати оптимізаційні задачі розміщення у вигляді задач математичного програмування та створювати ефективні методи розв'язання для широкого кола задач розміщення.

Створенню сучасних методів негладкої та дискретної оптимізації присвячені роботи відомих українських учених, зокрема, І.В. Сергієнка, В.П. Шила, Л.Ф. Гуляницького, П.І. Стецюка, О.М. Кіселевої.

Кількість публікацій в області розкрою та упакування геометричних об'єктів в останні роки невпинно зростає. Аналізуючи практичні застосування задач цього класу, G. Waescher, H. Haussner, H. Schumann запропонували типологію задач C&P¹. Виділяється два типи задач упакування: максимізація (output maximisation) та мінімізація (input maximisation) функції цілі. У випадку максимізації набір об'єктів, які мають менші розміри (в подальшому – розміщувані об'єкти), розподіляється серед заданого набору об'єктів, які мають більші розміри (в подальшому – контейнери). Усі розміщувані об'єкти мають бути використані, тобто немає задачі вибору з множини контейнерів. Розміщувані об'єкти треба вибрати в такий спосіб, щоб досягти максимального значення функції цілі. Натомість, у випадку мінімізації набір контейнерів є достатнім для всіх розміщуваних об'єктів, тобто немає задачі вибору з множини розміщуваних об'єктів. Задача полягає у виборі підмножини з множини контейнерів із мінімальною функцією цілі.

Як функція цілі можуть бути, наприклад, витрати, доходи або матеріальні обсяги, площа (у двовимірному випадку), об'єм (у три- й багатовимірному випадках), об'єм незайнятої частини площі (об'єму) підмножини контейнерів тощо. Виділяють три варіанти розміщуваних об'єктів: ідентичні, слабо неоднорідні й сильно неоднорідні.

З урахуванням наведених критеріїв розрізняють такі основні типи задач розміщення гіперкуль: задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP), задача розміщення (Placement Problem), задача, сформульована як задача про рюкзак (KP), задача розміщення ідентичних об'єктів (Identical Item Packing Problem – IPP).

Найбільша кількість публікацій присвячена задачам розміщення кругів, які виникають у хімії, географії, біології. Відомі й промислові застосування: задачі розкрою при виробництві автомобілів, мотоциклів, електричних моторів; задачі компонування, складування та транспортування; задачі планування розміщення кабельної продукції; задача компактного поховання ядерних відходів; задача оптимізації топології виробів у адитивних технологіях тощо.

Задачі розміщення куль виникають під час: вивчення структури наноматеріалів, кристалів, бетону, гранульованих речовин, зокрема, порошку, кераміки, піску, композитних матеріалів; розробки технологій лиття; дослідження процесів, які відбуваються в хімічних каталітичних реакторах, колонах для дистиляції та абсорбції газу, ядерних реакторах та теплообмінниках; радіохірургічного лікування пухлин та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині тощо.

Задачі розміщення гіперкуль становлять інтерес при чисельному оцінюванні інтегралів, вивченні геометричних, механічних, електромагнітних властивостей рідин, колоїдів, скла, суспензій, гранульованих матеріалів. Вони також виникають у задачах кодування та зберігання інформації.

Для моделювання розміщення гіперкуль різної вимірності застосовується декілька підходів: моделювання взаємодії куль за допомогою методів молекулярної динаміки та дискретних елементів; методи регулярних розміщень; метод випадкових розміщень; методи послідовного додавання; евристичні методи, зокрема, генетичні алгоритми, алгоритми, які ґрунтуються на ідеї імітаційного відпалу, мурашині алгоритми, жадібні алгоритми; ймовірнісні методи; методи лінійного та нелінійного програмування (неперервного й цілочислового); алгоритми гілок та меж для цілочислової задачі; комбіновані (гібридні) підходи на основі евристик і методів математичного програмування тощо.

Важливими характеристиками розміщення гіперкуль є коефіцієнт щільності та контактне число – максимальна кількість контактів гіперкулі з іншими конгруентними гіперкулями². Як відомо, найбільша щільність розміщення рівних

² Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere packings, lattices and groups : book. New York : Springer-Verlag, 2010. 703 p.

кругів – $\pi\sqrt{3}/6 \approx 0.91$, куль – $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0.74$ (J. Kepler³, J.-L. Lagrange⁴, C.F. Gauss⁵). Зі збільшенням вимірності щільність зменшується, а контактне число – збільшується.

З огляду на дослідження задач розміщення гіперкуль різної вимірності можна зробити висновок про те, що більша частина підходів є евристичними. Запропоновані методи орієнтовані здебільшого на дуже вузький клас задач, тобто незначна зміна вихідних даних, наприклад, вимірності задачі чи введення додаткових обмежень, робить неможливим їх використання.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень задач геометричного проектування й спрямована на створення єдиної методології, яка дозволяє розв'язувати задачі розміщення гіперкуль різної вимірності та орієнтована на застосування методів геометричного проектування й сучасного програмного забезпечення.

В рамках розробки методології розглядаються декілька напрямів дослідження задач HSOA. В першу чергу, це підвищення ефективності розв'язування задач великої розмірності (large-scale problems). Основними факторами, які впливають на розмірність задачі, є кількість розміщуваних гіперкуль та вимірність простору, в якому розглядаються гіперкулі. Для охоплення більш широкого кола прикладних задач слід розширити множину просторових форм контейнерів і виконати аналітичний опис умов розміщення гіперкуль у довільному контейнері гіперкулі й контейнера. Інший напрям досліджень – розробка принципово нових методів і стратегій розв'язування HSOA, зокрема із застосуванням гомотетичних перетворень гіперкуль та контейнера. Важливим є створення нових методів побудови допустимих початкових розміщень, як універсальних, так і орієнтованих на конкретну постановку задачі. Пріоритетним напрямом є застосування розроблених методів і алгоритмів для розв'язання прикладних задач, в яких треба враховувати технологічні обмеження.

У **другому розділі** наводиться визначення задач геометричного проектування. Розглядається поняття Φ -функції та псевдонормалізованої Φ -функції в арифметичному d -вимірному евклідовому просторі. Будується математична модель HSOA та розглядаються особливості її реалізацій згідно з міжнародною класифікацією задач розкрою та упакування. Пропонуються Φ -функції гіперкулі та геометричних об'єктів за різної вимірності простору: $2D$, $3D$ та dD .

Задача розміщення гіперкуль формулюється в такий спосіб.

Задача HSOA. Нехай є гіперкулі $S_i = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|X - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, де $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ – вектор координат центра, r_i – радіус гіперкулі S_i ,

³ Ioannis Kepleri S. C. Maiest. Mathematici Strena Seu De Nive Sexangula. Francofurti ad Moenum: apud Godefridum Tampach, 1611.

⁴ Lagrange J.-L. Recherches d'arithmétique. Nouv. Mém. Acad. Roy. Soc. Belles Lettres (Berlin). 1773. P. 265–312.

⁵ Gauss C. F. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber, Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831.

$i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, та опуклий контейнер $A(\mu) \subset \mathbb{R}^{d+k}$, де $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик контейнера. Загалом, можуть бути задані зони заборони P_k , $l \in I_p = \{1, 2, \dots, n_p\}$, – опуклі об’єкти, межа яких утворюється сферичною, циліндричною поверхнями та площинами. Тоді множина $C(\mu) = A(\mu) \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l)$, де $\text{int}(\circ)$ – внутрішність множини $(\circ)$, є областю розміщення. Необхідно розмістити гіперкулі з набору $\{S_i, i \in I_n\}$, в області $C(\mu)$ таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I_n$, а функція цілі $\kappa(\omega)$ досягала свого екстремального значення.

Математична модель HSOA має такий вигляд:

$$\omega^* = (u^*, \mu^*, t^*) = \arg \max_{\omega \in W \subset (\mathbb{R}^{nd+k} \times B^n)} \kappa(\omega), \quad (1)$$

де $\omega = (u, \mu, t)$ – вектор змінних;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор неперервних змінних;

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ – вектор двійкових змінних: $t_i \in B = \{0, 1\}$,

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i \in I_n; \end{cases}$$

$\kappa(\omega)$ – функція цілі;

$$W = \{\omega \in (\mathbb{R}^{nd+k} \times B^n) : t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I, g_q(\omega) \geq 0, q \in I_q = \{1, 2, \dots, Q\}\};$$

$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j)$ – псевдонормалізована Φ -функція гіперкуль S_i та S_j , $i < j \in I_n$,

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2;$$

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int} C(\mu)$,

$$\Phi_i(u_i, \mu) = \min \{\Phi_{i0}^c(u_i, \mu), \Phi_{il}^c(u_i), l \in I_p\}, \quad i \in I_n;$$

$\Phi_{i0}^c(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $A^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int} A(\mu)$, $i \in I_n$;

$\Phi_{il}^c(u_i)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та об’єкта P_l , $i \in I_n$, $l \in I_p$;

$g_q(\omega) \geq 0$, $q \in I_q$, – додаткові обмеження; $g_q(\omega)$, $q \in I_q$ – неперервно диференційовані функції, додаткові обмеження на параметри розміщення гіперкуль та метричні характеристики області розміщення $C(\mu)$.

Досліджено основні особливості задачі HSOA:

- область допустимих розв’язків W , загалом, є незв’язною множиною з багатозв’язними компонентами зв’язності;

- якщо Φ -функції, які описують область допустимих розв’язків W , містять оператори максимумів, вона може бути подана як

$$W = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_t,$$

де множини W_t описуються системами з неперервно диференційованими функціями;

- кількість змінних задачі (1) оцінюється як $O(n)$, а кількість нерівностей, які описують область W , – як $O(n^2)$.

Залежно від вигляду функції цілі $\kappa(\omega)$ задача HSOA (1) може бути зображена як задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP) або задача, сформульована як задача про рюкзак (KP). Як контейнер розглядаються гіперкуля (зокрема, круг, куля), гіперпрямокутник (зокрема, прямокутник, кубоїд), гіперциліндр (зокрема, прямий круговий циліндр), опуклий d -політоп (зокрема, многокутник, багатогранник). Зони заборони можуть бути задані у вигляді кругів, опуклих многокутників ($d = 2$), куль, прямих кругових циліндрів, опуклих прямих багатокутних призм, опуклих багатогранних кутів ($d = 3$).

Задача ODP. Нехай є гіперкулі S_i з радіусами r_i , $i \in I_n$, та область розміщення $C(\mu) = A(\mu) \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l)$, де $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик контейнера. Необхідно розмістити гіперкулі S_i , $i \in I_n$, в області розміщення $C(\mu)$ таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I_n$, а функція цілі $\zeta(u, \mu)$, досягала мінімального значення.

Математична модель (1) для задачі ODP набуває вигляду

$$(u^*, \mu^*) = \arg \min_{(u, \mu) \in W_{ODP} \subset \mathbb{R}^{nd+k}} \zeta(u, \mu), \quad (2)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор центрів гіперкуль;

$$W_{ODP} = \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^{nd+k} : \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i > j \in I, \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, i \in I_n, g_q(u, \mu) \geq 0, q \in I_q\};$$

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C(\mu)^* = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int} C(\mu)$;

$g_q(u, \mu) \geq 0, q \in I_q$, – додаткові обмеження на параметри розміщення гіперкуль та метричні характеристики контейнера, $g_q(u, \mu)$ – двічі неперервно диференційовані функції.

Досліджено особливості задачі ODP:

- кількість змінних задачі (2) – $nd + k$, а кількість нерівностей, які описують область допустимих розв'язків, – $n + C_n^2 + Q$;

- матриці Якобі та матриці Гессе функцій, які описують обмеження, є сильно розрідженими;

- якщо межа контейнера складається із поверхонь, які описуються лінійними та обернено опуклими функціями, то мінімум лінійної функції цілі знаходиться в крайніх точках області W_{ODP} , що є розв'язком системи з $nd + k$ рівнянь, які описують межу W_{ODP} .

Задача KP. Нехай є гіперкулі S_i з радіусами r_i , $i \in I_n$, та область розміщення $C = A \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l)$ заданих розмірів. Необхідно розмістити гіперкулі з набору

S_i , $i \in I_n$, в області C таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I_n$, а коефіцієнт заповнення області був максимальним.

Математична модель (1) для задачі КР набуває вигляду

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u,t) \in W_{KP} \subset (\mathbb{R}^{nd} \times B^n)} \Psi(u, t), \quad (3)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$;

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^n r_i^d t_i, \quad t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W_{KP} = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{nd} \times B^n) : t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n, g_q(u, t) \geq 0, q \in I_q\};$$

$$\Phi_i(u_i) = \min \{\Phi_{i0}^c(u_i), \Phi_{il}^c(u_i), l \in I_p\};$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2.$$

Досліджено основні властивості задачі КР:

- задача (3) є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування (mixed-integer non-linear programming – MINLP), змінні t_i , $i \in I_n$, є двійковими, а змінні u_i , $i \in I_n$, – неперервними;

- функція цілі $\Psi(u, t)$ є кусково-сталою через присутність множників t_i та пропорційна сумі об'ємів гіперкуль, які розміщуються в області C ($t_i = 1$);

- якщо всі гіперкулі з набору S_i , $i \in I_n$, розміщуються в області C , то функція $\Psi(u, t)$ досягає глобального максимуму;

- локальні та глобальні максимуми, загалом, є нестрогими;

- кожному $t \in B^n$ відповідає деякий набір гіперкуль, для яких частина значень $t_i = 1$, а решта – $t_i = 0$, $i \in I_n$. Тоді множина $W^t = \{u \in \mathbb{R}^{dn} : (u, t) \in W_{KP}\}$ задає всілякі допустимі розміщення гіперкуль в області C , для яких $t_i = 1$, $i \in I_n$.

Очевидно, що для розв'язання задачі необхідно здійснити перебір усіх 2^n елементів $t \in B^n$ та визначити точки $u^t \in W^t$ для кожної множини W^t .

У третьому розділі розглядаються основні реалізації задачі HSOA залежно від вигляду функції цілі, вимірності простору, просторової форми області розміщення, метричних характеристик розміщуваних гіперкуль та області розміщення, додаткових обмежень. Зокрема, розглядаються математичні моделі таких задач: розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини; максимальної кількості рівних кругів у крузі з круговими зонами заборони; нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з технологічними обмеженнями; нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою; максимальної кількості рівних куль у контейнері, який є композицією двох циліндрів і кулі; максимальної кількості рівних куль у контейнері з зонами заборони; нерівних гіперкуль у гіперкулі мінімального радіуса; розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі заданого радіуса. Розглянемо деякі математичні моделі.

Задача ODP для розміщення 3D-куль у опуклому контейнері з мінімальною метричною характеристикою. Нехай контейнер $C(\mu)$ має одну з таких просторових форм: кубоїд, куля, циліндр. Необхідно знайти вектор u^* , який забезпечує розміщення куль $S_i(u_i^*)$, $i \in I_n$, без накладень у контейнері $C(\mu)$ з однією метричною характеристикою ($card(\mu)=1$), яка досягає мінімального значення $\mu = \mu^*$.

Математична модель задачі ODP (див. (2)) набуває такого вигляду:

$$(u^*, \mu^*) = \arg \min_{(u, \mu) \in W_{O1} \subset \mathbb{R}^{3n+1}} \mu, \quad (4)$$

де $W_{O1} = \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I_n, j > i, \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, i \in I_n\}$;

$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2$ – Φ -функція гіперкуль S_i та S_j , $i < j \in I_n$;

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та контейнера $C(\mu)$, де μ – або висота кубоїда (циліндра), або радіус кулі.

Функція цілі задачі (4) залежить тільки від однієї змінної та є лінійною, тому її мінімум знаходиться в крайніх точках області W_{O1} . У випадку, коли контейнер є кубоїдом, межа області W_{O1} складається з лінійних і обернено-опуклих поверхонь, а крайня точка області W_{O1} є розв'язком системи з $3n+1$ рівнянь, які описують межу W_{O1} . Внаслідок того, що циліндр має осьову симетрію, а куля – центральну симетрію, кожен локальний мінімум може бути визначений з точністю до симетрії.

Задача КР для розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у контейнері (IPRP). Нехай є набір Λ конгруентних гіперкуль S_i , $i \in I_\lambda = \{1, 2, \dots, \lambda\}$, з радіусом r та область розміщення $C = A \setminus \text{int}(\cup_{i \in I_p} P_i)$. Необхідно розмістити в області C максимальну кількість гіперкуль $\sigma^* \leq \lambda$ з набору Λ без взаємних накладень.

З урахуванням конгруентності куль математична модель задачі КР (див. (3)) набуває вигляду:

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u, t) \in W_I \subset (\mathbb{R}^{\lambda d} \times B^\lambda)} \Psi(u, t), \quad (5)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_\lambda)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_\lambda)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_\lambda$;

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^{\lambda} t_i, \quad t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W_I = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{nd} \times B^n) : t_i t_j \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_\lambda\};$$

$\Phi_i(u_i)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C^* = \mathbb{R}^d \setminus \text{int } C$.

Значення функції цілі в точці максимуму дорівнює кількості куль, які розміщуються в контейнері: $\sigma^* = \Psi(u^*, t^*)$.

Задача КР розміщення нерівних куль у опуклому контейнері із зонами заборони. Нехай задані множини $\Theta_k = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{kn_k}\}$, елементами яких є кулі з

радіусами $\hat{r}_k$, $k \in K = \{1, 2, \dots, \bar{k}\}$. Загальна кількість заданих куль $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{\bar{k}}$. Перейменуємо кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1n_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2n_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}n_{\bar{k}}}$ як S_i , $i \in I_n$. Радіуси куль S_i задаються: $r_i^0 = \hat{r}_1$ для $i = 1, 2, \dots, n_1$, $r_i^0 = \hat{r}_2$ для $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2$, і т. д., $r_i^0 = \hat{r}_{\bar{k}}$ для $i = n - n_{\bar{k}} + 1, n - n_{\bar{k}} + 2, \dots, n$. Нехай $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – координати центрів куль S_i , $i \in I_n$.

Також заданий контейнер A , який може бути або кулею S (рис. 1а), або опуклим багатогранником P (рис. 1б). Контейнер може мати зони заборони: прямі кругові циліндри C_q , $q \in Q = \{1, 2, \dots, \bar{q}\}$ (рис. 1в); опуклі багатокутні призми P_l , $l \in L = \{1, 2, \dots, \bar{l}\}$ (рис. 1г); об'єкти $G_m = G_{1m} \setminus \text{int } S_{1m}$, $m \in M = \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$, де G_{1m} – напівпростори, а S_{1m} – кулі (рис. 1г). З урахуванням зон заборони область розміщення записується як $C = A \setminus \text{int}(\cup_{q \in Q} C_q \cup_{l \in L} P_l \cup_{m \in M} G_m)$.

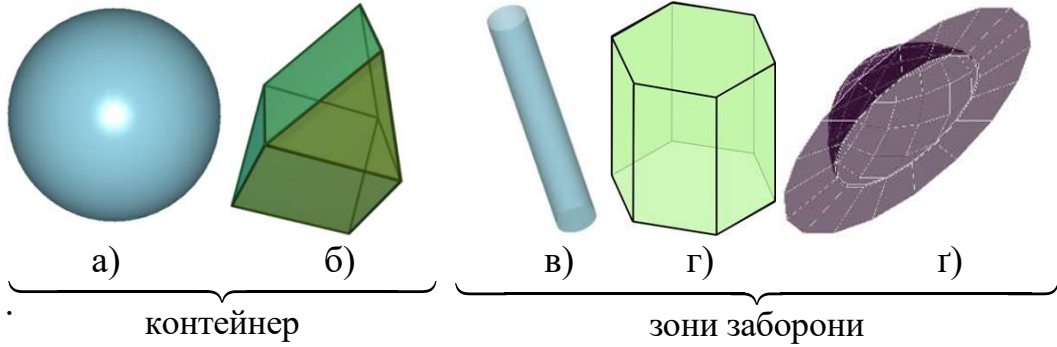


Рис. 1. Контейнер: а) куля, б) опуклий багатогранник; зони заборони: в) прямий круговий циліндр, г) опукла багатокутна призма, г) об'єкт, який є композицією напівпростору та кулі

Необхідно знайти вектор u^* , який забезпечує розміщення куль з набору $\{S_i, i \in I_n\}$, без взаємних накладань в області C з максимальною сумою об'ємів куль (максимальним коефіцієнтом заповнення).

Математична модель задачі КР (див. (3)) набуває такого вигляду:

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u, t) \in W_{KP3} \subset (\mathbb{R}^{3n} \times B^n)} \Psi(u, t), \quad (6)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$;

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^n r_i^3 t_i; \quad t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W_{KP3} = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{3n} \times B^n) : t_i t_j \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n\};$$

$$\Phi_i(u_i) = \min\{\Phi_i^S(u_i), \Phi_{iq}^{SC}(u_i), q \in Q, \Phi_{il}^{SP}(u_i), l \in L, \Phi_{im}^{SG}(u_i), m \in M\}, i \in I_n;$$

$$\Phi_i^S(u_i) = \begin{cases} \Phi_i^{SS}(u_i), & \text{якщо } A = S, \\ \Phi_i^{SA}(u_i), & \text{якщо } A = P; \end{cases}$$

$\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ – Φ -функція куль S_i та S_j , $i < j \in I$;

$\Phi_i^{SS}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та множини $S^* = \mathbb{R}^d \setminus \text{int } S$, $i \in I_n$;

$\Phi_i^{SA}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та множини $P^* = \mathbb{R}^d \setminus \text{int } P$, $i \in I_n$;

$\Phi_{iq}^{SC}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та циліндра C_q , $q \in Q$, $i \in I_n$;

$\Phi_{il}^{SP}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та опуклої призми P_l , $l \in L$, $i \in I_n$;

$\Phi_{im}^{SG}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та об'єкта G_m , $m \in M$.

Φ -функція $\Phi_{im}^{SG}(u_i)$ будується в такий спосіб. Об'єкт $G_m = G_{1m} \setminus \text{int } S_{1m}$, $m \in M$, (рис. 2) можна визначити як $G_m = \{X \in \mathbb{R}^3 : f_{1m}^g(O_m^T X) \geq 0, f_{2m}^g(O_m^T X) \geq 0\}$, де $f_{1m}^g(X) = a_m x + b_m y + c_m z + d_m$, $f_{2m}^g(X) = (x - x_{1m})^2 + (y - y_{1m})^2 + (z - z_{1m})^2 - R_m^2$, O_m – оператор повороту, (x_{1m}, y_{1m}, z_{1m}) – координати центра кулі S_{1m} . Нехай $\rho_m = \sqrt{R_m^2 - c_{1m}^2}$, $m \in M$, де $c_{1m} = A_m x_{1m} + B_m y_{1m} + C_m z_{1m} + D_m$, $A_m x + B_m y + C_m z + D_m = 0$ – нормальне рівняння площини $a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0$ (рис. 2).

Φ -функція $\Phi_{im}^{SG}(u_i)$ записується як $\Phi_{im}^{SG}(u_i) = \Phi_{mi}(T_m u_i)$, де T_m , $m \in M$, – оператори трансляції та повороту,

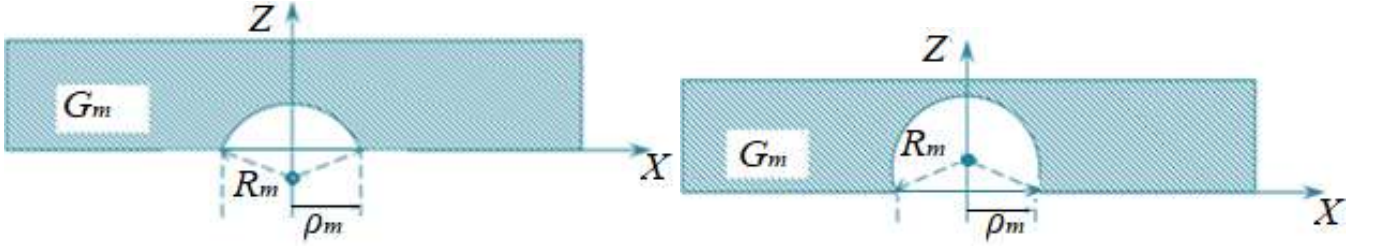


Рис 2. Ілюстрація множини G_m у проекції XOZ (для $c_{1m} > 0$ та $c_{1m} < 0$).

$$\Phi_{mi}(v_i) = \begin{cases} \max\{\Psi_{jmi}(u_i), j = 1, 2, 3\}, & \text{якщо } \rho_m \geq r_i, \\ \max\{\Psi_{jmi}(u_i), j = 1, 3\}, & \text{якщо } \rho_m < r_i, \end{cases}$$

$$\Psi_{1mi}(u_i) = -z_i - r_i, \quad \Psi_{2mi}(u_i) = -x_i^2 - y_i^2 - (z_i - c_{1m})^2 + (R_m - r_i)^2,$$

$$\Psi_{3mi}(u_i) = \begin{cases} \min\{\Psi_{3jmi}(u_i), j = 1, 2, 3\}, & \text{якщо } c_{1m} \geq 0, \\ \min\{\Psi_{3jmi}(u_i), j = 1, 2, 3, 4\}, & \text{якщо } c_{1m} < 0, \end{cases}$$

$$\Psi_{31mi}(u_i) = \begin{cases} -x_i^2 - y_i^2 + \rho_m^2(z_i - c_{1m})^2 / c_{1m}^2, & \text{якщо } \rho_m > r_i, c_{1m} > 0, \\ -z_i, & \text{якщо } \rho_m > r_i, c_{1m} = 0, \\ x_i^2 + y_i^2 - \rho_m^2(z_i - c_{1m})^2 / c_{1m}^2, & \text{якщо } \rho_m > r_i, c_{1m} < 0, \\ x_i^2 + y_i^2 - \rho_m^2(z_i - \sqrt{r_i^2 - \rho_m^2})^2 / \sqrt{r_i^2 - \rho_m^2}, & \text{якщо } \rho_m < r_i, \end{cases}$$

$$\Psi_{32mi}(u_i) = 4\rho_m^2(x_i^2 + y_i^2)^2 - (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + \rho_m^2 - r_i^2)^2,$$

$$\Psi_{33mi}(u_i) = -x_i^2 - y_i^2 + \rho_m^2, \quad \Psi_{34mi}(u_i) = -z_i + c_{1m}.$$

Слід зазначити, що наявність класів конгруентності куль зменшує кількість варіантів вибору куль із заданого набору. Присутність зон заборони в контейнері значно ускладнює формалізацію умов розміщення куль у контейнері й пошук точок області допустимих розміщень. Імовірність виникнення фрагментів розміщення з

регулярною ґратчастою структурою зменшується. Область допустимих розв'язків може бути подана у вигляді об'єднання підобластей.

У четвертому розділі пропонується методологія розв'язання задач розміщення гіперкуль, яка містить аналіз вихідних даних, постановок задач, особливостей їх математичних моделей, методи побудови допустимих початкових точок, методи локальної й глобальної оптимізації.

Розглянуті в розділі 3 математичні моделі мають такі загальні властивості: багатовимірність, багатоекстремальність, нелінійність обмежень, які описують область допустимих розв'язків. Зі збільшенням вимірності простору та кількості розміщуваних гіперкуль значно зростає як кількість обмежень, так і кількість локальних екстремумів. Методи повного перебору локальних екстремумів, загалом, не реалізуються на практиці через значну обчислювальну складність оптимізаційних процедур, навіть за невеликої кількості ($n \leq 10$) та вимірності гіперкуль ($d \leq 3$). Для задач, поставлених як КР, є необхідність додаткового перебору ще й за цілочисловими змінними. Тому в рамках методології пропонується принципово новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень і дозволяє отримувати наближення до глобального екстремуму.

Основні структурні елементи методології розв'язання задач HSOA наведено на рис. 3. Методологія включає аналіз постановки задачі, вихідних даних та обмежень, математичні моделі, які охоплюють клас задач розміщення гіперкуль різної вимірності, дослідження їх особливостей і розробку стратегій розв'язання, в яких пропонуються методи побудови допустимих розміщень (початкових точок або наближених розв'язків), методи локальної оптимізації та методи глобальної оптимізації.

Методи побудови допустимих початкових розміщень.

Пропонуються декілька методів побудови допустимих початкових точок: метод випадкового розміщення, метод ґратчастого розміщення, жадібний алгоритм (модифікація методу оптимізації за групами змінних) та метод оптимізації нев'язок.

Метод випадкових розміщень використовується для швидкого отримання допустимої точки для $d = 4, 5, \dots, 19$, шляхом вибору випадкових значень координат центрів гіперкуль у декартовій або гіперсферичній системах координат і перевірки умов допустимості. Загалом, координати центра гіперкулі $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ можна отримати в гіперсферичній системі координат за формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau \cdot \cos \phi_1, \\ x_2 &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2, \\ x_3 &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3, \quad \dots, \\ x_{d-1} &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{d-2} \cdot \cos \phi_{d-1}, \\ x_d &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{d-2} \cdot \sin \phi_{d-1}, \end{aligned}$$

де $\tau \in [0, \rho - r]$, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{(d-2)} \in [-\pi / 2, \pi / 2]$, $\phi_{(d-1)} \in [-\pi, \pi]$.

Методологія розв'язання задач HSOA



Рис. 3. Основні структурні елементи методології розв'язання задач HSOA

Метод гратчастих розміщень використовується для $d = 2, 3$, при розміщенні в опуклому контейнері, якщо відсутні зони заборони та розміри гіперкуль значно менші, ніж розміри контейнера. За гексагонального гратчастого розміщення кожен круг дотичний до шести кругів, а куля – до 12 інших куль. Для більш щільного заповнення контейнера та отримання різноманітних початкових точок застосовуються трансляції ґраток відносно контейнера.

Жадібний алгоритм є модифікацією методів оптимізації за групами змінних із спеціальними критеріями й може бути застосований для отримання перспективних допустимих початкових точок за прийнятний час. Згідно з жадібним алгоритмом задача (1) зводиться до послідовності задач

$$\kappa_l^* = \underset{u_l \in D_l \subset \mathbb{R}^d}{extr} \kappa_l(u_l), \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$D_l = \{u_l \in \mathbb{R}^d : \Phi_{il}(u_i^*, u_l) \geq 0, \quad i \in I_{l-1}, \quad \Phi_l(u_l) \geq 0\}, \quad I_{l-1} = \{1, 2, \dots, l-1\}, \quad I_0 = \emptyset.$$

Жадібний алгоритм застосовується й для отримання наближень до локальних екстремумів та до глобальних екстремумів із застосуванням методу мултистарту.

Метод оптимізації нев'язок використовується для $d = 2, 3$, якщо контейнер має зони заборони, та для $d \geq 20$.

Нехай $X^0 \notin W_g \subset \mathbb{R}^r$, де $W_g = \{X \in \mathbb{R}^r : g_i(X) \geq 0, \quad i \in I\}$ – область допустимих розв'язків задачі розміщення, яка може бути подана у вигляді задачі нелінійного

програмування. Визначимо множину індексів порушених обмежень: $I' = \{i \in I : g_i(X^0) < 0\}$. Для пошуку допустимої точки розв'язується така задача:

$$(\chi^*, X^*) = \arg \max_{(\chi, X) \in W' \subset \mathbb{R}^{\tau+1}} \chi,$$

$$W' = \{(\chi, X) \in \mathbb{R}^{\tau+1} : g_i(X) - \chi \geq 0, i \in I', -\chi \geq 0\}.$$

Як початкова точка вибирається $(\chi^0, X^0) \in W'$, де $\chi^0 = \min\{g_i(X^0), i \in I'\}$. Якщо задача має точку глобального максимуму (χ^*, X^*) , де $\chi^* = 0$, то $X^* \in W_g$. Якщо в точці локального (або глобального) максимуму $\chi^* < 0$, то $X^* \notin W_g$.

Для локальної оптимізації використовуються комбінація методів декомпозиції й внутрішньої точки (розв'язувач IPOPT – Interior Point Optimizer⁶), модифікація методу можливих напрямків, метод оптимізації за групами змінних та метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа.

З урахуванням багатоекстремальності задач розміщення є необхідність вибору кращого варіанта розміщення. Загалом, безпосередній перебір усіх варіантів неможливий внаслідок *NP*-складності задач розміщення. Тому для цілеспрямованого пошуку кращих варіантів вибираються методи, в основі яких – перегляд частини множини розв'язків із відтинанням заздалегідь неперспективних її підмножин. Розроблений метод, який за рахунок гомотетичних перетворень гіперкуль дозволяє здійснювати перехід від одного локального екстремуму до іншого, з кращим значенням функції цілі.

Після аналізу всіх чинників, які впливають на побудову математичних моделей, дослідження особливостей моделей, запропоновано шість основних стратегій розв'язання задач HSOA: три – для задач ODP (1) (рис. 4) та три – для задач KP (IPPP) (2) (рис. 5).

Стратегія 1: ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT застосовується для розміщення невеликої кількості куль (10-60) з різними радіусами, значення яких сильно відрізняються один від одного. Вона ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації, завдяки якій вибираються перспективні перестановки куль. Відповідно до випадково згенерованих послідовностей за допомогою жадібного алгоритму будується набір крайніх точок області допустимих розв'язків. Послідовність визначає порядок куль, в якому застосовується метод оптимізації за групами змінних. Крайня точка з кращим значенням функції цілі й відповідна їй перестановка вибираються як центр околу на множині перестановок. Визначаються кращі крайні точки, які є центрами наступних околів. Процес продовжується, радіус околів поступово зменшується. Точки з мінімальним значенням функції цілі беруться як початкові точки, й за допомогою методу декомпозиції й розв'язувача IPOPT обчислюються локальні мінімуми задачі. Кращий локальний мінімум вибирається як наближення до глобального мінімуму задачі.

⁶ Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106. Iss. 1. P. 25–57.



Рис. 4. Стратегії розв'язання задач ODP



Рис. 5. Стратегії розв'язання задач КР (IIPP)

Для рівних кругів пропонується інша модифікація методу околів, що звужуються, яка є основою *Стратегії 2: ODP-SA-DNS-tree-IPOPT* для розміщення 10-150 рівних куль. Для побудови спеціального дерева, яке визначає крайні точки області допустимих розв'язків, використовується жадібний алгоритм. Вершинам дерева відповідають крайні точки, які можна отримати методом виключення змінних в явному вигляді, й деяка послідовність чисел. На дискретній множині, яку утворюють ці послідовності, вводиться евклідова метрика. Для спрямованого перебору крайніх точок застосовується метод околів, що звужуються. Отримані крайні точки, як і в попередній модифікації, розглядаються як початкові точки. За допомогою методу декомпозиції й розв'язувача IPOPT обчислюються відповідні локальні мінімуми. Вибирається кращий локальний мінімум, який є наближенням до глобального мінімуму.

Стратегія 3: ODP-random-JA-IPOPT застосовується для розміщення 10-300 гіперкуль різних радіусів, значення яких плавно змінюються від найменшого до найбільшого. Вважається, що радіуси всіх розміщуваних гіперкуль є змінними. Допустима початкова точка будується за методами випадкових розміщень або оптимізації нев'язок. Локальний мінімум обчислюється за допомогою комбінованого методу декомпозиції та IPOPT. Завдяки розв'язанню допоміжних задач значення радіусів гіперкуль гнучко перерозподіляються, займаючи максимальний об'єм (площу) контейнера. Здійснюється спрямований перебір локальних екстремумів і пошук наближення до глобального мінімуму основної задачі. Такий підхід дозволяє максимально використовувати єдність дискретної й неперервної природи задачі розміщення куль.

Стратегія 4: KP-random-tree-IPOPT застосовується для розміщення 10-30 гіперкуль різних радіусів, які треба вибрати із заданого набору гіперкуль, у контейнері заданих розмірів. Будується дерево розв'язків, яке реалізує повний перебір усіх варіантів вибору гіперкуль із заданого набору (значень двійкових змінних). Застосовується набір правил відтинання, який дозволяє скоротити кількість вершин дерева розв'язків. Згідно з вершинами зрізаного дерева розв'язків вибираються набори куль, для яких за допомогою методів комбінованого методу декомпозиції та IPOPT обчислюються відповідні локальні максимуми. Вибирається точка, якій відповідає максимальне значення функції цілі – об'єму розміщуваних гіперкуль.

Стратегію 5: PPP-random/lattice-IPOPT доцільно використовувати для розміщення 10-5000 рівних гіперкуль. Вона ґрунтується на методі гомотетичних перетворень. Вибирається початкове значення кількості гіперкуль. Допустимі початкові точки будуються за методами випадкових, ґратчастих розміщень, оптимізації нев'язок залежно від кількості та вимірності гіперкуль, просторової форми контейнера. Для кожної початкової точки розв'язується допоміжна задача, за допомогою якої визначається, чи можливе розміщення вибраних гіперкуль у контейнері. Якщо розміщення можливе, то кількість гіперкуль збільшується, причому допустимі початкові точки визначаються на основі спеціальної процедури, в якій ураховується розміщення гіперкуль, уже розміщених раніше. Якщо розміщення неможливе з усіх початкових точок, то розміщення гіперкуль, отримане на попередньому кроці, береться як апроксимація до глобального максимуму. Стратегію можна застосовувати і для розміщення понад 5000 гіперкуль. У цьому випадку здійснюється пошук наближень до локальних максимумів за допомогою методу оптимізації за групами змінних. Тривалість процесу визначається наявними обчислювальними ресурсами. Для глобальної оптимізації використовується метод оптимізації за групами змінних і метод мультистарту.

Стратегія 6: PPP-random-SA-Lagrange ефективно працює при розміщенні понад 5000 рівних куль. Стратегія за своєю логічною схемою схожа на попередню, але оптимізація виконується за групами змінних. Напрямок спуску вибирається на основі аналізу множників Лагранжа. Особливістю цієї стратегії є критерій зупинки процесу розміщення за неможливості отримати допустиму початкову точку для

кулі, що розміщується.

У п'ятому розділі будуються методи розв'язання задач HSOA для гіперкуль різної вимірності, математичні моделі яких запропоновані в третьому розділі. З огляду на стратегії розв'язання для кожної задачі описуються методи побудови допустимих початкових точок, методи локальної й глобальної оптимізації. Для побудови методів локальної оптимізації застосовується метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень. Теоретично обґрунтовується ефективність методу спрямованого перебору локальних екстремумів, в якому відбуваються гомотетичні перетворення гіперкуль завдяки змінним радіусам. Вибір методів локальної й глобальної оптимізації відбувається відповідно до розробленої стратегії.

Методи локальної оптимізації.

Комбінований метод декомпозиції й IPOPT. Для підвищення ефективності методу локальної оптимізації використовується метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень, які дозволяють звести задачу з великою кількістю нелінійних обмежень до послідовності задач нелінійного програмування зі значно меншою кількістю нелінійних обмежень.

Метод внутрішньої точки, який використовується в роботі у вигляді розв'язувача IPOPT, є прямо-двоїстим методом внутрішньої точки (бар'єрних функцій), для якого доведена теоретична збіжність. Він показав високу ефективність для задач нелінійного програмування, які виникають при розміщенні геометричних об'єктів

Метод можливих напрямків використовується при збільшенні кількості змінних (понад 3000). Пропонується модифікація методу, в якому кожна задача нелінійного програмування зводиться до послідовності задач лінійного програмування.

Розглянемо задачу нелінійного програмування (2). Зобразимо область допустимих розв'язків у вигляді $W_{ODP} = \{X \in \mathbb{R}^m : g_j(X) \geq 0, j \in J\}$. Пошук локального мінімуму задачі (2) відбувається за ітераційною формулою

$$X^{l+1} = X^l + t^l Z^{*l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

де X^l – допустима початкова точка, t^l – параметр, який регулює довжину кроку, Z^{*l} – вектор спуску – розв'язок задачі лінійного програмування:

$$(\chi^l, Z^{*l}) = \arg \max_{(\chi, Z^l) \in G^l \subset \mathbb{R}^{n+1}} \chi,$$

$$G^l = \{(\kappa, Z^l) \in \mathbb{R}^{n+1} : (\nabla \kappa(X^l), Z^l) \geq \chi, (\nabla g_i(X^l), Z^l) \geq \chi, i \in T_1^l, \\ (\nabla g_j(X^l), Z^l) \geq 0, j \in T_2^l, |z_i^l| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}, \\ T_1^l = \{j \in J_1 : g_j(X^l) \leq \varepsilon\}, T_2^l = \{j \in J_2 : g_j(u^l) \leq \varepsilon'\},$$

де T_1^l та T_2^l – множини індексів нелінійних та лінійних обмежень відповідно, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \varepsilon / 10$.

Метод оптимізації за групами змінних є модифікацією методу покоординатного спуску. Він застосовується для задач ODP з кількістю змінних

понад 10000. Всі змінні задачі розбиваються на декілька груп. Вибирається одна з груп змінних, а решта змінних розглядаються як сталі. Для розв'язання отриманої задачі використовуються розв'язувач IPOPT або метод можливих напрямків. Після розв'язання всіх підзадач отриманий результат є наближенням до локального екстремуму задачі ODP. Для поліпшення результату описаний процес повторюється декілька разів для різних груп змінних.

Метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа застосовується для задач із обернено опуклими та лінійними обмеженнями й ґрунтується на аналізі множників Лагранжа. Він застосовується разом із методом оптимізації за групами змінних та стратегією активного набору обмежень. Метод реалізується ітераційною формулою:

$$\kappa(u^{l+1}) = \kappa(u^l) - \Delta\kappa(u^l), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

Для вибору напрямку руху вектор множників Лагранжа $\lambda^l = (\lambda_1^l, \lambda_2^l, \dots, \lambda_m^l)$ обчислюється як розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\nabla\kappa(u^l) = A(u^l)^T \lambda^l, \quad \text{де } A(u^l) - \text{матриця Якобі.}$$

Обмеження, яке відповідає мінімальному від'ємному множнику, вилучається із списку активних обмежень. Для вибору напрямку руху із крайньої точки ослаблюється активне обмеження, якому відповідає цей множник. Далі відбувається рух межею області допустимих розв'язків у напрямку зменшення функції цілі. Довжина кроку вибирається таким чином, щоб стало активним, принаймні, ще одне обмеження. Процес триває доти, доки в деякій крайній точці всі множники Лагранжа є додатними, що є необхідною й достатньою умовою екстремуму.

Методи глобальної оптимізації.

Методу гілок та меж адаптується для розв'язання задачі КР. В модифікації методу для побудови дерева розв'язків ураховуються особливості перебору значень двійкових змінних для задачі КР, в якій деякі гіперкулі мають рівні радіуси. Розроблено ефективні правила відтинання неперспективних гілок дерева розв'язків, Це дозволяє значно скоротити кількість варіантів у порівнянні з повним перебором.

Дерево розв'язків T для задачі (6) будується в такий спосіб (рис. 6). Корінь дерева T_R розгалужується на вузли T_{j_1} , $j_1 \in \hat{J}_1 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_1\}$, першого рівня, де j_1 означає, що розглядається j_1 гіперкуль з набору Θ_1 . Значення $j_1 = 0$ відповідає ситуації, коли гіперкулі з радіусом $\hat{r}_k$ не вибираються. Для вибраних гіперкуль відповідні значення $t_i = 1$, $i \in I$, в моделі (6). У свою чергу, кожен з $\hat{j}_1 + 1$ вузлів першого дерева розгалужується в $\hat{j}_2 + 1$ вузлів другого рівня: $T_{j_1 j_2}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_2\}$. Значення j_1 та j_2 вказують, що з набору S_{k_1} вибираються j_1 гіперкуль та з набору Θ_2 – j_2 гіперкуль відповідно. Тоді вузлу другого рівня відповідає $j_1 + j_2$ гіперкуль, а загальна кількість вузлів другого рівня – $(\hat{j}_1 + 1)(\hat{j}_2 + 1)$. Кожний вузол другого рівня розгалужується на $\hat{j}_3 + 1$ вузлів і т.д. Таким чином, кінцевому вузлу (вершині) $T_{j_1 j_2 \dots j_k}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2, \dots$,

$j_k^- \in \hat{J}_k^- = \{0, 1, \dots, \hat{j}_k^-\}$ відповідає гілка $T_R, T_{j_1}, T_{j_1 j_2}, T_{j_1 j_2 j_3}, \dots, T_{j_1 j_2 \dots j_k^-}$, тобто береться j_1 гіперкуль з множини Θ_1 , j_2 гіперкуль з множини Θ_2 й т.д., j_k^- гіперкуль з множини Θ_k^- . Це означає, що кожній вершині дерева відповідає $j_1 + j_2 + \dots + j_k^-$, для яких $t_i = 1$ (див. (6)). Загальна кількість вершин дерева T дорівнює $\prod_{k \in K} (\hat{j}_k^- + 1)$.

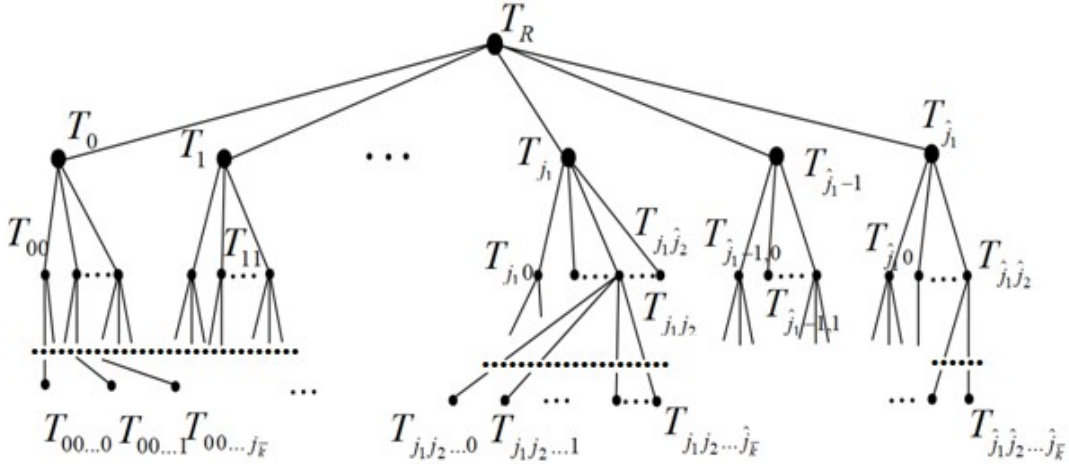


Рис. 6. Дерево розв'язків

Під час побудови дерева розв'язків для подальшого розгалуження розглядаються тільки вузли дерева T , для яких виконується нерівність $\underline{\Psi} < \Psi(u) < \bar{\Psi}$, де $\underline{\Psi}$ та $\bar{\Psi}$ – нижня та верхня оцінки функції цілі $\Psi(u)$ відповідно. Значення $\underline{\Psi}$ дорівнює нулю та динамічно поновлюється, щойно отримується кращий варіант розміщення, а $\bar{\Psi} = \text{Volume}(C) \cdot k$, де k – найбільша відома щільність заповнення.

Метод околів, що звужуються, ґрунтується на статистичних властивостях функції цілі на перестановках куль або дереві розв'язків. Модифікації методу⁷ дозволяють організувати спрямований перебір послідовностей куль або гілок дерева розв'язків. Кожній перестановці куль $\pi_j = (S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}) \in \Pi_S$ (загалом, $\text{card}(\Pi_S) = n!$) ставиться у відповідність точка $X_j = (r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_n}) \in \mathbb{R}^n$. На множині перестановок вводиться метрика: $\rho(\pi_p, \pi_s) = \|\pi_p - \pi_s\|$, $\pi_p, \pi_s \in \Pi_S$. Аналогічно, кожній вершині $t_{11k \dots t}^n$ зрізаного дерева розв'язків ставиться у відповідність послідовність чисел $\pi_{kl \dots t} = (d_k^1, d_l^2, \dots, d_t^n)$, $k \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $l \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}, \dots, t \in \{1, 2, \dots, \tau_n\}$, яка задає важливість вершин дерева. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на дискретних множинах. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи статистичної інформації, обираються центр та радіус нового околу. Якщо значення функції цілі не

⁷ Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей : монография. Киев : Наук. думка, 1980. 205 с.

покращується, то радіус околів зменшується. Процес продовжується, доки радіус околу стає мінімально можливим, а поліпшення функції цілі не знайдено. Метод має не меншу ефективність, ніж класичний метод випадкового пошуку Монте-Карло⁷. Розроблені модифікації використовуються як для пошуку розв'язків задач розміщення куль, так і для побудови перспективних допустимих початкових точок.

В основі *методу гомотетичних перетворень* лежить ідея введення змінних радіусів гіперкуль. Задача ПРР (див. (5)) може бути зведена до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі:

$$F_{\sigma}(v^{\sigma}) = \max_{X^{\sigma} \in W_{\sigma} \subset \mathbb{R}^{(d+1)\sigma}} F_{\sigma}(v^{\sigma}), \quad \sigma = 1, 2, \dots, \sigma^*, \quad (7)$$

де $X^{\sigma} = (v^{\sigma}, u^{\sigma})$, $v^1 = r_1$, $u^1 = u_1$, $v^2 = (r_1, r_2)$, $u^2 = (u_1, u_2)$, $v^{\sigma} = (r_1, r_2, \dots, r_{\sigma})$, $u^{\sigma} = (u_1, u_2, \dots, u_{\sigma})$, $\sigma = 3, 4, \dots, \sigma^*$, $F_{\sigma}(v^{\sigma}) = \sum_{i=1}^{\sigma} r_i$;

$W_{\sigma} = \{X^{\sigma} \in \mathbb{R}^{(d+1)\sigma} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I_{\sigma} = \{1, 2, \dots, \sigma\}, \Phi_i(r_i, u_i) \geq 0, r_i \leq r, i \in I_{\sigma}\}$;

$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2$ – Φ -функція гіперкуль S_i та S_j , $i < j \in I_n$;

$\Phi_i(r_i, u_i)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C^* = \mathbb{R}^d \setminus \text{int } C$.

Завдяки лінійності функції цілі $F_{\sigma}(X^{\sigma})$ локальні максимуми задач (7) знаходяться в крайніх точках області W_{σ} .

Якщо $\sigma = \lambda$, то розміщено всі гіперкулі із заданого набору. Якщо для деякого σ маємо $F_{\sigma}(X^{\sigma^*}) = \sigma r$, то розв'язку задачі (7) відповідає розміщення σ гіперкуль з радіусом r у контейнері. Якщо для деякого σ маємо $F_{\sigma+1}(X^{(\sigma+1)^*}) < (\sigma+1)r$ та $F_{\sigma}(X^{\sigma^*}) = \sigma r$, то точка $X^{\sigma^*} = (v^{\sigma^*}, u^{\sigma^*})$ відповідає розміщенню $\sigma = \sigma^*$ гіперкуль у контейнері C . Якщо $F_{\sigma+1}(X^{(\sigma+1)^*}) < (\sigma+1)r$ – локальний максимум задачі (7), а $F_{\sigma}(X^{\sigma^*}) = \sigma r$, то значення $\sigma = \sigma^*$ вважається апроксимацією до глобального максимуму задачі (5).

Ідея гомотетичних перетворень розповсюджується для розміщення нерівних гіперкуль (задача ODP). В *методі спрямованого перебору локальних екстремумів (Jump Algorithm)* вихідною є точка локального мінімуму задачі (2). Формулюється допоміжна задача за умови фіксованих метричних характеристик контейнера

$$\Gamma(r^*) = \max_{X=(u,r) \in M \subset \mathbb{R}^{(d+1)n}} \Gamma(r), \quad (8)$$

де $\Gamma(r) = \sum_{i=1}^n r_i^d$;

$M = \{X \in \mathbb{R}^{(d+1)n} : \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, r_i) \geq 0, \hat{r}_{i_n} - r_i \geq 0, r_i - \hat{r}_{i_1} \geq 0, i \in I\}$.

Функція цілі задачі (8) записується таким чином, щоб гіперкулі зайняли максимальний об'єм (площу) контейнера. Для початкової точки $(\tilde{u}, \tilde{r})$, яка відповідає локальному мінімуму задачі (2), будується послідовність

$$X^{\nu} = \tilde{X} + 0.5^{\nu-1} Y^0, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

де Y^0 – вектор зростання функції $\Gamma(r)$. Очевидно, що існує таке ціле m , що для будь-якого $v \geq m$ виконується умова $\Gamma(r^v) > \Gamma(\tilde{r})$, $X^v \neq \tilde{X}$, $X^v \in M$. Сума об'ємів гіперкуль зростає, й для частини гіперкуль маємо: $r_i^v \geq \tilde{r}_i$, $i \in I_1 \subset I$, а для решти – $r_j^v < \tilde{r}_j$, $j \in I_2 \subset I$. Якщо існує $v = m$, для якого виконуються нерівності $r_i^m > \tilde{r}_i$, $r_j^m < \tilde{r}_j$, $\tilde{r}_i < r_j^m$, $\tilde{r}_j < r_i^m$, то є можливість переставити гіперкулі S_i та S_j .

Теорема. Нехай $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ – точка локального максимуму задачі (8). Якщо $m \leq N$, то $\Gamma(\tilde{r}) > \Gamma(\tilde{r})$.

Таким чином, точці $(\tilde{u}, \tilde{r})$ відповідає новий локальний мінімум задачі (2), значення функції цілі в якому не гірше, ніж в початковій точці. Процес продовжується, доки є поліпшення функції цілі. Після цього виконується два додаткових етапи: послідовне зменшення розмірності допоміжних задач за рахунок фіксації радіусів кругів за спеціальним алгоритмом та перестановка деяких пар гіперкуль.

Метод є ефективним за умови, якщо радіуси гіперкуль рівномірно розподілені в діапазоні між мінімальним і максимальним значеннями. Чим більша неоднорідність радіусів, тим менша доцільність використання методу.

Метод мультистарту застосовується разом з усіма методами локальної й глобальної оптимізації, окрім методу гілок та меж. Як наближення до глобального екстремуму задачі вибирається найкращий локальний екстремум або наближення до локального екстремуму.

Для переходу від задачі КР до задачі ODP введено контейнер із змінним коефіцієнтом гомотетії, який є змінною метричною характеристикою. Таким чином, методи, розроблені для задачі ODP, можна застосовувати і для задачі КР.

У шостому розділі наводяться опис програмного забезпечення, результати обчислювальних експериментів та практичні застосування. Програмне забезпечення розробляється з використанням середовища Delphi та графічного пакету OpenGL. Для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування використовуються сучасні розв'язувачі HOPDM (higher order primal dual method)⁸, BPMPD (primal-dual interior point algorithm)⁹, IPOPT (Interior Point OPTimizer), які найбільш ефективні для задач із сильно розрідженими матрицями Якобі та Гесса. Для перевірки розроблених методів для задачі PPP ($d \leq 7$) використовується розв'язувач задач нелінійного програмування GAMS/BARON (General Algebraic Modeling System / Branch-and-Reduce Optimization Navigator)¹⁰.

Параметри комп'ютера, на якому проводяться експерименти, – процесор Intel Core I5 750 (2.5 GHz), 6 Gb оперативної пам'яті.

⁸ Gondzio J. HOPDM (version 2.12) - A fast LP solver based on a primal-dual interior point method. *European Journal of Operational Research*. 1995. Vol. 85. Iss. 1. P. 221–225.

⁹ Mészáros C. On numerical issues of interior point methods. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2008, Vol. 30. Iss.1. P. 223–235.

¹⁰ Tawarmalani M., Sahinidis N. V. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*. 2005. Vol. 103. Iss. 2. P. 225–249.

Результати обчислювальних експериментів порівнюються з тестовими задачами, поданими в роботах, які присвячені розміщенню гіперкуль різної вимірності, та на спеціалізованих сайтах. Розглядалися задачі розміщення різної розмірності: від розміщення кругів ($d=2$) до гіперкуль ($d=24$). Кількість гіперкуль – від 20 до декількох мільйонів. Наводяться приклади для всіх реалізацій HSOA: ODP, KP, IPP.

Тестові приклади й числові результати задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини (ODP) доступні на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке (Німеччина, сторінка E. Specht¹¹). За результатами розрахунків наведені графічні ілюстрації та таблиці. Подані дві групи прикладів. Перша група складається з 25 прикладів для 20-300 кругів. Порівняння результатів наведено в табл. 1. У першому стовпчику таблиці – назва прикладу, решта стовпчиків: n – кількість кругів, l^* – довжина прямокутника (функція цілі), отримана в дисертаційній роботі, l_{best}^* – світовий рекорд, W – ширина прямокутника, щільність заповнення прямокутника.

Друга група містить 128 різноманітних прикладів для 25, 50, 75, 100 кругів з різними значеннями радіусів кругів та розмірів прямокутника. У 81 з 153 тестових прикладів отримані кращі результати. Як показали обчислювальні експерименти, метод, запропонований у дисертаційній роботі, найбільш ефективний для 50-300 кругів у тих випадках, коли радіуси кругів рівномірно розподілені в заданому діапазоні. Для розв'язання задач нелінійного програмування використовувався IPOPT. На рис. 7 показаний результат розміщення 300 нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини. Решта результатів доступні на сайті¹¹.

Для задачі розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі з круговими зонами заборони (IPP) розглянуто декілька груп прикладів з різними метричними характеристиками контейнера.

Першу групу тестових прикладів запропоновано колективом учених в університеті Пікардії ім. Жульє Верна (Париж, Франція)¹². Радіус кругів $r=1$ (в усіх тестових прикладах). Кількість зон заборони – $N=1$, радіус та координати центра круга S_1 (зони заборони) – $\rho_1=10.25$, $x_1=0$, $y_1=0$ (або $y_1=R-\rho_1$). Результати порівняння підсумовуються в табл. 2: ρ – радіус C , λ_c^{ref} (λ_b^{ref} – для випадку, коли S_1 дотичний до межі C)¹² та λ_c^{SY} (λ_b^{SY}) – максимальні кількості кругів, отримані різними методами. Розміщення для $\lambda_c^{SY}=237$, $\lambda_b^{SY}=239$ зображено на рис. 8а,б. На рис. 8,в наведено розміщення $\lambda^*=237$ кругів у крузі з 32 зонами заборони.

Друга група прикладів наведена на сайті Магдебурзького університету¹¹ для задачі розміщення заданої кількості кругів у крузі з мінімальним радіусом (ODP). Для обчислення тестових прикладів застосовується підхід, який дозволяє звести задачу IPP до задачі ODP. Кращі розміщення отримані для 1077-5000 кругів. Табл. 3 містить мінімальні значення радіусів контейнера та максимальні значення

¹¹<http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>.

¹² Akeb H., Li Y. Basic heuristics for packing a large number of equal circles. Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne, 2005.

щільності розміщення в прикладах, для яких отримані кращі розв'язки. Розміщення 5000 кругів наведено на рис. 9.

Порівняння результатів для групи прикладів $n=20-300$

Таблиця 1

Приклад	Кількість кругів n	Функція цілі l^*	Світовий рекорд l^*_{best}	Ширина області W	Щільність розміщення
SY1	30	17.1314	17.039663	9.5	0.853892056372
SY2	20	14.4398	14.397059	8.5	0.844619731312
SY3	25	14.3267	14.326620	9.0	0.853909681827
SY4	35	23.3932	23.285708	11.0	0.854915094732
SY5	100	35.7223	35.722300	15.0	0.875706296924
SY6	100	36.1828	36.182710	19.0	0.878442877222
SY12	50	29.5890	29.583500	9.5	0.859603050638
SY13	55	30.3534	30.353400	9.5	0.861182691569
SY14	65	37.5773	37.554743	11.0	0.864690792376
SY23	45	27.6141	27.573166	9.0	0.860188006756
SY24	55	34.0109	34.010900	11.0	0.861599067978
SY34	60	34.5437	34.543629	11.0	0.866053746510
SY56	200	63.9151	63.915100	19.0	0.883687288144
SY123	75	42.8472	42.847130	9.5	0.863997825463
SY124	85	48.5074	48.441309	11.0	0.864337500810
SY134	90	49.1024	49.046868	11.0	0.866162931849
SY234	80	45.3449	45.344850	11.0	0.866979108695
SY1234	110	59.6202	59.620120	11.0	0.870159058544
SY36	125	42.5985	42.598440	19.0	0.882249966609
SY125	150	40.2342	40.234200	20.0	0.883352220303
SY1236	175	54.1351	54.135040	20.0	0.882645194371
SY356	225	70.2934	70.293370	19.0	0.885984875770
SY1256	250	78.1348	78.134710	19.0	0.885610995364
SY12356	275	72.9105	72.910410	22.0	0.888318145506
SY565	300	69.4528	69.452780	25.0	0.888329381641

Порівняння результатів для групи прикладів з однією зоною заборони

Таблиця 2

Радіус круга ρ	Кількість кругів λ_c^{ref12}	Кількість кругів у роботі λ_c^{sy}	Кількість кругів λ_b^{sy12}	Кількість кругів у роботі λ_b^{sy}
17.5	156	159	151	158
20	228	237	229	239
25	411	427	423	433
26	449	470	462	478
27	492	517	512	524
28	545	565	560	572
29	602	613	609	624
30	647	668	661	673
35	934	955	945	957

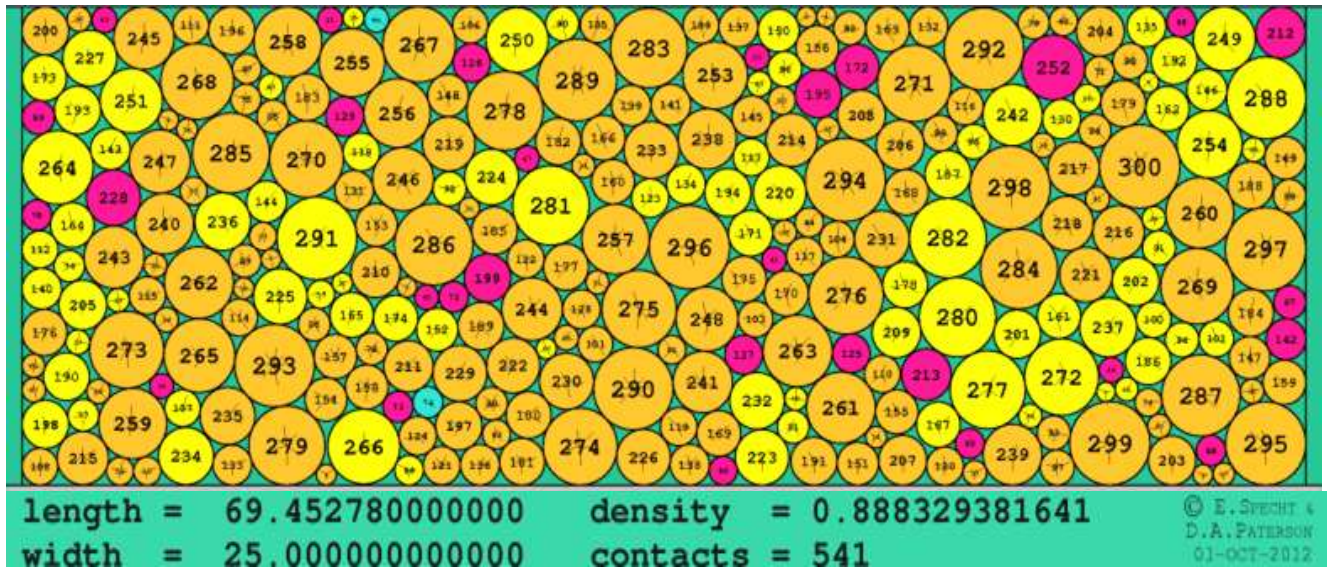


Рис. 7. Результат розміщення 300 нерівних кругів у прямокутнику (ODP)

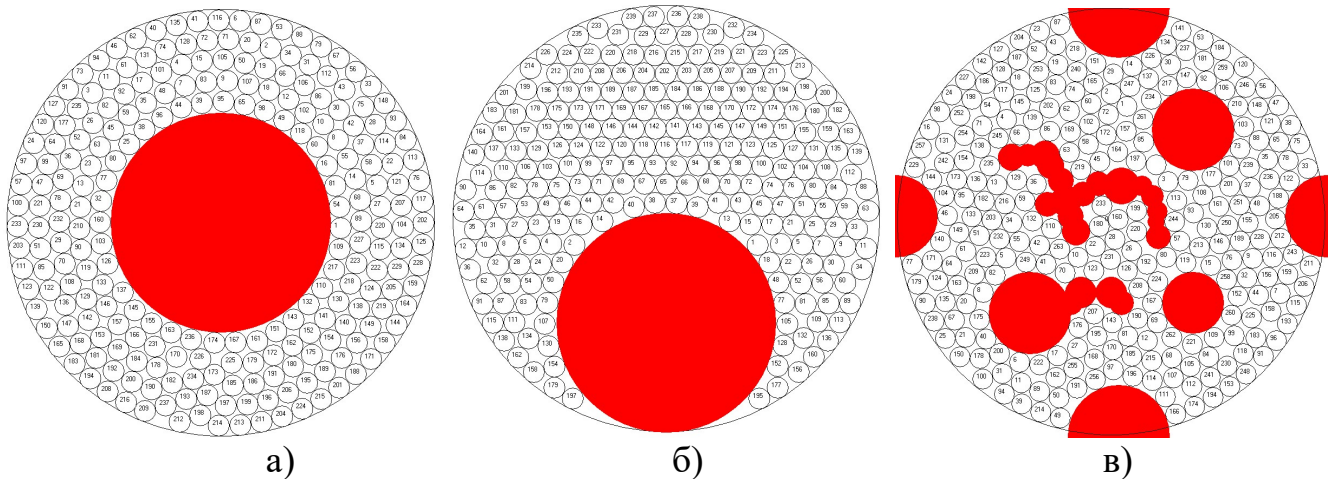


Рис. 8. Розміщення кругів у крузі з зонами заборони (PRP)

Результати розміщення кругів у крузі з мінімальним радіусом

Таблиця 3

Кількісні характеристики розміщення									
Кількість кругів N	1077	1090	1099	1200	1300	1500	3000	4000	5000
Радіус області ρ	35.186	35.387	35.574	37.112	38.605	41.413	58.255	67.180	75.056
Щільність заповнення	0.8700	0.8704	0.8684	0.8713	0.8723	0.8746	0.8840	0.8863	0.8876

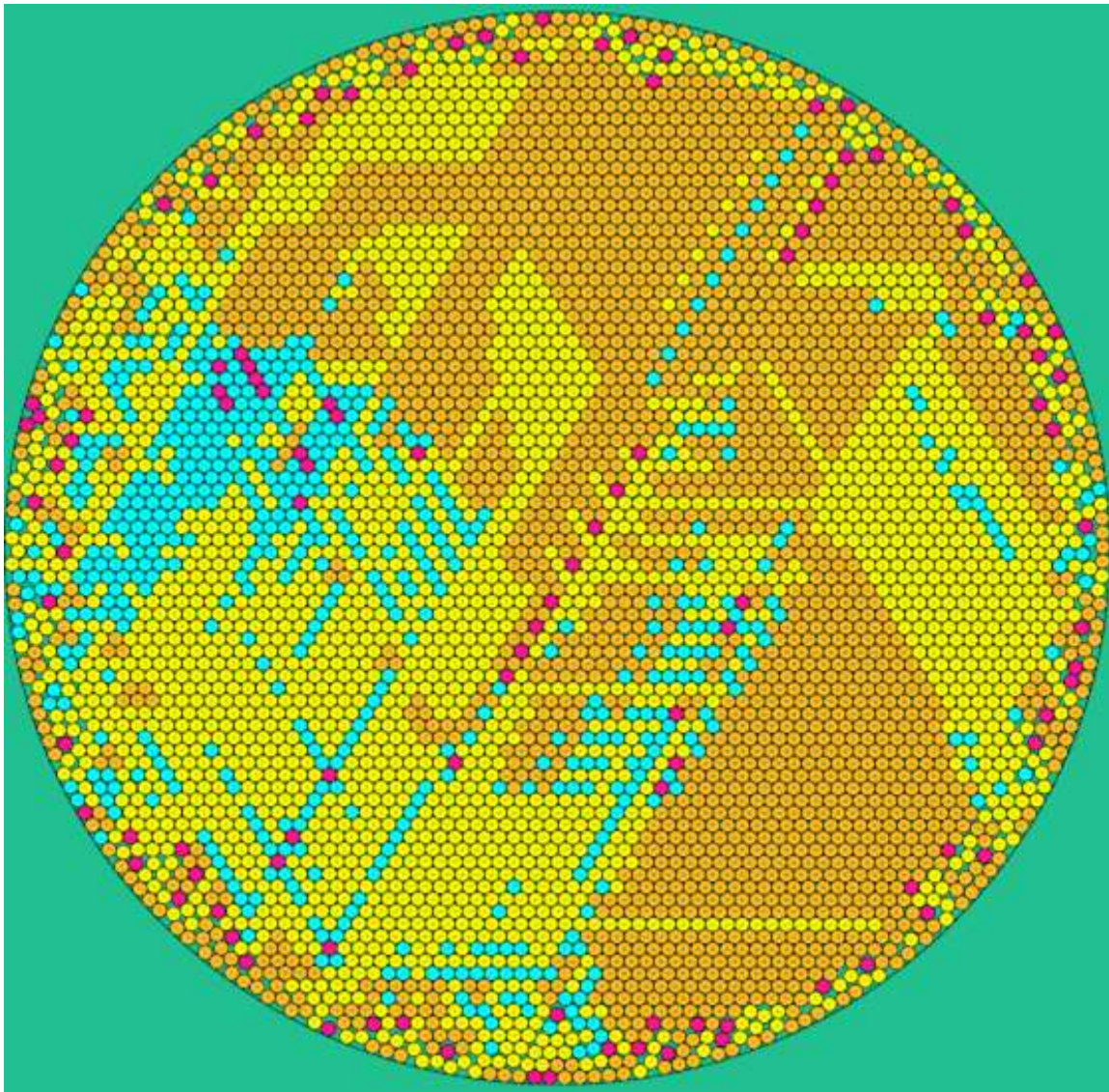


Рис. 9. Розміщення 5000 рівних кругів у крузі (ODP)

Для задачі *розміщення нерівних куль у контейнерах з мінімальною метричною характеристикою* (ODP) обчислювальні експерименти виконувалися для різних просторових форм контейнера (кубоїд, куля, циліндр). Для кубоїда отримано результати, які за значенням функції цілі наближені до результатів, отриманих М. Hifi, L. Yousef¹³. Для задачі розміщення куль у кулі тестування проводилося для $r_i = i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $16 \leq n \leq 100$. Порівняння результатів подано в табл. 4. У першому та другому стовпчиках таблиці містяться назви прикладів та кількість розміщуваних куль n відповідно. В третьому та четвертому стовпчиках – порівняння кращих значень мінімального радіуса: R_H ¹⁴ та R^* у дисертаційній роботі. Розміщення 100 куль (приклад ZHXF100) наведено на рис. 10.

¹³ Hifi M., Yousef L. A local search-based method for sphere packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2019. Vol. 274. Iss. 2. P. 482–500.

¹⁴ Zeng Z. Z., Huang W. Q., Xu R. C., Fu Z. H. An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere. *Advanced Materials Research*. 2012. Vol. 546–547. P. 1464–1469.

Результати розміщення куль у кулі (ODP)

Приклад	Кількість куль n	Радіус кулі R_H^{14}	Радіус кулі в роботі R^*	Поліпшення %
ZHXF16	16	33.6582	33.6572	0
ZHXF17	17	36.2030	36.2021	0
ZHXF18	18	38.8463	38.8467	-0
ZHXF19	19	41.5452	41.5462	-0
ZHXF20	20	44.2737	44.2557	0.04
ZHXF21	21	47.0342	47.0332	0
ZHXF22	22	49.9068	49.8666	0.08
ZHXF23	23	52.8368	52.7425	0.18
ZHXF24	24	55.7546	55.5782	0.32
ZHXF25	25	58.4684	58.4665	0
ZHXF26	26	61.4745	61.3883	0.14
ZHXF27	27	64.4854	64.4141	0.11
ZHXF28	28	67.4837	67.4173	0.1
ZHXF29	29	70.5257	70.3911	0.19
ZHXF30	30	73.4813	73.3704	0.15
ZHXF31	31	76.5336	76.5057	0.04
ZHXF32	32	79.8018	79.6075	0.24
ZHXF33	33	83.1967	82.8314	0.44
ZHXF34	34	86.2430	85.9206	0.37
ZHXF35	35	89.3454	89.1536	0.21
ZHXF40	40	-	105.6146	-
ZHXF50	50	-	140.7613	-
ZHXF60	60	-	178.1920	-
ZHXF70	70	-	217.0801	-
ZHXF80	80	-	258.4230	-
ZHXF90	90	-	300.9910	-
ZHXF100	100	-	345.5416	-

Розміщення куль у областях різної просторової форми наведено на рис. 11.

Результати обчислювальних експериментів для $d \geq 4$ підтверджують результати дослідження інших фахівців щодо властивостей розміщення гіперкуль: щільності розміщення та контактного числа.

Розглядаються практичні задачі розміщення гіперкуль різної вимірності та можливість їх моделювання й розв'язання за допомогою запропонованих математичних моделей, стратегій, методів та алгоритмів.

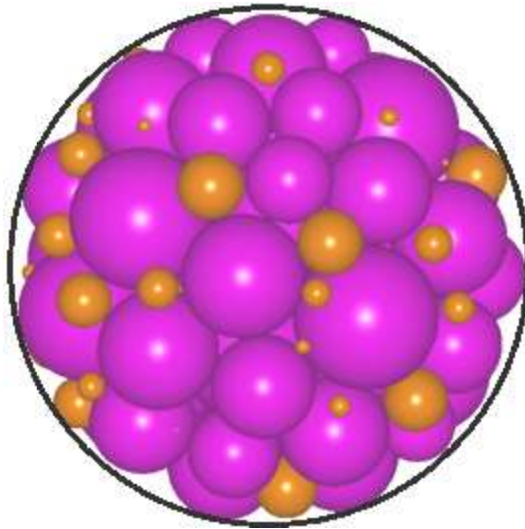


Рис. 10. Розміщення куль для прикладу ZHXF100

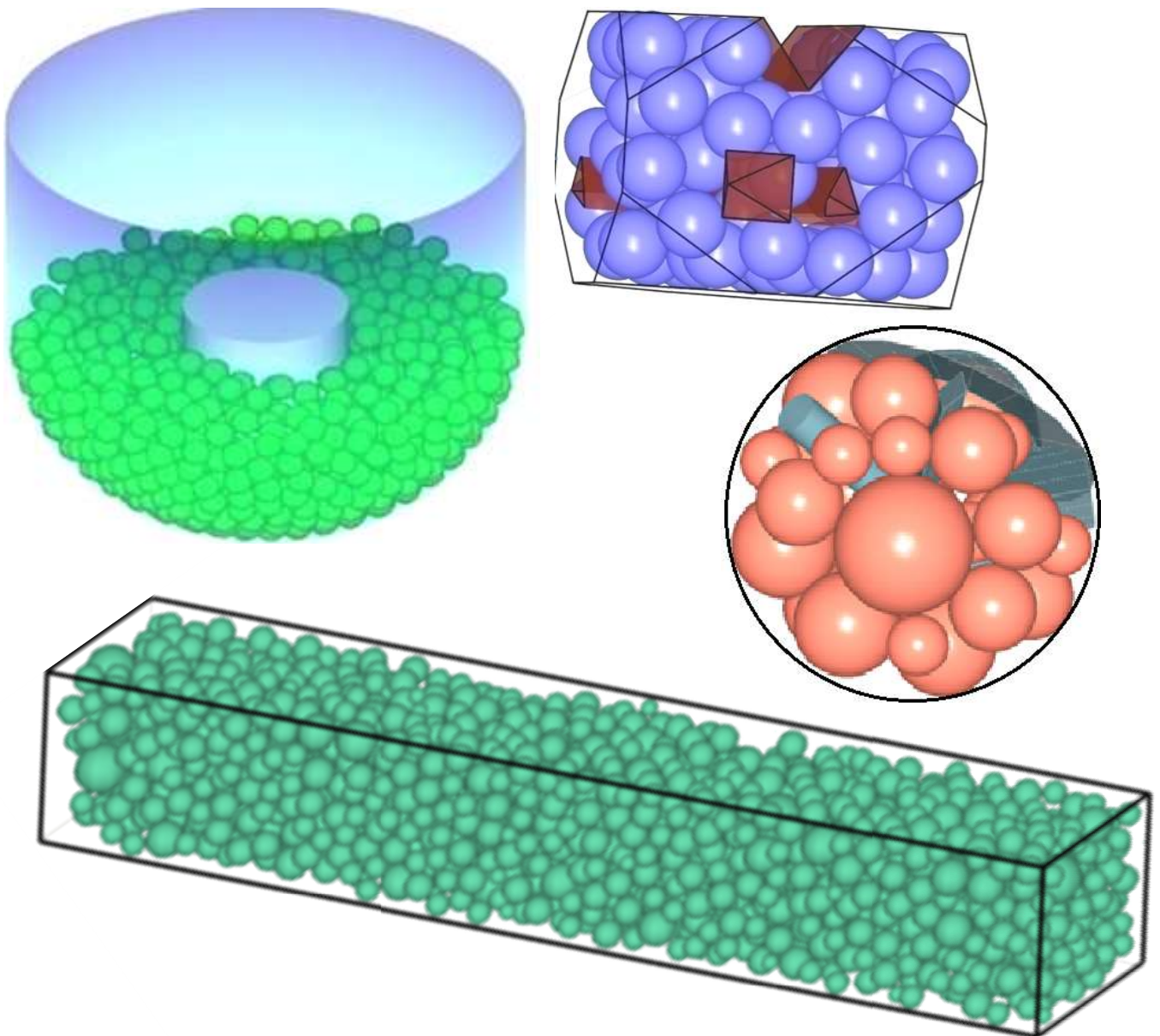


Рис. 11. Приклади розміщення куль

Додатки до дисертації містять свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, довідку про використання програмного забезпечення на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету "Львівська політехніка", лист підтримки від державного університету Нуево Леон (Монтеррей, Мексика) та акт впровадження в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки.

ВИСНОВКИ

У дисертації запропоновано методологію розв'язання задач оптимального розміщення гіперкуль у обмежених областях з урахуванням спеціальних обмежень на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, включаючи створення нових засобів математичного моделювання, побудову нових математичних моделей та розробку ефективних методів розв'язання.

Основні наукові та практичні результати дисертації:

- ✓ сформульовано основну задачу розміщення гіперкуль (HSOA), множина реалізацій якої охоплює широке коло актуальних практичних застосувань;

- ✓ побудовано засоби математичного моделювання умов розміщення гіперкуль ($2D$, $3D$, nD , $n \geq 4$) в опуклому контейнері, який має просторову форму гіперпрямокутника, гіперкулі, гіперциліндра, n -політопа з урахуванням мінімально допустимих відстаней та зон заборони, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами, із застосуванням методу Ф-функцій Стояна;

- ✓ побудовано математичну модель задачі HSOA, в якій враховується вимірність гіперкуль, просторова форма контейнера (гіперпрямокутник, гіперкуля, гіперциліндр, n -політоп), обмеження на мінімально допустимі відстані між гіперкулями, зони заборони;

- ✓ побудовано та досліджено математичні моделі основних реалізацій задачі HSOA згідно з міжнародною типологією задач розкрою та упакування (Cutting&Packing) у вигляді задачі зі змінною метричною характеристикою контейнера (ODP) та задачі про рюкзак (KP);

- ✓ розроблено нові методи розв'язання задач HSOA, які ґрунтуються на методах нелінійного програмування, методі гілок та меж, послідовній статистичній оптимізації, ідеї гомотетичних перетворень гіперкуль та контейнера;

- ✓ створено методологію, в якій на основі аналізу вихідних даних та особливостей математичних моделей пропонуються ефективні стратегії для розв'язання основних реалізацій задач HSOA;

- ✓ створено відповідне програмне забезпечення, яке реалізує розроблені методи розв'язання задач HSOA із застосуванням сучасних розв'язувачів задач лінійного та нелінійного програмування HOPDM, BPMPD, IPOPT, GAMS/BARON;

- ✓ ефективність отриманих результатів підтверджується порівнянням з кращими результатами інших дослідників для різних реалізацій задачі HSOA,

опублікованими в міжнародних журналах та на сайті¹¹. Для більшості тестових прикладів отримано розв'язки, кращі за значенням функції цілі.

✓ запропоновано нові тестові приклади для задач HSOA із зонами заборони та для гіперкуль ($n \geq 4$);

✓ наведено приклади розв'язання практичних задач, які виникають в матеріалознавстві, ядерній енергетиці, порошковій металургії, хімічній промисловості, адитивних технологіях.

Розроблене програмне забезпечення використано при виконанні Договору № 338-28/270/21-2008 від 11.02.2008 р. "Розробка програми для імітаційного моделювання процесу властивостей сплаву в залежності від розмірів гранул" між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та ВО "Знамена", м. Полтава. Розроблені програми застосовуються на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету «Львівська політехніка» для розв'язання задачі оптимального заповнення заданого об'єму частинками сферичної форми. Результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі в Харківському національному університеті радіоелектроніки.

Отримані результати є теоретичною і практичною основою для побудови імітаційних моделей, інтелектуальних систем прийняття рішень, які пов'язані з оптимальним розміщенням об'єктів сферичної форми, подальшим розвитком математичного моделювання й обчислювальних методів у теорії геометричного проектування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped. *Intelligent Decision Support* : book / Bortfeldt A. et al. (eds). Gabler, Germany, 2008. P. 47–67.
2. Стоян Ю. Г., Лазарева И. Е., Яськов Г. Н. Метод поиска локального минимума в задаче упаковки разных шаров в прямой цилиндр. *Доповіді НАН України*. 2000. № 6. С. 104–109.
3. Stoyan Y., Scheithauer G., Yaskov G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 11. Iss 4. 2003. P. 389–407.
4. Stoyan Y., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
5. Романова Т. Е., Гребенник И. В., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Упаковка шаров в параллелепипеде с учетом погрешностей. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 119–129.
6. Yaskov G. N. Mathematical model of problem of packing identical spheres into a cylindrical container. *Системи управління, навігації та зв'язку*: зб. наук. праць. К. : Центр. н.-д. ін.-т навігації і управління. 2007. Вип. 4. С. 128–130.

7. Yaskov G. N. Random packing of identical spheres into a cylindrical container *Системи обробки інформації*: зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2008. № 1 (68). С. 128–130.
8. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки интервальных кругов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2008. № 1/4. Вип. 31. С. 25–29.
9. Yaskov G. N. Packing spheres into a parallelepiped by means of the decremental neighbourhood method. *Біоніка інтелекту*. 2008. № 1 (68). С. 84–86.
10. Яськов Г. Н. Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 43–49.
11. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2010. № 7(48). С. 95–98.
12. Яськов Г. Н. Метод решения задачи размещения разных кругов с выбором перспективных начальных точек. зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2010. Вип. 3. С. 119–122.
13. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*. 2010. Vol. 17. No. 1. P. 51–70.
14. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвід. наук.-техн. зб. К.: Київ. нац. ун-т буд-ва і арх. 2010. Вип. 85. С. 306–312.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. Iss. 4. P. 855–868.
16. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. Iss. 10. P. 1355–1369.
17. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. *Системи обробки інформації*. 2012. Вип. 7(105). С. 150–157.
18. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді НАН України*. 2013. № 5. С. 44–50.
19. Яськов Г. Н. Размещение максимального числа равных кругов в круге. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 2. С. 60–67.
20. Яськов Г. Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 4(111). С. 97–100.
21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20. P. 79–99.
22. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. Vol. 8. Iss. 3. P. 949–970.
23. Yaskov G. N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблемы машиностроения*. Харків. 2014. Т. 17. № 2. С. 48–53.
24. Stoyan Yu. G, Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 419–426.
25. Khlud O. M., Yaskov G N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with

- the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No. 6. Iss. 46. P. 131–135.
26. Yaskov G. Methodology to solve multi-dimensional sphere packing problems. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 67–85.
 27. Yaskov G., Shekhovtsov S. Methodological basis of solving sphere packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Advanced Information Systems*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 54–57.
 28. Стоян Ю. Г., Яськов Г. М., Евсеева Л. Г. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплава". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 27362. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 23.01.2009.
 29. Яськов Г. М., Чугай А. М. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 50773. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 19.08.2013.
 30. Stoyan Yu. G., Gil N. I., Romanova T. E., Pankratov A. V., Yaskov G. N., Pridatko D. I. Mathematical Models and Methods for Optimization Placement Problems. *Communication and Control Technologies CCCT'03* : Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Orlando, Florida, USA, 2003. P. 383–389.
 31. Stoyan Y., Yaskov G. Packing various spheres into parallelepiped. Proc. of the *1st ESICUP Meeting*, Lutherstadt Wittenberg, Germany, 2004. P. 29.
 32. Stoyan Yu., Chugay A., Yaskov G. Packing a great number of identical spheres into a composed domain. Proc. of the *2nd ESICUP Meeting*, University of Southampton, UK, 2005. P. 24.
 33. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. Proc. of the *Workshop on Cutting Stock Problems WSCSP2005*, Sapiientia University of Miercurea-Ciuc, Romania, 2006. P. 75–82.
 34. Яськов Г. Н. Комбинированный метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики АППММ'06* : тез. докл. междунар. конф. Харьков: ИПМАШ НАНУ, НТУ "ХПИ", ХНУРЭ, НАУ "ХАИ", 2006. С. 46.
 35. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. Proc. of the *5th ESICUP Meeting*, L'Aquila, Italy, 2008. P. 24.
 36. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing problems of congruent circles into a circle and congruent spheres into a circular cylinder. Proc. of the *6th ESICUP Meeting*, Valencia, Spain, 2009. P. 22.
 37. Yaskov G. N. Packing a maximal number of congruent hyperspheres into a hypersphere. *Інформатика і системні науки ICH-2010* : матеріали всеукр. наук.-практ. конф. Полтав. ун-т споживчої кооперації, Полтава, 2010. С. 210–212.
 38. Yaskov G. N. A method of packing congruent circles into a circle with circular prohibited areas. *Інформаційно-комп'ютерні технології 2010* : матеріали V міжнар. наук.-техн. конф. Житомир, 2010. С. 9–11.
 39. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Интервальное моделирование свойств сплава. *Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010* :

- матеріали четвертої міжнар. наук.-техн. конф. Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава, 2010. С. 39.
40. Чугай А. М., Яськов Г. Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2011* : тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. національний університет ім. О. Гончара, Дніпро, 2011. С. 281.
 41. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral container. Proc. of the 8th ESICUP Meeting, Copenhagen, Denmark, 2011. P. 23.
 42. Яськов Г. Н. Упаковка неравных кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 3-й междунар. конф., Кишинэу, Молдова, 2012. С. 562.
 43. Stoyan Yu., Yaskov G. A local optimization switch algorithm for packing non-identical circles. Proc. of the 25th European conference on operational research, Vilnius, Lithuania. 2012. P. 49.
 44. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромисса в геометрическом проектировании. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012* : тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 78–79.
 45. Яськов Г. Н. Особенности математической модели задачи упаковки неравных кругов с переменными метрическими характеристиками *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012* : тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 334–335.
 46. Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G. Packing non-equal spheres into containers of different shapes. Dresden : Technische Univesität, 2013. 25 p. (Preprint. Technische Univesität Dresden, Germany; MATH-NM-07-2013).
 47. Yaskov G. N. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral domain. *Питання оптимізації обчислень ПОО-XL* : тези доп. міжнар. наук. конф. смт. Кацивелі, Крим, 2013. С. 291.
 48. Яськов Г. Н. Упаковка гипершаров в гипершаре минимального радиуса. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2013* : тези доп. XI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2013. С. 272–273.
 49. Яськов Г. Н. Упаковка шаров в цилиндрическом слое. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологи* : материалы 4-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2014. Т. II. Р. 512–519.
 50. Субота І. О., Хлуд О. М., Яськов Г. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС-2015* : тези доп. XXI всеукраїнської наукової конференції, Львів, 2015. С. 302–303.
 51. Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. A mathematical model of optimal packing of unequal spheres into a sphere. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних*

- систем MPZIS-2015* : тез. доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2015. С. 226–227.
52. Stoyan Yu., Scheithauer G., Yaskov G. Packing unequal spheres into 3D containers. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. I. С. 327–328.
 53. Яськов Г. Н. Математическая модель оптимальной упаковки неравных кругов в многоугольнике. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. II. Р. 349–354.
 54. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения ориентированных эллипсоидов в многогранной области. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи AIPS'2016* : тез. доп. XVI міжнар. наук.-техн. конф. К., Україна, 2016. С. 55–56.
 55. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения кругов и ориентированных эллипсов в многосвязной области. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2016* : тез. доп. XIV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2016. С. 226–227.
 56. Яськов Г. Н. Дерево решений для задачи размещения неравных шаров в шаре заданного радиуса. *Інформаційні системи і технології ICT-2017* : тез. доп. 6-ої міжнар. наук.-техн. конф. м. Коблеве, Миколаїв. обл., 2017. С. 143–144.
 57. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing spheres into a larger sphere with the jump algorithm. *Proc. of the 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017*, Sofia, Bulgaria, 2017. Р. 254–260.
 58. Romanova T., Pankratov A., Yaskov G., Scheithauer G. Packing ellipses in a disconnected polygonal domain. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2017* : тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2017. С. 167–168.
 59. Yaskov G. N. A mathematical model of packing unequal spheres into a multiconnected container. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : тез. доп. міжнар. наук. конф. Рівне, 2018. С. 25–26.
 60. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Применение jump-алгоритма для задач упаковки неравных шаров в контейнере заданных размеров. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 6-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2018. С. 171–173.
 61. Yaskov G. N. Packing unequal spheres into a multiconnected set. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тез. доп. I міжнар. наук.-техн. конф. Х., 2018. С. 78–79.
 62. Yaskov G., Romanova T., Pankratov A. Optimization packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2018*: тез. доп. XV

міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2018. С. 233–234.

АНОТАЦІЯ

Яськов Г.М. Оптимізаційні задачі розміщення гіперкуль: математичні моделі, методи розв'язання, застосування. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України, м. Харків, 2019.

Дисертація присвячена моделюванню та розв'язанню оптимізаційних задач розміщення гіперкуль ($2D$, $3D$ та nD , $n \geq 4$) в опуклих контейнерах (HSOA) з урахуванням мінімально допустимих відстаней та зон заборони, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами.

Розроблено засоби математичного моделювання умов розміщення гіперкуль в області, обмеженій гіперсферичними, гіперциліндричними поверхнями та гіперплощинами, із застосуванням методу Φ -функцій Стояна.

Побудовано математичну модель задачі HSOA та розглянуто її основні реалізації згідно з міжнародною типологією задач розкрою та упакування (Cutting & Packing) залежно від вигляду функції цілі (задача Open Dimension Problem або Knapsack Problem), вимірності та особливостей метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів, обмеження на значення радіусів), просторової форми контейнера (гіперпрямокутник, гіперкуля, гіперциліндр, n -політоп), обмежень на мінімально допустимі відстані та зон заборони.

Створено методологію, в якій на основі аналізу вихідних даних та особливостей математичних моделей пропонуються ефективні стратегії розв'язання задач HSOA, що містять нові методи побудови допустимих початкових точок, методи пошуку локальних екстремумів та наближень до глобальних екстремумів.

Розроблені методи розв'язання задач HSOA ґрунтуються на методах нелінійного програмування, жадібному алгоритмі, методі гілок та меж, статистичній оптимізації, гомотетичних перетвореннях гіперкуль та контейнера.

Ефективність запропонованих математичних моделей та методів підтверджується порівнянням отриманих результатів з кращими світовими аналогами для різних реалізацій задачі HSOA, опублікованими в міжнародних журналах та доступних на сайтах <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>, <http://www.packomania.com>. Наведено приклади розв'язання практичних задач, які виникають в матеріалознавстві, ядерній енергетиці, порошковій металургії, адитивних технологіях, хімічній промисловості, медицині.

Програмне забезпечення, розроблене в дисертаційній роботі, застосовується на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету "Львівська політехніка". Отримані свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір. Побудовані засоби математичного моделювання та

методи розв'язання задач розміщення використовуються в навчальному процесі в Харківському національному університеті радіоелектроніки в курсах "Моделювання геометричних об'єктів" та "Теорія прийняття рішень".

Ключові слова: геометричне проектування, задача розміщення, круг, куля, гіперкуля, Ф-функція, математичне моделювання, нелінійна оптимізація, задача зі змінними метричними характеристиками контейнера, задача про рюкзак.

АННОТАЦИЯ

Яськов Г.Н. Оптимизационные задачи размещения гипершаров: математические модели, методы решения, применения. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, 2019.

Диссертация посвящена моделированию и решению оптимизационных задач размещения гипершаров ($2D$, $3D$ и nD , $n \geq 4$) в выпуклых контейнерах (HSOA) с учетом минимально допустимых расстояний и зон запрета, граница которых формируется цилиндрическими, сферическими поверхностями и плоскостями.

Разработаны средства математического моделирования условий размещения гипершаров в области, ограниченной гиперсферическими, гиперцилиндрическими поверхностями и гиперплоскостями, с применением метода Ф-функций Стояна.

Построена математическая модель задачи HSOA и рассмотрены ее основные реализации в соответствии с международной типологией задач раскроя и упаковки (Cutting&Packing) в зависимости от вида функции цели (задача Open Dimension Problem или Knapsack Problem), размерности и особенностей метрических характеристик гипершаров (конгруэнтность, распределение радиусов, ограничения на значения радиусов), пространственной формы контейнера (гиперпрямоугольник, гипершар, гиперцилиндр, n -политоп), ограничений на минимально допустимые расстояния и зон запрета.

Создана методология, в которой на основе анализа исходных данных и особенностей математических моделей предлагаются эффективные стратегии решения задач HSOA, которые содержат новые методы построения допустимых начальных точек, методы поиска локальных экстремумов и приближений к глобальным экстремумам.

Разработанные методы решения задач HSOA основываются на методах нелинейного программирования, жадном алгоритме, методе ветвей и границ, статистической оптимизации, гомотетических преобразованиях гипершаров и контейнера.

Эффективность предложенных математических моделей и методов подтверждается сравнением полученных результатов с лучшими мировыми аналогами для различных реализаций задачи HSOA, опубликованными в международных журналах и доступными на сайтах <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>, <http://www.packomania.com>. Приведены примеры

решения практических задач, возникающих в материаловедении, ядерной энергетике, порошковой металлургии, аддитивных технологиях, химической промышленности, медицине.

Программное обеспечение, разработанное в диссертационной работе, применяется на кафедре прикладного материаловедения и обработки материалов Национального университета "Львовская политехника". Получены свидетельства о регистрации авторского права на произведение. Построенные средства математического моделирования и методы решения задач размещения используются в учебном процессе в Харьковском национальном университете радиоэлектроники в курсах "Моделирование геометрических объектов" и "Теория принятия решений".

Ключевые слова: геометрическое проектирование, задача размещения, круг, шар, гипершар, Ф-функция, математическое моделирование, нелинейная оптимизация, задача с переменными метрическими характеристиками контейнера, задача о рюкзаке.

ABSTRACT

Yaskov G.M. Optimization problems of packing hyperspheres: mathematical models, solution methods, applications. – Manuscript.

The thesis for a Doctor's degree of technical sciences in speciality 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. – A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis is dedicated to modeling and solving optimization problems of packing hyperspheres ($2D$, $3D$ and nD , $n \geq 4$) into convex containers (HSOA) taking into account the minimum allowable distances and prohibition areas, the frontiers of which are formed by cylindrical, spherical surfaces and planes.

Tools of mathematical modeling of the conditions of packing of hyperspheres into a domain bounded by hyperspherical, hypercylindrical surfaces and hyperplanes making use of Stoyan phi-function technique are developed.

A mathematical model of the HSOA problem is constructed and its main characteristics are studied. Variants of the mathematical model are considered according to the international typology of Cutting&Packing problems depending on the type of objective function (Open Dimension Problem or Knapsack Problem), dimension and the peculiarities of the metric characteristics of hyperspheres (congruence, radii distribution, constraints on the radii values), the spatial shape of the container (hyperrectangle, hypersphere, hypercylinder, n -polytope), restrictions on the minimum allowable distances and prohibition zones.

In the methodology, which is created based on the analysis of the source data and the peculiarities of mathematical models, effective strategies of solving HSOA problems are proposed. The strategies involve new methods of construction of feasible starting points, searching for local extrema and approximations to global extrema.

New methods for solving HSOA problems based on nonlinear programming methods, the greedy algorithm, the branch and bound algorithm, statistical optimization,

the idea of homothetic transformations of the hyperspheres and the container are developed.

The effectiveness of the proposed mathematical models and methods is confirmed by comparing the obtained results with the best world analogues for various implementations of the HSOA problem published in international journals and available at <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>, <http://www.packomania.com>. Examples of solving practical problems arising in materials science, nuclear power engineering, powder metallurgy, additive manufacturing, chemical industry, and medicine are given.

The software developed in the thesis is used at the Department of Applied Materials Science and Materials Processing of the Lviv Polytechnic National University. Copyright certificates are registered. The constructed mathematical modeling tools and methods for solving placement problems are used in the education process at the Kharkiv National University of Radio Electronics in the "Modeling of geometric objects" and "Decision making theory" courses.

Keywords: geometric design, packing problem, circle, sphere, hypersphere, phi-function, mathematical modeling, nonlinear optimization, open dimension problem, knapsack problem.

Підписано до друку 09.12.2019 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетн. Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 2
Гарнітура Times New Roman. Тираж 100 прим. Замовлення № 3

Надруковано у копії-центрі «Кутузовський» (СПДФО Тімашев В.І.)
Свідоцтво ВО1№483697
м. Харків, вул. Героїв праці, 24

