

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ІМ. А.М. ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ІМ. А.М. ПІДГОРНОГО

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЯСЬКОВ ГЕОРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 519.859

ДИСЕРТАЦІЯ
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ГІПЕРКУЛЬ:
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ,
ЗАСТОСУВАННЯ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
технічні науки

Подается на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Г.М. Яськов

Науковий консультант: Романова Тетяна Євгеніївна, доктор технічних наук,
професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Яськов Г.М. Оптимізаційні задачі розміщення гіперкуль: математичні моделі, методи розв'язання, застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 математичне моделювання та обчислювальні методи.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2019.

На сьогодні значно зростає інтерес до задач оптимального розміщення геометричних об'єктів через велику кількість практичних застосувань у різних галузях науки та техніки, зокрема в хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, адитивних технологіях, будівництві, логістиці, робототехніці, біології, медицині тощо. Серед задач цього класу одними з найважливіших є задачі розміщення гіперкуль різної вимірності. Спектр використання таких задач – від вивчення властивостей атомів до моделювання космічних тіл, наприклад, імітаційне моделювання в матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях, планування радіохірургії та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині, вивчення клітин, хромосом та інших структур у біології; проектування схем розміщення вантажів у відсіках транспортних засобів, оптимізація топології виробів для 3D-друку; кодування та захист інформації тощо.

Задачі розміщення гіперкуль є NP-складними, тому для їх розв'язання найчастіше використовуються евристичні підходи, які дають можливість отримати наближені розв'язки. Для визначення ефективності розроблених методів використовуються набори тестових прикладів (benchmark instances), зокрема, розв'язки задач розміщення кругів у контейнері зі змінною метричною характеристикою, доступні на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке (сторінка E. Specht), Німеччина

<http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html> ("The best known solutions of the circular open dimension problem CODP").

Задача HSOA (hypersphere optimal arrangement) полягає у пошуку такого розміщення підмножини із заданої множини гіперкуль (у тому числі кругів, куль) в обмеженому контейнері без взаємних накладань, за якого функція цілі (критерій якості) досягає свого екстремального значення.

Згідно з міжнародною типологією задач розкрою та упакування (Cutting&Packing) існують дві постановки задачі HSOA: Open Dimension Problem (ODP) – задача зі змінними метричними характеристиками контейнера (з функцією цілі на мінімум) і Knapsack Problem (KP) – задача, сформульована як задача про рюкзак (з функцією цілі на максимум). У задачі ODP необхідно розмістити гіперкулі із заданими радіусами в контейнері, метричні характеристики (розміри) якого оптимізуються. Натомість в задачі KP гіперкулі із заданого набору треба розмістити в контейнері з фіксованими метричними характеристиками таким чином, щоб коефіцієнт заповнення контейнера був максимальним. Задача розміщення рівних гіперкуль (IPP – Identical Item Packing Problem) є окремим випадком задачі KP, в якій коефіцієнт заповнення контейнера є пропорційним кількості розміщуваних гіперкуль.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень оптимізаційних задач геометричного проектування й спрямована на створення єдиної методології, яка дозволяє розв'язувати задачі розміщення гіперкуль різної вимірності ($n=2$, $n=3$ та $n \geq 4$) з урахуванням додаткових обмежень (зони заборони, мінімально допустимі відстані, обмеження на радіуси гіперкуль), та орієнтована на сучасні методи оптимізації й програмне забезпечення для розв'язування задач лінійного та нелінійного програмування.

У роботі будуються засоби математичного моделювання взаємних відношень геометричних об'єктів у задачі HSOA: Ф-функції гіперкулі й доповнення до контейнера – для моделювання відношення включення гіперкулі у контейнер, який має форму гіперпрямокутника, гіперкулі,

гіперциліндра, n -політопа; псевдонормалізовані Φ -функції гіперкуль – для моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані; Φ -функції тривимірних куль та об'єктів, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами – для моделювання відношення неперетину гіперкуль та зон заборони.

Побудовано математичну модель задачі HSOA та розглянуто її основні реалізації залежно від функції цілі (метрична характеристика контейнера – в задачах ODP або коефіцієнт заповнення контейнера – в задачах KP), розмірності гіперкуль ($2D$ – круг, $3D$ – куля, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), особливостей метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів, обмеження на значення радіусів), просторової форми контейнера ($2D$ – круг, прямокутник, опуклий багатокутник, $3D$ – кубоїд, прямий круговий циліндр, куля, кільцевий циліндр, сферичний шар, опуклий багатогранник, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), додаткових обмежень (мінімально допустимі відстані, зони заборони, обмеження на метричні характеристики гіперкуль та контейнера).

Досліджено математичні моделі задачі HSOA та її реалізацій. Задачі HSOA є NP -складними, багатоекстремальними; область допустимих розв'язків, загалом, є незв'язною множиною з багатозв'язними компонентами зв'язності. Межа області утворюється поверхнями, які описуються нелінійними (зокрема, квадратичними) функціями; матриці Якобі й Гесса функцій, які описують обмеження, є сильно розрідженими. Якщо в задачі ODP функція цілі є лінійною, то її екстремуми знаходяться в крайніх точках області допустимих розв'язків. У випадку задачі KP необхідний перебір значень двійкових змінних, які визначають вибір підмножини гіперкуль із заданого набору.

Створено методологію розв'язання оптимізаційних задач HSOA, яка містить аналіз вихідних даних, постановок задач, особливостей їх математичних моделей, методи побудови допустимих початкових точок, методи локальної й глобальної оптимізації. Залежно від особливостей задач

HSOA запропоновано стратегії розв'язання.

На вибір стратегії розв'язання впливають такі основні чинники: функція цілі (ODP, KP); вимірність простору, в якому розміщуються гіперкулі ($2D, 3D, nD, n \geq 4$); метричні особливості гіперкуль (рівні, нерівні, діапазон та розподіл значень радіусів); кількість розміщуваних гіперкуль; просторова форма контейнера; наявність додаткових обмежень (зони заборони, мінімально допустимі відстані, обмеження на метричні характеристики гіперкуль); обмеження на час обчислень.

Розроблено методи побудови допустимих початкових точок, що ґрунтуються на методі випадкових розміщень, методі ґратчастих розміщень, жадібному алгоритмі (модифікації методу оптимізації за групами змінних), методі оптимізації нев'язок.

Для локальної оптимізації використовуються комбінація методу декомпозиції й розв'язувача IPOPT – Interior Point Optimizer, модифікація методу можливих напрямків, метод оптимізації за групами змінних та метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа.

Комбінований метод декомпозиції й IPOPT. Для підвищення ефективності методу локальної оптимізації використовуються метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень, які дозволяють звести задачу з великою кількістю нелінійних обмежень до послідовності задач нелінійного програмування зі значно меншою кількістю нелінійних обмежень.

Метод можливих напрямків використовується при збільшенні кількості змінних (понад 3000). Пропонується модифікація методу, в якому кожна задача нелінійного програмування зводиться до послідовності задач лінійного програмування.

Метод оптимізації за групами змінних є модифікацією методу покоординатного спуску. Він застосовується для задач ODP з кількістю змінних понад 10000. Метод дозволяє отримати наближення до локального екстремуму.

Метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа застосовується для задач із обернено опуклими та лінійними обмеженнями й ґрунтується на аналізі множників Лагранжа. Він застосовується разом із методом оптимізації за групами змінних та стратегією активного набору обмежень.

Для глобальної оптимізації використовуються метод гілок та меж, модифікації методу околів, що звужуються, метод гомотетичних перетворень, метод спрямованого перебору локальних екстремумів та метод мультистарту.

Метод гілок та меж адаптується для розв'язання задачі КР. В модифікації методу для побудови дерева розв'язків враховуються особливості перебору значень двійкових змінних для задачі КР, в якій деякі гіперкулі мають рівні радіуси. Розроблено ефективні правила відтинання неперспективних гілок дерева розв'язків. Це дозволяє значно скоротити кількість варіантів у порівнянні з повним перебором.

Метод околів, що звужуються, ґрунтується на статистичних властивостях функції цілі на перестановках куль або дереві розв'язків. Модифікації методу дозволяють організувати спрямований перебір послідовностей куль або гілок дерева. Метод використовується як для пошуку розв'язків задач розміщення куль, так і для побудови перспективних допустимих початкових точок.

В основі *методу гомотетичних перетворень* лежить ідея введення змінних радіусів гіперкуль. Задача ПРР може бути зведена до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі:

Ідея гомотетичних перетворень розповсюджується для розміщення нерівних гіперкуль. У *методі спрямованого перебору локальних екстремумів (Jump Algorithm)* формулюється допоміжна задача з функцією цілі, яка дорівнює сумі об'єму розміщуваних гіперкуль. Доведена теорема про можливість отримати кращий варіант розміщення. Метод ефективний за умови, якщо радіуси гіперкуль "плавно" розподілені в діапазоні між мінімальним і максимальним значеннями.

Метод мультистарту застосовується разом з усіма методами локальної й глобальної оптимізації, окрім методу гілок та меж. Як наближення до глобального екстремуму задачі вибирається найкращий локальний екстремум або наближення до локального екстремуму.

Для переходу від задачі КР до задачі ODP введено контейнер зі змінним коефіцієнтом гомотетії, який є змінною метричною характеристикою. Таким чином, методи, розроблені для задачі ODP, можна застосовувати і для задачі КР.

Запропоновано шість основних стратегій розв'язання задачі HSOA: три – для ODP та три – для КР (IPPP).

Стратегія 1: ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT застосовується для розміщення невеликої кількості куль (10-60) з різними радіусами, значення яких сильно відрізняються. Вона ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації, завдяки якій вибираються перспективні перестановки куль.

Для рівних куль пропонується модифікація методу околів, що звужуються, яка є основою *Стратегії 2: ODP-SA-DNS-tree-IPOPT* для розміщення 10-150 рівних куль. Для побудови спеціального дерева, яке визначає крайні точки області допустимих розв'язків, використовується жадібний алгоритм.

Стратегія 3: ODP-random-JA-IPOPT застосовується для розміщення 10-300 гіперкуль різних радіусів, значення яких плавно змінюються від найменшого до найбільшого. Завдяки розв'язанню допоміжних задач значення радіусів гіперкуль гнучко перерозподіляються, займаючи максимальний об'єм (площу) контейнера. Здійснюється спрямований перебір локальних екстремумів і пошук наближення до глобального мінімуму основної задачі. Такий підхід дозволяє максимально використовувати єдиність дискретної й неперервної природи задачі HSOA.

Стратегія 4: KP-random-tree-IPOPT застосовується для розміщення 10-30 гіперкуль різних радіусів, які треба вибрати із заданого набору гіперкуль, у контейнері заданих розмірів. Будується дерево розв'язків, яке

реалізує повний перебір усіх варіантів вибору гіперкуль із заданого набору (значень двійкових змінних).

Стратегію 5: PPP-random/lattice-IPOPT доцільно використовувати для розміщення 10-5000 рівних гіперкуль. Вона ґрунтується на гомотетичних перетвореннях гіперкуль.

Стратегія 6: PPP-random-SA-Lagrange ефективно працює для розміщення понад 5000 рівних куль. Оптимізація виконується за групами змінних. Напрямок спуску вибирається на основі аналізу множників Лагранжа.

Відповідно до запропонованих стратегій розроблено методи розв'язання основних реалізацій задачі HSOA. Створено відповідне програмне забезпечення, проведено обчислювальні експерименти для кожної із реалізацій. Розглянуто практичні задачі розміщення гіперкуль різної вимірності та можливість їх моделювання й розв'язання за допомогою запропонованих математичних моделей, стратегій, методів та алгоритмів. Наведено приклади розв'язання практичних задач, які виникають в матеріалознавстві, ядерній енергетиці, порошковій металургії, хімічній промисловості, адитивних технологіях.

Достовірність отриманих у роботі результатів підтверджується аргументованим викладенням матеріалу, застосуванням надійних конструктивних засобів математичного моделювання, теоретичним обґрунтуванням розроблених методів, використанням сучасних методів нелінійної оптимізації й геометричного проектування, проведенням обчислювальних експериментів та порівнянням отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників, публікаціями результатів досліджень у спеціалізованих міжнародних журналах з дослідження операцій, методів оптимізації та обчислювальної математики, зокрема *European Journal of Operational Research*, *International Transactions in Operational Research*, *Journal of Global Optimization*, *International Journal of Computer Mathematics*, *Optimization Letters*.

Сукупність розроблених математичних моделей, методів, алгоритмів та програмних комплексів може використовуватися при: розробці систем автоматизованого проектування та пристроїв у машинобудуванні й аерокосмічній промисловості; моделюванні властивостей сплаву в порошковій металургії; розробці технологій очищення газу; аналізі й розробці процесів у хімічних та ядерних реакторах, термічних теплообмінниках у хімічній промисловості та енергетиці; оптимізації топології виробів у адитивних технологіях (3D-друк); оптимізації перевезення й зберігання різних вантажів у інформаційно-логістичних системах; плануванні радіохірургії пухлин та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині; розв'язанні задач кодування в цифрових комунікаціях і системах зберігання інформації.

Ключові слова: геометричне проектування, задача розміщення, круг, куля, гіперкуля, Ф-функція, математичне моделювання, нелінійна оптимізація, задача зі змінними метричними характеристиками контейнера, задача про рюкзак.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped. *Intelligent Decision Support* : book / Bortfeldt A. et al. (eds). Gabler, Germany, 2008. P. 47–67.
2. Стоян Ю. Г., Лазарева И. Е., Яськов Г. Н. Метод поиска локального минимума в задаче упаковки разных шаров в прямой цилиндр. *Доповіди НАН України*. 2000. № 6. С. 104–109.
3. Stoyan Y., Scheithauer G., Yaskov G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 11. Iss 4. 2003. P. 389–407.

4. Stoyan Y., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
5. Романова Т. Е., Гребенник И. В., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Упаковка шаров в параллелепипеде с учетом погрешностей. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 119–129.
6. Yaskov G. N. Mathematical model of problem of packing identical spheres into a cylindrical container. *Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць*. К. : Центр. н.-д. ін.-т навігації і управління. 2007. Вип. 4. С. 128–130.
7. Yaskov G. N. Random packing of identical spheres into a cylindrical container *Системи обробки інформації: зб. наук. пр.* Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2008. №. 1 (68). С. 128–130.
8. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки интервальных кругов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2008. № 1/4. Вип. 31. С. 25–29.
9. Yaskov G. N. Packing spheres into a parallelepiped by means of the decremental neighbourhood method. *Біоніка інтелекту*. 2008. № 1 (68). С. 84–86.
10. Яськов Г. Н. Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 43–49.
11. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2010. № 7(48). С. 95–98.
12. Яськов Г. Н. Метод решения задачи размещения разных кругов с выбором перспективных начальных точек. *зб. наук. пр.* Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2010. Вип. 3. С. 119–122.
13. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*. 2010. Vol. 17. No. 1. P. 51–70.

14. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область. *Прикладна геометрія та інженерна графіка* : міжвід. наук.-техн. зб. К.: Київ. нац. ун-т буд-ва і арх. 2010. Вип. 85. С. 306–312.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. Iss. 4. P. 855–868.
16. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. Iss. 10. P. 1355–1369.
17. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. *Системи обробки інформації*. 2012. Вип. 7(105). С. 150–157.
18. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді НАН України*. 2013. № 5. С. 44–50.
19. Яськов Г. Н. Размещение максимального числа равных кругов в круге. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 2. С. 60–67.
20. Яськов Г. Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 4(111). С. 97–100.
21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20(1). P. 79–99.
22. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. Vol. 8. Iss. 3. P. 949–970.
23. Yaskov G. N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблеми машиностроения*. Харків. 2014. Т. 17. № 2. С. 48–53.
24. Stoyan Yu. G, Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 419–426.
25. Khlud O. M., Yaskov G N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid

- with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No. 6. Iss. 46. P. 131–135.
26. Yaskov G. Methodology to solve multi-dimensional sphere packing problems. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 67–85.
 27. Yaskov G., Shekhovtsov S. Methodological basis of solving sphere packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Advanced Information Systems*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 54-57.
 28. Стоян Ю. Г., Яськов Г. М., Евсеева Л. Г. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплава". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 27362. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 23.01.2009.
 29. Яськов Г. М., Чугай А. М. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 50773. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 19.08.2013.
 30. Stoyan Yu. G., Gil N. I., Romanova T. E., Pankratov A. V., Yaskov G. N., Pridatko D. I. Mathematical Models and Methods for Optimization Placement Problems. *Communication and Control Technologies CCCT'03* : Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Orlando, Florida, USA, 2003. P. 383–389.
 31. Stoyan Y., Yaskov G. Packing various spheres into parallelepiped. Proc. of the *1st ESICUP Meeting*, Lutherstadt Wittenberg, Germany, 2004. P. 29.
 32. Stoyan Yu., Chugay A., Yaskov G. Packing a great number of identical spheres into a composed domain. Proc. of the *2nd ESICUP Meeting*, University of Southampton, UK, 2005. P. 24.
 33. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. Proc. of the *Workshop on Cutting Stock Problems WSCSP2005*, Sapientia University of Miercurea-Ciuc, Romania, 2006. P.75–82.
 34. Яськов Г. Н. Комбинированный метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики АППММ'06* : тез. докл. междунар.

- конф. Харьков: ИПМАШ НАНУ, НТУ "ХПИ", ХНУРЭ, НАУ "ХАИ", 2006. С. 46.
35. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. Proc. of the *5th ESICUP Meeting*, L'Aquila, Italy, 2008. P. 24.
36. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing problems of congruent circles into a circle and congruent spheres into a circular cylinder. Proc. of the 6th ESICUP Meeting, Valencia, Spain, 2009. P. 22.
37. Yaskov G. N. Packing a maximal number of congruent hyperspheres into a hypersphere. *Інформатика і системні науки ICH-2010* : матеріали всеукр. наук.-практ. конф. Полтав. ун-т споживчої кооперації, Полтава, 2010. С. 210–212.
38. Yaskov G. N. A method of packing congruent circles into a circle with circular prohibited areas. *Інформаційно-комп'ютерні технології 2010* : матеріали V міжнар. наук.-техн. конф. Житомир, 2010. С. 9–11.
39. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Интервальное моделирование свойств сплава. *Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010* : матеріали четвертої міжнар. наук.-техн. конф. Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава, 2010. С. 39.
40. Чугай А. М., Яськов Г. Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2011* : тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. національний університет ім. О. Гончара, Дніпро, 2011. С. 281.
41. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral container. Proc. of the *8th ESICUP Meeting*, Copenhagen, Denmark, 2011. P. 23.
42. Яськов Г. Н. Упаковка неравных кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 3-й междунар. конф., Кишинэу, Молдова, 2012. С. 562.

43. Stoyan Yu., Yaskov G. A local optimization switch algorithm for packing non-identical circles. *Proc. of the 25th European conference on operational research*, Vilnius, Lithuania. 2012. P. 49.
44. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромисса в геометрическом проектировании. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012*: тез. доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 78–79.
45. Яськов Г. Н. Особенности математической модели задачи упаковки неравных кругов с переменными метрическими характеристиками. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012*: тез. доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 334–335.
46. Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G. Packing non-equal spheres into containers of different shapes. Dresden: Technische Universität, 2013. 25 p. (Preprint. Technische Universität Dresden, Germany; MATH-NM-07-2013).
47. Yaskov G. N. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral domain. *Питання оптимізації обчислень ПОО-XL*: тез. доп. міжнар. наук. конф. смт. Кацивелі, Крим, 2013. С. 291.
48. Яськов Г. Н. Упаковка гипершаров в гипершаре минимального радиуса. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2013*: тез. доп. XI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2013. С. 272–273.
49. Яськов Г. Н. Упаковка шаров в цилиндрическом слое. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*: материалы 4-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2014. Т. II. Р. 512–519.
50. Субота І. О., Хлуд О. М., Яськов Г. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС-2015*: тез. доп. XXI всеукраїнської наукової конференції, Львів, 2015. С. 302–303.

- 51.Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. A mathematical model of optimal packing of unequal spheres into a sphere. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2015* : тез. доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2015. С. 226–227.
- 52.Stoyan Yu., Scheithauer G., Yaskov G. Packing unequal spheres into 3D containers. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. I. С. 327–328.
- 53.Яськов Г. Н. Математическая модель оптимальной упаковки неравных кругов в многоугольнике. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. II. Р. 349–354.
- 54.Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения ориентированных эллипсоидов в многогранной области. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи AIIS'2016* : тез. доп. XVI міжнар. наук.-техн. конф. К., Україна, 2016. С. 55–56.
- 55.Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения кругов и ориентированных эллипсов в многосвязной области. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2016* : тез. доп. XIV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2016. С. 226–227.
- 56.Яськов Г. Н. Дерево решений для задачи размещения неравных шаров в шаре заданного радиуса. *Інформаційні системи і технології ICT-2017* : тез. доп. 6-ої міжнар. наук.-техн. конф. м. Коблєве, Миколаїв. Обл., 2017. С. 143–144.
- 57.Stoyan Yu., Yaskov G. Packing spheres into a larger sphere with the jump algorithm. *Proc. of the 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017*, Sofia, Bulgaria, 2017. P. 254–260.

58. Romanova T., Pankratov A., Yaskov G., Scheithauer G. Packing ellipses in a disconnected polygonal domain. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2017* : тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2017. С. 167–168.
59. Yaskov G. N. A mathematical model of packing unequal spheres into a multiconnected container. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : тез. доп. міжнар. наук. конф. Рівне, 2018. С. 25–26.
60. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Применение jump-алгоритма для задач упаковки неравных шаров в контейнере заданных размеров. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 6-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2018. С. 171–173.
61. Yaskov G. N. Packing unequal spheres into a multiconnected set. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тез. доп. I міжнар. наук.-техн. конф. Х., 2018. С. 78–79.
62. Yaskov G., Romanova T., Pankratov A. Optimization packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2018*: тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2018. С. 233–234.

ABSTRACT

Yaskov G.M. Optimization problems of packing hyperspheres: mathematical models, methods, applications. – Manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences in speciality 01.05.02 "Mathematical modeling and computational methods".

A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine.

A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The problems of optimal packing of geometric objects are of special interest due to the large number of practical applications in variety of branches of science and technics, particularly in the chemical industry, power engineering, mechanical engineering, shipbuilding, aircraft engineering, additive technology, construction, logistics, robotics, biology, medicine, etc. Among the problems of this class, the most important are the problems of packing hyperspheres of different dimension. The spectrum of the use of such problems is from the study of the properties of atoms to modeling cosmic bodies, for example, simulation in materials science, powder metallurgy and nanotechnologies, planning radiosurgery and laser coagulation of the retina in medicine; studying of cells, chromosomes and other structures in biology; allocation schemes desing for vehicle cargo compartments; topology optimization products for 3D-printing; coding and information security.

Hypersphere packing problems are NP-hard, therefore, heuristic approaches that allow obtain approximate solutions are most commonly used. To test the effectiveness of the developed method sets of benchmark instances are examined, for example, solutions of packing circles into a container with a variable metric characteristics available at the Otto von Guericke University Magdeburg (Germany) webpage <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html> (E. Specht) ("The best known solutions of the circular open dimension problem (CODP)").

HyperSphere Optimal Arrangement (HSOA) is to find such packing subsets of a given set hyperspheres (including circles, spheres) into a bounded container without mutual overlays, in which the objective function (quality criterion) reaches its extremum value.

According to the international typology of Cutting and Packing problems, there are two problem statements of HSOA: Open Dimension Problem (ODP) (with the objective on minimum) and Knapsack Problem (KP) (with the objective on maximum). In ODP, hyperspheres of given radii should be packed into a container, metric characteristics (size) of which being optimized. Instead, in KP hyperspheres from the given set should be packed into a container with fixed metric characteristics, the packing factor being maximized. The problem of packing equal hyperspheres (IIPP – Identical Item Packing Problem) is a special case of KP in which the packing factor is proportional to the number of hyperspheres to be packed.

The thesis is a continuation of studies of geometric design optimization problems, and aims to create a unified methodology that allows to solve problems of packing hyperspheres ($n=2$, $n=3$ та $n \geq 4$) with the additional restrictions (prohibition areas, the minimum allowable distances, restrictions on hypersphere radii) and focused on modern optimization methods and software for solving linear and nonlinear programming.

In the thesis, tools of mathematical modeling of mutual relations of geometric objects in HSOA, such as Φ -functions of a hypersphere and the complement to a container to model the containment relation of a hypersphere into a container having spatial shape of hyperrectangle, hypersphere, hypercylinder, n -polytope; a pseudonormalized Φ -function of hyperspheres to take into account restrictions on minimum allowable distances; Φ -functions 3D spheres and objects the boundaries of which are formed by cylindrical, spherical surfaces and planes to model the non-overlapping relation of hyperspheres and prohibition areas are constructed.

Constructed is a mathematical model of HSOA and considered are its

implementations depending on the objective function (metric characteristics of the container in ODP or packing factor of the container in KP), hypersphere dimension (2D – circle, 3D - sphere, nD , $n \geq 4$ – hypersphere), peculiarities of metric characteristics of hyperspheres (congruence, distribution of radii, restrictions on the radii values), the spatial shape of the container (2D – circle, rectangle, convex polygon, 3D – cuboid, right circular cylinder, sphere, circular cylinder, spherical layer, convex polyhedron, nD , $n \geq 4$ – hypersphere), additional restrictions (minimum allowable distances, prohibition areas, restrictions on metric characteristics of hyperspheres and containers).

Mathematical models of HSOA and its realizations are investigated. HSOA is a multiextremum, NP-hard problem; feasible region is in general case disconnected sets with multiple connected components. The frontier of the feasible region is formed by surfaces described non-linear (eg, quadratic) functions; Hess and Jacobi matrices of functions describing constraints are highly sparse. If in ODP the objective function is linear, its extrema are at extreme points of the feasible region. In KP the exhaustive search of values of binary variables that determine subsets of the given set of hyperspheres should be realized.

A methodology for solving optimization problems HSOA which contains an analysis of initial data, problem statements, peculiarities of the mathematical models, methods of construction of initial points, methods of local and global optimization is created. Depending on the peculiarities of problems HSOA solution strategies are chosen.

The choice of a solution strategy is influenced by the following main factors: the objective function (ODP, KP), the space dimension in which the hyperspheres are packed (2D, 3D, nD , $n \geq 4$), metric characteristics of the hyperspheres (equal, unequal, range and distribution of values of the radii), the number of hyperspheres to be packed, the spatial shape of the container, additional restrictions (prohibition areas, minimum allowable distances, restrictions on metric characteristics of hyperspheres), the runtime limit.

Methods for constructing feasible starting points, based on the random

packing method, the lattice packing method, the greedy algorithm (a modification of the optimization method by groups of variables), the residual optimization method, are developed.

For local optimization a combination of decomposition and solver IPOPT (Interior Point Optimizer), a modification of the method of feasible directions, a combined method of optimization by groups of variables and the method of descent by analyzing the Lagrange multipliers.

The combined method of decomposition and IPOPT. To increase the efficiency of the local optimization the decomposition method and the strategy of active set of constraints which allows to replace a significant part of non-linear constraints by linear ones are used.

The method of feasible directions is used when the number of variables is more than 3,000. A modification of the method, in which each nonlinear programming problem is reduced to a sequence of linear programming problems.

The method of optimization by groups of variables is a modification of the coordinate-wise descent method and is used for ODP with more than 10,000 variables. The method allows to obtain an approximation to a local extremum.

The descent method based on analysis of Lagrange multipliers is used for problems with the inversely convex and linear constraints, based on the analysis of the Lagrange multipliers, the optimization method by groups of variables and the strategy of active set of constraints.

For global optimization the branch and bound algorithm, modifications of the decremental neighborhoods method, the method of homothetic transformations, the method of directed search of local extrema and the multistart strategy are used.

A *branch and bound algorithm* scheme is used for KP. In a modified method, peculiarities of the exhaustive search of values of binary variables are taken into account. Pruning rules that allow to not consider unpromising branches of the solution tree are developed. This allow to considerably reduce the number of variants in comparison with the exhaustive search.

The decremental neighborhood method is based on the statistical properties

of the objective function on the sphere permutations or the solution tree. Modifications of the method aim to organize direct search of sphere sequences or tree branches. The method is used to search for solutions of HSOA and to construct promising starting points.

The method of homothetic transformations is based on the idea of variable radii of hyperspheres, IIPP being reduced to a sequence of problems of nonlinear programming with linear objective functions.

The idea of homothetic transformations is adopted to pack unequal hyperspheres. In *the method of direct search of local extrema (Jump Algorithm)* an auxiliary problem with the objective function being the sum of the volumes of hyperspheres to be packed is formulated. The theorem concerning the possibility to obtain a better packing of hyperspheres is proved. The method is effective provided that the radii of hyperspheres are "smoothly" distributed in the range from the minimum to maximum values.

The multistart method is used together with all methods of local and global optimization developed in the thesis except the branch and bound algorithm. The best packing obtained is taken as an approximation to the global extremum of the problem.

To switch from KP to ODP a container with variable homothetic coefficient being the variable metric characteristic of the container is considered. Thus, the methods developed for ODP, can be used for KP.

Six basic strategies to solve HSOA, namely three – for ODP and three – for KP (IIPP) are proposed.

Strategy 1: ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT is implemented when packing from 10 to 60 unequal spheres whose radii differ greatly from each other. It is based on sequential statistical optimization to select promising permutation of spheres.

For equal spheres proposed is a modification of the decremental neighborhood method, which is the basis of *Strategy 2: ODP-SA-DNS-tree-IPOPT*

to pack 10-150 equal spheres. To construct a special tree that defines the extreme points of the feasible region a sequential addition method scheme is used.

Strategy 3: ODP-random-JA-IPOPT is utilized to pack from 10 to 300 hyperspheres of different radii whose values vary smoothly from the smallest to the biggest. Due to solving auxiliary problems with variable radii, hyperspheres flexibly rearranged to occupy the maximum volume (area) of container. A direct search of local extrema and an approximation to the global minimum of the problem is realized. This approach allows the maximum use of the unity of the discrete and continuous nature of HSOA.

Strategy 4: KP-random-tree-IPOPT is applied for packing from 10 to 30 hyperspheres of different radii, which have to be chosen from the given set of hyperspheres into a container of given sizes. A solution tree, which realizes the exhaustive search of all subsets of set of hyperspheres (values of binary variables) is constructed.

Strategy 5: IIPP-random / lattice-IPOPT is reasonable when packing from 10 to 5,000 equal hyperspheres. It is based on homothetic transformations of hyperspheres.

Strategy 6: IIPP-random-SA-Lagrange works effectively when packing more than 5,000 equal spheres. Optimization is performed by groups of variables. The descent direction is selected based on the analysis of the Lagrange multipliers.

According to the strategies methods of solving implementations of HSOA, discussed in the thesis, are constructed. The software is developed and computational experiments for each implementation are fulfilled. Examples of practical applications of HSOA for different dimension and use of the developed methodology to solve them are considered.

The reliability of the results obtained in thesis is confirmed by a reasoned presentation of the matter, using reliable design tools of mathematical modeling, theoretical justification of the methods developed, applying up-to-date methods of nonlinear optimization and geometric design, computational experiments and comparison of the results obtained with the results of foreign researchers,

publications of the research results in specialized international journals in operation research, optimization methods and computational mathematics, including European Journal of Operational Research, International Transactions in Operational Research, Journal of Global Optimization, International Journal of Computer Mathematics, Optimization Letters.

The collection of mathematical models, methods, algorithms and software developed can be used for computer-aided design of systems and different technical devices in mechanical engineering and aerospace industries; when modeling the properties of the alloy in powder metallurgy; when developing technologies of gas cleaning; when analyzing and developing processes in the chemical and nuclear reactors, thermal heat exchangers in the chemical industry and energy; when optimizing the topology of products in additive manufacturing (3D-printing); when optimizing transportation and storage of goods in logistics information systems; when planning radiosurgery treatment of tumors and retinal laser coagulation in medicine; when solving coding problems in digital communications and storage systems.

Key words: geometric design, packing problem, circle, sphere, hypersphere, Φ -function, mathematical modeling, nonlinear optimization, open dimension problem, knapsack problem.

LIST OF PUBLICATIONS OF THE APPLICANT

1. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped. *Intelligent Decision Support* : book / Bortfeldt A. et al. (eds). Gabler, Germany, 2008. P. 47–67.
2. Стоян Ю. Г., Лазарева И. Е., Яськов Г. Н. Метод поиска локального минимума в задаче упаковки разных шаров в прямой цилиндр. *Доповіди НАН України*. 2000. № 6. С. 104–109.

3. Stoyan Y., Scheithauer G., Yaskov G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 11. Iss 4. 2003. P. 389–407.
4. Stoyan Y., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
5. Романова Т. Е., Гребенник И. В., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Упаковка шаров в параллелепипеде с учетом погрешностей. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 119–129.
6. Yaskov G. N. Mathematical model of problem of packing identical spheres into a cylindrical container. *Системи управління, навігації та зв'язку*: зб. наук. праць. К. : Центр. н.-д. ін.-т навігації і управління. 2007. Вип. 4. С. 128–130.
7. Yaskov G. N. Random packing of identical spheres into a cylindrical container *Системи обробки інформації*: зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2008. №. 1 (68). С. 128–130.
8. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки интервальных кругов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2008. № 1/4. Вип. 31. С. 25–29.
9. Yaskov G. N. Packing spheres into a parallelepiped by means of the decremental neighbourhood method. *Біоніка інтелекту*. 2008. № 1 (68). С. 84–86.
10. Яськов Г. Н. Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 43–49.
11. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2010. № 7(48). С. 95–98.

12. Яськов Г. Н. Метод решения задачи размещения разных кругов с выбором перспективных начальных точек. зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2010. Вип. 3. С. 119–122.
13. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*. 2010. Vol. 17. No. 1. P. 51–70.
14. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвід. наук.-техн. зб. К.: Київ. нац. ун-т буд-ва і арх. 2010. Вип. 85. С. 306–312.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. Iss. 4. P. 855–868.
16. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. Iss. 10. P. 1355–1369.
17. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. *Системи обробки інформації*. 2012. Вип. 7(105). С. 150–157.
18. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді НАН України*. 2013. № 5. С. 44–50.
19. Яськов Г. Н. Размещение максимального числа равных кругов в круге. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 2. С. 60–67.
20. Яськов Г. Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 4(111). С. 97–100.

21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20(1). P. 79–99.
22. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. Vol. 8. Iss. 3. P. 949–970.
23. Yaskov G. N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблеми машиностроєння*. Харків. 2014. Т. 17. № 2. С. 48–53.
24. Stoyan Yu. G, Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 419–426.
25. Khlud O. M., Yaskov G N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No. 6. Iss. 46. P. 131–135.
26. Yaskov G. Methodology to solve multi-dimentional sphere packing problems. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 67–85.
27. Yaskov G., Shekhovtsov S. Methodological basis of solving sphere packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Advanced Information Systems*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 54-57.
28. Стоян Ю. Г., Яськов Г. М., Евсеева Л. Г. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплава". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 27362. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 23.01.2009.
29. Яськов Г. М., Чугай А. М. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 50773. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 19.08.2013.

30. Stoyan Yu. G., Gil N. I., Romanova T. E., Pankratov A. V., Yaskov G. N., Pridatko D. I. Mathematical Models and Methods for Optimization Placement Problems. *Communication and Control Technologies CCCT'03* : Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Orlando, Florida, USA, 2003. P. 383–389.
31. Stoyan Y., Yaskov G. Packing various spheres into parallelepiped. Proc. of the *1st ESICUP* Meeting, Lutherstadt Wittenberg, Germany, 2004. P. 29.
32. Stoyan Yu., Chugay A., Yaskov G. Packing a great number of identical spheres into a composed domain. Proc. of the *2nd ESICUP* Meeting, University of Southampton, UK, 2005. P. 24.
33. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. Proc. of the *Workshop on Cutting Stock Problems WSCSP2005*, Sapiientia University of Miercurea-Ciuc, Romania, 2006. P. 75–82.
34. Яськов Г. Н. Комбинированный метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики АППММ'06* : тез. докл. междунар. конф. Харьков: ИПМАШ НАНУ, НТУ "ХПИ", ХНУРЭ, НАУ "ХАИ", 2006. С. 46.
35. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. Proc. of the *5th ESICUP* Meeting, L'Aquila, Italy, 2008. P. 24.
36. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing problems of congruent circles into a circle and congruent spheres into a circular cylinder. Proc. of the *6th ESICUP* Meeting, Valencia, Spain, 2009. P. 22.
37. Yaskov G. N. Packing a maximal number of congruent hyperspheres into a hypersphere. *Інформатика і системні науки ІСН-2010* : матеріали всеукр. наук.-практ. конф. Полтав. ун-т споживчої кооперації, Полтава, 2010. С. 210–212.
38. Yaskov G. N. A method of packing congruent circles into a circle with circular prohibited areas. *Інформаційно-комп'ютерні технології 2010* : матеріали V міжнар. наук.-техн. конф. Житомир, 2010. С. 9–11.

39. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Интервальное моделирование свойств сплава. *Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010*: матеріали четвертої міжнар. наук.-техн. конф. Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава, 2010. С. 39.
40. Чугай А. М., Яськов Г. Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2011*: тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. національний університет ім. О. Гончара, Дніпро, 2011. С. 281.
41. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral container. *Proc. of the 8th ESICUP Meeting, Copenhagen, Denmark, 2011. P. 23.*
42. Яськов Г. Н. Упаковка неравных кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*: тез. докл. 3-й междунар. конф., Кишинэу, Молдова, 2012. С. 562.
43. Stoyan Yu., Yaskov G. A local optimization switch algorithm for packing non-identical circles. *Proc. of the 25th European conference on operational research, Vilnius, Lithuania. 2012. P. 49.*
44. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромисса в геометрическом проектировании. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012*: тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 78–79.
45. Яськов Г. Н. Особенности математической модели задачи упаковки неравных кругов с переменными метрическими характеристиками. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012*: тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 334–335.

46. Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G. Packing non-equal spheres into containers of different shapes. Dresden : Technische Univesität, 2013. 25 p. (Preprint. Technische Univesität Dresden, Germany; MATH-NM-07-2013).
47. Yaskov G. N. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral domain. *Питання оптимізації обчислень ПОО-ХЛ* : тез. доп. міжнар. наук. конф. смт. Кацивелі, Крим, 2013. С. 291.
48. Яськов Г. Н. Упаковка гипершаров в гипершаре минимального радиуса. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2013* : тез. доп. XI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2013. С. 272–273.
49. Яськов Г. Н. Упаковка шаров в цилиндрическом слое. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 4-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2014. Т. II. Р. 512–519.
50. Субота І. О., Хлуд О. М., Яськов Г. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС-2015* : тез. доп. XXI всеукраїнської наукової конференції, Львів, 2015. С. 302–303.
51. Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. A mathematical model of optimal packing of unequal spheres into a sphere. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2015* : тез. доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2015. С. 226–227.
52. Stoyan Yu., Scheithauer G., Yaskov G. Packing unequal spheres into 3D containers. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. I. С. 327–328.
53. Яськов Г. Н. Математическая модель оптимальной упаковки неравных кругов в многоугольнике. *Математическое моделирование,*

- оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. II. Р. 349–354.
54. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения ориентированных эллипсоидов в многогранной области. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи AIIS'2016* : тез. доп. XVI міжнар. наук.-техн. конф. К., Україна, 2016. С. 55–56.
55. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения кругов и ориентированных эллипсов в многосвязной области. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2016* : тез. доп. XIV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2016. С. 226–227.
56. Яськов Г. Н. Дерево решений для задачи размещения неравных шаров в шаре заданного радиуса. *Інформаційні системи і технології ICT-2017* : тез. доп. 6-ої міжнар. наук.-техн. конф. м. Коблеве, Миколаїв. Обл., 2017. С. 143–144.
57. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing spheres into a larger sphere with the jump algorithm. *Proc. of the 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017*, Sofia, Bulgaria, 2017. P. 254–260.
58. Romanova T., Pankratov A., Yaskov G., Scheithauer G. Packing ellipses in a disconnected polygonal domain. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2017* : тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2017. С. 167–168.
59. Yaskov G. N. A mathematical model of packing unequal spheres into a multiconnected container. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : тез. доп. міжнар. наук. конф. Рівне, 2018. С. 25–26.
60. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Применение jump-алгоритма для задач упаковки неравных шаров в контейнере заданных размеров.

Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии : материалы 6-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2018. С. 171–173.

61. Yaskov G. N. Packing unequal spheres into a multiconnected set. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тез. доп. I міжнар. наук.-техн. конф. X., 2018. С. 78–79.
62. Yaskov G., Romanova T., Pankratov A. Optimization packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2018*: тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2018. С. 233–234.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	10
ВСТУП.....	11

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	22
1.1 Оптимізаційні задачі розміщення.....	22
1.2 Міжнародна класифікація задач розміщення (Cutting&Packing).....	24
1.2.1 Критерії для визначення типу постановки	24
1.2.2 Основні типи задач розміщення	26
1.3 Задачі розміщення кругів	28
1.4 Задачі розміщення куль	38
1.5 Задачі розміщення гіперкуль ($d \geq 4$)	51
1.6 Вибір напрямку дослідження	57
1.7 Висновки за розділом 1	60

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЙНОГО РОЗМІЩЕННЯ ГІПЕРКУЛЬ (HSOA). МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІДНОШЕНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	62
2.1 Задачі геометричного проектування	62
2.2 Метод Ф-функцій Стояна.....	64
2.3 Постановка задачі HSOA та її основні реалізації	67
2.3.1 Математична модель задачі HSOA	67
2.3.2 Математична модель задачі ODP (Open Dimension Problem).....	69
2.3.3 Математична модель задачі KP (Knapsack Problem)	75

2.4 Моделювання відношень гіперкуль в задачах HSOA	77
2.4.1 Моделювання відношень кругів та 2D об'єктів.....	77
2.4.2 Моделювання відношень куль та 3D об'єктів.....	79
2.4.3 Моделювання відношень гіперкуль та dD об'єктів, $d \geq 4$	90
2.5 Висновки за розділом 2.....	91

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОСНОВНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ ЗАДАЧІ HSOA 93

3.1 Математичні моделі оптимізаційних задач розміщення кругів.....	93
3.1.1 Математична модель задачі ODP для розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини.....	93
3.1.2 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі із зонами заборони	96
3.1.3 Математична модель задачі КР для розміщення нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з максимальним коефіцієнтом заповнення	101
3.2 Математичні моделі оптимізаційних задач розміщення куль.....	105
3.2.1 Математична модель задачі ODP для розміщення 3D куль у опуклому контейнері з мінімальною метричною характеристикою	105
3.2.2 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних куль в області, яка має складну просторову форму.....	109
3.2.3 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних куль у опуклому контейнері із зонами заборони	115
3.2.4 Математична модель задачі КР для розміщення нерівних куль у опуклому контейнері із зонами заборони з максимальним коефіцієнтом заповнення	120
3.3 Математичні моделі задач розміщення гіперкуль ($d \geq 4$)	129
3.3.1 Математична модель задачі ODP для розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі мінімального радіусу	129

3.3.2 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі	131
3.4 Висновки за розділом 3	132

РОЗДІЛ 4

МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ HSOA.....	134
4.1 Основні елементи методології розв'язання задач HSOA	134
4.2 Методи побудови допустимих розміщень	141
4.2.1 Метод випадкових розміщень	141
4.2.2 Метод ґратчастих розміщень	142
4.2.3 Жадібний алгоритм.....	144
4.2.4 Метод оптимізації нев'язок.....	145
4.3 Методи локальної оптимізації	146
4.4 Методи глобальної оптимізації	148
4.5 Стратегії розв'язання	150
4.5.1 Стратегії розв'язання задач ODP	151
4.5.1.1 Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) на основі статистичної оптимізації на перестановках гіперкуль	152
4.5.1.2 Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) на основі статистичної оптимізації на дереві розв'язків	154
4.5.1.3 Стратегія 3 (ODP-random-JA-IPOPT) на основі методу спрямованого перебору локальних екстремумів	155
4.5.2 Стратегії розв'язання задач КР	156
4.5.2.1 Стратегія 4 (КР-random-tree-IPOPT) на основі методу гілок та меж	157
4.5.2.2 Стратегія 5 (ППР-random/lattice-IPOPT) розміщення рівних гіперкуль на основі гомотетичних перетворень	157
4.5.2.3 Стратегія 6 (ППР-random-SA-Lagrange) розміщення "великої" кількості рівних гіперкуль на основі методу множників Лагранжа	158
4.6 Висновки за розділом 4	160

РОЗДІЛ 5

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ ЗАДАЧІ HSOA . 162

5.1	Методи розв'язання задач розміщення кругів	162
5.1.1	Розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини	162
5.1.1.1	Побудова допустимих початкових точок та обчислення локальних мінімумів	163
5.1.1.2	Стратегія пошуку наближення до глобального екстремуму ...	165
5.1.1.3	Перехід від одного локального максимуму до іншого	169
5.1.1.4	Метод перебору локальних екстремумів.....	174
5.1.1.5	Способи поліпшення локальних екстремумів	178
5.1.2	Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі із зонами заборони.....	179
5.1.3	Розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з технологічними обмеженнями	183
5.2	Методи розв'язання задач розміщення куль	189
5.2.1	Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у кубоїді з мінімальною висотою за Стратегією 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPORT)	189
5.2.1.1	Побудова допустимих початкових точок	190
5.2.1.2	Модифікація методу околів, що звужуються, для перестановок куль	192
5.2.2	Розв'язання задачі розміщення рівних куль у контейнерах із мінімальною метричною характеристикою за Стратегією 2 (ODP-SA-DNS-tree- IPORT)	196
5.2.2.1	Побудова дерева розв'язків	197
5.2.2.2	Модифікація методу околів, що звужуються, для дерева розв'язків	205

5.2.3 Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою за Стратегією 3 (ODP-random-JA-IPOPT)	209
5.2.3.1 Побудова допустимих початкових точок та пошук локальних екстремумів.....	209
5.2.3.2 Перехід від одного локального максимуму до іншого	211
5.2.3.3 Загальна схема розв'язання задачі.....	213
5.2.4 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у заданій області за Стратегією 6 (IPPP-random-SA-Lagrange).....	216
5.2.4.1 Декомпозиція задачі	216
5.2.4.2 Метод розв'язання підзадач та загальна схема алгоритму	218
5.2.5 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у контейнері із зонами заборони за допомогою Стратегії 5 (IPPP-random/lattice-IPOPT)	222
5.2.5.1 Побудова допустимої початкової точки й обчислення локального максимуму	222
5.2.5.2 Пошук наближення до глобального максимуму	225
5.2.6 Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у контейнері із зонами заборони з максимальним коефіцієнтом заповнення за Стратегією 4 (KP-random-tree-IPOPT)	226
5.2.6.1 Побудова дерева розв'язків	227
5.2.6.2 Правила відтинання	228
5.2.6.3 Розміщення куль згідно з вершиною дерева.....	230
5.3 Методи розв'язання задач розміщення гіперкуль ($d \geq 4$)	231
5.3.1 Розв'язання задачі розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі з мінімальним радіусом.....	231
5.3.1.1 Побудова початкового локального екстремуму	231
5.3.1.2 Перехід до іншого локального екстремуму	232
5.3.2 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі із заданим радіусом	235

5.3.2.1 Побудова допустимих початкових точок	235
5.3.2.2 Пошук локальних екстремумів	237
5.3.2.3 Пошук наближень до глобального екстремуму	238
5.4 Перехід від задачі КР до задачі ODP	239
5.5 Висновки за розділом 5	241

РОЗДІЛ 6

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ТА ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ.....	244
6.1. Програмна реалізація розроблених методів	244
6.2. Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення кругів	245
6.2.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику з мінімальною довжиною	245
6.2.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі із зонами заборони	253
6.3. Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення куль	256
6.3.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення рівних куль у циліндрі з мінімальною висотою.....	256
6.3.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою	263
6.3.3 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у контейнері із зонами заборони	270
6.4. Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення гіперкуль	279

6.4.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі з мінімальним радіусом	279
6.4.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі із заданим радіусом.....	279
6.5. Практичні застосування задач розміщення гіперкуль різної вимірності	283
6.5.1 Оптимізація топології деталі в адитивних технологіях	283
6.5.1.1 Технологія прямого лазерного спікання.....	283
6.5.1.2 Оптимізація топології за допомогою оптимізації розміщення кругів	285
6.5.1.3 Приклад оптимізації топології деталі	286
6.5.2 Планування лазерної коагуляції сітківки ока.....	289
6.5.2.1 Постановка задачі	289
6.5.2.2 Математична модель задачі та стратегія розв'язання	290
6.5.3 Планування променевої радіохірургії онкологічних пухлин	292
6.5.3.1 Постановка задачі	292
6.5.3.2 Обчислювальні експерименти для задачі розміщення нерівних куль у контейнері із зонами заборони.....	294
6.5.4 Дослідження властивостей сплаву в порошковій металургії.....	297
6.5.5 Розміщення паливних елементів у активній зоні ядерного реактору.....	300
6.5.6 Моделювання заповнення контейнера каталітичними елементами при розробці технологій очищення газу та дистиляції	302
6.5.7 Моделювання композитів у матеріалознавстві.....	305
6.6. Обчислювальні експерименти для задач розміщення кругів та куль з урахуванням похибок вихідних даних	307
6.7. Висновки за розділом 6	313
ВИСНОВКИ	314

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	318
Додаток А. Список публікацій здобувача	348
Додаток Б. Свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір.....	356
Б1. Комп'ютерна програма «Packing of balls into a composite domain»	356
Б2. Комп'ютерна програма «Імітаційне моделювання властивостей сплава».....	357
Додаток В	358
В1 Впровадження у навчальний процес.....	358
В2 Довідка про використання програмного продукту.....	359
В3 Лист підтримки від державного університету Нуево Леон, Мексика ...	360

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

C & P (Cutting and Packing) – задача розкрою та упакування.

LP (Linear Programming) – лінійне програмування.

NLP (NonLinear Programming) – нелінійне програмування.

HSOA (Hypersphere Optimal Arrangement) – задача оптимального розміщення гіперкуль.

ODP (Open Dimension Problem) – задача з відкритим розміром (задача із змінними метричними характеристиками).

KP (Knapsack Problem) – задача про рюкзак.

IPP (Identical Item Packing Problem) – задача розміщення рівних об'єктів.

MINLP (Mixed-Integer Non-Linear Programming) – задача змішаного нелінійного програмування.

NLP-solver (Nonlinear Programming Solver) – розв'язувач (програмне забезпечення) задач нелінійного програмування.

HOPDM (Higher Order Primal Dual Method) – розв'язувач для задач лінійного, опуклого квадратичного та опуклого нелінійного програмування великої розмірності.

BPMPD (primal-dual interior point algorithm) – розв'язувач для задач лінійного, квадратичного програмування із сильно розрідженими матрицями за допомогою методу внутрішньої точки.

IPOPT (Interior Point Optimizer) – розв'язувач на основі модифікації методу внутрішньої точки.

GAMS/BARON (General Algebraic Modeling System / Branch-and-Reduce Optimization Navigator) – пакет глобальної оптимізації для задач нелінійного програмування.

ВСТУП

Актуальність теми. На сьогодні значно зростає інтерес до задач оптимального розміщення геометричних об'єктів через велику кількість практичних застосувань у різних галузях, зокрема, в хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, адитивних технологіях, будівництві, логістиці, робототехніці, біології, медицині тощо. Серед задач цього класу одними з найважливіших є задачі розміщення гіперкуль різної вимірності. Спектр використання таких задач – від вивчення властивостей атомів до моделювання космічних тіл, наприклад, імітаційне моделювання в матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях, планування радіохірургії та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині, вивчення біологічних структур (клітини, хромосоми тощо) в біології; проектування схем розміщення вантажів у відсіках транспортних засобів, оптимізація топології виробів для 3D-друку; кодування та захист інформації тощо.

Дослідженням в області оптимізації, математичного моделювання, системного аналізу, автоматичних систем управління, штучного інтелекту, обчислювальної математики присвячені роботи відомих українських учених, зокрема, І.В. Сергієнка, С.І. Ляшка, О.І. Шевченка, Р.П. Базилевича, П.І. Бідюка, Ю.В. Крака, П.І. Стецюка, О.М. Кисельової, В.П. Шила, Л.Ф. Гуляницького та багатьох інших.

Задачам розміщення гіперкуль (в тому числі кругів, куль) присвячені роботи багатьох учених. Значна кількість науковців досліджують регулярні ґратчасті розміщення гіперкуль у просторі (lattice sphere packing), наприклад, F. Toth, J. Conway, N. Sloane, T. Hales, М.С. В'язовська. З практичної точки зору важливими є задачі розміщення гіперкуль в обмежених областях. Слід відзначити публікації F. Stillinger, B. Lubachevsky, S. Torquato, J. Kallrath, G. Mueller, W. Huang, M. Hifi, E. Birgin, J. Oliveira, M. Gomes, G. Scheithauer, A. Bortfeldt, E. Specht, G. Fasano. Залежно від вимірності простору, кількості

об'єктів, просторової форми області розміщення, критерію якості дослідники розглядають різноманітні постановки задач розміщення гіперкуль. При цьому важливу роль відіграють особливості метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів), співвідношення радіусів гіперкуль та розмірів і вигляду контейнера. У кожному конкретному випадку необхідний детальний аналіз факторів, які впливають на вибір методу розв'язання поставленої задачі. Задачі розміщення гіперкуль є *NP*-складними, тому для їх розв'язання найчастіше використовуються евристичні підходи, які дають можливість отримати наближені розв'язки. Автори шукають компроміс між якістю розв'язку та часом, необхідним для його пошуку. Для перевірки ефективності методів використовуються тестові приклади (benchmark instances), що доступні на сайтах <http://www.packomania.com>, <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing>.

Проте відкритим залишається питання розміщення гіперкуль в областях, які мають довільну просторову форму, з урахуванням зон заборони й обмежень на мінімально допустимі відстані та метричні характеристики гіперкуль.

Створення єдиної методології розв'язання задач розміщення гіперкуль в опуклих контейнерах довільної просторової форми з урахуванням додаткових обмежень, яка ґрунтується на аналізі особливостей постановки задачі, побудові точних математичних моделей у вигляді задач математичного програмування, розробці методів локальної й глобальної оптимізації та використанні сучасного програмного забезпечення (зокрема, LP&NLP Solvers на платформі GAMS – *General Algebraic Modeling System*), дозволить підвищити ефективність розв'язання задач цього класу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в період з 2000 р. по 2019 р. у відділі математичного моделювання й оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України і є частиною досліджень, які проводяться під керівництвом члена-кореспондента

НАН України Стояна Ю.Г. відповідно до планів науково-дослідних робіт за такими держбюджетними темами: "Розробка методів та алгоритмів оптимізації для розв'язання задач розміщення тривимірних геометричних об'єктів" (2001-2006 рр., № ДР 0102U001480); "Розробка конструктивних засобів та обчислювальних методів для розв'язання оптимізаційних задач упаковки та покриття" (2007-2011 рр., № ДР 0107U003662); "Створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач розміщення тривимірних тіл довільних просторових форм" (2012-2016 рр., № ДР 0112U002488); "Розробка математичних моделей та комп'ютерних технологій розв'язання оптимізаційних задач компоновки тривимірних тіл" (2017-2019 рр. № ДР 0117U000877). Також робота виконувалась згідно з такими договорами та грантами: грант TE 207/7, 436 UKR 113/42/0, договір між Німецьким дослідним товариством (Deutsche Forschungsgemeinschaft) і НАН України; грант УНТЦ (проект 5710) "Комп'ютерні технології для задач розміщення і покриття: моделі, методи та програмне забезпечення – розробка програмно-алгоритмічного забезпечення для моделювання задач розміщення і покриття", договір № 338-28/270/21-2008 від 11.02.2008 р. між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та ВО "Знамена" (м. Полтава) "Розробка програми для імітаційного моделювання процесу властивостей сплаву в залежності від розміру гранул".

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є підвищення ефективності розв'язання задач розміщення гіперкуль шляхом створення методології, що ґрунтується на побудові нових засобів моделювання, математичних моделей, розробці методів розв'язання з використанням методів нелінійного й дискретного програмування та сучасного програмного забезпечення для задач лінійного та нелінійного програмування.

Для досягнення мети в роботі поставлені такі задачі:

- сформулювати задачу розміщення гіперкуль (HSOA – hypersphere optimal arrangement), множина реалізацій якої покриває широкий клас

практичних та наукових задач у пріоритетних областях науки і техніки;

- побудувати засоби математичного моделювання обмежень розміщення, зокрема, побудувати Φ -функції для аналітичного опису відношень неперетину гіперкуль та розміщення гіперкуль на мінімально допустимих відстанях, включення гіперкуль в опуклий контейнер, обмежений гіперсферичними, гіперциліндричними поверхнями та гіперплощинами з урахуванням зон заборони (для $n = 2, 3$);

- розробити методологію розв'язання задач HSOA, в якій запропоновані стратегії для різних постановок залежно від функції цілі, кількості куль, особливостей метричних характеристик гіперкуль, просторової форми контейнера, додаткових обмежень (зон заборони, мінімально допустимих відстаней, обмежень на радіуси гіперкуль), зокрема

- побудувати математичну модель задачі HSOA у вигляді задачі математичного програмування;
- дослідити особливості та властивості математичних моделей основних реалізацій задачі HSOA, сформульованих як задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP – open dimension problem) або задача про рюкзак (KP – knapsack problem) відповідно до міжнародної класифікації задач розкрою та упакування (Cutting&Packing Problems)¹;
- розробити методи побудови допустимих початкових точок, методи пошуку локальних екстремумів та наближень до локальних і глобальних екстремумів задачі HSOA;
- створити програмне забезпечення, яке реалізує розроблені методи та алгоритми;
- провести обчислювальні експерименти, здійснити порівняльний аналіз отриманих результатів з відомими розв'язками (benchmark instances) задач

¹ Waescher G., Haussner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130

розміщення гіперкуль різної вимірності (кругів, куль, гіперкуль);

- надати рекомендації щодо практичних застосувань запропонованої методології.

Об'єкт дослідження – оптимальне розміщення гіперкуль.

Предмет дослідження – засоби математичного моделювання, математичні моделі та методи розв'язання задач розміщення гіперкуль в областях, обмежених циліндричними, сферичними поверхнями та площинами.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі для побудови засобів математичного моделювання умов розміщення гіперкуль застосовуються методи аналітичної й обчислювальної геометрії та метод Ф-функцій Стояна. Для побудови математичних моделей задач розміщення гіперкуль використовується теорія геометричного проектування. Для побудови допустимих початкових точок, наближених розв'язків, локальних екстремумів використовуються методи неперервного нелінійного програмування та методи геометричного проектування. Для пошуку наближень до глобального екстремуму застосовуються методи дискретної та неперервної нелінійної оптимізації й статистично-ймовірнісні методи.

Наукова новизна одержаних результатів.

Створено методологію розв'язання оптимізаційних задач розміщення гіперкуль (HSOA), яка включає в себе нові засоби математичного моделювання, математичні моделі та ефективні методи розв'язання, у тому числі:

- набув подальшого розвитку метод Ф-функцій Стояна щодо побудови засобів аналітичного опису обмежень розміщення гіперкуль ($2D$, $3D$ та nD , $n \geq 4$) в областях довільної просторової форми, зокрема:
 - Ф-функцій для моделювання відношення включення гіперкулі у контейнер, який має форму гіперпрямокутника, гіперкулі, гіперциліндра, n -політопа;
 - псевдонормалізованих Ф-функцій для гіперкуль як засіб

математичного моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані між гіперкулями;

- Ф-функцій для тривимірних куль та об'єктів, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами, як засіб моделювання відношення неперетину гіперкуль та зон заборони;

- вперше побудовано математичну модель задачі HSOA та математичні моделі її реалізацій залежно від функції цілі (метрична характеристика контейнера – в задачах ODP або коефіцієнт заповнення контейнера – в задачах KP), розмірності гіперкуль ($2D$ – круг, $3D$ – куля, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), особливостей метричних характеристик гіперкуль (конгруентність, розподіл радіусів, обмеження на метричні характеристики гіперкуль), просторової форми контейнера ($2D$ – круг, прямокутник, опуклий багатокутник, $3D$ – кубоїд, прямий круговий циліндр, куля, опуклий багатогранник, nD , $n \geq 4$, – гіперкуля), додаткових обмежень (мінімально допустимі відстані, зони заборони, обмеження на метричні характеристики контейнера);

- набула подальшого розвитку теорія геометричного проектування щодо розробки методів розв'язання задач HSOA, зокрема:

- набули подальшого розвитку методи побудови допустимих початкових точок (метод ґратчастого розміщення, в якому, на відміну від відомих методів, застосовуються трансляції ґраток відносно контейнера); метод оптимізації за групами змінних, в якому, на відміну від відомих методів, застосовуються гомотетичні перетворення гіперкуль, що дозволяє підвищити швидкість отримання перспективних допустимих точок;

- запропоновано модифікацію методу можливих напрямків, в якій застосовується нова стратегія активних нерівностей, що дозволяє поліпшити збіжність методу;

- вперше запропоновано метод побудови наближень до локальних екстремумів, в якому використовується комбінація методу оптимізації за групами змінних, методу спуску та методу множників Лагранжа, що дозволяє

розв'язувати задачі розміщення куль великої розмірності за прийнятний час;

- набули подальшого розвитку методи пошуку наближень до глобального екстремуму задач ODP – нові модифікації методу околів, що звужуються, які дозволяють розв'язувати задачі розміщення рівних і нерівних куль в опуклому контейнері, що оптимізується.

- вперше розроблено метод спрямованого перебору локальних екстремумів для отримання наближення до глобального екстремуму задачі розміщення гіперкуль в опуклому контейнері (ODP), що дозволяє підвищити якість розв'язків;

- вперше розроблено метод пошуку наближення до глобального екстремуму для задачі розміщення рівних гіперкуль в опуклому контейнері (IPRP), який ґрунтується на гомотетичних перетвореннях гіперкуль і дозволяє значно скоротити час обчислень та підвищити якість розв'язків;

- вперше розроблено метод пошуку наближення до глобального екстремуму задачі КР для нерівних гіперкуль із застосуванням методу гілок і меж та гомотетичних перетворень гіперкуль за рахунок побудови дерева розв'язків, яке враховує класи еквівалентності гіперкуль, та запровадження ефективних правил відтинання неперспективних гілок, що дозволяє отримати якісні розв'язки задач КР за прийнятний час;

- вперше запропонований підхід, який дозволяє розв'язувати задачу КР як послідовність задач ODP із застосуванням гомотетичних перетворень контейнера, що дає можливість застосовувати ефективні методи розв'язання задач ODP для задач КР і підвищити якість розв'язків.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком математичного моделювання й обчислювальних методів у геометричному проектуванні. Створено єдину методологію розв'язання оптимізаційних задач розміщення гіперкуль, яка ґрунтується на побудові нових засобів математичного моделювання відношень геометричних об'єктів, та розробці нових методів розв'язання HSOA із застосуванням сучасних розв'язувачів для задач нелінійного

програмування (NLP-solvers). Запропонована методологія дозволяє отримати розв'язки широкого кола практичних задач, що виникають у пріоритетних галузях науки й техніки.

Сукупність розроблених математичних моделей, методів, алгоритмів та програмних комплексів може використовуватися в системах автоматизованого проектування технічних систем та пристроїв у машинобудуванні та аерокосмічній промисловості, під час: моделювання властивостей сплаву в порошковій металургії; розробки технологій очищення газу; аналізу й розробки процесів у хімічних та ядерних реакторах, термічних теплообмінниках в хімічній промисловості та енергетиці; оптимізації топології виробів у адитивних технологіях (3D-друк); оптимізації перевезення й зберігання вантажів у інформаційно-логістичних системах; планування радіохірургії пухлин та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині; розв'язання задач кодування в цифрових комунікаціях і системах зберігання інформації.

Математичні моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, що запропоновані в дисертаційній роботі, використані в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України під час виконання держбюджетних тем.

Світовий рівень створених засобів математичного моделювання підтверджується публікаціями у високореєтингових міжнародних і вітчизняних журналах, виступами на міжнародних конференціях, участю в міжнародних проектах.

Програмне забезпечення, розроблене в дисертаційній роботі, застосовується на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету "Львівська політехніка" (Додаток В). Отримано свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір (Додаток Б). Запропоновано засоби математичного моделювання та методи розв'язання задач розміщення впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки при викладанні курсів

"Моделювання геометричних об'єктів" та "Теорія прийняття рішень" (Додаток В).

Особистий внесок здобувача. Основні результати, які надано в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У роботах, що виконані в співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [1,3,13,31,33,35] – математична модель задачі, стратегія розв'язання, модифікації методу околів, що звужуються, та методу можливих напрямків, обчислювальні експерименти; [2] – особливості математичної моделі; [4] – математична модель, метод розв'язання, обчислювальні експерименти; [5] – метод розв'язання, обчислювальні експерименти; [8,11,14,39] – програмне забезпечення, обчислювальні експерименти; [15,16] – математична модель, методи побудови допустимих початкових точок, модифікація методу можливих напрямків, метод пошуку наближення до глобального екстремуму, обчислювальні експерименти; [17,44] – алгоритми для реалізації побудови множин Парето та Слейтера; [18,24,36,43,46,51,52,57,60] – математичні моделі, стратегії розв'язання, метод розв'язання, обчислювальні експерименти; [21,41] – математична модель, Ф-функції кулі та опуклого багатогранного кута, кулі та призми, кулі та двохгранного кута, стратегія та метод розв'язання, обчислювальні експерименти; [22] – математична модель задачі, стратегія та алгоритм розв'язання, теорема про поліпшення значень функції цілі, обчислювальні експерименти; [25] – алгоритм розв'язання; [27] – методологія розв'язання; [28,29] – алгоритм розв'язання та програмне забезпечення; [30] – математична модель та метод розв'язання задачі розміщення куль у паралелепіпеді; [32] – математична модель, метод розв'язання, обчислювальні експерименти; [40] – математична модель та методи розв'язання задачі розміщення куль; [50,54,55,58] – стратегія та алгоритм розв'язання задачі; [51] – математична модель; [60] – математична модель, стратегія розв'язання; [62] – методологія розв'язання задач розміщення гіперкуль.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи

доповідалися та отримали схвалення на таких міжнародних конференціях і наукових семінарах:

- міжнародній конференції "Computer, Communication and Control Technologies CCCT '03" (2003 р., м. Орландо, Флорида, США);

- міжнародній науковій конференції "ESICUP Meeting" (2004 р., м. Віттенберг, Німеччина; 2005 р., м. Саутгемптон, Великобританія, 2008 р., м. Л'Аква, Італія; 2009 р., м. Валенсія, Іспанія; 2011 р., м. Копенгаген, Данія);

- міжнародному науковому семінарі "Cutting Stock Problems WSCSP2005" (2005 р., м. Меркюр-Чук, Румунія);

- міжнародній конференції "Актуальні проблеми прикладної математики та механіки АППММ'06" (2006 р., м. Харків, Україна);

- міжнародній науково-технічній конференції "Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010" (2010 р., м. Полтава, Україна);

- міжнародній науково-технічній конференції "Інформаційно-комп'ютерні системи ІКТ-2010" (2010 р., м. Житомир, Україна);

- міжнародній науковій конференції "Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies ММОТІ" (2012-2018 рр., м. Кишинів, Молдова);

- міжнародній конференції "European Conference on Operational Research EURO 2012" (2012 р., м. Вільнюс, Литва);

- міжнародній науковій конференції "Питання оптимізації обчислень ПОО-XL" (2013 р., смт. Кацівелі, Крим, Україна);

- міжнародній науково-технічній конференції "Штучний інтелект та інтелектуальні системи АІС'2016" (2016 р., м. Київ, Україна);

- міжнародній науково-технічній конференції "Інформаційні системи і технології ІСТ-2017" (2017 р., с. Коблеве, Миколаївська обл., Україна);

- міжнародній науковій конференції "Application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-

2017” (2017 р., м. Софія, Болгарія);

- міжнародній науково-технічній конференції "Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні" (2017 р., м. Харків, Україна);

- міжнародній науково-практичній конференції "Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем" (2012–2018 рр., м. Дніпро, Україна)";

- міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій" (2018 р., м. Рівне, Україна);

- семінарах Харківської секції Наукової ради з проблеми «Кібернетика» (Харків, Україна, 2000–2019, м. Харків, Україна).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 62 наукові праці, в тому числі: 1 монографія (видавництво Betriebswirtschaftlicher Verlag, Німеччина), 26 статей у наукових фахових виданнях, що входять до переліку наукових спеціалізованих видань, серед яких 7 статей у міжнародних журналах, що індексуються науково-метричною базою Scopus, з них 6 – у високореєтингових зарубіжних журналах (European Journal of Operational Research, International Transactions in Operational Research, Journal of Global Optimization, International Journal of Computer Mathematics, Optimization Letters), 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, 33 тези та доповіді на міжнародних наукових конференціях (з них 13 – за кордоном). Н-індекс цитування робіт за науково-метричними міжнародними базами даних: Scopus – 7, Web of Science – 6, Google Scholar – 9.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕНЬ

У першому розділі проводиться аналіз публікацій, присвячених задачам оптимального розміщення та розкрою геометричних об'єктів, серед яких важливе місце займають задачі розміщення куль різної вимірності (кругів, куль, гіперкуль). Наводиться міжнародна класифікація задач розміщення та розкрою C&P, зокрема задач розміщення кругів та куль. Описуються основні сфери застосування задач розміщення кругів, куль та гіперкуль. Розглядаються існуючі постановки, способи математичного моделювання, алгоритми та методи розв'язання таких задач. Обговорюються результати обчислювального моделювання. Вибирається напрям досліджень.

Дослідженням в області оптимізації, математичного моделювання, системного аналізу, автоматичних систем управління, штучного інтелекту, обчислювальної математики присвячені роботи відомих українських учених, зокрема І.В. Сергієнка [63-65], С.І. Ляшка [66,67], О.І. Шевченка [68,69], Р.П. Базилевича [70,71], П.І. Бідюка [68,72-74], Ю.В. Крака [68,75,76], П.І. Стецюка [68,77-79], О.М. Кисельової [68,80,81], В.П. Шила [82,83], Л.Ф. Гуляницького [84-86] та багатьох інших.

1.1 Оптимізаційні задачі розміщення

Перша робота, присвячена задачам розміщення та розкрою, була опублікована Л.В. Канторовичем у 1942 році [87], в якій вони розглядалися як прикладні задачі лінійного програмування. В подальшому ідеї цієї роботи розвинуті в спільній з В.А. Залгаллером книзі про розкрій [88]. Книга цікава ще й тим, що в ній, окрім лінійного програмування, використовуються ідеї й динамічного програмування та методу гілок та меж.

В Україні задача розміщення кругів з різними радіусами була сформульована в роботі [89]. Для розв'язання використовується градієнтний

метод. У [90] досліджується задача розміщення кругів з урахуванням відстаней між ними. Метод послідовно-одиначного розміщення вперше був запропонований у роботі [91].

Першим кроком у побудові аналітичного опису умов взаємного неперетину об'єктів став підхід, розроблений академіком НАН України В.Л. Рвачовим [92-93]. Він базується на використанні R -функцій і надає можливість аналітично описувати умови взаємного розташування геометричних об'єктів складної форми з урахуванням технологічних обмежень на допустимі відстані.

Подальші дослідження в цьому напрямі, виконані під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю.Г. Стояна, призвели до розробки математичного апарату функції щільного розміщення [94] та її годографа [95,96], які дозволяють перетворити геометричну інформацію про об'єкти, що розміщуються, в інформацію про їх можливі щільні розміщення.

На ґрунті годографу функції щільного розміщення розроблено методологію послідовно-одиначного розміщення для знаходження наближень до локальних екстремумів у задачах нерегулярного розміщення об'єктів [97,98]. Метод оптимізації за групами змінних, а також його комбінації з методами околів, що звужуються, та значущих змінних [99-101], стали основою цієї методології.

У подальшому введено поняття Φ -функції [102], за допомогою якої формалізуються відношення геометричних об'єктів. У монографії [103] Φ -функції подавалися у вигляді структури лінійних нерівностей.

Згодом побудовані Φ -функції для базових об'єктів у дво- [104] та тривимірному просторах [105]. Для моделювання обмежень на відстані між геометричними об'єктами введено поняття нормалізованої та псевдонормалізованої Φ -функцій [102,106]. Для деяких об'єктів Φ -функції мають дуже складний вигляд, тому запропоновано квазі- Φ -функції [106]. Метод Φ -функцій Стояна визнаний найбільш потужним у світі засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об'єктів. Він дозволяє

описувати оптимізаційні задачі розміщення у вигляді задач нелінійного програмування та створити ефективні методи розв'язання для широкого кола задач розміщення, наприклад, [107-108].

1.2 Міжнародна класифікація задач розміщення (Cutting&Packing)

Кількість публікацій в області розкрою та упакування геометричних об'єктів в останні роки невпинно зростає. Аналізуючи практичні застосування задач цього класу, G. Waescher та ін. [109] запропонували типологію задач розкрою та упакування (Cutting and Packing C&P).

1.2.1 Критерії для визначення типу постановки

Згідно з типологією для визначення типу постановки застосовуються такі критерії: вимірність (dimensionality), вид розміщення (kind of assignment), асортимент розміщуваних об'єктів (assortment of small items), асортимент областей розміщення – контейнерів (assortment of large objects), просторова форма розміщуваних об'єктів (shape of small items).

Розрізняють одно-, дво-, тривимірні задачі та задачі, в яких є більш ніж три незалежні параметри, необхідні для опису стану об'єкта (ступенів свободи системи).

Виділяється два типи задач упакування: максимізація (output maximisation) та мінімізація (input maximisation) функції цілі.

У випадку максимізації набір об'єктів, які мають менші розміри (в подальшому – розміщувані об'єкти), розподіляється серед заданого набору об'єктів, які мають більші розміри (в подальшому – контейнери). Усі розміщувані об'єкти мають бути використані, тобто немає задачі вибору з множини контейнерів. Розміщувані об'єкти треба вибрати в такий спосіб, щоб досягти максимального значення функції цілі.

Натомість, у випадку мінімізації набір контейнерів є достатнім для всіх розміщуваних об'єктів, тобто немає задачі вибору з множини розміщуваних

об'єктів. Задача полягає у виборі підмножини з множини контейнерів із мінімальною функцією цілі.

Як функція цілі можуть бути, наприклад, витрати, доходи або матеріальні обсяги, площа (у двовимірному випадку), об'єм (у три- й багатовимірному випадках), об'єм незайнятої частини підмножини контейнерів тощо.

У практичних задачах може існувати проблема вибору як з множини розміщуваних об'єктів, так і з множини контейнерів. Виникають задачі, в яких треба враховувати декілька різних критеріїв. У цих випадках для пошуку компромісного варіанту доречно використовувати одну із схем багатокритеріального вибору.

Виділяють три варіанти розміщуваних об'єктів: ідентичні, слабо неоднорідні й сильно неоднорідні.

У випадку ідентичних об'єктів всі елементи мають однакову форму й розмір (конгруентні форми).

При розміщенні слабо неоднорідних об'єктів вони можуть бути згруповані в декілька класів (щодо загальної кількості об'єктів), для яких елементи ідентичні за формою та розміром. Потреба кожного типу об'єктів може бути обмежена або не обмежена зверху.

Для сильно неоднорідних об'єктів однакову форму й розмір мають дуже мало елементів. Тобто є один елемент з кожного типу об'єктів. Об'єкти є рівномірно структурованими.

Можливі два випадки для областей розміщення: один або декілька контейнерів.

У першому випадку множина об'єктів складається з одного контейнера. При цьому або всі розміри контейнера є фіксованими (all dimensions fixed), або один чи декілька розмірів можуть бути змінними (one or more variable dimensions).

У випадку декількох контейнерів розглядається тільки області розміщення з фіксованими розмірами. Аналогічно класифікації

розміщуваних об'єктів контейнери можуть бути ідентичними, слабо неоднорідними або сильно неоднорідними. Крім того, вони можуть мати прямокутну форму (наприклад, прямокутник, кубоїд, гіперпрямокутник) або непрямокутну форму (круг, куля, тор, конус, гіперкуля, гіперциліндр тощо).

Виникають задачі з контейнерами нерегулярної форми, наприклад, неопуклий багатогранник, які виходять за межі типології [109].

Розміщувані об'єкти можуть мати регулярну (прямокутник, круг, кубоїд, циліндр, куля, гіперкуля тощо) або нерегулярну (наприклад, об'єкт межа якого – відрізки та дуги кіл) просторову форму.

1.2.2 Основні типи задач розміщення

З урахуванням наведених критеріїв розрізняють типи задач розміщення [109]: задача розміщення рівних об'єктів (Identical Item Packing Problem – IPP), задача розміщення (Placement Problem), задача про рюкзак (Knapsack Problem – KP), задача із змінними метричними характеристиками контейнера (Open Dimension Problem – ODP), задача розкрою (Cutting Stock Problem), задача про розміщення в ємності (Bin Packing Problem) (рис.1.1).

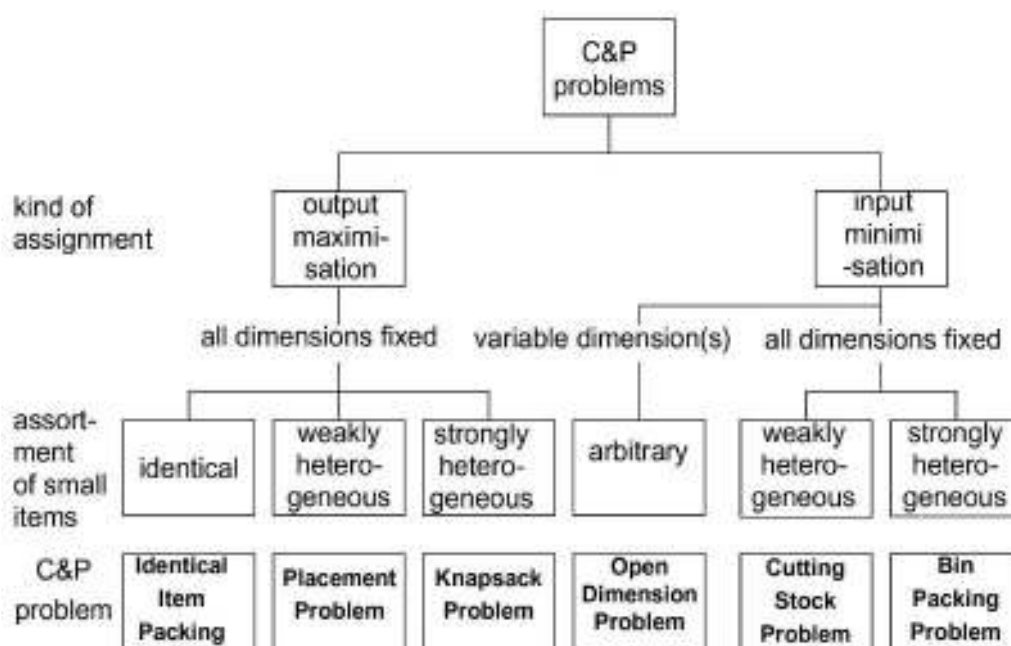


Рис. 1.1. Класифікація задач розміщення [109]

При розміщенні гіперкуль (HSOA – hypersphere optimal arrangement) виникають перші чотири типи постановок задач.

Задача ПРР полягає в розміщенні максимальної кількості гіперкуль у заданому наборі контейнерів. Немає необхідності у виборі з набору розміщуваних куль чи в об'єднанні гіперкуль у групи.

У класичній задачі розміщення (Placement Problem) вважається, що набір гіперкуль є слабо неоднорідним. Гіперкулі необхідно розмістити в заданому, обмеженому наборі контейнерів. Функція цілі, яка в більшості задач пов'язана з радіусом гіперкуль, має бути максимальною. Альтернативна постановка – відповідне значення відходів мінімізується.

Задача КР при розміщенні сильно неоднорідних за розміром гіперкуль у заданому наборі контейнерів. Загалом, тільки частина гіперкуль може бути розміщена в наборі контейнерів.

У задачі ODP всі гіперкулі із заданого набору мають бути розміщені в одному або в декількох контейнерах. Принаймні одна з метричних характеристик великого об'єкту (наприклад, довжина, висота, площа, об'єм) є змінною і треба визначити її мінімальне значення.

У дисертаційній роботі розглядаються задачі, в яких контейнер – один об'єкт. Відповідно до класифікації прийняті такі назви задач: ПРР (Identical Item Packing Problem), SLOPP (Single Large Object Placement Problem), Single Knapsack Problem (SKP або КР), ODP (Open Dimension Problem). З урахуванням того, що розміщуваними об'єктами є гіперкулі різної вимірності, повна назва проблеми доповнюється префіксами: $\{2,3,d\}$ -D $\{C,S\}$. Наприклад, 2-D CODP означає, що розглядається задача розміщення кругів зі змінним розміром контейнера, d -D КР – задача розміщення гіперкуль у контейнері з фіксованими розмірами.

Постановки задач SLOPP, ПРР та КР відрізняються тільки метричними характеристиками гіперкуль, тому задачі SLOPP, ПРР є окремими випадками задачі SKP.

1.3 Задачі розміщення кругів

Задачі HSOA різної вимірності викликають великий інтерес у дослідників. Найбільша кількість публікацій присвячена двовимірним задачам – розміщенню кругів у контейнерах (круг, прямокутник, багатокутник, тощо).

Такі задачі виникають або як самостійні, або як підзадачі в математиці [110-113], у геометрії, наприклад Аполлонієві розміщення кругів (рис. 1.2) [114], комп'ютерній графіці [115-116] (рис. 1.3), хімії [117], географії [118,119] (рис.1.4), в біології [120] (рис.1.5). Відомі промислові застосування: задачі розкрою при виробництві автомобілів [121], мотоциклів [122], електричних моторів [123] (рис. 1.6), при компонованні обладнання на супутникових модулях [124-127] (рис. 1.7), при плануванні розміщення човнів [128] (рис. 1.8); задачі компоновання [129] (рис. 1.9), задача пошуку перешкод при плануванні шляхів безпілотних літальних апаратів [130], виявлення рухомих цілей і сигналів [131], задачі розпізнавання образів, дискретизації домену, тріангуляції, генерації сітки [132], вимірювання сонячної радіації [133]. Такі задачі також виникають при зберіганні циліндричних барабанів, упакуванні пляшок або банок у найменшій коробці (рис. 1.10), посадці рослин з максимальною щільністю тощо [134] (рис. 1.11).

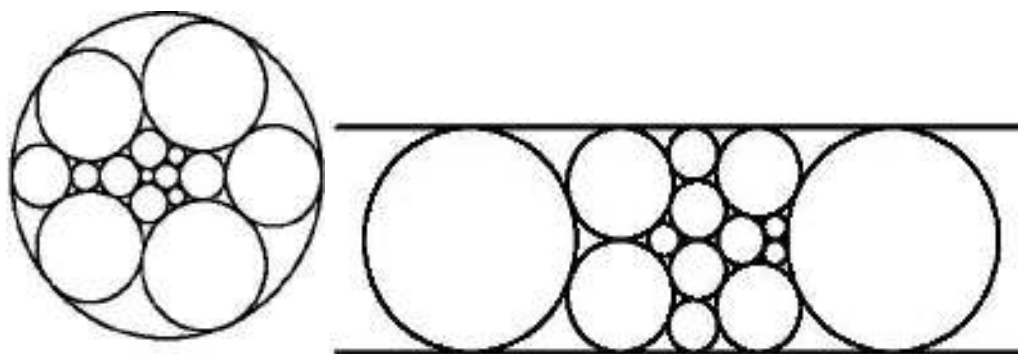


Рис. 1.2. Аполлонієві розміщення кругів [114]



Рис.1.3. Приклади використання розміщення кругів в комп'ютерній графіці [116]

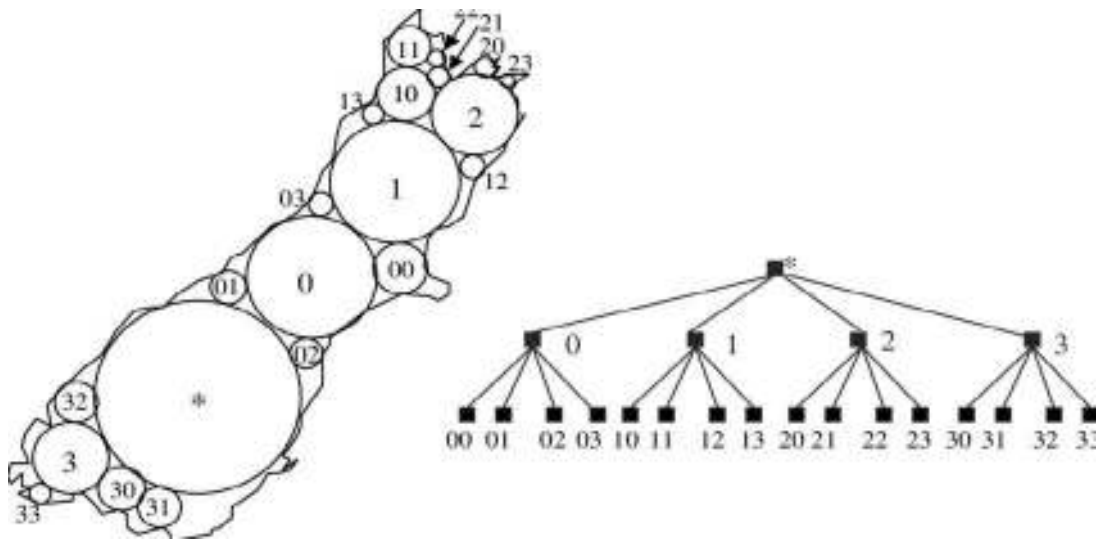


Рис. 1.4.Приклад обробки інформації в географії [119]

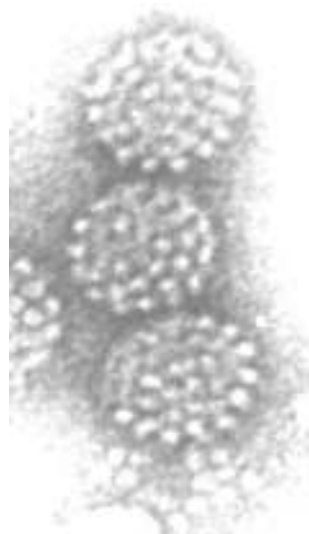


Рис. 1.5. Приклад задачі розміщення кругів у біології (мікрографія вірусу полііоми людини) [120]

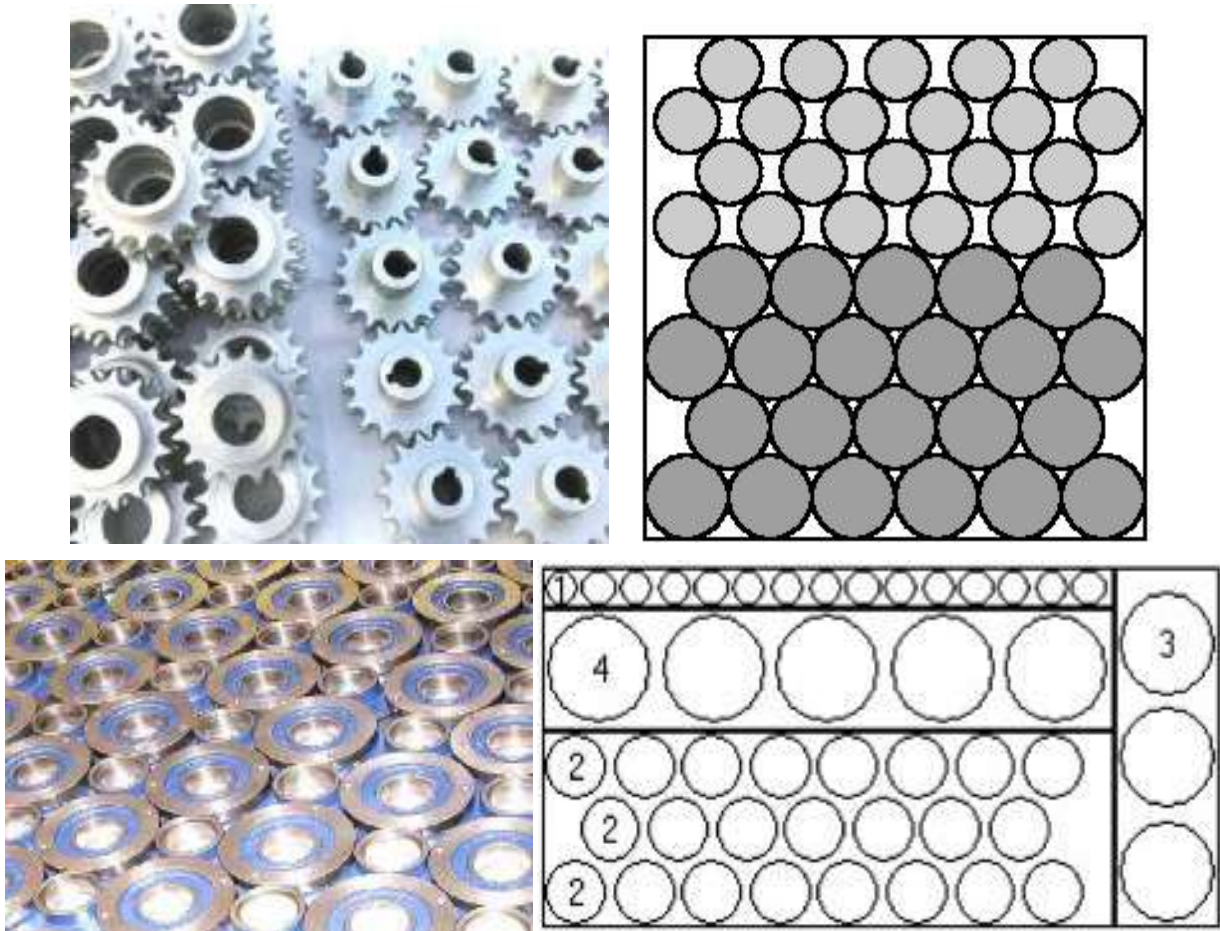


Рис. 1.6. Приклад розкрою кругів у автомобільній промисловості [123]

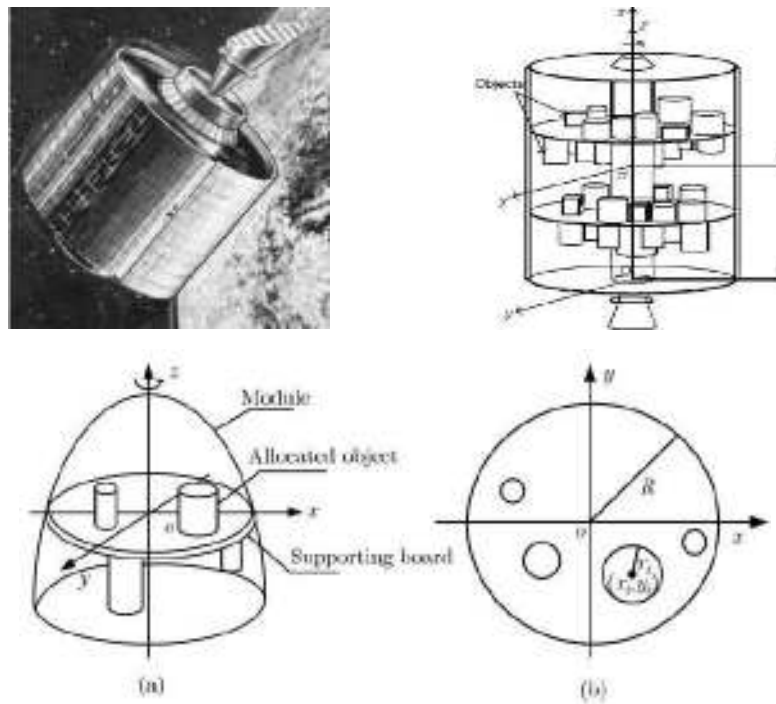


Рис. 1.7. Приклади компоновання супутникових модулів [124-127]



Рис. 1.8. Приклад розміщення човнів в затоці Сарасота, штат Флорида, США [128]

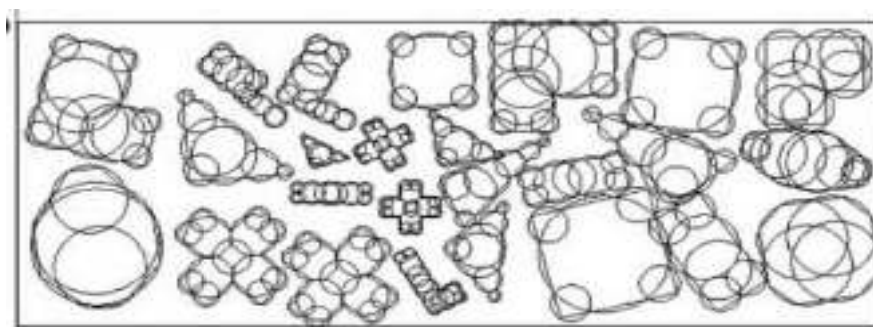


Рис.1.9. Приклад компоновання об'єктів, апроксимованих колами [129]

Задача виникає в кабельній промисловості, коли треба зібрати пучки електричних проводів в один кабель і заповнювати невикористаний простір за допомогою інсоляційного матеріалу [121] (рис. 1.12). Чим менше невикористана площа, тим дешевший кабель. Аналогічна задача зустрічається в телекомунікаційних, електричних і нафтових компаніях, нафтопереробних заводах, які пропускають пучки різних типів кабелів, труб та ізоляційних труб через циліндричні форми. Чим менше діаметри циліндрів, тим дешевше їх вартість. Відома задача поховання ядерних відходів, які зберігаються у циліндричних контейнерах (рис. 1.13). Площа заховання може мати як регулярну форму (наприклад, прямокутну), так і нерегулярну.



PACKING



Рис. 1.10. Приклади задач складування та транспортування

([http:// city catpipes and fittings.com](http://citycatpipesandfittings.com)

[http://www.Craft pak.ie](http://www.Craftpak.ie)

[http://www.aluminium - circle.cn](http://www.aluminium-circle.cn))



Рис. 1.11. Планування посадки рослин [134]

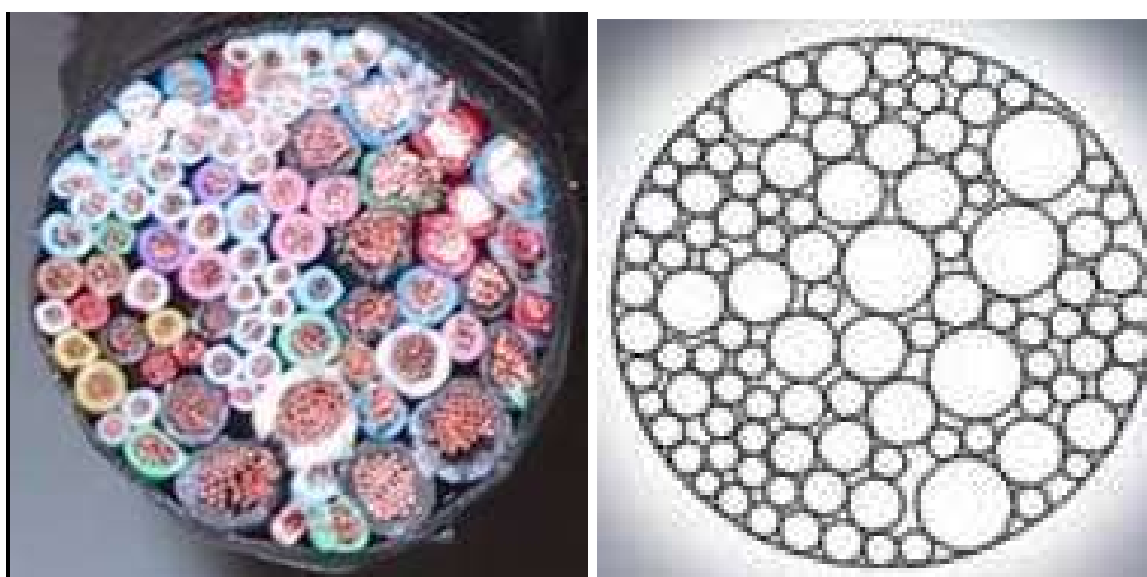


Рис. 1.12. Планування розміщення кабельної продукції [121]



Рис. 1.13. Задача компактної утилізації ядерних відходів
(https://1obl.ru/upload/medialibrary/37b/nuklear_waste_1.jpg)

Задачам розміщення рівних та нерівних кругів у різних областях присвячена велика кількість публікацій. Частина дослідників розглядала задачу як 2-D CODP. Паралельно з цим відбувалось дослідження й інших класів задач: 2-D CIPP, 2-D CSKP.

У 1611 році при пошуку компактного укладання гарматних ядер на кораблях британського військового флоту Й. Кеплер² припускає, що найщільний спосіб упаковки куль, коли куля торкається 12 інших куль (згодом таке розміщення, щільність якого $\pi / (3\sqrt{2}) \approx 0.74$, починають називати "гексагональним ґратчастим розміщенням"). У 1773 році Ж.Л. Лагранж³ доводить, що ґратчасте гексагональне розміщення кругів забезпечує максимальну щільність заповнення $\pi / \sqrt{12} \approx 0.91$. Пізніше, у 1831 році К.Ф. Гаусс⁴ доводить, що гіпотеза Й. Кеплера справедлива, якщо кулі утворюють регулярну ґратчасту структуру. Угорський математик Ф. Тот [135] підтверджує, що гексагональне ґратчасте розміщення є найщільним серед усіх можливих розміщень, як регулярних, так і нерегулярних.

Задача розміщення кругів у прямокутнику мінімальної довжини, яка згодом була класифікована як 2-D CODP [109], вперше формулюється у вигляді задачі математичного програмування в роботах [89,90].

У [91,95] для розв'язання задачі розробляється метод оптимізації за групами змінних (МОГЗ). За допомогою МОГЗ отримуються крайні точки [136] області допустимих розв'язків, які, загалом, не є точками локальних екстремумів. Крайнім точкам відповідають такі розміщення кругів у прямокутнику, що кожен круг торкається принаймні або двох інших кругів, або круга та сторони прямокутника, або двох сторін прямокутника.

² Ioannis Kepleri S. C. Maiest. Mathematici Strena Seu De Niue Sexangula. Francofurti ad Moenum: apud Godefridum Tampach, 1611.

³ Lagrange J.-L. Recherches d'arithmétique. Nouv. Mém. Acad. Roy. Soc. Belles Lettres (Berlin). 1773. P. 265–312.

⁴ Gauss C. F. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber, Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831.

Стаття [137] мотивується проблемою підгонки труб різного діаметру в транспортну тару. Така задача розглядається як задача 2-D CSKP для нерівних кругів у прямокутнику. Вона формулюється як нелінійна задача змішаного цілочислового програмування. Розроблено декілька евристичних процедур для отримання наближених розв'язків.

Hifi та ін. [138] пропонують евристику на основі імітаційного відпалу (Simulated Annealing) для розв'язання задачі 2-D CSKP розміщення обмеженої й необмеженої кількості кругів у прямокутнику фіксованих розмірів. Задля цього вводиться функція енергії, малі значення якої забезпечують концентрацію кругів у лівому нижньому куті прямокутника, гарантуючи ненакладання кругів одного на інший. У випадку, коли в результаті оптимізації функції енергії круги перетинаються, для отримання допустимого розміщення "зайві" круги вилучаються. На жаль, метод не покращує результати МОГЗ [91,95].

Huang та ін. [139] пропонують евристичні жадібні алгоритми B1.0 та B1.5 для 2-D CSKP. Основна ідея алгоритму B1.0 – вибір розташування розміщуваного круга за правилом максимального отвору (MHD – maximum-hole degree). Алгоритм B1.0 є реалізацією схеми МОГЗ із евристичним критерієм. За допомогою стратегії попереднього пошуку (self-look-ahead search strategy) та алгоритму B1.0 розробляється алгоритм, в якому на кожній ітерації для розміщуваного круга оцінюються всі можливі його позиції. Адаптація цих алгоритмів для 2-D CODP здійснюється шляхом розв'язання послідовності задач 2-D CSKP з визначенням довжини прямокутника за допомогою дихотомічного пошуку.

Схожа ідея використовується Akeb та Hifi [140]. Для 2-D CODP автори розробили гібридний алгоритм на основі комбінації локального променевого пошуку (beam search-based algorithm), бінарного інтервального пошуку та процедури генерації розв'язку у "відкритій" смузі, в якій реалізовується правило кращої локальної позиції.

Удосконалення для алгоритмів B1.0 та B1.5 [139] пропонується Kubach, Bortfeldt та Gehring [141]: два паралельних жадібних алгоритми B1.6_KP та B1.6_SPP для задач 2-D CODP і 2-D CSKP. В алгоритмах здійснюється відбір наборів початкових конфігурацій кругів та пошук компромісу між якістю розв'язків та часом обчислення.

Руднєв [142] формулює задачу розміщення кругів та прямокутників у напівскінченній смужі в термінах нелінійного цілочислового програмування. На основі схеми кодування для двоконтактних розв'язків для пошуку наближеного розв'язку задачі розробляється ймовірнісний алгоритм пошуку із заборонами.

Kallrath та Frey [143] описують та розв'язують оптимізаційну задачу, в якій набір кругів із заданими радіусами слід розмістити таким чином, щоб периметр опуклої оболонки для кругів був мінімальним.

У роботі [144] розглядається задача розміщення обмеженої кількості нерівних кругів у прямокутному контейнері фіксованого розміру. Мета полягає в тому, щоб максимізувати кількість кругів у контейнері, або мінімізувати відходи. Пропонується нове формулювання з використанням регулярної сітки, що апроксимує контейнер. Вузли сітки є потенційними позиціями для центрів кругів. Задача розміщення розглядається як лінійна задача оптимізації 0-1 великої розмірності. Двійкові змінні задають відповідність центрів вузлам сітки. Задача розв'язується за допомогою комерційного програмного забезпечення.

Yaohua та Yong [145] для розв'язання 2-D CODP адаптують традиційний генетичний алгоритм. Автори обирають менший рівень операцій схрещування, але більший рівень операцій мутації з метою дослідження розв'язків, сусідніх до найкращого. Алгоритм дозволяє розв'язувати задачі промислової розмірності за прийнятний час.

Слід відзначити, що у роботі Castillo, Kampas та Pinter [146] одна з альтернативних постановок задач розміщення кругів у крузі формулюється як задача CODP: необхідно знайти мінімальний радіус кругового контейнера,

в якому може розміститися визначена кількість кругів заданого радіусу. Автори роблять огляд промислових застосувань та аналізують можливість використання пакетів програм для глобальної оптимізації.

Kravitz [147] ще в 1967 році розглядає задачу розміщення кругів у наведеній вище постановці, знаходить доведені оптимальні розв'язки для 1–10 кругів та найкращі відомі розв'язки для 11–19 кругів. Graham [148] та Pirl [149] незалежно доводять оптимальність розміщень, отриманих для 7-10 кругів. При цьому Pirl пропонує кращі результати для 1-19 кругів. Деякі з них (для 14, 16, 17 кругів) пізніше покращуються Goldberg [150], який також отримує результат для 20 кругів. Подальші поліпшення для 25 кругів робляться Reis [151].

Graham та ін. [152] продовжують дослідження задачі розміщення рівних кругів. Вони розробляють метод, основна ідея якого полягає в пошуку мінімальної попарної відстані між кругами, які вже розміщено, та пошуку максимальної такої відстані для розміщення в цілому. Алгоритм збігається квадратично.

Алгоритм гілок та меж для розв'язання задачі розміщення рівних кругів у квадраті використовується в роботі Locatelli [153].

У роботі [154] пропонується евристика, яка ґрунтується на жадібному алгоритмі. За допомогою розроблених евристичних правил отримуються нерегулярні розміщення великої кількості кругів у круговому й кільцевому контейнерах. Алгоритм дозволяє швидко отримувати розв'язки, які є грубим наближенням до оптимальних.

Mladenović, Plastria та Urošević [155] використовують ідею формулювання просторового пошуку (formulation space search – FSS) і розробляють модифікацію методу спуску, в якому по черзі використовуються декілька еквівалентних формулювань нелінійної оптимізації задачі в декартовій та полярній системах координат. Остаточний розв'язок є стаціонарним відносно обох систем. Евристичний алгоритм, який ґрунтується на методі FSS, розроблений López та Beasley [156]. Автори

досліджують різноманітні контейнери: одиничний круг, одиничний квадрат, прямокутник, рівнобедрений прямокутний трикутник та напівкруг.

Birgin та Gentil [157] досліджують задачу розміщення рівних кругів у різних контейнерах (круг, квадрат, трикутник, прямокутник, напівскінченна смуга). Автори пропонують підхід, який ґрунтується на розв'язанні нелінійних систем рівнянь з використанням методу Ньютона-Рафсона.

Нелінійна модель у вигляді задачі математичного програмування застосовується Birgin та Sobral [158] для розв'язання задачі розміщення кругів та куль. Liu та ін. [159] розробляють алгоритм, в якому комбінуються поліпшений метод "landscape paving " та процедура градієнтного спуску для розміщення рівних та нерівних кругових об'єктів у круговому контейнері найменшого радіусу. Для розв'язання такої задачі в роботі Grosso та ін. [160] розробляються підходи "monotonic basin hopping" та "population basin hopping".

Huang та Tao [161] використовують квазі-фізичний метод глобальної оптимізації для задачі розміщення рівних кругів, а Fu та ін. [162] – ітераційний алгоритм пошуку із заборонами для 2-D CODP.

Кращі відомі розв'язки для задач розміщення кругів та куль доступні на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке (сторінка E. Specht) [163], а огляд найбільш ефективних моделей і методів для розв'язання задач розміщення кругів та куль робиться у роботі Hifi та R'Hallah [164].

1.4 Задачі розміщення куль

Останнім часом з'являється багато робіт, в яких розглядаються тривимірні задачі розміщення куль у контейнерах різної просторової форми. Значно менше робіт мають справу з розміщенням гіперкуль. При цьому для будь-якої вимірності в більшості робіт досліджуються задачі розміщення рівних куль (кругів, гіперкуль).

У 1959 році в роботі Bernal [165] уперше використовується випадкове щільне розміщення рівних куль для моделювання рідин. Різноманітні

практичні застосування такої моделі досліджуються багатьма вченими залежно від використаного матеріалу, форми контейнера, розміру куль тощо.

Розміщення рівних (монодисперсних) куль допомагають моделювати канали наноструктурованих пористих матриць, заповнених атомами або молекулами речовини. Властивості отриманих речовин сильно залежать від розташування й щільності частинок. Канали моделюються як циліндричні контейнери [166].

Дослідження показують [167], що наночастинки діаметром 400 нм самозбираються в частинку зі щільністю, меншою ніж максимально можлива (рис. 1.14).

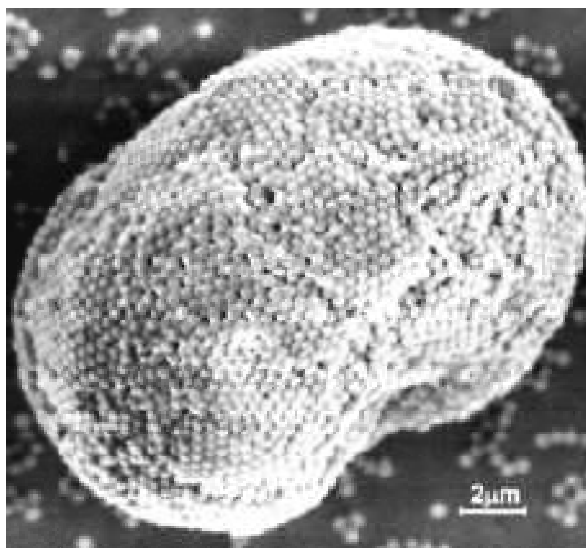


Рис. 1.14. Мікрофотографія мікрочастинки діоксиду кремнію розміром 10 мкм×20 мкм, яка складається з частинок розміром біля 400 нм [167]

Вивчення рівних куль, що не накладаються одна на іншу, викликано необхідністю дослідження процесів, які відбуваються в хімічних каталітичних реакторах, колонах для дистиляції та абсорбції газу [168] (рис. 1.15), ядерних реакторах та теплообмінниках [169].

Інші напрями досліджень моделей розміщень рівних куль виникають у хімічній інженерії та матеріальній фізиці. Вони використовуються для опису різноманітних структур речовин, таких як кристали [170], рідини [165],

кістки [171] тощо. Такі моделі також важливі для прогнозування властивостей процесів транспортування в газорідких системах із рухомим середовищем [172], для дослідження речовини в рівноважному стані щодо критичного значення щільності в точці переходу між двома фазами для різних гранульованих речовин [173], зокрема, порошку [174], кераміки [175], піску [176] тощо.

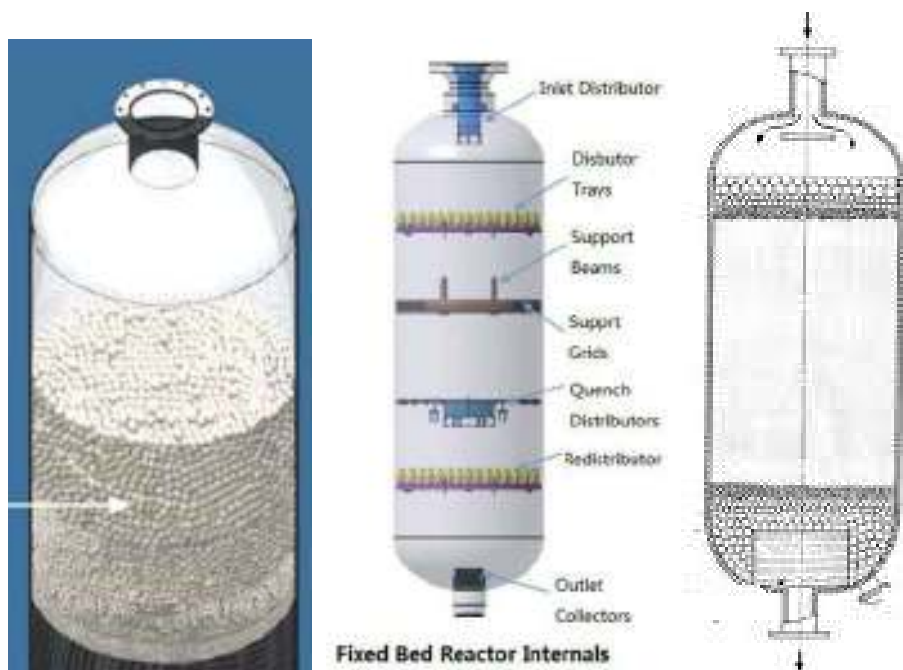


Рис. 1.15. Приклади каталітичних реакторів

(<https://saipotech.en.made-in-china.com/productimage/OSxQPhgCHpRc-2f1j00jsKTSfgcrBuF/China-Fixed-Bed-Reactor-Distributor-Tray.html>)

Задачі розміщення рівних куль виникають при розробці технологій лиття [177,178] (рис.1.16).

Дослідження показують, що зовнішні фактори: наявність гравітаційного поля, псевдозрідження, сегрегація, перегрупування, пружна деформація, фрагментація, абразивна обробка [168], затвердіння [179], дилатантність (збільшення об'єму сипучих матеріалів при зволоженні) [176], когезія (процес молекулярного зчеплення) [180] впливають на максимальну досягну щільність розміщення та на бажану структуру й властивості розміщених частинок.

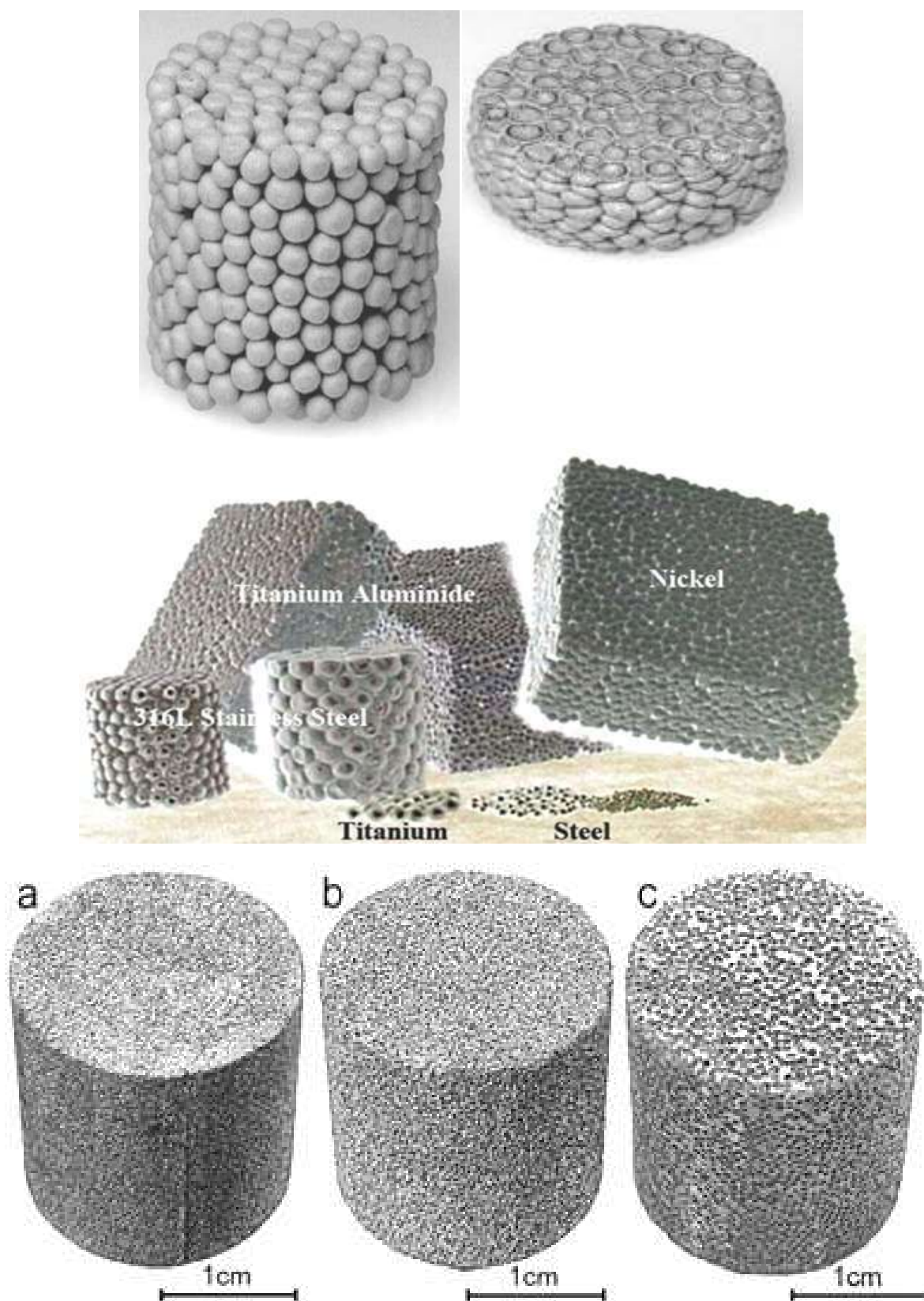


Рис. 1.16. Приклади задач розміщення куль при розробці технологій лиття [177,178]

Задачі розміщення нерівних куль виникають при дослідженні полідисперсних колоїдних систем [181], які поширені в природі. Наприклад, білки, кров, лімфа, вуглеводи, пектини знаходяться в колоїдному стані. У вугільній, торф'яній, гірничорудній і нафтовій промисловості мають справу з дисперсними матеріалами (пилом, суспензіями, піною). Особливе значення колоїдна хімія набуває в процесах збагачення корисних копалин, дроблення, флотації та мокрого збагачення руд. Фото- й кінематографічні процеси пов'язані із застосуванням колоїдно-дисперсних систем.

Бетон містить численні пори [182, 183], які сприяють корозії, коли йони хлору просочуються через пори й вступають в контакт з металевою арматурою. Для захисту армування в бетоні від хлоридів можна застосовувати електрокінетичну наночастинкову (EN) обробку, тобто використовувати електричний струм, щоб змусити наночастинки в порах блокувати доступ через них. Заміна повітря або води, присутніх у порах бетону, твердими матеріалами або наночастинками значно підвищує міцність на стиск бетону. Два різні розміри наночастинок беруть участь в EN-обробці. Більш дрібні використовуються для блокування йонів хлору, а більші – переносити менші до більш глибоких місць у порах. Більші наночастинки забезпечують швидке джерело підвищення міцності та загальне зменшення пористості в усьому матеріалі бетону.

Корозія в мостових структурах – це глобальна проблема (рис. 1.17). Заповнення пор в бетоні твердим матеріалом або наночастинками значно поліпшує міцність конструкцій. Важливе питання – яка комбінація наночастинок великих і малих розмірів дасть найвищу щільність заповнення [182].

Зростаючий інтерес до задач розміщення рівних та нерівних куль викликано застосуваннями в медицині: радіохірургії пухлин [184-187] та лазерній коагуляції сітківки ока [188].

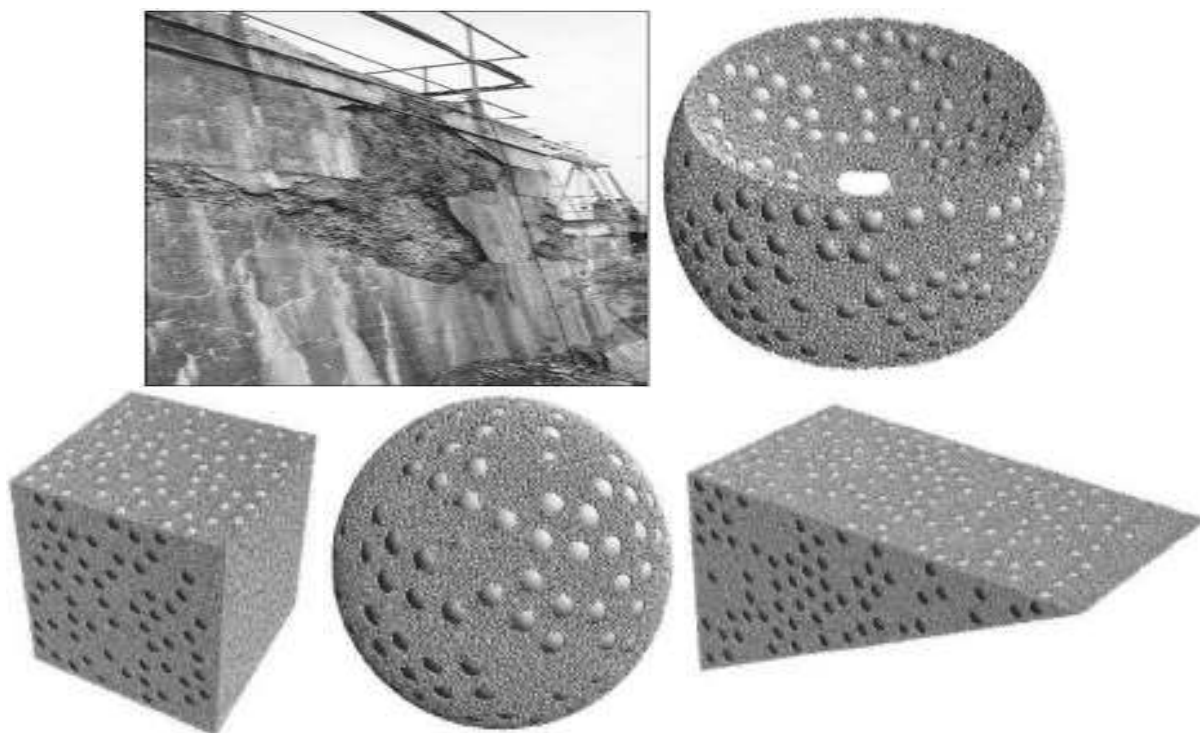


Рис. 1.17. Проблема корозії в мостових структурах та задача розміщення нерівних куль [182]

Дослідженню математичних моделей та методів розв'язання тривимірних задач розміщення куль присвячено багато робіт. Задачі відрізняються кількістю розміщуваних куль, їхніми розмірами, контейнерами, відношенням розміру куль до розміру контейнера, способами отримання розміщення тощо. Одним із важливих параметрів, який визначає структуру розміщення, є коефіцієнт (щільність) заповнення та пористість. Саме прогнозування властивостей структури розміщення й є предметом дослідження більшості вчених. Інтерес викликають як задачі розміщення конгруентних куль, так і задачі розміщення нерівних куль.

У 1998 році Hales доводить [189], що щільність розміщення конгруентних куль не більша, ніж $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0.74$. У 1955 році Rankin отримує верхню межу для щільності 0.827 [190], а за три роки Rogers уточнює – 0.7797 [191]. Щільність випадкового розміщення конгруентних куль – 0.64 [192,193]. Очевидно, що щільність розміщення нерівних куль є більшою.

Залежно від способу розміщення та припущень задачі розміщення конгруентних куль можуть бути регулярними [194,195] та нерегулярними [180,196-201]. При регулярному розміщенні координати центрів куль обчислюються згідно з гексагональними ґратчастими шаблонами. Для нерегулярних моделей кулі розміщуються або у випадковий спосіб, або місце розташування куль визначається за допомогою розв'язання оптимізаційних задач. Задля цього використовуються такі підходи: струшування [168,175, 192,202], вібрація [194,195,202], постукування [202,203] тощо. Інша класифікація моделей – статичні, динамічні або їх комбінація. Найпростіший приклад для статичного моделювання є послідовно-одиначне розміщення (sequential addition – послідовне додавання) куль.

Уперше алгоритм випадкового послідовного додавання (random sequential addition – RSA) пропонується Widom [204] у 1966 р. Частишки розміщуються, починаючи з найбільшої. Із фізичної точки зору такий підхід доцільно краще реалізовувати, випадково вибираючи початкові розміщення куль та дозволяючи їм вільно рухатися під впливом гравітації доти, доки вони не досягнуть дна контейнера або трьох інших куль у стійкій позиції. Такі позиції відповідають локальним мінімумам функції цілі (Z-координата кулі). Mueller [200] зауважує, що, незалежно від характеру розміщення, остаточний стабільний баланс геометричної структури розміщуваних куль є найбільш цікавим і значно впливає на всі властивості розміщення.

Стислий огляд методів детермінованого моделювання наведеться в [201]. Зупинимось на методах нерегулярного розміщення.

Gap та ін. [169] пропонують алгоритм, який ґрунтується на ідеї одночасного видалення найбільшого накладення куль та зменшенні зовнішнього радіусу для визначення параметрів розміщення. Реалізується комп'ютерне моделювання для наборів конгруентних та різних куль. Цей алгоритм використовується для контейнерів різних просторових форм за

метою визначення структури розміщення в місцях накопичення куль та поруч із стінками контейнера.

Метод автоматизованого проектування (САПР) використовується Lal та Sun [171] для моделювання двох альтернативних способів розміщення мікрокуль: з мінімальною щільністю й максимальною пористістю для структури кісткової тканини із замкненими клітинами та з максимальною щільністю й мінімальною пористістю для структури кісткової тканини відкритої клітини. Потім визначається кількість мікрокуль, розміщених за допомогою цих двох моделей.

У роботі Abreu та ін. [168] застосовується метод Monte-Carlo для опису характеристик розміщення та розподілу кульових частинок у циліндрі за присутності гравітаційного поля. Імітаційне моделювання показує, що наявність циліндричної стінки не впливає на явище гравітаційної сегрегації, тобто розподілу частинок за розмірами.

Wensrich [205] використовує повні характеристики різних наборів частинок, отримані за допомогою комп'ютерних томографічних сканів і моделей дискретних елементів, для вивчення ефекту межі. Розробляється алгоритм заповнення, заснований на оптимізаційній моделі, для безпосереднього завантаження частинок у комп'ютерний томографічний скан. Будуються моделі дискретних елементів кожної трубки з використанням пакета PFC3D v4.0, розробленого ITASCA. Автор робить висновок, що щільне випадкове розміщення не є абсолютно випадковим, і це є найбільш очевидним при вивченні структури розміщення біля стін контейнера.

Метод Monte-Carlo застосовується Roozbahani та ін. [206] для розміщення рівних куль у віртуальних прямокутних контейнерах за аналогією до циліндричних контейнерів. Автори використовують підхід циліндричної розміщення в циліндрі для імітації заповнення різних віртуальних прямокутних контейнерів. Досліджується ефект стіни. Пористість сферичних розміщень у внутрішній частині циліндра вивчається і

без впливу меж, щоб показати структуру розміщень в різних прямокутних контейнерах за різних співвідношень бічних розмірів.

Згідно з моделлю Bennet [207,208] вибирається положення кулі, вертикальна координата центру якої є мінімальною. У [207,208] розглядається модифікація цієї моделі, а саме тільки гравітаційно стабільні розміщення куль. Серед них вибирається розміщення з найбільшою вертикальною координатою.

Метод послідовно-одиначного розміщення є основою методу, розробленого Tingate та Mueller [194,200,201] для задачі розміщення рівних куль у циліндричному контейнері. Метод є детермінованим і не використовує випадкових розміщень. Якщо діаметр циліндра більший за діаметр кулі втричі й більше, кулі додаються до вже розміщених зверху базового шару в одну із двох різних позицій: біля стінки контейнера та всередині контейнера. Таким чином розміщувані кулі контактують або з двома іншими кулями та стінкою контейнера, або з трьома іншими кулями. Розглядаються тільки позиції, стабільні під впливом гравітації. Для інших співвідношень діаметрів додатково досліджуються варіанти розміщення куль, які торкаються тільки однієї кулі й стінки контейнера. Mueller [200] використовує безрозмірний параметр для визначення гравітаційно-стабільних положень куль у циліндрі. Завдяки експериментальним результатам робиться висновок, що детермінований метод розміщення стає менш точним, якщо діаметр циліндру є значно більшим за діаметр куль.

Stillinger та Lubachevsky пропонують алгоритм LSA [209], в якому методами молекулярної динаміки числово моделюється фізичний процес взаємодії куль як джерел силового поля. Стан стиснення досягається моделюванням потоку частинок (granular flow), який задається як послідовність дискретних подій (discrete events): зіткнення частинок між собою та твердими стінками контейнера. Алгоритм LSA дає можливість отримувати "застрягли" ("jammed") стани кругів і куль. Загалом, за допомогою LSA можна моделювати як зовнішнє стиснення, так і внутрішнє

розширення частинок, які відбуваються одночасно. При цьому стінки контейнера можуть бути рухомими (mobile). Baranaua та Tallarek [210] отримують "застряглі" розміщення нерівних куль за LSA.

Birgin та Sobral [158] пропонують моделі нелінійного програмування для розв'язання задач ODP розміщення не тільки кругів, а й куль. Автори реалізують фізичну модель для системи N -тіл, завдяки якій мінімізуються накладення об'єктів. Задача системи N -тіл полягає в обчисленні гравітаційної сили між N частинками в 3D-просторі, де частинки впливають на всі інші частинки. Приклади такої взаємодії є в багатьох областях: небесній механіці, фізиці плазми, механіці рідини й імітаційному моделюванні напівпровідникових приладів. Використання стратегії дозволяє розміщувати велику кількість куль у контейнерах різних просторових форм.

В останні роки не менша увага приділяється й задачам розміщення нерівних куль. Раніше цю задачу вважали досить важкою через складну геометрію процесу розміщення. З розвитком математичних моделей і методів, потужностей сучасних комп'ютерних систем зростає кількість публікацій, присвячених дослідженню в цьому напрямі. Комп'ютерні імітаційні моделі є альтернативою трудомістким і дорогим натурним експериментам. Вони дозволяють створювати розміщення куль бажаної пористості, розподілу розмірів куль та просторових характеристик.

Алгоритми й методи, які описуються в літературі, можна поділити на дві основні категорії: методи послідовно-одиначного розміщення та методи колективного перегрупування, тобто методи локального та глобального пошуку.

Як і в задачах розміщення рівних куль основна ідея послідовних алгоритмів полягає в виборі положення розміщуваної кулі таким чином, що вона торкається трьох інших, уже розміщених куль, або двох куль та стінки контейнера. Вибір положень перших куль відбувається або випадково, або відповідно до детермінованої процедури. Задля вибору таких координат куль автори використовують різноманітні алгоритми "падіння та ковзання" (drop

and roll) [211], які отримані моделюванням фізичних процесів. Спочатку куля падає під впливом гравітації. Щойно вона торкнеться іншої кулі або стінки контейнера, то починає ковзати по поверхні, знову під впливом гравітаційної сили. Рух продовжується доти, доки куля не займе гравітаційно стабільне положення. [211-213]. Visscher та Bolsterli [214] розглядають задачу розміщення різних куль (2-D, 3-D) в кубоїді методом Monte-Carlo, моделюючи падаючі кулі, на які впливають гравітаційні сили.

Yamada та ін. [182] пропонують математичну формулу для визначення двох оптимальних розмірів куль, для яких коефіцієнт щільності заповнення при випадковому вільному розміщенні є максимальним. Досліджуються контейнери різних просторових форм. Імітаційне моделювання виконано для аж до понад одного мільйона куль.

У методах колективного перегруповування початкове розміщення отримується за допомогою методу Monte-Carlo або методу дискретних елементів (молекулярної динаміки) [215-217], які генерують розміщення куль за накладеннями. Потім відбувається зменшення накладень, наприклад, завдяки стохастичним рухам. При використанні динамічних методів, зокрема методу "рух-скорочення" (moving-shrinking) [218], гравітаційних методів [219] або методу стиснення [220], частинки змінюють свої положення протягом процесу заповнення.

У роботі [221] пропонується модифікація LSA-алгоритму для розміщення нерівних (polydisperse) куль. В оригінальному алгоритмі відбувається повільне збільшення розмірів рівних куль, поки коефіцієнт заповнення не стане максимальним. У розробленій модифікації радіуси куль зростають пропорційно.

Wang [185] розглядає оптимізаційні моделі для задач розміщення нерівних куль у обмеженій 3D області, яка виникає в медицині при плануванні радіопроменевої терапії онкологічних пухлин. Він показує, що такі задачі є *NP*-складними. Наближений алгоритм для розв'язання задачі дає

можливість досягти заданого рівня коефіцієнта заповнення області розміщення.

У роботі Sutou та Dai [222] задача автоматичного проектування радіохірургічного лікування моделюється як задача розміщення нерівних куль у заданому багатограннику. Задля отримання плану лікування розв'язується задача максимізації суми об'ємів розміщуваних куль. Задача формулюється як задача неопуклої оптимізації з квадратичними обмеженнями та лінійною функцією цілі. Автори пропонують алгоритми, в яких існуючий алгоритм гілок та меж адаптується для узагальненої задачі квадратичного програмування. Для поліпшення характеристик алгоритмів вони доповнюють їх евристичними алгоритмами. Але глобальний оптимізаційний підхід є ефективним тільки за невеликого розміру задачі, що підтверджується обчислювальними експериментами.

Kubach та ін. [223,224] запропонували ефективні алгоритми для розміщення нерівних куль у кубоїді. Автори розглядають дві постановки задачі: 3-D SKP та 3-D SODP (для кубоїда з фіксованими розмірами і кубоїда із змінною висотою). Алгоритми ґрунтуються на простій стратегії попереднього перегляду варіантів розміщення та паралельних жадібних алгоритмах, розроблених у роботі [139]. Автори адаптують їх для 3D задач із важливими вдосконаленнями (method B1.6_3DSPP). Створено вражаючу базу тестових прикладів, якими мають можливість користуватися інші дослідники для порівняння результатів. У роботі досліджується компроміс між якістю розв'язків та часом, необхідним для розрахунку.

Akeb [225] для розв'язання 3-D SKP розробляє алгоритм, заснований на комбінації двохетапної стратегії попереднього перегляду варіантів та методу Kubach та ін. [226]. У роботі [227] аналогічний метод пропонується для розв'язання 3-D SODP.

У статті [228] розробляється гібридний алгоритм ELPGD для розміщення нерівних куль у великому сферичному контейнері. Цей алгоритм ґрунтується на поліпшеному методі (energy landscape paving method), в якому

використовується процедура градієнтного спуску. В роботі [229] пропонується алгоритм розміщення нерівних куль у кулі на основі "пошуку із заборонами" (tabu search) та стратегії quasi-human basin-hopping і методу Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno.

Li та Ji [230] моделюють гранульовані матеріали як розміщення куль у циліндрі. Автори пропонують спеціальний квазі-динамічний метод для отримання щільно розподілених куль у замкнутому контейнері. Крім того, Farr [231] вивчає коефіцієнти заповнення логнормально розподілених щільних розміщень куль для імітаційного моделювання гранульованих та мезоскопічних систем. У таких системах властивості матеріалу залежать від коефіцієнта заповнення об'єму складовими частинками. Автор пропонує розв'язувати задачу за допомогою спеціального одновимірної алгоритму, який дозволяє прогнозувати коефіцієнта заповнення. Soontrapa та Chen [232] використовують процес розміщення куль для моделювання атомів вуглецю. Вони розробляють адаптивну процедуру випадкового пошуку для отримання конфігурацій куль, в яких загальна потенційна енергія досягає глобального мінімуму.

Hifi та Yousef [233] розробляють декілька методів для розв'язання 3-D SKP та 3-D SODP, комбінуючи ітеративні методи, зокрема дихотомічний пошук, пошук екстремуму (hill-climbing) та ін. Автори підкреслюють важливість деякої гібридизації, пов'язаної зі стратегіями, особливо, коли комбінується пошук на зрізаному дереві та локальний пошук на дереві.

І нарешті, в нещодавній публікації Hifi та Yousef [234] розробляють гібридну стратегію для 3-D SKP. Автори застосовують метод, заснований на локальному пошуку, який складається з трьох етапів: процедури вибору найкращої локальної позиції, етапу інтенсифікації та етапу диверсифікації (розширення). На першому етапі відбувається пошук початкового розміщення за допомогою основної локальної стратегії (жадібного алгоритму). На другому етапі робляться спроби розмістити набір додаткових куль. На третьому етапі відбувається вилучення деяких розміщених куль та

заміна цих куль іншими. Запропонований метод адаптується для розв'язання 3-D SODP: розв'язується послідовність задач 3-D SKP та здійснюється дихотомічний пошук. Ефективність алгоритмів підтверджується обчисленням тестових прикладів та порівнянням з відомими методами.

Задачі розміщення 3D-об'єктів (зокрема, куль) у контейнерах з урахуванням обмежень поведінки, які забезпечують баланс розглянутої системи, досліджуються в роботі [235].

1.5 Задачі розміщення гіперкуль ($d \geq 4$)

Дослідження задач щільного розміщення гіперкуль ($d \geq 4$) також пов'язано з практичними застосуваннями. Такі задачі виникають при чисельному оцінюванні інтегралів як на сферичній поверхні, так і всередині сфери [236], в цифрових комунікаціях та зберіганні інформації (в тому числі компакт-диски, мобільні телефони, Інтернет, аналого-цифрові перетворення та стиснення даних), в задачах кодування, в d -вимірній кристалографії, в фізиці (дуалістична теорія та теорія суперструн) [236,237], при дослідженні геометричних (геометрична фрустрація), механічних, електромагнітних властивостей тіл [238-240]. Це можуть бути рідини, колоїди, скло, суспензії, гранульовані матеріали тощо. Вивчення таких властивостей у просторах розмірностей $d \geq 4$ є теоретичною основою для перевірки запропонованих моделей у тривимірному випадку. Розміщення куль важливе й у біологічних контекстах і зустрічаються при вивченні ДНК в ядрі клітини, “скупченості” макромолекул у живих клітинах, розміщенні клітин для формування тканин спіральних структур у рослинних пагонах і квітках (філотаксис) та конкурентному врегулюванні територій. Розуміння симетрії та інших математичних властивостей щільних розміщень куль у різних просторах викликає постійний інтерес в дискретній геометрії та теорії чисел [240].

Задачі HSOA знайшли застосування при розв'язанні проблем цифрового зв'язку, зокрема при розробці системи сигналів для каналної передачі з шумом і при проектуванні аналого-цифрових перетворювачів

[241]. Одна з головних задач при здійсненні цифрового зв'язку полягає в побудові набору закодованих символів, або кодових слів, які можна передати з максимальною надійністю за мінімальних витрат енергії. Кодові слова подані у вигляді восьмирозрядних символів, у кожному розряді якого стоїть одне з п'яти різних значень: 0, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$, -1. За ідеальних умов (відсутності завад) така система забезпечує передачу $5^8 = 390625$ різних кодових слів. Однак деякі пари цих слів настільки мало відрізняються, що при передачі в системі можуть виникнути випадкові помилки або електричні завади. Наприклад, кодові слова (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) і (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$) мало відрізняються й одне слово може бути прийнято за інше. Таким чином, якщо два кодових слова мало різняться, то потрібні дуже великі витрати енергії, щоб гарантувати розрізнення цих слів за наявності фоновому шуму.

Розрізняваність кодових слів і кількість енергії, необхідна для їх надійної передачі, пов'язані спільним математичним співвідношенням, яке вперше формулюється в 1948 році Shannon [242]. Автор показує, що за будь-якого фіксованого значення енергії завжди існує така система кодових слів, яка може бути передана практично без помилок.

Один із способів наблизитися до співвідношення Shannon полягає в тому, щоб подати кожен сигнал як деяку точку d -вимірного простору. Такий код є скінченною множиною сигналів, які називаються кодовими словами. Якщо кожне кодове слово є послідовністю трьох дискретних рівнів напруги, то цю послідовність можна зобразити точкою тривимірного простору: перша координата цієї точки дорівнює числовому значенню першого рівня напруги, друга – значенням другого рівня й т.д. (рис. 1.18 а-г).

Енергія, необхідна для передачі кожного імпульсу, пропорційна квадрату напруги, тому повна енергія, необхідна для передачі одного кодового слова, дорівнює сумі квадратів трьох дискретних напруг, що утворюють це кодове слово. Зазначена сума дорівнює квадрату відстані від початку координат до точки тривимірного простору, якій відповідає це кодове слово. Таким чином, проблема мінімізації витрат енергії еквівалентна

задачі розміщення всіх точок, що задають кодові слова, якомога ближче до початку координат. З іншого боку, необхідність вміти розрізняти кодові слова вимагає, щоб відповідні їм точки в просторі не знаходилися одна від іншої ближче, ніж на деякій мінімальній відстані l . Одночасне виконання цих двох вимог геометрично еквівалентно пошуку найбільш щільного розміщення гіперкуль радіуса $l/2$ в гіперкулі з центром у початку координат (рис. 1.19).

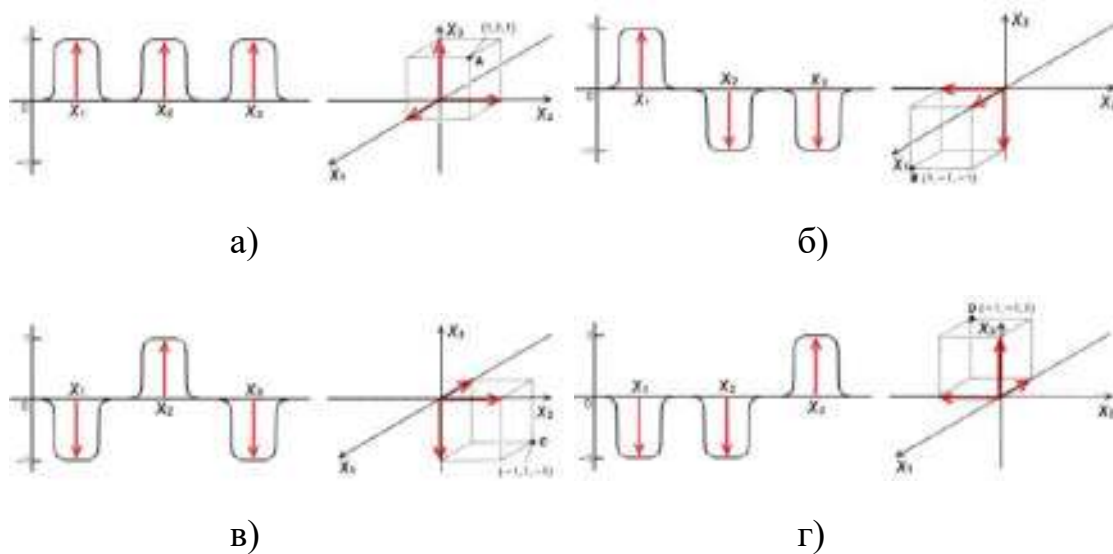


Рис. 1.18. Приклад зображення кодового слова в тривимірному просторі [241]

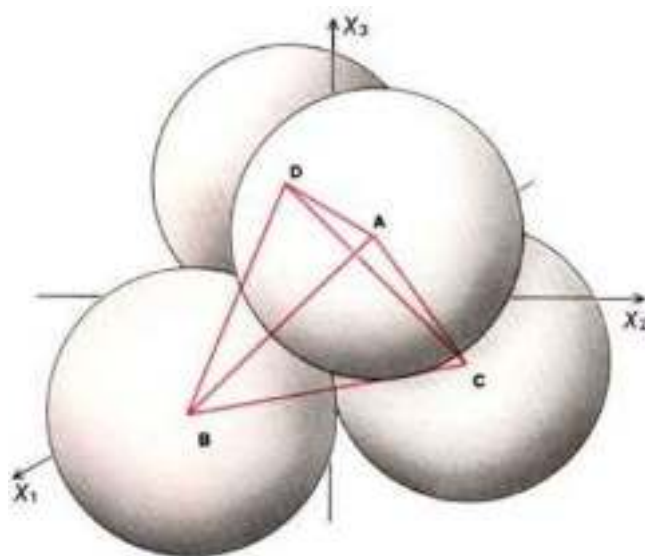


Рис. 1.19. Еквівалентна задача розміщення гіперкуль [241]

Термін геометрична фрустрація, який характерний тілам, означає явище, при якому властивості кристалічного ґратчастого розміщення через наявність протидіючих міжатомних сил роблять неможливою одночасну мінімізацію енергії взаємодії в заданому місці. Однією з дуже цікавих властивостей розміщення в просторах більшої розмірності є можливість виникнення випадково розміщених гіперкуль, що формують "заклиністі" стани замість кристалоподібних. Такі стани важливі при дослідженні особливостей кристалів, скла, гранульованих середовищ і біологічних систем, а також з математичної точки зору. "Заклиністі" розміщення характерні тим, що кожна гіперкуля торкається з необхідною кількістю інших гіперкуль, забезпечуючи певний рівень механічної стійкості. Рух однієї гіперкулі викликає відповідний рух усіх інших. Прикладом "заклиністого" стану є розміщення, які відповідають локальним екстремумам в задачі ODP. За такого стану щільність розміщення не може бути збільшена локально. Дослідження моделювання з використанням методів Monte-Carlo та молекулярної динаміки показали, що двовимірні круги (диски) легко реорганізуються в упорядкований гексагональний стан, оскільки щільність збільшується зі збільшенням щільності рідини. Натомість збільшення щільності гіперкуль у рідинному середовищі спричиняє перехід у "заклиністий" стан.

Властивості термодинамічної рівноваги систем щільно розміщених 4D- та 5D-гіперкуль вивчаються в [243]. Найбільш важливими властивостями є коефіцієнт щільності розміщення (packing fraction) та контактне число (kissing number Z) – максимальна кількість контактів однієї гіперкулі з іншими гіперкулями [236]. Коефіцієнт щільності розміщення n рівних гіперкуль радіусу r розмірності d можна обчислити за формулою

$$\tau = \frac{nV_d}{V_c},$$

де V_c – об'єм контейнера,

$$V_d = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} r^{2k}, & \text{якщо } d = 2k, \\ \frac{2 \cdot k! (4\pi)^k}{(2k+1)!} r^{2k+1}, & \text{якщо } d = 2k+1. \end{cases}$$

Найбільша можлива щільність розміщення $\tau = \pi / \sqrt{18} \approx 0.7404$ для розмірності $d=3$ доведена Hales [189] для гексагональної ґратчастого розміщення, кількість контактів гіперкуль $Z = Z_{\max} = 12$. У роботах [244,245] нещодавно доведено, що для $d=8$ – щільність $\tau = \pi^4/384 \approx 0.2537$, а для $d=24$ – $\tau = \pi^{12}/12! \approx 0.00193$. У просторах розмірності $d \geq 4$, $d \neq 8, 24$, немає теоретичних обґрунтувань щодо максимальної щільності розміщення, тому всі отримані коефіцієнти розглядаються як гіпотези. Для розмірності $d=4$ вважається, що $\tau = \pi^2/16 \approx 0.6168$, $Z = Z_{\max} = 24$ [236,246]. Для $d=5$ – відповідно $\tau = 2\pi^2/(30\sqrt{2}) \approx 0.4652$, $Z = 40$, $40 \leq Z_{\max} \leq 46$ [236]. Далі для $d=6$ – $\tau = 3\pi^3/(144\sqrt{3}) \approx 0.3729$, $Z = 72$, $72 \leq Z_{\max} \leq 82$. Існує припущення, що за великих розмірностей випадкові розміщення гіперкуль можуть мати більшу щільність, ніж упорядковані розміщення [247]. Гіпотетичні значення нижньої межі максимальної щільності менші щільності кращих відомих розміщень для $3 \leq d \leq 56$, але для $d > 56$ може трапитись зворотнє. Із збільшенням розмірності контактне число значно збільшується. В табл. 1.1. подані відомі значення нижньої та верхньої оцінок контактного числа Z залежно від вимірності простору для $d \geq 7$.

Для отримання нерегулярних розміщень гіперкуль можна використовувати випадкове послідовне додавання [248]. Для отримання більш щільних розміщень слід застосовувати алгоритми стиснення [249] або алгоритми масштабування [250].

Важливі дослідження щільності "заклиністих" станів при розміщенні гіперкуль для $d = 4, 5, 6$ проводять Scoge, Torquatto та ін. [238]. Вони вводять поняття максимально неупорядкованого заклиністого стану. Виявляється, що

для $d = 4, 5, 6$ відповідні значення коефіцієнтів щільності – 0.46, 0.31 та 0.2 відповідно. Вони досліджують властивості рівноважного стану розміщень, зокрема при переході з рідкого до твердого стану речовини для $d = 4, 5$ і спостерігають тенденцію до кристалізації (ґратчастого розміщення) з ростом розмірності.

Таблиця 1.1

Верхня та нижня оцінки контактного числа [247]

d	Нижня оцінка Z	Верхня оцінка Z
7	126	134
8	240	
9	306	364
10	500	554
11	582	870
12	840	1 357
13	1 154	2 069
14	1 606	3 183
15	2 564	4 866
16	4 320	7 355
17	5 346	11 072
18	7 398	16 572
19	10 688	24 812
20	17 400	36 764
21	27 720	54 584
22	49 896	82 340
23	93 150	124 416
24	196 560	

У роботі [251] автори пропонують метод для максимізації нижньої межі щільності розміщення та, використовуючи точну постановку задачі термодинаміки та динаміки простих рідин, отримують оцінку щільності $\tau = 7d2^{-d}$.

1.6 Вибір напрямку дослідження

У другій половині минулого сторіччя виникла теорія геометричного проектування. Задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів належать до класу задач геометричного проектування. В результаті досліджень в цьому напрямі, виконаних під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю.Г. Стояна, створюється математичний апарат функції щільного розміщення та її годографу [94-96], який стає основою для опису множини можливих розв'язків за щільного розміщення об'єктів. Це дозволяє розробити методологію послідовно-одиначного розміщення, основою якої є оптимізація за групами змінних (модифікація методу покоординатного спуску). Послідовні розміщення, відомі ще як послідовне додавання [201,204,248], жадібні алгоритми [139,142,226], дозволяють отримувати наближені розв'язки та допустимі початкові розміщення для задач нерегулярного розміщення об'єктів [97,98]. Розробляються комбінації послідовного-одиначного методу з методом околів, що звужуються, та методом значущих змінних [99-101].

Наступний крок у розвитку оптимального розміщення геометричних об'єктів – введення поняття Ф-функції [102], за допомогою якої формалізуються геометричні відношення геометричних об'єктів. Це стає початком нового етапу математичного моделювання задач розміщення.

Зображення Ф-функції у вигляді структури лінійних нерівностей дозволяє [103] формувати задачі розміщення як задачі математичного програмування. У роботі [252] розглядається задача розміщення кругів та прямокутників з урахуванням мінімально- та максимально допустимих відстаней. Для опису відношень кругів і прямокутників використовуються Ф-функції, задані структурами лінійних і нелінійних нерівностей. Глобальна оптимізація задачі, сформульованої як COPD, виконується методом гілок та меж, а локальна – методом зведеного градієнта. На жаль, метод не дозволяє отримувати гарантований глобальний екстремум, навіть для невеликої

кількості кругів, через неможливість отримати усі розв'язки нелінійних систем рівнянь.

Пошук нових методів для розв'язання задач розміщення кругів нашою нашою ідеєю змінних радіусів кругів, яка вперше реалізується Шміголем В.Г. [253] для пар кругів за невеликої їх кількості. На ґрунті цих досліджень будується новий метод локальної оптимізації для задачі розміщення кругів [252].

Дослідження задач розміщення, в яких вводяться штучні змінні фізико-метричні параметри [254-256], тривають і виконуються колективом учених на чолі з Яковлевим С.В. Математичні моделі та методи розв'язання задач розміщення неорієнтованих тривимірних об'єктів різної просторової форми, в яких використовуються додаткові змінні метричні характеристики, запропоновані в роботах [257-259].

Для моделювання задач розміщення багатовимірних тіл залучається метод Ф-функцій Стояна [260-262]. Однак ці дослідження обмежуються тільки лінійними задачами.

У роботі [260] будується математична модель задачі розміщення гіперпаралелепіпедів (d -вимірних паралелепіпедів) та розробляється метод розв'язання, в основі якого метод гілок та меж. Для пошуку оптимального розв'язку будується зрізане дерево розв'язків.

У [261] набір розміщуваних об'єктів доповнюється d -політопами. Будуються Ф-функції d -паралелепіпедів і d -політопів, удосконалюється математична модель задачі розміщення d -паралелепіпедів у d -паралелепіпеді із змінними метричними характеристиками. Будуються математичні моделі задач розміщення n -паралелепіпедів у d -паралелепіпеді з урахуванням зон заборони та задачі розміщення d -політопів із максимальним коефіцієнтом заповнення. Пропонується метод побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у багатовимірному просторі, який використовується для побудови Ф-функцій d -політопів. Для розв'язання задачі розміщення достатньо великої кількості n -паралелепіпедів розробляється комбінований

метод, який ґрунтується на методі оптимізації за групами змінних і модифікованому методі околів, що звужуються. А для розв'язання оптимізаційної задачі розміщення n -політопів додатково залучається симплекс-метод.

З огляду на дослідження задач розміщення гіперкуль різної вимірності, які виконані в світі, можна зробити висновок, що більша частина алгоритмів та методів є евристичними. Запропоновані моделі та методи орієнтовані здебільшого на дуже вузький клас задач, тобто незначна зміна вихідних даних, наприклад вимірності задачі, просторової форми контейнера або введення додаткових обмежень (наприклад, зон заборони), робить неможливим використання розроблених методів.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень задач геометричного проектування й спрямована на створення єдиної методології, яка дозволяє розв'язувати задачі розміщення гіперкуль різної вимірності та орієнтована на сучасні методи геометричного проектування й розв'язувачі для задач лінійного та нелінійного програмування.

В рамках розробки методології розглядаються декілька напрямів дослідження задач HSOA. В першу чергу, це – підвищення ефективності розв'язування задач великої розмірності (large-scale problems). Основними факторами, які впливають на розмірність задачі, є кількість розміщуваних гіперкуль та вимірність простору, в якому розглядаються гіперкулі. Для охоплення більш широкого кола прикладних задач слід розширити множину просторових форм контейнерів і виконати аналітичний опис умов розміщення гіперкуль у довільному контейнері. Інший напрям досліджень – розробка принципово нових методів і стратегій розв'язування HSOA, зокрема введення додаткових змінних метричних характеристик гіперкуль та контейнера. Важливим є створення нових методів побудови допустимих початкових розміщень, як універсальних, так і орієнтованих на конкретну постановку задачі. Пріоритетним напрямом є застосування розроблених

методів і алгоритмів для розв'язання прикладних задач, в яких треба враховувати додаткові фактори й технологічні обмеження.

1.7 Висновки за розділом 1

Перший розділ дисертації присвячений огляду існуючих математичних моделей та підходів до розв'язання задач за темою дисертації та визначенню напрямів дослідження. Розглянуті практичні застосування задач оптимального розміщення кругів, куль та гіперкуль у різних галузях науки та техніки, зокрема комп'ютерне моделювання в матеріалознавстві, порошковій металургії, газо- та нафтодобувній промисловості, ядерній енергетиці та нанотехнологіях; оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва; інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів, теорія кодування, сучасні задачі, які виникають в біології та медицині, тощо.

Задачі HSOA є NP-складними й багатоекстремальними. Більшість розроблених методів для їх розв'язання є евристичними, заснованими на жадібних, генетичних алгоритмах, алгоритмах імітаційного відпалу, мурашиних алгоритмах та алгоритмах, в яких використовуються фізико-механічні моделі. Деякі автори комбінують класичні оптимізаційні моделі та методи й евристики. Зазвичай публікації присвячено дво-, та тривимірним задачам. Для задач розміщення довільної розмірності ($d \geq 4$) вивчаються здебільшого геометричні властивості, випадкові розміщення гіперкуль, робляться оцінки коефіцієнта заповнення. Збільшення вимірності простору призводить до значного збільшення контактів гіперкуль за їх щільного розміщення та до значного зменшення коефіцієнта заповнення контейнера. Точні методи розв'язання запропоновані тільки для задач з лінійною функцією цілі та лінійними обмеженнями (розміщення гіперпрямокутників та d -політопів).

Методи розв'язання задач розміщення динамічно розвиваються. Це зумовлено появою сучасних методів нелінійної оптимізації, які значно

підвищують надійність, швидкість і точність пошуку розв'язків та можуть бути реалізовані за допомогою пакетів програм для пошуку як локальних, так і глобальних екстремумів. Але, як показали дослідження, ефективність застосування пакетів програм залежить від способів побудови математичних моделей та особливостей методів розв'язання. Безпосереднє використання навіть самих потужних розв'язувачів для глобальної оптимізації дозволяє отримати розв'язки тільки для невеликої кількості об'єктів ($n \leq 15$). Тому виникає необхідність у розробці методології математичного та комп'ютерного моделювання процесу оптимального розміщення гіперкуль, яка ґрунтується на сучасних досягненнях теорій геометричного проектування та математичного програмування.

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЙНОГО РОЗМІЩЕННЯ ГІПЕРКУЛЬ (HSOA). МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІДНОШЕНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

У другому розділі формулюються положення, необхідні для побудови математичної моделі HSOA, зокрема описується подання інформації про геометричні об'єкти, визначення задач геометричного проектування, поняття ϕ -об'єкта, Φ -функції та псевдонормалізованої Φ -функції в арифметичному d -вимірному евклідовому просторі. Будується математична модель HSOA та математичні моделі її основних реалізацій згідно з міжнародною класифікацією C&P: задачі із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP) та задачі, сформульованої як задача про рюкзак (KP). Досліджуються особливості математичних моделей. Визначаються типи контейнерів та зон заборони. Пропонуються Φ -функції гіперкуль (у тому числі круга та кулі) та геометричних об'єктів за різної вимірності простору: $2D$, $3D$ та dD ; псевдонормалізована Φ -функція двох гіперкуль.

2.1 Задачі геометричного проектування

Задачі геометричного проектування пов'язані з обробкою геометричної інформації. Геометрична інформація g про точкову множину (геометричний об'єкт) S [263] складається з таких елементів:

- сукупності просторових форм $\{s\}$;
- набору метричних характеристик $\{m\}$, які, зокрема, визначають розміри просторових форм $\{s\}$;
- параметрів розміщення $\{v\}$, які задають місцеположення точкової множини S .

Якщо задані всі три компоненти геометричної інформації, тоді відповідний геометричний об'єкт S є точковою підмножиною певного

метричного простору H . Таким чином, геометрична інформація g індукує об'єкт S у просторі H .

Змінні параметри називаються незалежними змінними інформації g і позначаються як $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Нехай інформація $g = (\{s\}, \{m\}, \{v\})$ індукує точкові множини в метричному просторі H , а $g^* = (\{s^*\}, \{m^*\}, \{v^*\})$ – у метричному просторі H^* , причому компоненти $\{s\} \neq \emptyset$ і $\{s^*\} \neq \emptyset$, де $\emptyset$ – порожня множина.

Відображення вигляду

$$g^* = P(g),$$

де P – оператор, називається задачею геометричного проектування.

Оптимізаційною задачею геометричного проектування називається задача геометричного проектування, в якій вектор незалежних змінних $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ визначається як розв'язок задачі оптимізації деякого функціоналу $\Xi(u)$.

Як математичні моделі задач геометричного проектування використовуються ϕ -об'єкти [264,265].

Непорожня точкова множина $S \subset \mathbb{R}^d$, $d=2,3$, називається ϕ -об'єктом, якщо

- а) S – канонічно замкнена або канонічно відкрита [266] множина;
- б) внутрішність $(\text{int } S)$ і замикання $(cl \ S)$ множини S мають однаковий гомотопічний тип [267,268].

Як ϕ -об'єкти у просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$, у роботі розглядаються гіперкуля $S = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u - u_0\|^2 \leq r^2\}$ гіперпрямокутник

$$HR = \{u \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_k \leq h_k, k = 1, 2, \dots, d\}.$$

гіперциліндр

$$HC = \{ u \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 \leq \rho^2, 0 \leq x_k \leq h_k, k = 3, 4, \dots, d \}.$$

й опуклий d -політоп

$$DP = \{ u \in \mathbb{R}^d : A_{1m}x_1 + A_{2m}x_2 + \dots + A_{dm}x_d + B_m \geq 0, m = 1, 2, \dots, M \},$$

де

$$A_{1m}x_1 + A_{2m}x_2 + \dots + A_{dm}x_d + B_m = 0, m = 1, 2, \dots, M, -$$

нормальні рівняння гіперплощин, яким належать його гіперграні, M – кількість граней.

2.2. Метод Φ -функцій Стояна

Однією з найбільш важливих проблем при моделюванні задач геометричного проектування, зокрема задач розміщення, є опис взаємного розташування пари ϕ -об'єктів (в подальшому – об'єкти).

Нехай задані обмежені замкнені ϕ^* -об'єкти $A, B \subset \mathbb{R}^d$. При розташуванні об'єктів A та B один відносно іншого можливі такі ситуації:

– об'єкти A та B перетинаються, тобто $\text{int } A \cap \text{int } B \neq \emptyset$, де $\text{int } A$ – внутрішність множини A ;

– об'єкти A та B не мають спільних точок, тобто $A \cap B = \emptyset$ й об'єкти знаходяться на деякій відстані один від іншого;

– об'єкти A та B дотикаються, тобто $\text{fr } A \cap \text{fr } B \neq \emptyset$ та $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$, де $\text{fr } A$ – межа множини A .

Для опису цих ситуацій у $\mathbb{R}^2$ [102] введено Φ -функцію, визначення якої можна розповсюджується для простору $\mathbb{R}^d$.

Неперервна, всюди визначена функція $\Phi^{AB} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^1$, називається Φ -функцією об'єктів $A(u_A)$ та $B(u_B)$, де u_A та u_B – параметри розміщення об'єктів A та B відповідно, якщо вона задовольняє такі вимоги:

$$\begin{aligned} \Phi^{AB}(u_A, u_B) &< 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) \neq \emptyset, \\ \Phi^{AB}(u_A, u_B) &= 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset \\ &\text{та } \text{fr}A(u_A) \cap \text{fr}B(u_B) \neq \emptyset, \\ \Phi^{AB}(u_A, u_B) &> 0, \text{ якщо } \text{cl}A(u_A) \cap \text{cl}B(u_B) = \emptyset. \end{aligned}$$

Для моделювання обмежень на допустимі відстані між геометричними об'єктами введено поняття нормалізованої Φ -функції [102].

Φ -функція $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між об'єктами $A(u_A)$ та $B(u_B)$ за умови

$$(u_A, u_B) \in G = \left\{ (u_A, u_B) \in \mathbb{R}^{2d} : \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset \right\},$$

тобто

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &= \text{dist}(A(u_A), B(u_B)), \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset, \\ \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &< 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

де

$$\text{dist}(A(u_A), B(u_B)) = \min_{x_A \in A, x_B \in B} \text{dist}(x_A, x_B) -$$

евклідова відстань між множинами.

Позначимо через

$$\gamma^{AB} = \left\{ (u_A, u_B) \in \mathbb{R}^{2d} : \Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0 \right\}$$

поверхню 0-рівня Φ -функції.

Для опису Φ -функції достатньо зафіксувати положення одного з об'єктів на початку системи координат і виконати неперервні трансляції іншого об'єкта таким чином, щоб об'єкти дотикалися. Тоді Φ -функцію можна записати

$$\Phi^{AB}(v_A, v_B) = \Phi^{AB}(v_A - v_B, 0) = \Phi^{AB}(0, v_B - v_A) \quad \forall (v_A, v_B),$$

а поверхню 0-рівня Φ -функції – як

$$\gamma^{AB} = \left\{ v \in \mathbb{R}^d : \Phi^{AB}(0, v) = 0 \right\}.$$

Ця множина конгруентна ($\simeq$) межі суми Мінковського [269] двох об'єктів, тобто $\gamma^{AB} \simeq frT$, де $T = A(0) \oplus (-B(v))$ – сума Мінковського множин $A(0)$ та $-B(v)$. Сума Мінковського двох множин визначається як

$$A \oplus B = \{x + y \in \mathbb{R}^d : x \in A, y \in B\}.$$

Множина $\gamma^{AB} = \left\{ v \in \mathbb{R}^d : \Phi^{AB}(0, v) = 0 \right\}$ називається також годографом функції щільного розміщення [270].

В деяких випадках побудова нормалізованих Φ -функцій є досить складною процедурою. Тому для моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані між об'єктами використовуються вільні від радикалів псевдонормалізовані Φ -функції [206].

Неперервна, всюди визначена функція $\hat{\Phi}^{AB} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^1$, називається псевдонормалізованою Φ -функцією об'єктів $A(u_A)$ та $B(u_B)$, якщо вона задовольняє такі вимоги:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &> 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) > \rho, \\ \hat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &= 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) = \rho, \\ \hat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &< 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) < \rho.\end{aligned}$$

2.3 Постановка задачі HSOA та її основні реалізації

2.3.1 Математична модель задачі HSOA

Задача HSOA. Нехай є гіперкулі

$$S_i = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|X - u_i\|^2 \leq r_i^2\},$$

де $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ – вектор координат центра, r_i – радіус гіперкулі S_i , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, та контейнер $A(\mu) \subset \mathbb{R}^{d+k}$, де $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик контейнера. У контейнері $A(\mu)$, загалом, можуть бути присутні зони заборони P_k , $l \in I_p = \{1, 2, \dots, n_p\}$, – опуклі об’єкти, межа яких утворюється сферичною, циліндричною та плоскою поверхнями. Розглянемо множину $C(\mu) = A(\mu) \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l)$, яка є областю розміщення. Необхідно розмістити гіперкулі з набору $\{S_i, i \in I_n\}$, в області $C(\mu)$ таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I$, тобто

$$d_{ij} = \text{dist}(S_i(u_i), S_j(u_j)) = \min_{a \in S_i(u_i), b \in S_j(u_j)} \rho(a, b),$$

де $\rho(a, b)$ – евклідова відстань між точками $a, b \in \mathbb{R}^d$, а функція цілі (критерій якості) $\kappa(\omega)$ досягала свого екстремального значення.

Математична модель HSOA може бути записана в такий спосіб:

$$\omega^* = (u^*, \mu^*, t^*) = \arg \min_{\omega \in W \subset (\mathbb{R}^{nd+k} \times B^n)} \kappa(\omega), \quad (2.1)$$

де $\omega = (u, \mu, t)$ – вектор змінних;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор координат центрів гіперкуль;

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ – вектор двійкових змінних: $t_i \in B = \{0, 1\}$,

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W = \{\omega \in (\mathbb{R}^{nd} \times B^n): t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I, g_q(\omega) \geq 0, q \in I_q = \{1, 2, \dots, Q\}\}; \quad (2.2)$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2 - \quad (2.3)$$

псевдонормалізована Φ -функція гіперкуль S_i та S_j , $i < j \in I$;

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int } C(\mu)$,

$\Phi_i(u_i, \mu) = \min\{\Phi_{i0}^c(u_i, \mu), \Phi_{il}^c(u_i), l \in I_p\}$, $i \in I_n$;

$\Phi_{i0}^c(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $A^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int } A(\mu)$,

$i \in I_n$;

$\Phi_{il}^c(u_i)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та об'єкта P_l , $i \in I_n$, $l \in I_p$;

$g_q(\omega) \geq 0$, $q \in I_q$, – додаткові обмеження; $g_q(\omega)$, $q \in I_q$ – неперервно

диференційовані функції, додаткові обмеження на параметри розміщення гіперкуль та метричні характеристики області розміщення $C(\mu)$.

Досліджено основні особливості задачі HSOA:

- область допустимих розв'язків W , загалом, є незв'язною множиною з багатозв'язними компонентами зв'язності;

- якщо Φ -функції, які описують область допустимих розв'язків W , містять оператори максимумів, вона може бути подана як

$$W = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_t,$$

де множини W_t описуються системами двічі неперервно диференційованих функцій;

- кількість змінних задачі (2.1)–(2.3) оцінюється як $O(n)$, а кількість нерівностей, які описують область W , – як $O(n^2)$.

Залежно від конкретної постановки HSOA (2.1)–(2.3) може бути записана як задача із змінними метричними характеристиками (розміром) контейнера (Open Dimension Problem – ODP) або задача, сформульована як задача про рюкзак (Knapsack Problem – KP) [109]. У задачі ODP необхідно розмістити всі гіперкулі із заданого набору, а змінні метричні характеристики виступають як незалежні змінні. Функція цілі – розмір контейнера, який мінімізується. Задача KP пов'язана з вибором підмножини гіперкуль із заданого набору. Функцією цілі є коефіцієнт щільності заповнення контейнера, який максимізується. У випадку розміщення нерівних гіперкуль задача еквівалентна максимізації об'єму розміщених гіперкуль, а у випадку рівних гіперкуль – їх кількості.

2.3.2 Математична модель задачі ODP (Open Dimension Problem)

Задача ODP. Нехай є гіперкулі S_i з радіусами r_i , $i \in I_n$ та область розміщення $C(\mu) = A(\mu) \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l) \subset \mathbb{R}^{d+k}$, де $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик опуклого контейнера $A(\mu)$. Необхідно розмістити гіперкулі S_i , $i \in I_n$, в області $C(\mu)$ таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I_n$, а функція цілі $\zeta(u, \mu)$ досягала мінімального значення.

Математична модель (2.1)–(2.3) для задачі ODP набуває вигляду

$$(u^*, \mu^*) = \arg \min_{(u, \mu) \in W_{ODP} \subset \mathbb{R}^{nd+k}} \zeta(u, \mu), \quad (2.4)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор координат центрів гіперкуль;

$$W_{ODP} = \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^{nd+k} : \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i > j \in I, \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, i \in I_n, g_q(u, \mu) \geq 0, q \in I_q\}; \quad (2.5)$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2, i < j \in I_n; \quad (2.6)$$

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $C^* = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int } C$;

$g_q(u, \mu) \geq 0, q \in I_q$, – додаткові обмеження на параметри розміщення гіперкуль та метричні характеристики контейнера, $g_q(u, \mu)$ – двічі непервно диференційовані функції.

Нерівність $\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$, забезпечує розміщення гіперкуль S_i та S_j ($\text{int } S_i \cap \text{int } S_j = \emptyset$) на мінімально допустимій відстані d_{ij} , $i, j \in I_n$, а нерівність $\Phi_i(u_i) \geq 0, i \in I_n$, – включення гіперкуль S_i в область розміщення $C(\mu)$.

Вигляд функції $\Phi_i(u_i)$ залежить від типу контейнера. В дисертаційній роботі як контейнер розглядаються гіперкуля (круг, куля), гіперпрямокутник (прямокутник, кубоїд, прямокутний гіперпаралелепіпед, d -ортотоп [271]), гіперциліндр (прямий круговий циліндр), опуклий d -політоп (многокутник, багатогранник). Для $d = 2, 3$ розглядаються зони заборони у вигляді кругів ($d = 2$), куль, прямих кругових циліндрів, опуклих прямих призм, опуклих багатогранних кутів ($d = 3$).

Розглянемо основні особливості задачі (2.4)–(2.6).

1. Кількість змінних задачі – $nd + k$, а кількість нерівностей, які описують область допустимих розв'язків, – $n + C_n^2 + Q$.

2. Матриці Якобі й Гесса функцій, які описують обмеження, є сильно розрідженими. У міру того, як розмірність збільшується (див. табл. 1.1), кількість активних обмежень значно зростає.

3. Область допустимих розв'язків W_{ODP} , загалом, є незв'язною множиною [272,273], тобто W_{ODP} можна записати в такий спосіб:

$$W_{ODP} = \bigcup_{l=1}^{\eta} D_l.$$

За певних співвідношень розмірів гіперкуль та контейнера може виникнути багатозв'язність при розміщенні в просторах розмірності $d \geq 3$. Наприклад, при розміщенні двох куль S_1 та S_2 з однаковим радіусом $r_1 = r_2 = r$ у кубоїді з прямокутною основою $a \times b$ незв'язність виникає за умови $(a - 2r)^2 + (b - 2r)^2 < 4r^2$.

Розглянемо дві точки $\omega_a, \omega_b \in W_{ODP}$, які відповідають розміщенням куль, зображеним на рис. 2.1 а та рис. 2.1 б. Зрозуміло, що немає можливості перейти від точки ω_a до точки ω_b , не виходячи за межі кубоїда, або не накладаючи кулі S_i та S_j (рис. 2.2 в). Маємо, що $W_{ODP} = D_1 \cup D_2$, $\omega_a \in D_1$, $\omega_b \in D_2$.

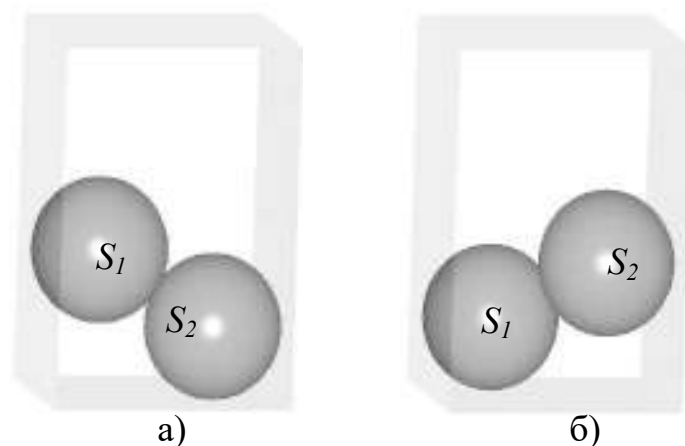


Рис. 2.1. Приклад незв'язності області допустимих розв'язків для $d = 3$

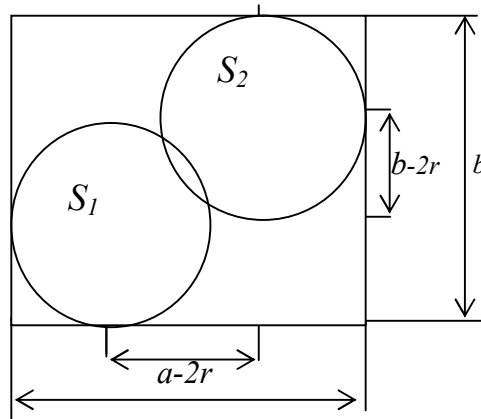


Рис. 2.2. Приклад накладання куль (вигляд зверху)

4. Якщо Φ -функції, які описують область допустимих розв'язків D , містять оператори максимумів, вона може бути подана як

$$W_{ODP} = \bigcup_{t=1}^{\eta} D_t,$$

де множини D_t описуються системами двічі неперервно диференційованих функцій.

Точка $\omega \in W_{ODP}$ називається крайньою точкою області W_{ODP} , якщо для будь-якого її околу $N(\omega)$ існує гіперплощина H , така що

$$W_{ODP} \cap N(\omega) \cap H = \{\omega\}.$$

Для крайньої точки умова

$$\omega \in \{ \theta \omega_1 + (1 - \theta) \omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \in W_{ODP}, \theta \in (0, 1) \} \subset W_{ODP}$$

виконується тільки, якщо $\omega = \omega_1 = \omega_2$. Ілюстрація крайньої точки – на рис. 2.3.

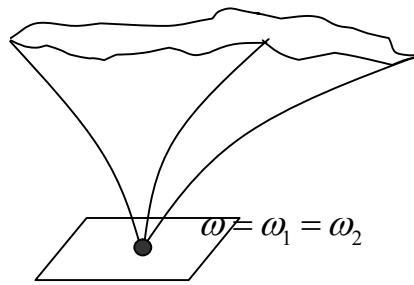


Рис. 2.3. Ілюстрація крайньої точки області W_{ODP}

5. Якщо межа контейнера складається із поверхонь (ліній, гіперповерхонь), які описуються лінійними та обернено опуклими функціями, то мінімум лінійної функції цілі знаходиться в крайніх точках області W_{ODP} , що є розв'язком системи з $nd + k$ рівнянь, які описують межу W_{ODP} . Цей факт випливає з аналізу необхідної та достатньої умов оптимальності в задачах [274]. У випадку, коли присутні опуклі обмеження, в крайніх точках можуть бути активними й менше, ніж $nd + k$ нерівностей, які описують область W_{ODP} .

Точка $\omega^* \in W_{ODP}$ є точкою строгого мінімуму (максимуму) задачі (2.4)–(2.6), якщо існує ε -окіл $N(\omega^*, \varepsilon)$, такий що $\zeta(\omega^*) < \zeta(\omega)$ ($\zeta(\omega^*) > \zeta(\omega)$) за будь-якого $\omega \in N(\omega^*, \varepsilon) \cap W_{ODP}, \omega \neq \omega^*$. Точка $\omega^* \in W_{ODP}$ є точкою нестрогого мінімуму (максимуму) задачі (2.4)–(2.6), якщо існує ε -окіл $N(\omega^*, \varepsilon)$, такий що $\zeta(\omega^*) \leq \zeta(\omega)$ ($\zeta(\omega^*) \geq \zeta(\omega)$) за будь-якого $\omega \in N(\omega^*, \varepsilon) \cap W_{ODP}$, та ω^* не є точкою строго локального мінімуму (максимуму).

Розглянемо точку ω^* області W_{ODP} , яка описується системою $nd + k$ рівнянь (активних нерівностей). Розв'язком лінійної системи рівнянь

$$\text{grad } \zeta(\omega^*) = A(\omega^*)^T \lambda^*,$$

де A – яacobіан системи рівнянь, ϵ вектор множників Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{nd+k}^*)$. Умова $\lambda_i^* > 0, i=1, 2, \dots, nd+k$, є необхідною та достатньою умовою строгого локального мінімуму задачі (2.4)–(2.6) у точці ω^* [274]. Якщо принаймні один з множників дорівнює нулю, то має місце нестрогий екстремум або стаціонарна точка.

Розміщення кругів, які відповідають строгому та нестрогому мінімуму функції цілі, показані на рис. 2.4,а та 2.4,б відповідно.

Для кожної точки нестроного екстремуму ω^* (рис. 2.4 б) завжди існує принаймні одна крайня точка $\tilde{\omega}^* \in W_{ODP}$, для якої $\zeta(\tilde{\omega}^*) = \zeta(\omega^*)$ (рис. 2.4 в). Розміщення гіперкуль, за якого кожна з них торкається принаймні або d інших гіперкуль або, $d-1$ інших гіперкуль та однієї поверхні, що утворює межу області розміщення $C(\mu)$, або $d-2$ інших гіперкуль та двох поверхонь, що утворюють межу $C(\mu)$, і т.д., або d поверхонь, що утворюють межу, відповідає крайній точці. На рис. 2.5 показана ілюстрація розміщень куль у кубоїді, які відповідають крайнім точкам, для випадку $d=3$: куля торкається трьох інших куль (рис. 2.5,а), або двох інших куль та грані кубоїду (рис. 2.5,б), або кулі та двох граней кубоїду (рис. 2.5,в), або трьох граней кубоїду (рис. 2.5,г).

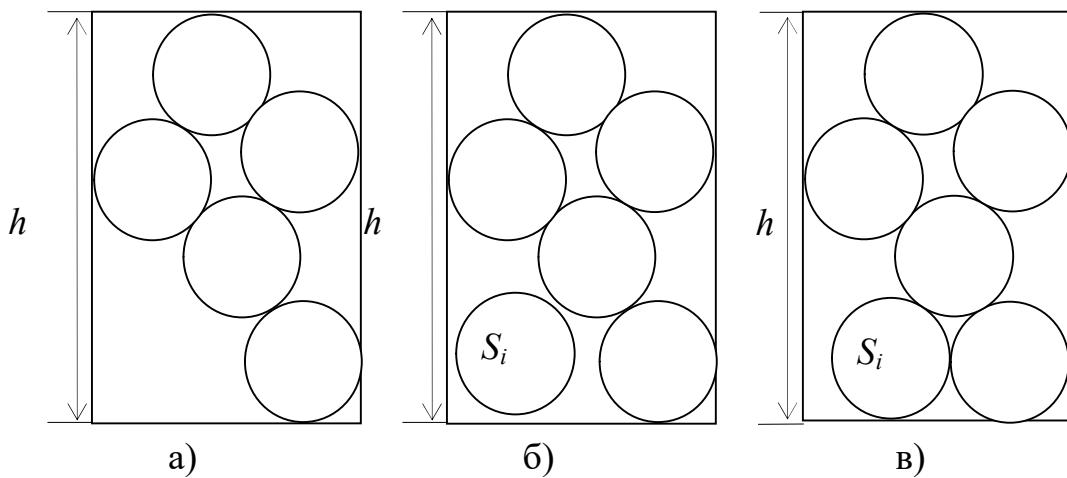


Рис. 2.4. Розміщення кругів, які відповідають строгому та нестрогому мінімумам

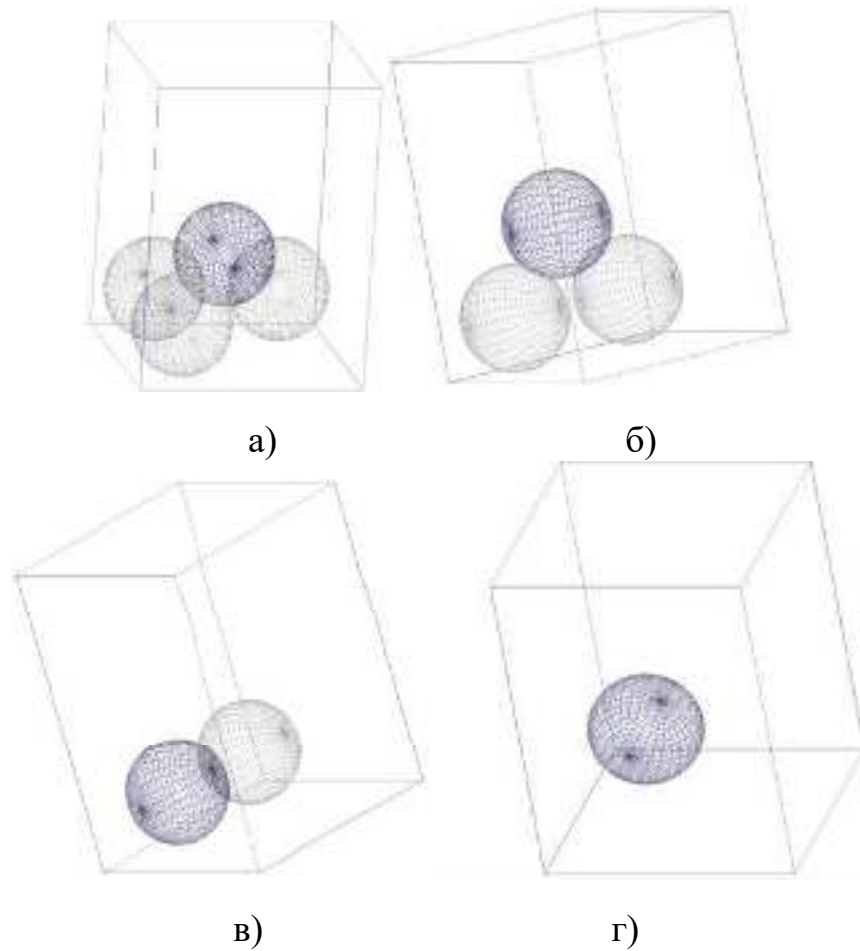


Рис. 2.5. Розміщення куль, які відповідають крайнім точкам

2.3.3 Математична модель задачі КР (Knapsack Problem)

Задача КР. Нехай задані гіперкулі S_i з радіусами r_i , $i \in I_n$, та область розміщення $C = A \setminus \text{int}(\cup_{l \in I_p} P_l)$. Необхідно розмістити гіперкулі з набору S_i , $i \in I_n$, в області C таким чином, що виконуються обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I_n$, а коефіцієнт заповнення області C є максимальним. Іншими словами, треба знайти координати центрів гіперкуль з максимальною сумою d -вимірних об'ємів.

Математична модель (2.1)–(2.3) для задачі КР набуває вигляду

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u, t) \in W_{KP} \subset (\mathbb{R}^{nd} \times B^n)} \Psi(u, t), \quad (2.7)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$;

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^n r_i^d t_i,$$

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W_{KP} = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{nd} \times B^n) : t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n, g_q(u, t) \geq 0, q \in I_q\}; (2.8)$$

$$\Phi_i(u_i) = \min \{\Phi_{i0}^c(u_i), \Phi_{il}^c(u_i), l \in I_p\}$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2. (2.9)$$

У математичній моделі (2.7)–(2.9) нерівність $\Phi_i(u_i) \geq 0$ забезпечує розміщення гіперкулі S_i , $i \in I_n$, в області C ; двійкова змінна t_i показує, чи знаходиться гіперкуля S_i в C ; нерівність $\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ гарантує розміщення гіперкуль S_i та S_j на мінімально допустимій відстані d_{ij} , $i < j \in I_n$; $g_q(u, t) \geq 0$, $q \in I_q$, – додаткові обмеження.

Розглянемо основні властивості задачі (2.7)–(2.9).

1. Задача (2.7)–(2.9) є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування (mixed-integer non-linear programming – MINLP) [275]: змінні t_i , $i \in I_n$, є двійковими, а змінні u_i , $i \in I_n$, – неперервними;

2. Функція цілі $\Psi(u, t)$ – кусково-стала через присутність множників t_i та пропорційна сумі d -вимірних об'ємів гіперкуль, які розміщуються в контейнері ($t_i = 1$).

3. Якщо всі гіперкулі з набору S_i , $i \in I_n$, розміщуються в контейнері, то функція $\Psi(u, t)$ досягає глобального максимуму $\Psi^* = \sum_{i=1}^n r_i^d$.

4. Локальні та глобальні максимуми, загалом, є нестрогими.

5. Кожному $t \in B^n$ відповідає деякий набір гіперкуль, для яких частина значень $t_i = 1$, а решта – $t_i = 0$, $i \in I_n$. Тоді множина $W^t = \{u \in \mathbb{R}^{dn} : (u, t) \in W_{KP}\}$

задає всілякі допустимі розміщення гіперкуль, для яких $t_i = 1$, $i \in I_n$, в області C .

6. Кількість обмежень, які описують множину W^t , – не більше ніж C_n^2 й визначається числом пар компонентів у наборі $t \in B^n$, одночасно не рівних нулю.

7. У випадку, коли всі гіперкулі S_i , $i \in I_n$, мають однаковий радіус, задача КР розглядається як задача розміщення рівних гіперкуль (ПРР). Кількість елементів $t_i = 1$, $i \in I_n$, відповідає кількості рівних гіперкуль.

Очевидно, що здійснення перебору всіх 2^n елементів $t \in B^n$ та визначення точки $u^t \in W^t$ для кожної множини W^t будуть означати розв'язання задачі (2.7)–(2.9).

Математичні моделі (2.4)–(2.6) та (2.7)–(2.9) можуть мати додаткові властивості залежно від вимірності гіперкуль, просторової форми області розміщення, наявності додаткових обмежень, особливостей метричних характеристик гіперкуль.

2.4 Моделювання відношень гіперкуль в задачах HSOA

Об'єкти розміщення – гіперкулі різної вимірності $S_i \subset \mathbb{R}^d$, $i \in I_n$, $d \geq 2$. Для опису допустимих розміщень гіперкуль у контейнері (моделі (2.4)–(2.6) та (2.7)–(2.9)) використовується Φ -функції: Φ -функція пари гіперкуль має вигляд: $\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2$. Розглянемо Φ -функції гіперкулі та геометричних об'єктів у арифметичних евклідових просторах розмірності $d = 2$, $d = 3$ та $d \geq 4$.

2.4.1 Моделювання відношень кругів та 2D об'єктів

У роботі як контейнер у двовимірному просторі розглядаються прямокутник $R2$, круг $C2$ та опуклий багатокутник $P2$. Контейнер може мати зони заборони: круг $C2$ та опуклий багатокутник $P2$.

Нехай є круг $S_i = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$ з радіусом r_i , $u_i = (x_i, y_i)$, $i \in I_n$, – координати центра круга. Контейнер – прямокутник $R2$ з розмірами $l \times w$, нижній правий кут якого знаходиться в початку координат системи XOY

$$R2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w \}.$$

Умову розміщення круга S_i у прямокутнику $R2$ можна задати за допомогою Φ -функції круга S_i та об'єкта $R^* = cl(C(R2)) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(R2)$ [276]

$$\Phi^{SR}(x_i, y_i) = \min \{ x_i - r_i, y_i - r_i, l - x_i - r_i, w - y_i - r_i \} \geq 0. \quad (2.10)$$

Якщо як контейнер вибирається круг $C2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho \}$ з радіусом ρ , центр координат якого знаходиться на початку координат, то умова розміщення круга в контейнері описується за допомогою Φ -функції круга S_i та об'єкта $C^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(C2)$ [276]:

$$\Phi^{SC}(x_i, y_i) = -x_i^2 - y_i^2 + (\rho - r_i)^2 \geq 0. \quad (2.11)$$

Тепер розглянемо контейнер – опуклий багатокутник

$$P2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A_m x + B_m y + C_m \geq 0, m = 1, 2, \dots, M \},$$

де $A_m x + B_m y + C_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, M$, – нормальні рівняння прямих, яким належать його сторони, M – кількість сторін. Φ -функцію круга S_i та об'єкта $P^* = cl(C(P2))$ має вигляд [276]

$$\Phi^{SP}(x_i, y_i) = \min \{ A_m x_i + B_m y_i + C_m, m = 1, 2, \dots, M \}, \quad (2.12)$$

а умову розміщення круга S_i в багатокутнику $P2$ – нерівністю $\Phi^{SP}(x_i, y_i) \geq 0$.

Умову неперетину круга S_i та багатокутника $P2$ описано в [276].

2.4.2 Моделювання відношень куль та 3D об'єктів

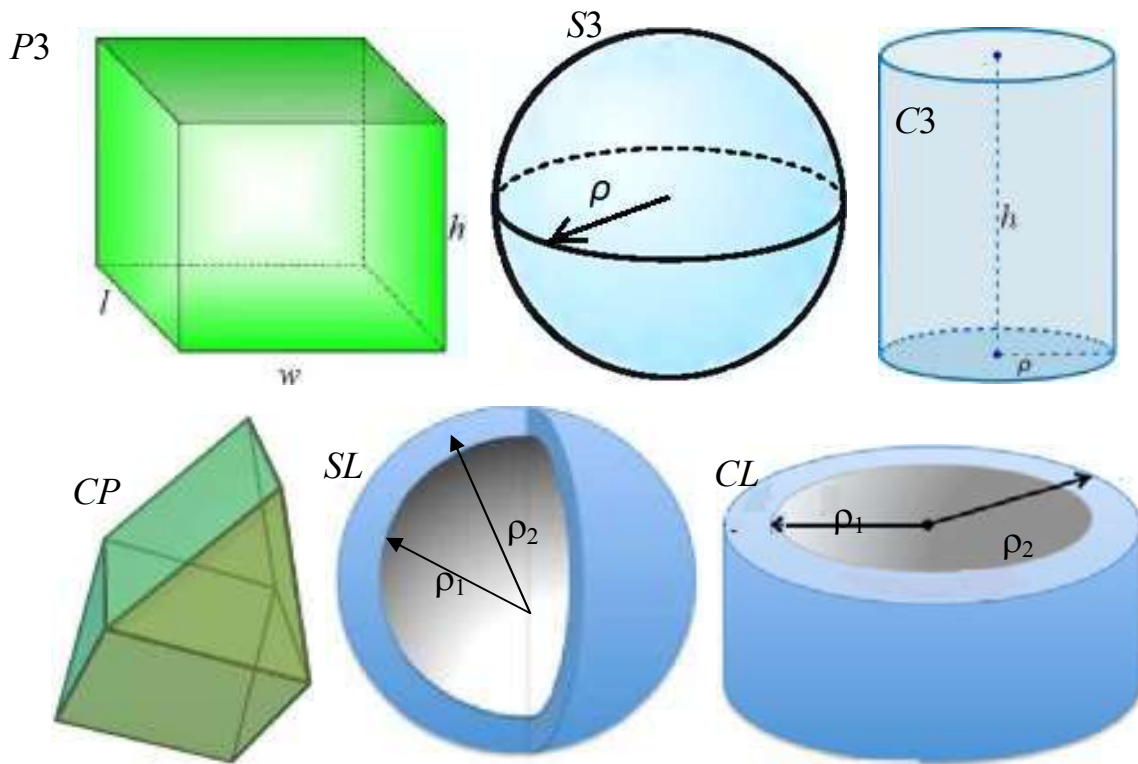
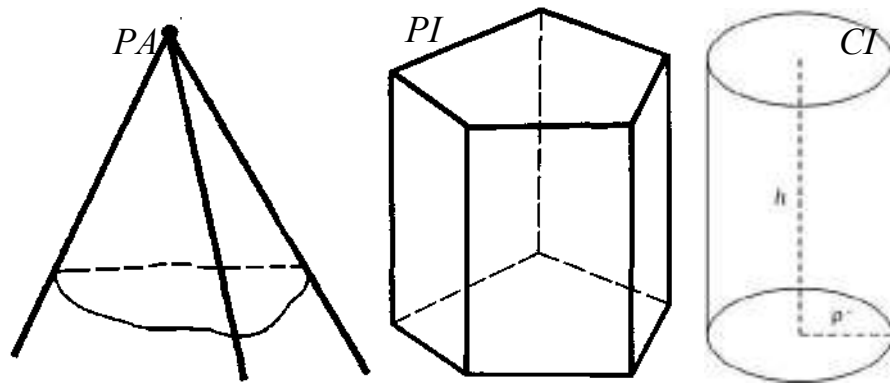
Розглядаються контейнери таких просторових форм: прямокутний паралелепіпед (кубоїд) $P3$, куля $S3$, прямий круговий циліндр $C3$, опуклий багатогранник CP (рис. 2.6). Контейнер може мати зони заборони у вигляді опуклих багатогранних кутів PA , нескінченних опуклих багатогранних призм PI , прямих кругових циліндрів CI (рис. 2.7) та куль. Контейнер із зонами заборони є областю розміщення. Якщо куля $S3$ має одну зону заборони – кулю (центри куль співпадають), то отримуємо кульовий шар SL (рис. 2.6). Якщо куля $C3$ має одну зону заборони – циліндр (осі циліндрів співпадають, основи циліндрів знаходяться в одній площині), то отримуємо концентричний циліндр CL (рис. 2.6).

Для побудови умов розміщення куль в зазначених геометричних об'єктах використовуються Φ -функції кулі S_i , $i \in I_n$, та множини $O^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int}(O)$, де O – $P3$, $S3$, $C3$, SL , CP або CL і Φ -функції кулі S_i , $i \in I_n$, та об'єктів PA , PI , CI . За фіксованих параметрів розміщення контейнера Φ -функції будуть залежати тільки від параметрів розміщення кулі S_i , $i \in I_n$.

Нехай ϵ куля $S_i = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, $i \in I_n$, з радіусом r_i , $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – координати центра кулі, та – кубоїд $P3$ з розмірами $l \times w \times h$ (рис. 2.6)

$$P3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w, 0 \leq z \leq h \}.$$

Φ -функція кулі S_i , $i \in I_n$, та об'єкта $P3^*$ записується [105]:

Рис. 2.6. Види областей розміщення в $\mathbb{R}^3$ Рис. 2.7. Види зон заборони у $\mathbb{R}^3$

$$\Phi^{SP3}(x_i, y_i, z_i) = \min (x_i - r_i, y_i - r_i, z_i - r_i, l - x_i - r_i, w - y_i - r_i, h - z_i - r_i). \quad (2.13)$$

Куля S_i і куля $S3 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| \leq \rho\}$ (рис. 2.6).

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта $S3^*$ має вигляд [105]

$$\Phi^{SS3}(x_i, y_i, z_i) = -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (\rho - r_i)^2. \quad (2.14)$$

Куля S_i , $i \in I_n$, й циліндр $C3 = \{ u \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \rho^2, 0 \leq z \leq h \}$ (рис. 2.6).

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта $C3^*$ має вигляд [105]:

$$\Phi^{SC3}(x_i, y_i, z_i) = \min \{ -x_i^2 - y_i^2 + (\rho - r_i)^2, z_i - r_i, h - z_i - r_i \}. \quad (2.15)$$

Куля S_i , $i \in I_n$, й опуклий багатогранник (рис. 2.6)

$$CP = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A_m x + B_m y + C_m z + D_m \geq 0, m = 1, 2, \dots, M \},$$

де $A_m x + B_m y + C_m z + D_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, M$, – нормальні рівняння площин, яким належать його грані, M – кількість граней.

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта CP^* має вигляд [105]

$$\Phi^{SCP}(x_i, y_i, z_i) = \min \{ A_m x_i + B_m y_i + C_m z_i + D_m, m = 1, 2, \dots, M \}. \quad (2.16)$$

Куля S_i , $i \in I_n$, і кульовий шар $SL = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho_2^2 \}$ (рис.2.6).

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта SL^* має вигляд

$$\Phi^{SSL}(x_i, y_i, z_i) = \min \{ x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + (\rho_1 + r_i)^2, -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (\rho_2 - r_i)^2 \}. \quad (2.17)$$

Куля S_i , $i \in I_n$, і циліндричний шар (рис. 2.6)

$$CL = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq \rho_2^2, 0 \leq z \leq h \}.$$

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта CL^* має вигляд

$$\Phi^{SCL}(x_i, y_i, z_i) = \min \{x_i^2 + y_i^2 + (\rho_1 + r_i)^2, -x_i^2 - y_i^2 + (\rho_2 - r_i)^2, z_i - r_i, -z_i - r_i\}. \quad (2.18)$$

Тепер розглянемо Φ -функцію кулі та опуклого багатогранного кута. Нехай ϵ куля $S_i = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, та опуклий багатогранний кут (рис. 2.7).

$$PA = \{u \in \mathbb{R}^3 : a_m x + b_m y + c_m z + d_m \leq 0, m \in N^{PA}\}, N^{PA} = \{1, 2, \dots, n^{PA}\},$$

де n^{PA} – кількість граней.

Вершина $V_0 = (e_0, f_0, h_0)$ багатогранного кута PA знаходиться на перетині площин P_m , які лежать на гранях F_m , та є розв'язком системи рівнянь $a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0, m \in N^{PA}$. Для визначення точки V_0 достатньо вибрати три рівняння із цієї системи.

Прямі L_m , на яких знаходяться ребра E_m багатогранного кута PA , визначаються системами рівнянь

$$\begin{cases} a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0, \\ a_{m+1} x + b_{m+1} y + c_{m+1} z + d_{m+1} = 0, m \in N^{PA} (n^{PA} + 1 = 1). \end{cases}$$

Нехай $V_m = (e_m, f_m, h_m) \neq V_0$ – точки, які належать ребрам E_m , $m \in N^{PA}$, відповідно. Тоді напрямні косинуси прямих L_m визначаються як

$$\xi_m = (\cos \alpha_m, \cos \beta_m, \cos \gamma_m) = \left(\frac{e_0 - e_m}{g_m}, \frac{f_0 - f_m}{g_m}, \frac{h_0 - h_m}{g_m} \right), \quad (2.19)$$

$$\text{де } g_m = \sqrt{(e_m - e_0)^2 + (f_m - f_0)^2 + (h_m - h_0)^2}.$$

Рівняння площин P_m у нормальному вигляді

$$A_m x + B_m y + C_m z + D_m = 0, \quad m \in N^{PA}, \quad (2.20)$$

де

$$A_m = \frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2 + c_m^2}}, \quad B_m = \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2 + c_m^2}}, \quad C_m = \frac{c_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2 + c_m^2}}, \quad D_m = \frac{d_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2 + c_m^2}}.$$

Φ -функція S_i та PA визначається трьома видами взаємодії: кулі S_i й грані F_m ; кулі S_i й ребра E_m та кулі S_i й вершини V_0 . Розглянемо кожний випадок.

Перший вид взаємодії – куля S_i й грань F_m . Використовуючи площини P_m , задані нормальними рівняннями (2.20), записуємо рівняння

$$\Psi_{1m}^{SPA}(u) = A_m x + B_m y + C_m z + D_m - r_i = 0, \quad m \in N^{PA}.$$

Для функції

$$\Psi_1^{SPA}(u_i) = \max\{\Psi_{1m}^{SPA}(u_i), \quad m \in N^{PA}\} \quad (2.21)$$

характерна така властивість: якщо $\Psi_1^{SPA}(r_i, u_i) > 0$, то $PA \cap S_i = \emptyset$.

Другий вид взаємодії – куля S_i й ребро E_m , $m \in N^{PA}$. В цьому випадку точки дотику S_i й E_m утворюють 0-рівень поверхні Φ -функції, яка складається з частини поверхні прямого кругового циліндра C_m з радіусом r_i , вісь якого проходить крізь ребро E_m . Для визначення рівняння цієї поверхні виконаємо додаткові побудови.

Використовуючи формули (2.19), визначимо кути θ_m і γ_m :

$$\cos \theta_m = \frac{\cos \alpha_m}{\sqrt{\cos^2 \alpha_m + \cos^2 \beta_m}}, \quad \sin \theta_m = \frac{\cos \beta_m}{\sqrt{\cos^2 \alpha_m + \cos^2 \beta_m}}, \quad (2.22)$$

$$\sin \gamma_m = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_m}, \quad m \in N^{PA}.$$

Виходячи з рівняння циліндра C

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

та використовуючи (2.22), побудуємо рівняння циліндра C_m , отриманого в результаті повороту C на кут $-\gamma_m$ навколо осі OY , на кут $-\theta_m$ навколо осі OZ та трансльованого на вектор V_0 :

$$\Gamma_{1m}(u) = \left((R_{11}(-\gamma_m, -\theta_m))(u - V_0)^T \right)^2 + \left((R_{12}(-\gamma_m, -\theta_m))(u - V_0)^T \right)^2 - r_i^2 = 0, \quad (2.23)$$

де

$$R_1(\gamma, \theta) = \begin{pmatrix} R_{11}(\gamma, \theta) \\ R_{12}(\gamma, \theta) \\ R_{13}(\gamma, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \theta & -\cos \gamma \sin \theta & \sin \gamma \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \gamma \sin \theta & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Таким чином, отримуємо циліндр, такий що ребро E_m лежить на його осі.

Після цього будуємо точки

$$T_m^0 = (\eta_m^0, \chi_m^0, \xi_m^0) = (r_i A_m, r_i B_m, r_i C_m), \quad (2.25)$$

$$T_{0m} = (\eta_{0m}, \chi_{0m}, \xi_{0m}) = V_0 + T_m^0 = (e_0 + r_i A_m, f_0 + r_i B_m, h_0 + r_i C_m),$$

$$T_m = (\eta_m, \chi_m, \xi_m) = V_m + T_m^0 = (e_m + r_i A_m, f_m + r_i B_m, h_m + r_i C_m).$$

Тоді рівняння площини R_m , яка проходить крізь трійку точок $\{T_{0(m-1)}, T_{0m}, T_m\}$ (2.25), де $T_{0(m-1)}, T_{0m}$ та T_m , такі що площина R_m паралельна до прямої L_m :

$$\Gamma_{2m}(u) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ e_0 + r_i A_{m-1} & f_0 + r_i B_{m-1} & h_0 + r_i C_{m-1} & 1 \\ e_0 + r_i A_m & f_0 + r_i B_m & h_0 + r_i C_m & 1 \\ e_m + r_i A_m & f_m + r_i B_m & h_m + r_i C_m & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

Грунтуючись на функціях $\Gamma_{1m}(u)$ (2.23) та $\Gamma_{2m}(u)$ (2.26), побудуємо функції

$$\Psi_{2m}^{SPA}(u_i) = \min\{\Gamma_{1m}(r_i, u_i), \Gamma_{2m}(r_i, u_i)\}, \quad m \in N^{PA}. \quad (2.27)$$

Неважко перевірити, що якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{2m}^{SC}(u_i) > 0$, $m \in N^{PA}$, то маємо $PA \cap S_i = \emptyset$. Це дозволяє побудувати функцію

$$\Psi_2^{SPA}(u_i) = \max\{\Psi_{2m}^{SPA}(u_i), m \in N^{PA}\}, \quad (2.28)$$

в якої є така властивість: якщо $\Psi_2^{SPA}(u_i) > 0$, то $PA \cap S_i = \emptyset$.

Третій вид взаємодії – куля S_i й вершини V_0 . Точки дотику S_i й V_0 утворюють 0-рівень поверхні Ф-функції, яка складається з частини поверхні сфери S_0 з центром V_0 та радіусом r_i й описується таким рівнянням:

$$W(u) = (x - e_0)^2 + (y - f_0)^2 + (z - h_0)^2 - r_i^2 = 0. \quad (2.29)$$

Для визначення цієї частини побудуємо точки $V_m^1 = V_0 + V_m^0$, де $V_m^0 = (r_i \cos \alpha_m, r_i \cos \beta_m, r_i \cos \gamma_m)$, $m \in N^{PA}$. Неважко побачити, що точки V_m^1 знаходяться на перетині прямих L_m , $m \in N^{PA}$, та сфери S_0 .

Нехай Λ – циліндр, поверхня якого описується рівнянням

$$2x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad (2.30)$$

тобто основа циліндра – еліпс.

Виконаємо поворот точок $T_{m-1}^0 = (\eta_{m-1}^0, \chi_{m-1}^0, \xi_{m-1}^0)$, $T_m^0 = (\eta_m^0, \chi_m^0, \xi_m^0)$ (див. формулу (2.25)), $V_0 = (e_0, f_0, h_0)$ та $V_m = (e_m, f_m, h_m)$ на кут $-\theta_m$ навколо осі OZ та на кут $-\gamma_m$ навколо осі OY :

$$\begin{aligned}
T_{m-1}^0(-\theta_m, -\gamma_m) &= (\eta_m^1, \chi_m^1, \xi_m^1) = ((R_1(-\gamma_m, -\theta_m))(T_{m-1}^0)^T)^T, \\
T_m^0(-\theta_m, -\gamma_m) &= (\eta_m^2, \chi_m^2, \xi_m^2) = ((R_1(-\gamma_m, -\theta_m))(T_m^0)^T)^T, \\
V_0(-\theta_m, -\gamma_m) &= (x_{0m}, y_{0m}, z_{0m}) = ((R_1(-\gamma_m, -\theta_m))(V_0)^T)^T, \\
V_m(-\theta_m, -\gamma_m) &= (x_{1m}, y_{1m}, z_{1m})^T = ((R_1(-\gamma_m, -\theta_m))(V_m)^T)^T, m \in N^{PA}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Тоді кути ϕ_m між прямими S_m , які визначаються парами точок $T_{m-1}^0(-\theta_m, -\gamma_m)$ і $T_m^0(-\theta_m, -\gamma_m)$, та віссю OX визначаються

$$\sin \phi_m = \frac{A_m}{C_m}, \cos \phi_m = \frac{B_m}{C_m}, \quad m \in N^{PA}, \tag{2.32}$$

де

$$A_m = \chi_m^1 - \chi_m^2, \quad B_m = \eta_m^1 - \eta_m^2, \quad C_m = \sqrt{(A_m)^2 + (B_m)^2}.$$

Рівняння циліндру $\Lambda(\frac{\pi}{4})$, який отриманий у результаті повороту циліндра Λ (2.30) на кут $\frac{\pi}{4}$ навколо осі OY , є

$$\Lambda(\frac{\pi}{4}) = \{u \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - z)^2 - r_i^2 = 0\}.$$

Використовуючи це рівняння та відношення (2.19)–(2.21) та (2.31) виконаємо поворот циліндра $\Lambda(\frac{\pi}{4})$ на кути ϕ_m (див. (2.31)) навколо осі OZ , на кути $-\gamma_m$ навколо осі OY , на кути $-\theta_m$ навколо осі OZ та трансляцію на вектор V_0 . У результаті отримаємо рівняння циліндрів $\Lambda_m(\frac{\pi}{4}, \phi_m, -\gamma_m, -\theta_m)$

$$\begin{aligned}
F_m(u) &= \hat{F}_m(u - V_0) = \\
&\left((R_{21}(\phi_m, -\gamma_m, -\theta_m))(u - V_0)^T \right)^2 + \\
&\left((R_{22}(\phi_m, -\gamma_m, -\theta_m))(u - V_0)^T - s_m (R_{23}(\phi_m, -\gamma_m, -\theta_m))(u - V_{0l})^T \right)^2 - r_i^2 = 0, \\
m &\in N^{PA},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

де

$$\begin{aligned}
R_2(\varphi, \gamma, \theta) &= \begin{pmatrix} R_{21}(\varphi, \gamma, \theta) \\ R_{22}(\varphi, \gamma, \theta) \\ R_{23}(\varphi, \gamma, \theta) \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} \cos \phi_m \cos \gamma_m \cos \theta_m + \sin \phi_m \sin \theta_m & -\cos \phi_m \cos \gamma_m \sin \theta_m + \sin \phi_m \cos \theta_m & \cos \phi_m \sin \gamma_m \\ -\sin \phi_m \cos \gamma_m \cos \theta_m + \cos \phi_m \sin \theta_m & -\sin \phi_m \cos \gamma_m \sin \theta_m + \cos \phi_m \cos \theta_m & \sin \phi_m \sin \gamma_m \\ -\sin \gamma_m \cos \theta_m & \sin \gamma_m \sin \theta_m & \cos \gamma_m \end{pmatrix}, \\
s_m &= \begin{cases} 1, \text{ якщо } z_{0m} - z_{1m} > 0, \\ -1, \text{ в іншому випадку,} \end{cases} \\
m &\in N^{PA}.
\end{aligned}$$

Побудуємо рівняння площин H_{ml} , які визначаються трійками точок V_m^1 , $T_{0,(m-1)}$ та T_{0m} :

$$F_{1m}(u) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ e_0 + r_i \cos \alpha_m & f_0 + r_i \cos \beta_m & h_0 + r_i \cos \gamma_m & 1 \\ e_0 + r_i A_{m-1} & f_0 + r_i B_{m-1} & h_0 + r_i C_{m-1} & 1 \\ e_{0l} + r_i A_m & f_{0l} + r_i B_m & h_{0l} + r_i C_m & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad m \in N^{PA}. \tag{2.34}$$

Використовуючи вирази для функцій $W(u)$, $F_m(u)$ та $F_{1m}(u)$, $m \in N^{PA}$, (див. (2.29), (2.33) та (2.34)), побудуємо функції

$$\Psi_{3m}^{SPA}(u_i) = \min\{W(u_i), F_m(u_i), F_{1m}(u_i)\}, \quad m \in N^{PA}.$$

Неважко перевірити, що якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{3m}^{SPA}(u_i) > 0$, $m \in N^{PA}$, то має місце $PA \cap S_i = \emptyset$. Це дозволяє записати функцію

$$\Psi_3^{SPA}(u_i) = \max\{\Psi_{3m}^{SPA}(u_i), m \in N^{PA}\}, \quad (2.35)$$

для якої справедливо твердження: якщо виконується нерівність $\Psi_3^{SPA}(u_i) > 0$, то $PA \cap S_i = \emptyset$.

Тепер, ваховуючи вирази для функцій $\Psi_j^{SPA}(u_i)$, $j=1,2,3$, (див. (2.21), (2.28) та (2.32)), побудуємо функцію

$$\begin{aligned} \Phi^{SPA}(u_i) = \max\{\Psi_p^{SPA}(u_i), p=1,2,3\} = \\ \max\{\Psi_{1m}^{SPA}(u_i), \Psi_{2m}^{SPA}(u_i), \Psi_{3m}^{SPA}(u_i), m \in N^{PA}\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Очевидно, що функція $\Phi^{SPA}(u_i)$ — кусково-гладка та має таку властивість: якщо $\Phi^{SPA}(u_i) > 0$, то $PA \cap S_i = \emptyset$; якщо $\Phi^{SPA}(u_i) = 0$, то $\text{fr } PA \cap \text{fr } S_i \neq \emptyset$ та $\text{int } PA \cap \text{int } S_i = \emptyset$ й якщо $\Phi^{SPA}(u_i) < 0$, то $PA \cap S_i = \emptyset$, тобто функція (2.36) є Φ -функцією для кулі S_i та PA .

Використовуючи Φ -функцію кулі та багатогранного кута, можна побудувати Φ -функції кулі та опуклої призми, кулі та прямого кругового циліндра.

Нехай є куля $S_i = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i \in I_n$, та нескінченна опукла призма (рис. 2.7).

$$PI = \{u \in \mathbb{R}^3 : a_m x + b_m y + c_m z + d_m \leq 0, m \in N^{PI}\}, N^{PI} = \{1, 2, \dots, n^{PI}\},$$

де n^{PI} — кількість граней, причому прями L_m , на яких знаходяться ребра E_m призми PI й які визначаються системами рівнянь

$$\begin{cases} a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0, \\ a_{m+1} x + b_{m+1} y + c_{m+1} z + d_{m+1} = 0, \quad m \in N^{PI} \quad (n^{PI} + 1 = 1), \end{cases}$$

є паралельними.

Враховуючи схему побудови Φ -функції кулі S_i та опуклого багатогранного кута PA та використовуючи функції (2.21) і (2.28), Φ -функцію кулі S_i та опуклої багатогранної призми PI , можна подати в такий спосіб:

$$\Phi^{SPI}(u_i) = \max\{\Psi_p^{SPA}(u_i), p = 1, 2\}, \quad (2.37)$$

тобто використовуються два види взаємодії з трьох, розглянутих для Ψ^{SPA} , а саме: кулі S_i й грані; кулі S_i й ребра PI .

Розглянемо тепер кулю $S_i = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i \in I_n$, та циліндр

$$CI = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \rho^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

Нехай $H = h/2 + r_i$, $R = \rho + r_i$, $\tau = h/2 + R$. Введемо додаткові функції

$$\phi_1(u_i) = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + z_i - \tau, \quad \phi_2(u_i) = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - z_i - \tau,$$

$$\psi_1(u_i) = \sqrt{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \rho\right)^2 + (z_i - h/2)^2} - r_i,$$

$$\psi_2(u_i) = \sqrt{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \rho\right)^2 + (z_i + h/2)^2} - r_i,$$

$$\zeta_k(u_i) = \min\{\psi_k(u_i), \phi_k(u_i)\}, \quad k = 1, 2,$$

$$\zeta(u_i) = \max\{\zeta_k(u_i), k = 1, 2\},$$

$$\chi_1(u_i) = z_i - H, \quad \chi_2(u_i) = z_i + H, \quad \chi_3(u_i) = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - R,$$

$$\chi(u_i) = \max\{\chi_k(u_i), k = 1, 2, 3\}.$$

Тоді Φ -функція S_i та CI записується так [277]:

$$\Phi^{SCI}(u_i) = \max\{\chi(u_i), \zeta(u_i)\}. \quad (2.38)$$

2.4.3 Моделювання відношень гіперкуль та dD об'єктів, $d \geq 4$

Розглянемо відношення гіперкулі $S_i = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$ з радіусом r_i , де $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$, $i \in I_n$, та різних видів контейнерів: гіперкулі HS , гіперпрямокутника HR , гіперциліндра HC , опуклого d -політопа DP .

Гіперкуля S_i , $i \in I_n$, і гіперкуля

$$HS = \{u = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|u\|^2 \leq \rho^2\}$$

з радіусом ρ . Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта HS^* має вигляд

$$\Phi^{SHS}(u_i) = -\|u_i\|^2 + (\rho - r_i)^2. \quad (2.39)$$

Гіперкуля S_i , $i \in I_n$, й гіперпрямокутник

$$HR = \{u \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_k \leq h_k, k = 1, 2, \dots, d\}.$$

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта HR^* має вигляд

$$\Phi^{SHR}(u_i) = \min \{x_{ki} - r_i, h_k - x_{ki} - r_i, k = 1, 2, \dots, d\}. \quad (2.40)$$

Гіперкуля S_i , $i \in I_n$, й гіперциліндр

$$HC = \{u \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 \leq \rho^2, 0 \leq x_k \leq h_k, k = 3, 4, \dots, d\}.$$

Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта HC^* має вигляд

$$\Phi^{SHC}(u_i) = \min \{-x_{1i}^2 - x_{2i}^2 + (\rho - r_i)^2, x_{ki} - r_i, h_k - x_{ki} - r_i, k = 3, 4, \dots, d\}.$$

Гіперкуля S_i , $i \in I_n$, й опуклий d -політоп

$$DP = \{ u \in \mathbb{R}^d : A_{1m}x_1 + A_{2m}x_2 + \dots + A_{dm}x_d + B_m \geq 0, m = 1, 2, \dots, M \},$$

де

$$A_{1m}x_1 + A_{2m}x_2 + \dots + A_{dm}x_d + B_m = 0, m = 1, 2, \dots, M, -$$

нормальні рівняння гіперплощин, яким належать його гіперграні, M – кількість граней. Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта DP^* має вигляд

$$\Phi^{DP}(u_i) = \min \{ A_{1m}x_{1i} + A_{2m}x_{2i} + \dots + A_{dm}x_{di} + B_m, m = 1, 2, \dots, M \}.$$

2.5 Висновки за розділом 2

У другому розділі побудовано математичну модель HSOA та досліджено її реалізації залежно від функції цілі. Описано засоби математичного моделювання відношень між гіперкулями й геометричними об'єктами.

Розглянуто задачі геометричного проектування. Геометрична інформація про об'єкт складається із сукупності просторових форм, набору метричних характеристик та параметрів розміщення.

Розглянуті окремі випадки HSOA: задача із змінними метричними характеристиками (ODP) та задача, сформульована як задача про рюкзак (КР). У задачі ODP змінні метричні характеристики виступають як незалежні змінні. Задача КР пов'язана з вибором підмножини гіперкуль із заданного набору й може бути отримана з ODP шляхом введення додаткових двійкових змінних. Досліджені основні властивості математичних моделей задач ODP та КР.

Для моделювання відношень між об'єктами застосовано метод Φ -функцій Стояна. Розглянуто Φ -функції гіперкулі з об'єктами за різної вимірності простору: $2D$, $3D$ та dD .

Для формалізації умов розміщення кругів у прямокутнику, крузі й опуклому багатокутнику, розміщення куль у прямокутному паралелепіпеді, кулі, прямому круговому циліндрі, опуклому багатограннику, відношень куль і зон заборони у вигляді прямого кругового циліндра використані відомі Φ -функції.

Побудовано Φ -функції для аналітичного опису умов розміщення розміщення кулі в кульовому шарі, концентричному циліндрі та умов неперетину куль і зон заборони, що мають просторову форму прямих кругових циліндрів, опуклих багатогранних кутів та нескінченних опуклих багатогранних призм.

Побудовано Φ -функції для формалізації умов розміщення гіперкулі в гіперкулі, гіперпрямокутнику, гіперциліндрі, опуклому d -політопі, $d \geq 4$.

Результати другого розділу опубліковано у таких роботах: [2-6,16-19,35-38,46-47,49].

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОСНОВНИХ РЕАЛІЗАЦІЙЗАДАЧІ HSOA

У третьому розділі розглядаються математичні моделі основних реалізацій задачі HSOA залежно від вигляду функції цілі, вимірності простору ($2D$ – круг, $3D$ – куля, dD , $d \geq 4$, – гіперкуля), просторової форми контейнера, метричних характеристик розміщуваних гіперкуль та контейнера, додаткових обмежень, зокрема, задач розміщення: нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини; максимальної кількості рівних кругів у крузі з круговими зонами заборони; нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з технологічними обмеженнями; нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою; максимальної кількості рівних куль у контейнері, який є композицією двох циліндрів і кулі; максимальної кількості рівних куль у контейнері з зонами заборони; нерівних гіперкуль у гіперкулі мінімального радіуса; максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі заданого радіуса. Кожна із задач має додаткові особливості, які впливають на вибір методу розв'язання.

3.1. Математичні моделі оптимізаційних задач розміщення кругів

3.1.1 Математична модель задачі ODP для розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини

Нехай задані круги

$$C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (\hat{r}_i)^2 \leq 0\},$$

де $u_i = (x_i, y_i)$, $\hat{r}_i$ – центри координат та радіус круга C_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, відповідно, та прямокутний контейнер

$$P(l) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w\},$$

довжина якого l є змінною (рис. 3.1).

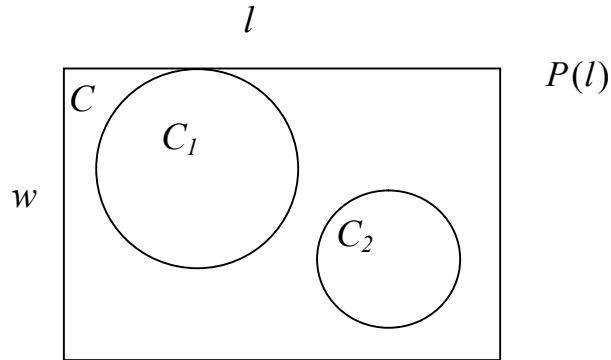


Рис. 3.1. Круги та контейнер

Для зручності впорядкуємо радіуси кругів у порядку зростання

$$\hat{r}_{i_1} \leq \hat{r}_{i_2} \leq \dots \leq \hat{r}_{i_n}, \quad i_k \in I, \quad k \in I, \quad (3.1)$$

та припустимо, що принаймні одна з нерівностей системи (3.1) є строгою: $\hat{r}_{i_k} < \hat{r}_{i_{k+1}}$ $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ визначає положення всіх кругів C_i , $i \in I$, у прямокутнику $P(l)$. У подальшому круг C_i , трансльований на вектор u_i , позначається як $C_i(u_i)$.

Задача ODP для розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини. Знайти вектор u^* , для якого круги $C_i(u_i^*)$, $i \in I$, розміщуються без накладень у прямокутнику $P(l^*)$ з мінімальною довжиною l^* .

Математична модель задачі може бути подана так:

$$l_{global}^* = \min_{\omega=(u,l) \in W \subset \mathbb{R}^{2n+1}} \zeta(\omega), \quad (3.2)$$

де $\zeta(\omega) = l$, $\omega = (u, l)$;

$$W = \{ \omega \in \mathbb{R}^{2n+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, l) \geq 0, i \in I \}; \quad (3.3)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (\hat{r}_i + \hat{r}_j)^2 \text{ (див. (2.3))}; \quad (3.4)$$

Φ -функція $\Phi_i(u_i, l)$ побудована в другому розділі (див. формулу (2.10)).

Таким чином, нерівність $\Phi_i(u_i, l) \geq 0$ еквівалентна системі нерівностей

$$\begin{cases} x_i - \hat{r}_i \geq 0, \\ l - (x_i + \hat{r}_i) \geq 0, \\ y_i - \hat{r}_i \geq 0, \\ w - (y_i + \hat{r}_i) \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Розглянемо особливості задачі (3.2)–(3.5).

1. Відповідно до міжнародної класифікації задач розміщення й розкрою [109] задача належить до класу 2-D CODP.

2. Кількість змінних метричних характеристик контейнера – одна, кількість усіх змінних – $2n + 1$.

3. З урахуванням (3.3) й (3.5) кількість нерівностей, які описують область допустимих розв'язків, – $n(n-1)/2 + 4n$. Нерівності задані лінійними або обернено опуклими функціями.

4. Область допустимих розв'язків W , загалом, є незв'язною множиною.

На рис. 3.1 зображений приклад розміщення кругів, коли область W – незв'язна множина. В цьому прикладі ширина прямокутника $P(l)$ менша за суму діаметрів двох кругів, що розміщуються: $w < 2(r_1 + r_2)$. Якщо неперервно переміщувати круги, не виходячи з прямокутника й не перетинаючи круги між собою, то неможливо, щоб круг S_2 торкнувся лівої сторони прямокутника. Але якщо поміняти місцями круги S_1 та S_2 , то круг S_2 без перешкоди може торкнутися лівої сторони прямокутника.

5. Функція цілі $\zeta(\omega) = l$ є лінійною. Це означає, що її мінімуми знаходяться в крайніх точках області W .

6. З урахуванням п. 2 крайня точка є розв'язком системи $2n + 1$ рівнянь, які описують межу W .

7. Змінна l пов'язана із координатами центрів кругів таким відношенням:

$$l = \max_{i \in I} (x_i + \hat{r}_i),$$

тобто задача (3.2)–(3.4) еквівалентна задачі

$$l_{global}^* = \min_{u \in W' \subset \mathbb{R}^{2n}} \max_{i \in I} (x_i + \hat{r}_i),$$

де

$$W' = \{u \in \mathbb{R}^{2n} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i) \geq 0, i \in I\},$$

$$\Phi_i(u_i) = \min \{x_i - \hat{r}_i \geq 0, y_i - \hat{r}_i \geq 0, w - (y_i + \hat{r}_i)\}.$$

Однак, незважаючи на зменшення розмірності на одиницю, цю задачу не можна розв'язувати градієнтними методами через нелінійність функції цілі та функції $\Phi_i(u_i)$.

Внаслідок того, що задача (3.2)–(3.5) є *NP*-складною, відомі алгоритми та пакети глобальної оптимізації можуть бути застосовані тільки для невеликої кількості кругів (див., наприклад, [134,160,252]). Таким чином, для розробки ефективних методів розв'язання потрібен принципово новий підхід.

3.1.2 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі з зонами заборони

Нехай ϵ область розміщення

$$\bar{C} = cl\left(C / \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right)\right) \neq \emptyset,$$

де

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - R^2 \leq 0\} - \text{контейнер};$$

$$S_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - \bar{x}_j)^2 + (y - \bar{y}_j)^2 - \rho_j^2 \leq 0\} - \text{зони заборони},$$

які є кругами з радіусами ρ_j та координатами центрів $\bar{u}_j = (\bar{x}_j, \bar{y}_j)$, $j \in J = \{1, 2, \dots, N\}$, а також набір рівних кругів C_i з радіусами $r_i = r$, $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, де n – натуральне число, більше за максимальну кількість кругів, що можуть бути розміщені в області $\bar{C}$ (рис. 3.2). Його можна визначити, виходячи з максимально можливої щільності розміщення кругів $\pi / \sqrt{12}$ [278]

$$n = \left\lceil \frac{S(\bar{C})}{r_i^2 \sqrt{12}} \right\rceil + 1,$$

де $S(\bar{C})$ – площа області $\bar{C}$.

Розміщення кругів C_i у просторі $\mathbb{R}^2$ визначається координатами їх центрів $u_i = (x_i, y_i)$, $i \in I_n$

Задача КР для розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі з круговими зонами заборони. Необхідно знайти максимальну кількість кругів $\lambda^* < n$ з набору C_i , $i \in I_n$, та вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_{\lambda^*}) \in \mathbb{R}^{2\lambda^*}$ параметрів розміщення, за якого ці круги розміщуються в області $\bar{C}$ без накладень.

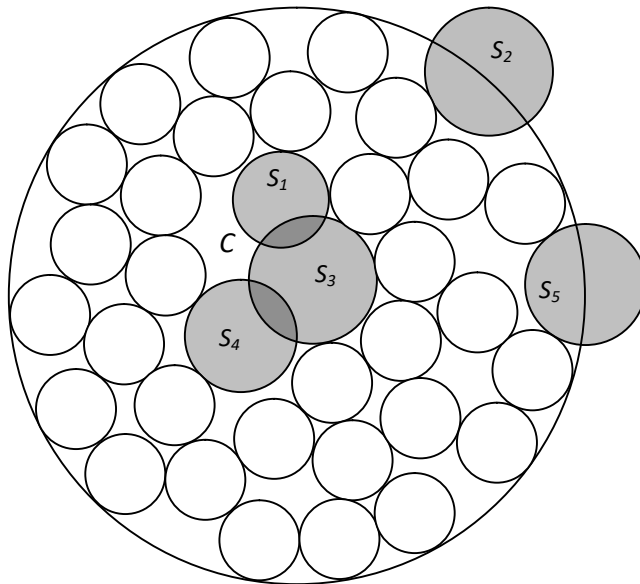


Рис. 3.2. Ілюстрація контейнера, зон заборони та розміщуваних кругів

Математичну модель задачі можна подати як окремий випадок загальної моделі KP (див. (2.7)–(2.9)). З урахуванням того, що круги C_i , $i \in I_n$, рівні, тобто важливою є тільки кількість розміщених кругів, модель (2.7)–(2.9) еквівалентна такій моделі:

$$\lambda^* = \max_{u \in M} \sum_{i \in I_n} \Psi_i(u_i), \quad (3.6)$$

де

$$\Psi_i(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i \in I_n; \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Phi_i(u_i) = \min \left\{ x_i^2 + y_i^2 - (R - r)^2, (x_i - \bar{x}_k)^2 + (y_i - \bar{y}_k)^2 - (r + \rho_k)^2, k \in J \right\}; \quad (3.8)$$

$$M = \left\{ u \in \mathbb{R}^{2n} : \Psi_i(u_i) \Psi_j(u_j) \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - 4r^2 \right) \geq 0, i < j \in I_n \right\}. \quad (3.9)$$

Розглянемо особливості математичної моделі (3.6)–(3.9).

1. Згідно з міжнародною класифікацією задача належить до класу 2-D ПРР.

2. Область розміщення $\bar{C}$, загалом, може бути незв'язною множиною з багатозв'язними компонентами. Приклад незв'язної області розміщення показаний на рис. 3.3.

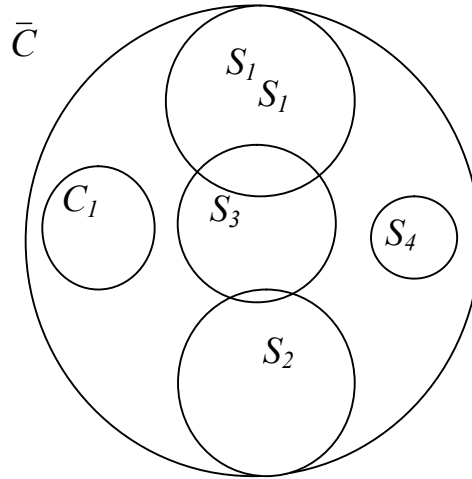


Рис. 3.3. Приклад незв'язної області розміщення

3. Межа області розміщення описується опуклою (круг C) й обернено опуклими (кругові зони заборони) кривими.

4. Область допустимих розв'язків M , загалом, є незв'язною множиною. Незв'язність виникає, наприклад, коли сума радіусів трьох кругів, що розміщуються, більше, ніж радіус круга C (рис. 3.4).

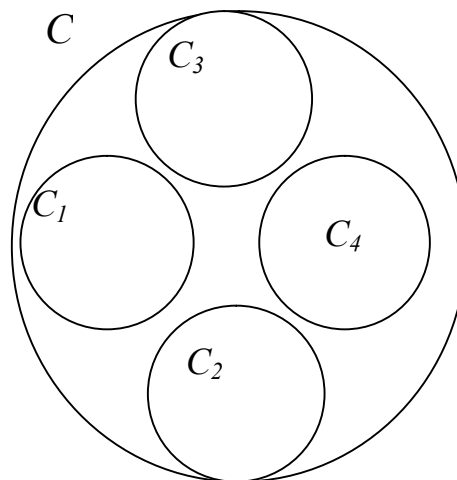


Рис. 3.4. Приклад задачі розміщення кругів з незв'язною областю допустимих розв'язків M

5. Функція цілі $\Psi(u) = \sum_{i \in I_n} \Psi_i(u_i)$ є кусково-сталою, значення функції – натуральні числа (кількість розміщуваних кругів), тобто використання градієнтних методів для пошуку локальних екстремумів є неможливим.

6. Нерівність $\Phi_i(u_i) \geq 0, i \in I_n$ еквівалентна системі $N + 1$ нерівностей

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 - (R - r)^2 \geq 0, \\ (x_i - \bar{x}_k)^2 + (y_i - \bar{y}_k)^2 - (r + \rho_k)^2 \geq 0, k \in J. \end{cases}$$

Перша нерівність описується опуклою функцією, а решта нерівностей – обернено опуклими функціями.

7. Область M описується нерівностями з обернено опуклими функціями. Кількість нерівностей дорівнює $n(n - 1) / 2$.

Задачу (3.6)–(3.9) можна звести до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі. Задля цього використовується ідея змінних метричних характеристик: вважаємо, що радіуси r_i кругів C_i , $i \in I_n$, є змінними. Побудуємо таку послідовність задач:

$$X^{\lambda*} = \arg \max_{X^{\lambda} \in D_{\lambda} \subset \mathbb{R}^{3\lambda}} \sum_{i=1}^{\lambda} F_{\lambda}(X^{\lambda*}), \lambda = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

де

$$X^{\lambda} = (v^{\lambda}, u^{\lambda}), v^{\lambda} = (r_1, r_2, \dots, r_{\lambda}), u^{\lambda} = (u_1, u_2, \dots, u_{\lambda}); \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} D_{\lambda} = \{ & X^{\lambda} \in \mathbb{R}^{3\lambda} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I_{\lambda} = \{1, 2, \dots, \lambda\}, \\ & \Phi_{ik}^a(r_i, \rho_k, u_i, \bar{u}_k) \geq 0, i \in I_{\lambda}, k \in J, \Phi_i(r_i, u_i) \geq 0, i \in I_{\lambda}, \\ & r - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I_{\lambda} \}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2, 0 < i < j \in I_{\lambda};$$

$$\Phi_{ik}^a(r_i, \rho_k, u_i, \bar{u}_k) = (x_i - \bar{x}_k)^2 + (y_i - \bar{y}_k)^2 - (r_i + \rho_k)^2, i \in I_{\lambda}, k \in J;$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = x_i^2 + y_i^2 - (R - r_i)^2, \quad i \in I_\lambda.$$

Зазначимо основні властивості задач (3.10)–(3.12).

1. Область допустимих розв'язків D_λ визначається лінійними й квадратичними нерівностями.

2. Завдяки лінійності функції цілі $F_\lambda(X^\lambda)$ локальні максимуми задачі (3.10)–(3.12) знаходяться в крайніх точках області D_λ .

3. Значення радіусів кругів належать сегменту $[0, r]$, тобто не можуть бути більше за початкові значення.

4. Якщо для деякого λ маємо $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то розв'язку задачі (3.10)–(3.12) відповідає розміщення λ кругів у області $\bar{C}$ і точка $u \in M$ задачі (3.6)–(3.9).

5. Якщо для деякого λ маємо $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda+1)r$ та $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то точка $X^{\lambda*} = (v^{\lambda*}, u^{\lambda*})$ відповідає розміщенню $\lambda = \lambda^*$ в області $\bar{C}$. При цьому λ^* – розв'язок задачі (3.6)–(3.9). Але на практиці внаслідок неможливості отримати, загалом, точку глобального максимуму задачі (3.10)–(3.12), глобальний максимум задачі (3.6)–(3.9) можна отримати тільки теоретично. Тому, якщо $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda+1)r$ – локальний максимум задачі (3.10)–(3.12), а $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то $\lambda^* = \lambda$ можна вважати апроксимацією до глобального максимуму задачі (3.6)–(3.9).

3.1.3 Математична модель задачі КР для розміщення нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з максимальним коефіцієнтом заповнення

Задача розміщення нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з обмеженнями на мінімально допустимі відстані між кругами та обмеженням

на кількість різних радіусів виникає при оптимізації просторової форми виробу в адитивних технологіях (3D-друці).

Нехай є K груп кругів з радіусами $\hat{r}_k$, $k \in I_K = \{1, 2, \dots, K\}$. Для зручності значення $\hat{r}_k$ розташовані в зростаючому порядку. Кожна група складається з n_k кругів. Загальна кількість кругів – $n = \sum_{k=1}^K n_k$. Позначимо круги як C_i , $i=1, 2, \dots, n_1, n_1+1, \dots, n_1+n_2, \dots, n$. Тоді $S = \{C_i, i \in I_n\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, – множина всіх кругів. Радіуси кругів C_i : $r_i = \hat{r}_1$ для $i=1, 2, \dots, n_1$; $r_i = \hat{r}_2$ для $i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$; ...; $r_i = \hat{r}_K$ для $i=n-n_K+1, n-n_K+2, \dots, n$. Нехай $u_i = (x_i, y_i)$ – координати центру круга C_i , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ визначає розміщення всіх кругів C_i ($i \in I_n$) у $\mathbb{R}^2$. Нехай задана область розміщення

$$C = \bigcup_{q=1}^Q P_q, \quad P_q \cap P_s = \emptyset, \quad p, q \in I_q = \{1, 2, \dots, Q\}, \quad p < q,$$

де P_q – опуклий багатокутник (рис. 3.5):

$$P_q = \{u \in \mathbb{R}^2 : A_{mq}x + B_{mq}y + C_{mq} \geq 0, \quad m=1, 2, \dots, M_q\}, \quad q \in I_q,$$

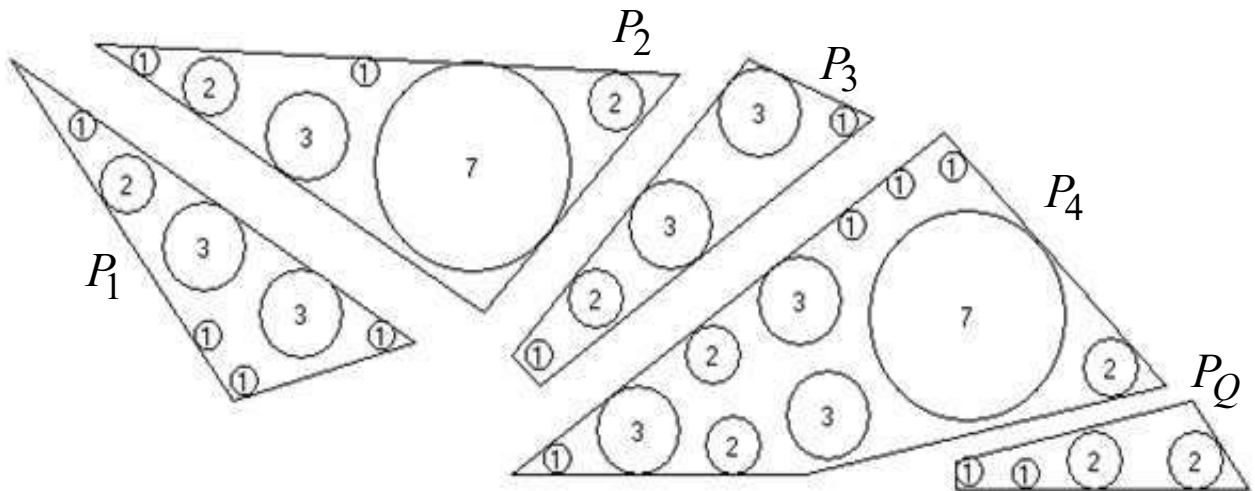


Рис. 3.5. Область розміщення та круги

де $A_{mq}x + B_{mq}y + C_{mq} = 0$, $m=1,2,\dots,M_q$, $q \in I_q$, – нормальні рівняння відповідних сторін. Між кожною парою кругів S_i та S_j , $i, j \in I_n$, $i > j$, задана мінімальна допустима відстань d , яка є технологічним обмеженням. Кількість різних радіусів кругів – не більше, ніж задане значення μ .

Задача полягає в виборі такої підмножини кругів з множини S , які можуть бути розміщені в області C з максимальною щільністю та обмеженнями на мінімально допустимій відстані d між кругами, та належать μ ($\mu \leq K$) групам кругів: $r_i = \hat{r}_k$, $k \in I_\mu \subset I_K$, де $I_\mu = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\mu\}$.

З урахуванням (2.5)–(2.7) та (2.12) математична модель задачі записується в такий спосіб:

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u,t) \in W \subset (\mathbb{R}^{2n} \times B^n)} \Psi(u, t), \quad (3.13)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in B^n$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$;

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^n r_i^2 t_i; \quad (3.14)$$

$$W = \{(u, t) \in \mathbb{R}^{2n} \times B^n : t_i t_j \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n\}; \quad (3.15)$$

$$\Phi_i(u_i) = \max_{q \in I_q} (\Phi_{i-q}(u_i));$$

$$\Phi_{i-q}(u_i) = \min_{m=1,2,\dots,M_q} A_{mq}x_1 + B_{mq}y_1 + C_{mq} - r_i;$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d)^2$$

за умови

$$\text{card}(S_t / \cong) \leq \mu, \quad (3.16)$$

де $S_t = \{C_i \in S: t_i = 1\}$, $S_t / \cong$ – множина класів еквівалентності (конгруентності) множини S_t [279], $card(\circ)$ – потужність (кардинальне число) множини.

Задача (3.13)–(3.16) має ті ж самі властивості, що й задача (2.7)–(2.9). Додатково слід відзначити такі особливості.

Умова $\Phi_i(u_i) \geq 0, i \in I_n$, виконується, якщо вірна одна з нерівностей $\Phi_{i_q}(u_i) \geq 0, q \in I_q$. З урахуванням того, що $P_q \cap P_s = \emptyset, p, q \in I_q, p < q$, нерівність $\Phi_{i_q}(u_i) \geq 0$ може виконуватися тільки для одного $q \in I_q$.

Нерівність $\Phi_{i_q}(u_i) \geq 0, i \in I_n, q \in I_q$, еквівалентна системі нерівностей

$$\{A_{mq}x_1 + B_{mq}y_1 + C_{mq} - r_i \geq 0, m=1,2,\dots,M_q, q \in I_q,$$

з лінійними функціями.

Нерівність $card(S_t / \cong) \leq \mu$ є обмеженням на кількість різних значень радіусів кругів. Воно впливає тільки на вибір значень двійкових змінних.

Очевидно, що для пошуку розв'язку задачі (3.13)–(3.16) потрібен перебір усіх двійкових компонент вектору $t \in B^n$, які задовольняють умову $card(S_t / \cong) \leq \mu$, та визначення точки $u^t \in W^t$ для кожної множини $W^t = \{u \in \mathbb{R}^{2n} : (u, t) \in W\}$ з урахуванням перебору усіх багатокутників $P_q, p \in I_q$, – компонент зв'язності області розміщення S . Додаткове обмеження (3.16) дозволить звузити множину елементів $t \in B^n$, які треба розглядати.

Присутність обмежень на мінімально допустиму відстань між кругами звужує область допустимих розв'язків W і водночас, з урахуванням того, що функція цілі залежить від квадратів радіусів кругів, дозволяє зробити висновок, що пріоритетним є розміщення кругів з більшими радіусами. Саме ці круги можуть дати основний внесок у значення функції цілі.

3.2 Математичні моделі оптимізаційних задач розміщення куль

3.2.1 Математична модель задачі ODP для розміщення 3D куль у опуклому контейнері з мінімальною метричною характеристикою

Нехай є кулі $S_i(u_i) = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u - u_i\|^2 \leq \hat{r}_i^2\}$, де $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – центри координат, $\hat{r}_i$ – радіуси куль $S_i(u_i)$, $i \in I$. Вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ визначає розміщення всіх куль $S_i(u_i)$, $i \in I$, в просторі $\mathbb{R}^3$.

Також задана область розміщення $C(\mu)$, яка може мати такі просторові форми: кубоїд $P3$, куля $S3$, прямий круговий циліндр $C3$, кульовий шар SL , циліндричний шар CL (рис. 2.7), одна із метричних характеристик якою є змінною.

Розглядаються такі змінні метричні характеристики: у кубоїда $P3$ ($l/2 \geq \max\{\hat{r}_i: i \in I\}, w/2 \geq \max\{\hat{r}_i: i \in I\}$) – $\mu = h$, у кулі $S3$ – $\mu = \rho$, у циліндра $C3$ ($R \geq \max\{\hat{r}_i: i \in I\}, h/2 \geq \max\{\hat{r}_i: i \in I\}$) – $\mu = \rho$ або $\mu = h$, у кульового шару SL – $\mu = \rho_2$ та у циліндричного шару CL – $\mu = \rho_2$ ($0.5(\rho_2 - \rho_1) \geq \max\{\hat{r}_i: i \in I\}$).

Не втрачаючи спільності, вважаємо, що

$$\hat{r}_1 \leq \hat{r}_2 \leq \dots \leq \hat{r}_n, \hat{r}_1 < \hat{r}_n. \quad (3.17)$$

Задача. Знайти вектор u^* , який забезпечує розміщення куль $S_i(u_i^*)$, $i \in I$, без накладень в області $C(\mu)$ зі змінною метричною характеристикою ($card(\mu) = 1$), яка досягає мінімального значення $\mu = \mu^*$.

Математична модель задачі ODP (2.4)–(2.7) набуває такого вигляду:

$$\omega^* = (u^*, \mu^*) = \arg \min_{\omega=(u,\mu) \in D \subset \mathbb{R}^{3n+1}} \zeta(\mu), \quad (3.18)$$

де $\zeta(\mu) = \mu$;

$$D = \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, i \in I\}; \quad (3.19)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2;$$

$$\Phi_i(u_i, \mu) =$$

$$= \begin{cases} \min\{x_i - \hat{r}_i, y_i - \hat{r}_i, z_i - \hat{r}_i, l - x_i - \hat{r}_i, w - y_i - \hat{r}_i, h - z_i - \hat{r}_i\}, & \text{якщо } C = P3, \\ -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (\rho - \hat{r}_i)^2, & \text{якщо } C = S3, \\ \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (\rho - \hat{r}_i)^2, z_i - \hat{r}_i, h - z_i - \hat{r}_i\}, & \text{якщо } C = C3, \\ \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (\rho_1 - \hat{r}_i)^2, x_i^2 + y_i^2 - (\rho_2 + \hat{r}_i)^2, z_i - \hat{r}_i, h - z_i - \hat{r}_i\}, & \text{якщо } C = CL, \\ \min\{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\rho_1 - \hat{r}_i)^2, -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (\rho_2 - \hat{r}_i)^2\}, & \text{якщо } C = SL. \end{cases}$$

Задача (3.18)–(3.19) має ті ж самі властивості, що й задача (2.4)–(2.7). Задача має додаткові властивості, пов'язані з виглядом функції цілі та просторовою формою області розміщення:

1. Функція цілі залежить тільки від однієї змінної та є лінійною, тому її мінімум знаходиться в одній із крайніх точок області D .

2. У випадку, коли $C(\mu) = P3$, межа області D складається з лінійних і обернено опуклих поверхонь, а крайня точка області D є розв'язком системи з $3n+1$ рівнянь, які описують межу D .

3. Якщо $C(\mu) \neq S3$, то нерівність $\Phi_i(u_i, \mu) \geq 0$ еквівалентна системі нерівностей. В такому випадку система обмежень описується гладкими функціями.

4. Кількість нерівностей, які описують область D , дорівнює $n(n-1)/2 + n_c \cdot n$, де $n_c = 6$ для $C(\mu) = P3$, $n_c = 1$ для $C(\mu) = S3$, $n_c = 3$ для $C(\mu) = C3$, $n_c = 4$ для $C(\mu) = CL$ та $n_c = 2$ для $C(\mu) = SL$.

5. Область D , загалом, незв'язна. Для кубоїдного та циліндричних контейнерів незв'язність може виникнути за певних відношень розмірів куль і кубоїда та циліндра. Наприклад, для $C(\mu) = S3$ це може трапитися, якщо $(r_1 + r_2) > \rho$. Дійсно, нехай $(r_1 + r_2) > \rho$ та дві точки $u_a, u_b \in D$ відповідають розміщенням куль, показаним на рис. 3.6. У цьому випадку неможливо перейти від точки u_a до точки u_b без або перетину межі $C(\mu)$, або

накладання куль S_i та S_j , тобто D подається як $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
 $u_a \in D_1$, $u_b \in D_2$.

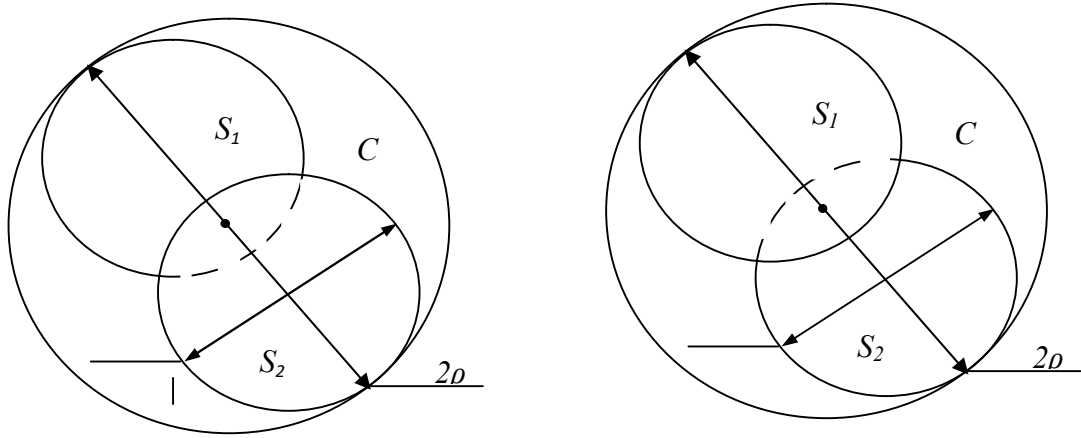


Рис. 3.6. Незв'язність області допустимих розв'язків

6. Внаслідок того, що циліндр має осьову, а куля – центральну симетрію, кожен локальний мінімум може бути визначений з точністю до симетрії. Наприклад, для циліндра це означає, що якщо $(u^*, \mu^*) = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*, h^*)$ є точкою локального мінімуму, то $\zeta(u^*, \mu^*) = \zeta(\tilde{u}(\varphi), \mu^*) = h^* = \text{const}$ для будь-якого $\varphi \in [0, 2\pi]$, де

$$(\tilde{u}(\varphi), \mu^*) = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, z_1^*, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, z_2^*, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, z_n^*, h^*),$$

$$\tilde{x}_i = x_i^* \cos \varphi - y_i^* \sin \varphi, \quad \tilde{y}_i = x_i^* \sin \varphi + y_i^* \cos \varphi, \quad i \in I.$$

Таким чином, локальні мінімуми задачі (3.18)–(3.19) є нестрогими. Тому будь-який представник (u^*, μ^*) локального мінімуму функції цілі розглядається як точка псевдо-локального мінімуму.

Псевдо-локальні мінімуми можуть бути двох типів: нестрогі псевдо-локальні та строгі псевдо-локальні мінімуми. Точка $(u^*, \mu^*) \in D$ є строгим псевдо-локальним мінімумом, якщо існує її ε -окіл $N(u^*, \varepsilon)$, такий що

$\zeta(u^*, \mu^*) < \zeta(u, \mu)$, $(u, \mu) \in (N(u^*, \varepsilon) \cap D) \setminus E(u^*, \mu^*)$, $(u, \mu) \neq (u^*, \mu^*)$ (рис. 3.7а),

де

$$E(u^*, \mu^*) = \{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, z_1^*, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, z_2^*, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, z_n^*, h^*) \in \mathbb{R}^{3n+1},$$

$$\tilde{x}_i = x_i^* \cos \varphi - y_i^* \sin \varphi, \tilde{y}_i = x_i^* \sin \varphi + y_i^* \cos \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Точка $(u^*, \mu^*) \in D$ є нестрогим псевдо-локальним мінімумом, якщо існує її ε -окіл $N(u^*, \varepsilon)$, такий що $\zeta(u^*, \mu^*) < \zeta(u, \mu)$, $(u, \mu) \in (N(u^*, \varepsilon) \cap D) \setminus E(u^*, \mu^*)$ та (u^*, μ^*) не є строгим псевдо-локальним мінімумом (рис. 3.7 б,в).

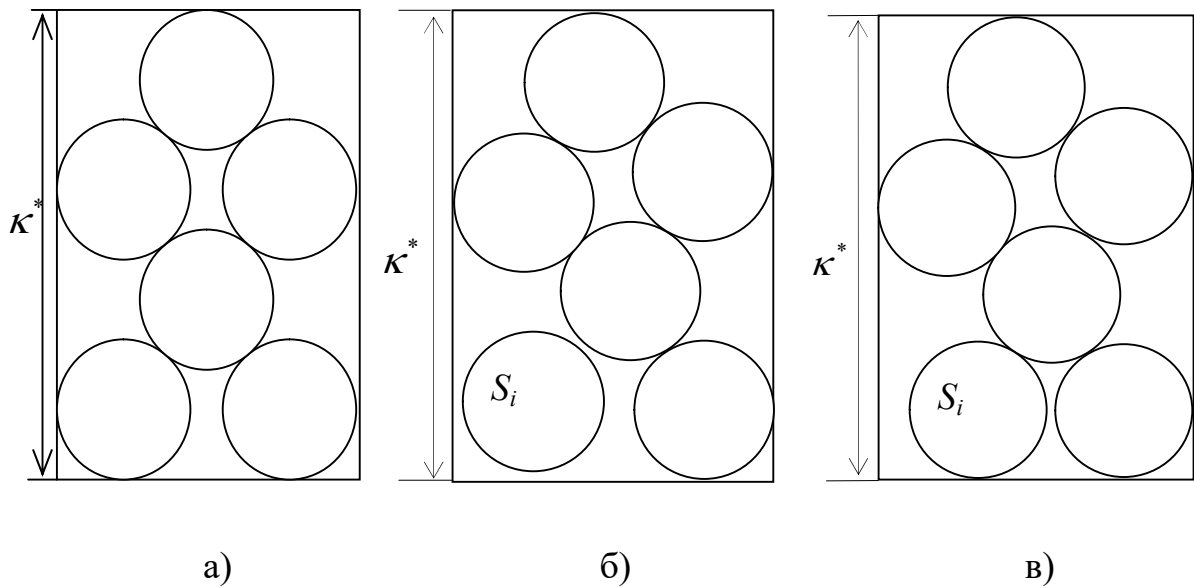


Рис. 3.7. Строгий та нестрогий псевдо-локальні мінімуми

7. Будь-яка точка псевдо-локального мінімуму $(u^*, \mu^*) \in D$ визначається системою $p \leq 3n + 1$ рівнянь, які описують межу області D .

8. Значення змінної μ пов'язано з координатами куль такими відношеннями залежно від просторової форми області розміщення:

$$\mu = \begin{cases} \max_{i \in I} (z_i + \hat{r}_i), & \text{якщо } C(\mu) = P3, \\ \max_{i \in I} (\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + \hat{r}_i), & \text{якщо } C(\mu) = S3, \\ \max_{i \in I} (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \hat{r}_i) \text{ або } \max_{i \in I} (z_i + \hat{r}_i), & \text{якщо } C(\mu) = C3, \\ \max_{i \in I} (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \hat{r}_i), & \text{якщо } C(\mu) = CL, \\ \max_{i \in I} (\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + \hat{r}_i), & \text{якщо } C(\mu) = SL, \end{cases}$$

що дає можливість зменшити розмірність простору змінних. Але при введенні в систему обмежень таких рівнянь втрачається гладкість функцій, і неможливо використовувати градієнтні методи.

3.2.2 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних куль в області, яка має складну просторову форму

Нехай задані рівні кулі $S_i = S$ з радіусом r , $i \in I_n$; де n – достатньо велике натуральне число. Куля S є математичною моделлю каталітичного елементу. Розміщення куль S_i у просторі $\mathbb{R}^3$ визначається координатами їх центрів: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i \in I_n$. Нехай також задана область розміщення C , яка є спеціальною композицією прямих кругових циліндрів C_1 , C_2 та кулі S_0 (рис. 3.8):

$$C = cl((C_1 \cup S_0) \setminus C_2) = cl((C_1 \cup S_0) \cap c(C_2)) = cl(C_1 \cup (S_0 \cap c(C_2)));$$

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H\};$$

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r_c^2, -R \leq z \leq -R + h\};$$

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

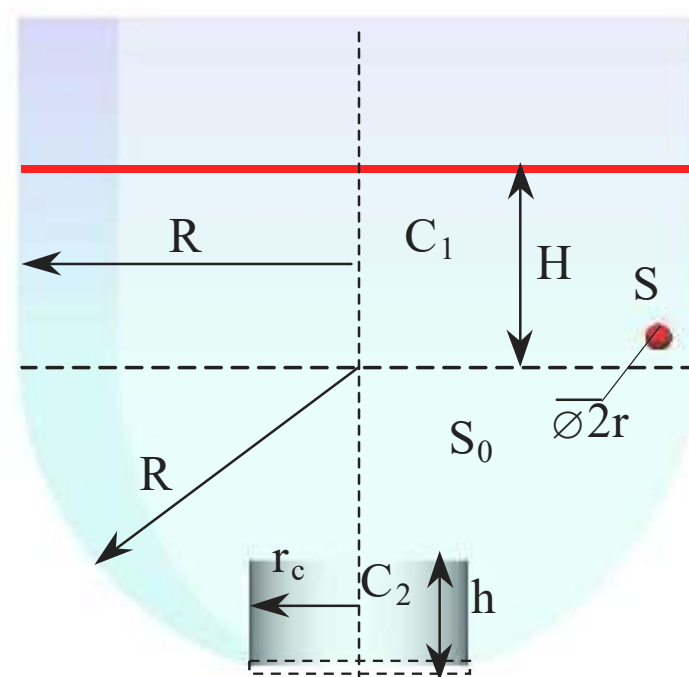


Рис. 3.8. Область розміщення C та куля S

Таким чином, $R > 0$ – радіус кулі S_0 та циліндра C_1 (центр кулі належить осі циліндра), H – висота циліндра C_1 ; h , r_c – висота та радіус циліндра C_2 . Центр кулі S_0 знаходиться на початку координат XOY . Площина $z = H$ визначає висоту, тобто максимальний рівень заповнення області C . Загалом, H може бути від’ємним, тоді циліндр C_1 вилучається з розгляду й область розміщення має такий вигляд:

$$C = cl(S_0 \setminus C_2) = cl(S_0 \cap c(C_2)),$$

а висота заповнення області буде $R + H = R - |H|$.

Задача. Необхідно розмістити в області C максимальну кількість куль з набору S_i без взаємних накладень та визначити їх координати центрів u_i , $i \in I_n$.

Поставлена задача належить до класу 3D-ППР [109]. Математична модель задачі має вигляд:

$$N^* = \max_{u \in G} \sum_{i \in I_n} \Psi_i(u_i), \quad (3.20)$$

де

$$\Psi_i(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i \in I_n; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$G = \left\{ u \in \mathbb{R}^{3n} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n \right\}; \quad (3.22)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - 4r^2, i < j \in I_n; \quad (3.23)$$

$\Phi_i(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та множини $C^* = cl(\mathbb{R}^3 \setminus C)$;

Враховуючи Φ -функції кулі й об'єкту S^* (2.14), кулі й об'єкту C^* (2.15) та кулі й циліндра (2.39), побудуємо функцію $\Phi_i(u_i)$:

$$\Phi_i(u_i) = \min \{ \Phi_{1i}(u_i), \Phi_{2i}(u_i) \},$$

де

$$\Phi_{1i}(u_i) = \max \{ \alpha_{1i}(u_i), \alpha_{2i}(u_i) \}, \quad \Phi_{2i}(u_i) = \max \{ \beta_{1i}(u_i), \beta_{2i}(u_i) \};$$

$$\alpha_{1i}(u_i) = \max \{ \chi_{1i}(u_i), \chi_{2i}(u_i), \varphi_i(u_i) \};$$

$$\chi_{1i}(u_i) = H - z_i, \quad \chi_{2i}(u_i) = z_i, \quad \varphi_i(u_i) = R - r - \sqrt{x_i^2 + y_i^2};$$

$$\beta_{1i}(u_i) = \sqrt{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_c \right)^2 + (z_i + R - h)^2} - r;$$

$$\beta_{2i}(u_i) = \sqrt{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_c \right)^2 + (z_i + R)^2} - r.$$

Задача (3.20)–(3.23) має ті ж самі властивості, що й задача (2.7)–(2.9). Додатково слід зазначити такі особливості. Область розміщення C –

неопукла множина й має осьову симетрію: вісь симетрії співпадає з віссю циліндрів.

При розміщенні "великої кількості" куль важливою особливістю є кількість обмежень ($O(n^2)$), яка описує область допустимих розв'язків G , зокрема нерівностей, які не дозволяють кулям накладатися одна на іншу. Тому навіть для визначення допустимості розміщення шляхом перевірки виконання всіх обмежень буде потрібний значний час. Безумовно, в такій ситуації отримання глобально- й навіть локально-оптимального розв'язку є неможливим. Тому потрібні альтернативні підходи й пошук наближених розв'язків з використанням методики послідовно-одиначного розміщення та врахуванням конгруентності куль.

Для вивчення властивостей області розміщення C виконаємо дослідження взаємовідношень кулі S_i , $i \in I_n$, та C . Загалом, поверхня 0-рівня Φ -функції $\Phi_i(u_i)$:

$$T_0 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \Phi_i(u_i) = 0\}$$

може бути подана як об'єднання частин поверхонь (рис. 3.9):

$$T_0 = T_{01} \cup T_{02} \cup T_{03} \cup T_{04} \cup T_{05} \cup T_{06},$$

де множини T_{01} та T_{06} – частини площини, обмеженої кругами, які її перетином з циліндричною та сполученням із торичною поверхнями відповідно

$$T_{01} = \begin{cases} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = H - r, x^2 + y^2 \leq (R - r)^2\}, & \text{якщо } H \geq 0, \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = H - r, x^2 + y^2 \leq (R - r)^2 - H^2\}, & \text{якщо } H < 0, \end{cases}$$

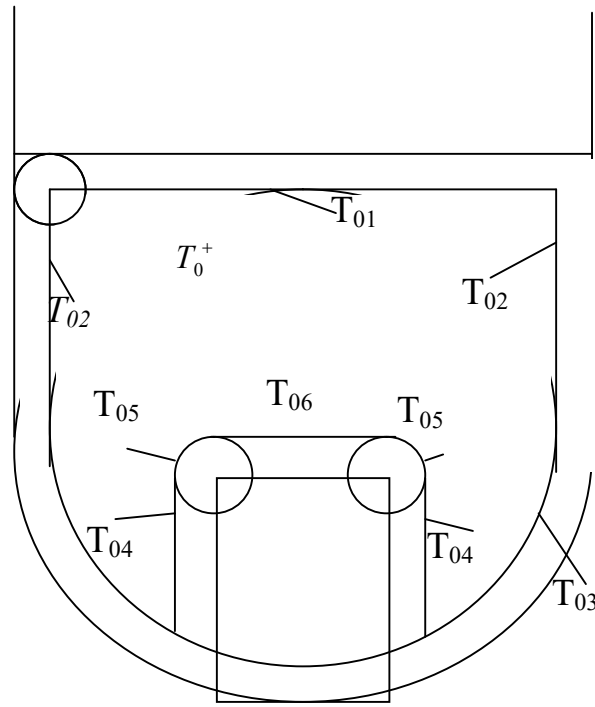


Рис. 3.9. Ілюстрація поверхні 0-рівня Φ -функції $\Phi_i(u_i)$.

$$T_{06} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } H < -R + h + r, \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -R + h + r, x^2 + y^2 \leq (r_c)^2\}, & \text{якщо } H \geq -R + h + r; \end{cases}$$

T_{02} – частина циліндричної поверхні, обмеженої кругом, який є її перетином з площиною, та кругом, який є місцем сполучення циліндричної та кульової поверхонь

$$T_{02} = \begin{cases} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (R - r)^2, 0 \leq z \leq H - r\}, & \text{якщо } H > 0, \\ \emptyset, & \text{якщо } H \leq 0; \end{cases}$$

T_{03} – поверхня напівкулі, обмежена кругом, який є місцем сполучення циліндричної та кульової поверхонь

$$T_{03} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = (R - r)^2, \right. \\ \left. \sqrt{(R - r)^2 - (r_c + r)^2} \leq z \leq \min \{0, (H - r)\} \right\};$$

T_{04} – частина циліндричної поверхні, обмежена кругом, який є місцем її сполучення з торичною поверхнею, та кругом, який є її перетином з кульовою поверхнею

$$T_{04} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (r_c + r)^2, \right. \\ \left. \sqrt{(R - r)^2 - (r_c + r)^2} \leq z \leq \min \{(-R + h), (H - r)\} \right\};$$

T_{05} – частина поверхні тора, обмежена кругами, які є місцем її сполучення з площиною та циліндричною поверхнями

$$T_{05} = \begin{cases} \emptyset, \text{ якщо } H \leq -R + h, \\ \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_c \right)^2 + (z + R - h)^2 = r^2, \right. \\ \left. x^2 + y^2 \geq r_c^2, -R + h \leq z \leq \min \{(-R + h + r), (H - r)\} \right\}, \text{ якщо } H > -R + h. \end{cases}$$

Таким чином, множина T_0 є межею множини

$$T_0^+ = \{u \in \mathbb{R}^3 : \Phi_i(u_i) \geq 0\}$$

допустимих розміщень кулі в області C .

З урахуванням напряму опуклості частин поверхней T_{0i} , $i=1,2,\dots,6$, множина крайніх точок множини T_0^+ має такий вигляд:

$$E(T_0^+) = (T_{01} \cap T_{02}) \cup T_{04}.$$

В свою чергу, крайні точки множини області допустимих рішень G внаслідок оберненої опуклості функцій (3.23) знаходяться в точках перетину $3n$ поверхонь, які описують межу G .

3.2.3 Математична модель задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних куль у опуклому контейнері із зонами заборони

Нехай є набір Λ конгруентних куль S_i , $i \in I_\lambda = \{1, 2, \dots, \lambda\}$, з радіусом r . Положення куль визначається координатами їх центрів $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i \in I_\lambda$. Нехай також є область розміщення C (рис. 3.10):

$$C = cl \left(P \setminus \left(\bigcup_{j \in J} P_j \bigcup_{l \in L} C_l \bigcup_{t \in T} D_t \right) \right) \neq \emptyset,$$

де P – опуклий багатогранний контейнер (рис. 3.11 а);

P_j , $j \in J = \{1, 2, \dots, \bar{J}\}$, – опуклі багатокутні призми (рис. 3.11 б);

C_l , $l \in L = \{1, 2, \dots, \bar{L}\}$, – опуклі багатогранні кути (рис. 3.11 в);

D_t , $t \in T = \{1, 2, \dots, \bar{T}\}$, – двохгранні кути (рис. 3.11 г).

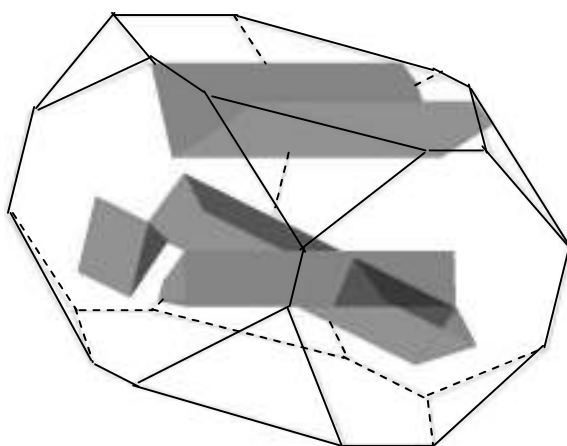
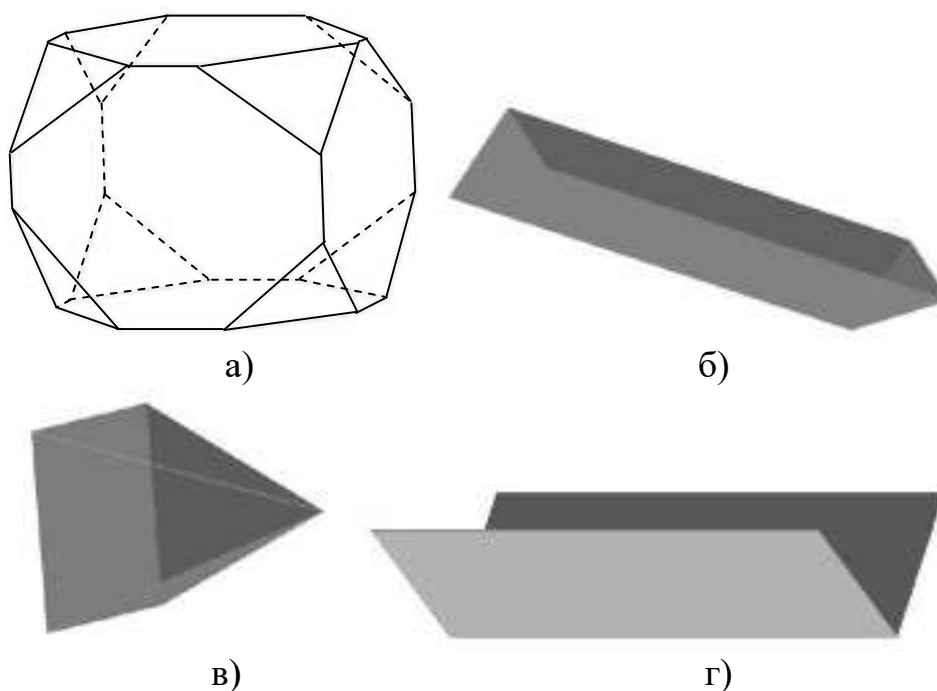


Рис. 3.10. Область розміщення C

Рис. 3.11. Контейнер P та зони заборони

Багатогранник P задається вершинами $v_k^P = (x_k^P, y_k^P, z_k^P)$, $k \in N$, $N = \{1, 2, \dots, n^P\}$. Використовуючи вершини, побудуємо систему нерівностей, яка визначає P [279]:

$$\{a_h x + b_h y + c_h z + d_h \geq 0, \quad h = 1, 2, \dots, H\}. \quad (3.24)$$

Призми P_j , $j \in J$, визначаються системами нерівностей:

$$\begin{aligned} \{ \hat{a}_{kj} x + \hat{b}_{kj} y + \hat{c}_{kj} z + \hat{d}_{kj} \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K_j, \\ j \in J. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Вершини $V_{0l} = (e_{0l}, f_{0l}, h_{0l})$ багатогранних кутів C_l , $l \in L$, визначаються системами нерівностей:

$$\begin{aligned} \{ a_{ml} x + b_{ml} y + c_{ml} z + d_{ml} \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M_l, \\ l \in L. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Двохгранні кути D_t , $t \in T$, визначаються системами нерівностей:

$$\begin{cases} \hat{a}_{1t}x + \hat{b}_{1t}y + \hat{c}_{1t}z + \hat{d}_{1t} \leq 0, \\ \hat{a}_{2t}x + \hat{b}_{2t}y + \hat{c}_{2t}z + \hat{d}_{2t} \leq 0, \quad t \in T. \end{cases} \quad (3.27)$$

Об'єкти P_j , $j \in J$, C_l , $l \in L$, D_t , $t \in T$, розглядаються як зони заборони контейнера P .

Задача. Необхідно розмістити максимальну кількість куль $\sigma^* < \lambda$ з набору Λ без взаємних накладань в області розміщення C .

Поставлена задача належить до класу задач 3D-IPPP (2.7)–(2.9) та може бути зведена (див. задачу (3.6)–(3.9)) до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі. Вважаємо, що радіуси r_i куль S_i , $i \in I_\lambda$, є змінними. Розглянемо послідовність задач:

$$F_\sigma(v^{\sigma^*}) = \max_{X^\sigma \in W_\sigma \subset \mathbb{R}^{4\sigma}} F_\sigma(v^\sigma), \quad \sigma = 1, 2, \dots, \sigma^*, \quad (3.28)$$

де $X^\sigma = (v^\sigma, u^\sigma)$, $v^\sigma = (r_1, r_2, \dots, r_\sigma)$, $u^\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_\sigma)$;

$$F_\sigma(v^\sigma) = \sum_{i=1}^{\sigma} r_i; \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} W_\sigma = \{ X^\sigma \in \mathbb{R}^{4\sigma} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I_\sigma = \{1, 2, \dots, \sigma\}, \\ \Phi_i(r_i, u_i) \geq 0, \quad r - r_i \geq 0, \quad r_i \geq 0, \quad i \in I_\sigma \}; \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i + r_j)^2, \quad i < j \in I_\sigma; \quad (3.31)$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = \min \{ \Phi_i^S(r_i, u_i), \Phi_{ij}^{SP}(r_i, u_i), j \in J, \Phi_{il}^{SC}(r_i, u_i), l \in L, \Phi_{it}^{SD}(r_i, u_i), t \in T \}, i \in I_\sigma, \quad (3.32)$$

Φ -функція кулі S_i й об'єкту $C^* = \mathbb{R}^3 / \text{int } C$;

$$\Phi_i^S(r_i, u_i) = \min \{ A_h x + B_h y + C_h z + D_h - r_i, \quad h = 1, 2, \dots, H \}, \quad i \in I_\sigma, \quad -$$

Φ -функція кулі S_i й багатогранника (див. (2.16)), де

$$A_h x + B_h y + C_h z + D_h - r_i = 0, \quad h = 1, 2, \dots, H, -$$

нормалізовані рівняння площин (див. (3.24));

$\Phi_{ij}^{SP}(r_i, u_i)$, $i \in I_\sigma$, $j \in J$, – Φ -функція кулі S_i й багатогранної призми P_j (див. (2.37));

$\Phi_{il}^{SC}(r_i, u_i)$, $i \in I_\sigma$, $l \in L$, – Φ -функція кулі S_i й багатогранного кута C_l (див. (2.36));

$\Phi_{it}^{SD}(r_i, u_i)$, $i \in I_\sigma$, $t \in T$, – Φ -функція кулі S_i й двохгранного кута D_t (див. (2.37)).

Зазначимо основні властивості задач (3.28)–(3.32).

1. Завдяки лінійності функції цілі $F_\lambda(X^\lambda)$ локальні максимуми задачі (3.28)–(3.32) знаходяться в крайніх точках області D_λ .

2. Через присутність зон заборони область розміщення S й область W_σ , загалом, є незв'язними за багатозв'язними компонентами зв'язності.

3. Значення змінних радіусів кругів знаходяться в сегменті $[0, r]$, тобто не можуть бути більше за початкові.

4. Оскільки $\Phi_i(r_i, u_i)$, $i \in I_\sigma$, (див. (3.32)) є мінімумом функцій, то нерівність $\Phi_i(r_i, u_i) \geq 0$ виконується, якщо виконується система нерівностей:

$$\begin{cases} \Phi_i^S(r_i, u_i) \geq 0, \\ \Phi_{ij}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0, \quad j \in J, \\ \Phi_{il}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \quad l \in L, \\ \Phi_{it}^{SD}(r_i, u_i), \quad t \in T. \end{cases} \quad (3.33)$$

5. Оскільки (див. (2.36)–(2.38))

$$\Phi_{ij}^{SP}(r_i, u_i) = \max\{\Psi_{idj}^{SP}(r_i, u_i), d = 1, 2\},$$

$$\Phi_{il}^{SC}(r_i, u_i) = \max\{\Psi_{ilml}^{SC}(r_i, u_i), \Psi_{i2ml}^{SC}(r_i, u_i), \Psi_{i3ml}^{SC}(r_i, u_i), m = 1, 2, \dots, M_l\},$$

$$\Phi_{it}^{SD}(r_i, u_i) = \max\{\Psi_{i11t}^{SC}(r_i, u_i), \Psi_{i12t}^{SC}(r_i, u_i), \Psi_{i21t}^{SC}(r_i, u_i)\},$$

то нерівність $\Phi_{ij}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0$ виконується, якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{i1j}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0, \Psi_{i2j}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0$; нерівність $\Phi_{il}^{SC}(r_i, u_l) \geq 0$ виконується, якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{i11m}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \Psi_{i12m}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \Psi_{i21m}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, m=1,2,\dots,M_l$; нерівність $\Phi_{it}^{SD}(r_i, u_i) \geq 0$ виконується, якщо виконується принаймні одна з нерівностей $\Psi_{i11t}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \Psi_{i12t}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \Psi_{i21t}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0$. Це впливає з того, що система (3.33) виконується, якщо виконується принаймні одна з таких систем нерівностей:

$$\begin{cases} \Phi_i^S(r_i, u_i) \geq 0, \\ \Psi_{ijqb}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0, j \in J, \\ \Psi_{ilpk}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, l \in L, \\ \Psi_{itgc}^{SD}(r_i, u_i) \geq 0, t \in T, \end{cases} \quad (3.34)$$

$b \in B, k \in K, c \in C, q=1,2, p=1,2,3, g=1,2.$

6. З урахуванням (3.33) та (3.34), область допустимих розв'язків W_σ може бути подана як

$$W_\sigma = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_{\sigma t},$$

де підмножина $W_{\sigma t}$ визначається однією з таких систем нерівностей (див. (3.30) та (3.34)):

$$\begin{cases}
\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I_\sigma, \\
\Phi_i^S(r_i, u_i) \geq 0, \\
\Psi_{ijqb}^{SP}(r_i, u_i) \geq 0, \quad j \in J, \\
\Psi_{ilpk}^{SC}(r_i, u_i) \geq 0, \quad l \in L, \\
\Psi_{itgc}^{SD}(r_i, u_i) \geq 0, \quad t \in T, \\
r - r_i \geq 0, \quad i \in I_\sigma, \\
r_i \geq 0, \quad i \in I_\sigma,
\end{cases} \quad (3.35)$$

$i \in I_\sigma, b \in B, k \in K, c \in C, q = 1, 2, p = 1, 2, 3, g = 1, 2.$

7. Локальний максимум $X^{*\sigma}$ відносно підмножини W_σ не є, загалом, локальним максимумом відносно всієї області допустимих розв'язків W_σ .

8. Якщо для деякого σ маємо $F_\sigma(X^{\sigma*}) = \sigma r$, то розв'язку задачі (3.28)–(3.32) відповідає розміщення σ куль радіусу r в області C .

9. Якщо для деякого σ маємо $F_{\sigma+1}(X^{(\sigma+1)*}) < (\sigma+1)r$ та $F_\sigma(X^{\sigma*}) = \sigma r$, то точка $X^{\sigma*} = (v^{\sigma*}, u^{\sigma*})$ відповідає розміщенню $\sigma^* = \sigma$ в області C .

10. Якщо $F_{\sigma+1}(X^{(\sigma+1)*}) < (\sigma+1)r$ – локальний максимум задачі (3.28)–(3.32), а $F_\sigma(X^{\sigma*}) = \sigma r$, то $\sigma^* = \sigma$ можна вважати апроксимацією до глобального максимуму задачі.

3.2.4 Математична модель задачі КР для розміщення нерівних куль у опуклому контейнері із зонами заборони з максимальним коефіцієнтом заповнення

Нехай задані множини $\Theta_k = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{k\hat{j}_k}\}$, елементами яких є кулі із заданими радіусами $\hat{r}_k$, $k \in K = \{1, 2, \dots, \bar{k}\}$. Загальна кількість заданих куль –

$$n = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \hat{j}_k.$$

Для зручності перейменуємо кулі

$$S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1\hat{j}_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2\hat{j}_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}\hat{j}_{\bar{k}}}$$

як S_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$. Радіуси куль S_i : $r_i^0 = \hat{r}_1$ для $i = 1, 2, \dots, \hat{j}_1$, $r_i^0 = \hat{r}_2$ для $i = \hat{j}_1 + 1, \hat{j}_1 + 2, \dots, \hat{j}_2$, й так далі, $r_i^0 = \hat{r}_{\bar{k}}$ для $i = \bar{j} - \hat{j}_{\bar{k}} + 1, \bar{j} - \hat{j}_{\bar{k}} + 2, \dots, n$.

Нехай $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – координати центрів куль S_i , $i \in I$. Отже, вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ визначає місцезнаходження всіх куль S_i , $i \in I$, в $\mathbb{R}^3$.

Кулі S_i , $i \in I$, мають бути розміщені в області (рис. 3.12)

$$C = cl \left(A / \left(\left(\bigcup_{q \in Q} C_q \right) \cup \left(\bigcup_{l \in L} P_l \right) \cup \left(\bigcup_{m \in M} G_m \right) \right) \right),$$

де A – контейнер, який є або кулею (рис. 3.12а)

$$S = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0\},$$

або опуклим багатогранником (рис. 3.12б)

$$P = \{u \in \mathbb{R}^3 : A_h x + B_h y + C_h z + D_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, \bar{h}\},$$

де $A_h x + B_h y + C_h z + D_h \geq 0$, $h = 1, 2, \dots, \bar{h}$, – нормальні рівняння площин, на яких лежать грані;

зони заборони C_q , $q \in Q = \{1, 2, \dots, \bar{q}\}$, – прямі кругові циліндри (рис. 3.12в);

P_l , $l \in L = \{1, 2, \dots, \bar{l}\}$, – опуклі призми (рис. 3.12 г);

$G_m = cl(G_{1m} \cap (\mathbb{R}^3 \setminus S_{1m}))$, $m \in M = \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$, – об'єкти, де G_{1m} – напівпростори, а S_{1m} – кулі (рис. 3.12 г).

Циліндри C_q задаються двома точками $H_{1q}(h_{x1q}, h_{y1q}, h_{z1q})$ та $H_{2q}(h_{x2q}, h_{y2q}, h_{z2q})$ ($H_{1q}, H_{2q} \in C_q$), які лежать на осях циліндрів, та радіусами $\rho_q, q \in Q$.

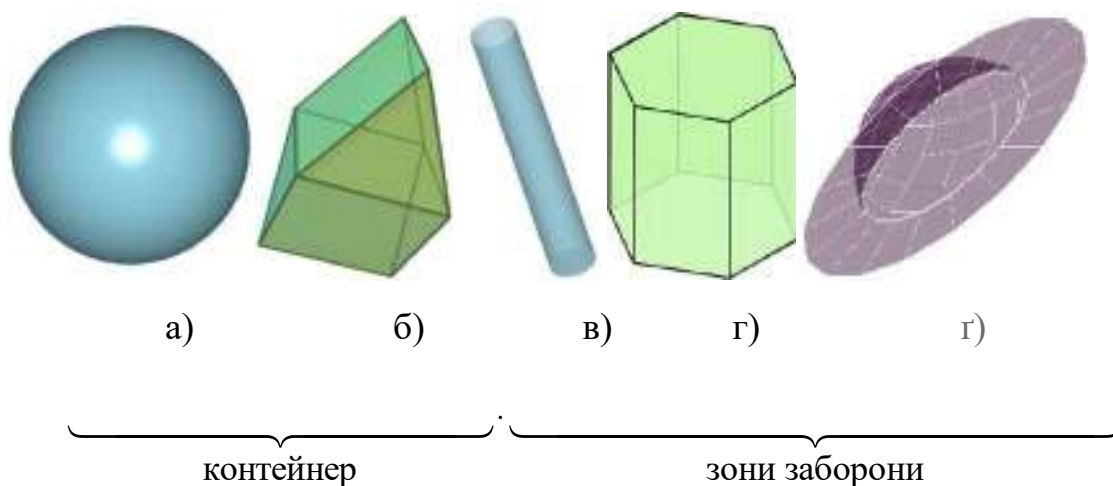


Рис. 3.12. Контейнер та зони заборони

Використовуючи напрямні косинуси осей

$$\xi_q = (\cos \alpha_q, \cos \beta_q, \cos \gamma_q) = \left(\frac{h_{x2q} - h_{x1q}}{g_q}, \frac{h_{y2q} - h_{y1q}}{g_q}, \frac{h_{z2q} - h_{z1q}}{g_q} \right),$$

де

$$g_q = \sqrt{(h_{x2q} - h_{x1q})^2 + (h_{y2q} - h_{y1q})^2 + (h_{z2q} - h_{z1q})^2},$$

побудуємо рівняння бокових поверхонь $C_q, q \in Q$. Для цього виконаємо поворот циліндра

$$C^0 = \{X \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - \rho_q^2 \leq 0\}$$

на кути $-\gamma_q$ навколо осі $0Y$ й на кути $-\theta_q$ навколо осі $0Z$ та транслюємо на вектори H_{1q} :

$$\left((R_1(-\gamma_q, -\theta_q)), (X - H_{1q}) \right)^2 + \left((R_2(-\gamma_q, -\theta_q)), (X - H_{1q}) \right)^2 - \rho_q^2 = 0, \quad q \in Q,$$

де кути θ_q та γ_q можна визначати, використовуючи такі формули:

$$\cos \theta_q = \frac{\cos \alpha_q}{\sqrt{\cos^2 \alpha_q + \cos^2 \beta_q}}, \quad \sin \theta_q = \frac{\cos \beta_q}{\sqrt{\cos^2 \alpha_q + \cos^2 \beta_q}}, \quad \sin \gamma_q = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_q};$$

$$R(\gamma, \theta) = \begin{pmatrix} R_1(\gamma, \theta) \\ R_2(\gamma, \theta) \\ R_3(\gamma, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \theta & \cos \gamma \sin \theta & -\sin \gamma \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \gamma \cos \theta & \sin \gamma \sin \theta & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad q \in Q.$$

Призми P_l , $l \in L$, задаються точками (e_{ml}, f_{ml}, h_{ml}) , $m \in M_l = \{1, 2, \dots, m_l\}$, $l \in L$, які лежать на перерізах P_l , перпендикулярних ребрам призми, та векторами $w_l = (w_{xl}, w_{yl}, w_{zl})$, паралельними цим ребрам. Система нерівностей, яка визначає призми P_l , $l \in L$, має такий вигляд:

$$\{a_{ml}x + b_{ml}y + c_{ml}z + d_{ml} \geq 0, \quad m \in M_l, \quad l \in L,$$

де

$$\begin{aligned} a_{ml} &= (f_{m+1,l} - f_{ml})w_{zl} - (h_{m+1,l} - h_{ml})w_{yl}, \\ b_{ml} &= -(e_{m+1,l} - e_{ml})w_{zl} + (h_{m+1,l} - h_{ml})w_{xl}, \\ c_{ml} &= (e_{m+1,l} - e_{ml})w_{yl} - (f_{m+1,l} - f_{ml})w_{xl}, \\ d_{ml} &= -e_{ml}a_{ml} - f_{ml}b_{ml} - h_{ml}c_{ml}, \end{aligned}$$

$$v_{M_l+1,l} = (e_{M_l+1,l}, f_{M_l+1,l}, h_{M_l+1,l}) = (e_{1l}, f_{1l}, h_{1l}).$$

Зони заборони, які мають спеціальну просторову форму $G_m = G_{1m} \setminus \text{int } S_{1m}$, $m \in M$, (рис. 3.13), задаються композицією напівплощин

$$G_{1m} = \{u \in \mathbb{R}^3 : a_m x + b_m y + c_m z + d_m \leq 0\}$$

та куль

$$S_{1m} = \{u \in \mathbb{R}^3 : (x - y_{1m})^2 + (y - y_{1m})^2 + (z - z_{1m})^2 \leq R_m^2\}$$

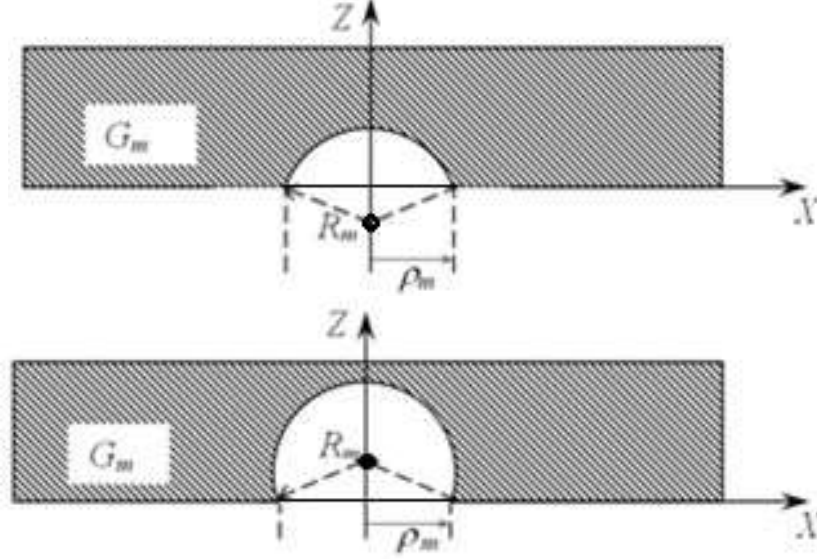


Рис. 3.13. Ілюстрація множини G_m за різних положень кулі й напівплощини

Нехай $\rho_m = \sqrt{R_m^2 - c_{1m}^2}$, $m \in M$, де c_{1m} – координата центра кулі S_{1m} по осі OZ у власній системі координат. Випадок, коли одночасно виконуються нерівності $\rho_m \leq r_i \leq R_m$, $i \in I$, та $c_{1m} \geq 0$, не розглядається.

Задача. Необхідно знайти вектор u^* , який забезпечує розміщення куль з набору $\{S_i, i \in I\}$, без взаємних накладань в області C з максимальною сумою об'ємів куль (максимальним коефіцієнтом заповнення).

Поставлена задача є окремим випадком основної задачі KP (див. (2.7)–(2.9)). Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\omega^* = (u^*, t^*) = \arg \max_{(\tilde{u}, t) \in W \subset (\mathbb{R}^{3n} \times B^n)} \Psi(u, t) \quad (3.36)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I$;

$$\Psi(u, t) = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^n r_i^3 t_i; \quad (3.37)$$

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{3n} \times B^n) : t_i t_j \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I\}; \quad (3.38)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i + r_j)^2; \quad (3.39)$$

$$\Phi_i(u_i) = \min\{\Phi_i^S(u_i), \Phi_{iq}^{SC}(u_i), q \in Q, \Phi_{il}^{SP}(u_i), l \in L, \Phi_{im}^{SG}(u_i), m \in M\}, i \in I; \quad (3.40)$$

$$\Phi_i^S(u_i) = \begin{cases} \Phi_i^{SS}(u_i), & \text{якщо } A = S, \\ \Phi_i^{SA}(u_i), & \text{якщо } A = P; \end{cases}$$

$$\Phi_i^{SS}(u_i) = -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (R - r_i)^2 \text{ (див. (2.14))};$$

$$\Phi_i^{SA}(u_i) = \min\{A_h x_i + B_h y_i + C_h z_i + D_h - r_i, h = 1, 2, \dots, \bar{h}\} \text{ (див. (2.16))};$$

$\Phi_{iq}^{SC}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та прямого кругового циліндра C_q , $q \in Q$, $i \in I$ (див.(2.38));

$\Phi_{il}^{SP}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та призми P_l , $l \in L$, $i \in I$ (див.(2.37));

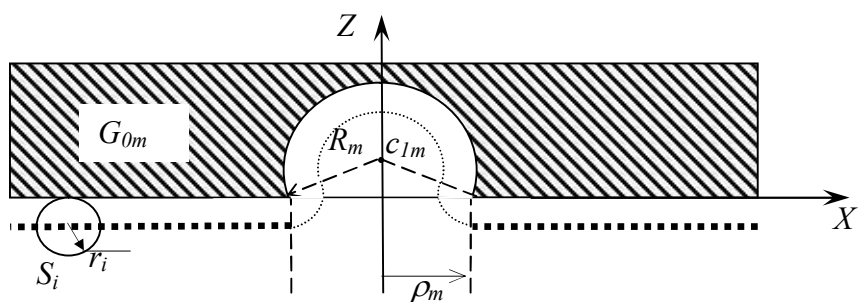
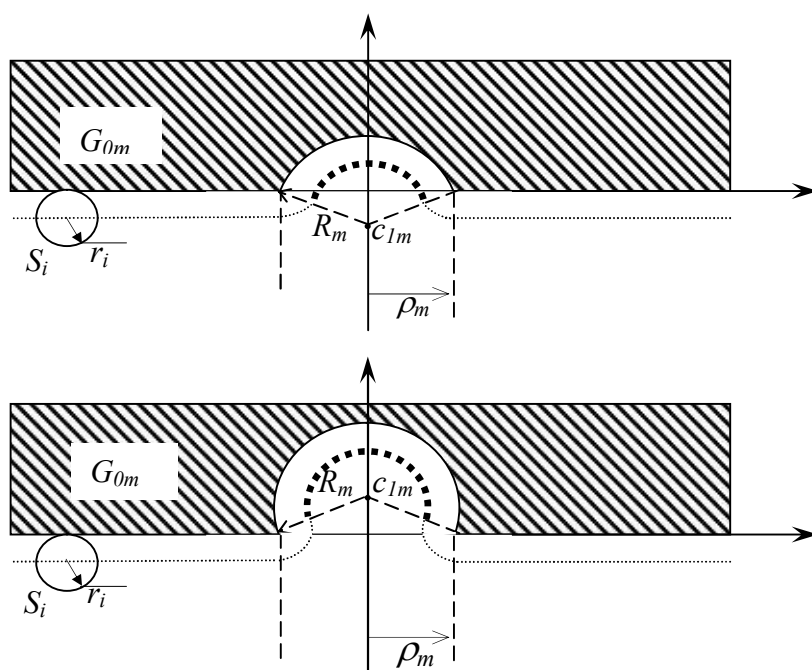
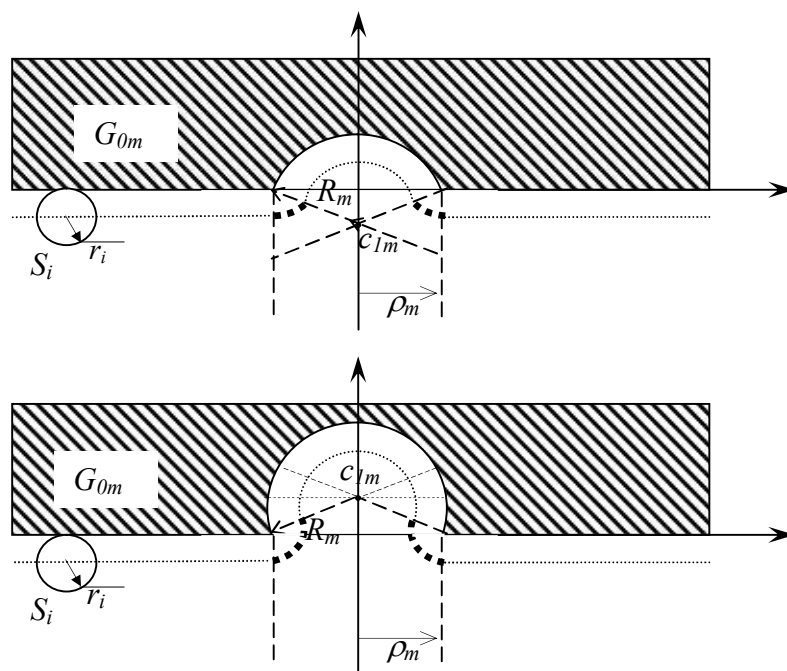
$\Phi_{im}^{SG}(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та об'єкта G_m , $m \in M$.

Для побудови Φ -функції $\Phi_{im}^{SG}(u_i)$ розглянемо спочатку об'єкт $G_{0m} = P_0 \setminus S_{0m}$, $m \in M$, де $P_0 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f_1(u) = -z \leq 0\}$ – напівплощина, а $S_{0m} = \{u \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - c_{1m})^2 \leq R_m^2\}$, $m \in M$, – куля (рис. 3.14).

Якщо $P_0 \cap S_{0m} \neq \emptyset$, то побудуємо об'єкт $G_{0m} = P_0 \setminus S_{0m}$, $m \in M$. Тепер спочатку побудуємо Φ -функцію кулі S_i та об'єкта G_{0m} у власній системі координат G_{0m} . Для цього треба проаналізувати всі точки дотику S_i та G_{0m} , які утворюють поверхню 0-рівня Φ -функції: куля S_i дотична до напівплощини P_0 (рис. 3.14); куля S_i дотична до внутрішньої поверхні кулі S_{0m} (рис. 3.15); куля S_i дотична до круга, що є перетином меж кулі S_{0m} та напівплощини P_0 : $frS_{0m} \cap frP_0$ (рис. 3.16).

Перший варіант дотику (рис. 3.14) описується функцією

$$\Psi_{lim}(u_i) = -z_i - r_i. \quad (3.41)$$

Рис. 3.14. Дотик кулі S_i й напівплощини P_0 Рис. 3.15. Дотик кулі S_i й внутрішньої поверхні кулі S_{0m} Рис. 3.16. Дотик кулі S_i до круга, що є перетином меж S_{0m} та P_0

Очевидно, що якщо $\Psi_{lim}(u_i) > 0$, то $G_{0m} \cap S_i(u_i) = \emptyset$.

Другий варіант дотику (рис. 3.15) можливий тільки за умови $\rho_m \geq r_i$.

Функція, яка описує такий дотик, має вигляд:

$$\Psi_{2im}(u_i) = -x_i^2 - y_i^2 - (z_i - c_{1m})^2 + (R_m - r_i)^2. \quad (3.42)$$

Якщо $\Psi_{2im}(u_i) > 0$, то $G_m \cap S_i(u_i) = \emptyset$.

Для опису третього варіанту дотику (рис. 3.16) побудуємо рівняння конусу з вершиною в точці $(0, 0, c_{1m})$, твірні якого проходять через коло $-x_i^2 - y_i^2 + \rho_m^2 = 0$:

$$\Psi_{31im}(u_i) = \begin{cases} -x_i^2 - y_i^2 + \frac{\rho_m^2}{c_{1m}^2} (z_i - c_{1m})^2 = 0, & \text{якщо } \rho_m > r_i \text{ та } c_{1m} > 0, \\ -y_i^2 = 0, & \text{якщо } \rho_m > r_i \text{ та } c_{1m} = 0, \\ x_i^2 + y_i^2 - \frac{\rho_m^2}{c_{1m}^2} (z_i - c_{1m})^2, \quad z_i \leq c_{1m}, & \text{якщо } \rho_m > r_i \text{ та } c_{1m} < 0, \\ x_i^2 + y_i^2 - \frac{\rho_m^2}{\sqrt{r_i^2 - \rho_m^2}} (z_i - \sqrt{r_i^2 - \rho_m^2})^2 = 0, & \text{якщо } \rho_m < r_i. \end{cases} \quad (3.43)$$

Далі запишемо рівняння поверхні тору з радіусами ρ_m та r_i

$$\Psi_{32im}(u_i) = 4\rho_m^2 (x_i^2 + z_i^2)^2 - (x_i^2 + z_i^2 + y_i^2 + \rho_m^2 - r_i^2)^2 = 0, \quad (3.44)$$

рівняння циліндричної поверхні

$$\Psi_{33im}(u_i) = -x_i^2 - y_i^2 + \rho_m^2 = 0 \quad (3.45)$$

та рівняння площини

$$\Psi_{34im}(u_i) = -z_i + c_{1m} = 0. \quad (3.46)$$

Використовуючи функції (3.43)–(3.46), побудуємо функцію

$$\Psi_{3im}(u_i) = \begin{cases} \min\{\Psi_{3jim}(u_i), j = 1, 2, 3\}, & \text{якщо } c_{1m} \geq 0, \\ \min\{\Psi_{3jim}(u_i), j = 1, 2, 3, 4\}, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (3.47)$$

Можна перевірити, що якщо $\Psi_{3im}(u_i) > 0$, то $G_{0m} \cap S_i(u_i) = \emptyset$.

Враховуючи функції (3.41), (3.42) та (3.47), запишемо Φ -функцію для G_{0m} та $S(u_i)$:

$$\Phi_{im}(u_i) = \begin{cases} \max\{\Psi_{jim}(u_i), j = 1, 2, 3\}, & \text{якщо } \rho_m \geq r_i, \\ \max\{\Psi_{jim}(u_i), j = 1, 3\}, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Із структури функції $\Phi_{im}(u_i)$ випливає, що нерівність $\Phi_{im}(u_i) \geq 0$ виконується, якщо виконується принаймні одна з нерівностей

$$\Psi_{jim}(u_i) \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Якщо вектор $u_{2m} = (x_{2m}, y_{2m}, z_{2m}, \alpha_{2m}, \beta_{2m})$, $m \in M$, задає положення й поворот об'єкту G_{0m} :

$$\Gamma_{2m} = \begin{pmatrix} g_{2m} \\ b_{2m} \\ q_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{21m} & 0 & g_{23m} \\ b_{21m} & b_{22m} & b_{23m} \\ q_{21m} & q_{22m} & q_{23m} \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} g_{2m} &= (\cos \beta_{2m}, 0, \sin \beta_{2m}), \\ b_{2m} &= (\sin \alpha_{2m} \sin \beta_{2m}, \cos \alpha_{2m}, -\sin \alpha_{2m} \cos \beta_{2m}), \\ q_{2m} &= (-\cos \alpha_{2m} \sin \beta_{2m}, \sin \alpha_{2m}, \cos \alpha_{2m} \cos \beta_{2m}), \end{aligned}$$

то Φ -функція G_m та $S(u_i)$ (див. (3.48)) буде мати вигляд:

$$\Phi_{im}^{SG}(u_i) = \Phi_{im}(g_{2m}u_i - x_{2m}, b_{2m}u_i - y_{2m}, q_{2m}u_i - z_{2m}). \quad (3.49)$$

Задача (3.36)–(3.40) має ті ж самі властивості, що й задача (2.7)–(2.9). Додатково слід зазначити, що наявність класів конгруентності куль зменшує кількість варіантів вибору куль із заданого набору. Присутність зон заборони в контейнері, з одного боку, зменшує об'єм контейнера й кількість куль, яку можна розмістити в ньому, а з іншого боку, – значно ускладнює формалізацію умов розміщення куль й, за наявності великої кількості зон заборони, – пошук початкових точок області допустимих розміщень. Наявність зон заборони зменшує ймовірність виникнення фрагментів розміщення з регулярною (ґратчастою) структурою. Область допустимих розв'язків має таку ж структуру, як і для задачі (3.38)–(3.42) й може бути подана у вигляді об'єднання підобластей.

3.3 Математичні моделі задач розміщення гіперкуль ($d \geq 4$)

3.3.1 Математична моделі задачі ODP розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі мінімального радіусу

Нехай є гіперкулі

$$S_i = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|X - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$$

з радіусами $\hat{r}_i$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$. Гіперкуля S_i , трансльована на вектор u_i , позначається як $S_i(u_i)$. Розміщення гіперкуль S_i визначається координатами центру $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$, $i \in I$, які є змінними. Вектор $Y = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ визначає розміщення всіх гіперкуль у просторі.

Нехай також заданий контейнер – гіперкуля

$$C(\rho) = \{X \in \mathbb{R}^d : \|X\|^2 \leq \rho^2\},$$

радіус ρ якої є змінним.

Без втрати спільності вважаємо, що

$$\hat{r}_1 \leq \hat{r}_2 \leq \dots \leq \hat{r}_n, \quad \hat{r}_1 < \hat{r}_n. \quad (3.50)$$

Задача. Необхідно знайти вектор u^* , який забезпечує розміщення гіперкуль $S_i(u_i^*)$, $i \in I$, без взаємних накладань у гіперкулі $S(\rho)$, радіус якої буде мінімальним $\rho = \rho^*$.

Поставлена задача є окремим випадком задачі (2.4)–(2.6). Математична модель має такий вигляд:

$$\omega^* = \arg \min_{\omega=(Y,\rho) \in D \subset \mathbb{R}^{nd+1}} \kappa(\omega), \quad (3.51)$$

де

$$\kappa(\omega) = \rho; \quad (3.52)$$

$$D = \{\omega \in \mathbb{R}^{nd+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(u_i, \rho) \geq 0, i \in I\}; \quad (3.53)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (\hat{r}_i + \hat{r}_j)^2, i, j \in I, j > i; \quad (3.54)$$

$$\Phi_i(u_i, \rho) = -\|u_i\|^2 + (\rho - \hat{r}_i)^2, i \in I \text{ (див. (2.39))}. \quad (3.55)$$

Математична модель (3.51)–(3.55) має ті ж самі властивості, що й модель (2.4)–(2.6). Функції $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$, $i, j \in I, j > i$, є квадратичними, обернено опуклими. З урахуванням того, що функції $\Phi_i(u_i)$, $i \in I$, не є лінійними й обернено опуклими, мінімум лінійної функції цілі $\kappa(\omega)$ знаходиться в крайніх точках області D , які є розв'язком системи $\tau \leq nd + 1$ рівнянь, що описують її межу (див. (3.53)). Усі розв'язки можуть бути знайдені з точністю до центральної симетрії з центром в центрі гіперкулі $S(\rho)$. Кількість активних обмежень значно зростає із збільшенням вимірності простору d .

3.3.2 Математична моделі задачі КР для розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі

Нехай задані рівні гіперкулі S_i з радіусом r , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, де n – достатньо велике натуральне число. Розміщення гіперкуль S_i у просторі $\mathbb{R}^d$ визначається координатами їх центрів: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{di})$, $i \in I$. Нехай також заданий контейнер – гіперкуля $C = \{X \in \mathbb{R}^d : \|X\|^2 \leq \rho^2\}$ з радіусом $\rho = \text{const}$ і центром на початку координат.

Задача. Необхідно розмістити максимальну кількість гіперкуль з набору S_i , без взаємних накладень у контейнері C та визначити їх координати центрів u_i , $i \in I_n$.

З урахуванням математичної моделі загальної задачі КР (2.7)–(2.9) та конгруентності гіперкуль математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$N^* = \max_{u \in G} \sum_{i \in I_n} \Psi_i(u_i), \quad (3.56)$$

де

$$\Psi_i(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i \in I_n; \end{cases} \quad (3.57)$$

$$G = \left\{ u \in \mathbb{R}^{dn} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n \right\}; \quad (3.58)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - 4r^2, i, j \in I, j > i; \quad (3.59)$$

$$\Phi_i(u_i) = -\|u_i\|^2 + (\rho - r)^2 \text{ (див. (2.39))}. \quad (3.60)$$

Задача (3.56)–(3.60) має ті ж самі властивості, що й задача (2.7)–(2.9). Додатково слід зазначити, що контейнер C – опукла множина й має центр симетрії. Тому всі розв'язки можуть бути знайдені з точністю до симетрії.

Використовуючи ідею гомотетичних перетворень, можна сформулювати задачу (3.56)–(3.60) у вигляді послідовності задач нелінійного програмування, в яких радіуси гіперкуль S_i , $i \in I_n$, є змінними:

$$X^{\lambda*} = \arg \max_{X^{\lambda} \in M_{\lambda}} F_{\lambda}(X^{\lambda}), \lambda \in I_{\gamma} = \{1, 2, \dots, \gamma \leq n\} \subseteq I_n, \quad (3.61)$$

де $X^{\lambda} = (v^{\lambda}, u^{\lambda})$, $v^{\lambda} = (r_1, r_2, \dots, r_{\lambda})$, $u^{\lambda} = (u_1, u_2, \dots, u_{\lambda})$;

$$F_{\lambda}(X^{\lambda}) = \sum_{i=1}^{\lambda} r_i; \quad (3.62)$$

$$M_{\lambda} = \{X^{\lambda} \in R^{(d+1)\lambda} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I_{\lambda} = \{1, 2, \dots, \lambda\}, i < j, \quad (3.63)$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) \geq 0, i \in I_{\lambda}, r - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I_{\lambda}\};$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2, \quad (3.64)$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = (\rho - r_i)^2 - \|u_i\|^2. \quad (3.65)$$

В описі множини M_{λ} (3.63) нерівність $\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \geq 0$ гарантує ненакладання гіперкуль S_i та S_j , $i, j \in I_{\lambda}$, $i < j$, а нерівність $\Phi_i(r_i, u_i) \geq 0$ – знаходження гіперкулі S_i , $i \in I_{\lambda}$, у гіперкулі C .

Розглянемо основні властивості задачі (3.61)–(3.65).

1) Область допустимих розв'язків M_{λ} задається нерівностями з лінійними та квадратичними функціями.

2) Завдяки лінійності функції цілі $F_{\lambda}(X^{\lambda})$ локальні максимуми задачі знаходяться в крайніх точках області M_{λ} .

3.4 Висновки за розділом 3

У третьому розділі наведено основні реалізації математичні моделі

задачі HSOA за різної вимірності гіперкуль ($d=2$, $d=3$, $d\geq 4$) в областях розміщення різних просторових форм. Запропоновано математичні моделі є окремими випадками HSOA: ODP, КР, ІРР. Для формалізації взаємовідношень гіперкуль та області розміщення використано Φ -функції та псевдонормалізовані Φ -функції, побудовані у другому розділі. Це дозволило подати моделі у вигляді задач математичного програмування, зокрема, нелінійного програмування в задачах ODP та змішаного цілочислового нелінійного програмування в задачах КР.

Проведено дослідження особливостей побудованих математичних моделей, які враховують вимірність простору, вигляд функції цілі, просторову форму області розміщення, метричні характеристики гіперкуль і контейнера, додаткові технологічні обмеження.

Для задач ODP область допустимих розв'язків, загалом, є незв'язною з багатозв'язними компонентами зв'язності, що можна подати у вигляді об'єднання скінченного числа підмножин, кожна з яких описується, загалом, системами лінійних та квадратичних нерівностей. Для задач КР має здійснюватися перебір значень дискретних змінних й розв'язання задач нелінійного програмування за неперервними змінними. Особливості математичних моделей впливають на вибір стратегій розв'язання задач HSOA.

Результати, подані в розділі 3, опубліковано в роботах [1-4,6,7,9,10,12,13,15,16,18-24,30-33,35-38,40-42,45-49,51-53,59,61].

РОЗДІЛ 4

МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ HSOA

Останнім часом кількість наукових досліджень, присвячених задачам оптимального розміщення геометричних об'єктів, зокрема задачам розміщення гіперкуль різної вимірності, значно зросла. Тому дуже важливим є створення методології розв'язання задач HSOA на основі математичного та комп'ютерного моделювання, методів лінійної оптимізації й геометричного проектування.

У четвертому розділі пропонується єдина методологія розв'язання задач HSOA. Методологія містить аналіз вихідних даних задач, постановок задач, особливостей їх математичних моделей, методи побудови допустимих початкових точок, методи локальної та глобальної оптимізації. Залежно від досліджених особливостей математичних моделей пропонуються адекватні стратегії розв'язання задач.

4.1 Основні елементи методології розв'язання задач HSOA

У попередніх розділах розглянута математична модель задачі HSOA та її реалізації у вигляді ODP та КР. Вони дозволяють охопити широке коло задач розміщення гіперкуль, особливості математичних моделей яких досліджені у третьому розділі. На вибір постановки впливає вигляд функції цілі: мінімізація розмірів контейнера або максимізація щільності розміщення (кількості розміщуваних гіперкуль – у випадку розміщення рівних гіперкуль). Розглянуті в третьому розділі задачі мають такі загальні властивості: багатовимірність, багатоекстремальність, нелінійність обмежень, які описують область допустимих розв'язків. Зі збільшенням вимірності простору та кількості розміщуваних гіперкуль значно зростає як кількість обмежень, так і кількість локальних екстремумів. Методи повного перебору локальних екстремумів, загалом, не реалізуються на практиці через значну обчислювальну складність оптимізаційних процедур, навіть за невеликої

кількості ($n \leq 10$) та вимірності гіперкуль ($d \leq 3$). Для задач, поставлених як КР, є необхідність додаткового перебору ще й за цілочисловими змінними. Тому в рамках методології пропонується принципово новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень гіперкуль і дозволяє отримувати наближення до глобального екстремуму.

На вибір стратегії розв'язання впливають такі основні чинники:

- постановка задачі: ODP, КР, ПРР;
- вимірність простору, в якому розміщуються гіперкулі ($d = 2$, $d = 3$ та $d \geq 4$);
- метричні особливості гіперкуль (рівні, нерівні, діапазон та розподіл значень радіусів);
- кількість розміщуваних гіперкуль;
- просторова форма області розміщення;
- наявність додаткових обмежень (зони заборони, мінімально допустимі відстані, обмеження на метричні характеристики гіперкуль);
- обмеження на час обчислень.

Проаналізуємо зазначені фактори більш докладно.

Основні структурні елементи методології розв'язання задач HSOA наведено на рис. 4.1. Методологія включає аналіз постановки задачі, вихідних даних та обмежень, математичні моделі, які охоплюють клас задач розміщення гіперкуль різної вимірності, дослідження їх особливостей і розробку стратегій розв'язання, в яких пропонуються методи побудови допустимих розміщень (початкових точок або наближених розв'язків), методи локальної оптимізації та методи глобальної оптимізації.

Методологія розв'язання задач HSOA



Рис. 4.1. Схематичне зображення методології розміщення гіперкуль

Вигляд постановки задачі відповідає міжнародній класифікації задач розкрою та розміщення [109]. Розглядаються дві основні постановки: задача із змінними метричними характеристиками контейнера (Open Dimension Problem – ODP) та задача про рюкзак (Knapsack Problem – KP). Задача розміщення рівних гіперкуль (Identical Item Packing – IPP) розглядається в дисертаційній роботі як окремий випадок задачі KP внаслідок того, що ці задачі мають однакову функцію цілі та схожі математичні моделі у вигляді задачі змішаного цілочислового нелінійного програмування.

Вигляд постановки задачі залежить від функції цілі. Якщо є визначений набір гіперкуль із заданими радіусами і треба знайти мінімальні метричні характеристики (розміри) контейнера, в який можна розмістити ці гіперкулі, то маємо задачу ODP (див. задачі (3.2)–(3.4), (3.18)–(3.19) та (3.51)–(3.55)). У

цьому випадку немає необхідності вибирати підмножину гіперкуль із заданого набору – в контейнер мають потрапити всі гіперкулі. В дисертаційній роботі досліджуються задачі тільки з однією змінною метричною характеристикою контейнера з лінійною функцією цілі. Саме ця особливість використовується при аналізі властивостей екстремальних точок області допустимих розв’язків і при виборі стратегії розв’язання.

В іншому випадку, коли заданий набір гіперкуль з відомими радіусами та контейнер має визначену просторову форму та всі його розміри задані, виникає задача розміщення гіперкуль у контейнері із заданого набору з максимальним коефіцієнтом щільності (див. (3.13)–(3.16) та (3.36)–(3.40)). Очевидно, що є багато варіантів вибору гіперкуль із набору, й розв’язати цю задачу можна, реалізувавши вичерпний перебір всіх піднаборів гіперкуль і розмістивши ці гіперкулі в контейнері. Така задача формулюється як задача КР і є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування. Вибір піднабору гіперкуль задається двійковими змінними, а параметри розміщення визначаються неперервними змінними.

Окремим випадком задачі про рюкзак є задача PPR (див. (3.20)–(3.23), (3.28)–(3.32) та (3.56)–(3.60)), де вибір гіперкуль із заданого набору означає вибір кількості розміщуваних гіперкуль. Тому схема методу послідовно-одиначного розміщення є основою для розв’язання задач цього класу.

Вимірність простору теж впливає на особливості математичної моделі. В першу чергу, це пов’язано із значним збільшенням контактів гіперкуль за щільного розміщення у просторах вимірності $d \geq 4$, як між собою, так із межею області розміщення. Це спричиняє значне збільшення кількості активних обмежень і, відповідно, складності задачі. Зменшується щільність розміщення, але при цьому ускладнюється пошук випадкових допустимих розміщень гіперкуль. За рахунок накопичення частини гіперкуль біля межі області важливість регулярних ґратчастих розміщень зменшується із збільшенням вимірності.

При розміщенні нерівних гіперкуль збільшення вимірності впливає на важливість розміщення гіперкуль з великим радіусом, які роблять основний внесок у сумарний об'єм розміщуваних гіперкуль.

Тепер проаналізуємо вплив метричних особливостей гіперкуль. Якщо гіперкулі мають різні радіуси, то співвідношення радіусів різних пар гіперкуль або груп гіперкуль може вплинути й на структуру розміщення. Наприклад, гіперкулі достатньо малого радіусу можуть локально вільно рухатися в області, яка утворюється попарним дотиком $d+1$ гіперкуль значно більшого радіусу, тобто розміщення деяких гіперкуль може не впливати на розміщення решти гіперкуль (рис. 4.2).

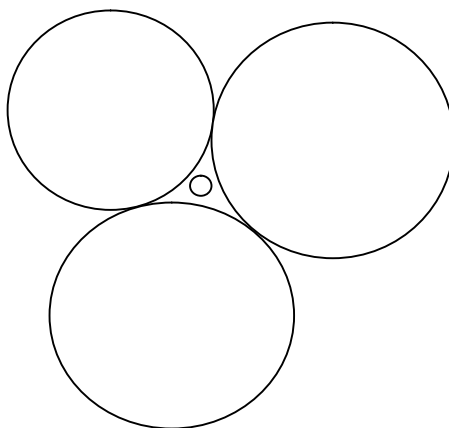


Рис. 4.2. Приклад розміщення кругів, коли один круг може вільно рухатися

При послідовно-одиначному розміщенні на структуру розміщення впливає саме послідовність їх розміщення. І чим більше буде різниця радіусів між гіперкулями, тим більше можуть відрізнятись отримані при цьому розміщення. Для рівних гіперкуль послідовність розміщення не має значення. Таким чином, за великого розкиду значень радіусів гіперкуль ефективними будуть методи, в яких виконуються перестановки гіперкуль, тобто в яких використовуються комбінаторні властивості, наприклад, метод околів, що звужуються [100]. Для рівних гіперкуль потрібні модифікації методів на основі ймовірносних властивостей функції цілі на дереві розв'язків, яке

реалізує межові точки області допустимих розв'язків. Якщо радіуси гіперкуль відрізняються несуттєво або має місце плавний перехід від меншого значення до більшого, то найбільш ефективним буде метод спрямованого перебору локальних екстремумів, в якому відбувається плавний перехід від одного екстремуму до іншого завдяки гомотетичним перетворенням гіперкуль.

Важливим є співвідношення діаметру гіперкуль до розміру контейнера, яке, залежно від вимірності простору, впливає на прийняття рішення щодо вибору методу побудови початкових розміщень: випадковий чи на основі ґратчастих розміщень.

Кількість розміщуваних гіперкуль визначає кількість змінних задачі, кількість обмежень задачі. Від них залежить вибір стратегії та методів розв'язання.

За невеликої кількості гіперкуль (до 5-10 гіперкуль) і невеликої вимірності простору ($d \leq 3$) для задачі із змінними метричними характеристиками можливий повний перебір вершин дерева розв'язків, які відповідають межовим точкам області допустимих значень та за певних умов усіх крайніх точок та локальних екстремумів задачі. Для цього можна використовувати схему методу гілок та меж [252]. Проте через нелінійність обмежень на практиці виникають труднощі при розв'язанні нелінійних систем рівнянь. Тому можна говорити тільки про теоретичний глобальний екстремум.

Для задачі КР потрібен ще додатковий перебір за двійковими змінними, що впливає на обчислювальну складність.

Якщо кількість гіперкуль і/або вимірність простору збільшуються, то можливий перебір тільки частини дерева розв'язків і, відповідно, локальних екстремумів.

Можливість застосування методів локальної оптимізації теж залежить від кількості змінних та обмежень. Стратегія активного набору обмежень

[257-259,274] дозволяє значно зменшити обчислювальну складність методів пошуку локального екстремуму.

Якщо кількість гіперкуль дуже велика (понад 5000), то можна знайти тільки наближення до локальних екстремумів, використовуючи метод оптимізації за групами змінних. Залежно від кількості гіперкуль, вимірності простору та обчислювальних можливостей можна вибирати групу $g \geq d$ змінних і виконувати локальну оптимізацію тільки за цими змінними. Так, якщо $g = d$, то відбувається оптимізація розміщення тільки однієї гіперкулі, всі інші змінні розглядаються як сталі.

Просторова форма області розміщення, загалом, впливає на стратегію розв'язання. Якщо область розміщення має складну просторову форму, обумовлену присутністю зон заборони, то ускладнюється побудова Φ -функцій, які описують взаємовідношення гіперкулі й області. Область допустимих розв'язків зображається як об'єднання підобластей, які можна описати системами нерівностей, а основна задача розбивається на послідовність підзадач на цих підобластях.

Коли у контейнера є багато зон заборони, ускладнюється й пошук допустимого розміщення. В цьому випадку для пошуку допустимої точки розв'язується допоміжна задача нелінійного програмування.

Наявність зон заборони робить метод побудови початкових точок на основі регулярних розміщень гіперкуль недоцільним.

При розв'язанні задачі слід враховувати можливі симетрії області розміщення.

У прикладних задачах, окрім геометричних обмежень, можуть виникнути додаткові обмеження, наприклад, обмеження на мінімально та максимально допустимі відстані між гіперкулями, обмеження на статичні та динамічні характеристики (центр мас, осьові та центробіжні моменти інерції тощо).

У дисертаційній роботі розглядається два варіанти обмежень, які виникають при оптимізації топології деталі в адитивних технологіях. Математична модель цієї задачі може бути записана у вигляді задачі КР.

Перший варіант – обмеження на мінімально допустимі відстані між гіперкулями. Це обмеження накладається на неперервні змінні задачі. Внаслідок введення мінімальних відстаней область допустимих розв’язків зменшується, а вплив кругів з більшими радіусами зростає.

Другий варіант – обмеження на кількість різних радіусів кругів – впливає на вибір варіантів кругів із заданого набору, тобто є певним обмеженням на значення цілочислових змінних задачі.

Урахування обмежень, з одного боку ускладнює математичну модель, а з іншого, – зменшує множину можливих розв’язків.

Обмеження на час обчислень застосовується у випадках, коли задача має велику розмірність, немає можливості зробити повний перебір усіх варіантів розміщення. Якщо є обмеження на час, то треба заздалегідь вибрати таку стратегію розв’язання, яка за цей час забезпечить отримання прийняттого результату.

4.2 Методи побудови допустимих розміщень

Отримання допустимого розміщення, тобто початкової точки, для задачі HSOA – перший етап розв’язання. Від способу вибору початкових точок залежить якість отриманих розв’язків.

У дисертаційній роботі пропонуються такі методи побудови допустимих початкових точок: метод випадкових розміщень, метод ґратчастих (регулярних) розміщень, жадібний алгоритм (метод оптимізації за групами змінних) та метод оптимізації нев’язок.

4.2.1 Метод випадкових розміщень

Метод випадкових розміщень використовується для швидкого отримання допустимої точки для $d = 4, 5, \dots, 19$ шляхом вибору випадкових

значень координат центрів гіперкуль у декартовій або гіперсферичній системах координат і перевірки умов допустимості.

Загалом, координати центра гіперкулі $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ можна отримати в гіперсферичній системи координат за формулами:

$$\begin{aligned}x_1 &= \tau \cdot \cos \phi_1, \\x_2 &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2, \\x_3 &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3, \quad \dots\dots\dots, \\x_{d-1} &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{d-2} \cdot \cos \phi_{d-1}, \\x_d &= \tau \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{d-2} \cdot \sin \phi_{d-1},\end{aligned}$$

де значення кутів вибираються випадково в таких сегментах: $\tau \in [0, \rho - r]$,

$$\phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1,(d-2)} \in [-\pi / 2, \pi / 2], \quad \phi_{1,(d-1)} \in [-\pi, \pi].$$

4.2.2 Метод ґратчастих розміщень

Метод ґратчастих розміщень використовується для $d = 2, 3$, при розміщенні в опуклому контейнері, якщо відсутні зони заборони та розміри гіперкуль значно менші, ніж розміри контейнера. Метод доцільно застосовувати, коли розміри кругів (куль) значно менші за розміри контейнера й відсутні зони заборони.

Розглянемо спочатку двовимірний випадок.

Нехай C – область розміщення довільної просторової форми. За гексагонального ґратчастого розміщення кругів кожен круг дотичний до шести інших кругів (рис. 4.3).

Для вибору положення кругів в області задамо множину векторів $(x_j^0, y_k^0) \in \mathbb{R}^2$, $x_j^0 = j\tau / \eta$, $y_k^0 = k\tau / \eta$, $j, k \in I = \{0, 1, \dots, \eta\}$, де η – параметр, який визначає кількість векторів. Для зручності замінимо індекси векторів (x_j^0, y_k^0) , $j, k \in I$, у такий спосіб: (x_p^0, y_p^0) , $p \in P = \{0, 1, \dots, \xi\}$, де

$\xi = (\eta + 1)^2 - 1$. Вважаємо, що (x_p^0, y_p^0) , $p \in P = \{0, 1, \dots, \xi\}$, – вектори трансляції центрів кругів.

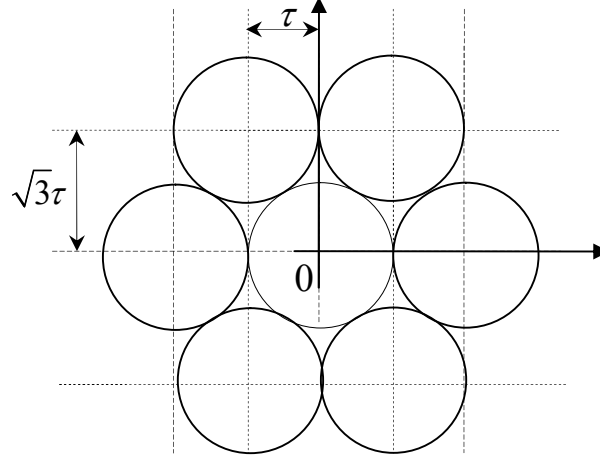


Рис. 4.3. Фрагмент гексагонального ґратчастого розміщення кругів

Центри координат кругів S_i , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, з радіусом τ , які є координатами ґраток L_τ^p , $p \in P$, обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} (x_l^p, y_m^p) &= (\pm(l-1)\tau + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)\tau + y_p^0), \text{ якщо } m - \text{непарне;} \\ (x_l^p, y_m^p) &= (\pm(l-1)\tau + \tau + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)\tau + y_p^0), \text{ якщо } m - \text{парне,} \\ l, m &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Круги S_i , $i \in I_n$, мають знаходитись в області C .

У тривимірному просторі координати центрів куль з радіусом τ , які утворюють гексагональне ґратчасте розміщення, можна знайти за формулами:

$$\begin{aligned} (x_k^0, y_l^0, z_m^0) &= (\pm 2(k-1)\tau, \pm\sqrt{3}(2l-2)\tau, (1+4(m-1)\sqrt{2/3})\tau), \\ (x_k^0, y_l^0, z_m^0) &= (\pm 2(k-1)\tau + \tau, \pm\sqrt{3}(2l-1)\tau, (1+4(m-1)\sqrt{2/3})\tau), \\ (x_k^0, y_l^0, z_m^0) &= (\pm 2(k-1)\tau, \pm\sqrt{3}(2l-1)\tau - \tau/\sqrt{3}, (1+4(m-1)\sqrt{2/3})\tau), \\ k, l, m &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Гратчасте розміщення формується послідовним повторенням двох шарів, зсунутих один відносно іншого на відстань τ в напрямку осі OX , $\tau / \sqrt{3}$ в напрямку осі OY та на $\sqrt{2/3}\tau$ в напрямку осі OZ (рис. 4.4). Кожен із шарів може бути побудований послідовним повторенням двох рядів куль: один ряд куль зміщений відносно іншого в напрямку осі OY на $\sqrt{3}\tau$. За такого розміщення одна куля дотична до 12 інших куль.

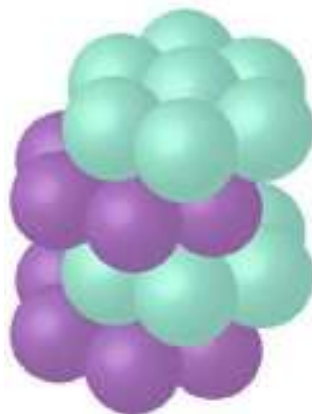


Рис. 4.4. Фрагмент гексагонального гратчастого розміщення куль
(<https://opentextbc.ca/chemistry/chapter/10-6-lattice-structures-in-crystalline-solids>)

Залежно від постановки задачі й просторової форми області розміщення можливі модифікації метода побудови гратчастих розміщень.

4.2.3 Жадібний алгоритм

Жадібний алгоритм [139] є модифікацією методів оптимізації за групами змінних з основним або евристичними критеріями й можуть бути застосовані для отримання перспективних допустимих початкових точок за прийнятний час.

Згідно з жадібним алгоритмом задача HSOA зводиться до послідовності задач

$$\kappa_l^* = \underset{u_l \in D_l \subset \mathbb{R}^d}{extr} \kappa_l(u_l), \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$D_l = \{u_l \in \mathbb{R}^d : \Phi_{il}(u_i^*, u_l) \geq 0, i \in I_{l-1}, \Phi_l(u_l) \geq 0\},$$

$$I_{l-1} = \{1, 2, \dots, l-1\}, I_0 = \emptyset.$$

За вдалого вибору критеріїв такі алгоритми забезпечують розміщення, кращі за деякі локальні мінімуми. Тому жадібний алгоритм застосовується й для отримання наближень до локальних екстремумів та до глобальних екстремумів із застосуванням методу мултистарту.

4.2.4 Метод оптимізації нев'язок

Такий метод побудови використовується для $d = 2, 3$, якщо контейнер має зони заборони, та для $d \geq 20$.

Нехай $X^0 \notin W_g \subset \mathbb{R}^\tau$, де

$$W_g = \{X \in \mathbb{R}^\tau : g_i(X) \geq 0, i \in I\} -$$

область допустимих розв'язків задачі розміщення, яка може бути подана у вигляді задачі нелінійного програмування.

Визначимо множину індексів порушених обмежень: $I' = \{i \in I : g_i(X^0) < 0\}$. Для пошуку допустимої точки розв'яжемо таку задачу нелінійного програмування:

$$(\chi^*, X^*) = \arg \max_{(\chi, X) \in W' \subset \mathbb{R}^{\tau+1}} \chi, \quad (4.3)$$

де

$$W' = \{(\chi, X) \in \mathbb{R}^{\tau+1} : g_i(X) - \chi \geq 0, i \in I', -\chi \geq 0\}; \quad (4.4)$$

$$f_i(\chi, X) = g_i(X) - \chi.$$

Як початкова точка вибирається $(\chi^0, X^0) \in W'$, де $\chi^0 = \min\{g_i(X^0), i \in I'\}$. Якщо задача (4.3)–(4.4) має точку глобального

максимуму (χ^*, X^*) , де $\chi^* = 0$, то $X^* \in W_g$. Якщо в точці локального (або глобального) максимуму $\chi^* < 0$, то $X^* \notin W_g$. Таким чином, будь-який розв'язок задачі (4.4), для якого $\chi^* = 0$, гарантує отримання допустимої точки.

4.3 Методи локальної оптимізації

Для локальної оптимізації використовуються комбінація методів декомпозиції й внутрішньої точки (розв'язувач IPOPT – Interior Point Optimizer), модифікація методу можливих напрямків, метод оптимізації за групами змінних та метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа.

Комбінований метод декомпозиції й IPOPT. Для підвищення ефективності методу локальної оптимізації використовується метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень, які дозволяють звести задачу з великою кількістю нелінійних обмежень до послідовності задач нелінійного програмування зі значно меншою кількістю нелінійних обмежень. Метод внутрішньої точки, який використовується в роботі у вигляді розв'язувача IPOPT [280], є прямо-двоїстим методом внутрішньої точки (бар'єрних функцій), для якого доведена теоретична збіжність. Він показав високу ефективність для задач нелінійного програмування, які виникають при розміщенні геометричних об'єктів. У методі використовується інформація про другі похідні функції цілі й обмежень, тому він демонструє високу швидкість збіжності. Доведено теоретичну збіжність методу за $O(\sqrt{n} \log(1/\varepsilon))$ ітерацій, де n – кількість змінних, ε – точність [280].

Метод можливих напрямків використовується із збільшенням кількості змінних (понад 3000). Пропонуються модифікації методу [281], в якому задача нелінійного програмування зводиться до послідовності задач лінійного програмування. Ідея методу полягає в пошуку напрямку руху, за якого виконуються дві умови: поліпшення значення функції цілі та

допустимість за кожним із обмежень, що описують область допустимих розв'язків. Сучасні пакети програм NORDM [282] та BPMPD [283] дозволяють отримувати розв'язки задач лінійного програмування дуже великої розмірності. Використання цих пакетів особливо ефективно для задач із сильно розрідженими матрицями, які виникають при розміщенні геометричних об'єктів. Пропонується спеціальна стратегія активних обмежень, яка впливає на збіжність методу. Детально стратегія описується у п'ятому розділі.

Метод оптимізації за групами змінних є модифікацією методу покоординатного спуску та використовується для задач ODP з кількістю змінних понад 10000. Всі змінні задачі розбиваються на декілька груп. Вибирається одна з груп, а решта розглядається як сталі. Для розв'язання отриманої задачі використовуються розв'язувач IPOPT[280] або метод можливих напрямків. Після розв'язання всіх підзадач отриманий результат є наближенням до локального екстремуму задачі. Для поліпшення результату описаний процес повторюється для різних груп змінних.

Метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа застосовується для задач із обернено опуклими та лінійними обмеженнями й ґрунтується на аналізі множників Лагранжа. Він застосовується разом із методом оптимізації за групами змінних та стратегією активного набору обмежень. Метод реалізується ітераційною формулою:

$$\kappa(u^{l+1}) = \kappa(u^l) - \Delta\kappa(u^l), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

Для вибору напрямку руху вектор множників Лагранжа $\lambda^l = (\lambda_1^l, \lambda_2^l, \dots, \lambda_m^l)$ обчислюється як розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\nabla\kappa(u^l) = A(u^l)^T \lambda^l,$$

де $A(u^l)$ – матриця Якобі.

Обмеження, яке відповідає мінімальному від'ємному множнику, вилучається із списку активних обмежень. Для вибору напрямку руху із крайньої точки ослаблюється активне обмеження, якому відповідає цей множник. Далі відбувається рух межею області допустимих розв'язків у напрямку зменшення функції цілі. Довжина кроку вибирається таким чином, щоб стало активним, принаймні, ще одне обмеження. Процес триває доти, доки в деякій крайній точці всі множники Лагранжа є додатними, що є необхідною й достатньою умовою екстремуму.

4.4 Методи глобальної оптимізації

З урахуванням багатоекстремальності задач розміщення є необхідність вибору кращого варіанту розміщення. Загалом, безпосередній перебір усіх варіантів неможливий внаслідок NP -складності задач розміщення. Тому для цілеспрямованого пошуку кращих варіантів вибираються методи, в основі яких перегляд частини множини розв'язків із відтинанням заздалегідь неперспективних підмножин (методи гілок та меж й околів, що звужуються). Розробляється метод гомометичних перетворень, який за рахунок введення змінних метричних характеристик дає можливість отримати наближення до глобального екстремуму задачі ПРР, та метод спрямованого перебору локальних екстремумів, що здійснює плавний перехід від одного локального екстремуму до іншого, з кращим значенням функції цілі.

Метод гілок та меж. Загальна схема методу полягає в розбитті множини допустимих розв'язків на підмножини меншої вимірності (розмірів). Ця процедура рекурсивно застосовується для всіх підмножин. Отримані підмножини утворюють дерево розв'язків. Завдяки правилам відтинання неперспективні підмножини не підлягають подальшому розгалуженню. Це дозволяє значно скоротити кількість варіантів у порівнянні з повним перебором. Схема методу гілок та меж застосовується при розв'язанні як задачі розміщення з неперервними змінними [252], так і задачі КР для перебору різних значень двійкових змінних.

Метод околів, що звужуються, ґрунтується на статистичних властивостях функції цілі на перестановках гіперкуль або дереві розв'язків. Він дозволяє організувати спрямований перебір послідовностей гіперкуль або гілок дерева розв'язків. Для його реалізації введені метрики на множинах перестановок і вершин дерева. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на дискретних множинах. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи статистичної інформації, обираються центр та радіус нового околу. Якщо значення функції цілі не покращується, то радіус околів зменшується. Процес продовжується, доки радіус околу не стає мінімально можливим, а поліпшень функції цілі не знайдено. Метод має не меншу ефективність, ніж класичний метод випадкового пошуку Монте-Карло. Метод використовується як для пошуку розв'язків задач HSOA, так і для побудови перспективних допустимих початкових точок.

В основі *методу гомотетичних перетворень* лежить ідея введення змінних метричних характеристик гіперкуль. Задача ПРР може бути зведена до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі, в яких відбуваються гомотетичні перетворення гіперкуль. Завдяки лінійності функції цілі локальні екстремуми задач знаходяться в крайніх точках області допустимих рішень. Розв'язок останньої задачі вважається апроксимацією до глобального максимуму задачі ПРР.

Метод спрямованого перебору локальних екстремумів (Jump Algorithm) застосовується для розв'язання задач ODP. В основі цього методу – ідея введення змінних радіусів гіперкуль, що розміщуються. Метод стартує з локального екстремуму задачі ODP. Функція цілі допоміжної задачі з додатковими змінними формулюється таким чином, щоб гіперкулі зайняли максимальний об'єм (площу) області розміщення. Початкові радіуси гіперкуль змінюються, але після отримання розв'язку цієї допоміжної задачі радіуси гіперкуль знову поновлюють свої "еталонні" значення з урахуванням їх перерозподілу в отриманій точці. Доводиться теорема про те, що функція

цілі основної задачі за певних умов буде не гірше, ніж у початковому локальному екстремуму (див. 5.1.1.3). Процес продовжується, доки є поліпшення функції цілі. Метод наочно демонструє єдність дискретної й неперервної природи задач розміщення, але добре працює тільки, якщо радіуси гіперкуль рівномірно розподілені в діапазоні між мінімальним і максимальним значеннями. Чим більше неоднорідність радіусів, тим менша ефективність методу. Для неоднорідно розподілених радіусів краще застосовувати методи околів, що звужуються.

Метод мультистарту застосовується разом з усіма методами локальної й глобальної оптимізації, окрім методу гілок та меж. Як наближення до глобального екстремуму задачі вибирається найкращий локальний екстремум або наближення до локального екстремуму.

Для переходу від задачі КР до задачі ODP введено контейнер із змінним коефіцієнтом гомотетії, який вважається змінною метричною характеристикою контейнера.

Детально методи описані в п'ятому розділі.

4.5 Стратегії розв'язання

Після аналізу всіх чинників, які впливають на побудову математичних моделей, дослідження особливостей моделей пропонуються шість основних стратегій для розв'язання задач HSOA: три стратегії для розв'язання задач ODP (2.4)–(2.6), та три – для задач КР (2.7)–(2.9).

У кожній стратегії передбачені:

- методи побудови допустимих початкових точок області допустимих розв'язків;
- методи локальної оптимізації;
- методи глобальної оптимізації.

Розглянемо основні стратегії для різних задач, математичні моделі яких описані в розділах 2 та 3. Залежно від додаткових особливостей задачі можливі модифікації основних стратегій.

4.5.1 Стратегії розв'язання задач ODP

Математична модель задачі HSOA у контейнері із змінними метричними характеристиками для довільної вимірності має вигляд (2.4)–(2.7). У дисертаційній роботі розглядаються стратегії розв'язання задач із однією змінною метричною характеристикою.

Для отримання теоретичного глобального екстремуму задачі для довільної вимірності гіперкуль можна виконати модифікацію методу гілок та меж, запропонованого в [252] для розв'язання двовимірної задачі розміщення кругів в прямокутнику фіксованої ширини та мінімальної довжини. Кінцеві вершини дерева розв'язків – усі можливі системи $m = dn + 1$ рівнянь, які описують межу області D . Розв'язки сумісних систем визначають крайні точки області D , включаючи всі локальні екстремуми. Таким чином, дерево реалізує повний перебір усіх крайніх точок. Проте, серед цих систем рівнянь є дуже велика кількість несумісних систем. Застосовані правила відтинання не дозволяють значно зменшити кількість вершин, а, отже, кількість систем, які треба розв'язувати. Тільки частину систем можна розв'язати в явному вигляді, а решту – треба розв'язувати за допомогою числових методів, наприклад, методом Ньютона. Система може мати декілька розв'язків, які залежать від вибору початкової точки. Незначна зміна координат початкової точки може вплинути на отримання різних розв'язків однієї системи. Запропонований підхід не придатний для отримання глобальних розв'язків для задач розміщення більше 10 куль. Очевидно, що із збільшенням вимірності простору кількість гіперкуль, для яких можна буде отримати розв'язок у такий спосіб, ще зменшиться.

Щоб подолати ці недоліки, розроблено дві стратегії розв'язання, згідно з якими розглядаються спеціально побудовані піддерева дерева розв'язків. Вершинам цих зрізаних дерев відповідають системи, які можна розв'язати в аналітичному вигляді й які визначають крайні точки області допустимих розв'язків..

Таким чином, залежно від метричних особливостей гіперкуль пропонуються три стратегії розв'язання задачі (2.4)–(2.7): стратегія на основі статистичної оптимізації на перестановках гіперкуль; стратегія на основі статистичної оптимізації на дереві розв'язків; стратегія на основі занурення в простір більшої розмірності.

Розглянемо стратегії більш детально.

4.5.1.1 Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) на основі статистичної оптимізації на перестановках гіперкуль

Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) застосовується для розміщення невеликої кількості куль (10-60) з різними радіусами, значення яких сильно відрізняються один від одного. Вона ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації, завдяки якій вибираються перспективні перестановки куль.

Основні етапи стратегії:

1. Відповідно до випадково згенерованих послідовностей будується набір λ_1 крайніх точок $\omega^i \in D, i = 1, 2, \dots, \lambda_1$, за допомогою жадібного алгоритму. Послідовність визначає порядок гіперкуль, в якому застосовується метод оптимізації за групами змінних.

2. Крайня точка з кращим значенням функції цілі:

$$\bar{\omega}^1 = \arg \max_{\omega \in \{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{\lambda_1}\}} \zeta(\omega)$$

й відповідна їй перестановка вибираються як центр околу U_1 на множині перестановок.

3. Згідно з модифікацією методу околів, що звужуються (див. [284]) послідовно визначаються кращі крайні точки $\bar{\omega}^j$, які є центрами околів $U_j, j = 1, 2, \dots, \tau$.

4. З останнього околу U_τ вибирається декілька кращих точок $\tilde{\omega}^j, j=1,2,\dots,\gamma$, які беруться як початкові точки, й за комбінованим методом декомпозиції й IPOPT [280] обчислюються локальні екстремуми $\omega^{*j}, j=1,2,\dots,\gamma$, задачі (2.4)–(2.7).

6. Насамкінець, точка

$$\omega^* = \arg \max_{\omega \in \{\omega^{*1}, \omega^{*2}, \dots, \omega^{*\gamma}\}} \zeta(\omega)$$

є наближенням до глобального екстремуму задачі (2.4)–(2.7).

Алгоритм методу околів, що звужуються на множині перестановок, дозволяє сформувати послідовність центрів околів, яка збігається до точки, наближеної до глобального екстремуму. Схема Стратегії 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) подана на рис. 4.5.

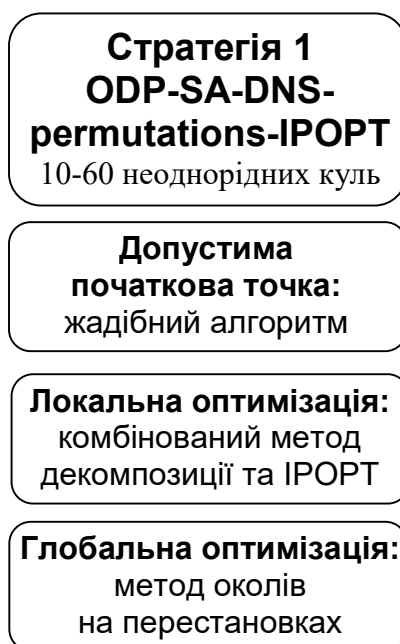


Рис. 4.5. Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT)

4.5.1.2 Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) на основі статистичної оптимізації на дереві розв'язків

Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) використовується для задачі (2.4)–(2.7) для куль з різними радіусами. Зрозуміло, що якщо всі кулі будуть конгруентні, то перестановки є інваріантними й дадуть одну крайню точку. Тому для рівних куль пропонується інша модифікація методу околів, що звужуються. Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) застосовується для розміщення 10-150 рівних куль. Розглянемо основні її етапи.

1. Будується спеціальне дерево, яке визначає крайні точки області D . Для побудови використовується схема методу послідовно-одиначного розміщення. Вершинам дерева відповідають можливі розміщення кулі, такі що вона дотикається до трьох об'єктів: розміщених куль або межі контейнера. За такого вибору системи можна розв'язати методом виключення змінних в явному вигляді.

2. Кожній кінцевій вершині ставиться у відповідність деяка послідовність n чисел. Ці послідовності утворюють дискретну множину, на якій уводиться Евклідова метрика.

3. На цій дискретній множині застосовується метод околів, що звужуються, для спрямованого перебору крайніх точок.

4. Отримані крайні точки розглядаються як початкові точки й за допомогою розв'язувача IPOPT [280] обчислюються відповідні локальні екстремуми.

5. Вибирається кращий локальний екстремум u^* , який є наближенням до глобального екстремуму.

Алгоритм методу околів, що звужуються на дереві розв'язків, дозволяє сформулювати послідовність центрів околів, яка збігається до точки, наближеної до глобального екстремуму. Схема Стратегії 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) подана на рис. 4.6.



Рис. 4.6. Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT)

4.5.1.3 Стратегія 3 (ODP-random-JA-IPOPT) на основі методу спрямованного перебору локальних екстремумів

Стратегія 3 (ODP-random-JA-IPOPT) застосовується для розміщення 10-300 гіперкуль різних радіусів, значення яких плавно змінюються від найменшого до найбільшого (задача (2.4)–(2.7)). Вважається, що радіуси всіх розміщуваних гіперкуль є змінними. Це дає можливість за допомогою спеціально побудованих оптимізаційних задач гнучко перерозподілити значення радіусів гіперкуль таким чином, щоб зайняти максимальний об'єм (площу) контейнера. Такий підхід дозволяє максимально використовувати єдність дискретної й неперервної природи задачі HSOA.

Розглянемо основні етапи стратегії.

1. З використанням методів випадкового розміщення й оптимізації нев'язок обчислюються допустимі початкові точки.
2. Обчислюються локальні екстремуми (комбінований метод докомпозиції та IPOPT).

3. Завдяки розв'язанню допоміжних задач із змінними радіусами здійснюється спрямований перебір локальних екстремумів і пошук наближення до глобального мінімуму основної задачі.

Схема Стратегії 3 (ODP-random-JA-IPOPT) подана на рис. 4.7.



Рис. 4.7. Стратегія 3 (ODP-random-JA-IPOPT)

4.5.2 Стратегії розв'язання задач КР

Загальна математична модель задачі КР має вигляд (2.7)–(2.9). Основною особливістю задачі є присутність дискретних і неперервних змінних. Для розв'язання задачі, загалом, потрібен, по-перше, вибір оптимального варіанту за дискретними змінними й, по-друге, пошук точки області допустимих розв'язків за неперервними змінними. При розміщенні рівних гіперкуль вибір за дискретними змінними зводиться до вибору кількості гіперкуль, що розміщуються, тому в цьому випадку необхідно застосовувати спеціальну стратегію. При розміщенні великої кількості гіперкуль (рівних і нерівних) доцільно використовувати методологію послідовно-одиначного розміщення й методи оптимізації за групами змінних. Вибір методу побудови початкових точок залежить від співвідношень розмірів гіперкуль і контейнера, кількості, інших метричних характеристик гіперкуль.

4.5.2.1 Стратегія 4 (KP-random-tree-IPOPT) на основі методу гілок та меж

Стратегія 4 (KP-random-tree-IPOPT) застосовується для розміщення 10-30 гіперкуль різних радіусів, які треба вибрати із заданого набору гіперкуль, в області заданих розмірів. Розглянемо основні етапи стратегії.

1. Побудуємо дерево розв'язків, яке реалізує повний перебір усіх варіантів вибору гіперкуль із заданого набору (відповідних значень двійкових змінних).

2. Розробимо набір правил відтинання, який дозволить скоротити кількість вершин дерева.

3. Розміщуємо гіперкулі згідно з кінцевими вершинам зрізаного дерева розв'язків, використовуючи метод локальної оптимізації (комбінований метод декомпозиції та IPOPT).

4. Вибираємо точку, якій відповідає максимальне значення функції цілі – об'єму розміщуваних гіперкуль.

Схема Стратегії 4 (KP-random-tree-IPOPT) подана на рис. 4.8.

4.5.2.2 Стратегія 5 (IPP-random/lattice-IPOPT) розміщення рівних гіперкуль на основі гомотетичних перетворень

Стратегію 5 (IPP-random/lattice-IPOPT) доцільно використовувати для розміщення 10-5000 рівних гіперкуль. Вона ґрунтується на методі гомотетичних перетворень.

Нехай n – кількість гіперкуль, які можна розмістити в контейнері.

1. Вибирається початкове значення кількості гіперкуль $\lambda < n$.
2. Початкові точки будуються за допомогою методів ґратчастого розміщення (для $d \leq 3$, $n \geq 20$, контейнер без зон заборони), випадкового розміщення або оптимізації нев'язок, якщо контейнер має зони заборони.

3. Для кожної початкової точки розв'язується допоміжна задача із змінними радіусами, яка визначає, чи можливе розміщення λ гіперкуль у контейнері (комбінований метод декомпозиції та IPOPT, метод можливих напрямків).



Рис. 4.8. Стратегія 4 (KP-random-tree-IPOPT)

4. Якщо розміщення можливе, то кількість гіперкуль збільшується на одиницю. Причому початкові точки визначаються на основі спеціальної процедури, в якій ураховується розміщення попередніх гіперкуль.

5. Якщо розміщення неможливе з усіх початкових точок, то розміщення попередніх гіперкуль береться як апроксимація до глобального екстремуму.

Схема Стратегії 5 (PPP-random/lattice-local) подана на рис. 4.9.

Якщо кількість гіперкуль більше 5000 (для $d = 2$), то здійснюється пошук наближень до локальних екстремумів за допомогою локальної оптимізації за групами змінних. Тривалість процесу визначається наявними обчислювальними ресурсами.

4.5.2.3 Стратегія 6 (PPP-random-SA-Lagrange) розміщення "великої" кількості рівних гіперкуль на основі методу множників Лагранжа

При розміщенні "великої" кількості гіперкуль найщільнішим буде регулярне ґратчасте розміщення. Але в більшості прикладних задач є

необхідність моделювати нерегулярне розміщення гіперкуль. Застосування методів пошуку локального екстремуму обмежено обчислювальною складністю таких алгоритмів. Тому для таких задач пропонується використовувати методи випадкового розміщення (Монте-Карло) або методи локальної оптимізації за групами змінних.



Рис. 4.9. Стратегія 5 (IPP-random/lattice-local)

Стратегія 6 (IPP-random-SA-Lagrange) ефективно працює для розміщення понад 5000 рівних куль. Стратегія за своєю логічною схемою схожа на попередню, але оптимізація виконується за групами змінних.

1. Вибирається група змінних (звичайно d змінних).
2. Допустима початкова точка будується методом випадкового розміщення.
3. Якщо не вдалося знайти початкову точку, яка належить області допустимих розв'язків, за визначену кількість спроб, то розміщення попередніх гіперкуль береться як розв'язок задачі.
3. Застосовується метод локальної оптимізації за групою змінних (метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа).

4. Кількість гіперкуль збільшується на одиницю й процес повторюється.

Схема Стратегії 6 (IPP-random-SA-descent-Lagrange) подана на рис. 4.10.



Рис. 4.10. Стратегія 5 (IPP-random-tree-IPOPT)

Особливістю цієї стратегії є критерій зупинки процесу розміщення в тому випадку, коли неможливо отримати допустиму точку.

За необхідності стратегія може бути застосована для $d \geq 4$.

Загальна структура запропонованих стратегій підсумовується на рис. 4.11.

4.6 Висновки за розділом 4

У четвертому розділі описано методологію розв'язання задач HSOA.

Проведено аналіз основних чинників, які впливають на вибір стратегії розв'язання задачі, описані основні методи побудови допустимих початкових точок, методи розв'язання задачі. Залежно від функції цілі задачі та



Рис. 4.11. Загальна структура стратегій

Стратегія передбачає вибір способів побудови допустимих початкових точок, методів локальної та глобальної оптимізації. З огляду на додаткові особливості можливі модифікації стратегій.

Використання для задач КР шляхом ідеї введення змінного коефіцієнта гомотетії контейнера надає можливість розв'язувати задачі цього класу як задачі ODP і, таким чином, застосувати для них метод спрямованого перебору локальних екстремумів.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [1, 3, 4, 6, 9, 11-13, 15, 16, 18-24, 26, 27, 31-38, 40-43, 45-49, 50-52, 54-62].

РОЗДІЛ 5

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОСНОВНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ ЗАДАЧІ HSOA

У п'ятому розділі відповідно до стратегій, запропонованих у четвертому розділі, будуються методи розв'язання задач HSOA, математичні моделі яких побудовані в третьому розділі. З огляду на стратегії розв'язання для кожної задачі описуються методи побудови допустимих початкових точок, методи локальної й глобальної оптимізації. Для побудови методів локальної оптимізації застосовується метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень. Теоретично обґрунтовується ефективність методу спрямованого перебору локальних екстремумів, в якому відбуваються гомотетичні перетворення гіперкуль завдяки змінним радіусам. Вибір методів локальної й глобальної оптимізації відбувається відповідно до розробленої стратегії. Наведено графічні ілюстрації роботи методів.

5.1 Методи розв'язання задач розміщення кругів

5.1.1 Розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини

Вибір стратегії розв'язання задачі (3.2)–(3.4) залежить від метричних особливостей кругів. Якщо значення радіусів кругів плавно змінюються в сегменті між найменшим та найбільшим, то краще застосовувати Стратегію 3 (ODP-random-JA-IPOPT). Використання Стратегії 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT) та Стратегії 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) можливе, але вони є менш ефективними. У випадку сильної неоднорідності радіусів кругів найбільш ефективною буде Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT). Для задачі розміщення нерівних кругів застосуємо Стратегію 3.

Побудуємо метод розв'язання задачі, який ґрунтується на гомотетичних перетвореннях гіперкуль завдяки змінним радіусам кругів.

5.1.1.1 Побудова допустимих початкових точок та обчислення локальних мінімумів

Для розв'язання задач розміщення зазвичай застосовуються евристичні та жадібні алгоритми [139,142,143,226]. Проте при їх використанні більшість локальних екстремумів є недосяжними. Наприклад, неможливо отримати крайні точки, які відповідають таким розміщенням кругів не в кутах прямокутника. Щоб подолати цей недолік запропонований спеціальний метод побудови допустимої початкової точки.

Спочатку ми вибираємо значення довжини $l = l^s$, яке гарантує розміщення кругів C_i з радіусами $\hat{r}_i$, $i \in I$, у прямокутнику $P(l^s)$. Нехай радіуси r_i кругів C_i , $i \in I$, є змінними й утворюють вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Тоді $X = (u, r) \in \mathbb{R}^{3n}$ – вектор усіх змінних. У подальшому круг C_i з радіусом r_i , трансльований на вектор u_i , позначається як $C_i(u_i, r_i)$.

Після цього, побудуємо точку $X^M = (u^M, 0) = (u^M, 0, \dots, 0)$, де u^M вибирається випадково, так що $u_i \in P(l^s)$, $i \in I$ (рис. 5.1). Використовуючи початкову точку X^M , розв'язуємо задачу

$$F(\tilde{r}) = \max_{X \in D \subset \mathbb{R}^{3n}} F(r) = \max_{X \in D \subset \mathbb{R}^{3n}} \sum_{i=1}^n r_i, \quad (5.1)$$

де

$$D = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3n} : \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \right. \\ \left. \Phi_i^r(u_i, r_i, l) \geq 0, \varphi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I \right\}. \quad (5.2)$$

$$\Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2,$$

$$\Phi_i^r(u_i, r_i, l) = \min (x_i - r_i, l - x_i - r_i, y_i - r_i, w - y_i - r_i).$$

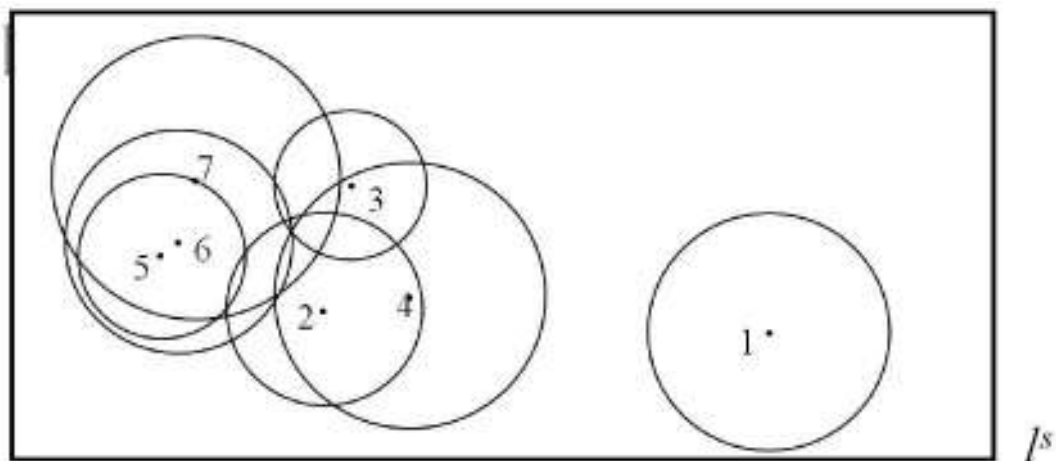


Рис. 5.1. Розміщення кругів, яке відповідає початковій точці задачі (5.1)–(5.2)

Зазначимо, що $X^M \in D$. У результаті розв'язання задачі (5.1)–(5.2) отримуємо точку локального максимуму $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ (рис. 5.2).

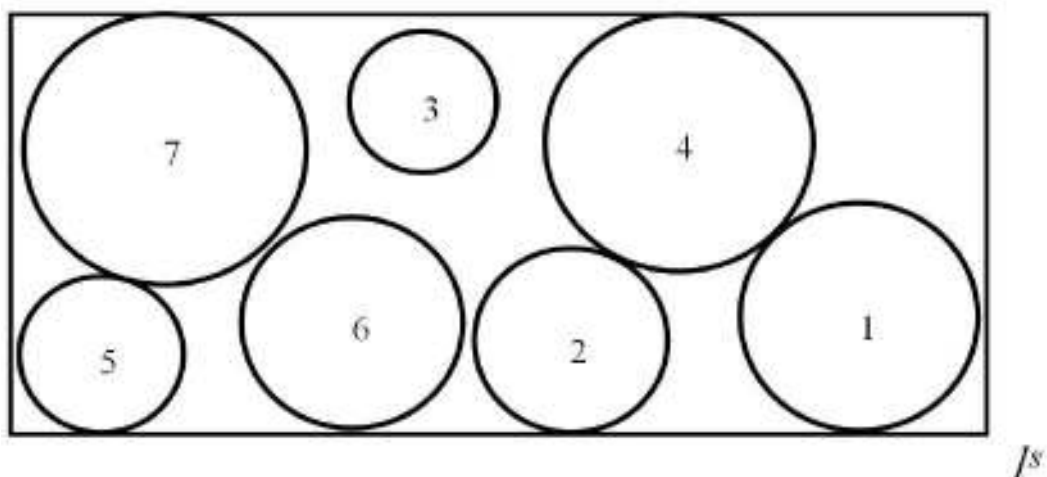


Рис. 5.2. Розміщення кругів, яке відповідає локальному максимуму задачі (5.1)–(5.2)

Задача (5.1)–(5.2) має ті ж самі властивості, що й задача (3.2)–(3.4), та декілька додаткових властивостей:

1. З нерівностей $\phi_i(r_i) \geq 0$, $i \in I$, в виразі (5.2) випливає, що якщо в точці $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ виконується рівність $F(\tilde{r}) = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i = \delta$, де $\delta = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i$, то $C_i(\tilde{u}_i, \tilde{r}_i) = C_i(\tilde{u}_i, \hat{r}_i)$, $i \in I$, й круги $C_i(\tilde{u}_i, \hat{r}_i)$, $i \in I$, розміщуються в

прямокутнику $P(l^s)$, тобто $\tilde{X}$ – точка глобального максимуму задачі (5.1)–(5.2).

2. Якщо точка $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ така, що принаймні одне значення $\tilde{r}_i$, $i \in I$, строго менше за $\hat{r}_i$, то круги $C_i(\tilde{u}_i, \hat{r}_i)$, $i \in I$, не розміщуються в $P(l^s)$.

Нехай $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ є розв'язком задачі (5.1)–(5.2) та $F(\tilde{r}) = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i = \delta$. Вибираємо точку $(\tilde{u}, l^s)$ як початкову й розв'язуємо основну задачу (3.2)–(3.4). В результаті обчислюємо точку локального мінімуму (u^*, l^*) (рис. 5.3).

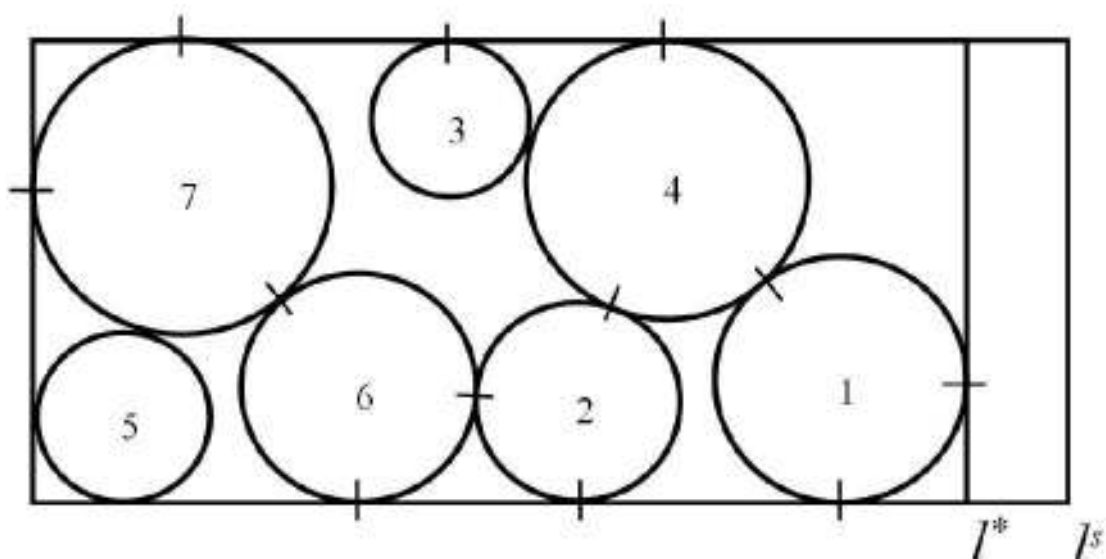


Рис. 5.3. Розміщення кругів, яке відповідає локальному мінімуму задачі (3.2)–(3.4)

5.1.1.2 Стратегія пошуку наближення до глобального екстремуму

Нехай (u^*, l^*) – точка локального мінімуму задачі (3.2)–(3.4). Розглянемо послідовність значень довжини прямокутника

$$l^k = l^* - \left(\frac{1}{2}\right)^k b, \quad b > 0, \quad k \in K = \{0, 1, 2, \dots, \alpha < \infty\}. \quad (5.3)$$

Оскільки в точці (u^*, l^k) порушуються деякі нерівності $\Phi_i(u_i, l^k) \geq 0$, $i \in I$, (рис. 5.4), то $(u^*, l^k) \notin W$. Тому побудуємо точку $(\eta^k, X) = (\eta^k, u^*, \tilde{r}) \in \mathbb{R}^{3n+1}$, де

$$\eta^k = \min \left\{ \Phi_i^r(u_i^*, \hat{r}_i, l^k), i \in I \right\}. \quad (5.4)$$

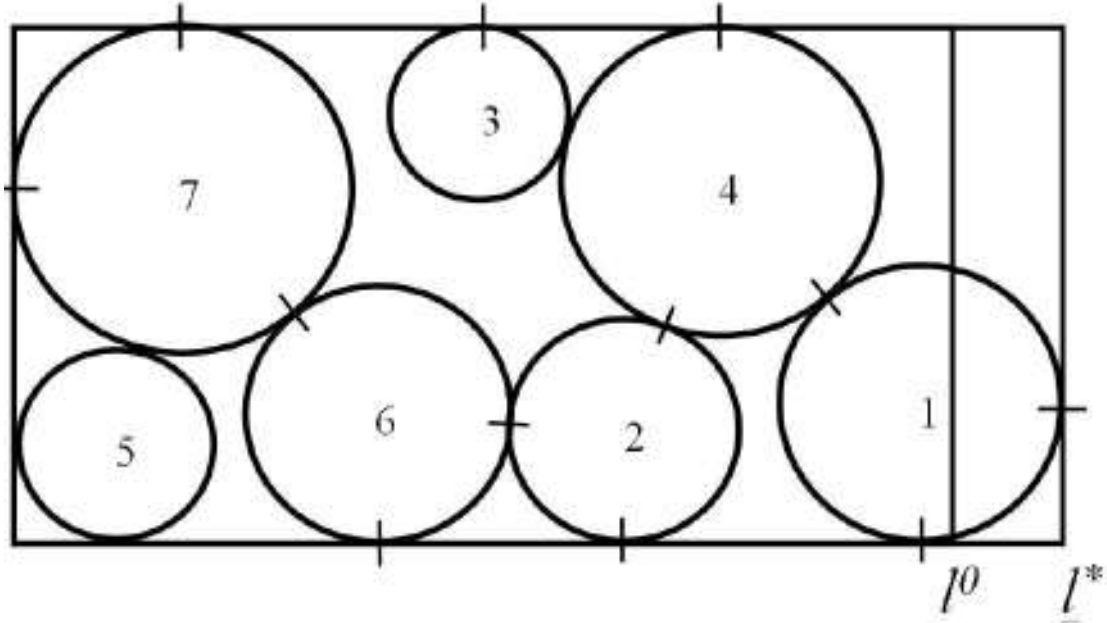


Рис. 5.4. Зменшення довжини прямокутника

Вибираємо початкову точку (η^k, X) й розв'язуємо задачу

$$\eta^* = \max_{(\eta, X) \in G \subset \mathbb{R}^{3n+1}} \eta, \quad (5.5)$$

де

$$G = \left\{ (\eta, X) \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) - \eta \geq 0, 0 < i < j \in I, \right. \quad (5.6)$$

$$\left. \Phi_i^r(u_i, r_i, l^k) - \eta \geq 0, \hat{r}_i - r_i - \eta \geq 0, r_i \geq 0, i \in I, -\eta \geq 0 \right\}.$$

У результаті розв'язання задачі (5.5)–(5.6), отримуємо точку $(\eta^{*k}, X^{*k}) = (0, X^{*k})$, показану на рис. 5.5. Тут і в подальшому круги з

поточними радіусами r_i зображуються жирними лініями, а круги з початковими радіусами $\hat{r}_i$ – тонкими лініями.

Задача (5.5)–(5.6) має ті ж самі властивості, що й задача (3.2)–(3.4) та таку додаткову особливість: завдяки нерівностям $\hat{r}_i - r_i - \eta \geq 0$, $-\eta \geq 0$, $i \in I$, глобальний максимум $\eta^* = 0$ задачі (5.5)–(5.6) завжди існує.

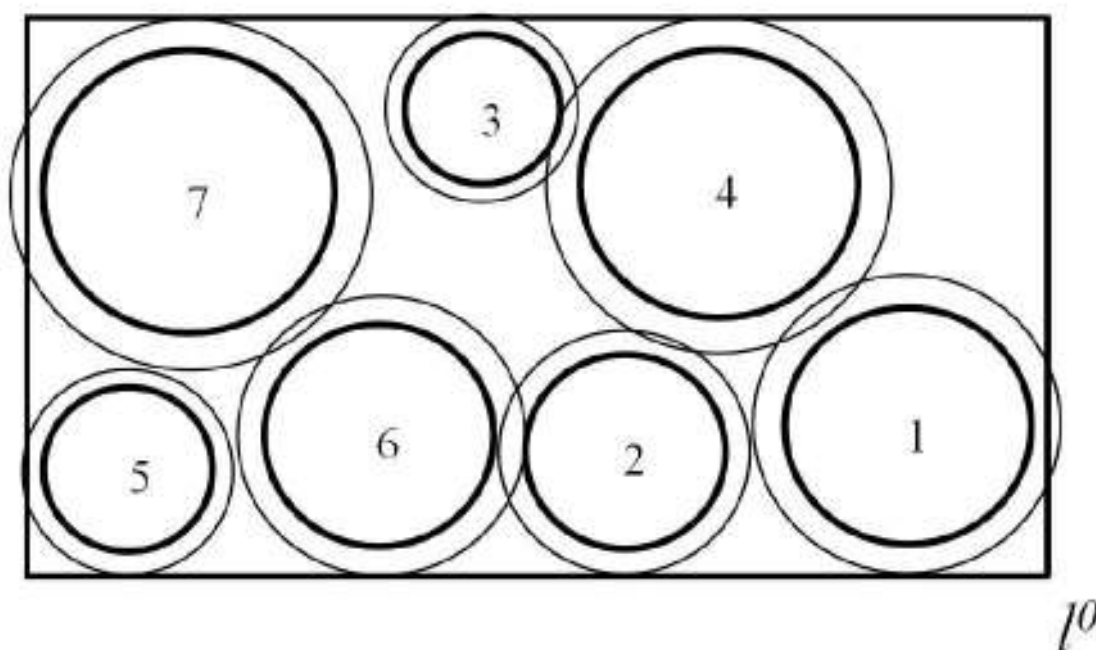


Рис. 5.5. Розміщення кругів, яке відповідає розв'язку задачі (5.5)–(5.6)

Нехай $(0, X^{*k})$ – точка глобального максимуму задачі (5.5)–(5.6). Це означає, що $X^{*k} \in D$ (5.2) (рис. 5.5). Тому вибираємо початкову точку X^{*k} , та розв'язуємо задачу (5.1)–(5.2). Нехай $\tilde{X}^k = (\tilde{u}^k, \tilde{r}^k)$ – точка глобального максимуму задачі (5.1)–(5.2) (рис. 5.6).

Можливі дві ситуації: 1) $F(\tilde{r}^k) = \delta$ (рис. 5.2) та 2) $F(\tilde{r}^k) < \delta$ (рис. 5.6).

1) Нехай $F(\tilde{r}^k) = \delta$ та $k = 0$ в (5.3), тобто $\tilde{X}^k = \tilde{X}^0$. З рівності $F(\tilde{r}) = \delta$ випливає, що $\tilde{X}^0 = (\tilde{u}^0, \tilde{r}^0)$, де $\tilde{r}^0 = \hat{r}$ – компонента точки глобального максимуму задачі (5.1)–(5.2) та $(\tilde{u}^0, l^0) \in W$. Далі, узявши початкову точку

$(\tilde{u}^0, l^0)$, розв'язуємо (3.2)–(3.4). В результаті отримуємо точку локального мінімуму (u^*, l^*) . Після цього, поклавши $k = 0$ в (5.3), побудуємо нову точку $(\eta^0, X^0) = (\eta^0, u^*, l^0) \in G$ (5.6), і послідовно розв'язуємо задачі (5.5)–(5.6), (5.1)–(5.2) та (3.2)–(3.4). В результаті отримуємо точку локального мінімуму (u^*, l^*) задачі (3.2)–(3.4). Процес продовжується доти, доки не виконається умова $F(\tilde{r}^0) < \delta$. Далі реалізуємо основний етап оптимізаційного процесу (див. 6.1.1.4). Якщо $F(\tilde{r}^k) = \delta$, збільшуємо k на 1 у (5.3) та визначаємо l^{k+1} та η^{k+1} (див. (5.4)). Після цього будуємо точку $(\eta^{k+1}, X^{k+1}) \in G$ (5.6), і розв'язуємо задачі (5.5)–(5.6), (5.1)–(5.2) та (3.2)–(3.4) й так далі, доки не виконається умова або $F(\tilde{r}^{k+1}) = \delta$, або $(1/2)^{k+1}b < \varepsilon > 0$, де ε – точність розв'язання.

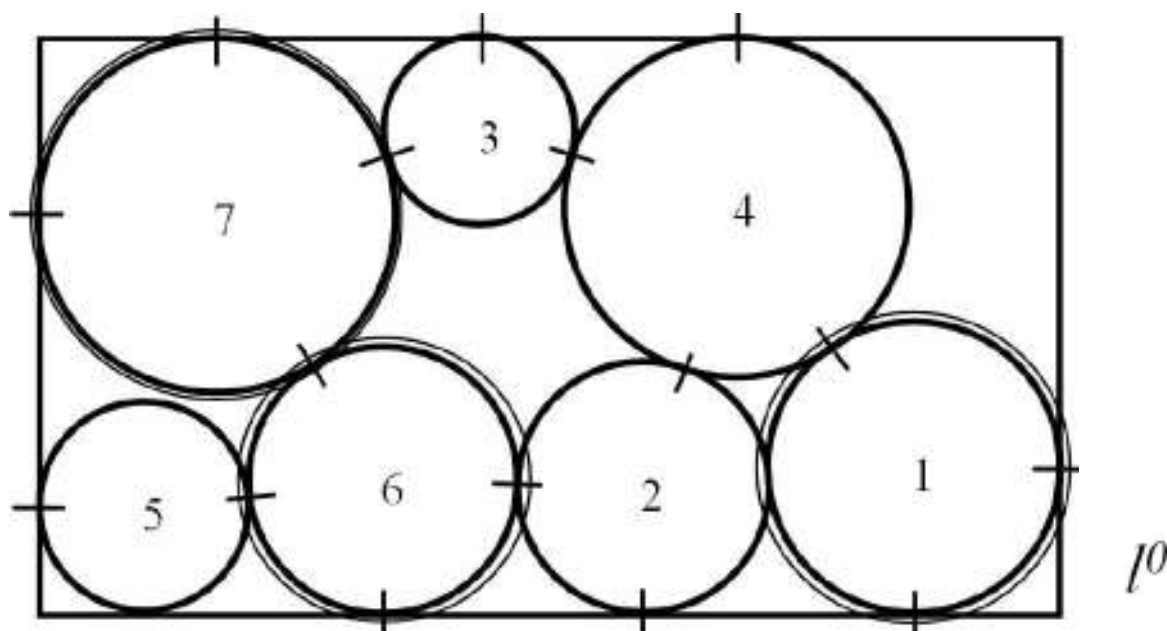


Рис. 5.6. Випадок $F(\tilde{r}^k) < d$

Якщо $F(\tilde{r}^{k+1}) = \delta$, то, взявши $k = 0$ в (5.3), будуємо нову точку $(\eta^0, X^0) = (\eta^0, \tilde{u}^{k+1}, \tilde{r}^{k+1}) = (\eta^0, \tilde{u}^{k+1}, \hat{r}) \in G$ (5.6), та послідовно розв'язуємо задачі (5.5)–(5.6), (5.1)–(5.2) та (3.2)–(3.4) й так далі.

Якщо $(1/2)^{k+1}b < \varepsilon$, то оптимізаційний процес припиняється. Точка (u^*, l^*) , отримана на попередньому, $k-1$ -му кроці, – наближення до точки глобального мінімуму задачі (3.2)–(3.4). Якщо застосовується метод мультистарту, то будується інша точка X^M (рис. 5.1), й процес повторюється.

2) Нехай $F(\tilde{r}^k) < \delta$. У цьому випадку є дві ситуації: $\tilde{X}^k$ – точка або глобального, або локального максимуму задачі (5.1)–(5.2).

Якщо $\tilde{X}^k$ є точкою глобального максимуму, то або будується інша точка X^M (рис. 5.1), й процес повторюється, або точка (u^*, l^*) , отримана на попередньому, $k-1$ -му кроці, – наближення до точки глобального мінімуму задачі (3.2)–(3.4).

Якщо ж $\tilde{X}^k$ – точка локального максимуму, то для переходу з однієї точки локального максимуму $\tilde{X}^k$ задачі (5.1)–(5.2) до іншої $\tilde{\tilde{X}} = (\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{r}})$, такої що $F(\tilde{\tilde{r}}) > F(\tilde{r}^k)$, реалізуємо основний етап оптимізаційного процесу (див. 6.1.1.4). Процес продовжується, доки не виконається одна з умов: $F(\tilde{r}) = \delta$ або $(1/2)^k b < \varepsilon$.

Для розв'язання задач (3.2)–(3.4), (5.1)–(5.2) та (5.5)–(5.6) використовуються комбінований метод декомпозиції й ІРОРТ та стратегія набору активних обмежень [257-259, 280].

Розглянемо детальніше перехід з однієї точки локального максимуму $\tilde{X}^k$ задачі (5.1)–(5.2) до іншої $\tilde{\tilde{X}} = (\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{r}})$, такої що $F(\tilde{\tilde{r}}) > F(\tilde{r}^k)$, та теоретично обґрунтуємо можливість такого переходу.

5.1.1.3 Перехід від одного локального максимуму до іншого

Нехай $\tilde{\tilde{X}} = (\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{r}})$ – точка локального максимуму задачі (5.1)–(5.2) та $F(\tilde{\tilde{r}}) < \delta$ (рис. 5.6), тобто виконується принаймні одна з нерівностей $\tilde{\tilde{r}}_i - \hat{r}_i < 0$, $i \in I$. Розглянемо таку допоміжну задачу:

$$\Gamma(r^*) = \max_{X=(u,r) \in M \subset \mathbb{R}^{3n}} \Gamma(r), \quad (5.7)$$

де

$$\Gamma(r) = \sum_{i=1}^n r_i^2; \quad (5.8)$$

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3n}, \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \right. \quad (5.9)$$

$$\left. \Phi_i^r(u_i, r_i, l) \geq 0, \psi_{1i}(r_i) = \hat{r}_{i_n} - r_i \geq 0, \psi_{2i}(r_i) = r_i - \hat{r}_{i_1} \geq 0, i \in I \right\},$$

тобто обмеження $\phi_i(r_i) \geq 0, r_i \geq 0, i \in I$, задачі (5.1)–(5.2) замінюються обмеженнями $\psi_{1i}(r_i) \geq 0, \psi_{2i}(r_i) \geq 0, i \in I$, (див. (3.1)) та вибирається квадратична функція цілі $\Gamma(r)$ замість лінійної $F(r)$. Таким чином, змінні $r_i, i \in I$, не можуть бути більші за значення максимального радіусу $\hat{r}_{i_n}$ та менші за значення мінімального радіусу $\hat{r}_{i_1}$ (див. (3.1)). Це означає, що можуть бути порушені деякі нерівності з системи $\phi_i(r_i) \geq 0, i \in I$.

Тепер обчислимо вектор найшвидшого зростання Y^0 для задачі (5.7)–(5.9) у точці $\tilde{X}$ та побудуємо точку

$$X^\nu = \tilde{X} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} Y^0, \nu = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Зауваження 5.1. В силу (5.10) маємо $\Gamma(r^\nu) > \Gamma(\tilde{r})$ для будь-якого ν . Це дозволяє визначити таке m , що якщо $\nu \geq m$, то $X^\nu \neq \tilde{X}$ та $X^\nu \in M$, тобто $C_i(u_i^\nu, r_i^\nu), i \in I$, не накладаються й $C_i(u_i^\nu, r_i^\nu) \subset P(l^0), i \in I$.

Зауваження 5.2. Можлива ситуація, коли

$$\Gamma(r) > \sum_{i=1}^n \hat{r}_i^2.$$

З формули (5.10) випливає, що $r_i^\nu = \tilde{r}_i + (\frac{1}{2})^{\nu-1} y_i^0$, $i \in I$. Оскільки вектор Y^0 обчислюється для задачі (5.7)–(5.9), то значення деяких змінних $r_i = r_i^\nu$, $i \in I$, знаходяться на сегменті $[\hat{r}_n, \hat{r}_1]$. Отже, загалом, $X^\nu \notin D$ (див. (5.2)).

Таким чином, для деяких координат вектора X^ν маємо $r_i^\nu \geq \tilde{r}_i$, $i \in I_1 \subset I$, а для інших – $r_j^\nu < \tilde{r}_j$, $j \in I_2 \subset I$. Вважаємо, що множина індексів I_1 містить q елементів, а I_2 – p елементів, тобто $n = q + p$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ та $I_1 \cup I_2 = I$.

Нехай $\nu = m$. Координати вектора

$$\tilde{X}^{0m} = (\tilde{u}_1^{0m}, \tilde{u}_2^{0m}, \dots, \tilde{u}_n^{0m}, \tilde{r}_1^{0m}, \tilde{r}_2^{0m}, \dots, \tilde{r}_n^{0m})$$

формується на основі векторів $\tilde{X}$ (рис. 5.7) та X^m (рис. 5.8).

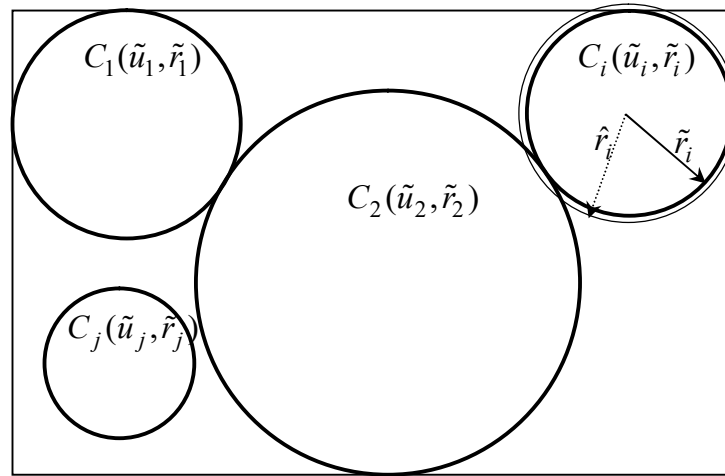


Рис. 5.7. Розміщення кругів, яке відповідає точці $\tilde{X}$

Нехай $r_i^m > \tilde{r}_i$ та $r_j^m < \tilde{r}_j$ (рис. 5.8). Якщо виконуються нерівності

$$\tilde{r}_i < r_j^m, \tilde{r}_j < r_i^m, \quad (5.11)$$

то координати $\tilde{r}_j^{0m}, \tilde{r}_i^{0m}$, $\tilde{u}_j^{0m}$ та $\tilde{u}_i^{0m}$ вектора $\tilde{X}^{0m}$ задаються так:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_i^{0m} &= \min\{r_i^m, \hat{r}_j\}, \quad \tilde{u}_i^{0m} = u_j^m, \\ \tilde{r}_j^{0m} &= \min\{r_j^m, \hat{r}_i\}, \quad \tilde{u}_j^{0m} = u_i^m.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Якщо не існує i , такого що виконуються нерівності (5.11), то беремо

$$\tilde{r}_j^{0m} = r_j^m, \quad \tilde{u}_j^{0m} = u_j^m. \quad (5.13)$$

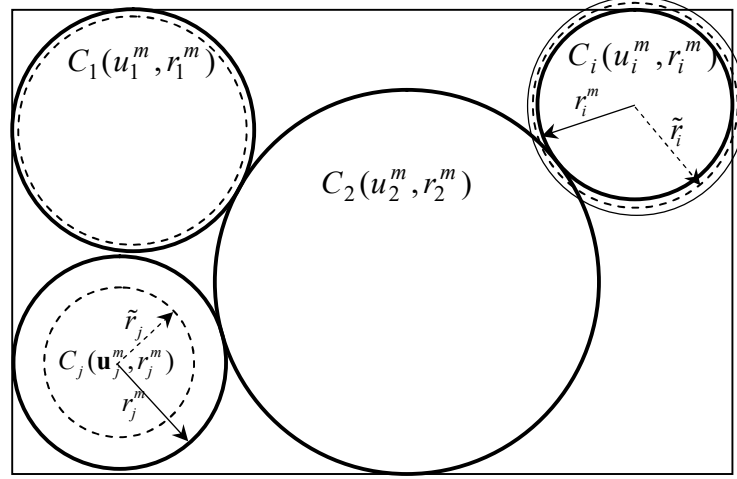


Рис. 5.8. Розміщення кругів, яке відповідає точці X^m

Якщо компоненти r_i^m та u_i^m не присутні в (5.12), то беремо

$$\tilde{r}_i^{0m} = r_i^m, \quad \tilde{u}_i^{0m} = u_i^m. \quad (5.14)$$

Очевидно, що розміщення кругів, які відповідають точкам локальних максимумів $\tilde{X}$ та $\tilde{X}^{0m} \neq X^m$, відрізняються координатами центрів деяких кругів C_j , $j \in I$ (рис. 5.9).

Зрозуміло, що існує ціле число N , таке що для всіх $v > N$ маємо $\tilde{X}^{0v} = X^v$, тобто круги не міняються місцями. Отже, якщо $v \leq N$, то $\tilde{X}^{0v}$ не знаходиться в зоні притягання точки локального максимуму $\tilde{X}$.

Теорема 5.1. Нехай $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{r})$ – точка локального максимуму, отримана з початкової точки $\tilde{X}^{0m}$. Якщо $m \leq N$, то $\Gamma(\tilde{r}) > \Gamma(\tilde{r})$.

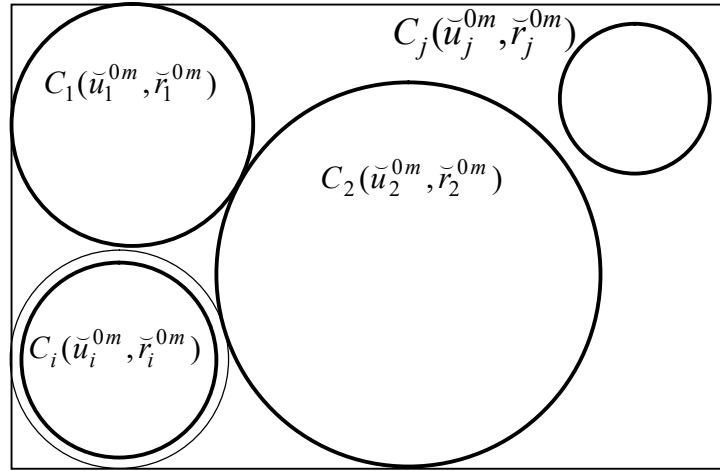


Рис. 5.9. Розміщення кругів, яке відповідає точці $\tilde{X}^{0m}$

Доведення. Для простоти, нехай точки $\tilde{X}^{0m}$ та $\tilde{X}$ відрізняються тільки значеннями r_j , r_i , u_j , u_i , виконуються нерівності (5.11) та $j < i$, тобто

$$\tilde{X}^{0m} = (u_1^m, u_2^m, \dots, \tilde{u}_j^{0m}, \dots, \tilde{u}_i^{0m}, \dots, u_n^m, r_1^m, r_2^m, \dots, \tilde{r}_j^{0m}, \dots, \tilde{r}_i^{0m}, \dots, r_n^m),$$

де $\tilde{r}_j^{0m}, \tilde{r}_i^{0m}$, $\tilde{u}_j^{0m}$ та $\tilde{u}_i^{0m}$ задаються відношенням або (5.12), або (5.13), або (5.14).

Перш за все, зазначимо, що $\tilde{X}^{0m} \neq X^m$ через вибір $m \leq N$. Із Зауваження 5.1 випливає, що $\tilde{X}^{0m} \in M$, тобто в точці $\tilde{X}^{0m}$ виконується система нерівностей

$$\left\{ \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i^r(u_i, r_i, l^0) \geq 0, r_i \geq 0, i \in I. \right.$$

Завдяки (5.12) у точці $\tilde{X}^{0m}$ справедливі нерівності $\phi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0$, $i \in I$. Це означає, що $\tilde{X}^{0m} \in D$. З урахуванням нерівностей (5.11) маємо $\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i^{0m} > \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i$, тобто $\Gamma(\tilde{r}^{0m}) > \Gamma(\tilde{r})$. Таким чином, якщо $\tilde{X}$ – точка локального максимуму, отримана із початкової точки $\tilde{X}^{0m}$, то $\Gamma(\tilde{r}) > \Gamma(\tilde{r})$.

Якщо точки $\tilde{X}^{0m}$ та $\tilde{X}$ відрізняються більшим числом координат, то теорема також справедлива.

Теорема 5.1 є теоретичною основою методу спрямованого перебору локальних екстремумів.

Метод складається з трьох етапів: основний етап, зменшення розмірності задачі та попарні перестановки. Розглянемо етапи методу більше детально.

5.1.1.4 Метод перебору локальних екстремумів

Нехай $\nu = m$, а (u^{*0}, l^{*0}) – точка локального мінімуму задачі (3.2)–(3.4). Розглянемо $l = l^0 = l^{*0} - b$ (див. (5.7)) та побудуємо точку $X^\square = (u^{*0}, \hat{r})$. Очевидно, що $X^\square \notin D$ (див. (5.1)–(5.2)), для деяких значень $i \in I$ маємо нерівності $\Phi_i(r_i, u_i, l^0) \geq 0, i \in I$. Тоді, беремо стартову точку $(\eta^0, X^\square)$ (див. (5.4)), розв'язуємо задачу (5.5)–(5.6) та отримуємо точку глобального максимуму $(0, X^0)$. Далі беремо стартову точку X^0 й обчислюємо точку локального максимуму $\tilde{X}$ задачі (5.1)–(5.2).

Нехай $F(\tilde{r}) < d$ (рис. 5.6), тобто круги $C_i(\tilde{u}_i, \hat{r}_i), i \in I$, не розміщуються в прямокутнику $P(l^0)$. Після цього обчислюємо вектор найшвидшого зростання Y^0 в точці $\tilde{X}$ для задачі (5.7)–(5.9) та будуємо точку $\tilde{X}^{0m}$ відповідно до (5.11)–(5.12). З урахуванням Зауваження 5.2 вводимо функцію

$$T(r) = \sum_{i=1}^n (\min(r_i, \hat{r}_i))^2 \quad (5.15)$$

та позначимо $\sigma = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i^2$.

Якщо $T(\tilde{r}^{0m}) > T(\tilde{r})$ та $T(\tilde{r}^{0m}) < \sigma$, то беремо радіуси $\tilde{r}_i^{0m}, i \in I$, в зростаючому порядку (див. (3.1)):

$$\tilde{r}_{j_1}^{0m} \leq \tilde{r}_{j_2}^{0m} \leq \dots \leq \tilde{r}_{j_n}^{0m} \quad (5.16)$$

та перенумеруємо круги $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_n}$ відповідно до послідовності (3.1). Внаслідок цього круги отримають нові номери $i_1, i_2, \dots, i_n$. Нарешті, оновлюємо точку $\tilde{X}^{0m}$, ураховуючи нові номери $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Наприклад, нехай точки $\tilde{X}$ відповідають нерівності $\tilde{r}_3 < \tilde{r}_5 < \tilde{r}_2 < \tilde{r}_6 < \tilde{r}_1 < \tilde{r}_4 < \tilde{r}_7$ та розміщення кругів, подане на рис. 5.6. Сформуємо послідовність індексів радіусів $(i_1, i_2, \dots, i_7) = (3, 5, 2, 6, 1, 4, 7)$ відповідно до (3.1). Обчислюємо точку $\tilde{X}^{0m}$, для якої $\tilde{r}_3^{0m} < \tilde{r}_5^{0m} < \tilde{r}_2^{0m} < \tilde{r}_1^{0m} < \tilde{r}_6^{0m} < \tilde{r}_4^{0m} < \tilde{r}_7^{0m}$ (див. розміщення кругів на рис. 5.10, а). Згідно з (5.16) побудуємо послідовність $(j_1, j_2, \dots, j_7) = (3, 5, 2, 1, 6, 4, 7)$. Далі перенумеруємо круги, користуючись правилом $(3, 5, 2, 6, 1, 4, 7) \rightarrow (3, 5, 2, 1, 6, 4, 7)$. Порівнюючи послідовності, робимо висновок, що круги C_1 та C_6 помінялися місцями. Тепер виконуємо корекцію точки $\tilde{X}^{0m}$, якій відповідає розміщення кругів, подане на рис. 5.10 б. Таким чином, отримуємо $\tilde{r}_3^{0m} < \tilde{r}_5^{0m} < \tilde{r}_2^{0m} < \tilde{r}_6^{0m} < \tilde{r}_1^{0m} < \tilde{r}_4^{0m} < \tilde{r}_7^{0m}$ та відновлюємо послідовність $(3, 5, 2, 6, 1, 4, 7)$ згідно з (3.1).

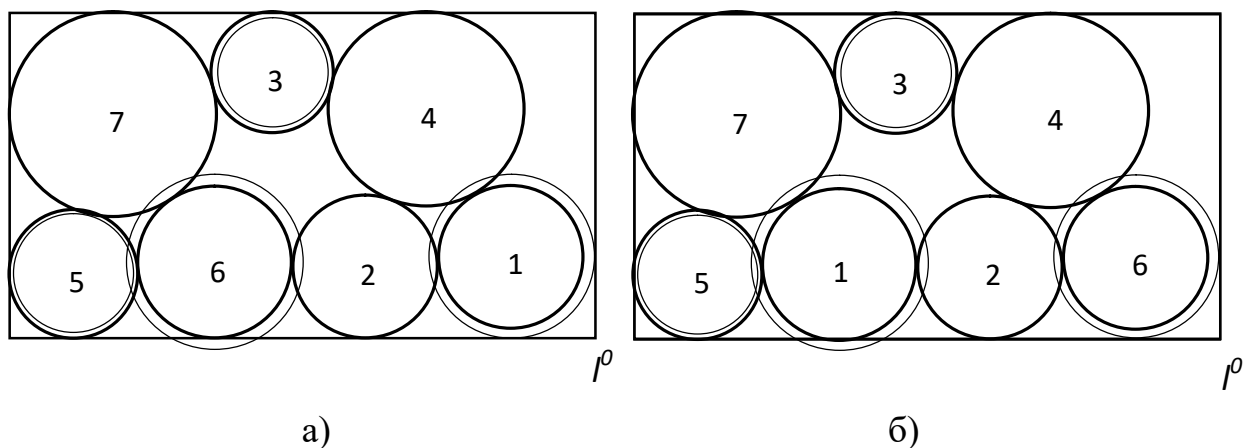


Рис. 5.10. Ілюстрація першого кроку

Після цього обчислюємо новий вектор найшвидшого зростання Y^0 у точці $\check{X}^{0m}$ для задачі (5.7)–(5.9) та відповідно до (5.11)–(5.14) будуємо нову точку $\check{X}^{0m}$ і так далі (рис. 5.11). Щоразу перебудовуємо точку $\check{X}^{0m}$, упорядковуємо радіуси $\check{r}_i^{0m}$, $i \in I$, в зростаючому порядку (5.16) та перенумеровуємо згідно з (3.1). Процес триває, доки не виконається умова $\|Y^0\| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – точність розв’язання.

Наприклад, з точки $\check{X}^{0m}$ (рис. 5.10 б) отримуємо нову точку $\check{X}^{0m}$, якій відповідає розміщення (рис. 5.11 а). В точці $\check{X}^{0m}$ номери кругів змінюються за правилом $(3,5,2,6,1,4,7) \rightarrow (5,3,1,2,6,4,7)$. На наступному кроці отримуємо ще одну нову точку $\check{X}^{0m}$, якій відповідає інше розміщення (рис. 5.11 б). Радіуси кругів змінюються, проте послідовність (5.16) не змінюється, тобто номери кругів залишаються ті ж самі. Після цього отримуємо нову точку $\check{X}^{0m}$ (рис. 5.11 в), в якій номери кругів змінюються за правилом $(3,5,2,6,1,4,7) \rightarrow (5,3,2,6,1,4,7)$. На наступному кроці – $(3,5,2,6,1,4,7) \rightarrow (3,5,6,2,1,4,7)$ (рис. 5.11 г). Нарешті, отримуємо точку локального максимуму задачі (5.7)–(5.9) (рис. 5.11 д). Номери кругів змінюються за правилом $(3,5,2,6,1,4,7) \rightarrow (3,5,2,1,6,4,7)$.

Може трапитись, що значення деяких радіусів кругів менше, ніж початкові значення $\hat{r}_i$, $i \in I$, в той час як інші – більші. Тому будуємо точку

$$\check{\check{X}}^{0m} = (\check{u}_1^{0m}, \check{u}_2^{0m}, \dots, \check{u}_n^{0m}, \min(r_1^{0m}, \hat{r}_1), \min(r_2^{0m}, \hat{r}_2), \dots, \min(r_n^{0m}, \hat{r}_n)) \in D.$$

Якщо $T(\check{r}^{0m}) = \sigma$ (див. (5.15)), то $\check{\check{X}}^{0m}$ – точка глобального максимуму задачі (5.1)–(5.2). Беремо початкову точку $(\check{u}^{0m}, l^0) \in W$ та розв’язуємо задачу (3.2)–(3.4) й т.д.

Якщо $T(\tilde{r}^{0m}) < \sigma$, то беремо початкову точку $\tilde{\tilde{X}}^{0m}$ та розв'язуємо задачу (5.1)–(5.2). Нехай точка $\tilde{X}^{0m}$ є розв'язком задачі (5.1)–(5.2). Якщо $F(\tilde{r}^{0m}) = d$, то $\tilde{X}^{0m}$ – точка глобального максимуму задачі (5.1)–(5.2) (рис. 5.12). Далі беремо початкову точку $(\tilde{u}^{0m}, l^0) \in W$ та розв'язуємо задачу (3.2)–(3.4). Отже, отримуємо новий локальний мінімум l^{*1} (рис. 5.13) і т.д.

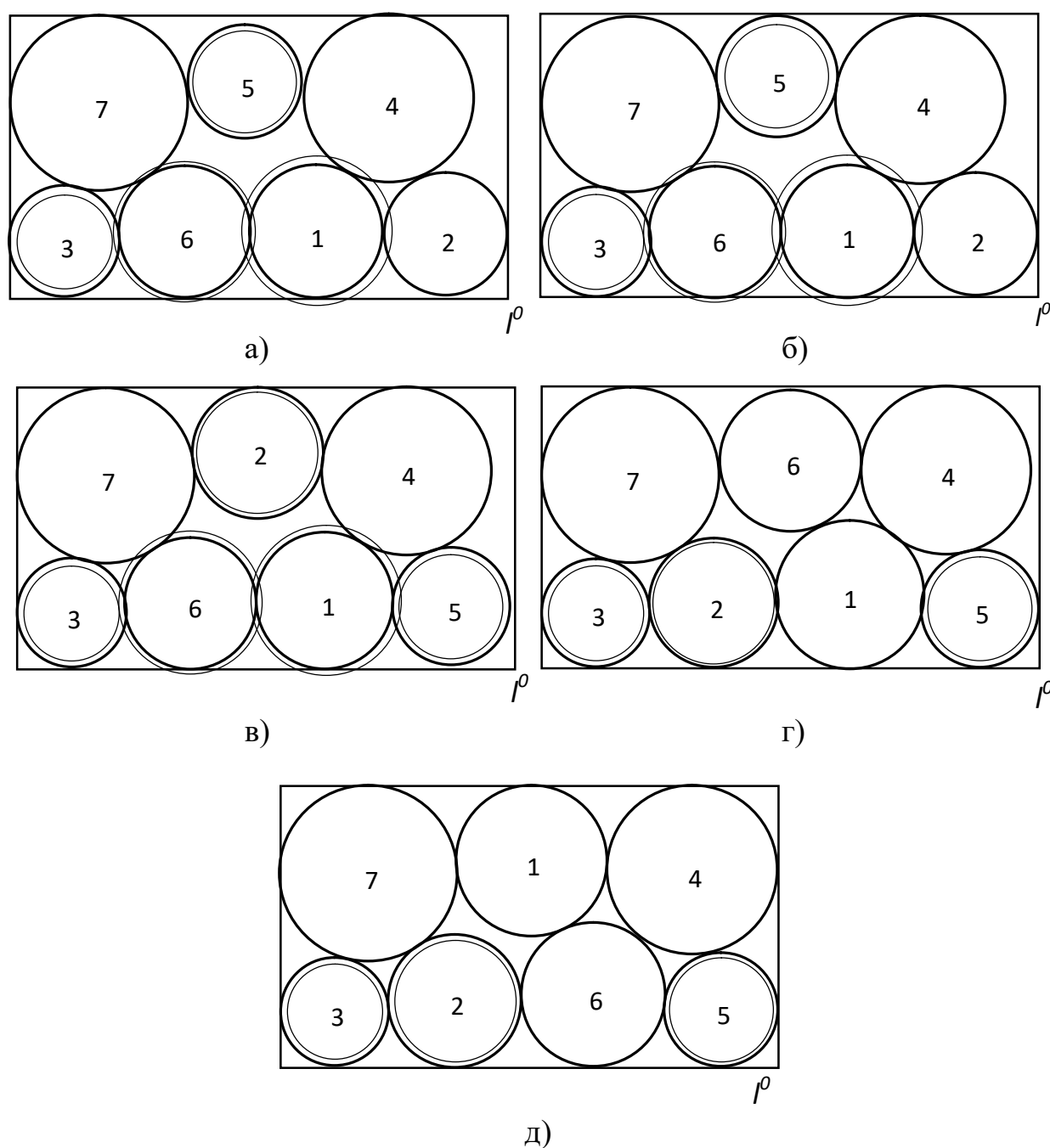


Рис. 5.11. Ілюстрація кроків отримання нового локального максимуму

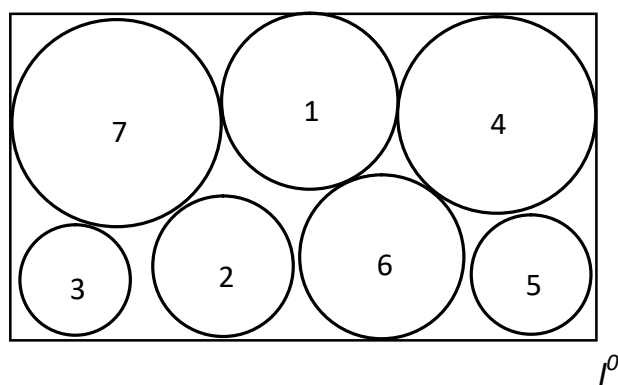


Рис. 5.12. Розміщення кругів, яке відповідає новому максимуму задачі (5.1)–(5.2)

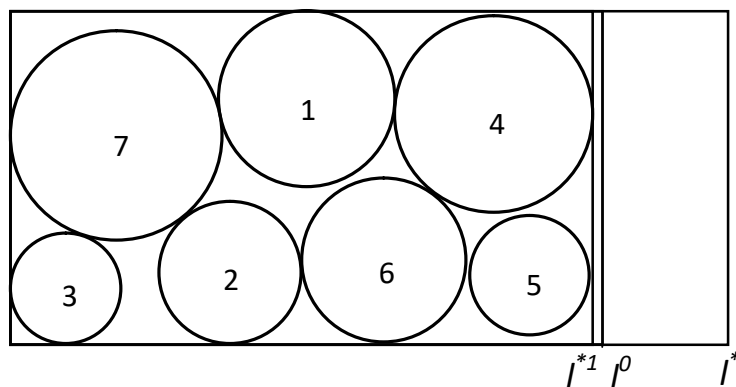


Рис. 5.13. Розміщення, яке відповідає новому максимуму задачі (3.2)–(3.4)

Якщо $T(\tilde{r}^{0m}) \leq T(\tilde{r})$ або $F(\tilde{r}^{0m}) < d$, то основний етап методу вичерпав себе – переходимо до наступного етапу.

5.1.1.5 Способи поліпшення локальних екстремумів

Після виконання основного етапу методу проаналізуємо розміщення кругів. Точка $\tilde{X}^{0m} \in M$ отримана для допоміжної задачі (5.7)–(5.9), в якій всі радіуси змінні й, загалом, відрізняються від початкових значень (3.1). За Теоремою 5.1 та формулою (5.15) можна зробити висновок, що якщо $r_i > \hat{r}_i$, то завдяки різниці $r_i - \hat{r}_i$ наявна невикористана площа $\pi(r_i^2 - \hat{r}_i^2)$, $i \in I$, яка виникає внаслідок максимізації функції (5.8) для деяких кругів та може бути

зайнята іншими кругами. Резерв площі утворюється для тих кругів, радіус яких виявився меншим, ніж можливий варіант в послідовності (3.1), але більшим, ніж попереднє значення радіусу в (3.1). Виконаємо послідовне повернення до основної задачі (3.2)–(3.4), поступово фіксуючи значення певних радіусів та зменшуючи розмірність простору змінних.

Розглянемо точку $\tilde{X}^{0m}$, обчислимо вираз $\pi((\tilde{r}_i^{0m})^2 - (\hat{r}_i)^2) = \delta_i^1$, $i \in I$, та виберемо i_1 , яке відповідає значенню $\delta_{i_1}^1 = \max\{\delta_i^1, i \in I\}$. Зрозуміло, що δ_{i_1} – вільна площа (див. (3.2)–(3.4)). Доцільно зафіксувати радіус $r_{i_1} = \hat{r}_{i_1}$ і розглядати його як сталу. Далі розглянемо відповідну точку $X^{01} \in \mathbb{R}^{3n-1}$, та виконаємо основний етап методу, описаного в попередньому підпункті, за умови, що $r_{i_1} = \hat{r}_{i_1}$ є постійною. В результаті отримаємо точку $\tilde{X}^{01m}$.

Далі, обчислюємо $\pi((\tilde{r}_i^{01m})^2 - (\hat{r}_i)^2) = \delta_i^2$, $i \in I \setminus \{i_1\}$, та вибираємо i_2 , яке відповідає $\delta_{i_2}^2 = \max\{\delta_i^2, i \in I \setminus \{i_1\}\}$. Вважаємо, що $r_{i_2} = \hat{r}_{i_2}$ є постійною. Отримуємо точку $X^{02} \in \mathbb{R}^{3n-2}$, для якої виконаємо основний етап методу за умови, що $r_{i_1} = \hat{r}_{i_1}$ та $r_{i_2} = \hat{r}_{i_2}$ є постійними. В результаті обчислюємо точку $\tilde{X}^{02m}$. Процес триває, доки не будуть вибрані всі елементи множини I .

Коли вичерпаний і цей ресурс, додаткове поліпшення значення функції цілі задачі (3.2)–(3.4) може буде реалізоване за рахунок попарної перестановки кругів, радіуси яких незначно відрізняються. Отримана точка береться як наближення до глобального мінімуму l_{global}^* задачі (3.2)–(3.4).

Метод може бути поширений на задачі розміщення куль та гіперкуль із деякими модифікаціями.

5.1.2 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі із зонами заборони

З урахуванням особливостей математичних моделей задач (3.6)–(3.9) та (3.10)–(3.12) згідно з методологією, викладеною в розділі 5, для розв'язання

задачі використовується Стратегія 5 (IPPP-random/lattice-local).

Метод побудови допустимих початкових точок залежить від розмірів контейнера та наявності зон заборони. Якщо у контейнері зони заборони відсутні, або є декілька зон заборони, то застосовується метод ґратчастих або метод випадкових розміщень, описані в п. 4.2.1. У випадку, коли в контейнері багато зон заборони, для побудови допустимих початкових точок використовується допоміжна задача (4.3)–(4.4). Розглянемо допоміжну задачу для пошуку початкової точки для задачі (3.10)–(3.12) більш детально.

Для зручності перейменуємо нерівності в (3.12) у такий спосіб:
 $g_1(X) = \Phi_{12}(X), \quad g_2(X) = \Phi_{13}(X), \dots, \quad g_{(\lambda-1)}(X) = \Phi_{1\lambda}(X), \quad g_\lambda(X) = \Phi_{23}(X), \dots,$
 $g_\Lambda(X) = \Phi_{(\lambda-1),\lambda}(X), \quad g_{\Lambda+1}(X) = \bar{\Phi}_{11}(X), \quad g_{\Lambda+2}(X) = \bar{\Phi}_{12}(X), \quad \dots,$
 $g_{\Lambda+N}(X) = \Phi_{1N}^a(X), \quad \dots, \quad g_{\Lambda+N}(X) = \Phi_{\lambda N}^a(X), \quad g_{\Lambda+N+1}(X) = \Phi_1(X), \quad \dots,$
 $g_{\Lambda+N+\lambda}(X) = \Phi_\lambda(X), \quad g_{\Lambda+N+\lambda+1}(X) = r_1, \quad g_{\Lambda+N+2\lambda}(X) = r_\lambda, \quad g_{\Lambda+N+2\lambda+1}(X) = r - r_1, \quad \dots,$
 $g_{\Lambda+N+3\lambda}(X) = r - r_\lambda, \text{ де } \Lambda = \lambda(\lambda - 1) / 2.$

Розглянемо точку $(\chi, \bar{X}^{\lambda 0}) \in \mathbb{R}^{3\lambda+1}$ і, взявши точку $(\chi^0, \bar{X}^{\lambda 0})$, де $\chi^0 = \min\{g_i(\bar{X}^{\lambda 0}), i \in J_1 \cup J_2\}$ як початкову, розв'язуємо таку задачу:

$$Y^* = \arg \max_{Y=(\chi, X) \in W \subset \mathbb{R}^{3\lambda+1}} \chi, \quad (5.17)$$

$$W = \{(\chi, X) \in \mathbb{R}^{3\lambda+1}, f_i(\chi, X) \geq 0, i \in J_1 \cup J_2, r_i \geq 0, i \in I_\lambda, -\chi \geq 0\},$$

$$f_i(\chi, X) = g_i(X) - \chi, \quad J_1 = \{1, 2, \dots, \Lambda + N + \lambda\},$$

$$J_2 = \{\Lambda + N + \lambda + 1, \Lambda + N + \lambda + 2, \dots, \Lambda + N + 3\lambda\}.$$

Оскільки радіуси кругів є змінними, то завжди існує такий розв'язок задачі (5.17), якому відповідає значення $\chi^* = 0$. Через присутність нерівності $-\chi \geq 0$ завжди існує точка глобального максимуму $(0, \bar{X}^{\lambda*})$ задачі (5.17). Зрозуміло, що $\bar{X}^{\lambda*} \in D_\lambda$.

Для розв'язання задачі (5.17) використовується модифікація методу можливих напрямків Зонтендейка [281], яка ґрунтується на стратегії активного набору нерівностей.

Модифікація реалізується за класичною ітеративною формулою:

$$(\chi^{l+1}, \bar{X}^{\lambda(l+1)}) = (\chi^l, \bar{X}^{\lambda l}) + t^{\lambda l} Z^{\lambda l}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (5.18)$$

де $t^k > 0$;

вектор $Z^{\lambda l} = (Z_1^{\lambda l}, Z_2^{\lambda l}, \dots, Z_{3\lambda+1}^{\lambda l})$ є розв'язком такої задачі лінійного програмування:

$$(\kappa^l, Z^{\lambda l}) = \arg \max_{(\kappa, z^{\lambda l}) \in G^{\lambda l} \subset \mathbb{R}^{3\lambda+1}} \kappa, \quad (5.19)$$

$$G^{\lambda k} = \left\{ (\kappa, z^{\lambda k}) \in \mathbb{R}^{3\lambda+1} : z_1^{\lambda k} \geq \kappa, (\nabla f_i(\chi^l, \bar{X}^{\lambda l}), z^{\lambda k}) \geq \kappa, i \in J_1 \cup J_2, \right. \\ \left. z_{i+1}^{\lambda k} \geq 0, i \in I_\lambda, |z_i^{\lambda k}| \leq 1, i = 1, 2, \dots, 3\lambda + 1 \right\}. \quad (5.20)$$

Зазначимо, що якщо існують такі $i, j, k \in J$, $i \neq j \neq k$, для яких $cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap cl(cS_k) \neq \emptyset$ або $cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap C \neq \emptyset$, задача (5.17) може мати локальний максимум Υ^* з $\chi^* < 0$. Така ситуація можлива, якщо центр O_i круга C_i належить $cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap cl(cS_k)$ або $cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap C$. Для виходу з цієї ситуації транслюємо круг C_i на такий вектор, що $O_i \notin cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap cl(cS_k)$ ($O_i \notin cl(cS_i) \cap cl(cS_j) \cap C$). Після цього ітераційний процес (5.18)–(5.20) триває, доки не буде отримано глобальний максимум задачі (5.17).

Коли досягнуто глобальний максимум $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то будується множина T_λ початкових точок $X^{(\lambda+1)j0} \in D_{\lambda+1}$ для розміщення $\lambda + 1$ кругів:

$$X^{(\lambda+1)j0} = (r_1^{\lambda*}, r_2^{\lambda*}, \dots, r_\lambda^{\lambda*}, r_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}, x_1^{\lambda*}, y_1^{\lambda*}, x_2^{\lambda*}, y_2^{\lambda*}, \dots, x_\lambda^{\lambda*}, y_\lambda^{\lambda*}, x_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}, y_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}),$$

де $r_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}$, $x_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}$ та $y_{\lambda+1}^{(\lambda+1)j0}$, $j=1,2,\dots,\sigma$, – радіус та координати центру круга $C_{\lambda+1}$. Визначимо σ допустимих положень круга $C_{\lambda+1}$ в області $\bar{C}$ за умови, що круги C_i , $i \in I_\lambda$, розміщено відповідно до точки $X^{\lambda*}$. Для цього знайдемо σ допустимих положень круга $C_{\lambda+1}$, дотичного до меж трійок кругів: (S_l, S_k, S_t) , (C, S_l, S_k) , (C, C_i, S_l) , (C_i, C_p, S_l) , (C_i, C_p, C_q) , (C, C_i, C_p) , $i, p, q \in I_\lambda$, $l, k, t \in J$. Для того щоб знайти максимальні значення радіусів та координати центрів круга $C_{\lambda+1}$, необхідно розв'язати системи рівнянь одного з таких типів:

$$\begin{cases} (x_l^0 - x_{\lambda+1})^2 + (y_l^0 - y_{\lambda+1})^2 - (r + r_{\lambda+1})^2 = 0 \\ (x_k^0 - x_{\lambda+1})^2 + (y_k^0 - y_{\lambda+1})^2 - (r + r_{\lambda+1})^2 = 0 \\ (x_t^0 - x_{\lambda+1})^2 + (y_t^0 - y_{\lambda+1})^2 - (r + r_{\lambda+1})^2 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x_l^0 - x_{\lambda+1})^2 + (y_l^0 - y_{\lambda+1})^2 - (r + r_{\lambda+1})^2 = 0 \\ (x_k^0 - x_{\lambda+1})^2 + (y_k^0 - y_{\lambda+1})^2 - (r + r_{\lambda+1})^2 = 0 \\ x_{\lambda+1}^2 + y_{\lambda+1}^2 - (R - r_{\lambda+1})^2 = 0 \end{cases}$$

відносно змінних $x_{\lambda+1}, y_{\lambda+1}, r_{\lambda+1}$ та визначити допустимість розміщень.

Такий спосіб побудови початкової точки реалізує принцип "теплого старту" ("hot start"), в якому використовується інформація по попередні розв'язки.

На рис. 5.14 показані $\sigma = 7$ можливих положень круга $C_{\lambda+1}$, які відповідають початковим точкам $X^{(\lambda+1)j0}$, $j = 1, 2, \dots, 7$. Ці положення нанесені пунктирними лініями.

Обчислювальні експерименти показали, що доцільно вибрати значення $\sigma = 20$, тобто для кожного λ розглядати принаймні 20 початкових точок.

Для розв'язання задачі (3.10)–(3.12) скористаємось процедурою, описаною формулами (5.18)–(5.20). Вектор найшвидшого зростання $Z^{\lambda k}$ є розв'язком задачі лінійного програмування (5.19), де

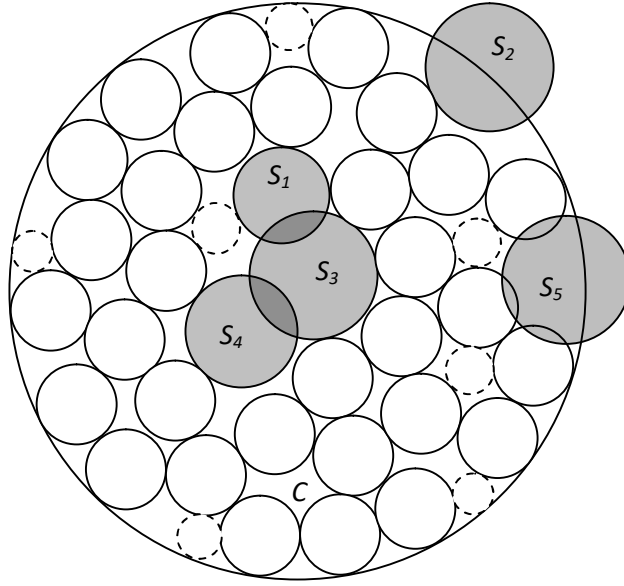


Рис. 5.14. Побудова початкових точок

$$G^{\lambda k} = \left\{ (\kappa, z^{\lambda k}) \in \mathbb{R}^{3\lambda+1} : (\nabla F_{\lambda}(X^{\lambda k}), z^{\lambda k}) \geq \kappa, (\nabla g_i(X^{\lambda k}), z^{\lambda k}) \geq \kappa, i \in T_1^{\lambda k}, \right. \\ \left. (\nabla g_i(X^{\lambda k}), z^{\lambda k}) \geq 0, i \in T_2^{\lambda k}, |z_i^{\lambda k}| \leq 1, i = 1, 2, \dots, 3\lambda + 1 \right\}, \quad (5.21)$$

$$T_1^{\lambda k} = \left\{ i \in J_1, g_i(X^{\lambda k}) \leq \varepsilon \right\}, T_2^{\lambda k} = \left\{ i \in J_2, g_i(X^{\lambda k}) \leq \varepsilon / 10 \right\}.$$

Для поліпшення збіжності ітераційного процесу при побудові множини $G^{\lambda k}$ згідно з (5.21) беруться до уваги ε -активні нерівності з квадратичними функціями та $\varepsilon / 10$ -активні нерівності з лінійними функціями. Ітераційний процес зупиняються, якщо за деякого k виконуються нерівності $r - r_i^k < 10^{-4}$, $i = 1, 2, \dots, \lambda$, та $F_{\lambda}(X^k) - F_{\lambda}(X^{(k-1)}) < 10^{-4}$.

5.1.3 Розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у багатокутній незв'язній області з технологічними обмеженнями

Розглянемо задачу (3.13)–(3.16). Для практичних задач повний перебір значень двійкових змінних $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$, неможливий. Внаслідок присутності між кругами мінімально допустимої відстані d та обмеження (3.16) максимальний вплив на функцію цілі мають круги з набору $\hat{r}_k$, $k \in I_K$,

з найбільшими радіусами. Тому, в першу чергу, індекси саме таких кругів додаються в множину I_μ . Ці круги мають визначити певну структуру розміщення для всіх багатокутників P_q , $q \in I_q$. Решта кругів з меншими радіусами може бути вибрана випадково, виходячи із значень максимального й мінімального радіусів $\hat{r}_1$. Для поліпшення значень функції цілі застосовується метод мултистарту.

Після вибору та розміщення кругів за найбільшими радіусами у багатокутниках P_q , $q \in I_q$, та побудови множини I_μ , виконується декомпозиція задачі на Q підзадач, тобто розміщення решти кругів виконується окремо для кожного з багатокутників P_q , $q \in I_q$, та оцінюється загальна площа розміщених кругів. Для кожного багатокутника P_q , $q \in I_q$, щоб заповнити вільні місця й гнучко вибирати круг згідно з множиною множини I_μ , доцільно застосовувати послідовно метод оптимізації за групами змінних. Розглянемо більш детально кроки алгоритму на прикладі.

Нехай область розміщення –

$$C = \bigcup_{q=1}^5 P_q.$$

На рис. 5.15 багатокутники позначені римськими цифрами I–V. Радіуси кругів мають значення від 1 до 10 мм з кроком 0.5 мм: $\hat{r}_k = 1, 1.5, 2, \dots, 10$ мм, $k \in I_K = \{1, 2, \dots, K\}$, $K = 19$. Мінімальна допустима відстань між кругами $d = 2$ мм. Кількість класів конгруентності кругів $\mu = 4$. Зауважимо, що мінімальне $\hat{r}_1$ та максимальне $\hat{r}_K$ значення радіусів та значення τ , яке визначає мінімальну товщину стінки, відповідають технологічним обмеженням процесу друку (див. п. 6.5.1).

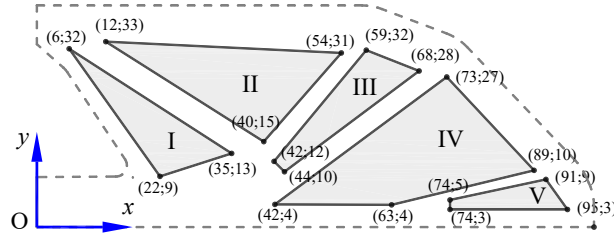


Рис. 5.15. Компоненти області розміщення

Для зручності опису алгоритму круги, які розміщуються в багатокутнику P_q , $q \in I_q$, позначаються як S_{qi} , $q \in Q$, $i \in J_q = \{1, 2, \dots, N_q\}$. Кожен круг S_{qi} відповідає кругу S_i в моделі (3.13)–(3.16), для якого $t_i = 1$, $i \in I_n$.

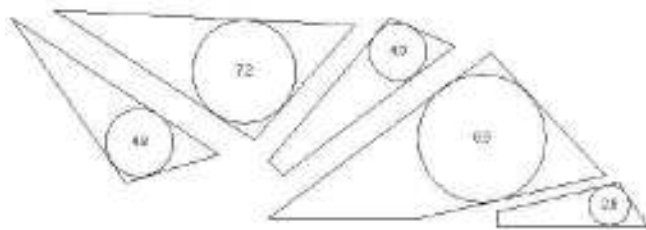
Згідно з правилом побудови множини I_μ ураховуються всі багатокутники P_q , $q \in I_q$. Перший елемент множини I_μ – це $\chi_1 = 1$, який відповідає мініальному радіусу $\hat{r}_1$. Наступний крок – це пошук максимального радіусу, найближчого радіусу в наборі $\hat{r}_k$, $k \in I_K$. Задля цього спочатку розміщується перший круг S_{q1} , $q \in Q$, максимально можливого радіусу в кожному багатограннику P_q . Розв'язуємо задачу:

$$r_1^{q*} = \arg \max_{X_1 \in D_1^q} r_1, \quad (5.22)$$

де $X_1 = (x_1, y_1, r_1) \in D_1^q \subset \mathbb{R}^3$;

$$D_1^q = \{(x_1, y_1, r_1) \in \mathbb{R}^3 : A_{mq}x_1 + B_{mq}y_1 + C_{mq} - r_1 \geq 0, m = 1, 2, \dots, M_q\}, q \in Q. \quad (5.23)$$

Початкові точки $X_1^{q0} \in D_1^q$, $q \in Q$, вибираються випадково. У результаті розв'язання задачі (5.22)–(5.23) отримуємо точки $X_1^{q*} \in D_1^q$, $q \in Q$ (рис. 5.16).

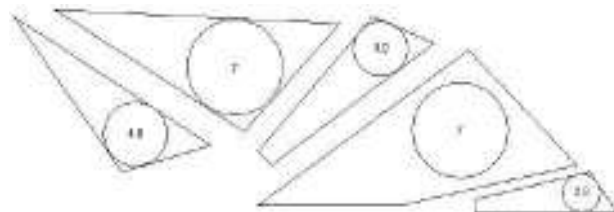
Рис. 5.16. Ілюстрація точок X_1^{q*} , $q \in Q$

Побудова множини I_μ ґрунтується на аналізі розв'язку задачі (5.22)–(5.23). Для цього вибираються два числа α^* та β^* , які задовольняють нерівності $r_1^{\alpha^*} \geq r_1^{\beta^*} \geq r_1^q$, $q \in Q \setminus \{\alpha^*, \beta^*\}$. Для прикладу, що розглядається, – це $\alpha^* = 4$, $\beta^* = 2$, $r_1^4 = 8.9$ мм та $r_1^2 = 7.2$ мм. Останній елемент множини I_μ вибирається

$$\chi_\mu = \max_{k \in I_K, \hat{r}_k \leq r_1^{\beta^*}} k, \quad (5.24)$$

де $\chi_\mu = 13$ ($\hat{r}_{13} = 7$ мм).

Радіуси всіх кругів S_{q1} , $q \in Q$, більші за $\hat{r}_{\chi_\mu}$, стають рівними $\hat{r}_{\chi_\mu}$ (зокрема, $\hat{r}_{\chi_\mu} = 7$ мм). Таким чином, точкам X_1^{q*} відповідають точки $\hat{X}_1^q \in \mathbb{R}^3$, $q \in Q$ (рис. 5.17). На вибір другого за значенням радіусу впливає той факт, що круг радіуса $\hat{r}_{\chi_\mu}$ має бути принаймні у двох багатокутниках P_{α^*} та P_{β^*} .

Рис. 5.17. Ілюстрація точок $\hat{X}_1^q$, $q \in Q$

Далі, решта $\mu-2$ елементів $I_\mu = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\mu\}$ вибираються відповідно до множини $\hat{r}_k$, $k \in \{2, 3, \dots, \chi_\mu - 1\}$, у випадковий спосіб. У прикладі, який розглядається, – це $\mu-2=2$. Маємо $\chi_2=3$ та $\chi_3=5$. Отже, $I_\mu = \{1, 3, 5, 13\}$, а відповідні значення радіусів – $\hat{r}_1=1$ мм, $\hat{r}_3=2$ мм, $\hat{r}_5=3$ мм та $\hat{r}_{13}=7$ мм.

Після побудови множини I_μ для кожного розміщеного круга вибирається найбільший круг у наборі $\hat{r}_k$, який не більше за нього.

Отримуємо точки $\hat{X}_1^q \in \mathbb{R}^3$ (рис. 5.18).

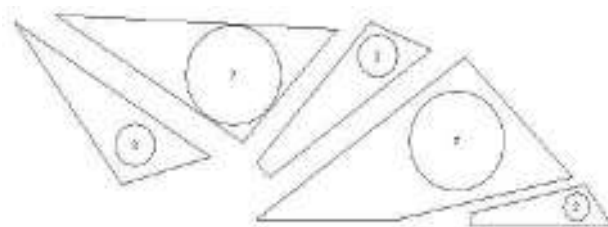


Рис. 5.18. Ілюстрація точок $\hat{X}_1^q$, $q \in Q$

На заключному етапі алгоритму круги з радіусами $\hat{r}_k$, $k \in I_\mu$, розміщуються в багатокутниках P_q , $q \in Q$. Для кожного багатокутника P_q , $q \in Q$, розв'язується послідовність задач:

$$r_j^{q*} = \max_{X_j \in D_j^q} r_j \quad (j=2, 3, \dots), \quad (5.25)$$

де $X_j = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_j, y_j, r_j) \in D_j^q \subset \mathbb{R}^{2j+1}$;

$$\begin{aligned} D_j^q = \{ & X_j \in \mathbb{R}^{2j+1} : A_m x_l + B_m y_l + C_m - \hat{r}_l^{q*} \geq 0, \quad l=1, 2, \dots, j-1, \\ & A_m x_j + B_m y_j + C_m - r_j \geq 0, \quad m=1, 2, \dots, M, \\ & (x_l - x_t)^2 + (y_l - y_t)^2 - (\hat{r}_l^{q*} + \hat{r}_t^{q*} + \tau)^2 \geq 0, \quad l, t=1, 2, \dots, j-1, \quad l < t, \\ & (x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2 - (\hat{r}_l^{q*} + r_j + \tau)^2 \geq 0, \quad l=1, 2, \dots, j-1 \}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Початкові точки $X_j^{0q} \in D_j^q$ для розв'язання задачі (5.25)–(5.26) будуються на основі точок $\hat{X}_{j-1}^q$ (точок $\hat{X}_1^q$ для $j=2$), $q \in Q$. У результаті отримуємо точки $X_j^{q*} \in D_j^q$, $q \in Q$. Точкам X_j^{q*} відповідають точки $\hat{X}_j^{0q}$, $q \in Q$, в яких враховується значення радіусів $\hat{r}_k$, $k \in I_\mu$. У прикладі – X_2^{1*} ($r_2^{1*} \approx 3.8$) та $\hat{X}_2^{01}$ (рис. 5.19).

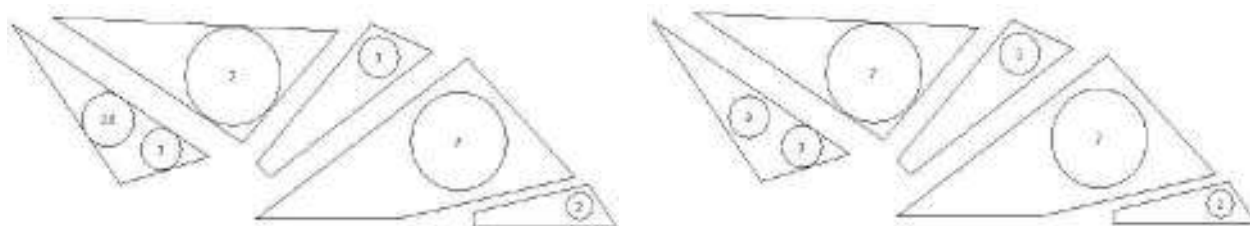


Рис. 5.19. Ілюстрація точок X_2^{1*} та $\hat{X}_2^{01}$

Якщо $r_j^{q*} < \hat{r}_1$, розв'язання задач (5.25)–(5.26) припиняється. Позначимо індекси розміщених кругів як j_q , а точку, яка відповідає останньому розміщенню, – як $\hat{X}_{j_q}^q$. У результаті множина точок $X_{j_q}^{q*}$, $q \in Q$, буде відповідати розв'язку $\Psi^* = \Psi(v^*)$ задачі (3.13)–(3.16). Для приклада, який розглядається, остаточне розміщення кругів подане на рис. 5.20.

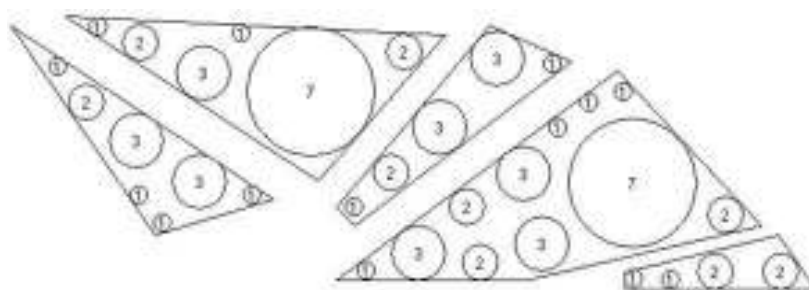


Рис. 5.20. Ілюстрація розв'язку задачі (3.13)–(3.16)

5.2 Методи розв'язання задач розміщення куль

5.2.1 Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у кубоїді з мінімальною висотою за Стратегією 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT)

Розглянемо окремий випадок задачі (3.18)–(3.19). Нехай контейнер C є кубоїдом

$$C = P3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w, 0 \leq z \leq h \},$$

довжина l та ширина w якого постійні, а висота $\mu = h$ є змінною. Тоді задача (3.18)–(3.19) має вигляд:

$$\omega^* = (u^*, h^*) = \arg \min_{\omega=(u,h) \in D \subset \mathbb{R}^{3n+1}} h, \quad (5.27)$$

де

$$D = \{ \omega \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(u_i, h) \geq 0, i \in I \}; \quad (5.28)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2;$$

$$\Phi_i(v_i, h) = \min\{x_i - r_i, y_i - r_i, z_i - r_i, l - x_i - r_i, w - y_i - r_i, h - z_i - r_i\}.$$

Нерівність $\Phi_i(u_i, h) \geq 0, i \in I$, еквівалентна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \varphi_{0i}(v) = x - r_i \geq 0, \\ \varphi_{1i}(v) = y - r_i \geq 0, \\ \varphi_{2i}(v) = z - r_i \geq 0, \\ \varphi_{3i}(v) = L - x - r_i \geq 0, \\ \varphi_{4i}(v) = W - y - r_i \geq 0, \\ \varphi_{5i}(v) = h - z - r_i \geq 0. \end{cases}$$

Для розв'язання задачі (5.27)–(5.28) застосовується Стратегія 1 (ODP-SA-DNS-permutations-IPOPT). Перший етап стратегії – побудова початкових

точок, які є крайніми точками області D .

5.2.1.1 Побудова допустимих початкових точок

Нехай $\pi_j = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}\}$ – деяка випадкова послідовність куль, яка є перестановкою куль S_j , $j \in I$. Якщо всі кулі нерівні, кількість різних послідовностей дорівнює $n!$. Таким чином, всі послідовності π_j утворюють множину перестановок Π_S .

Для того щоб побудувати крайню точку відповідно до заданої послідовності π_j , застосовується метод оптимізації за групами змінних, в якому порядок груп відповідає порядку куль у перестановці π_j . Розглянемо метод побудови більш детально.

На першому кроці куля S_{j_1} розміщується у кубоїді $P3$, так що вона дотична до трьох граней $P3$, яким належить точка $(0,0,0)$. Відтепер куля S_{j_1} вважається нерухомою. Після цього куля S_{j_2} розміщується в $P3$, так що вона дотична або до трьох граней кубоїда, або до кулі S_{j_1} та двох граней $P3$, забезпечуючи при цьому мінімальне значення змінної z_{j_2} . В подальшому кулі S_{j_1} та S_{j_2} розглядаються як нерухомі. Наступна куля S_{j_3} розміщується в $P3$, так що вона дотична до або трьох граней кубоїда, або до кулі S_{j_1} та двох граней $P3$, або до кулі S_{j_2} та двох граней $P3$, або до куль S_{j_1} , S_{j_2} та однієї грані $P3$, забезпечуючи мінімальне значення змінної z_{j_3} . В подальшому всі три кулі S_{j_1} , S_{j_2} та S_{j_3} розглядаються як нерухомі. Наступні кулі S_{j_k} ($k \geq 4$), розміщуються в $P3$, так що вони дотичні до або трьох граней $P3$, або до двох граней і однієї з розміщених куль, або до однієї грані та двох розміщених куль, або до трьох куль, та значення змінної z_{j_k} є мінімальним. Важливим є той факт, що на кожному кроці додаються три активних обмеження.

Нехай розміщено кулі S_{j_i} з центрами $u_{j_i}^0 = (x_{j_i}^0, y_{j_i}^0, z_{j_i}^0)$, $i = 1, 2, \dots, q-1$. Для розміщення кулі S_{j_q} необхідно знайти мінімальне значення змінної z_{j_q} , послідовно розв'язавши системи рівнянь:

- чотири системи

$$\varphi_{kj_q}(v_{j_q}) = 0, \quad k \in K,$$

де $K \in \{\{0,1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,3,4\}, \{0,1,4\}\}$;

- для будь-якого $i \in \{1, \dots, q-1\}$ вісім систем

$$\theta_{jij_q}(v_{j_i}^0, v_{j_q}) = 0, \quad \varphi_{kj_q}(v_{j_q}) = 0, \quad k \in K,$$

де $K \in \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\}$;

- для будь-яких i та $r, i < r \in \{1, \dots, q-1\}$, п'ять систем

$$\Phi_{jij_q}(v_{j_i}^0, v_{j_q}) = 0, \quad \Phi_{jrj_q}(v_{j_r}^0, v_{j_q}) = 0, \quad \varphi_{kj_q}(v_{j_q}) = 0, \quad k \in K,$$

де $K \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$;

- для будь-яких $i, r, s, i < r < s \in \{1, \dots, q-1\}$, одну систему

$$\Phi_{jij_q}(v_{j_i}^0, v_{j_q}) = 0, \quad \Phi_{jrj_q}(v_{j_r}^0, v_{j_q}) = 0, \quad \Phi_{jsj_q}(v_{j_s}^0, v_{j_q}) = 0.$$

Серед усіх $\sigma = 4 + 8(q-1) + 5(q-1)(q-2)/2 + (q-1)(q-2)(q-3)/6$ розв'язків систем рівнянь інтерес викликають тільки ті розв'язки $v_{j_q}^r$, $r \in R \subset \{1, 2, \dots, \sigma\}$, які забезпечують як ненакладання кулі S_{j_q} і розміщених куль S_{j_i} , $i = 1, 2, \dots, q-1$, так і знаходження кулі S_{j_q} у кубоїді P_3 . Серед них вибирається $z_{j_q}^0 = \min\{z_{j_q}^r : r \in R\}$. Якщо $q = n$, то отримуємо крайню точку $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0, h^0)$, де $h^0 = \max\{z_1^0 + r_1, z_2^0 + r_2, \dots, z_n^0 + r_n\}$.

Оптимізаційний процес продовжується, доки не будуть розміщені всі n куль. При цьому принаймні $3n$ нерівностей із системи (5.28) будуть активними, а принаймні одна нерівність стане активною при виборі значення $h = \max\{z_i + r_i : i \in I\}$. Таким чином, отримана точка ω^0 є крайньою точкою області D .

Очевидно, що розміщення за допомогою методу оптимізації за групами змінних, загалом, не буде відповідати точці локального мінімуму задачі D , але отриману точку можна розглядати як початкову для пошуку локального мінімуму функції цілі.

5.2.1.2 Модифікація методу околів, що звужуються, для перестановок куль

Для вибору перспективних крайніх точок області D використовується модифікація методу околів, що звужуються [100,284].

Кожній послідовності $\pi_j = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}\} \in \Pi_S$ ставиться у взаємно-однозначну відповідність послідовність $\rho_j = (r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_n}) \in \Pi_R$, компонентами якої є радіуси куль S_{j_i} , $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді послідовності $\rho_j = r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_n}$, $j = 1, 2, \dots, n!$, відображаються в Євклідовий простір $\mathbb{R}^n$ у такий спосіб:

$$\rho_j \leftrightarrow X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n, r_{j_i} = x_i^j, i = 1, 2, \dots, n.$$

тобто $\rho_j = X^j$. Таким чином, установлюється взаємно-однозначна відповідність між послідовностями $\pi_j = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}\} \in \Pi_S$ та точками $X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, n!$.

Нехай $B = \{(r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_n})^T \in \mathbb{R}^n : (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \Pi(1, 2, \dots, n)\}$ позначає образ множини Π_R у $\mathbb{R}^n$ (де $\Pi(1, 2, \dots, n)$ – множина перестановок чисел $(1, 2, \dots, n)$). Як відомо [252], множина B складається з вершин опуклого гіперполітопу, вписаного в $(n - 1)$ -вимірну гіперкулю, тобто множина B є її підмножиною. Діаметр цієї кулі дорівнює

$$\beta = d(X^1, X^{n!}) = \sqrt{(r_1 - r_n)^2 + (r_2 - r_{n-1})^2 + \dots + (r_n - r_1)^2},$$

де $X^1 = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $X^{n!} = (r_n, r_{n-1}, \dots, r_1)$ та $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$, тобто відстань між будь-якими точками множини B менше або дорівнює β .

Зазначимо, що ця модифікація має сенс при розв'язанні задач розміщення куль з різними радіусами. У випадку, коли всі радіуси рівні, $\beta = 0$, і тому цей підхід не придатний.

Нехай $\alpha_i = r_i - r_{i-1}$ для $i = 2, 3, \dots, n$. Неважко побачити, що мінімальна відстань між точками множини B

$$\sqrt{2}\alpha, \text{ де } \alpha = \min\{\alpha_i: i = 2, \dots, n\}.$$

Оскільки $\alpha > 0$, якщо й тільки якщо всі кулі нерівні, то

$$\alpha = \min\{\alpha_i: \alpha_i > 0, i = 2, \dots, n\}.$$

Ураховуючи, що будь-якому елементу X^j скінченної множини B відповідає точно одна послідовність $\rho_j = \{r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_n}\} \in \Pi_R$, та $\pi_j = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}\} \in \Pi_S$, скінченна множина $U \subset G$ множина крайніх точок визначається множиною B .

Застосуємо метод околів, що звужуються, до множини $U \subset D$. Очевидно, що U , загалом, не містить усі крайні точки D , тому використання цього підходу не може гарантувати доведений глобальний екстремум. Але, як показують числові експерименти, підхід дозволяє отримати значно кращі результати в порівнянні з простим випадковим пошуком на множині U .

Спочатку будується множина $B_1 \subset B$, яка містить λ_1 елементів – випадково вибраних рівномірно розподілених перестановок. Вважається, що вся множина B є околom, який має радіус β . Після цього, для всіх $X^k \in B_1$ відповідно до процедури, описаної в попередньому підпункті, обчислюються крайні точки $u^k \in U_1$. У результаті отримуємо множину крайніх точок $U_1 \subset U$. Нехай у точці $\bar{u}^1$ мінімальне значення функції цілі: $\zeta(\bar{u}^1) \leq \zeta(u^k)$

для всіх $u^k \in U_1$. Тоді точка $\bar{X}^1 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in B_1$, яка відповідає $\bar{u}^1$, визначає центр другого околу

$$N(\bar{X}^1) = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in B : d(\bar{X}^1, X) = \|\bar{X}^1 - X\| \leq \beta \cdot \mu\},$$

де $0 < \mu < 1$.

Тепер розглядається наступна вибірка $B_2 \subset N(\bar{X}^1) \subset B$, яка містить λ_2 елементів. Знову, для всіх $X^k \in B_2$ обчислюються крайні точки u^k , які утворюють множину $U_2 \subset U$. Нехай точці $\bar{u}^2$ відповідає найкраще значення функції цілі W , тоді відповідна точка $\bar{X}^2 \in B_2$ визначає центр наступного околу:

$$N(\bar{X}^2) = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in B : d(\bar{X}^2, X) \leq \beta \cdot \mu^2\}.$$

Так само випадково вибираються λ_3 елементів околу $N(\bar{X}^2)$, утворюючи множину B_3 . Будується множина U_3 , точки $\bar{u}^3$ та $\bar{X}^3$. Остання розглядається як центр нового околу й т.д.

Оскільки радіуси околів $N(\bar{X}^p)$, $p = 1, 2, \dots$, зменшуються, кількість γ_p точок в околі $N(\bar{X}^p)$ також зменшується, $p = 1, 2, \dots$. Тому, якщо $\gamma_k < \lambda_k$, замість випадкового пошуку використовується повний перебір всіх точок околу. Процес зупиняється, коли в результаті повного перебору не вдається знайти поліпшення значення функції цілі $W(\bar{u}^k)$.

Таким чином, перегляд крайніх точок відбувається τ раз, доки або радіус $\beta\mu^\tau$ околу V_τ не стане менше заданого параметра α^* , або повний перебір точок околу $N(\bar{X}^\tau)$ не призводить до поліпшення значення функції цілі $\zeta(\bar{u}^{\tau+1})$.

Після цього вибираються крайні точки $\tilde{u}^p \in U_\tau$, $p = 1, \dots, \eta$, які дають менші значення функції цілі $\zeta(\tilde{u}^p)$.

Отже, $\eta \leq \gamma_\tau$, де γ_τ – кількість точок в U_τ (в числових експериментах $\eta = 5$). Після цього всі крайні точки $\tilde{u}^p$, $p = 1, 2, \dots, \eta$, використовуються як початкові для обчислення точок локальних мінімумів u^{*p} , $p = 1, 2, \dots, \eta$. Насамкінець, вибирається точка $u^* = \operatorname{argmin}\{\zeta(u^{*1}), \zeta(u^{*2}), \dots, \zeta(u^{*\eta})\}$, яка вважається апроксимацією до глобального мінімуму задачі (5.27)–(5.28).

Тепер проаналізуємо вибір параметрів λ_i , μ та α^* .

Кількість λ_i елементів випадкової вибірки $B_i \subset N(\bar{X}^i)$ суттєво впливає як на якість розв'язку, так і на час розв'язання. Тому ці параметри мають бути вибрані, з одного боку, залежно від кількості розміщуваних куль n , а з іншого боку, від наявних обчислювальних ресурсів. У числових експериментах для $n \leq 80$ використовуються значення $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\tau = 100$.

Вибір параметру $0 < \mu < 1$ впливає на швидкість збіжності процесу розв'язання до мінімуму $u^* \in G$, оскільки радіуси околів $N(\bar{X}^i)$, $i = 1, 2, \dots, \tau$, зменшуються згідно з μ . Проте, занадто мале значення μ (наприклад, $\mu < 0.5$) погано впливає на якість отримуваних розв'язків. Обчислювальний опит показав, що кращі результати дає $\mu \in [0.9, 0.95]$.

Мінімальна відстань між двома елементами B дорівнює $\sqrt{2}\alpha$. Тому, якщо радіус менше $\sqrt{2}\alpha$, окіл містить тільки один елемент, центр околу й випадковий пошук не має сенсу. Через це α^* має бути більше, ніж $\sqrt{2}\alpha$. З іншого боку, якщо розглядаються $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \alpha$ та радіус не менше $\sqrt{2}\alpha$, то такий окіл у B містить принаймні $n(n-1)/2$ точок множини B . У цьому випадку для повного перебору потрібно багато часу.

Обчислення локальних екстремумів можна виконати за допомогою пакета IPOPT [280].

5.2.2 Розв'язання задачі розміщення рівних куль у контейнерах із мінімальною метричною характеристикою за Стратегією 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT)

Як вже зазначалося в попередньому пункті, модифікація методу околів, що звужуються, яка ґрунтується на ймовірнісних властивостях функції цілі на перестановках куль, не може бути застосована у випадку, коли всі кулі рівні, тому що всі перестановки – еквівалентні. Для розміщення рівних куль пропонується інша модифікація методу. Розглянемо як приклад випадок, коли контейнер є кубоїдом.

У задачі (5.27)–(5.28) вважаємо, що $r_i = r, i \in I$. За рівних радіусів кругів для розв'язання задачі використовується Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT). Перший етап стратегії – побудова спеціального дерева розв'язків. Вершини дерева – системи рівнянь, які однозначно задають крайні точки області D .

Для зручності запишемо область допустимих розв'язків (5.28) у такому вигляді:

$$D = \{\omega \in \mathbb{R}^{3n+1} : \varphi_k(\omega) \geq 0, k = 1, 2, \dots, \theta = 6n + \frac{n(n-1)}{2}\}; \quad (5.29)$$

де

$$\varphi_k(\omega) = \begin{cases} x_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = 1, 2, \dots, n, \\ y_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = n + 1, n + 2, \dots, 2n, \\ z_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = 2n + 1, 2n + 2, \dots, 3n, \\ a - x_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = 3n + 1, 3n + 2, \dots, 4n, \\ b - y_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = 4n + 1, 4n + 2, \dots, 5n, \\ h - z_i - r, i = 1, 2, \dots, n, \text{ якщо } k = 5n + 1, 5n + 2, \dots, 6n, \\ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - 4r^2, i < j \in I, \\ \text{якщо } k = 6n + 1, 6n + 2, \dots, n(n-1)/2. \end{cases}$$

5.2.2.1 Побудова дерева розв'язків

Розглянемо спосіб побудови дерева розв'язків, яке є підмножиною дерева, побудованого в роботі [252]. Вершини зрізаного дерева розв'язків відповідають системам рівнянь, які можна розв'язати в явному вигляді методом виключення змінних, тобто без застосування числових методів, та знаходяться у "зоні тяжіння" різних локальних екстремумів.

Дерево складається з n рівнів. Кореню дерева t^0 відповідає простір $\mathbb{R}^m$. Вузли першого рівня t_i^1 , $i=1,2,\dots,\tau_1$ ($\tau_1=4$) – це сумісні системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}\psi_1^1(v_1) &= \begin{cases} x_1 - r = 0 \\ y_1 - r = 0 \\ z_1 - r = 0, \end{cases} & \psi_2^1(v_1) &= \begin{cases} a - x_1 - r = 0 \\ y_1 - r = 0 \\ z_1 - r = 0, \end{cases} \\ \psi_3^1(v_1) &= \begin{cases} x_1 - r = 0 \\ b - y_1 - r = 0 \\ z_1 - r = 0, \end{cases} & \psi_4^1(v_1) &= \begin{cases} a - x_1 - r = 0 \\ b - y_1 - r = 0 \\ z_1 - r = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

кожна з яких містить три змінні $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Нехай $v_1^i = (x_1^i, y_1^i, z_1^i)$, $i=1,2,3,4$, – розв'язки цих систем. Очевидно, що точки v_1^i , $i=1,2,3,4$, визначають всі можливі положення кулі S_1 в одному з чотирьох нижніх кутів кубоїда P_3 (рис. 5.21). Таким чином, вимірність простору $\mathbb{R}^m$ зменшується на три, й тепер розглядаємо задачу в просторі $\mathbb{R}^{m-3}$.

Вузли другого рівня – це системи, які утворюються з систем першого рівня. До трьох рівнянь першого рівня додаються три рівняння, які залежать або тільки від параметрів розміщення $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, або від $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ одночасно. Таким чином, системи другого рівня мають вигляд:

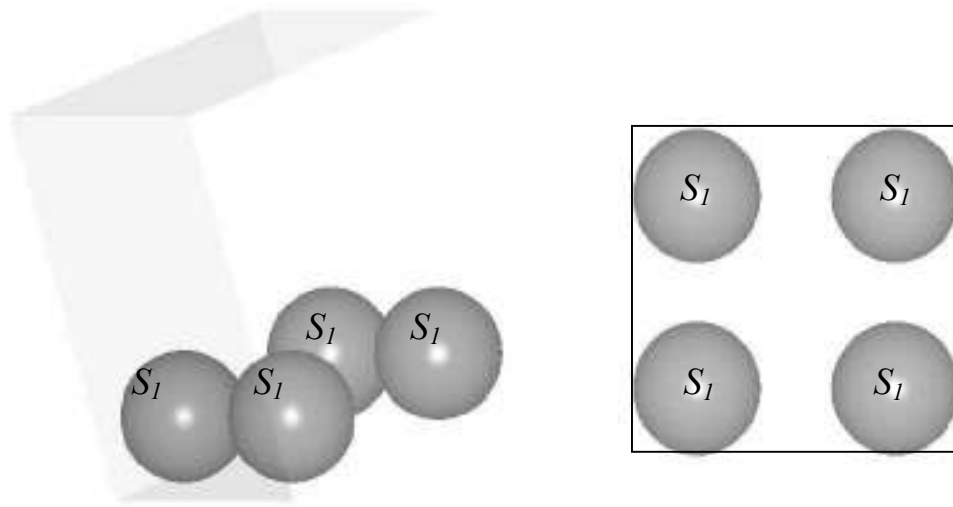


Рис. 5.21. Розміщення, яке відповідають першому рівню

$$\begin{cases} \psi_i^1(v_1) = 0 \\ \psi_j^2(v_1, v_2) = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, \tau_1, \quad j = 1, 2, \dots, \tau_2, \quad (5.30)$$

де

$$\psi_1^2(v_2) = \begin{cases} x_2 - r = 0 \\ y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} \quad \psi_2^2(v_2) = \begin{cases} a - x_2 - r = 0 \\ y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} \quad \psi_3^2(v_2) = \begin{cases} x_2 - r = 0 \\ b - y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases}$$

$$\psi_4^2(v_2) = \begin{cases} a - x_2 - r = 0 \\ b - y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} \quad \psi_5^2(v_1, v_2) = \begin{cases} x_2 - r = 0 \\ y_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0, \end{cases}$$

$$\psi_6^2(v_1, v_2) = \begin{cases} \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0 \\ y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi_7^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} x_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} & \psi_8^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} a - x_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} \\
\psi_9^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} a - x_2 - r = 0 \\ y_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0, \end{cases} & \psi_{10}^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0 \\ b - y_2 - r = 0 \\ z_2 - r = 0, \end{cases} \\
\psi_{11}^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} x_2 - r = 0 \\ b - y_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0, \end{cases} & \psi_{12}^2(v_1, v_2) &= \begin{cases} a - x_2 - r = 0 \\ b - y_2 - r = 0 \\ \gamma_{12}(v_1, v_2) = 0, \end{cases} \\
\gamma_{12}(v_1, v_2) &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - 4r^2.
\end{aligned}$$

Рівняння вибираються так, що вони утворюють сумісні лінійні системи $(\psi_j^2(v_2) = 0, j = 1, 2, 3, 4)$ та змішані системи $(\psi_j^2(v_1, v_2) = 0, j = 5, 6, \dots, \tau_2, \tau_2 = 12)$, які складаються з одного нелінійного та двох лінійно незалежних рівнянь. Частина змішаних систем можуть виявитися несумісними, та розв'язки $v_2^q, q = 1, 2, \dots, \delta_2, \delta_2 < \tau_2$ деяких систем $u^q = (v_1, v_2^q, \dots, v_m)$, $q = 1, 2, \dots, \delta_2$, не належать області D . Наприклад, якщо точка v_1 є розв'язком системи $\psi_1^1(v_1) = 0$, то система $\psi_8^2(v_1, v_2) = 0$ – несумісна за умови $a > 4r$. Розв'язок v_2^1 системи $\psi_1^2(v_2) = 0$, такий що $u^1 = (v_1, v_2^1, \dots, v_m) \notin G$, тому що кулі S_1 та S_2 перетинаються.

Кожна з систем $\psi_j^2(v_2) = 0, j = 1, 2, 3, 4$ має один розв'язок, а кожна з систем $\psi_j^2(v_1, v_2) = 0, j = 5, 6, \dots, 12$ має два допустимих розв'язки. Тоді вибираємо розв'язок з мінімальним значенням z_2 . Розв'язки цих систем визначають 12 можливих положень кулі S_2 в кубоїді $P3$ (рис. 5.22). Отже, кількість вузлів другого рівня – $\eta_2 = \tau_1 \tau_2 = 4 \cdot 12 = 48$. Тому останні три рівняння кожної системи вигляду (5.30) однозначно задають можливі

положенні кулі S_2 відносно кулі S_1 та кубоїда P_3 . Це означає, що кожному вузлу другого рівня відповідає не більше 48 різних положень кулі S_1 та S_2 . Системи другого рівня зменшують вимірність простору $\mathbb{R}^{m-3}$ на три, тобто тепер задача розглядається в $\mathbb{R}^{m-6}$.

Системи (5.30) розділяються на чотири групи залежно від номера вузла $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ першого рівня. Вузли другого рівня нумеруються так: t_{ij}^2 , $i = 1, 2, \dots, \tau_1$, $j = 1, 2, \dots, \tau_2$. Таким чином, перші три рівняння співпадають в кожній системі однієї групи.

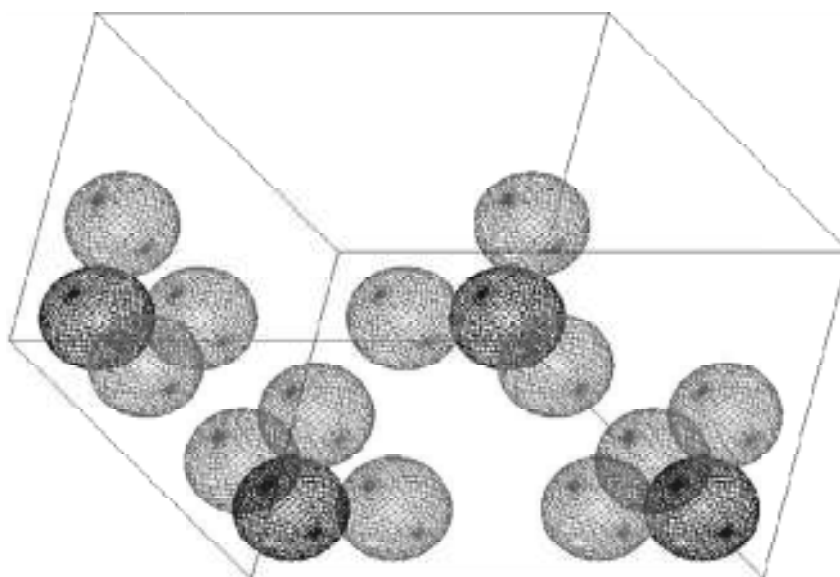


Рис. 5.22. Можливі положення кулі S_2

Вузли третього рівня утворюються в такий спосіб. До перших шести рівнянь кожного вузла другого рівня додаються три рівняння, які залежать або тільки від параметрів розміщення $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$, або від $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ одночасно, або від $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ та $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ одночасно, або $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ та $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ одночасно. Таким чином, системи третього рівня мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \psi_i^1(v_1) = 0 \\ \psi_j^2(v_1, v_2) = 0 \\ \psi_k^3(v_1, v_2, v_3) = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, \tau_1, \quad j = 1, 2, \dots, \tau_2, \quad k = 1, 2, \dots, \tau_3, \quad (5.31) \\
 & \psi_1^3(v_3) = \begin{cases} x_3 - r = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{cases} \quad \psi_2^3(v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{cases}, \dots, \quad \psi_4^3(v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ b - y_3 - r = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{cases} \\
 & \psi_5^3(v_1, v_3) = \begin{cases} \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{cases} \quad \psi_6^3(v_1, v_3) = \begin{cases} x_3 - r = 0 \\ \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{cases} \\
 & \psi_7^3(v_1, v_3) = \begin{cases} x_3 - r = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0, \end{cases} \\
 & \psi_8^3(v_1, v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0 \\ z_3 - r = 0, \dots, \end{cases} \quad \psi_{11}^3(v_2, v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ \gamma_{23}(v_2, v_3) = 0, \dots, \end{cases} \\
 & \psi_{19}^3(v_2, v_3) = \begin{cases} x_3 - r = 0 \\ b - y_3 - r = 0 \\ \gamma_{23}(v_2, v_3) = 0, \end{cases} \quad \psi_{20}^3(v_2, v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ b - y_3 - r = 0 \\ \gamma_{23}(v_2, v_3) = 0, \end{cases} \\
 & \psi_{21}^3(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} a - x_3 - r = 0 \\ \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0 \\ \gamma_{23}(v_2, v_3) = 0, \dots, \end{cases} \quad \psi_{25}^3(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} \gamma_{13}(v_1, v_3) = 0 \\ b - y_3 - r = 0 \\ \gamma_{23}(v_2, v_3) = 0, \end{cases} \\
 & \gamma_{l3}(v_l, v_3) = (x_l - x_3)^2 + (y_l - y_3)^2 + (z_l - z_3)^2 - 4r^2, \quad l = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Рівняння вибираються так, що вони утворюють сумісні лінійні системи $(\psi_k^3(v_3) = 0, k = 1, 2, 3, 4)$, змішані системи $(\psi_k^3(v_l, v_3) = 0, k = 5, 6, \dots, 20, l = 1, 2)$, які складаються з одного нелінійного рівняння та двох лінійно незалежних рівнянь, та змішані системи $(\psi_k^3(v_1, v_2, v_3) = 0, k = 21, 22, \dots, \tau_3; \tau_3 = 25)$, які містять два нелінійних та одне лінійне рівняння. Отже, кількість таких

систем – $\tau_3 = 4 + 8C_2^1 + 5C_2^2 = 25$, де 4 – кількість нижніх вершин, 8 – кількість ребер, 5 – кількість граней кубоїда $P3$ та $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Кількість вузлів третього рівня дорівнює $\eta_3 = \tau_1\tau_2\tau_3 = 4 \cdot 12 \cdot 25 = 1200$. Таким чином, останні три рівняння кожної з систем (5.31) задають можливі положення кулі S_3 відносно куль S_1 , S_2 та кубоїда $P3$. Це означає, що кожному вузлу третього рівня відповідає не більше η_3 положень куль S_1 , S_2 та S_3 в кубоїді $P3$. Системи третього рівня дозволяють зменшити вимірність простору $\mathbb{R}^{m-6}$ на три й розглядати задачу у просторі $\mathbb{R}^{m-9}$ і т.д. Зазначимо, що деякі системи можуть бути несумісними та розв'язки v_3^q , $q = 1, 2, \dots, \delta_2$, деяких систем $u^q = (v_1, v_2, v_3^q, \dots, v_{3n}, h)$, $q = 1, 2, \dots, \delta_3$, $\delta_3 < \tau_3$, можуть не належати області D .

Системи (5.31) поділяються на η_2 груп залежно від номерів вузлів $i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$ та $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$ попередніх рівнів. Вузли третього рівня нумеруються t_{ijk}^3 , $i = 1, 2, \dots, \tau_1$, $j = 1, 2, \dots, \tau_2$, $k = 1, 2, \dots, \tau_3$. Таким чином, перші шість рівнянь однакові для всіх систем однієї групи і т.д.

Першим $3n-3$ рівнянням кожного вузла передостаннього рівня дерева додаються три рівняння, які залежать або тільки від параметрів розміщення $v_n = (x_n, y_n, z_n)$, або одночасно від $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, та $v_n = (x_n, y_n, z_n)$, або одночасно від $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $v_j = (x_j, y_j, z_j)$, $i < j = 2, 3, \dots, n-1$ та $v_n = (x_n, y_n, z_n)$, або одночасно від $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, $v_j = (x_j, y_j, z_j)$ та $v_k = (x_k, y_k, z_k)$, $i < j < k = 3, 4, \dots, n-2$. Ці рівняння утворюють лінійні сумісні системи, змішані системи, які містять одне нелінійне та два лінійно незалежних рівняння, змішані системи з двох нелінійних та одного лінійного рівняння та системи, які містять нелінійні рівняння. Частина розв'язків можуть не належати області D , а частина

систем можуть бути несумісними. Таким чином, системи останнього рівня мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1^1(v_1) = 0 \\ \psi_1^2(v_1, v_2) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \psi_1^n(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \psi_2^1(v_1) = 0 \\ \psi_2^2(v_1, v_2) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \psi_2^n(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0, \dots, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \psi_4^1(v_1) = 0 \\ \psi_{12}^2(v_1, v_2) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \psi_\eta^n(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0, \end{array} \right. \quad (5.32)$$

де

$$\psi_1^n(v_n) = \left\{ \begin{array}{l} x_n - r = 0 \\ y_n - r = 0, \dots, \\ z_n - r = 0, \end{array} \right. \quad \psi_5^n(v_1, v_n) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{1n}(v_1, v_n) = 0 \\ y_3 - r = 0 \\ z_3 - r = 0, \end{array} \right. \dots, \\ \psi_k^n(v_k, v_n) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{kn}(v_k, v_n) = 0 \\ y_n - r = 0 \\ z_n - r = 0, \end{array} \right. \dots, \quad \psi_l^n(v_t, v_a, v_n) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{tn}(v_t, v_n) = 0 \\ \gamma_{an}(v_a, v_n) = 0, \dots, \\ z_n - r = 0, \end{array} \right. \\ \psi_\theta^n = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{tn}(v_t, v_n) = 0 \\ \gamma_{an}(v_a, v_n) = 0, \dots, \\ \gamma_{bn}(v_b, v_n) = 0, \end{array} \right. \quad \psi_\eta^n = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n-3,n}(v_{n-3}, v_n) = 0 \\ \gamma_{n-2,n}(v_{n-2}, v_n) = 0 \\ \gamma_{n-1,n}(v_{n-1}, v_n) = 0, \end{array} \right.$$

$$\gamma_{ij}(v_i, v_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - 4r^2, \quad i < j = 1, 2, \dots, n.$$

Кількість вузлів останнього рівня та кількість усіх вузлів дерева дорівнює відповідно

$$\tau_n = 4 + 8C_{n-1}^1 + 5C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 \quad \text{та} \quad \eta = \prod_{i=1}^n \tau_i.$$

Системи (5.32) поділяються на η_{n-1} груп залежно від номерів вузлів $i, j, \dots, t$ ($i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$, $\dots$, $t \in \{1, 2, \dots, \tau_{n-1}\}$) попередніх рівнів.

Вузли останнього рівня нумеруються $t_{ijk\dots t}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \tau_k\}, \dots$, $t \in \{1, 2, \dots, \tau_{n-1}\}$. Таким чином, перші $3n-3$ рівняння однакові для систем однієї групи.

Розв'язки

$$u^{ijk\dots t} = \left(u_1^{ijk\dots t}, u_2^{ijk\dots t}, \dots, u_n^{ijk\dots t} \right),$$

де $u_m^{ijk\dots t} = \left(x_m^{ijk\dots t}, y_m^{ijk\dots t}, z_m^{ijk\dots t} \right)$, $i \in \{1, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, \dots, \tau_2\}$, $k \in \{1, \dots, \tau_k\}, \dots$, $t \in \{1, \dots, \tau_n\}$, систем вигляду (5.32) однозначно задають можливі положення усіх куль S_p , $p = 1, 2, \dots, n$, в кубоїді $P3$. Це означає, що кожному вузлу останнього рівня відповідає η різних положень куль $S_1, S_2, \dots, S_n$ в кубоїді $P3$ з урахуванням симетрій розміщень куль.

Оскільки рівняння, які містять змінну h , не приймають участь в побудові дерева, відповідні значення h визначаються як

$$h^{ijk\dots t} = \max \left\{ z_1^{ijk\dots t}, z_2^{ijk\dots t}, \dots, z_n^{ijk\dots t} \right\} + r,$$

$$i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}, j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}, \dots, t \in \{1, 2, \dots, \tau_n\}.$$

Важливо, що на кожному рівні системи можна розв'язати в явному вигляді. Якщо деякі системи мають розв'язки $u \notin G$, то вони не розглядаються. Після цього, вибирається найближчий вузол того ж рівня, який відповідає сумісній системі, й розгалуження продовжується.

Таким чином, здійснюється послідовне розміщення куль у кубоїді без будь-якої оптимізації (на відміну, наприклад, від жадібних алгоритмів). Тому вузли, які знаходяться ближче до кореня дерева, мають більший вплив на дисперсію крайніх точок області D , тобто системи рівнянь перших рівнів мають більший вплив на розв'язки задачі.

5.2.2.2 Модифікація методу околів, що звужуються, для дерева розв'язків

Для пошуку наближення до глобального екстремуму задачі (5.27)–(5.28) розробимо модифікацію методу околів, що звужуються, запропонованого в [100].

Кожному кінцевому вузлу $t_{ijk...t}^n$ поставимо у відповідність послідовність n чисел

$$\pi_{ijk...t} = (d_i^1, d_j^2, \dots, d_t^n), \quad i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}, \dots, \quad t \in \{1, 2, \dots, \tau_n\}.$$

Такі послідовності утворюють дискретну множину Π , яка містить η елементів. Оскільки кожній системі останнього рівня відповідає одна крайня точка, то кожній послідовності $\pi_{ijk...t}$ відповідає початкова (крайня) точка.

Розглянемо спосіб задання чисел $d_i^1, d_j^2, \dots, d_t^n$, в якому враховується пріоритет верхніх рівнів дерева розв'язків. Нехай кожному рівню дерева відповідає число $1/((\tau_p - 1)p)$, $p = 1, 2, \dots, n$. Тоді вузлам дерева $t_{ijk...t}^k$, $i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$, ..., $p \in \{1, 2, \dots, \tau_p\}$ рівня p поставимо у відповідність числа $q_j^p = j/((\tau_p - 1)p)$, $j = 1, 2, \dots, \tau_p$. Для зручності, замінімо послідовності $\pi_{ijk...t} = (d_i^1, d_j^2, \dots, d_t^n)$, $i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$, ..., $t \in \{1, 2, \dots, \tau_n\}$ послідовностями $\pi^q = (d_1^q, d_2^q, \dots, d_n^q)$, $q = 1, 2, \dots, \eta$. Отже, кожній послідовності π^q відповідає гілка q дерева розв'язків. Крім того, значення кожної компоненти d_l^q однозначно визначає системи рівнянь, які належать рівню l дерева.

Приклад. Нехай $n = 5$. Тоді $\pi_{ijkst} = (d_i^1, d_j^2, d_k^3, d_s^4, d_t^5)$, $i \in \{1, 2, \dots, \tau_1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \tau_2\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \tau_3\}$, $s \in \{1, 2, \dots, \tau_4\}$, $t \in \{1, 2, \dots, \tau_5\}$. Тому,

$$d_i^1 \in \left\{ \frac{i}{3}, i=1,2,3,4 \right\}, \quad d_j^2 \in \left\{ \frac{j}{22}, j=1,2,3,\dots,12 \right\}, \quad d_k^3 \in \left\{ \frac{k}{72}, k=1,2,\dots,25 \right\},$$

$$d_s^4 \in \left\{ \frac{s}{(\tau_4-1)4}, s=1,2,\dots,\tau_4 \right\}, \quad d_t^5 \in \left\{ \frac{t}{(\tau_5-1)5}, t=1,2,\dots,\tau_5 \right\}.$$

Отже, наприклад, послідовності $\pi^\phi = (\frac{2}{3}, \frac{3}{22}, \frac{1}{72}, \frac{2}{(\tau_4-1)4}, \frac{5}{(\tau_5-1)5})$ відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} \psi_2^1(v_1) = 0 \\ \psi_3^2(v_2) = 0 \\ \psi_1^3(v_3) = 0 \\ \psi_2^4(v_4) = 0 \\ \psi_5^5(v_5) = 0. \end{cases}$$

Введемо на множині Π евклідову метрику

$$\rho(\pi^q, \pi^s) = \sqrt{\sum_{l=1}^n (d_l^q - d_l^s)^2}.$$

Це дозволяє визначити діаметр

$$\alpha = \max_{\pi^q, \pi^s \in \Pi} \rho(\pi^q, \pi^s)$$

та мінімальну відстань β між точками множини Π . Очевидно, що

$$\alpha = \sqrt{\sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{l(\tau_l-1)} - \frac{\tau_l}{l(\tau_l-1)} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}},$$

$$\beta = \min_{\pi^q, \pi^s \in \Pi} \rho(\pi^q, \pi^s) = \rho(\pi^{q*}, \pi^{s*}).$$

Із побудови множини Π випливає, що $\beta = 1/n$, точки π^{q*} та π^{s*} відповідають двом сусіднім кінцевим вершинам.

Тепер розглянемо процедуру побудови вибірок та вибір перспективних околів.

Спочатку виберемо випадково множину $\Pi_1 \subset \Pi$, яка містить λ елементів (числові експерименти показали, що $50 \leq \lambda \leq 100$). Кожна компонента d_l^q точки $\pi^q = (d_1^q, d_2^q, \dots, d_n^q)$ вибирається випадково з дискретної множини $\left\{ \frac{1}{(\tau_k-1)k}, \frac{2}{(\tau_k-1)k}, \dots, \frac{\tau_k}{(\tau_k-1)k} \right\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для всіх послідовностей $\pi^q \in \Pi_1$ обчислюються крайні точки області D . Якщо деякому d_l^q відповідає несумісна система або точка, яка не належить D , то вибирається найближчий вузол дерева, який гарантує допустимий розв'язок. Таким чином, ми отримуємо множину $U_1 \subset D$, яка містить крайні точки $u^{1\tau}$, $\tau = 1, 2, \dots, \lambda$, відповідно до множини Π_1 . Після цього, вибираючи початкові точки із множини U_1 , обчислюємо множину U_1^* , яка складається з λ точок локальних мінімумів. З них вибираємо три точки $u^{*1\tau_1}, u^{*1\tau_2}, u^{*1\tau_3} \in U_1^*$, такі що $\zeta(u^{*1\tau_1}) < \zeta(u^{*1\tau_2}) < \zeta(u^{*1\tau_3}) \leq \zeta(u^{*1\tau})$, $\tau = 1, 2, \dots, \lambda$. Цим локальним мінімумам відповідають початкові точки $u^{1\tau_1}, u^{1\tau_2}, u^{1\tau_3}$ та послідовності $\pi^{1\tau_1}, \pi^{1\tau_2}, \pi^{1\tau_3} \in \Pi_1$. Отже, точкам $u^{*1\tau_1}, u^{*1\tau_2}, u^{*1\tau_3} \in U_1^*$ відповідають точки $\pi^{1\tau_1}, \pi^{1\tau_2}, \pi^{1\tau_3} \in \Pi_1$, які вибираються як центри околів:

$$N_j(\pi^{\tau_j}) = \{\pi \in \Pi : \rho(\pi^{\tau_j}, \pi) = \|\pi^{\tau_j} - \pi\| \leq \alpha\mu\}, j = 1, 2, 3, 0 < \mu < 1.$$

На наступному кроці генеруються вибірки $\Pi_{2j} \subset N_j(\pi^{2\tau_j}) \subset \Pi$, які складаються з λ точок, обчислюються відповідні множини $U_{1j} \subset D$ (крайні точки $u^{2j\tau}$) та множини $U_{1j}^* \subset D$, які містять λ локальних мінімумів,

$j=1,2,3, \tau=1,2,\dots,\lambda$. З кожної вибірки Π_{2j} вилучаються точки $\pi^{2j\tau_1}, \pi^{2j\tau_2}, \pi^{2j\tau_3} \in \Pi_{2j} \quad j=1,2,3$, які відповідають локальним мінімумам $u^{*2\tau_1}, u^{*2\tau_2}, u^{*2\tau_3}$, таким що $\zeta(u^{*2j\tau_1}) < \zeta(u^{*2j\tau_2}) < \zeta(u^{*2j\tau_3}) \leq \zeta(u^{*2j\tau})$ $j=1,2,3, \tau=1,2,\dots,\lambda$.

Оскільки критерій відбору – ймовірність отримання кращих значень функції цілі, очевидно, що він залежить від математичного очікування m_{2j} , і дисперсії σ_{2j} випадкової вибірки Π_{2j} . Наприклад, для різних околів з однаковими математичними очікуваннями та з нормальним, логарифмічно нормальним розподіленнями ймовірностей або з розподіленням Вейбула-Гніденко краще значення функції цілі буде для околу з більшою дисперсією [100]. В дисертаційній роботі застосовується критерій $\chi_{2j} = m_{2j} - \tau\sigma_{2j}$, де параметр $\tau = 1.5$ визначається емпірично.

Наступні центри околів вибираються в такий спосіб:

1. π^{21} – точка, яка відповідає початковій точці u^{21} , з якої отримано найкращий локальний мінімум u^{2*} .

2. $\pi^{22} \in \{\pi^{2j\tau_1}, \pi^{2j\tau_2}, \pi^{2j\tau_3}\}$ – точка, яка відповідає центру вибірки з $\chi_2 = \min\{\chi_{21}, \chi_{22}, \chi_{23}\}$.

3. π^{23} – точка, яка відповідає початковій точці, з якої отримано найкращий локальний мінімум з усіх локальних мінімумів вибірки з χ_2 .

Точки π^{2j} , $j=1,2,3$, визначають такі перспективні околи:

$$N_j(\pi^{2j}) = \left\{ \pi \in \Pi : \rho(\pi^{2j}, \pi) \leq \alpha\mu^2 \right\}, j=1,2,3,$$

й т.д.

Якщо отримано локальний мінімум u^* , для якого $F(u^*) < F(u^{t*})$ $\zeta(u^*) < \zeta(u^{t*})$, радіус $\alpha\mu^t$ околів на наступних ітераціях зменшується в μ разів.

Внаслідок великої кількості несумісних систем на нижніх рівнях дерева при формуванні вибірок в околах маленьких радіусів сильно зростає ймовірність повторів однакових початкових точок. Тому процес розв'язання припиняється, коли радіус околів стає менше β або кількість однакових точок в околі стає більше 20. Кращий отриманий локальний мінімум береться як апроксимація до глобального мінімуму.

Значення параметру μ впливає на швидкість збіжності процесу. Занадто мале значення μ дає швидкий, але поганий розв'язок. Обчислювальний експеримент показав, що найкращий вибір, який забезпечує компроміс між часом обчислень та якістю, це – $\mu \in [0.9, 0.95]$.

Для іншої форми контейнера змінюються тільки системи рівнянь, які є вузлами дерева розв'язків.

5.2.3 Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою за Стратегією 3 (ODP-random-JA-IPOPT)

Розглянемо задачу (3.18)–(3.19). Згідно з Стратегією 3 (ODP-random-JA-IPOPT) для розв'язання задачі застосовується метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на гомотетичних перетвореннях куль. Опишемо етапи розв'язання більш детально.

5.2.3.1 Побудова допустимих початкових точок та пошук локальних екстремумів

Початкова точка $Y^0 \in D$ (див. (3.19)) може бути задана або в детермінований спосіб, або випадково. Будь-який детермінований спосіб

(жадібні або евристичні алгоритми) не дозволяють отримати довільні початкові точки, які належать області допустимих розв'язків. Тому доцільніше використовувати випадковий вибір початкових точок.

Вважаємо, що радіуси r_i куль S_i , $i \in I$, є змінними й формують вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Тоді $X = (u, r) \in \mathbb{R}^{4n}$ – вектор усіх змінних. Нерівності в системі (3.19) приймають вигляд

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, r_i, \mu) \geq 0, i \in I.$$

Нехай $\mu = \mu^0 > 0$. Задаємо у випадковий спосіб точку $X^\Gamma = (u^\Gamma, 0)$ таким чином, щоб $v_i^\Gamma \in P(\mu^0)$, $i \in I$.

Використовуючи точку $X^\Gamma = (u^\Gamma, 0)$, будуємо точку $(u, \mu^0) \in D$. Для цього розв'язуємо задачу

$$\Psi(\hat{r}) = \max \Psi(r) = \max \sum_{i=1}^n r_i, X = (u, r) \in G \subset \mathbb{R}^{4n}, \quad (5.33)$$

$$G = \{X \in \mathbb{R}^{4n}, \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, r_i, \mu^0) \geq 0, \phi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in I\}. \quad (5.34)$$

Із побудови точки X^Γ випливає, що $X^\Gamma \in G$. Тоді, використовуючи початкову точку X^Γ , розв'язуємо задачу (5.33)–(5.34) та отримуємо точку локального максимуму $\hat{X} = (\hat{v}, \hat{r})$. Якщо

$$\Psi(\hat{r}) = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i = \beta,$$

то $\hat{r} = \hat{r}$ й кулі S_i , $i \in I$, розміщуються в прямокутнику $P(\mu^0)$. Це означає, що $\hat{X}$ – точка глобального максимуму задачі (5.33)–(5.34). В

іншому випадку, якщо $\hat{X}$ – точка глобального максимуму задачі (5.33)–(5.34) та $\Psi(\hat{r}) < \beta$, то кулі S_i , $i \in I$, не можуть бути розміщені в $P(\mu^0)$. Нерівність $\Psi(\hat{r}) < \beta$, в точці локального максимуму $\hat{X}$ не означає, що кулі не розміщуються в $P(\mu^0)$.

Залежно від значення μ^0 можливі два випадки: $\Psi(\hat{r}) = \beta$ та $\Psi(\hat{r}) < \beta$.

Якщо $\Psi(\hat{r}) = \beta$, то $(\hat{u}, \mu^0) \in D$ (див. (3.19)). Загалом, $(\hat{v}, \mu^0)$ не є точкою локального мінімуму задачі (3.18)–(3.19). Тому, використовуючи початкову точку $(\hat{v}, \mu^0)$, обчислюємо точку локального мінімуму $(\check{v}, \check{\mu})$ задачі (3.18)–(3.19).

Якщо $\Psi(\hat{r}) < \beta$, то або вибираємо точку $X^r = (u^r, 0)$ знову випадково й розв'язуємо послідовно задачі (5.33)–(5.34) та (3.18)–(3.19), або робимо спробу виконати перехід з точки $\hat{X}$ в точку $\hat{\hat{X}}$, таку що $\Psi(\hat{\hat{r}}) > \Psi(\hat{r})$.

5.2.3.2 Перехід від одного локального максимуму до іншого

Нехай $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{r})$ – точка локального максимуму задач (5.33)–(5.34) та $\Psi(\hat{r}) < \beta$, тобто принаймні одна з нерівностей $\hat{r}_i - \bar{r}_i \geq 0$, $i \in I$, є активною.

Визначимо, чи можна перейти з точки $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{r})$ в іншу точку, в якій функція цілі зросте. Такий перехід може бути здійснений, якщо є резерв об'єму біля деяких куль. Задля цього розглянемо допоміжну задачу

$$\max_{X \in M \subset \mathbb{R}^{4n}} V(r), \quad (5.35)$$

$$\text{де } V(r) = \sum_{i=1}^n r_i^3;$$

$$\begin{aligned} M = \{X \in \mathbb{R}^{4n}, \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, r_i, \mu^0) \geq 0, \\ \psi_{1i}(r_i) = r_{\max} - r_i \geq 0, \psi_{2i}(r_i) = -r_{\min} + r_i \geq 0, i \in I\}; r_{\max} = \hat{r}_n, r_{\min} = \hat{r}_1. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Зазначимо, що область допустимих розв'язків M відрізняється від області G у задачі (5.33)–(5.34): нерівності $\phi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0$, $r_i \geq 0$ в (5.34) замінюються на $\psi_{1i}(r_i) \geq 0$, $\psi_{2i}(r_i) \geq 0$, $i \in I$. Це означає, що радіуси $r_i \geq 0$, $i \in I$, можуть приймати будь-які значення в сегменті $[r_{\min}, r_{\max}]$. Отже, радіуси можуть мати значення, більші за початкові $\hat{r}_i$, $i \in I \setminus \{1\}$.

Тепер обчислимо вектор найшвидшого зростання Z^0 у точці $\hat{X}$ для допоміжної задачі (5.35)–(5.36) й побудуємо точки

$$X^\gamma = \hat{X} + 0.5^\gamma \cdot Z^0, \gamma \in \Gamma = \{0, 1, 2, \dots, q < \infty\}. \quad (5.37)$$

Якщо $Z^0 \neq 0$, то існує таке m , що якщо $\gamma \geq m$, то $X^\gamma \in M$. Це вірно, тому що $M \neq \emptyset$ та $\hat{X} = (\hat{v}, \hat{r})$ не є точкою локального максимуму.

Оскільки в задачі (5.35)–(5.36) значення r_i , $i \in I$, обмежені сегментом $[r_{\min}, r_{\max}]$, деякі з радіусів $r_j = r_j^\gamma \geq \hat{r}_j$, $j \in I_1 \subset I$, а деякі $r_i = r_i^\gamma < \hat{r}_i$, $i \in I_2 \subset I$. Таким чином, може трапитися, що частина нерівностей $\phi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0$, $i \in I$, в (5.34) є неактивними. Нехай множина індексів I_1 й I_2 таких нерівностей містять q та p елементів відповідно. Очевидно, що $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ та $I_1 \cup I_2 = I$.

Тепер вважаємо, що $\gamma = m$ і задамо координати вектору $\tilde{X}^m = (\tilde{v}_1^m, \tilde{v}_2^m, \dots, \tilde{v}_n^m, \tilde{r}_1^m, \tilde{r}_2^m, \dots, \tilde{r}_n^m)$ на основі точок $\hat{X} = (\hat{v}, \hat{r})$ та X^m : якщо для $i \in I_2$ та $j \in I_1$ виконуються нерівності

$$\hat{r}_j > \hat{r}_i, \hat{r}_j \leq r_i^m, \hat{r}_i < r_j^m, \quad (5.38)$$

то $\tilde{r}_i^m = \min\{\hat{r}_i, r_j^m\}$, $\tilde{v}_i^m = v_j^m$, $\tilde{r}_j^m = \min\{\hat{r}_j, r_i^m\}$, $\tilde{v}_j^m = v_i^m$.

Якщо для $i \in I_2$ порушується принаймні одна з нерівностей (5.38), то $\tilde{r}_i^m = r_i^m$, $\tilde{v}_i^m = v_i^m$.

Зазначимо, що точці $\tilde{X}^m \neq X^m$ відповідає допустиме розміщення куль, отримане з точки $\hat{X}$, в якій деякі з куль S_j , $j \in I$, помінялися місцями. Неважко побачити, що можливий випадок, коли $\tilde{X}^m = X^m$, тобто існує таке ціле N , що якщо $m > N$, то $\tilde{X}^m = X^m$. Це означає, що $\tilde{X}^m$ не знаходиться в "зоні тяжіння" точки локального максимуму $\hat{X}$, якщо $m \leq N$.

Нехай $\tilde{X}^m$ — точка локального максимуму, отримана з початкової точки $\tilde{X}^m$ після розв'язання задач (5.33)–(5.34). Тоді за теоремою 5.1, доведеною для кругів, якщо $m \leq N$, то $\Psi(\tilde{X}^m) > \Psi(\hat{X})$.

5.2.3.3 Загальна схема розв'язання задачі

Процедура розв'язання задачі (3.18)–(3.19) складається з чотирьох етапів. На першому етапі будується початкова точка й обчислюється локальний мінімум задачі (3.18)–(3.19). На наступному етапі вимірність простору змінних збільшується, та здійснюється плавний перехід з однієї точки локального екстремуму задачі (5.33)–(5.34) в іншу. Третій етап дозволяє покращити результати за рахунок послідовного зменшення вимірності простору змінних завдяки фіксації радіусів куль. На четвертому етапі виконуються попарні перестановки пар куль, що також може призвести до подальшого поліпшення значення функції цілі.

Розглянемо етапи більш детально.

Для обчислення локального мінімуму задачі (3.18)–(3.19) вибираємо значення $\mu = \mu^0$, за якого кулі S_i з радіусами $\hat{r}_i$, $i \in I$, гарантовано розміщуються в контейнері $P(\mu^0)$. Беремо початкову точку $X^0 = (u^0, 0)$, таку що $u_i^0 \in P(\mu^0)$, $i \in I$, й розв'язуємо задачу (5.33)–(5.34). У результаті знаходимо точку локального максимуму $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{r})$. Внаслідок вибору

$\mu = \mu^0$ завжди має місце $\Psi(\bar{r}) = \beta$ ($\bar{r} = \hat{r} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_n)$). Це означає, що $(\bar{u}, \mu^0) \in D$. Беремо початкову точку $(\bar{u}, \mu^0)$ та розв'язуємо задачу (3.18)–(3.19). В результаті отримуємо нову точку локального мінімуму $(\bar{u}^0, \bar{\mu}^0)$.

Переходимо до наступного етапу. Обчислюємо значення радіусів куль за формулою

$$r_i^\lambda = \hat{r}_i - 0.5^{\lambda+2} \cdot \hat{r}_i = \hat{r}_i(1 - 0.5^{\lambda+2}), \quad i \in I, \lambda = 0, 1, \dots$$

Замість задачі (3.18)–(3.19) розв'язуємо таку задачу:

$$\bar{\mu} = \arg \min_{Y=(u, \mu) \in W^\lambda \subset \mathbb{R}^{3n+1}} \mu, \quad (5.39)$$

$$W^\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}^\lambda(u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i^\lambda + r_j^\lambda)^2 \geq 0, \\ i < j \in I, \Phi_i^\lambda(u_i, \mu) \geq 0, i \in I\},$$

$$\Phi_i^\lambda(u_i, \mu) =$$

$$= \begin{cases} \min\{x_i - r_i^\lambda, y_i - r_i^\lambda, z_i - r_i^\lambda, a - x_i - r_i^\lambda, b - y_i - r_i^\lambda, h - z_i - r_i^\lambda\}, & P = P_B, \\ -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (R - r_i^\lambda)^2, & P = P_S, \\ \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i^\lambda)^2, z_i - r_i^\lambda, h - z_i - r_i^\lambda\}, & P = P_C, \\ \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i^\lambda)^2, x_i^2 + y_i^2 - (\rho + r_i^\lambda)^2, z_i - r_i^\lambda, h - z_i - r_i^\lambda\}, & P = P_{CC}, \\ \min\{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\rho - r_i^\lambda)^2, -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (R - r_i^\lambda)^2\}, & P = P_{SS}. \end{cases}$$

Оскільки $r_i^\lambda < \hat{r}_i$, $i \in I$, то точка $(\bar{u}^0, \bar{\mu}^0) \in W^\lambda$ не є точкою локального мінімуму задачі (5.39). Розв'язуємо задачу (5.39), вибираючи точку $(\bar{u}^0, \bar{\mu}^0)$ як початкову. В результаті отримуємо точку локального мінімуму $(\bar{v}^0, \bar{\mu}^0)$. Враховуючи те, що $\sum_{i=1}^n r_i^\lambda < \beta$, вибираємо початкову точку $X^0 = (\bar{u}^0, r^\lambda) \in G$ та розв'язуємо задачу (5.33)–(5.34). В точці локального максимуму

$\hat{X}^\lambda = (\hat{v}^\lambda, \hat{r}^\lambda)$ можливі дві ситуації поведінки функції цілі Ψ : $\Psi(\hat{r}^\lambda) = \beta$ та $\Psi(\hat{r}^\lambda) < \beta$.

Якщо $\Psi(\hat{r}^\lambda) = \beta$, то $\hat{r}_i^\lambda = \hat{r}_i$, $i \in I$, й, отже, $(\hat{u}^\lambda, \hat{\mu}^0) \in D$ (див. (3.19)).
Вибираємо початкову точку $(\hat{u}^\lambda, \hat{\mu}^0)$ та розв'язуємо задачу (3.18)–(3.19). У результаті обчислюємо нову точку локального мінімуму $(\hat{u}^1, \hat{\mu}^1)$ й після цього точку локального мінімуму $(\hat{u}^1, \hat{\mu}^1)$ задачі (5.39) і так далі, доки не виконається умова $\Psi(\hat{r}^\lambda) < \beta$, тобто після k ітерацій не виявиться, що $\sum_{i=1}^n \hat{r}^\lambda < \beta$, $\hat{X}^\lambda = (\hat{u}^\lambda, \hat{r}^\lambda)$ та $(\hat{u}^\lambda, \hat{\mu}^\lambda) \notin D$.

Якщо $\Psi(\hat{r}^\lambda) < \beta$, то обчислюємо вектор найшвидшого зростання Z^0 у точці $\hat{X}^\lambda$ для задачі (5.35)–(5.36), визначаємо $\gamma = m$ і будуємо точку $X^m = (v^m, r^m) \in G$ згідно з (5.37) та зростаючою послідовністю (див. (3.17)) $r_{i_1}^m \leq r_{i_2}^m \leq \dots \leq r_{i_n}^m$. Оскільки може трапитися, що $V(r^m) > V(\hat{r})$, то згідно з цією послідовністю обчислюємо $r_{i_j}^{m0} = \min\{r_{i_j}^m, \hat{r}_j\}$, $j \in I$. Маємо, що $V(r^{m0}) \leq V(\hat{r})$, де $r^{m0} = (r_1^{m0}, r_2^{m0}, \dots, r_n^{m0})$. Тепер будуємо дві точки: $\tilde{X}^m = (\tilde{u}^m, \tilde{r}^m)$, де $\tilde{u}_j^m = u_{i_j}^m$, $\tilde{r}_j^m = r_{i_j}^{m0}$ і $\tilde{X}^m = (\tilde{u}^m, \tilde{r}^m)$, де $\tilde{u}_j^m = v_{i_j}^m$, $\tilde{r}_j^m = r_{i_j}^m$, $j \in I$.

Якщо $V(\hat{r}) > V(\tilde{r}^m) > V(\hat{r}^\lambda)$, то обчислюємо новий вектор найшвидшого зростання Z^0 в точці $\tilde{X}^m$ для задачі (5.35)–(5.36). На основі точки $\hat{X} = \tilde{X}^m$ будуємо нові точки $X^m = \hat{X} + (1/2)^m Z^0$, $\tilde{X}^m = (\tilde{u}^m, \tilde{r}^m)$ та $\tilde{X}^m = (\tilde{u}^m, \tilde{r}^m)$ і т.д. Ітераційний процес продовжується, доки не виконається одна з умов $V(\tilde{r}^m) = V(\hat{r})$ або $V(\tilde{r}^m) \leq V(\hat{r}^\lambda) < V(\hat{r})$.

Якщо $V(\tilde{r}^m) = V(\hat{r})$, тобто $\tilde{r}_i^m = \hat{r}_i$, $i \in I$, то, використовуючи початкову точку $(\tilde{u}^m, \tilde{\mu}^\lambda)$, розв'язуємо задачу (3.18)–(3.19) й обчислюємо нову точку

локального мінімуму $(\tilde{u}^0, \tilde{\mu}^0)$. Процес продовжується доти, поки не виконається умова $V(\tilde{r}^m) \leq V(\hat{r}^\lambda) < V(\hat{r})$. Після цього збільшуємо λ на 1, та повторюємо описану вище процедуру для нового значення λ до виконання умови $0.5^{\lambda+2} < 10^{-3}$. Схема процесу розв'язання зображена на рис. 5.23.

Для отримання кращого наближення до глобального мінімуму задачі (3.18)–(3.19) використовуємо метод мултистарту: повторюємо ν разів описану процедуру. В результаті обчислюються точки локальних мінімумів (u^{*t}, μ^{*t}) , $t \in T = \{1, 2, \dots, \nu \leq 10\}$. Після цього вибираємо з них точку (u^{*0}, μ^{*0}) , з кращим значення функції цілі $\mu^{*0} = \min\{\mu^{*t}, t \in T\}$. Вона є наближенням до глобального мінімуму задачі (3.18)–(3.19).

5.2.4 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у заданій області за Стратегією 6 (PPP-random-SA-Lagrange)

Розглянемо задачу (3.20)–(3.23). Для розв'язання задачі застосуємо Стратегію 6 (PPP-random-SA-Lagrange), яка ґрунтується на методах локальної оптимізації та методі оптимізації за групами змінних.

5.2.4.1 Декомпозиція задачі

Виконаємо декомпозицію задачі (3.20)–(3.23) на N підзадач, які розв'язуються послідовно. В кожній наступній підзадачі використовуються результати задачі, розв'язаної на попередньому кроці:

$$u_k^* = \arg \min_{u^k \in G^k} W_k(u_k), \quad k = 1, 2, \dots, n_0 + 1, \quad (5.40)$$

де $W_k(u^k) = z_k$, $n_0 + 1 \leq N$;

область допустимих розв'язків $G^k \subset R^3$ визначається системою нерівностей:

$$G^k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi_k(0, u_k) \geq 0, \Phi_{jk}(u_j^*, u_k) \geq 0, j = 1, 2, \dots, k-1\}. \quad (5.41)$$

2. Множина локальних мінімумів складається з точок межі області G^k , координати яких є розв'язками систем двох типів

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (R - r)^2, \\ x^2 + y^2 = (r_c + r)^2, \\ \begin{cases} f_i = 0, \\ f_l = 0, \\ f_m = 0, \end{cases} i, l, m = 0, 1, \dots, k-1, \quad i < l < m, \quad (i, l, m) \in I_l, \end{cases}$$

де $f_i, f_l, f_m \in \Phi_k(0, u_k)$ або $\Phi_{jk}(u_j^*, u_k)$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, $I_l = \{1, 2, \dots, n + C_n^2\}$.

3. Якщо для $k = n_0 + 1$ не отриманий розв'язок задачі (5.40)–(5.41), то кількість розміщених куль є екстремумом задачі (3.20)–(3.23), тобто $N = n_0$.

5.2.4.2 Метод розв'язання підзадач та загальна схема алгоритму

Для розв'язання задачі (5.40)–(5.41) виконуються такі етапи.

1. Пошук початкової точки області допустимих розв'язків G^k методом випадкових розміщень.

2. Пошук точки, яка належить межі області G^k з меншим значенням функції цілі.

3. Рух межею області G^k до крайньої точки з меншим значенням функції цілі.

4. Пошук крайньої точки області G^k , яка є локальним мінімумом задачі (5.40)–(5.41) на основі аналізу множників Лагранжа.

5. Повтор пунктів 1-4 для кожної початкової точки.

6. Вибір кращого локального екстремуму.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі (5.40)–(5.41) для кроку k .

1. Будуємо початкову точку $u^{k0} = (x_k^0, y_k^0, z_k^0)$, де значення координат x_k^0, y_k^0 вибираються випадково, так що $u^{k0} \in G^k$, а $z_k^0 = H - r_k$.

2. Якщо $u^{k0} \notin G^k$, то $N^*=k-1$ (наближення до локального екстремуму), задача (3.20)–(3.23) розв’язана. Зупинка алгоритму.

3. Якщо $u^{k0} \in G^k$, то обчислюємо точку

$$v^{k1} = (x_k^1, y_k^1, z_k^1) = (x_k^0, y_k^0, z_k^0 - \Delta z_q) \in frG^k,$$

в якій куля S_k дотична межі контейнера або кулі S_p , $p \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

При цьому значення Δz_q , $q = 1, 2, \dots$, обчислюється діленням навпіл у сегменті $[0, R + H]$.

4. Якщо точка u^{k1} є локальним мінімумом, то $u^* = u^{k1}$, $x_k = x_k^1, y_k = y_k^1, z_k = z_k^1$, та переходимо на наступний крок $k+1$.

5. Нехай у точці u^{k1} куля S_k дотична до межі контейнера або кулі S_i , $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обчислюємо точку $v^{k2} = (x_k^2, y_k^2, z_k^2)$, в якій куля S_k дотична до куль S_i та S_j одночасно, де $i \neq j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, або кулі S_i та межі контейнера та $z_k^2 < z_k^1$. Для цього розв’язуємо одну із систем рівнянь

$$\begin{cases} \Phi_{ik}(u_i, x, y, z) = 0, \\ z = z_k^1 - \Delta z_q, \\ ax + by = c, \quad q = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi_i(x, y, z) = 0, \\ z = z_k^1 - \Delta z_q, \\ ax + by = c, \quad q = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

де $ax + by = c$ – рівняння площини, яка проходить через точку u^{k1} .

Значення Δz_q визначається діленням навпіл у сегменті $[0, R + H + z_k^1]$.

6. Якщо точка v^{k2} є локальним мінімумом, то $v^* = v^{k2}$, $x_k = x_k^2, y_k = y_k^2, z_k = z_k^2$ та переходимо до наступного кроку $k+1$.

7. Обчислюється точка $v^{k3} = (x_k^3, y_k^3, z_k^3)$, в якій куля S_k дотична до межі контейнера та куль S_i та S_j одночасно, де $i \neq j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, або кулі S_i ,

S_j та S_l одночасно, де $i \neq j \neq l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ та $z_k^3 < z_k^2$. Для цього розв'язується одна з систем

$$\begin{cases} \Phi_{ik}(u_i, x, y, z) = 0, \\ \Phi_{il}(u_i, x, y, z) = 0, \\ z = z_k^2 - \Delta z_q, \quad q = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi_i(x, y, z) = 0, \\ \Phi_{ik}(u_i, x, y, z) = 0, \\ z = z_k^2 - \Delta z_q, \quad q = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Значення Δz_q визначається діленням навпіл у сегменті $[0, R + H + z_k^2]$.

8. Якщо точка v^{k3} є локальним мінімумом, тобто $\lambda_t^k > 0, t = 1, 2, 3$, то $v^* = v^{k3}$, $x_k = x_k^3$, $y_k = y_k^3$, $z_k = z_k^3$, та переходимо до наступного кроку $k+1$.

9. Визначаємо $i_0 \in \{1, 2, 3\}$, таке що $\lambda_{i_0}^k \leq \lambda_1^k$, $\lambda_{i_0}^k \leq \lambda_2^k$, $\lambda_{i_0}^k \leq \lambda_3^k$. Робимо неактивним обмеження, яке відповідає i_0 , поновлюємо список куль, дотичних до кулі S_k , і переходимо до п. 7.

Для визначення, чи належить точка $u = (x, y, z)$ області G^k , будуємо множину індексів куль, які знаходяться поруч з точкою $u = (x, y, z)$:

$$I_L(v) = \{i \in \{1, 2, \dots, k-1\} \mid |x-x_i| \leq 2r_i, |y-y_i| \leq 2r_i, |z-z_i| \leq 2r_i\},$$

і в подальшому використовуємо систему

$$\begin{cases} \Phi_k(0, v_k) \geq 0, \\ \Phi_{jk}(v_j^*, v_k) \geq 0, \quad j \in I_L(v) \end{cases}$$

замість системи в (5.41). Це дає можливість зменшити обчислювальну складність алгоритму з $O(N^4)$ до $O(N)$.

Для отримання кращого розв'язку слід застосовувати метод мултистарту.

Загальна схема використання алгоритму наведена на рис. 5.24.

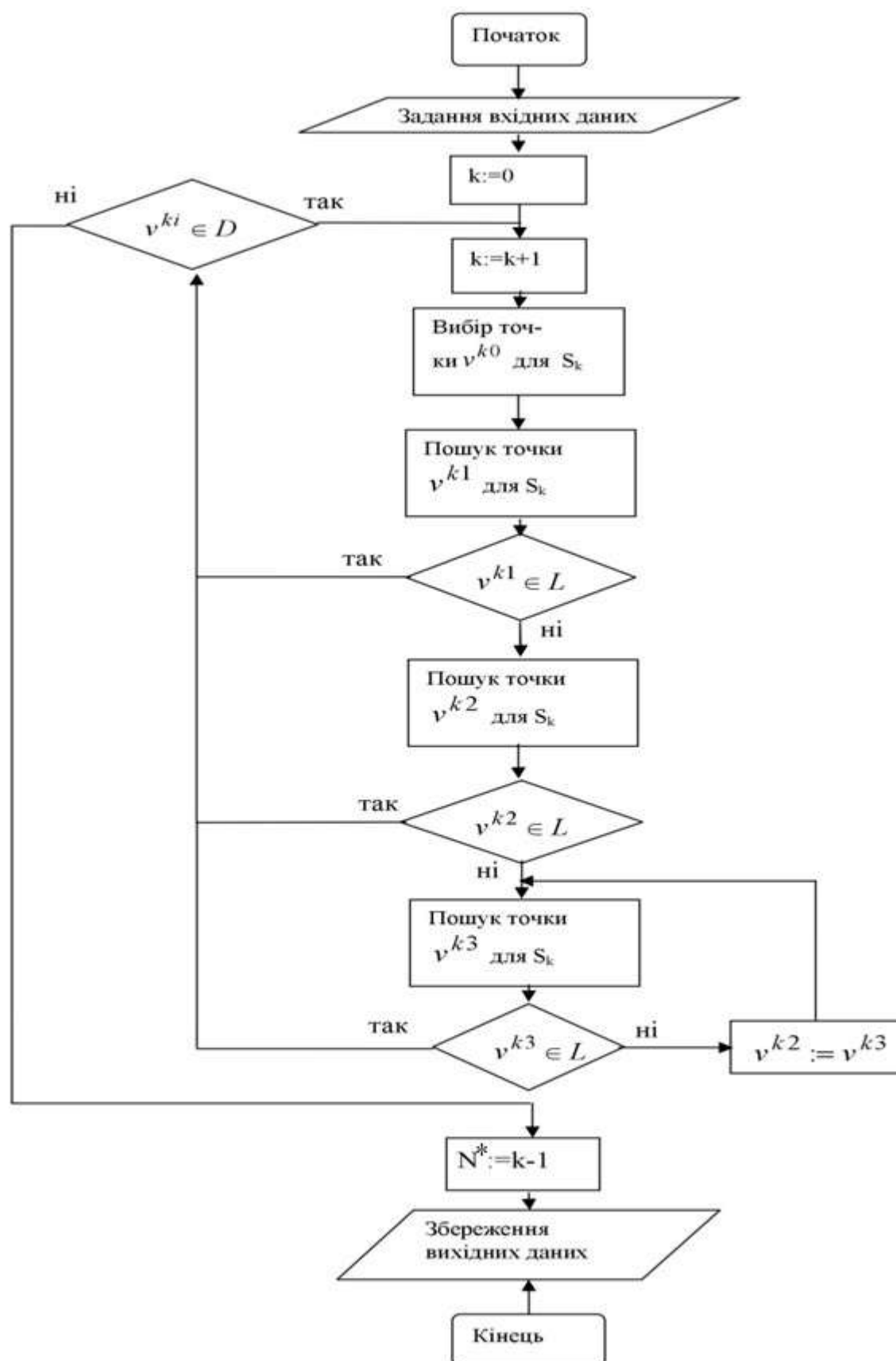


Рис. 5.24. Загальна схема алгоритму

5.2.5 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у контейнері із зонами заборони за допомогою Стратегії 5 (PPP-random/lattice-IPOPT)

Розглянемо задачу розміщення максимальної кількості куль у багатозв'язному контейнері із зонами заборони, постановка та математична модель якої наведена в п. 3.2.3. Згідно із Стратегією 5 (PPP-random/lattice-IPOPT), ураховуючи, що контейнер C може мати багато зон заборони, для побудови початкових точок використовується задача нелінійного програмування (4.3)–(4.4).

Для пошуку локального екстремуму застосовується комбінований метод декомпозиції та IPOPT, а для глобальної оптимізації – метод оптимізації за групами змінних, реалізований у вигляді послідовності задач (3.28). Розглянемо етапи розв'язання задачі більш детально.

5.2.5.1 Побудова допустимої початкової точки й обчислення локального максимуму

Оскільки просторова форма контейнера має складну структуру через присутність зон заборони, пошук початкових точок у випадковий спосіб не завжди призведе до швидкого отримання результату. Тому, задля отримання початкової точки, яка належить області допустимих розв'язків W_μ , пропонується спеціальна процедура.

Перш за все, вибирається початкове значення кількості куль $\mu \geq 1$, які гарантовано розміщуються в області C . Таке значення можна встановити у ході числових експериментів. Після цього задаються: координати центрів u_i куль S_i – у випадковий спосіб таким чином, щоб $u_i \in \Pi$, $i \in I_\mu$, де Π – кубоїд мінімального об'єму

$$\left(\max_{k \in N} x_k^P - \min_{k \in N} x_k^P \right) \left(\max_{k \in N} y_k^P - \min_{k \in N} y_k^P \right) \left(\max_{k \in N} z_k^P - \min_{k \in N} z_k^P \right)$$

який містить C , та радіуси $r_i = r$, $i \in I_\mu$. Центри координат та радіуси утворюють вектор

$$X^{\mu 0} = (r, r, \dots, r, x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0, \dots, x_\mu^0, y_\mu^0, z_\mu^0) \in \mathbb{R}^{4\mu},$$

який, загалом, не належить області допустимих розв'язків W_μ (див. (3.30)). Якщо $X^{\mu 0} \in W_\mu$, то точка $X^{\mu 0}$ вибирається як початкова для розв'язання послідовності задач (3.28). Якщо $X^{\mu 0} \notin W_\mu$, то будуємо точку $(\chi^0, X^{\mu 0}) \in \mathbb{R}^{4\mu+1}$, де

$$\chi^0 = \min \left\{ \Phi_{ij}(r_i^0, r_j^0, u_i^0, u_j^0), \quad 0 < i < j \in I_\mu, \Phi_i(r_i^0, u_i^0), \quad i \in I_\mu \right\}.$$

Вибираємо точку $(\chi^0, X^{\mu 0})$ як початкову та згідно з (4.3)–(4.4) розв'язуємо таку задачу:

$$(0, X^{*\mu}) = \arg \max_{(\chi, X^\mu) \in G_\mu} \chi, \quad (5.42)$$

де

$$G_\mu = \left\{ (\chi, X^\mu) \in \mathbb{R}^{4\mu+1}, \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) - \chi \geq 0, \quad 0 < i < j \in I_\mu, \right. \quad (5.43)$$

$$\left. \Phi_i(r_i, u_i) - \chi \geq 0, r - r_i - \chi \geq 0, r_i - \chi \geq 0, \quad i \in I_\mu, \quad -\chi \geq 0 \right\}.$$

Оскільки радіуси куль є змінними, завжди існує глобальний максимум $(0, X^{*\mu})$, такий що $X^{*\mu} \in W_\mu$.

Задача (5.42)–(5.43) має ті ж самі властивості, що й задача (3.28). Це означає, що область допустимих розв'язків:

$$G_\mu = \bigcup_{t=1}^{\sigma} G_{\mu t}, \quad (5.44)$$

де підмножина $G_{\mu t}$ визначається однією з систем нерівностей (див. (3.35) та (5.43)):

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) - \chi \geq 0, 0 < i < j \in I_\mu, \\ \Psi_{ijqb}^{SP}(r_i, u_i) - \chi \geq 0, j \in J, \\ \Psi_{ilpk}^{SC}(r_i, u_i) - \chi \geq 0, l \in L, \\ r - r_i - \chi \geq 0, i \in I_\mu, \\ r_i - \chi \geq 0, i \in I_\mu, \\ -\chi \geq 0, \\ i \in I_\mu, b \in B, k \in K, q = 1, 2, p = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5.45)$$

Таким чином, пошук локального максимуму задачі (5.42) можна звести до розв'язання послідовності задач (див. (3.35), (5.44) та (5.45)):

$$(\chi^{*\gamma}, X^{*\mu}) = \arg \max_{(\chi^\gamma, X^{\mu\gamma}) \in G_{\mu\gamma}} \chi^\gamma, \gamma = 1, 2, \dots, m \ll \eta, \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\gamma} = \{(\chi^\gamma, X^{\mu\gamma}) \in \mathbb{R}^{3\mu+1} : & \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) - \chi^\gamma \geq 0, i < j \in I_\mu, \\ & \Psi_{ijq_\gamma b_\gamma}^{SP}(r_i, u_i) - \chi^\gamma \geq 0, j \in J, \\ & \Psi_{ilp_\gamma k_\gamma}^{SC}(r_i, u_i) - \chi^\gamma \geq 0, l \in L, \\ & r - r_i - \chi^\gamma \geq 0, r_i - \chi^\gamma \geq 0, i \in I_\mu, -\chi^\gamma \geq 0\}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Для розв'язання задачі (5.46)–(5.47) використовуємо початкову точку $(\chi^0, X^{\mu 0}) \in G_\mu$ та, визначивши систему нерівностей (див. (5.47)), яка задає підмножину $G_{\mu_1} \subset G_\mu$, таку що $(\chi^0, X^{\mu 0}) \in G_{\mu_1}$, розв'язуємо задачу

$$(\chi^{*1}, X^{*\mu 1}) = \arg \max_{(\chi^1, X^{\mu 1}) \in G_{\mu 1}} \chi^1. \quad (5.48)$$

Точка $(\chi^{*1}, X^{*\mu 1})$ може бути локальним максимумом як для задачі (5.46)–(5.47), так і для (5.42)–(5.43).

Для того щоб визначити, чи є точка $(\chi^{*1}, X^{*\mu 1})$ локальним максимумом задачі (5.42)–(5.43), ми визначаємо нерівності з системи (5.43), ε -активні в точці $(\chi^{*1}, X^{*\mu 1})$, обчислюємо вектор найшвидшого зростання Z^0 та будуємо точку $(\chi^2, X^{\mu 2}) = ((\chi^{*1}, X^{*\mu 1}) + \tau Z^0) \in G_\mu$, $\tau \geq 0$. Якщо $Z^0 = 0$ або $\tau = 0$, то $(\chi^2, X^{\mu 2}) = (\chi^{*1}, X^{*\mu 1})$ є точкою локального максимуму задачі (5.42)–(5.43). Якщо $(\chi^2, X^{\mu 2}) \neq (\chi^{*1}, X^{*\mu 1})$, то визначаємо нову систему нерівностей (див. (5.45)) та розв'язуємо задачу (5.48) і т.д..

Процес продовжується, доки не отримано точку локального максимуму $(\chi^*, X^{*\mu}) = (\chi^{*\mu}, X^{*\mu})$ задачі (5.42)–(5.43). Очевидно, що $X^{*\mu} \in W_\mu$. Точка $X^{*\mu}$ береться як початкова для задачі (3.28), яка розв'язується в такий же спосіб.

Для розв'язання задач нелінійного програмування (3.28) та (5.48) використовується модифікація методу можливих напрямків Зонтедейка [281] та концепція ε -активних нерівностей [257].

5.2.5.2 Пошук наближення до глобального максимуму

За Стратегією 5 (IPP-random/lattice-IPOPT) для розв'язання задачі запропоновано розглядати послідовність задач (3.28), розмірність яких зростає, а номер задачі відповідає кількості розміщуваних куль.

Якщо $F_\mu(X^{*\mu}) = \mu r$, то μ збільшується на 1, та розв'язується наступна задача з послідовності (3.28) з нової початкової точки. Для побудови початкової точки використовується розміщення, отримане для попередньої задачі, а координати центру $\hat{u}_{\mu+1}$ кулі $S_{\mu+1}$ задаються випадково:

$$\hat{u}_{\mu+1} = (\hat{x}_{\mu+1}, \hat{y}_{\mu+1}, \hat{z}_{\mu+1}) \in \Pi. \quad (5.49)$$

Отримуємо точку $\hat{X}^{(\mu+1)} = (r, r, \dots, r, u_1^*, u_2^*, \dots, u_\mu^*, \hat{u}_{\mu+1})$. Якщо $\hat{X}^{(\mu+1)} \in W_{\mu+1}$, то точка $X^{(\mu+1)0} = \hat{X}^{(\mu+1)}$ береться як початкова для обчислення локального максимуму задачі (3.28).

Якщо $\hat{X}^{\mu+1} \notin W_{\mu+1}$, то вибирається нова випадкова точка $\hat{u}_{\mu+1}$ згідно з (5.49). Процес повторюється, доки або $\hat{X}^{(\mu+1)} \in W_{\mu+1}$, або вичерпаний ліміт на максимальну кількість спроб σ . Якщо отримуємо $\hat{X}^{(\mu+1)} \notin W_{\mu+1}$ після σ спроб, то задаємо нове значення радіусу $r_{\mu+1} = 0.9r$ кулі $S_{\mu+1}$ і знову повторюємо описану процедуру й т.д. Очевидно, що існує таке ціле $k > 1$, для якого $r_{\mu+1} = 0.9^k r > 0$ та $\hat{X}^{(\mu+1)} \in W_{\mu+1}$. Використовуючи початкову точку $X^{(\mu+1)0} = \hat{X}^{(\mu+1)} \in W_{\mu+1}$, обчислюємо локальний максимум задачі (3.28).

Якщо $F_\mu(X^{\mu*}) < \mu r$, вибираємо нову початкову точку $X^{(\mu+1)1}$ і розв'язуємо задачу (3.28). Процес триває, доки не досягнуто обмеження на час обчислення.

5.2.6 Розв'язання задачі розміщення нерівних куль у контейнері із зонами заборони з максимальним коефіцієнтом заповнення за Стратегією 4 (KP-random-tree-IPOPT)

Розглянемо задачу (3.36)–(3.40). Згідно із Стратегією 4 (KP-random-tree-IPOPT) для розв'язання задачі необхідно побудувати дерево розв'язків, яке надасть можливість перебрати варіанти вибору куль з набору $\Theta_k = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{k\hat{j}_k}\}$, розробити правила відтинання для забезпечення достатнього коефіцієнту щільності розміщення та розробити метод розміщення куль у контейнері згідно з побудованим деревом. Розглянемо

етапи розв'язання більш детально.

5.2.6.1 Побудова дерева розв'язків

Дерево розв'язків T будується в такий спосіб (рис. 5.25).

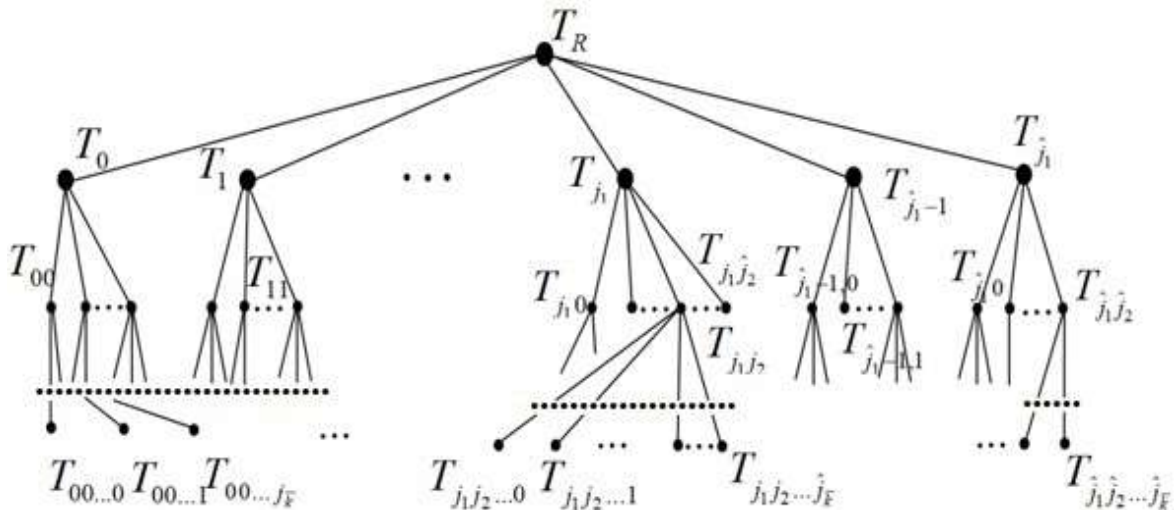


Рис. 5.25. Дерево розв'язків

Корінь дерева T_R розгалужується на вузли T_{j_1} , $j_1 \in \hat{J}_1 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_1\}$, першого рівня, де j_1 означає, що розглядається j_1 куль з набору Θ_1 . Значення $j_1 = 0$ відповідає ситуації, коли кулі з радіусом $\hat{r}_k$ не вибираються. Для вибраних куль відповідні значення $t_i = 1$, $i \in I$, в (3.36-3.40). У свою чергу, кожен з $\hat{j}_1 + 1$ вузлів першого дерева розгалужується в $\hat{j}_2 + 1$ вузлів другого рівня: $T_{j_1 j_2}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_2\}$. Значення j_1 та j_2 вказують, що з набору S_{k_1} вибираються j_1 куль та з набору $\Theta_2 - j_2$ куль відповідно. Тоді вузлу другого рівня відповідає $j_1 + j_2$ куль, а загальна кількість вузлів другого рівня – $(\hat{j}_1 + 1)(\hat{j}_2 + 1)$. Знову, кожний вузол другого рівня розгалужується на $\hat{j}_3 + 1$ вузлів і т.д. Таким чином, кінцевому вузлу (вершині) $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2, \dots, j_{\bar{k}} \in \hat{J}_{\bar{k}} = \{0, 1, \dots, \hat{j}_{\bar{k}}\}$ відповідає гілка $T_R, T_{j_1}, T_{j_1 j_2}, T_{j_1 j_2 j_3}, \dots, T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, тобто береться j_1 куль з множини Θ_1 , j_2

куль з множини Θ_2 й т.д., j_k^- куль з множини Θ_k^- . Це означає, що кожній вершині дерева відповідає $j_1 + j_2 + \dots + j_k^-$, для яких $t_i = 1$ в (3.36)–(3.40).

Загальна кількість вершин дерева T дорівнює $\prod_{k \in K} (\hat{j}_k + 1)$.

5.2.6.2 Правила відтинання

Для того щоб зменшити кількість вершин T , розроблені правила відтинання, які дозволяють не враховувати неперспективні гілки дерева T .

Знайдемо нижню $\underline{\Psi}$ та верхню $\bar{\Psi}$ межі функції цілі $\Psi(u)$.

Початкове значення $\underline{\Psi}$ дорівнює 0 та динамічно поновлюється за отримання кращого варіанту розміщення.

Значення $\bar{\Psi}$ вибирається так: $\bar{\Psi} = \text{Volume}(C) \cdot k$, де $k = \pi / \sqrt{18} \approx 0.74$ – доведена максимальна щільність заповнення рівними кулями [236]. Таке значення може теоретично призвести до втрати глобального максимуму задачі (3.36)–(3.40), тому що за нерівних радіусів щільність може бути більшою. Навіть якщо перебрати все дерево T , не можна гарантувати глобальний максимум. Тим не менш, експерименти показали, що значення $k = \pi / \sqrt{18} \approx 0.74$ є прийнятним.

При побудові дерева розв'язків для подальшого розгалуження розглядаються тільки ті вузли дерева T , для яких виконується нерівність $\underline{\Psi} < \Psi(u) < \bar{\Psi}$. Якщо для вузла ще на верхніх рівнях можна зробити висновок, що жоден з варіантів розгалуження не призведе до виконання зазначеної умови, то цей вузол не розгалужується.

Проаналізуємо вузол $T_{j_1 j_2 \dots j_k}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2, \dots, j_k \in \hat{J}_k$.

Правило 1. Якщо

$$\frac{4}{3}\pi \left(\sum_{i=1}^k j_i r_i^3 \right) > \bar{\Psi},$$

то вузол $T_{j_1 j_2 \dots j_k}$ не розгалужується.

Правило 2. Якщо

$$\frac{4}{3} \pi \left(\sum_{i=1}^k j_i r_i^3 + r_l^3 \right) > \bar{\Psi}$$

для всіх $l \in \{k+1, k+2, \dots, \bar{k}\}$, то єдиною вершиною дерева, яка має бути розглянута для вузла $T_{j_1 j_2 \dots j_k}$, є $T_{j_1 j_2 \dots j_k 00 \dots 0}$.

Правило 3. Якщо

$$\frac{4}{3} \pi \left(\sum_{i=1}^k j_i r_i^3 + \sum_{i=k+1}^{\bar{k}} \hat{j}_i r_i^3 \right) < \underline{\Psi},$$

то вузол $T_{j_1 j_2 \dots j_k}$ не розгалужується.

Тепер розглянемо вершину $T_{j_1^0 j_2^0 \dots j_{\bar{k}}^0}$, $j_1^0 \in \hat{j}_1$, $j_2^0 \in \hat{j}_2, \dots, j_{\bar{k}}^0 \in \hat{j}_{\bar{k}}$.

Правило 4. Якщо

$$\frac{4}{3} \pi \left(\sum_{i=1}^{\bar{k}} j_i^0 r_i^3 \right) < \underline{\Psi},$$

то вершина $T_{j_1^0 j_2^0 \dots j_{\bar{k}}^0}$ не розглядається.

Правило 5. Якщо не вдається отримати розміщення куль з набору S_i , $i \in I$, яке відповідає вузлу $T_{j_1^0 j_2^0 \dots j_{\bar{k}}^0}$, то вершини $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, які відповідають множинам $\{j_1, j_2, \dots, j_{\bar{k}}\}$, таким що $j_1 \geq j_1^0, j_2 \geq j_2^0, \dots, j_{\bar{k}} \geq j_{\bar{k}}^0$, у подальшому не розглядаються.

Зазначимо, що неточна оцінка верхньої межі $\bar{\Psi}$, замале її значення, може призвести до втрати кращого розміщення куль. Водночас, занадто

велика оцінка $\bar{\Psi}$ значно збільшує кількість вершин, згідно з якими виконується розміщення куль.

5.2.6.3 Розміщення куль згідно з вершиною дерева

Розглянемо вершину $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$ дерева розв'язків та визначимо ненульові двійкові змінні, які відповідають цій вершині в моделі (3.36)–(3.40). Кількість ненульових значень дорівнює $n_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}} = j_1 + j_2 + \dots + j_{\bar{k}}$. Це означає, що треба розмістити кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1j_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2j_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}j_{\bar{k}}}$ з набору S_i , $i \in I$. Для зручності перейменуємо кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1j_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2j_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}j_{\bar{k}}}$ як S_p , $p \in P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, де $P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}} = \{1, 2, \dots, n_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}\}$.

Вважаємо, що радіуси r_p , $p \in P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, є змінними. Для розміщення куль S_p , $p \in P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, в області C розв'язується така задача:

$$X^* = \arg \max_{X=(u,r) \in D} \sum_{j=1}^{\gamma} r_j, \quad (5.50)$$

де

$$\gamma = n_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}};$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{\gamma});$$

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_{\gamma});$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^{4n} : \Phi_{ij}(v_i, v_j, r_i, r_j) \geq 0, 0 < i < j \in P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}, \quad (5.51)$$

$$\Phi_i(v_i, r_i) \geq 0, \phi_i(r_i) = r_i^0 - r_i \geq 0, r_i \geq 0, i \in P_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}\}.$$

Розв'язуємо задачу (5.50)–(5.51) в такий самий спосіб, як і задачу (5.42) – (5.43). Якщо $X^{\gamma*}$ – розв'язок задачі (5.50)–(5.51), такий що $\sum_{j=1}^{\gamma} r_j^* = \sum_{j=1}^{\gamma} r_j^0$, то отримано розміщення куль, яке відповідає вузлу $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, тобто $\Psi(u^{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}, t^{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}) = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\gamma} (r_j^*)^3$ є розв'язком задачі (3.36)–(3.40).

Краще значення Ψ^* для всіх вузлів зрізаного дерева розглядається як наближення до глобального максимуму задачі (3.36)–(3.40).

5.3 Методи розв'язання задач розміщення гіперкуль, $d \geq 4$

5.3.1 Розв'язання задачі розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі з мінімальним радіусом

Розглянемо задачу (3.51)–(3.55). Задача належить до класу nD SODP. У випадку нерівних гіперкуль для розв'язання задачі доцільно застосувати Стратегію 3 ODP-random-JA-IPOPT, яка є універсальною, але показує кращі результати для нерівних гіперкуль, радіуси яких плавно змінюються від меншого до більшого. Розглянемо особливості застосування стратегії для $d \geq 4$.

5.3.1.1 Побудова початкового локального екстремуму

Як і в задачах у дво- та тривимірному просторах, вважається, що радіуси r_i гіперкуль S_i , $i \in I$, є змінними. Нехай $\rho = \rho^0 \gg \hat{r}_n$ (див. (3.50)) та $r_i = 0$, $i \in I$. Задамо вектор $\Upsilon^r = (u_1^r, u_2^r, \dots, u_n^r)$ у випадковий спосіб, так що $S_i(u_i^r) \subset S(\rho^0)$, $i \in I$. Розглянемо точку $X^r = (\Upsilon^r, 0) \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$ як початкову та розв'яжемо задачу:

$$X^* = \arg \max_{X=(\Upsilon, r) \in \hat{D}} \Psi(r), \quad (5.52)$$

де

$$\Psi(r) = \sum_{i=1}^n r_i; \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \hat{D} = \{X \in \mathbb{R}^{(n+1)d} : \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, \ 0 < i < j \in I, \\ \Phi_i^r(u_i, r_i, \rho^0) \geq 0, \ \phi_i(r_i) = \hat{r}_i - r_i \geq 0, \ r_i \geq 0, \ i \in I\}; \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2, \ i, j \in I, \ j > i; \quad (5.55)$$

$$\Phi_i^r(u_i, r_i, \rho^0) = -\|u_i\|^2 + (\rho^0 - r_i)^2, \ i \in I. \quad (5.56)$$

Очевидно, що $X^r \in \hat{D}$ за побудовою. Проаналізуємо точку локального максимуму $\hat{X} = (\hat{Y}, \hat{r})$ задачі (5.52)–(5.56). Завдяки присутності нерівностей $\phi_i(r_i) \geq 0, \ i \in I$, в описі області $\hat{D}$ (5.54) умова

$$\Psi(\hat{r}) = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i = b \quad (5.57)$$

означає, що $\hat{r} = \hat{r}$, тобто $\hat{X}$ – точка глобального максимуму задачі (5.52)–(5.56), а точка $\hat{\omega} = (\hat{Y}, \rho^0) \in D$ (3.53). Значення ρ^0 необмежене зверху, тому воно завжди може бути вибрано достатньо великим, щоб забезпечити глобальний максимум задачі (5.52)–(5.56).

Використовуючи початкову точку $\hat{\omega}$, обчислюємо точку локального мінімуму $\check{\omega}^0 = (\check{Y}^0, \check{\rho}^0)$ задачі (3.51)–(3.55).

5.3.1.2 Перехід до іншого локального екстремуму

Нехай $\check{\omega}^0 = (\check{Y}^0, \check{\rho}^0)$ – точка локального мінімуму задачі (3.51)–(3.55). Вважаємо, що радіуси гіперкуль є змінними й дозволимо їм тимчасово зменшуватися для можливості вийти із "зони тяжіння" локального мінімуму $\check{\omega}^0$. Розглянемо послідовність значень радіусів

$$r_i^\lambda = \hat{r}_i - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+2} \hat{r}_i = \hat{r}_i \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+2}\right), \quad i \in I, \lambda = 0, 1, \dots$$

Розв'яжемо задачу (3.51)–(3.55) за умови, що $\hat{r}_i = r_i^\lambda$, $\lambda = 0$, $\bar{\omega}^0$ – початкова точка. В результаті ми отримаємо точку локального мінімуму $\bar{\omega}^0 = (\bar{\Upsilon}^0, \bar{\rho}^0)$, для якої $\sum_{i=1}^n r_i^\lambda < b$ (див. (5.57)). Вибираємо початкову точку $X^0 = (\bar{\Upsilon}^0, r^\lambda) \in \hat{D}$, де $r^\lambda = (r_1^\lambda, r_2^\lambda, \dots, r_n^\lambda)$, та розв'язуємо задачу (5.52)–(5.56). У точці локального максимуму $\hat{X}^\lambda = (\hat{\Upsilon}^\lambda, \hat{r}^\lambda)$ можливі дві ситуації: $\Psi(\hat{r}^\lambda) = b$ та $\Psi(\hat{r}^\lambda) < b$.

Якщо $\Psi(\hat{r}^\lambda) = b$, то $\hat{r}_i^\lambda = \hat{r}_i$, $i \in I$, й отже точка $(\hat{\Upsilon}^\lambda, \bar{\rho}^0) \in D$ (3.3). Використовуємо точку $(\hat{\Upsilon}^\lambda, \bar{\rho}^0)$ й розв'язуємо задачу. В результаті отримуємо нову точку локального мінімуму $(\bar{\Upsilon}^1, \bar{\rho}^1)$. Тепер розв'язуємо знову задачу (3.51)–(3.55) за умови, що $\hat{r}_i = r_i^\lambda$, $\lambda = 1$, а $(\bar{\Upsilon}^1, \bar{\rho}^1)$ – початкова точка, й обчислюємо точку локального мінімуму $(\bar{\Upsilon}^1, \bar{\rho}^1)$. Процес продовжується, доки не виконається умова $\Psi(\hat{r}^\lambda) < b$. Таким чином, отримуємо $\sum_{i=1}^n \hat{r}^\lambda < b$, $\hat{X}^\lambda = (\hat{\Upsilon}^\lambda, \hat{r}^\lambda)$, $(\hat{\Upsilon}^\lambda, \hat{\rho}^\lambda) \notin D$. Очевидно, що, принаймні, одна з нерівностей $\hat{r}_i - \hat{r}_i^\lambda \geq 0$, $i \in I$, є неактивною.

Розглянемо допоміжну задачу

$$X^* = \arg \max_{X=(Y,r) \in M} \Psi(r), \quad (5.58)$$

$$V(r) = \sum_{i=1}^n r_i^d, \quad (5.59)$$

$$M = \{X \in \mathbb{R}^{(n+1)d} : \Phi_{ij}^r(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \\ \Phi_i^r(u_i, r_i, \rho^0) \geq 0, \psi_{1i}(r_i) = \hat{r}_n - r_i \geq 0, \psi_{2i}(r_i) = -\hat{r}_1 + r_i \geq 0, i \in I\}. \quad (5.60)$$

Радіуси в задачі (5.58)–(5.60) не можуть бути менше мінімального й більше максимального початкових значень радіусів. Доведено (Теорема 5.1), що розв'язання задачі (5.58)–(5.60) за певних умов може дати кращий локальний максимум.

Побудуємо вектор найкращого зростання Z^0 для задачі (5.58)–(5.60) в точці $\hat{X}^\lambda$ та обчислимо точки

$$X^\gamma = \hat{X} + (1/2)^\gamma Z^0, \\ \gamma \in \Gamma = \{0, 1, 2, \dots, q < \infty\}. \quad (5.61)$$

Визначимо m , для якого $X^\gamma \in M$. Тепер, використовуючи точку $X^m = (\Upsilon^m, r^m) \in M$, розташуємо радіуси в зростаючій послідовності згідно з (3.50):

$$r_{i_1}^m \leq r_{i_2}^m \leq \dots \leq r_{i_n}^m. \quad (5.62)$$

Оскільки може виникнути ситуація, коли $V(r^m) > V(\hat{r})$, то відповідно до (5.62), обчислюємо $r_{i_j}^{m0} = \min\{r_{i_j}^m, \hat{r}_j\}$, $j \in I$. Тоді $V(r^{m0}) \leq V(\hat{r})$, де $r^{m0} = (r_1^{m0}, r_2^{m0}, \dots, r_n^{m0})$. Згідно з (5.62) побудуємо дві точки: $\tilde{X}^m = (\tilde{\Upsilon}^m, \tilde{r}^m)$, де $\tilde{\Upsilon}_j^m = \Upsilon_{i_j}^m$, $\tilde{r}_j^m = r_{i_j}^{m0}$, $j \in I$, та $\tilde{X}^m = (\tilde{\Upsilon}^m, \tilde{r}^m)$, де $\tilde{\Upsilon}_j^m = \Upsilon_{i_j}^m$, $\tilde{r}_j^m = r_{i_j}^m$, $j \in I$.

Якщо $V(\hat{r}) > V(\tilde{r}^m) > V(\hat{r}^\lambda)$, обчислюємо новий вектор найшвидшого зростання Z^0 для задачі (5.58)–(5.60) в точці $\tilde{X}^m$. Беручи $\hat{X} = \tilde{X}^m$, будуємо нові точку $X^m = \hat{X} + (1/2)^m Z^0$ (див. (5.61)) та точки $\tilde{X}^m = (\tilde{\Upsilon}^m, \tilde{r}^m)$ та

$\tilde{X}^m = (\tilde{Y}^m, \tilde{r}^m)$ відповідно до (5.62) і т.д.. Ітераційний процес зупиняється, якщо або $V(\tilde{r}^m) = V(\hat{r})$, або $V(\tilde{r}^m) \leq V(\hat{r}^\lambda) < V(\hat{r})$.

Якщо $V(\tilde{r}^m) = V(\hat{r})$, тобто $\tilde{r}_i^m = \hat{r}_i$, $i \in I$, то використовуємо початкову точку $(\tilde{Y}_i^m, \tilde{\rho}^\lambda)$ та розв'язуємо задачу (3.51)–(3.55) й отримуємо нову точку локального мінімуму $(\tilde{Y}^0, \tilde{\rho}^0)$. Процес зупиняється, якщо $V(\tilde{r}^m) \leq V(\hat{r}^\lambda) < V(\hat{r})$. Далі застосовуються процедури послідовного зменшення розмірності задачі та перестановки пар гіперкуль, описані в підпункті 5.1.1.5.

Для поліпшення результату доцільно використовувати метод мультистарту.

5.3.2 Розв'язання задачі розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі із заданим радіусом

Розглянемо задачу (3.56)–(3.60). Для розв'язання задачі застосовується Стратегія 5 PPP-random/lattice-local, яка ґрунтується на методі гомотетичних перетворень.

Згідно зі стратегією вибирається початкове значення кількості гіперкуль λ , які гарантовано розміщуються у контейнері. Далі послідовно розв'язуються задачі (3.61)–(3.65). Початкові точки будуються, загалом, методом випадкових розміщень або за великих значень вимірності простору d – методом оптимізації нев'язок. Розглянемо етапи розв'язання більш детально.

5.3.2.1 Побудова допустимих початкових точок

Для зручності виберемо гіперсферичну систему координат.

Побудова початкових точок

$$\tilde{X}^j = (\tilde{r}_1^j, \tilde{r}_2^j, \dots, \tilde{r}_\lambda^j, \tilde{u}_1^j, \tilde{u}_2^j, \dots, \tilde{u}_\lambda^j) \in M_\lambda, j \in J_\xi = \{1, 2, \dots, \xi \leq 100\},$$

здійснюється у випадковий спосіб за таким алгоритмом:

- 1) Вибираємо початкове значення радіусу гіперкуль $r_1 = r_2 = \dots = r_\lambda = r$.
- 2) Задаємо $i = 1$ (номер гіперкулі). Випадково вибираємо значення $\mu_i \in [0, \rho - r]$, $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{i,(d-2)} \in [-\pi / 2, \pi / 2]$, $\phi_{i,(d-1)} \in [-\pi, \pi]$ та обчислюємо координати центрів гіперкуль S_1

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \mu_i \cos \phi_{i1}, \\ x_{i2} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \cos \phi_{i2}, \\ x_{i3} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \cos \phi_{i3} \dots, \\ x_{i,(d-1)} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \dots \sin \phi_{i,(d-2)} \cos \phi_{i,(d-1)}, \\ x_{id} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \dots \sin \phi_{i,(d-2)} \sin \phi_{i,(d-1)}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

- 3) Збільшуємо i на 1, $t = 0$, $r_2 = 0.9^t r$.
- 4) Задаємо $c = 0$ (кількість спроб).
- 5) Випадково вибираємо $\mu_i \in [0, \rho - r]$, $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{i,(d-2)} \in [-\pi / 2, \pi / 2]$, $\phi_{i,(d-1)} \in [-\pi, \pi]$ та за формулами (5.63) обчислюємо координати центрів гіперкуль S_i .

6) Якщо $\Phi_{li}(r_l, r_i, u_l, u_i) \geq 0$ для всіх $l = 1, 2, \dots, i - 1$, то переходимо до п. 9.

7) Збільшуємо c на 1.

8) Якщо $c = 10000$, то збільшуємо t на 1, задаємо $r_i = 0.9^t r$ і повертаємося до п. 8. В іншому випадку ($c < 10000$) і повертаємося до п. 5.

9) Якщо $i = \lambda$, то всі гіперкулі розміщені (критерій зупинки). В іншому випадку повертаємося до п. 3.

5.3.2.2 Пошук локальних екстремумів

Для розв'язання задачі (3.61)–(3.65) використовується модифікація методу можливих напрямків Зонтендейка [281] та концепція ε -активних нерівностей [257].

Для зручності переіндексуємо нерівності в (3.63):

$$g_1(X) = \Phi_{12}(X), \dots, g_2(X) = \Phi_{13}(X), \dots, g_{(\lambda-1)}(X) = \Phi_{1,(\lambda-1)}(X),$$

$$g_{\Lambda}(X) = \Phi_{(\lambda-1),\lambda}(X), g_{\Lambda+1}(X) = \Phi_1(X), \dots, g_{\Lambda+\lambda}(X) = \Phi_{\lambda}(X),$$

$$g_{\Lambda+\lambda+1}(X) = r_1, \dots, g_{\Lambda+2\lambda}(X) = r_{\lambda},$$

$$g_{\Lambda+2\lambda+1}(X) = r - r_1, \dots, g_{\Lambda+3\lambda}(X) = r - r_{\lambda},$$

$$T_1 = \{1, 2, \dots, \Lambda + \lambda\},$$

$$T_2 = \{\Lambda + \lambda + 1, \Lambda + \lambda + 2, \dots, \Lambda + 2\lambda\},$$

$$T_3 = \{\Lambda + 2\lambda + 1, \Lambda + 2\lambda + 2, \dots, \Lambda + 3\lambda\},$$

де $X = (r_1, r_2, \dots, r_{\lambda}, u_1, u_2, \dots, u_{\lambda})$, $\Lambda = \lambda(\lambda - 1) / 2$.

Будується така релаксаційна послідовність:

$$X^{k+1} = X^k + t^k Z^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

де X^0 є стартовою точкою $\tilde{X}^P$ (див. 5.3.2.1);

вектор Z^k є розв'язком задачі лінійного програмування:

$$Z^k = \arg \max_{(\kappa, Z) \in G^k \subset \mathbb{R}^{(d+1)\lambda+1}} \kappa \quad (5.64)$$

де

$$G^k = \left\{ (\kappa, Z) \in \mathbb{R}^{(d+1)\lambda+1} : (\text{grad } F_{\lambda}(X^k), Z) \geq \kappa, (\text{grad } g_{\omega}(X^k), Z^k) \geq \kappa, \right. \quad (5.65)$$

$$\left. \omega \in T_1^k, (\text{grad } g_{\omega}(X^k), Z) \geq 0, \omega \in T_2^k \cup T_3^k, |Z_s^k| \leq 1, s = 1, 2, \dots, (d+1)\lambda + 1 \right\};$$

$$T_1^k = \{i \in T_1, g_i(X^k) \geq \varepsilon\};$$

$$T_2^k = \{i \in T_2, g_i(X^k) \geq \varepsilon\};$$

$$T_3^k = \{i \in T_3, g_i(X^k) \geq \varepsilon / 10\}.$$

Ітераційний процес припиняється, якщо для деякого q виконуються нерівності $r - r_i^k < 10^{-5}$, $i \in I_\lambda$, або $F_\lambda(X^k) - F_\lambda(X^{k-1}) < 10^{-4}$.

5.3.2.3 Пошук наближень до глобального екстремуму

Очевидно, якщо $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то отримано глобальний максимум задачі (3.61)–(3.65). Якщо $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$, то точка $X^{\lambda*}$ може бути або локальним, або глобальним максимумом задачі (3.61)–(3.65). Тому в цьому випадку задача розв'язується для нової початкової точки. За необхідності процес повторюється для всіх початкових точок.

Якщо $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$ для всіх початкових точок, то початкове значення λ вибрано занадто великим, λ зменшується на 1 і ще раз розв'язується задача (3.61)–(3.65).

Якщо $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$, то λ збільшується на 1 і знову розв'язується задача (3.61)–(3.65). Таким чином, задача (3.61)–(3.65) розв'язується, доки не виконається умова $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*}) < (\lambda + 1)r$.

Глобальний максимум $X^{\lambda*}$ задачі (3.61)–(3.65) $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$, який відповідає максимальному значенню λ , відповідає деякій апроксимації до глобального максимуму задачі (3.56)–(3.60).

Якщо λ збільшується, початкова точка для наступної задачі із послідовності (3.56)–(3.60) будується з урахуванням точки глобального максимуму $X^{(\lambda-1)*}$, отриманій на попередньому кроці. Для цього задаються $\mu_{\lambda+1} \in [0, \rho - r]$, $\varphi_{(\lambda+1),1}, \varphi_{(\lambda+1),2}, \dots, \varphi_{(\lambda+1),(\lambda-1)} \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi_{(\lambda+1),\lambda} \in [-\pi, \pi]$ та за

формулами (5.63) обчислюються координати центру $u_{\lambda+1}^0$ і радіус $r_{\lambda+1}^0$ гіперкулі $S_{\lambda+1}$, для того щоб гарантувати виконання нерівностей $\Phi_{i,(\lambda+1)}(r_i^*, r_{\lambda+1}^0, u_i^*, u_{\lambda+1}^0) \geq 0$, $i \in I_\lambda$. У результаті отримуємо початкову точку $X^{\lambda+1} = (v_\lambda^*, r_{\lambda+1}^0, u_\lambda^*, u_{\lambda+1}^0)$.

5.4 Перехід від задачі КР до задачі ODP

З урахуванням того, що для задачі ODP розроблені ефективні методи розв'язання, наприклад, метод спрямованого перебору локальних екстремумів, виникла необхідність застосовувати ці методи й для задач розміщення, сформульованих як задача КР.

Після того, як згідно з деревом розв'язків (задача КР (2.7)–(2.9)) вибраний піднабір гіперкуль, які треба розмістити, виникає задача розміщення набору гіперкуль в області C фіксованих розмірів.

Для цього вводиться множина

$$C(k) = \{kx \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in C\},$$

розмір якої залежить від коефіцієнту гомотетії k .

Розв'язується задача

$$Y^* = \arg \min_{Y=(k, u_1, u_2, \dots, u_n) \in \widehat{W} \subset \mathbb{R}^{dn+1}} k, \quad (5.66)$$

де

$$\widehat{W} = \{Y \in \mathbb{R}^{dn+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(k, Y) \geq 0, i \in I, k \geq 1\}. \quad (5.67)$$

Коефіцієнт гомотетії k враховується у всіх нерівностях $\Phi_i(k, Y) \geq 0, i \in I$, та обмежений знизу нерівністю $k \geq 1$. Тому $C \subset C(k)$. Таким чином, задачу (5.66)–(5.67) можна розглядати як задачу ODP із змінною метричною характеристикою k .

Точка глобального мінімуму $Y^* = (k^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$ задачі (5.66)–(5.67), якщо така існує, забезпечує розміщення гіперкуль $S_i(u_i^*), i \in N$, в контейнері $C(k^*) \equiv C, k^* = 1$. В цьому випадку вона відповідає деякому розв'язку задачі (2.7)–(2.9) з координатами центрів гіперкуль $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$. Якщо в точці Y^* значення $k^* > 1$, то $C \subset C(k)$ і значення $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$ не гарантують допустимого розміщення гіперкуль в області C .

Початкову точку для задачі (5.66)–(5.67) можна вибрати, розв'язуючи задачу розміщення гіперкуль для області з фіксованими розмірами $C(k^0)$, де $k^0 > 1$ гарантує розміщення вибраного набору гіперкуль, наприклад, за допомогою жадібного алгоритму.

На рис. 5.26 наведено розміщення 10 кругів ($d = 2$) у прямокутнику $C(k^0)$, $k^0 = 1.1$, яке відповідає початковій точці. Попередні результати розв'язання задачі (5.66)–(5.67) $k^* = 1$ показані на рис. 5.27.

Незважаючи на те, що розв'язання задачі (5.66)–(5.67) не позбавляє від необхідності повного перегляду двійкових елементів множини T , використання такого підходу значно покращує якість розв'язків завдяки методу спрямованого перебору локальних екстремумів (Jump Algorithm).

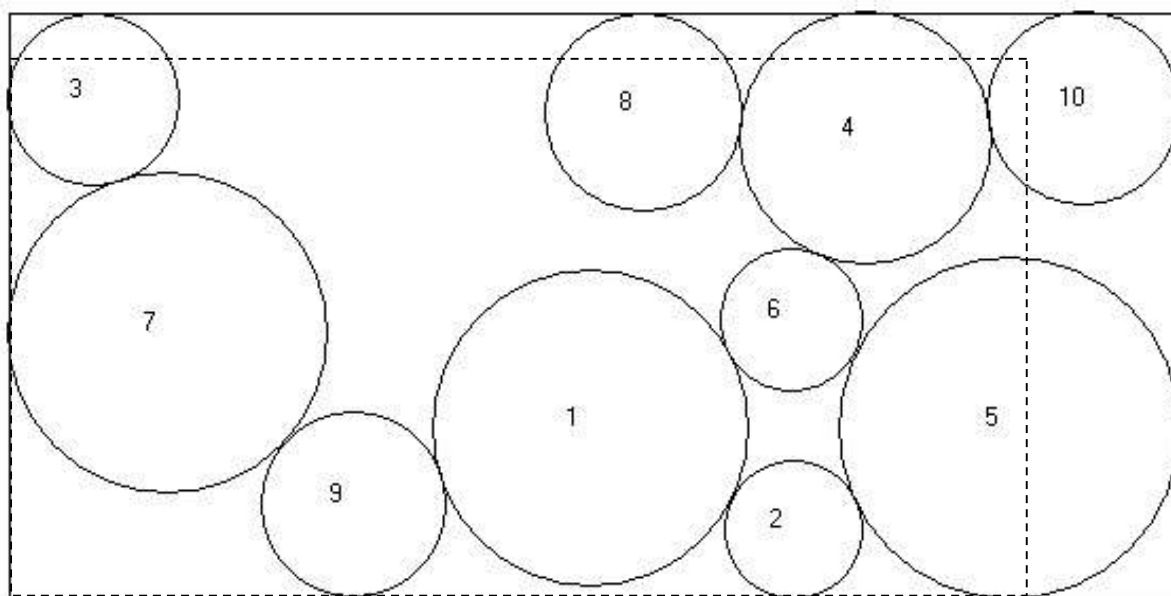


Рис. 5.26. Розміщення кругів, яке відповідає початковій точці задачі ODP (5.66)–(5.67)

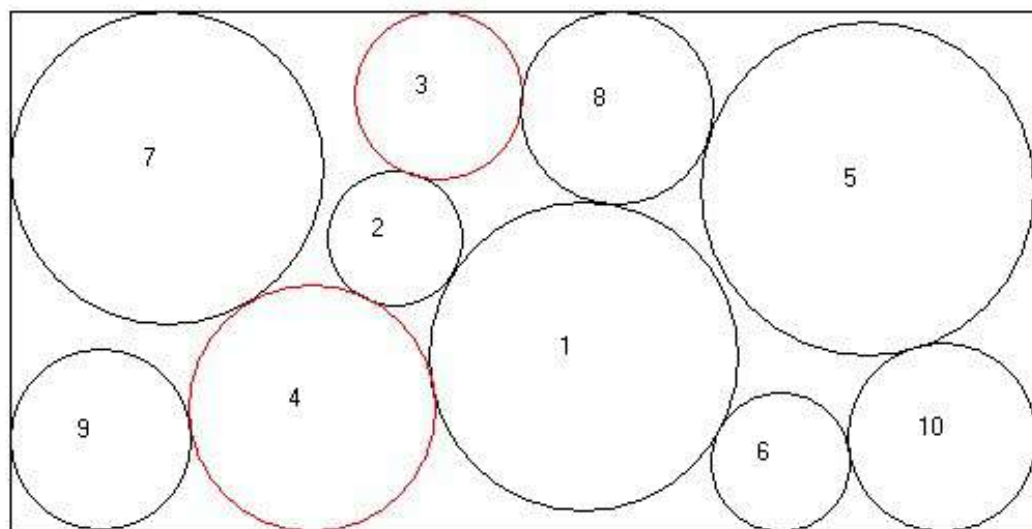


Рис. 5.27. Розміщення кругів, яке відповідає розв'язку задачі розміщення кругів (5.66)–(5.67)

5.5 Висновки за розділом 5

У п'ятому розділі описано методи розв'язання задач HSOA різної вимірності, які включають методи побудови початкових точок, методи

пошуку локальних екстремумів і наближень до глобального екстремуму.

Важливим етапом побудови ефективного методу розв'язання є пошук перспективних початкових точок. Тому залежно від вимірності простору, метричних характеристик гіперкуль та контейнера запропоновані декілька основних методів побудови початкових точок. Формування множини допустимих початкових точок є важливим для розв'язання задач HSOA за допомогою метода мультистарту. При розміщенні великої кількості кругів та гіперкуль доцільно використовувати регулярні ґратчасті розміщення. Але із збільшенням вимірності простору, в якому відбувається розміщення, важливість ґратчастих розміщень зменшуються через "скупчення" значної кількості гіперкуль біля межі області розміщення. За наявності великої кількості зон заборон для побудови початкових точок кращим є метод оптимізації нев'язок, який зводиться до розв'язання допоміжної задачі нелінійного програмування.

Залежно від кількості гіперкуль (зокрема кругів, куль) запропоновані різні методи локальної оптимізації. Найбільш універсальним та ефективним є комбінований метод декомпозиції та IPOPT, в якому застосовується спеціальна стратегія активного набору обмежень.

Із збільшенням кількості розміщуваних гіперкуль, а особливо їх вимірності значно збільшується кількість активних обмежень. Тому в цих випадках запропоновано модифікації методу можливих напрямків Зонтендейка, які дозволяють звести задачу до послідовності задач лінійного програмування. За великої кількості розміщуваних гіперкуль застосовується жадібний алгоритм (метод оптимізації за групами змінних), який дозволяє швидко отримати наближення до локального екстремуму задачі.

Запропоновано методи глобальної оптимізації, які дозволяють знаходити наближення до глобальних екстремумів: модифікації методу околів, що звужуються, метод спрямованого перебору локальних

екстремумів, метод перебору варіантів вибору гіперкуль із заданого набору, метод мультистарту.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [1, 3, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18-25, 30-38, 40-43, 46-49, 51, 52, 56, 57, 60, 61].

РОЗДІЛ 6

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ТА ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

У шостому розділі наводяться опис програмного забезпечення, результати обчислювальних експериментів. Ефективність запропонованих математичних моделей та методів підтверджується порівнянням отриманих результатів з кращими світовими аналогами для різних реалізацій задачі HSOA, опублікованими в міжнародних журналах та на сайтах (<http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>, <http://packomania.com>). Наводяться приклади розв'язання практичних задач, які виникають в матеріалознавстві, ядерній енергетиці, порошковій металургії, адитивних технологіях, хімічній промисловості, медицині.

6.1 Програмна реалізація розроблених методів

Для перевірки ефективності побудованих методів і алгоритмів розв'язання задач HSOA різної вимірності розроблено програмне забезпечення. На декілька програмних модулів отримано свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, наведені в додатку Б.

Програмне забезпечення розроблено з використанням мови Delphi та може бути використане як при розв'язанні окремих задач розміщення гіперкуль різної вимірності, так і при створенні інформаційної системи підтримки прийняття рішень у геометричному проектуванні.

Програмне забезпечення розроблено за принципом модульності й складається з таких модулів:

- модуль введення початкових даних;
- модуль обчислення Φ -функцій;
- модуль формування градієнтів та побудови матриць Якобі та Гессе;
- модуль формування початкових точок;
- модуль розв'язання допоміжних задач;

- модуль локальної оптимізації;
- модуль глобальної оптимізації;
- модуль графічної візуалізації.

Для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування використовуються сучасні розв'язувачі HOPDM (higher order primal dual method), BPMPD (primal-dual interior point algorithm), IPOPT (Interior Point OPTimizer), які найбільш ефективні для задач із сильно розрідженими матрицями Якобі та Гесса. Для перевірки розроблених методів для задачі PPP ($d \leq 7$) використовується розв'язувач задач нелінійного програмування GAMS/BARON (General Algebraic Modeling System / Branch-and-Reduce Optimization Navigator).

Модульність програмного забезпечення дозволила виконати декомпозицію алгоритму, що скорочує час розв'язання задач.

Результати обчислювальних експериментів порівнюються з тестовими задачами, поданими в роботах, які присвячені розміщенню гіперкуль різної вимірності, та на спеціалізованих сайтах. Розглядалися задачі розміщення різної розмірності: від розміщення кругів ($d = 2$) до гіперкуль ($d = 24$). Кількість гіперкуль – від 20 до декількох мільйонів. Наводяться приклади для всіх реалізацій HSOA: ODP, KP, PPP.

Параметри комп'ютера, на якому проводились обчислювальні експерименти: процесор Intel Core I5 750 2,5 GHz, 6 Gb оперативної пам'яті.

6.2 Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення кругів

6.2.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику з мінімальною довжиною

Результати розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у прямокутнику мінімальної довжини порівнюються з результатами інших дослідників. Тестові приклади й числові результати (для задачі (3.2)–(3.4))

наведені на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке (сторінка E. Specht) [163].

Подані дві групи прикладів. Перша група складається з 25 прикладів для 20-300 кругів. Перші шість прикладів SY1–SY6 запропоновано в [252]. Решту прикладів більшої розмірності утворено шляхом комбінування прикладів SY1–SY6. Порівняння результатів наведено в табл. 6.1. В першому стовпчику таблиці – назва прикладу, далі: n – кількість кругів, l^* – довжина прямокутника (функція цілі), отримана в дисертаційній роботі, l^*_{best} – світовий рекорд, w – ширина прямокутника, l/w – відношення довжини до ширини, щільність заповнення прямокутника, посилання на джерело інформації.

Друга група прикладів була запропонована в роботі [142]. Вона складається з 128 різноманітних прикладів – по 28 прикладів для 25, 50, 75, 100 кругів з різними значеннями радіусів кругів та розмірів прямокутника. У табл. 6.2–6.5 проведено порівняння результатів роботи методу, розробленого в дисертаційній роботі, з кращими відомими результатами. Структура табл. 6.2–6.5 така ж сама, як і табл. 6.1.

Розв’язання задач нелінійного програмування (3.2)–(3.4), (5.1)–(5.2), (5.5)–(5.6) та (5.7)–(5.9) здійснюється за допомогою IPOPT [280]. Незважаючи на те, що для розв’язання задач використовуються наближені методи й тому отримані локальні екстремуми є наближеними, в наведених прикладах виконуються всі геометричні обмеження задачі: ненакладання кругів та розміщення кругів у контейнері. Задля цього радіуси кругів вибираються $\hat{r}_i + 2 \cdot 10^{-7}$, $i \in I$, а точність розв’язків за IPOPT – 10^{-7}).

Як показали обчислювальні експерименти метод найбільш ефективний для 50-300 кругів у тих випадках, коли радіуси кругів плавно зростають від меншого до більшого. Це пов’язано з тим, що перехід від одного локального екстремуму до іншого в допоміжній задачі (5.7)–(5.9) відбувається за неперервними змінними радіусами, й чим плавніше змінюються початкові

дискретні радіуси від мінімального до максимального, тим більш можливий перехід до іншого екстремуму.

Таблиця 6.1

Порівняння результатів для першої групи прикладів $n=20-300$ [163]

Приклад	n	l^*	l^*_{best}	W	l/w	Щільність	Автор
SY1	30	17.1314	17.039663	9.5	1.793649	0.853892056372	[9]
SY2	20	14.4398	14.397059	8.5	1.693772	0.844619731312	[9]
SY3	25	14.3267	14.326620	9.0	1.591847	0.853909681827	[10]
SY4	35	23.3932	23.285708	11.0	2.116883	0.854915094732	[7]
SY5	100	35.7223	35.722300	15.0	2.381487	0.875706296924	[10]
SY6	100	36.1828	36.182710	19.0	1.904353	0.878442877222	[10]
SY12	50	29.5890	29.583500	9.5	3.114053	0.859603050638	[9]
SY13	55	30.3534	30.353400	9.5	3.195095	0.861182691569	[10]
SY14	65	37.5773	37.554743	11.0	3.414068	0.864690792376	[7]
SY23	45	27.6141	27.573166	9.0	3.063685	0.860188006756	[8]
SY24	55	34.0109	34.010900	11.0	3.091900	0.861599067978	[10]
SY34	60	34.5437	34.543629	11.0	3.140330	0.866053746510	[10]
SY56	200	63.9151	63.915100	19.0	3.363953	0.883687288144	[10]
SY123	75	42.8472	42.847130	9.5	4.510224	0.863997825463	[10]
SY124	85	48.5074	48.441309	11.0	4.403755	0.864337500810	[9]
SY134	90	49.1024	49.046868	11.0	4.458806	0.866162931849	[9]
SY234	80	45.3449	45.344850	11.0	4.122259	0.866979108695	[10]
SY1234	110	59.6202	59.620120	11.0	5.420011	0.870159058544	[10]
SY36	125	42.5985	42.598440	19.0	2.242023	0.882249966609	[10]
SY125	150	40.2342	40.234200	20.0	2.011710	0.883352220303	[10]
SY1236	175	54.1351	54.135040	20.0	2.706752	0.882645194371	[10]
SY356	225	70.2934	70.293370	19.0	3.699651	0.885984875770	[10]
SY1256	250	78.1348	78.134710	19.0	4.112353	0.885610995364	[10]
SY12356	275	72.9105	72.910410	22.0	3.314110	0.888318145506	[10]
SY565	300	69.4528	69.452780	25.0	2.778111	0.888329381641	[10]

Таким чином, у 81 з 153 тестових прикладів отримані найкращі результати. Графічні ілюстрації розміщень кругів для прикладів SY3, SY6, KBG35, SY565 зображені на рис. 6.1.

Середній час виконання програми складав 30 хвилин для $n = 25$, 3

години – для $n = 50$, 10 годин – для $n = 75$ та 30 годин – для $n = 100$.

Таблиця 6.2

Порівняння результатів для другої групи прикладів $n=25$ [163]

Приклад	n	l^*	l^*_{best}	w	l/w	Щільність	Автор
KBG1	25	33.7425	33.32365	10	3.332365	0.836832	[9]
KBG2	25	22.1270	21.94087	10	2.194087	0.789208	[9]
KBG3	25	27.5079	27.28121	10	2.728121	0.843078	[9]
KBG4	25	13.4405	13.27575	10	1.327575	0.845443	[9]
KBG5	25	6.5737	6.493628	10	0.649363	0.832077	[9]
KBG6	25	25.4840	25.19267	10	2.519268	0.836835	[9]
KBG7	25	5.0367	4.990629	10	0.499063	0.847383	[9]
KBG8	25	3.7509	3.705960	10	0.370596	0.838759	[9]
KBG9	25	36.2188	36.16443	10	3.616443	0.822248	[9]
KBG10	25	21.0116	20.69445	10	2.069445	0.803722	[9]
KBG11	25	26.9534	26.73358	10	2.673358	0.837339	[9]
KBG12	25	11.1602	11.08384	10	1.108384	0.846936	[9]
KBG13	25	6.0354	6.006472	10	0.600647	0.831273	[9]
KBG14	25	21.5436	21.49599	10	2.149600	0.829157	[9]
KBG15	25	9.2308	9.170743	10	0.917074	0.852194	[9]
KBG16	25	3.6738	3.638368	10	0.363837	0.837086	[9]
KBG17	25	45.1576	44.50243	10	4.450244	0.773066	[9]
KBG18	25	20.2888	20.14349	10	2.014349	0.800227	[9]
KBG19	25	23.6157	23.61563	10	2.361564	0.818705	[9]
KBG20	25	13.1093	12.97775	10	1.297775	0.831574	[9]
KBG21	25	5.0376	5.029868	10	0.502987	0.816845	[9]
KBG22	25	31.8976	31.60334	10	3.160334	0.814520	[9]
KBG23	25	8.6213	8.520484	10	0.852048	0.834730	[9]
KBG24	25	2.2853	2.255643	10	0.225564	0.798806	[9]
KBG25	25	28.8705	28.87045	10	2.887045	0.794770	[10]
KBG26	25	26.6254	26.57840	10	2.657840	0.754995	[9]
KBG27	25	13.0741	12.94557	10	1.294558	0.784053	[9]
KBG28	25	13.0456	13.04160	10	1.304160	0.794075	[9]
KBG29	25	5.2058	5.195416	10	0.519542	0.789450	[9]
KBG30	25	4.4106	4.338971	10	0.433897	0.792739	[9]
KBG31	25	19.1484	18.96548	10	1.896549	0.792529	[9]
KBG32	25	1.4226	1.421286	10	0.142129	0.781505	[9]

Таблиця 6.3

Порівняння результатів для другої групи прикладів $n=50$ [163]

Приклад	n	l^*	l^*_{best}	w	l/w	Щільність	Автор
KBG33	50	73.3258	72.840349	10	7.284035	0.823610	[9]
KBG34	50	40.8339	40.833876	10	4.083388	0.814141	[10]
KBG35	50	53.2312	53.231191	10	5.323119	0.850211	[10]
KBG36	50	25.8819	25.881809	10	2.588181	0.858906	[10]
KBG37	50	12.5823	12.573884	10	1.257388	0.850501	[9]
KBG38	50	52.4168	52.416790	10	5.241679	0.851559	[10]
KBG39	50	19.4843	19.484262	10	1.948426	0.868621	[10]
KBG40	50	8.3825	8.349900	10	0.834990	0.865363	[10]
KBG41	50	75.3597	74.859650	10	7.485965	0.817178	[9]
KBG42	50	41.8824	41.545007	10	4.154501	0.809587	[9]
KBG43	50	47.7724	47.772390	10	4.777239	0.849871	[10]
KBG44	50	30.2732	30.179100	10	3.017910	0.854609	[10]
KBG45	50	11.8587	11.654510	10	1.165451	0.847548	[10]
KBG46	50	39.1788	39.178703	10	3.917870	0.854764	[10]
KBG47	50	22.2278	22.227784	10	2.222778	0.855850	[10]
KBG48	50	8.3152	8.291032	10	0.829103	0.860118	[9]
KBG49	50	63.8997	62.730663	10	6.273066	0.827466	[9]
KBG50	50	39.8111	39.393632	10	3.939363	0.821849	[9]
KBG51	50	47.4835	47.483410	10	4.748341	0.843957	[10]
KBG52	50	24.2747	24.208974	10	2.420897	0.845145	[9]
KBG53	50	12.3982	12.250765	10	1.225076	0.847691	[9]
KBG54	50	48.2818	48.007131	10	4.800713	0.844409	[9]
KBG55	50	12.2546	12.193825	10	1.219383	0.855287	[9]
KBG56	50	7.8458	7.821252	10	0.782125	0.853075	[9]
KBG57	50	100.281	99.631481	10	9.963148	0.778108	[9]
KBG58	50	44.2109	44.075363	10	4.407536	0.791073	[9]
KBG59	50	40.8868	40.246630	10	4.024663	0.843642	[9]
KBG60	50	25.6369	25.560381	10	2.556038	0.843037	[9]
KBG61	50	10.3749	10.305060	10	1.030506	0.836810	[10]
KBG62	50	56.1512	55.721872	10	5.572187	0.792663	[9]
KBG63	50	22.2741	22.274092	10	2.227409	0.845976	[10]
KBG64	50	10.7783	10.736768	10	1.073677	0.843528	[9]

Таблиця 6.4

Порівняння результатів для другої групи прикладів $n=75$ [163]

Приклад	n	l^*	l^*_{best}	w	l/w	Щільність	Автор
KBG33	75	96.8475	96.04848	10	9.604849	0.838115	[9]
KBG34	75	62.0253	61.68643	10	6.168643	0.815474	[9]
KBG35	75	74.3968	74.39679	10	7.439679	0.854973	[10]
KBG36	75	38.9376	38.93751	10	3.893751	0.861460	[10]
KBG37	75	17.3416	17.34153	10	1.734153	0.856245	[10]
KBG38	75	66.3319	66.33182	10	6.633182	0.861122	[10]
KBG39	75	33.3372	33.33714	10	3.333714	0.868055	[10]
KBG40	75	12.8418	12.76090	10	1.276090	0.870196	[10]
KBG41	75	93.5734	92.70048	10	9.270049	0.840326	[9]
KBG42	75	60.4072	60.39336	10	6.039337	0.821474	[9]
KBG43	75	80.6600	80.65997	10	8.065997	0.848025	[10]
KBG44	75	42.6822	42.50230	10	4.250230	0.859099	[10]
KBG45	75	18.4222	18.42218	10	1.842218	0.856652	[10]
KBG46	75	61.2308	61.23073	10	6.123073	0.863919	[10]
KBG47	75	25.3676	25.36758	10	2.536758	0.870929	[10]
KBG48	75	13.1541	13.15403	10	1.315403	0.865801	[10]
KBG49	75	93.8739	93.73463	10	9.373464	0.839683	[9]
KBG50	75	63.4271	63.31029	10	6.331030	0.809760	[9]
KBG51	75	79.4915	79.49141	10	7.949141	0.833177	[10]
KBG52	75	49.2148	49.16848	10	4.916848	0.851405	[9]
KBG53	75	16.9684	16.92814	10	1.692814	0.849538	[10]
KBG54	75	70.0234	70.02334	10	7.002334	0.843816	[10]
KBG55	75	31.3551	31.35506	10	3.135506	0.866618	[10]
KBG56	75	11.1542	11.09030	10	1.109030	0.859108	[10]
KBG57	75	96.7098	96.43290	10	9.643290	0.833202	[9]
KBG58	75	54.1779	54.17485	10	5.417485	0.839169	[9]
KBG59	75	83.4188	83.41875	10	8.341875	0.828642	[10]
KBG60	75	46.1686	45.58758	10	4.558759	0.841488	[9]
KBG61	75	18.3826	18.38254	10	1.838254	0.844004	[10]
KBG62	75	105.771	105.2419	10	10.52419	0.815794	[9]
KBG63	75	41.7900	41.78998	10	4.178999	0.844727	[10]
KBG64	75	9.5415	9.541484	10	0.954148	0.856004	[10]

Таблиця 6.5

Порівняння результатів для другої групи прикладів $n=100$ [163]

Приклад	N	l^*	l^*_{best}	w	l/w	Щільність	Автор
KBG97	100	136.3347	136.468	10	13.6468	0.830733	[10]
KBG98	100	80.3984	80.39831	10	8.039831	0.823263	[10]
KBG99	100	109.5309	109.5308	10	10.95308	0.853247	[10]
KBG100	100	53.8213	53.54113	10	5.354113	0.864067	[10]
KBG101	100	24.6096	24.60951	10	2.460951	0.857000	[10]
KBG102	100	96.3111	96.31102	10	9.631102	0.862646	[10]
KBG103	100	41.6671	41.66705	10	4.166705	0.873768	[10]
KBG104	100	17.7230	17.72291	10	1.772291	0.875978	[10]
KBG105	100	144.3467	143.4573	10	14.34573	0.821699	[9]
KBG106	100	79.7866	79.78659	10	7.978659	0.824330	[10]
KBG107	100	103.4751	103.4750	10	10.34750	0.854108	[10]
KBG108	100	51.9303	51.93027	10	5.193027	0.861562	[10]
KBG109	100	24.6306	24.63052	10	2.463052	0.854169	[10]
KBG110	100	81.7657	81.76569	10	8.176569	0.865428	[10]
KBG111	100	36.6687	36.66865	10	3.666866	0.874405	[10]
KBG112	100	18.2939	18.29388	10	1.829388	0.872045	[10]
KBG113	100	158.2445	158.2444	10	15.82444	0.800848	[10]
KBG114	100	83.9307	83.93068	10	8.393068	0.817315	[10]
KBG115	100	79.8581	79.85801	10	7.985801	0.851632	[10]
KBG116	100	46.5106	46.51058	10	4.651058	0.858440	[10]
KBG117	100	25.2387	25.23860	10	2.523860	0.856896	[10]
KBG118	100	99.9876	99.98761	10	9.998761	0.849542	[10]
KBG119	100	44.0243	44.02427	10	4.402427	0.858501	[10]
KBG120	100	16.3689	16.36884	10	1.636884	0.866612	[10]
KBG121	100	105.8361	105.1734	10	10.51734	0.832277	[9]
KBG122	100	75.7351	75.37476	10	7.537477	0.825973	[9]
KBG123	100	96.6193	96.61921	10	9.661921	0.844481	[10]
KBG124	100	55.7157	55.71560	10	5.571560	0.849038	[10]
KBG125	100	25.1552	25.15510	10	2.515510	0.855837	[10]
KBG126	100	57.0768	57.07675	10	5.707675	0.870242	[10]
KBG127	100	60.5504	60.55034	10	6.055034	0.850051	[10]
KBG128	100	21.2558	21.25577	10	2.125577	0.858681	[10]

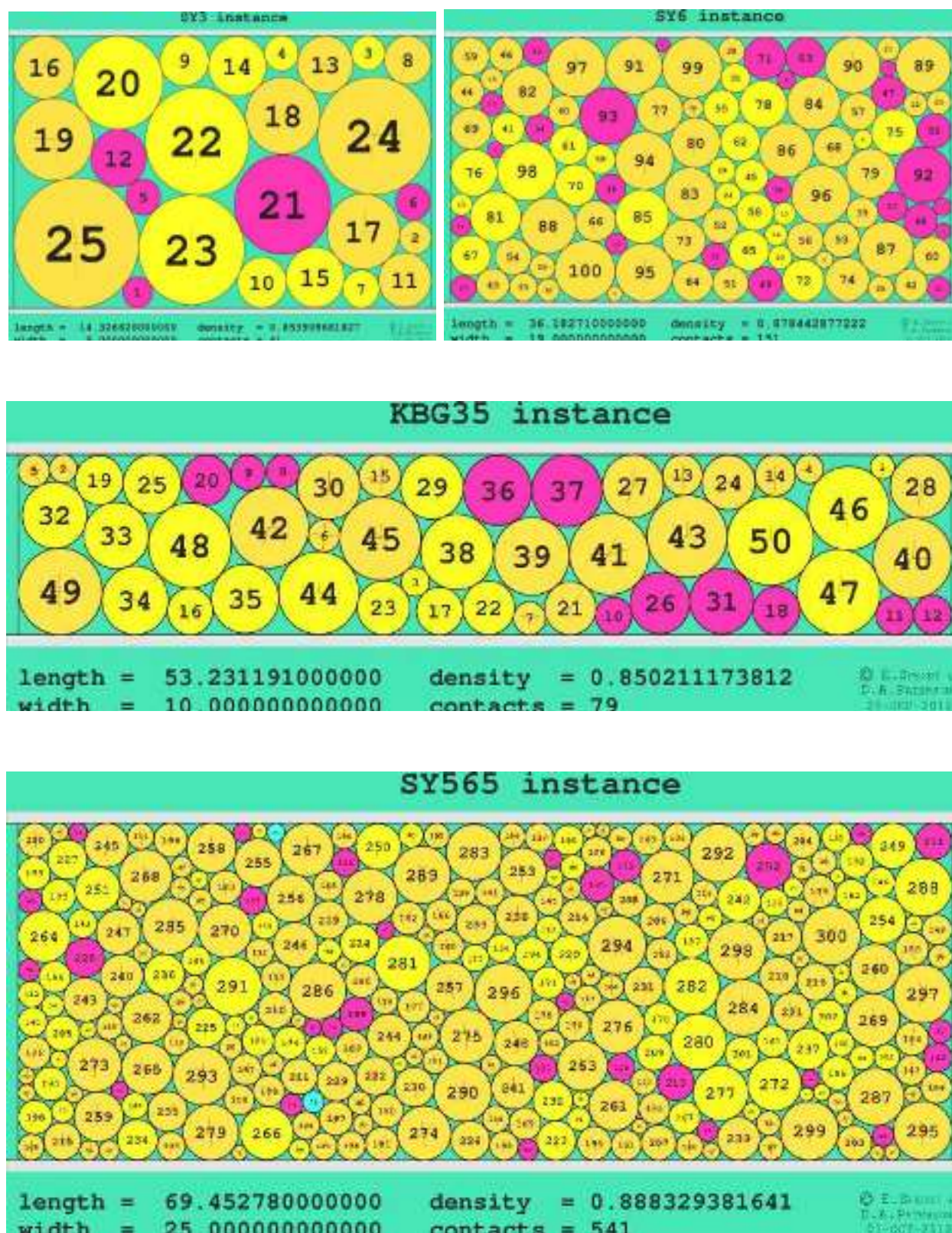


Рис. 6.1. Розміщення кругів у прямокутнику мінімальної довжини [163]

6.2.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних кругів у крузі із зонами заборони

Обчислювальні експерименти виконані для декількох груп тестових прикладів, доступних у [154] та на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/cci.html>.

Для розв'язання задач лінійного програмування (5.18)–(5.21) використовується пакет програм HOPDM, версія 2.13, розроблений Gondzio [282]. HOPDM реалізує прямо-двоїстий метод внутрішньої точки та призначений для розв'язання задач лінійного, опуклого квадратичного та опуклого нелінійного програмування.

Радіус кругів $r=1$ в усіх тестових прикладах. У табл. 6.6 наведена інформація про приклади першої групи тестів. Радіус круга C – в першому стовпчику, від $\rho=25$ до $\rho=70$. У другому стовпчику – максимальна кількість λ^* кругів, яку розміщено за методом, розробленим у дисертаційній роботі. Кращі результати λ_{best}^* , які отримані в [154] занесені до третього стовпчика. В четвертому стовпчику – кількість додаткових кругів $(\lambda^* - \lambda_{best}^*)$, які розміщено у порівнянні з методом [154]. Коефіцієнт щільності розміщення, який можна розрахувати за формулою λ^* / ρ^2 , підсумовується в останньому стовпчику таблиці.

Як видно з табл. 6.6, у дисертаційній роботі отримані значно кращі результати ніж результати, отримані за допомогою евристичного методу, який розроблений у [154]. Так, для $\rho=25$ додатково розміщено 8 кругів, а для $\rho=70$ – 17 кругів. Із збільшенням кількості кругів коефіцієнт щільності поступово збільшується й наближається до максимально можливого значення $\pi / \sqrt{12} \approx 0.907$ [236]. Таким чином, Стратегія 5 (KP-random/lattice-IPORT) із ґратчатим методом побудови початкових точок є ефективною при розв'язанні задач цього класу.

Друга група прикладів присвячена задачам ПРР із зонами заборони. Як тестові використано приклади з однією зоною заборони, запропоновані в [154]: $N=1$, радіус та координати центра круга S_1 (зони заборони) – $\rho_1=10.25$, $x_1=0$, $y_1=0$ (або $y_1=R-\rho_1$). Результати порівняння підсумовуються в табл. 6.7: ρ – радіус C , λ_c^{ref} (λ_b^{ref} – для випадку, коли S_1 дотичний до межі C) та λ_c^{SY} (λ_b^{SY}) – максимальні кількості кругів, отримані різними методами. Розміщення для $\lambda_c^{SY}=237$, $\lambda_b^{SY}=239$ показано на рис. 6.2 а,б. Додатково запропоновано приклад з 32 зонами заборони, для якого отримано розміщення $\lambda^*=237$ кругів (рис. 6.2 в).

Таблиця 6.6

Результати розміщення кругів максимальної кількості

ρ	λ^*	λ_{best}^*	$\lambda^* - \lambda_{best}^*$	λ^* / ρ^2
25	535	527	8	0.856
26	581	569	12	0.859
27	624	615	9	0.856
28	672	661	11	0.857
29	725	714	11	0.862
30	777	763	14	0.863
31	832	821	11	0.866
32	885	877	8	0.864
33	943	931	12	0.866
34	1002	990	12	0.867
35	1064	1053	11	0.869
36	1127	1113	14	0.870
37	1188	1176	12	0.868
38	1260	1247	13	0.873
39	1324	1314	10	0.870
40	1394	1381	13	0.871
45	1771	1761	10	0.877
50	2194	2176	18	0.878
55	2664	2651	13	0.881
60	3172	3161	11	0.881
65	3715	3703	12	0.880
70	4338	4321	17	0.885

Таблиця 6.7

Порівняння результатів для групи прикладів з однією зоною заборони

Радіус крута ρ	Кількість крутів λ_c^{ref}	Кількість крутів у роботі λ_c^{SF}	Кількість крутів λ_b^{SF}	Кількість крутів у роботі λ_b^{SF}
17.5	156	159	151	158
20	228	237	229	239
25	411	427	423	433
26	449	470	462	478
27	492	517	512	524
28	545	565	560	572
29	602	613	609	624
30	647	668	661	673
35	934	955	945	957

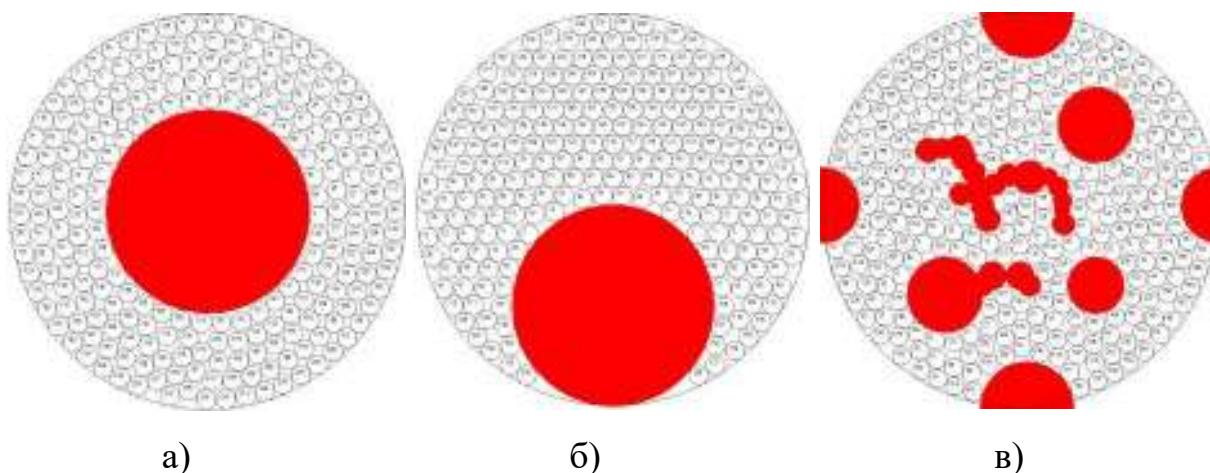


Рис. 6.2. Розміщення кругів у крузі з зонами заборони (IPRP)

Наступну групу прикладів запропоновано на сайті Магдебурзького університету Отто фон Геріке [163] – розміщення заданої кількості кругів у крузі мінімального радіусу (ODP). Для обчислення тестових прикладів виконано модифікацію методу. Значення мінімального радіусу розраховувалось діленням відрізка пошуку навпіл, де кінці відрізка відповідали мінімальній та максимальній оцінкам радіусу контейнера. Кращі розміщення отримано для прикладів, в яких кількість кругів 1077-5000. Приклади наведено на рис. 6.3, 6.4. Табл. 6.8 містить мінімальні значення радіусів контейнера та максимальні значення щільності розміщення в прикладах, для яких отримано кращі розв'язки.

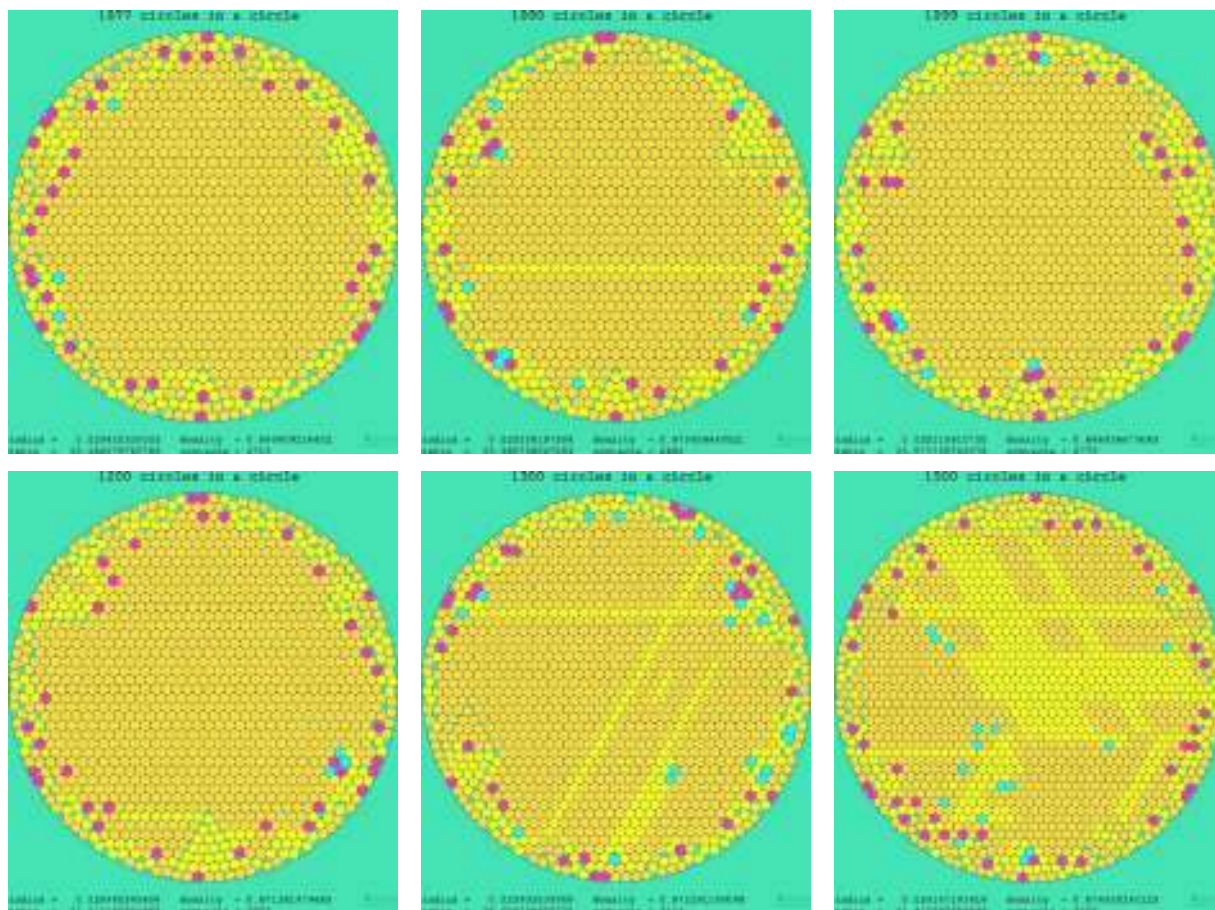


Рис. 6.3. Розміщення 1077, 1090, 1099, 1200, 1300 та 1400 кругів [163]

На рис. 6.5 – графіки, які відбивають залежність часу обчислення (t , хвилин), який потрібен для пошуку одного локального максимуму, від кількості розміщуваних кругів λ : тонка лінія – без руйнування ґратчастого розміщення та жирна лінія – із застосуванням процедури руйнування.

6.3 Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення куль

6.3.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення рівних куль у циліндрі з мінімальною висотою

Обчислювальні експерименти виконуються для окремого випадку задачі (3.18)–(3.19): область розміщення – прямий круговий циліндр $C = C3$, з радіусом ρ та висотою h , радіус розміщуваних куль – $\hat{r}_i = r = 1$. Для розв’язання задачі використовувалася Стратегія 2 (ODP-SA-DNS-tree-IPOPT) та метод, описаний у п. 5.2.2.

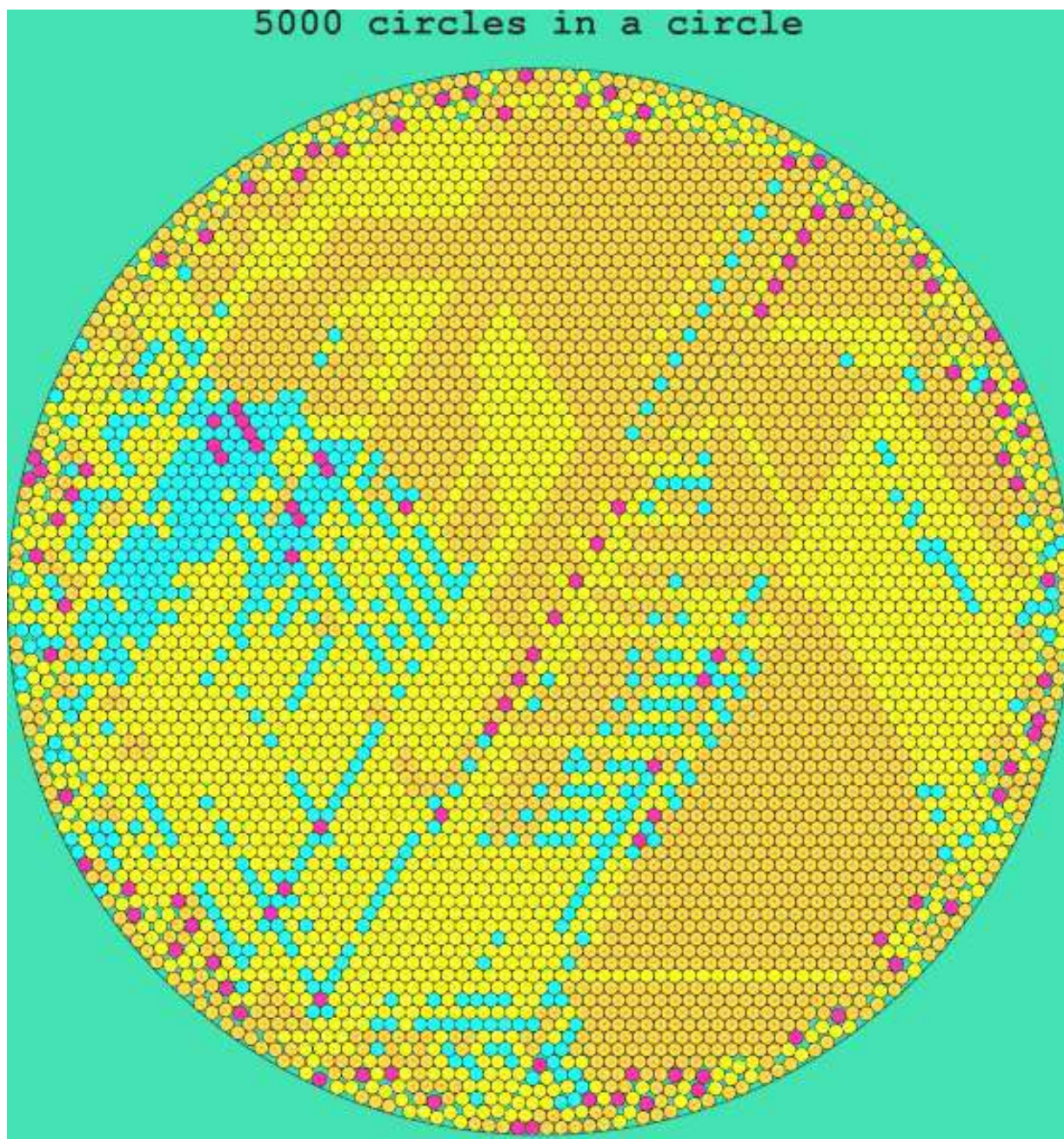


Рис. 6.4. Розміщення 5000 кругів [163]

Таблиця 6.8

Результати розміщення кругів у крузі мінімального радіусу [163]

N	1077	1090	1099	1200	1300	1500	3000	4000	5000
ρ	35.186	35.387	35.574	37.112	38.605	41.413	58.255	67.180	75.056
N / ρ^2	0.8700	0.8704	0.8684	0.8713	0.8723	0.8746	0.8840	0.8863	0.8876

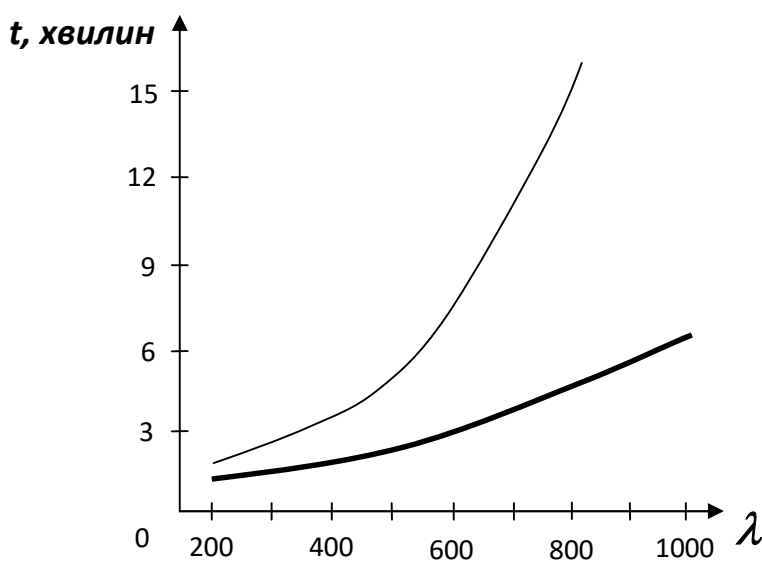


Рис. 6.5. Час пошуку локального максимуму

Для розв'язання задач лінійного програмування (5.18)–(5.21) застосовується пакет програм HOPDM [282].

Приклад 6.1. $\rho = 3.5$, $n = 20$. Значення функції цілі, отримане за допомогою методу околів, що звужуються, – $h^* = 4.653$, а коефіцієнт щільності заповнення циліндра – $d = 4r^3n / (3R^2h) = 0.4678$. Час обчислення становив 1 годину 15 хвилин.

Приклад 6.2. $\rho = 3.5$, $n = 30$. Значення функції цілі – $h^* = 6.6266$, коефіцієнт щільності заповнення циліндра – $d = 0.4928$. Відповідні координати центрів куль наведені в табл. 6.9. Час обчислення – 1 година 43 хвилин.

Приклад 6.3. $\rho = 3.5$, $n = 60$. Значення функції цілі – $h^* = 12.6174$, коефіцієнт щільності заповнення циліндра – $d = 0.5176$ (рис. 6.6). Час обчислення результату – 4 години 41 хвилина.

Таблиця 6.9

Координати центрів куль для Прикладу 6.2

i	x_i	y_i	z_i
1	2.0915	-1.3694	1
2	2.4263	0.6024	1
3	0.4181	-2.4648	1
4	0.0098	-0.5068	1
5	-1.5229	-1.9826	1
6	1.2083	2.1886	1
7	-2.2733	1.0402	1
8	-0.7831	2.3742	1
9	-2.4263	-0.6023	2.1307
10	1.3692	-2.0917	2.7194
11	-0.6027	-2.4263	2.7194
12	0.9169	0.7041	2.3082
13	-0.6017	-0.4377	2.9329
14	-1.6674	1.8627	2.7194
15	2.4635	-0.4258	2.8839

i	x_i	y_i	z_i
16	0.1987	2.4921	3.0711
17	-1.9831	-1.5223	3.8897
18	0.3671	-2.4729	4.468
19	0.9517	-0.4701	4.1926
20	2.1179	1.3283	3.7805
21	-0.6173	1.0826	4.2323
22	-2.4647	0.4185	3.8502
23	2.4962	0.1374	5.3422
24	-1.2354	-2.1734	5.6266
25	-0.3028	2.4816	5.6266
26	1.6136	1.9095	5.6266
27	-2.0744	1.3953	5.6266
28	1.8135	-1.7208	5.6266
29	-0.4365	-0.3399	5.6266
30	-2.4337	-0.5719	5.5912

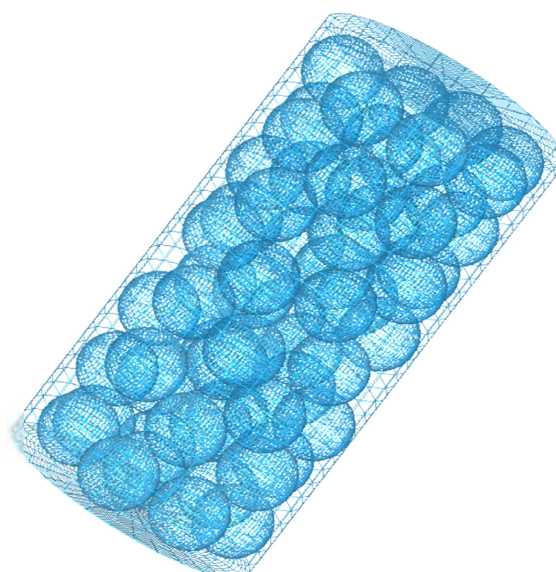


Рис. 6.6. Розміщення куль в Прикладі 6.3

У табл. 6.10 порівнюються результати, отримані за допомогою розробленого методу, та результати обчислення жадібним алгоритмом (методом оптимізації за групами змінних). Тут, n – кількість куль, R – радіус, h^* – висота циліндра C , d та d_g – коефіцієнти щільності розміщення методом околів та методом оптимізації за групами змінних відповідно, t – час обчислення в хвилинах. Приклад для $n=49$ був узятий з роботи [200].

Таблиця 6.10

Порівняння результатів роботи методів оптимізації за групами змінних та околів, що звужуються

n	R	h^*	d	d_g	t
20	3.5	4.6530	0.4678	0.4035	75
30	3.5	6.6266	0.4928	0.4398	103
40	3.5	8.5541	0.5089	0.4433	154
49	2.61	19.3686	0.4952	0.4520	210
50	3.5	10.6177	0.5126	0.4585	236
60	3.5	12.6174	0.5176	0.4630	281
80	4.5	9.6620	0.5452	0.4737	301
100	4.5	11.9555	0.5507	0.4869	374
125	4.5	14.7689	0.5573	0.4985	743
150	5.5	11.7688	0.5609	0.4941	841
200	5.5	15.6142	0.5646	0.5021	1557

Виконується порівняння з результатами Virgin [158], який розв'язував задачу розміщення рівних куль у циліндрі з мінімальної поверхнею. Для цього розміщення куль з [158] вибираються як початкові точки й обчислюються мінімальні висоти циліндрів. Результати підсумовані в табл. 6.11, де n – кількість куль, R – радіус циліндра C , h^b – висота циліндра, отримана в [158], а h^* – висота згідно з модифікацією методу околів, що звужуються.

Таблиця 6.11

Порівняння результатів роботи методу Birgin [158] та методу околів, що звужуються

n	R	h^b	h^*
50	3.6131	10.1548	9.7692
60	3.8507	10.6126	9.9981
70	3.3047	15.7352	15.7628
80	3.9237	13.7718	12.3901
90	3.9237	15.3806	14.0676
100	3.9237	15.7490	15.6977

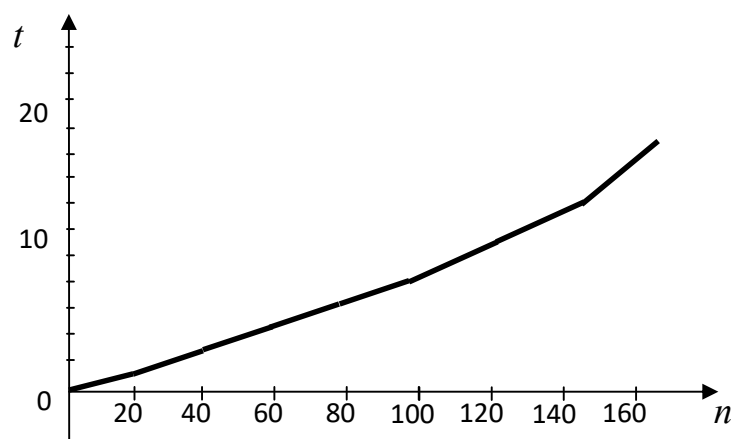
Слід зазначити, що в задачі, яка розв'язується в [158], функція цілі квадратична на відміну від лінійної функції в дисертаційній роботі, тобто задача в [158] є більш складною.

На рис. 6.7, а показана залежність часу виконання програми t (годин) від кількості розміщуваних куль n . Час, необхідний для пошуку локального мінімуму t_l , (секунд) та час пошуку початкової точки t_e (мілісекунд) залежно від n подані на рис. 6.7 б,в відповідно.

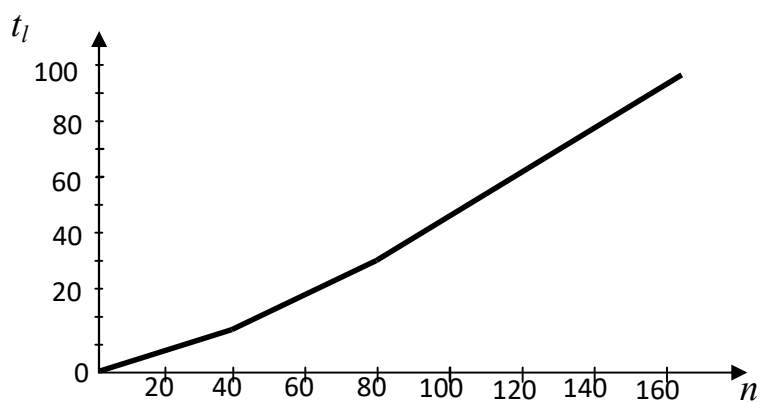
Обчислювальні експерименти показали, що значення функції цілі в початковій точці та точці локального мінімуму можуть суттєво відрізнятися. На рис. 6.8 а зображено розміщення куль 40 куль, яке відповідає початковій точці ($h=8.9276$), а на рис. 6.8 б – точці локального мінімуму ($h=7.5152$), яку отримано з цієї початкової точки.

Неможливо повністю запобігти отриманню однакових початкових точок та початкових точок, які знаходяться в "зоні тяжіння" одного локального мінімуму.

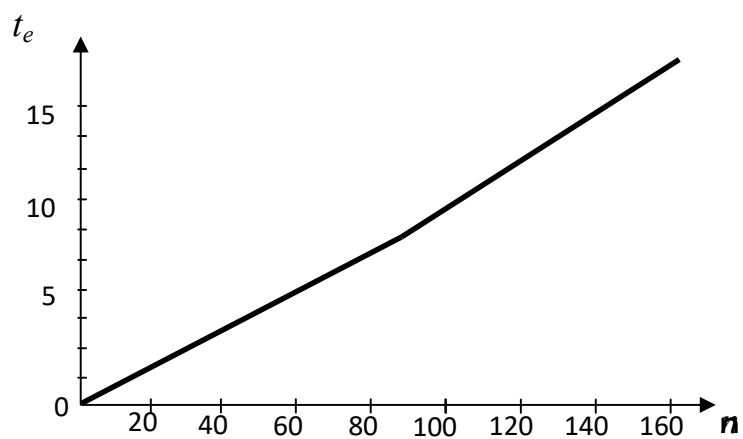
Коли радіус околів наближається до мінімально можливого, значно зростає кількість точок локальних мінімумів, для яких функція цілі має однакове значення.



а)



б)



в)

Рис. 6.7. Залежність часу обчислень наближення до глобального мінімуму, локального мінімуму та початкової точки від кількості куль

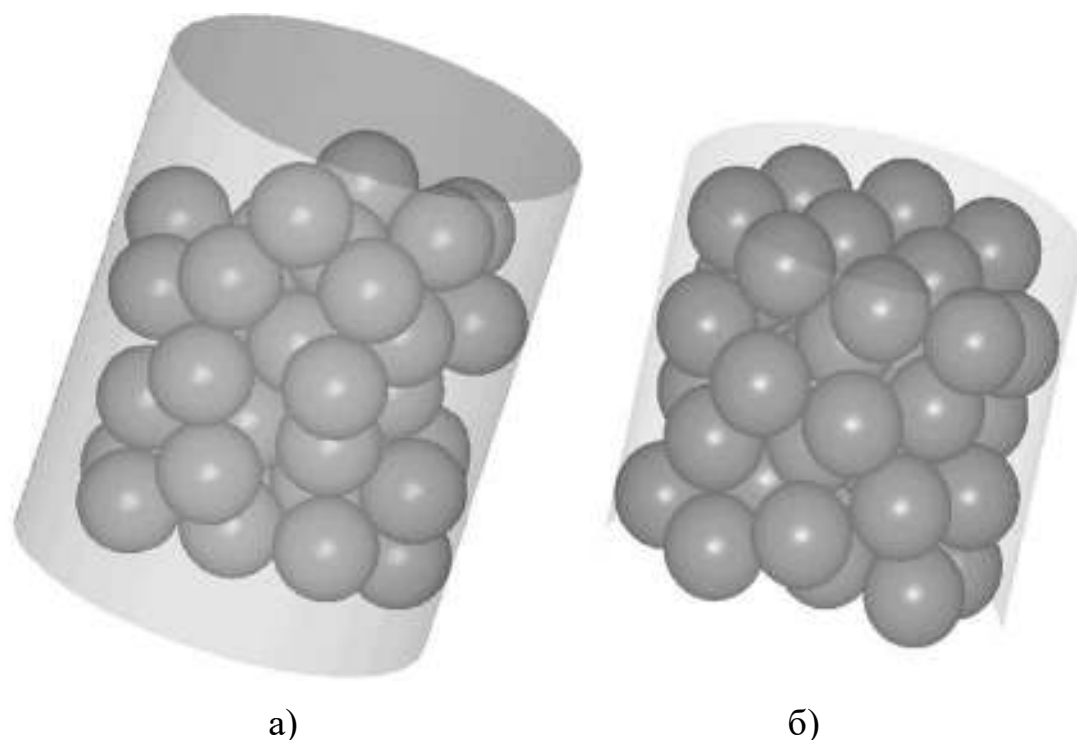


Рис. 6.8. Початкова точка та локальний мінімум

6.3.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних куль у контейнері з однією змінною метричною характеристикою

Для перевірки ефективності роботи методу спрямованого перебору локальних екстремумів для розв’язання задачі (3.18)–(3.19) за Стратегією 3 (ODP-random-JA-IPOPT) проведені обчислювальні експерименти для різних просторових форм області розміщення. У випадку розміщення куль у кубоїді результати порівнюються з тестовими прикладами.

Для гарантованого виконання умов допустимості розміщення (див. (3.19)) радіуси куль збільшені на $2 \cdot 10^{-7}$ (точність обчислень – 10^{-7}).

Розглянемо спочатку 6 тестових прикладів для задачі розміщення куль у кубоїді мінімальної висоти, які вперше запропоновано в роботі [3]. Порівняльна характеристика різних методів наведена в табл. 6.12. Перший та другий стовпчики таблиці містять назви тестових прикладів та кількість розміщуваних куль n відповідно. В наступних стовпчиках – кращі

значення функції цілі, отримані різними методами: h_{BS} [158], h_K [142], h_{HY} [234], h^* – значення, отримані в дисертаційній роботі. В останньому стовпчику зазначений час обчислення мінімуму.

Таблиця 6.12

Порівняльна характеристика методів

Приклад	n	h_{BS}	h_K	h_{HY}	h^*	Час
SYS1	25	9.7942	9.2656	9.0978	9.1604	4
SYS2	35	-	8.9301	8.8053	8.8195	6
SYS3	40	9.3090	8.7178	8.4013	8.4108	8
SYS4	45	11.0962	10.4042	10.0837	9.9288	8
SYS5	50	11.6211	10.9865	10.5104	10.5905	8
SYS6	60	12.7215	11.8399	11.5362	11.5708	8

Таким чином, метод, розроблений у дисертаційній роботі, дозволяє отримати кращі результати, ніж більшість відомих методів та дає схожі результати з методом Hifi та Yousef [234], які опубліковано в 2019 році.

Додатково розглянуто нові приклади для 70-100 куль. Результати експериментів наведено в табл. 6.13. У першому стовпчику – назва прикладу, в наступних стовпчиках: n – кількість розміщуваних куль, a та b – розміри основи кубоїду, h^* – краще значення функції цілі.

Таблиця 6.13

Результати розміщення 70-100 куль у кубоїді

Приклад	n	a	b	h^*
KBG_3DSPP234+6	70	10	10	17.3629
KBG_3DSPP205+205	80	10	5	5.9715
KBG_3DSPP150+228	90	10	10	16.1577
KBG_3DSPP255+255	100	10	10	3.9398

Для задачі розміщення куль у кулі мінімального радіусу досліджувалися дві групи прикладів: перша – нові приклади для 30-100 куль, а друга – тестові приклади, запропоновані в роботі [229].

Результати обчислювальних експериментів для першої групи прикладів наведено в табл. 6.14. У стовпчиках таблиці: назва прикладу, n – кількість розміщуваних куль та R^* – мінімальне значення функції цілі (кулі-контейнера).

Таблиця 6.14

Результати розміщення 30-100 куль у кулі

Приклад	n	R^*
SYSS1	30	5.2756
SYSS2	40	5.7674
SYSS3	50	5.9386
SYSS4	61	6.1147
SYSS5	71	6.3601
SYSS6	81	6.6747
SYSS7	90	7.0022
SYSS8	100	7.1907

Друга група прикладів – тестові приклади, в яких значення радіусів кругів дорівнює відповідному цілому номеру круга: $r_i = i$, $i = 1, 2, \dots, n$, які вперше досліджено в [229] для $16 \leq n \leq 35$. Порівняння результатів підсумовується в табл. 6.15. У першому та другому стовпчиках таблиці містяться назви прикладів та кількості розміщуваних куль n відповідно. В третьому та четвертому стовпчиках порівнюються кращі значення радіусу R_H згідно з [229] та методом, розробленим у дисертаційній роботі. Поліпшення значення функції цілі підсумовується в останньому стовпчику. Таблицю доповнено прикладами для $40 \leq n \leq 100$, які не розглядалися в [229]. Час роботи програми залежить від кількості куль і змінюється від 10 секунд для $n = 16$ до 12 годин для $n = 100$.

На рис. 6.9–6.11 подано ілюстрації розміщення куль для прикладів KBG_3DSPP255+255, SYSS8 та ZHXF100 відповідно.

Таблиця 6.15

Результати розміщення куль з радіусами $r_i = i$ у кулі

Приклад	Кількість куль n	Радіус кулі ¹⁴ R_H	Радіус кулі в роботі R^*	Поліпшення %
ZHXF16	16	33.6582	33.6572	0
ZHXF17	17	36.2030	36.2021	0
ZHXF18	18	38.8463	38.8467	-0
ZHXF19	19	41.5452	41.5462	-0
ZHXF20	20	44.2737	44.2557	0.04
ZHXF21	21	47.0342	47.0332	0
ZHXF22	22	49.9068	49.8666	0.08
ZHXF23	23	52.8368	52.7425	0.18
ZHXF24	24	55.7546	55.5782	0.32
ZHXF25	25	58.4684	58.4665	0
ZHXF26	26	61.4745	61.3883	0.14
ZHXF27	27	64.4854	64.4141	0.11
ZHXF28	28	67.4837	67.4173	0.1
ZHXF29	29	70.5257	70.3911	0.19
ZHXF30	30	73.4813	73.3704	0.15
ZHXF31	31	76.5336	76.5057	0.04
ZHXF32	32	79.8018	79.6075	0.24
ZHXF33	33	83.1967	82.8314	0.44
ZHXF34	34	86.2430	85.9206	0.37
ZHXF35	35	89.3454	89.1536	0.21
ZHXF40	40	-	105.6146	-
ZHXF50	50	-	140.7613	-
ZHXF60	60	-	178.1920	-
ZHXF70	70	-	217.0801	-
ZHXF80	80	-	258.4230	-
ZHXF90	90	-	300.9910	-
ZHXF100	100	-	345.5416	-

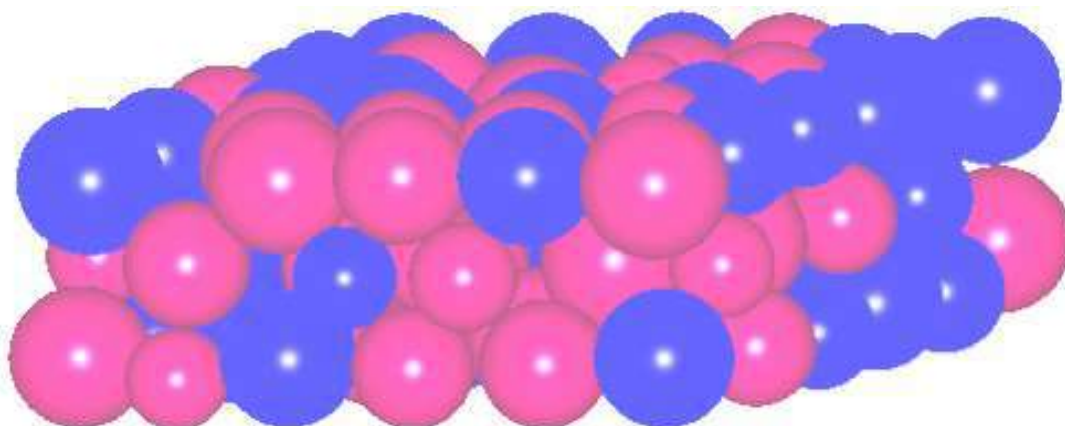


Рис. 6.9. Розміщення куль для прикладу KBG_3DSPP255+255

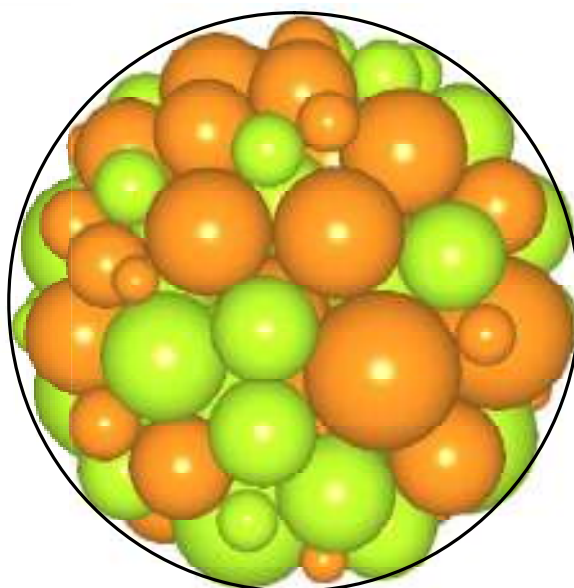


Рис. 6.10. Розміщення куль для прикладу SYSS8

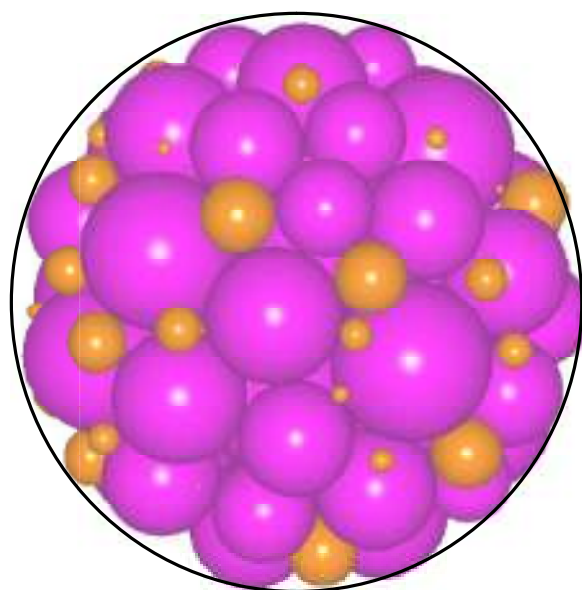


Рис. 6.11. Розміщення куль для прикладу ZHXF100

Результати розміщення куль у циліндрі мінімальної висоти, циліндрі мінімального радіусу, циліндричному та кульовому шарах з мінімальними зовнішніми радіусами презентовані в табл. 6.16, 6.17, 6.18 та 6.19 відповідно. Таблиці мають таку структуру: в першому та другому стовпчиках – назви прикладів та кількості розміщуваних куль n відповідно, кращі значення метричних характеристик μ^* (h^* або R^*) – в останньому стовпчику. Час обчислень обмежений однією годиною для кожного із прикладів.

Таблиця 6.16

Результати розміщення куль у циліндрі мінімальної висоти

Приклад	n	h^*
SYSCH1	20	5.7980
SYSCH2	30	9.3064
SYSCH3	40	6.0609
SYSCH4	50	16.2599
SYSCH5	60	2.9627
SYSCH6	70	22.1612
SYSCH7	80	3.8754
SYSCH8	90	21.1118
SYSCH9	100	22.5299

Графічні ілюстрації розміщення куль, які отримані при розв’язанні прикладів ZHXF100, SYSCH9, SYSCR9 та SYSSL6, показані на рис. 6.12 а-г відповідно.

Таблиця 6.17

Результати розміщення куль у циліндрі мінімального радіусу

Приклад	n	R^*
SYSCR1	20	5.9373
SYSCR2	30	5.3911
SYSCR3	40	3.4899
SYSCR4	50	3.6168
SYSCR5	60	6.8360
SYSCR6	70	6.7604
SYSCR7	80	4.3521
SYSCR8	90	7.1777
SYSCR9	100	6.8011

Таблиця 6.18

Результати розміщення куль у циліндричному шарі з мінімальним зовнішнім радіусом

Приклад	n	R^*
SYSAC1	50	5.4191
SYSAC2	60	5.8353
SYSAC3	70	6.3360
SYSAC4	80	8.5746
SYSAC5	90	8.8945
SYSAC6	100	9.0922

Таблиця 6.19

Результати розміщення куль у кульовому шарі з мінімальним зовнішнім радіусом

Приклад	n	R^*
SYSSL1	50	5.2339
SYSSL2	60	5.4333
SYSSL3	70	6.2918
SYSSL4	80	61.3028
SYSSL5	90	6.2560
SYSSL6	100	6.3927

6.3.3 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних куль у контейнері із зонами заборони

Для обчислювальних експериментів вибрано області розміщення з різною кількістю зон заборони (див. (3.24)–(3.32)). Радіус круга – $r = 1$ в усіх прикладах. Для кожної задачі розглянуто 10 початкових точок. Час виконання – 60 хвилин. Ілюстрації розміщення наведено на рис. 6.13–6.20.

Приклад 6.4. Контейнер $A = P$ – опуклий багатогранник, заданий 24 вершинами, координати яких наведені в табл. 6.20. Зони заборони відсутні. У результаті розв’язання задачі отримано максимальне значення – $\lambda^* = 93$ куль, яке вважається апроксимацією до глобального максимуму. Графічна ілюстрація розміщених куль показана на рис. 6.13.

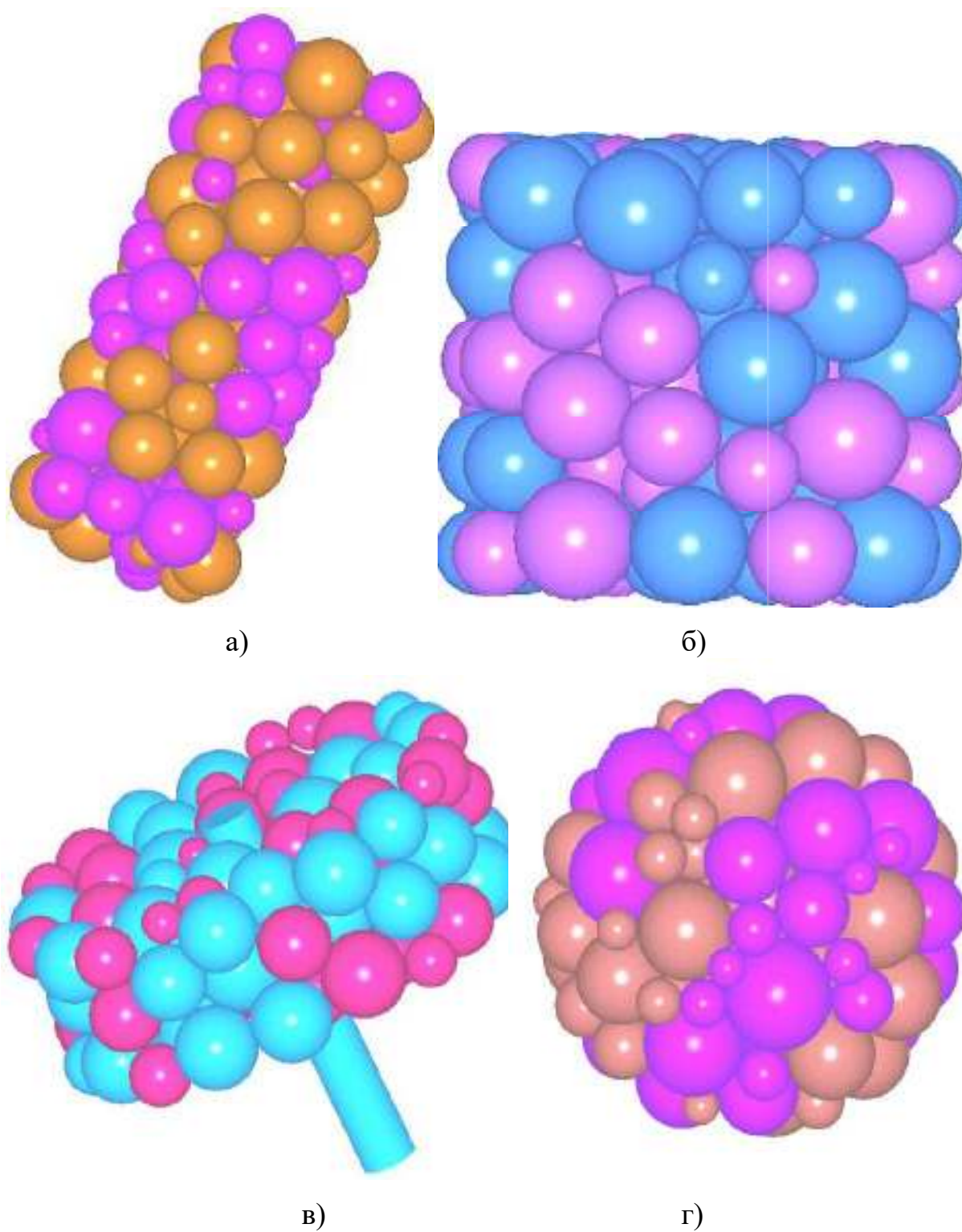


Рис. 6.12. Розміщення куль для прикладів ZHXF100, SYSCH9, SYSCR9 та SYSSL6

Таблиця 6.20

Координати вершин багатогранника

k	x_k^p	y_k^p	z_k^p
1	3.13	0	0
2	0	3,65	0
3	0	0	2.61
4	6,26	0	0
5	9.39	4,7	0
6	9.39	0	3,65
7	9.39	6.26	0
8	6.26	10.43	0
9	9.39	10,43	2.61
10	0	6.78	0
11	3.65	10.43	0
12	0	10.43	2.61
13	0	0	5.22
14	3.65	0	7.83
15	0	4.7	7.83
16	5.74	0	7.83
17	9.39	4.7	7.83
18	9.39	0	5.22
19	9.39	6.78	7.83
20	7.3	10.43	7.83
21	9.39	10.43	5.22
22	3.13	10.43	7.83
23	0	5.74	7.83
24	0	10.43	5.22

Приклад 6.5. Область розміщення – $A = cl(P / C_1)$, де C_1 – опуклий багатогранний кут, заданий вершиною $V_0 = (7, 7, 3)$ та точками $V_1 = (9.39, 3.5, 2)$, $V_2 = (9.39, 7.5, 2)$, $V_3 = (9.39, 7.5, 4)$ та $V_4 = (9.39, 3.5, 4)$, які лежать на ребрах E_1 , E_2 , E_3 та E_4 відповідно. В результаті розв’язання задачі отримано наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 91$ (рис. 6.14).

Приклад 6.6. Область розміщення – $A = cl(P / (P_1 \cup C_1))$ (див. Приклад 6.5), де P_1 – опукла багатогранна призма, задана точками $V_{11} = (2.5, 0, 2.6)$, $V_{12} = (3.5, 0, 3.6)$ та $V_{13} = (4.5, 0, 2.1)$. Точки лежать на ребрах E_{11} , E_{12} та E_{13} , паралельних осі OY . Наближення – $\lambda^* = 86$ (рис. 6.15).

Приклад 6.7. Область розміщення – $A = cl(P / (P_1 \cup C_1 \cup D_1))$ (див. Приклади 6.5 та 6.6), де двогранний кут D_1 заданий точками $V_{d1} = (0, 3.7, 7.83)$, $V_{d2} = (0, 6.7, 7.83)$, які лежать на гранях F_1 і F_2 відповідно, та точкою $V_d = (0, 5.2, 5.83)$, яка лежить на ребрі, паралельному осі OX . Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 81$ (рис. 6.16).

Приклад 6.8. Область розміщення – $A = cl(P / (P_1 \cup P_2 \cup C_1 \cup D_1))$ (див. Приклади 6.5–6.7), де опукла багатогранна призма P_2 задана точками $V_{21} = (0, 3.5, 2.5)$, $V_{22} = (0, 4, 3.8)$, $V_{23} = (0, 4.5, 2.8)$ та $V_{24} = (0, 4.5, 2.3)$, які лежать на ребрах E_{21} , E_{22} , E_{23} та E_{24} , паралельних осі OX , відповідно. Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 79$ (рис. 6.17). Координати центрів куль наведені у табл. 6.21.

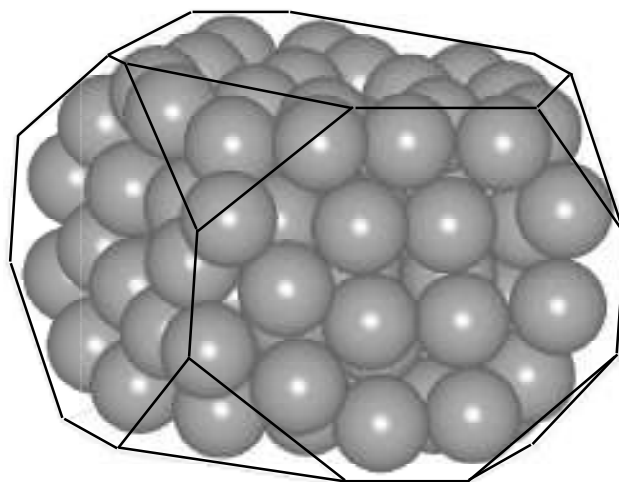


Рис. 6.13. Розміщення 93 куль у Прикладі 6.4

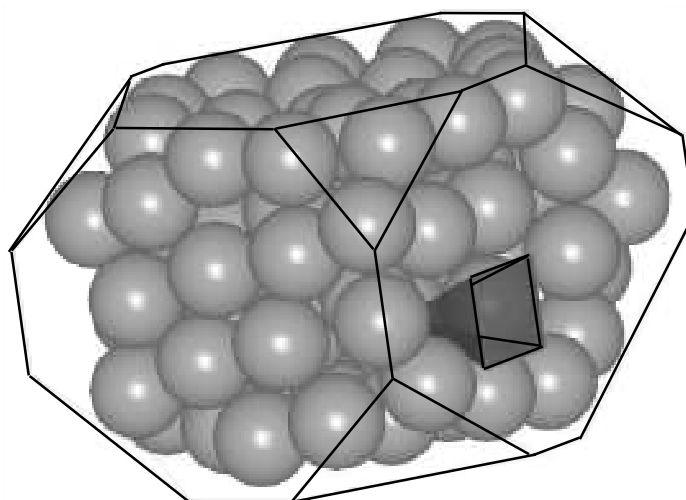


Рис. 6.14. Розміщення 91 кулі в Прикладі 6.5

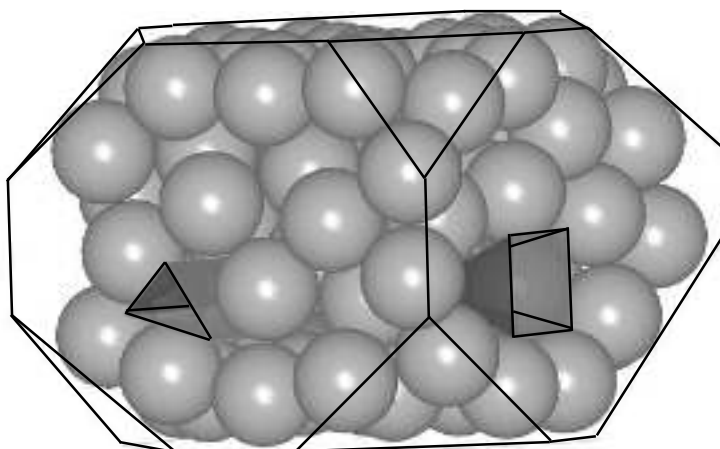


Рис. 6.15. Розміщення 86 кулі в Прикладі 6.6

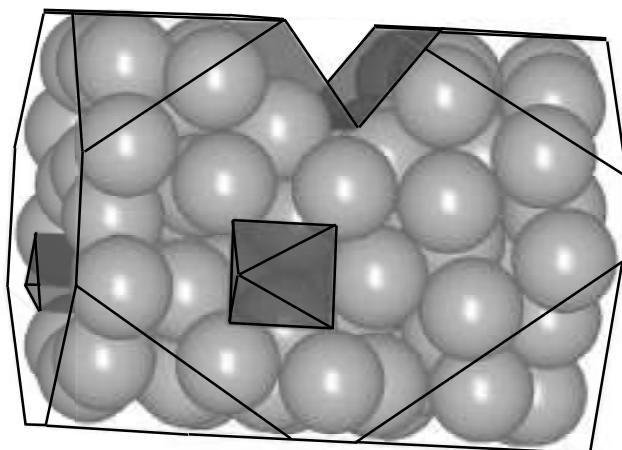


Рис. 6.16. Розміщення 81 кулі в Прикладі 6.7

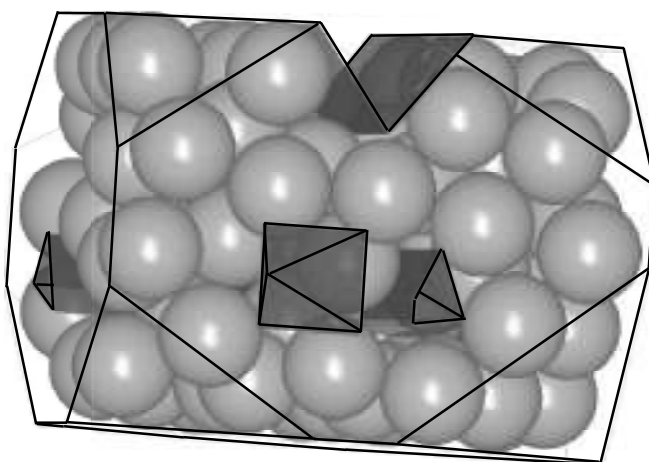


Рис. 6.17. Розміщення 79 куль у Прикладі 6.8

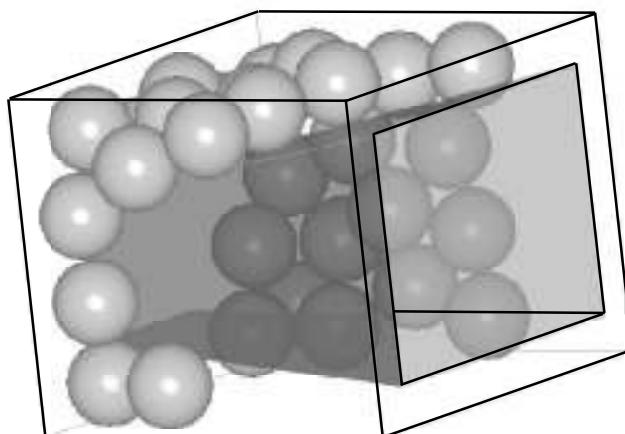


Рис. 6.18. Розміщення 30 куль у Прикладі 6.9

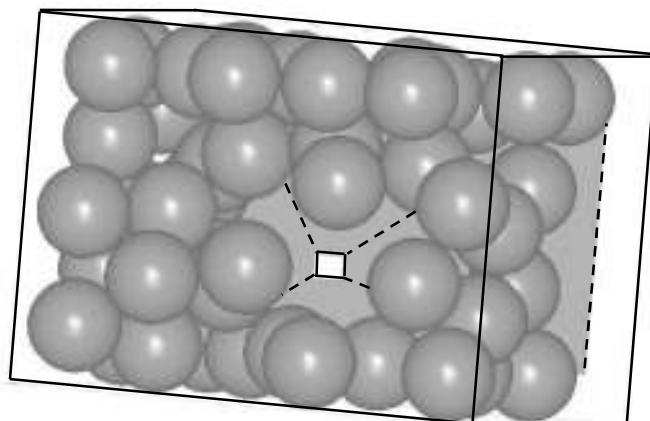


Рис. 6.19. Розміщення 58 куль у Прикладі 6.10

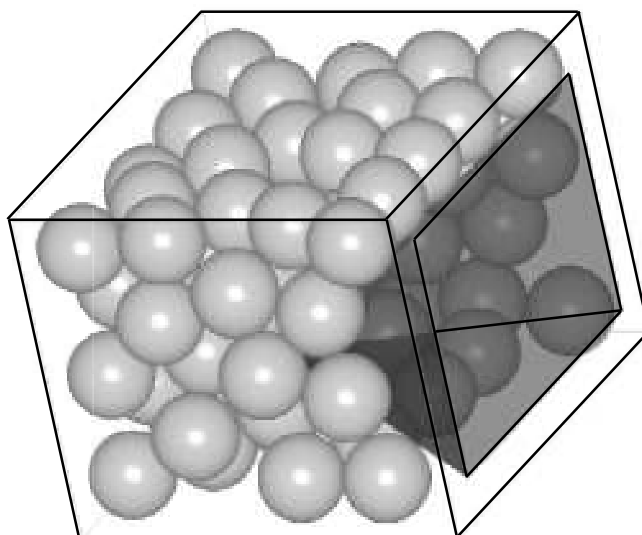


Рис. 6.20. Розміщення 73 куль у Прикладі 6.11

Приклад 6.9. Область розміщення – $A = cl(P_0 / C_2)$, де P_0 – кубоїд з розмірами $(9.39, 10.43, 7.83)$, ребра якого паралельні координатним осям, а одна з вершин співпадає з початком координат; опуклий багатогранний кут C_2 заданий вершиною $(-10, 7, 3)$ та точками $V_{21} = (9.39, 1, 1)$, $V_{22} = (9.39, 9.43, 1)$, $V_{23} = (9.39, 9.43, 6.83)$ та $V_{24} = (9.39, 1, 6.83)$, які лежать на ребрах E_{21} , E_{22} , E_{23} та E_{24} відповідно. Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 30$ (рис. 6.18).

Координати центрів кругів у Прикладі 6.8

i	x_i	y_i	z_i
1	6.5498	3.2	6.83
2	1	1.4876	5.3864
3	1.0002	5.4306	4.8568
4	2.5974	6.376	4.1117
5	5.2794	1	1.1254
6	6.0189	5.8651	5.083
7	6.597	2.7308	3.3969
8	6.9376	5.3223	3.3915
9	6.4024	9.43	3.1071
10	4.724	4.2106	5.4826
11	4.5298	1	6.83
12	1.5293	8.9211	5.919
13	4.3827	4.8922	1
14	1	9.43	4.0586
15	4.5416	9.43	3.8404
16	7.2446	9.43	6.83
17	6.5011	1	6.4921
18	1.6096	3.2165	6.808
19	6.5351	7.5284	3.719
20	5.5114	6.04	2.1869
21	2.6907	8.3716	4.205
22	8.39	5.7325	1.3344
23	6.4877	1	4.4771
24	6.9135	1	2.4406
25	8.39	3.6701	6.2031
26	2.5101	8.0456	1
27	4.6234	2.8969	3.7177
28	3.2355	9.43	6.83
29	5.0289	1.0353	3.1094
30	2.8287	2.612	4.9227
31	8.39	2.3479	2.3818
32	1.1882	7.0743	6.6623
33	8.39	8.9341	5.2672
34	8.1552	3.7746	1
35	8.39	1	3.8594
36	6.9143	7.0404	1
37	5.4952	8.0314	2.0021
38	6.6199	9.4298	1.119
39	8.39	3.0902	4.239

i	x_i	y_i	z_i
40	3.1681	7.3024	6.83
41	2.6482	5.734	1.5322
42	4.8155	2.9454	1.151
43	1	6.7342	1
44	3.9885	2.9283	6.8298
45	4.5545	7.2379	3.8331
46	8.39	7.0267	4.6656
47	8.3748	8.1581	1.7862
48	8.1816	1.7446	5.7039
49	8.39	7.2	6.83
50	4.1438	9.3358	1.0818
51	6.7266	2.3749	1
52	8.39	9.43	3.3296
53	6.784	7.6039	5.7085
54	1.6056	9.407	2.1526
55	4.1656	6.9233	1
56	1	4.7337	1
57	6.7103	3.9597	4.9748
58	2.6109	1.5013	6.5717
59	8.39	5.0279	4.7346
60	4.2282	8.3337	5.4836
61	1.0861	5.548	2.8549
62	1.5148	7.5073	2.7713
63	1	2.4056	3.1983
64	5.366	2.3164	5.4817
65	3.3675	1.574	1
66	4.0089	1	4.8294
67	1.7129	1	1.966
68	6.3713	4.679	1
69	2.8967	3.5533	1
70	5.178	7.2	6.83
71	4.0776	6.1692	5.4556
72	4.5909	5.2292	3.7665
73	1.0801	2.7485	1.2295
74	1	3.4314	4.9153
75	2.8188	4.6094	5.023
76	6.24	9.43	5.1006
77	5.2355	9.4167	6.83
78	1	7.4246	4.7022
79	2.2405	1	3.8952

Приклад 6.9. Область розміщення – $A = cl(P_0 / C_2)$, де P_0 – кубоїд з розмірами (9.39,10.43,7.83), ребра якого паралельні координатним осям, а одна з вершин співпадає з початком координат; опуклий багатогранний кут C_2 заданий вершиною $(-10, 7, 3)$ та точками $V_{21} = (9.39, 1, 1)$, $V_{22} = (9.39, 9.43, 1)$, $V_{23} = (9.39, 9.43, 6.83)$ та $V_{24} = (9.39, 1, 6.83)$, які лежать на ребрах E_{21} , E_{22} , E_{23} та E_{24} відповідно. Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 30$ (рис. 6.18).

Приклад 6.10. Область розміщення – $A = cl(P_0 / C_3)$ (див. Приклад 6.9), де опуклий багатогранний кут C_3 заданий вершиною $(-1, 7, 3)$ та точками V_{21} , V_{22} , V_{23} та V_{24} . Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 58$ (рис. 6.19).

Приклад 6.11. Область розміщення – $A = cl(P_0 / C_4)$ (див. Приклад 6.9), де опуклий багатогранний кут C_4 заданий вершиною $(4, 7, 3)$ та точками V_{21} , V_{22} , V_{23} та V_{24} . Наближення до глобального максимуму – $\lambda^* = 73$ (рис. 6.20).

Табл. 6.22 підсумовує основні характеристики Прикладів 6.4–6.11: кількість розміщених куль λ^* , кількість компонент контейнера та час роботи програми в хвилинах.

Таблиця 6.22

Підсумкові характеристики Прикладів 6.4–6.11

Приклад	λ^*	Ω	Час
1	93	1	41
2	91	2	34
3	86	3	47
4	81	4	54
5	79	5	60
6	30	2	2
7	58	2	7
8	73	2	12

Зазначимо, що час отримання розміщення залежить від щільності заповнення контейнера. Якщо щільність значно менше, ніж доведена верхня оцінка $\pi / \sqrt{18}$ [236], то час обчислення глобального максимуму задачі (3.28)–(3.32) складає не більше однієї секунди для всіх прикладів. Для отримання щільніших розміщень потрібно більше часу. На час виконання програми також впливає просторова форма контейнера, зокрема кількість та просторова форма зон заборони.

6.4 Результати обчислювальних експериментів для задач розміщення гіперкуль

6.4.1 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення нерівних гіперкуль у гіперкулі з мінімальним радіусом

Обчислювальні експерименти для задачі (3.51)–(3.55), яка розв'язувалась за Стратегією 3 ODP-random-JA-IPOPT, виконувалися для $d = 4, 5, \dots, 13$, $n = 30, 40, 50, 60, 70$. Час виконання програми обмежений 48 годинами, тобто приклади із значеннями d , n , для яких час був більший, не розглядалися.

Середній час обчислення наближення до глобального мінімуму задачі (3.51)–(3.55) підсумовується в табл. 6.23. Рядки таблиці відповідають розмірності простору, а стовпчики – кількості розміщених гіперкуль.

6.4.2 Результати обчислювальних експериментів для задачі розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі із заданим радіусом

Обчислювальні експерименти для задачі розміщення максимальної кількості рівних гіперкуль у гіперкулі заданого радіусу (3.56)–(3.60), яка розв'язувалася відповідно до Стратегії 5 PPP-random/lattice-local,

виконувалися для розмірностей $d = 3, 4, \dots, 24$. Досліджувалося декілька груп прикладів. Радіуси гіперкуль $r = 1$.

Перша група прикладів – розміщення максимальної кількості для різних значень розмірностей $d = 3, 4, \dots, 9$, та радіусу контейнера $\rho = 3, 4, \dots, 7$. Кількість розміщених гіперкуль підсумовується у табл. 6.24. Прочерки в таблиці означають, що задачі з відповідними значеннями d та ρ не розглядалися.

Таблиця 6.23

Середній час пошуку наближення до глобального мінімуму

$d \backslash n$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$	$n = 70$
$d=4$	0.5	2	4	10	18
$d=5$	0.7	3	6	16	24
$d=6$	1	5	9	20	36
$d=7$	2	8	15	30	36
$d=8$	3.5	12	30	-	-
$d=9$	6	18	39	-	-
10	10	24	48	-	-
11	14	30	-	-	-
12	18	37	-	-	-
13	24	48	-	-	-

Таблиця 6.24

Результати розміщення гіперкуль

	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$	$d=7$	$d=8$	$d=9$
$\rho=3$	13	23	39	61	92	135	194
$\rho=4$	32	84	201	-	-	-	-
$\rho=5$	67	222	683	-	-	-	-
$\rho=6$	120	481	-	-	-	-	-
$\rho=7$	195	928	-	-	-	-	-

Результати розміщення 3D куль в 3D кулі подані в табл. 6.25: в першому стовпчику – значення радіусу контейнера ρ , а в другому – максимальна кількість розміщених куль λ^* . Графічні ілюстрації розміщень куль для випадків $\rho = 8$, $\lambda^* = 295$ та $\rho = 9$, $\lambda^* = 429$ показані на рис. 6.21.

Таблиця 6.25

Результати розміщення 3D куль

ρ	λ^*
8	295
9	429
10	595
11	804
12	1055

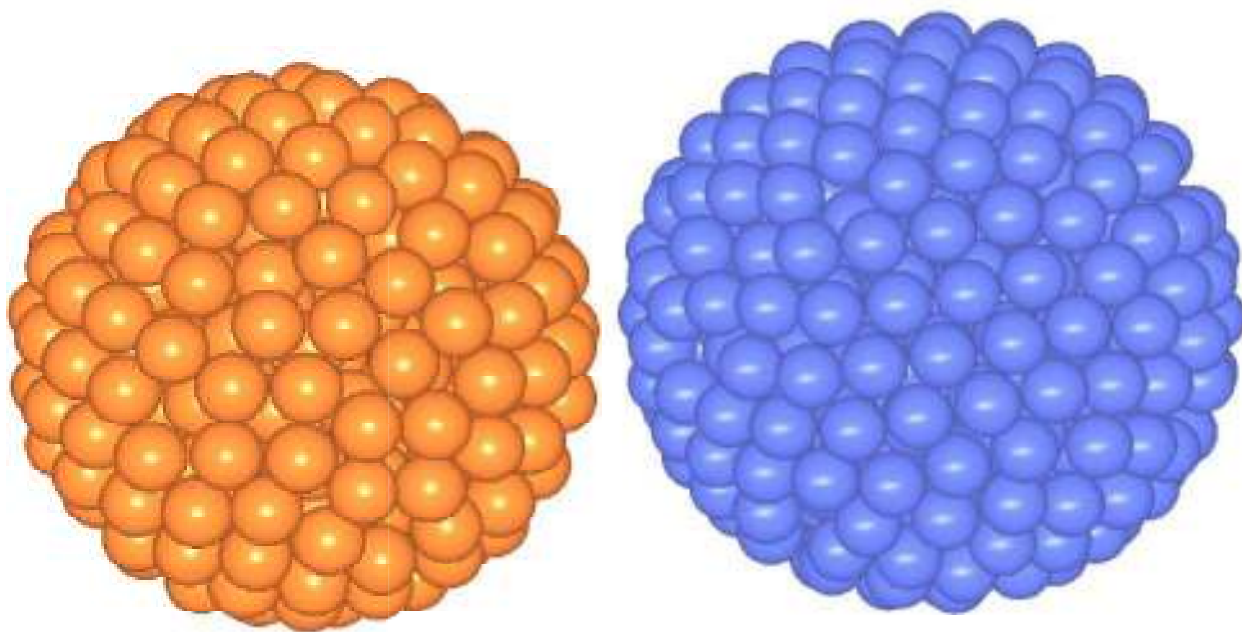


Рис. 6.21. Розміщення 295 та 429 куль

Наступна група прикладів – розміщення максимальної кількості гіперкуль у гіперкулі C з радіусом $\rho = 2.5$ наведена у табл. 6.26. У першому

стовпчику показана розмірність d , в другому – максимальна кількість розміщених гіперкуль λ^* , а в третьому – щільність заповнення контейнера.

Як видно з табл. 6.26, кількість гіперкуль одиничного радіусу, які можна розмістити у гіперкулі з радіусом $\rho = 2.5$, значно зростає із збільшенням вимірності простору. В той же час щільність заповнення значно зменшується й наближується до нуля.

Таблиця 6.26

Результати розміщення гіперкуль у гіперкулі радіусу $\rho = 2.5$

d	λ^*	Щільність
3	6	0.38
4	8	0.20
5	10	0.10
6	12	0.05
7	15	0.025
8	18	0.012
9	20	0.0052
10	24	0.0025
11	28	0.0012
12	31	0.00052
13	35	0.00023
14	38	0.0001
15	42	0.000045
16	46	0.00002
17	51	0.0000088
18	56	0.0000038
19	61	0.0000016
20	66	0.00000073
21	71	0.00000031
22	77	0.00000014
23	82	0.000000058
24	88	0.000000025

Для підтвердження ефективності розробленого методу отримані результати порівнюються з результатами розв'язання задачі (3.61)–(3.65) за допомогою пакета програм для нелінійного програмування GAMS/BARON

(General Algebraic Modeling System / Branch-and-Reduce Optimization Navigator) [285]. Для $d=3, \rho=3, \lambda^*=13$ (див. табл. 6.24); $d=3, \rho=2.5$; $d=4, \rho=2.5$; $d=5, \rho=2.5$; $d=6, \rho=2.5$ та $d=7, \rho=2.5$ (див. табл. 6.26) результати співпадають. Але для інших прикладів (табл. 6.24, 6.26) спроби отримати розв'язки за допомогою розв'язувача GAMS/BARON виявилися неуспішними.

Збільшення кількості та розмірності гіперкуль призводить до значного збільшення часу обчислень через збільшення розмірності задачі та кількості активних обмежень.

6.5 Практичні застосування задач розміщення гіперкуль різної вимірності

6.5.1 Оптимізація топології деталі в адитивних технологіях

6.5.1.1 Технологія прямого лазерного спікання

Пряме металеве лазерне спікання (Direct Metal Laser Sintering – DMLS, див. рис. 6.22, 6.23) є технологією нової генерації. Вона дозволяє за допомогою лазера зі спеціального металевого порошку відтворювати вироби за заданими 3D моделями та є основою адитивного виробництва (Additive Manufacturing – AM) [286]. Ключовим фактором для застосування у виробництві кінцевих продуктів є гнучкість процесу, можливість випуску масової продукції, широкий діапазон можливостей проектування [287,288], завдяки чому можна реалізовувати практично структури довільної форми [288]. У процесі проектування мають бути враховані спеціальні конструктивні обмеження. Таким чином, необхідні методи проектування, які охоплюють як переваги процесу, так і його обмеження [289].

Один з підходів до використання переваг DMLS – оптимізація топології (просторової форми) виробу [290,291]. Завдяки розрахунковому розподілу матеріалу згідно з умовами навантаження, можна моделювати ефективні форми виробів. Задача полягає в інтерпретації результатів

оптимізації та створенні компонент, які відповідають механічним характеристикам та задовольняють обмеження процесу [292], забезпечуючи технологічність. Наприклад, необхідно дотримуватися мінімальних кутів опускання або максимальних виступів. Крім того, є обмеження на мінімальні й максимальні елементи форми, наприклад, товщини стінки [293].

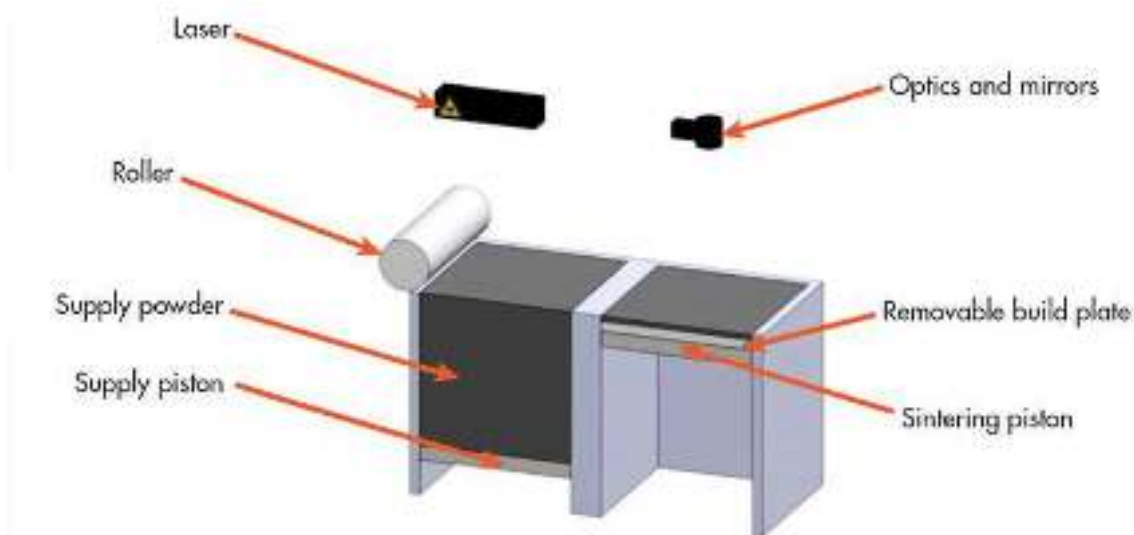


Рис. 6.22. Основні компоненти DMLS-устаткування(<http://www.3dsmartpro.com.ua>)

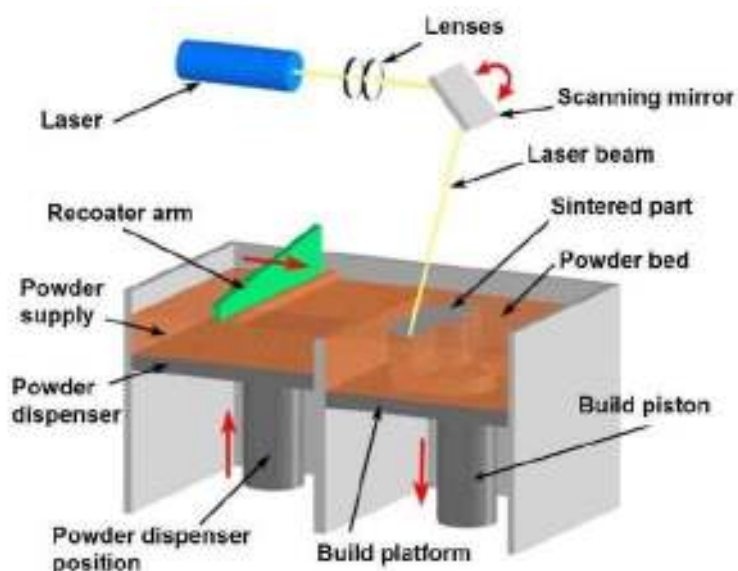


Рис. 6.23. Основні принципи проектування для DMLS

(<http://www.custompartnet.com/wu/direct-metal-laser-sintering>)

Для того, щоб зменшити зусилля на проектування, бажано автоматично враховувати керівні принципи при проектуванні та моделюванні [292]. З

точки зору оптимізації топології граничні значення мають бути враховані в аналізі скінченних елементів [294]. Але такі аспекти, як уникнення структур підтримки, мають бути апроксимовані описаними атрибутами. В роботі [294] вже займаються цією проблемою. Leary та ін. описують метод, в якому будуються оптимальні структури без підтримки за допомогою оптимізації топології. Компоненти призначені для моделювання методом пошарового наплавлення (Fused deposition modeling – FDM) [294].

6.5.1.2 Оптимізація топології за допомогою оптимізації розміщення кругів

При виборі елементів для заміни опорних конструкцій важливим є математичний опис безопорної структури та формулювання керівних принципів проектування для забезпечення технологічності. Для цього використовується оптимізаційна задача розміщення кругів (2D), куль (3D). На рис. 6.24 наведена схематична ілюстрація цього підходу для 2D задач.

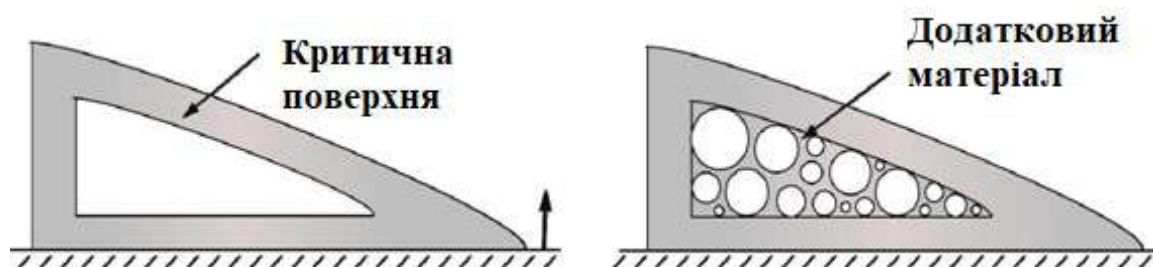


Рис. 6.24. Базова модель оптимізації та модель з підтримуючими кругами

Головною перевагою підходу є те, що круги можуть бути виготовлені з визначеними радіусами, задовольняючи умови процесу, оскільки можна спостерігати максимальний виступ і кути опускання. Крім того, найменший розмір круга може бути обмежений мінімальними розмірами отворів і зазорів. Іншим критерієм є щільність розміщення, яка обмежена мінімальною товщиною стінки між кругами. Відповідні конструкторські положення, які

обмежують структуру кругів, подані на рис. 6.25.

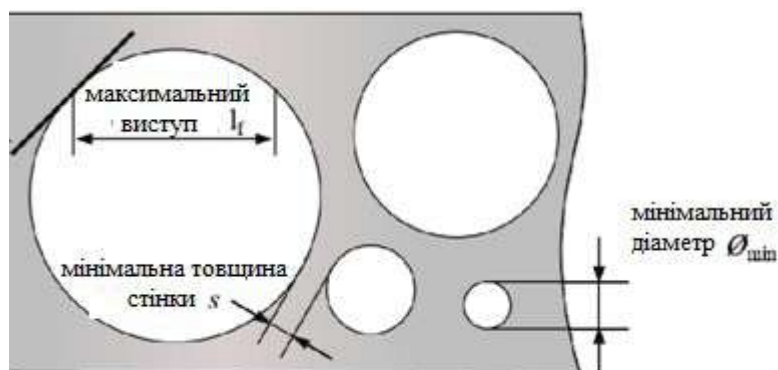


Рис. 6.25. Обмеження структури: $\delta = 45^\circ$, $l_f = 6\text{мм}$, $s = 0.6\text{мм}$, $\varnothing_{\min} = 0.6\text{мм}$

Цей підхід має додаткову перевагу, коли відомі концентратори напружень, які можуть бути оцінені на етапі проектування. Завдяки уникненню серйозних відхилень в силі течії, піки в розподілі напруг виникають рідко. Тому можна прогнозувати динамічну та втомну міцність на ранній стадії. Крім того, компоненти легко обробляються, що позитивно впливає на втомну міцність. Задля зменшення шорсткості поверхні, круги можуть бути виготовлені шляхом додавання додаткового розміру. Після цього бажана форма може бути досягнута шляхом обробки кругів буровим інструментом різних діаметрів. Враховуючи це, діаметри кругів можуть бути обмежені типовими розмірами для бурових інструментів. Для застосування підходу необхідна математична модель розміщення кругів різних розмірів. Важливо визначити максимальну щільність розміщення. Для забезпечення технологічності компонентів необхідно додатково враховувати обмеження конструкції.

Постановка та математична модель задачі описана в п. 3.1.3, а метод, який спеціально розроблено для розв'язання цієї задачі, – в п. 5.1.3.

6.5.1.3 Приклад оптимізації топології деталі

Для тестування вибрано деталь, досліджена в роботі [294], її фронтальна проекція показана на рис. 6.26. Розглянемо консольну балку з

розмірами 100 мм х 40 мм х 2 мм. Безпосередній 3D друк заданої деталі за допомогою DMLS технології неможливий внаслідок наявності поверхонь з великими значеннями локальних градієнтів [294]. Альтернативна форма, в якій можна уникнути концентраторів напруг у вигляді внутрішніх кутів і яка є можливою для друку з використанням технології DMLS, може бути побудована за допомогою алгоритму, описаного в п. 5.1.3.

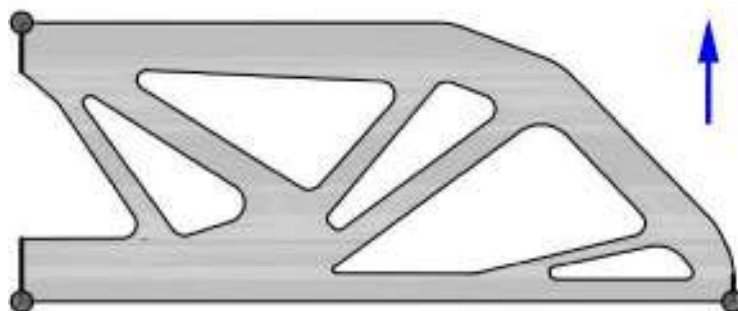


Рис. 6.26. Топологія деталі й напрямок навантаження

Координати вершин багатокутників, які можна розглядати як компоненти контейнера $C = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_5$, наведені на рис. 6.27.

Радіуси кругів мають значення від 1 мм до 10 мм з кроком 0.5 мм: $\hat{r}_k = 1, 1.5, 2, \dots, 10$ мм, $k \in I_K = \{1, 2, \dots, K\}$, $K = 19$. Мінімальна допустима відстань між кругами – $d = 2$ мм. Кількість класів конгруентності кругів дорівнює $\mu = 4$.

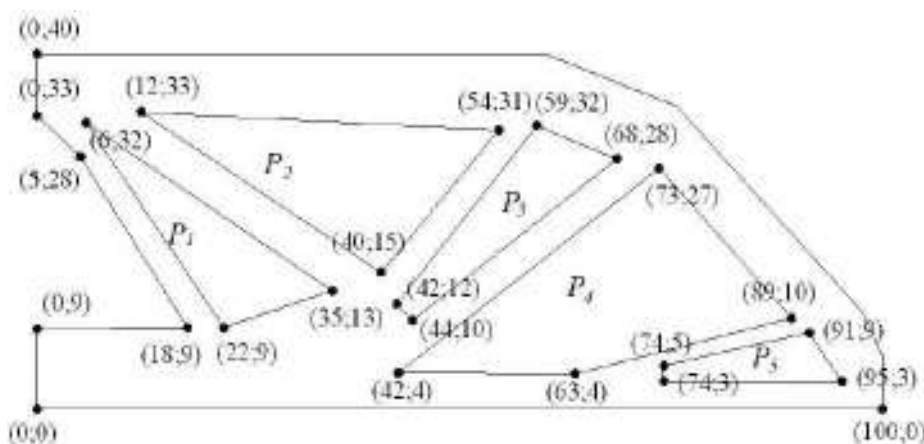


Рис. 6.27. Координати вершин багатокутників

В результаті роботи алгоритму вибрані такі радіуси кругів: $\hat{r}_1 = 1$ мм,

$\hat{r}_3 = 2$ мм, $\hat{r}_5 = 3$ мм та $\hat{r}_{13} = 7$ мм. Кількість кругів у кожному з багатокутників – P_q , $q = 1, 2, \dots, 5$: $N_1 = 7$, $N_2 = 6$, $N_3 = 5$, $N_4 = 11$, $N_5 = 4$. Загальна кількість розміщених кругів – 33, площа кругів – 691.15 мм². Координати центрів кругів наведені в табл. 6.27. Графічна ілюстрація розміщення кругів з розподілом навантаження показана на рис. 6.28, а готова деталь, надрукована за отриманим планом, на рис. 6.29.

Таблиця 6.27

Радіуси й координати центрів кругів

Радіус	x	Y
P_1		
3.0000	26.8440	14.7571
3.0000	19.8847	19.3166
2.0000	14.3123	23.5533
1.0000	20.2092	13.3254
1.0000	11.1528	27.4285
1.0000	32.6718	13.3299
1.0000	22.8265	10.3006
P_2		
7.0000	39.1840	24.6976
3.0000	27.3518	26.6974
2.0000	49.4691	29.0707
2.0000	20.3408	30.0157
1.0000	15.6791	31.8237
1.0000	31.4688	31.0682
P_3		
3.0000	59.8324	28.3471
3.0000	53.4478	20.8359
2.0000	48.0966	15.8020
1.0000	44.0601	12.0206
1.0000	65.9250	27.7456

Радіус	x	y
P_4		
7.0000	74.7482	14.7248
3.0000	62.7869	15.6870
3.0000	51.0783	7.0000
3.0000	64.7358	7.9280
1.0000	73.8097	24.6806
2.0000	56.4880	12.0417
2.0000	85.1565	11.1656
1.0000	45.2521	5.0753
1.0000	66.5061	20.7399
1.0000	69.9829	23.5163
2.0000	58.0065	6.0000
P_5		
2.0000	91.2630	5.0000
2.0000	83.8936	5.0000
1.0000	78.9946	4.0000
1.0000	75.0000	4.2080

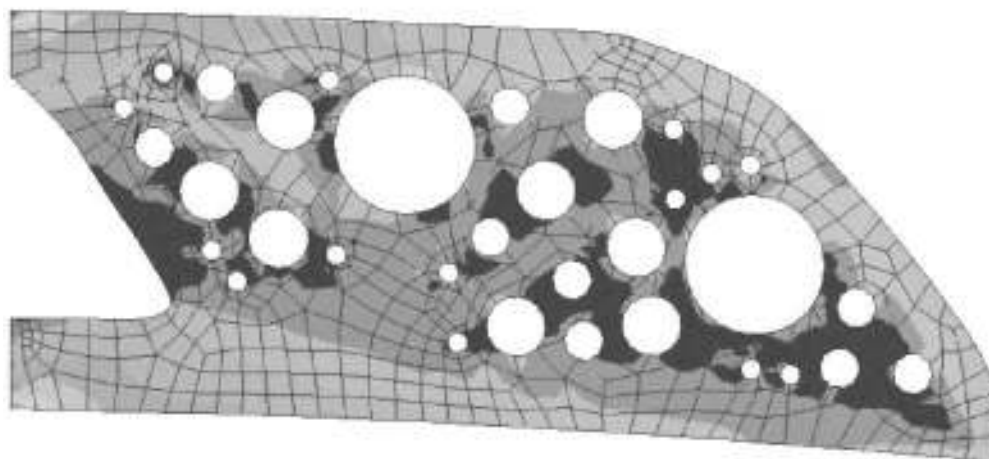


Рис. 6.28. Графічна ілюстрація розміщення кругів із розподілом навантаження



Рис. 6.29. Деталь, надрукована за допомогою 3D-принтера

6.5.2 Планування лазерної коагуляції сітківки ока

6.5.2.1 Постановка задачі

Для лікування деяких захворювань ока активно використовується процедура лазерної коагуляції, яка полягає в нанесенні серії мікроопіків на очне дно з метою усунення макулярного набряку [188] (рис. 6.30). Основною проблемою є рівномірне розміщення коагулятів у набряках і судинному руслі різноманітних просторових форм.

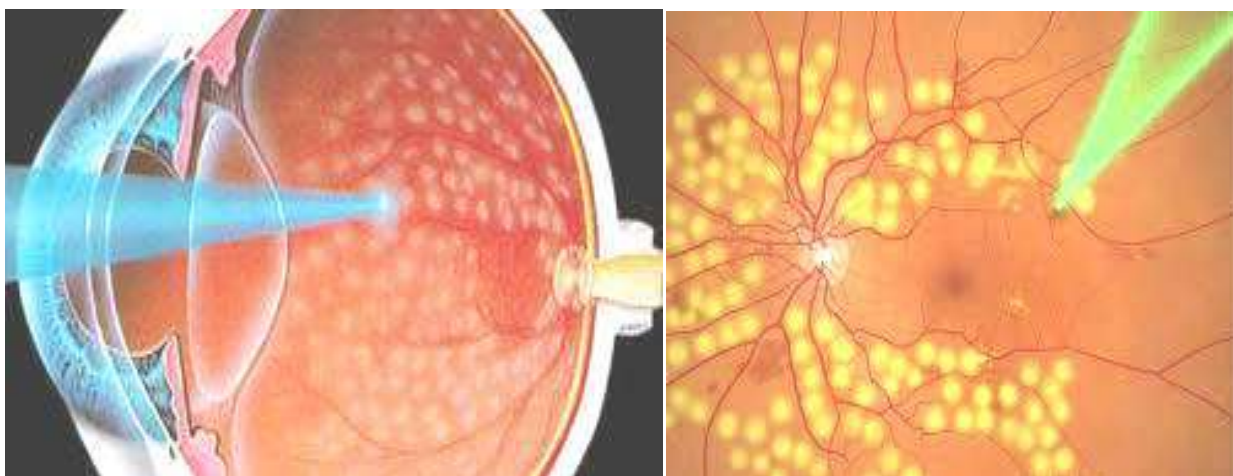


Рис. 6.30. Лазерна коагуляція сітківки ока [188]

Оптимальним вважається розташування коагулятів з урахуванням мінімально допустимих відстаней, виключаючи попадання на судини. Нанесення коагулятів відбувається відповідно до плану під контролем автоматичної системи позиціонування променя лазера, що дозволяє здійснювати лікування з високою точністю. Ручне введення карти коагулятів негативно впливає на якість терапії внаслідок неоптимального розміщення або випадкового потрапляння в заборонену область очного дна. Автоматизація забезпечить гарантію безпеки проведення процедури лазерної коагуляції та зменшить час проведення операції.

Нанесення серії коагулятів на очне дно має задовольняти такі вимоги: коагулят не повинен потрапляти в область макули, товстих судин і на здорові ділянки; зона коагуляції повинна охопити максимальну площу області ексудатів; області коагулятів не повинні перекриватися, щоб не перевищити допустимий рівень мікроопіків.

6.5.2.2 Математична модель задачі та стратегія розв'язання

Коагуляти можна задати як набір рівних кругів:

$$C_i = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq r^2\} \quad i \in I_n,$$

де $u_i = (x_i, y_i)$ – координати центрів кругів. Координати всіх центрів кругів задаються вектором $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Набряки можна моделювати як об'єднання скінченної кількості опуклих багатокутників

$$P_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, A_{km}x + B_{km}y + C_{km} \geq 0, m \in M_k \right\}, k \in K,$$

а судини можна задати у вигляді об'єднання кругів

$$S_l = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - \bar{x}_l)^2 + (y - \bar{y}_l)^2 \leq \rho_l^2 \right\}, l \in L.$$

Тоді область розміщення –

$$\Omega = cl \left(\left(\bigcup_{k \in K} P_k \right) \setminus \left(\bigcup_{l \in L} S_l \right) \right) \neq \emptyset$$

Задача. Необхідно розмістити в області Ω максимальну кількість кругів із заданого набору C_i , щоб вони знаходилися на мінімально допустимій відстані δ (рис. 6.31).

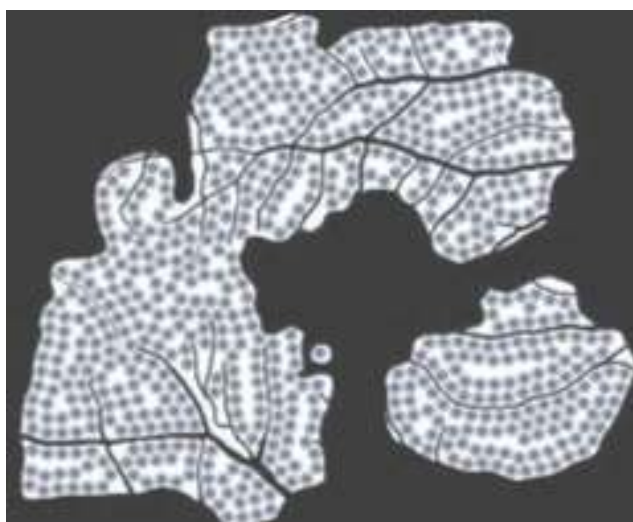


Рис. 6.31. Графічна ілюстрація постановки задачі [188]

Математична модель задачі може бути подана в такий спосіб:

$$\lambda^* = \max_{u \in W} \sum_{i \in I_n} \Psi_i(u_i),$$

де

$$\Psi_i(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i \in I_n; \end{cases}$$

$$\Phi_i(u_i) = \min \{ \Phi_i^P, \Phi_i^S \},$$

$$\Phi_i^P = \max \{ \min \{ A_{km}x + B_{km}y + C_{km} - r, m \in M_k \}, k \in K \},$$

$$A_{km}x + B_{km}y + C_{km} = 0 - \text{нормальне рівняння,}$$

$$\Phi_i^S = \min \{ (x_i - \bar{x}_l)^2 + (y_i - \bar{y}_l)^2 - (r + \rho_l)^2, l \in L \};$$

$$W = \left\{ u \in \mathbb{R}^{2n} : \Psi_i(u_i) \Psi_j(u_j) \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (2r + \delta)^2 \right) \geq 0, i < j \in I_n \right\}.$$

Задача належить до класу 2-D PPP. Для розв'язання задачі можна виконати декомпозицію задачі на підзадачі (для кожного P_k , $k \in K$) та застосувати Стратегію 6 PPP-random-lattice-local.

6.5.3 Планування променевої радіохірургії онкологічних пухлин

6.5.3.1 Постановка задачі

Радіохірургія – це мінімально інвазивна хірургічна процедура, в якій використовується випромінювання для знищення пухлин у людини [184-186,295]. Гамма-ніж є радіаційною системою, що містить джерела радіації (рис. 6.32) [295]. Гамма-промені з цих джерел спроектовані на спільний центр, створюючи кулю високої дози опромінення. Ключовою геометричною задачею лікування гамма-ножем є розміщення набору куль у 3-D пухлині нерегулярної форми. Кулі, що накладаються, можуть викликати передозування, в той час як низька щільність заповнення може призвести до недостатньої дози й до її нерівномірного розподілу. Гамма-ніж створює нерівні кулі випромінювання з чотирма різними радіусами (4, 8, 14 і 18 мм).

На практиці найчастіше використовується підхід, який полягає в тому, щоб спочатку знайти положення більших куль, а потім розміщувати менші кулі в решту контейнера. На рис. 6.33 зображені приклади планування лікування [295]. Скорочення загальної кількості куль впливає на зменшення часу лікування.



Рис. 6.32. Устаткування для радіохірургії [295]

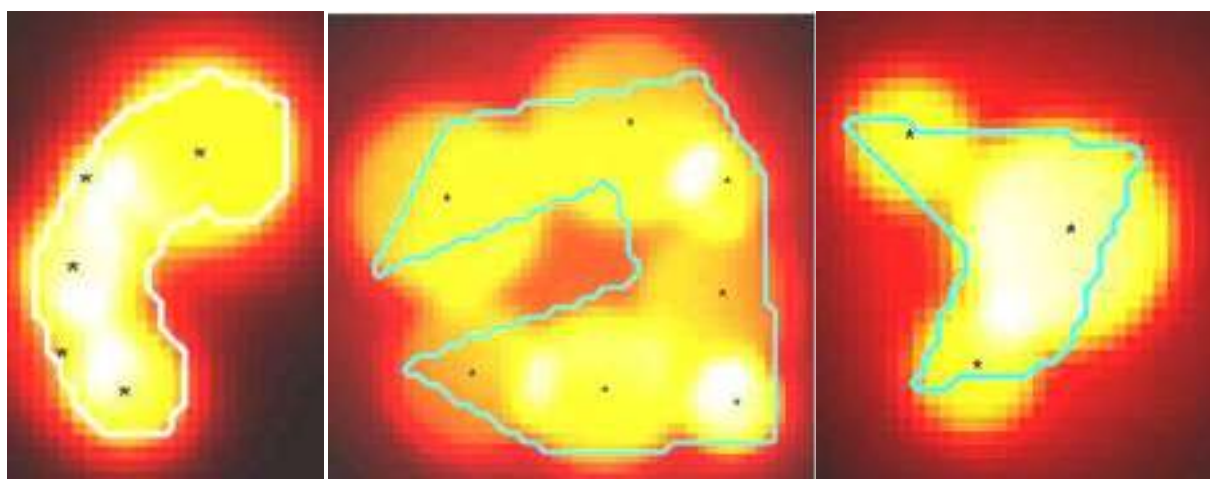


Рис. 6.33. Приклади планування лікування [295]

6.5.3.2 Обчислювальні експерименти для задачі розміщення нерівних куль у контейнері із зонами заборони

Математична модель задачі, яка дозволяє виконати планування лікування, наведена в п. 3.2.3, а метод розв'язання задачі описаний в п. 5.2.6. Для обчислювальних експериментів побудовано три приклади з різними типами контейнера і зонами заборони. Для розв'язання задач нелінійного програмування використовувався пакет програм IPOPT [280] та стратегія активних нерівностей [257].

Приклад 6.12. Область розміщення має вигляд: $C = cl(S \setminus (C_1 \cup C_2 \cup P_1 \cup G_1))$. Радіус кулі $S - R = 4.2$. Циліндр C_1 є нескінченим: $H_{11}(0,0,0)$, $H_{21}(0.01,0.01,0.99)$, $\rho_1 = 0.5$. Циліндр C_2 – напівскінчений: $H_{12}(1.123,1.123,1.123)$, $H_{22}(4,4,4)$, $\rho_2 = 1$. Координати точок, які лежать в поперечному перерізі призми P_1 : $v_{11} = (0.5,0,0)$, $v_{21} = (0,0.5,0)$, $v_{31} = (-0.5,0,0)$, $v_{41} = (0,-0.5,0)$, а вектор, паралельний ребрам призми, – $w_1 = (-0.5,-0.5,0.5)$. Початок власної системи координат спеціальної множини G_1 знаходиться в точці $U_{21} = (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) = (0, 2.5, 0)$; $\alpha_{21} = 0$, $\beta_{21} = 90$ (одичні вектори осі OZ власної системи координат G_1 та осі OY загальної системи координат контейнера C є колінеарними); $R_1 = 2$, $c_{11} = -0.5$. Радіуси та максимальна кількість куль: $\hat{r}_1 = 1.6$, $\hat{j}_1 = 3$, $\hat{r}_2 = 1.2$, $\hat{j}_2 = 7$, $\hat{r}_3 = 1$, $\hat{j}_3 = 10$, $\hat{r}_4 = 0.7$, $\hat{j}_4 = 20$.

Найкраще значення функції цілі $\Psi^* = 30.948$ отримано для вершини дерева $T_{2,5,10,12}$. Час обчислення 3 години 15 хвилин. Радіуси й координати центрів куль у точці екстремуму наведені в табл. 6.28.

Приклад 6.13. Область розміщення має вигляд $C = cl(S \setminus (C_1 \cup P_1 \cup G_1))$, де куля S , циліндр C_1 , призма P_1 та об'єкт G_1 визначені в Прикладі 6.12 за винятком $R_1 = 1.5$. Радіуси та максимальна кількість куль: $\hat{r}_1 = 1.6$, $\hat{j}_1 = 4$, $\hat{r}_2 = 1.2$, $\hat{j}_2 = 10$, $\hat{r}_3 = 1$, $\hat{j}_3 = 15$, $\hat{r}_4 = 0.7$, $\hat{j}_4 = 21$.

Таблиця 6.28

Радіуси й координати центрів куль для Прикладу 6.12

i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	1.6000	-2.3150	0.6591	0.9807
2	1.6000	1.7377	-1.5641	-1.1347
3	1.2000	-1.9501	-1.7766	-1.4272
4	1.2000	0.0623	2.7871	0.0950
5	1.2000	0.3553	-2.1227	2.0887
6	1.2000	-0.4135	-2.9708	-0.0215
7	1.2000	-1.0923	1.2993	-2.4722
8	1.0000	-2.7913	0.2535	-1.5434
9	1.0000	-2.3444	-2.0519	0.7213
10	1.0000	-0.6131	1.4971	2.7596
11	1.0000	3.1699	-0.0485	0.4217
12	1.0000	-0.2552	-1.5139	-2.8065
13	1.0000	2.3831	-1.6233	1.3847
14	1.0000	1.5697	-0.4130	2.7563
15	1.0000	2.7852	0.8308	-1.3353
16	1.0000	-1.2293	-0.7945	2.8445
17	1.0000	1.0975	1.3333	-2.6923
18	0.7000	1.0573	-0.5439	-3.2895
19	0.7000	2.8270	0.4576	2.0097
20	0.7000	1.0031	1.1412	3.1522
21	0.7000	1.3292	-0.0282	0.7312
22	0.7000	-0.5884	1.1374	-0.6055
23	0.7000	-1.6950	-0.5147	-2.9757
24	0.7000	1.9974	1.7985	-0.1789
25	0.7000	1.4315	-3.0931	0.6636
26	0.7000	-1.2144	-0.0655	-0.9847
27	0.7000	-2.2845	1.7968	-1.0287
28	0.7000	-0.5191	-1.0946	-0.3256
29	0.7000	2.1994	0.0372	-2.7214

Найкраще значення функції цілі $\Psi^* = 32.851$ отримано для вершини дерева $T_{2,2,14,21}$. Час обчислення – 3 години 30 хвилин. Радіуси й координати центрів куль у точці екстремуму наведені в табл. 6.29.

Таблиця 6.29

Радіуси й координати центрів куль для Прикладу 6.13

i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	1.6000	-2.3879	0.8966	-0.4836
2	1.6000	-1.2923	-2.1003	-0.8032
3	1.2000	-2.0862	-0.0114	2.1516
4	1.2000	1.5658	1.2589	2.2204
5	1.0000	0.0380	2.8090	0.5794
6	1.0000	2.6523	-1.1069	1.3925
7	1.0000	0.0120	1.4890	-2.3488
8	1.0000	3.1574	0.3828	-0.2581
9	1.0000	-1.5268	0.0920	-2.8070
10	1.0000	-0.5583	-2.6944	1.6252
11	1.0000	1.0693	-1.8133	2.4013
12	1.0000	1.3995	-0.6135	-0.1694
13	1.0000	-0.5518	1.4303	2.8058
14	1.0000	2.3433	0.4144	-2.1227
15	1.0000	1.4306	1.4731	0.0267
16	1.0000	1.6629	-2.6571	0.5856
17	1.0000	1.9159	-2.1645	-1.3576
18	1.0000	1.0224	-1.1104	-2.8131
19	0.7000	-2.5095	1.7825	1.6503
20	0.7000	-1.6715	1.7773	-2.4972
21	0.7000	-1.4000	-1.6943	2.7190
22	0.7000	1.2217	-0.3239	3.2489
23	0.7000	1.0826	0.5366	-3.2782
24	0.7000	3.0505	-1.6883	-0.1650
25	0.7000	2.7376	1.7915	-1.1328
26	0.7000	-0.2107	2.6404	-1.1007
27	0.7000	3.0850	-0.9214	-1.3590
28	0.7000	0.2540	-1.3348	0.9189
29	0.7000	-0.7494	-1.5147	-3.0300
30	0.7000	2.8773	1.7837	0.8722
31	0.7000	-2.7512	-0.7895	-2.0107
32	0.7000	3.1419	0.5246	1.4427
33	0.7000	0.4349	-2.6252	-2.2557
34	0.7000	-0.2330	-1.1465	3.2891
35	0.7000	-3.2697	-1.1781	0.1282
36	0.7000	0.1901	-3.4772	0.3074
37	0.7000	-2.5979	-2.0080	1.1389
38	0.7000	0.6785	-3.2809	-0.9986
39	0.7000	-1.1513	1.7817	1.2488

Приклад 6.14. Область розміщення – $C = cl(P \setminus (C_1 \cup P_1))$, де P – опуклий восьмикутник з вершинами $v_1(-7.1, 1.4, 0.1)$, $v_2(-2, 0.7, 8.2)$, $v_3(0.45, 7.25, 0.2)$, $v_4(7.15, 0.15, 0.25)$, $v_5(0.7, -8.05, 0.9)$ та $v_6(1, 1, -7)$. Грані P задані трійками вершин: (v_1, v_2, v_3) , (v_2, v_4, v_3) , (v_1, v_5, v_2) , (v_2, v_5, v_4) , (v_1, v_6, v_3) , (v_3, v_6, v_4) , (v_1, v_6, v_5) та (v_6, v_5, v_4) . Циліндр C_1 є нескінченим та заданий двома точками: $H_{11}(0, 0, 0)$ та $H_{21}(0.01, 0.01, 0.99)$, які лежать на його осі; $\rho_1 = 1$. Призма P_1 визначена в Прикладі 6.12. Радіуси та максимальна кількість куль: $\hat{r}_1 = 2$, $\hat{j}_1 = 4$, $\hat{r}_2 = 1.5$, $\hat{j}_2 = 8$, $\hat{r}_3 = 1$, $\hat{j}_3 = 25$.

Найкраще значення функції цілі $\Psi^* = 69.333$ отримано для вершини дерева $T_{0,8,25}$. Час обчислення – 46 хвилин. Радіуси й координати центрів куль у точці екстремуму наведені в табл. 6.30. Ілюстрації розміщених куль для прикладів 6.12–6.14 показана на рис. 6.34–6.36.

6.5.4 Дослідження властивостей сплаву в порошковій металургії

Порошкова металургія – галузь науки й техніки, яка охоплює виробництво металевих порошків та виробів з них [296]. Однією з основних проблем вивчення й практичного використання порошкових систем є прогнозування ходу реакційних процесів у порошкових композиціях і отримання виробів з наперед заданими властивостями. На процеси спікання, сплаву порошкових матеріалів і синтезу сполук, що утворюються, крім хімічного складу та співвідношення компонентів, впливають гранулометричний склад порошків, форма частинок і щільність їх заповнення. Від щільності й кількості контактів частинок між собою залежать міцність і пористість кінцевого матеріалу, повнота реакції між компонентами суміші. Гранулометричний склад і щільність частинок впливають і на теплофізичні характеристики порошкової суміші: теплопровідність, теплоємність. Щільність розміщення частинок може вплинути й на відбивну здатність порошку та глибину проникнення випромінювання, що має істотне значення при лазерній обробці.

Таблиця 6.30

Радіуси й координати центрів куль з Прикладу 6.14

i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	1.5000	-0.3169	3.8015	1.5025
2	1.5000	-4.5642	1.1014	0.4220
3	1.5000	-0.8787	2.6043	-1.1907
4	1.5000	1.3855	-2.0868	-1.2198
5	1.5000	1.9488	2.8380	-0.2130
6	1.5000	-2.0585	1.4189	2.0434
7	1.5000	-0.9889	-3.2411	0.8004
8	1.5000	3.8543	-0.8686	0.2733
9	1.0000	-0.5034	-2.6672	3.4813
10	1.0000	1.4369	-1.4051	2.6773
11	1.0000	-2.8628	-0.9460	1.9230
12	1.0000	1.0297	1.8998	2.6492
13	1.0000	1.3245	-3.1858	1.7552
14	1.0000	-1.7700	-0.9184	3.8203
15	1.0000	-1.6906	1.0860	-3.0038
16	1.0000	1.9222	0.5940	0.8897
17	1.0000	-1.8365	0.6958	6.0158
18	1.0000	-1.0878	-1.7034	-1.2034
19	1.0000	2.8709	-3.1692	0.4777
20	1.0000	0.4598	4.8658	-0.6505
21	1.0000	-1.9487	0.4724	-0.2719
22	1.0000	4.1129	1.6188	0.1289
23	1.0000	2.5108	0.2948	2.7782
24	1.0000	-2.6725	-1.3804	-0.0218
25	1.0000	-3.1961	1.1639	-1.6777
26	1.0000	-2.8996	0.8398	4.3262
27	1.0000	0.4180	-5.8303	0.9561
28	1.0000	0.6252	2.5874	-3.2402
29	1.0000	1.9013	0.7027	-3.9020
30	1.0000	1.2709	-4.3433	-0.1045
31	1.0000	-1.0599	2.0847	4.3935
32	1.0000	3.3449	0.4567	-2.1236
33	1.0000	-2.9065	3.1116	0.2908

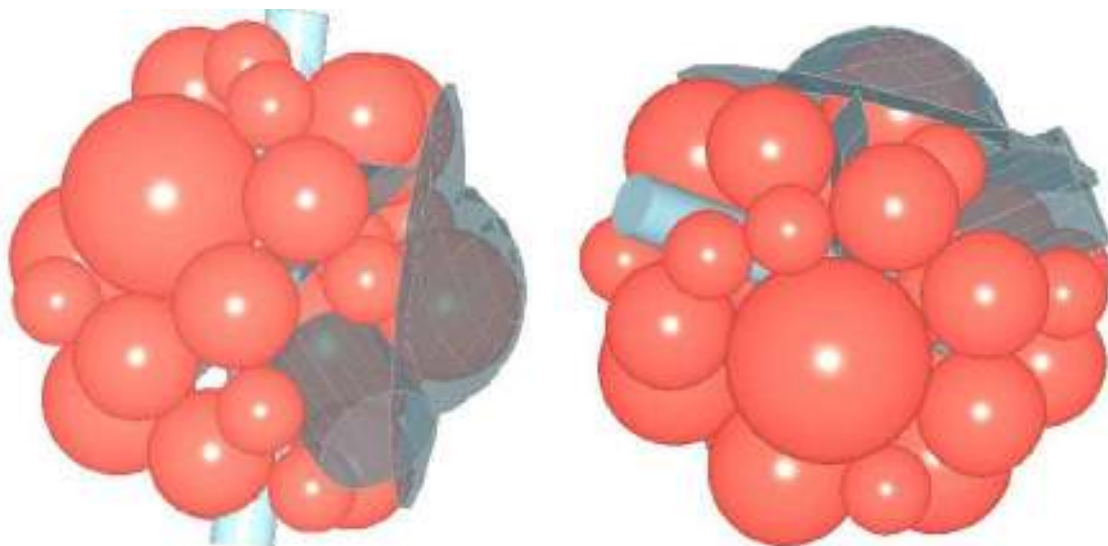


Рис. 6.34. Графічна ілюстрація до Прикладу 6.12

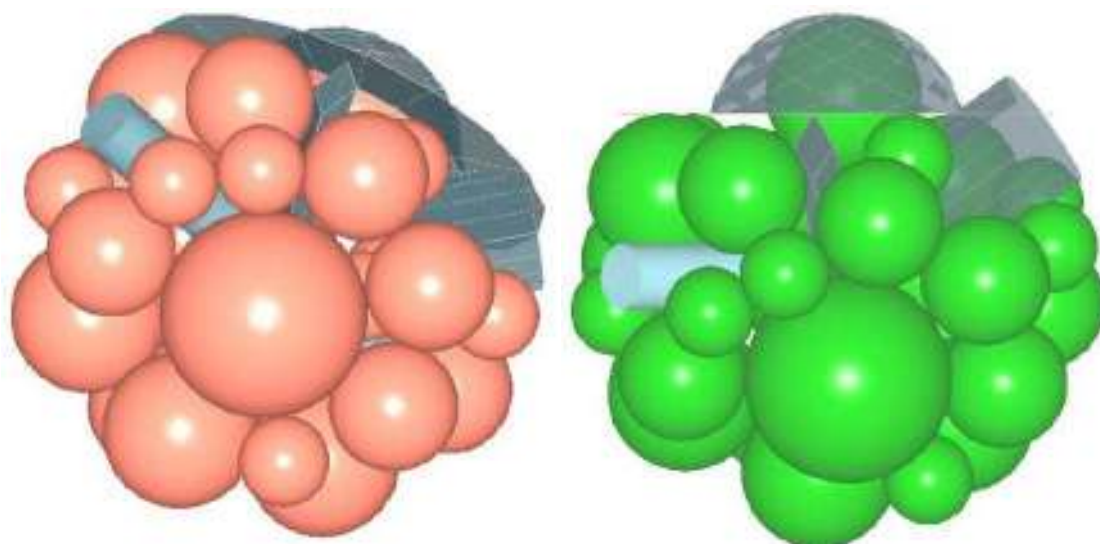


Рис. 6.35. Графічна ілюстрація до Прикладу 6.13



Рис. 6.36. Графічна ілюстрація до Прикладу 6.14

Пористі порошкові матеріали широко використовуються у вузлах тертя, фільтрах, теплових трубах, ущільненнях і виготовляються з порошків зі сферичною формою частинок. Пористі залізо- та міднографітові підшипники виготовляють переважно у вигляді циліндричних втулок. Розроблений у дисертаційній роботі програмний комплекс надає можливість отримати інформацію про коефіцієнт заповнення та пористість порошків.

Приклад 6.15. Для виготовлення концентричної циліндричної втулки з внутрішнім радіусом 9 мм, зовнішнім – 18 мм, використовується порошок, радіус сферичних гранул якого становить 0.315 мм. Останній заданий з похибкою 0.01 мм. Необхідно визначити кількість гранул та коефіцієнт щільності (пористості).

Математична модель задачі має вигляд (3.20)–(3.23). Задача належить до класу 3D-IPP, область розміщення – концентричний циліндр. Для її розв’язання застосовується Стратегія 6 (IPP-random-SA-descent-Lagrange). З урахуванням похибки радіусів куль розв’язуються дві задачі: для радіусів $0.315+0.01$ та $0.315-0.01$. У результаті розв’язання отримуємо, що кількість розміщених куль належить сегменту $[73627, 86125]$, який є інтервальною оцінкою значення функції цілі. Коефіцієнт щільності – $[0.583, 0.603]$, а пористість – $[0.397, 0.417]$

6.5.5 Розміщення паливних елементів у активній зоні ядерного реактору

Активна зона ядерного реактора із засипанням з кульових тепловиділяючих елементів (Pebble-Bed Reactor – PBR) – це прямий круговий циліндр, заповнений великою кількістю (до 450 тис.) випадково розміщених сферичних паливних елементів (рис. 6.37). Щільність заповнення елементів впливає на реактивність (коефіцієнт посилення). Вона залежить від способу, в який заповнено контейнер. Якщо контейнер струсити (це може трапитись внаслідок землетрусу або іншої вібрації), то коефіцієнт посилення зміниться через зміну витоку нейтронів, на який впливає щільність завантаження

активної зони. Для вивчення впливу щільності заповнення елементів на коефіцієнт посилення використовуються експериментальні установки. Комп'ютерне моделювання заповнення паливних елементів та процесів струшування значно зменшує вартість досліджень і прискорює їх проведення.

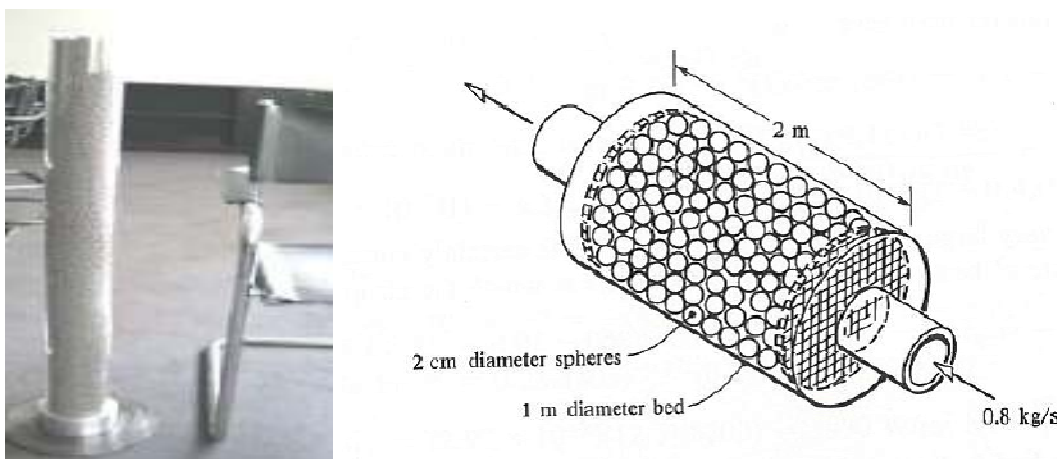


Рис. 6.37. Приклад експериментальної установки (chegg . com)

Математична модель задачі має вигляд (3.20)–(3.23). Задача належить до класу 3D-ІРР, область розміщення – концентричний циліндр. Для розв’язання застосовується Стратегія 5 (ІРР-random/lattice-IPOPT). При розміщенні більше 5000 куль застосовується метод оптимізації за групами змінних.

Для порівняння результатів розміщення розглядаються тестові приклади, запропоновані в роботі [201]. В усіх прикладах $r = 1$. Результати обчислень і порівняння з результатами, отриманими в [201], наведені в табл. 6.31. Тут n – кількість куль, ρ та h – радіус основи та висота циліндра S відповідно, n_{best} – кількість куль, отримана в [201], n_{add} – кількість додаткових куль, розміщених за допомогою методу, розробленого в дисертаційній роботі.

Таблиця 6.31

Порівняльна характеристика методів

n	ρ	H	n_{best}	n_{add}
201	5.5	15.6142	200	1
353	3.96	52.1	339	14
1514	5.6	108.8	1479	35
1692	5.96	106.4	1652	40
6428	7.99	217.4	6286	142
68899	14.1	712.6	61991	6908
100351	20.3	485.6	88414	11937

6.5.6 Моделювання заповнення контейнера каталітичними елементами при розробці технологій очищення газу та дистиляції

Реакційна інженерія – це галузь хімічної інженерії, яка займається проектуванням та оптимізацією хімічних реакторів. Метою є оптимізація транспортних процесів (теплообмін, масообмін і змішування) для поліпшення виходу/конверсії необхідних продуктів і гарантування безпечної роботи реактора. Упаковані шари сферичних частинок використовуються у багатьох хімічних процесах, включаючи абсорбційні, відпарювальні, дистиляційні та каталітичні реактори [168].

Графічна ілюстрація розміщених куль для прикладів $n = 201$ та $n = 353$ наведена на рис. 6.38

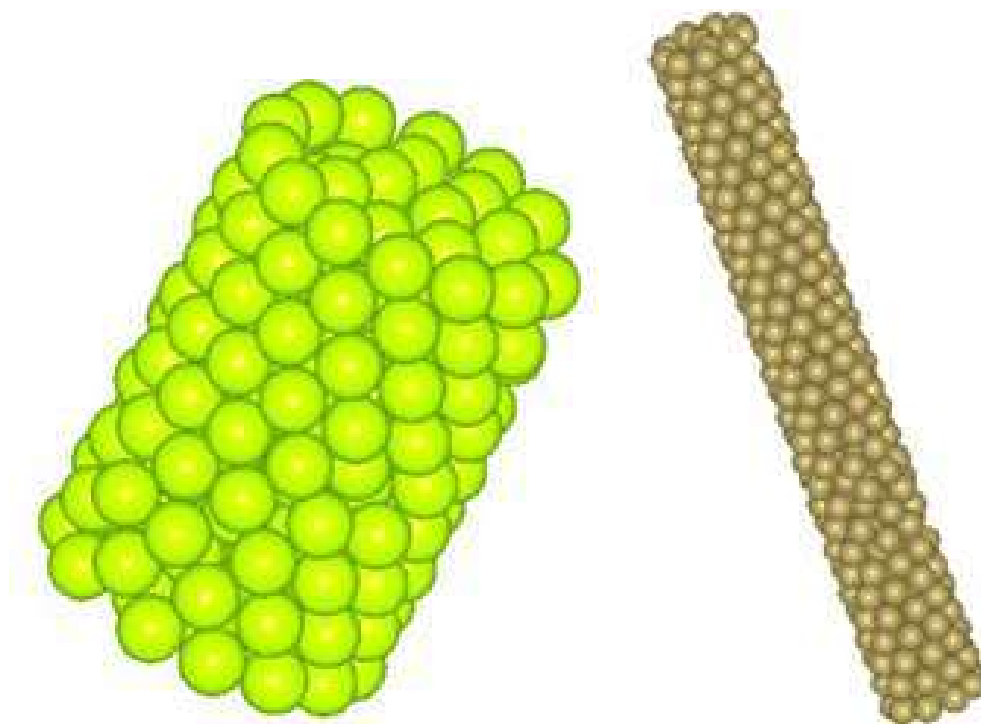


Рис. 6.38. Розміщення 201 та 353 куль у циліндрі

Конкретні показники технологічної установки безпосередньо пов'язані з розміщенням каталітичних елементів або їх внутрішнім розподілом. Низька каталітична організація всередині реактора означає відсутність однорідності, яка перешкоджає проходженню рідин. Це є джерелом градієнта падіння тиску. Більш щільне навантаження впливає на каталітичні процеси, зменшуючи каналовий ефект.

Для імітаційного моделювання процесу розміщення каталітичних елементів була запропонована математична модель задачі розміщення "великої" кількості куль в області, яка є композицією двох циліндрів та кулі, ((3.20)–(3.23)) – прототипі каталітичного реактору.

Розглядаються три приклади для різної кількості куль. Для розв'язання задачі використовувався метод, описаний в п. 5.2.4 та реалізований за Стратегією 6 (PPP-random-SA-Lagrange).

Приклад 6.16. Вихідні дані: $r=15$, $R=250$, $r_c=80$, $H=0$, $h=250$. Кількість початкових точок для кожної кулі – 30. Максимальна кількість куль – $N^*=1017$. Час виконання програми – 12 секунд. Графічна ілюстрація

розміщених куль показана на рис. 6.39.

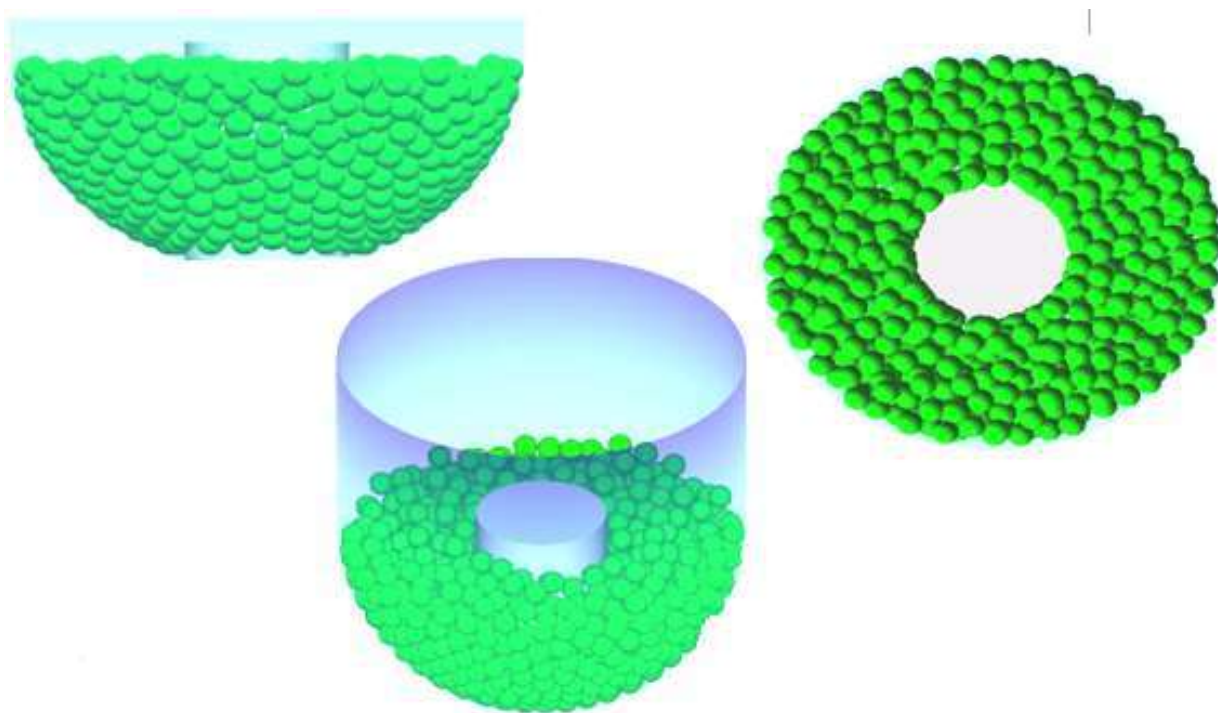


Рис. 6.39. Розміщення 1017 куль, Приклад 6.16

Приклад 6.17. Вихідні дані: $r = 1.5$, $R = 250$, $r_c = 80$, $H = 0$, $h = 80$. Кількість початкових точок для кожної кулі – 1. Максимальна кількість куль – $N^* = 1271567$. Час виконання програми – 3 години 30 хвилин. Графічна ілюстрація розміщених куль показана на рис. 6.40.

Приклад 6.18. Вихідні дані: $r = 1.25$, $R = 250$, $r_c = 80$, $H = -10$, $h = 80$. Одна початкова точка для кожної кулі. $N^* = 2063067$. Час – 21 година 40 хвилин.

Форми контейнерів, які можуть мати хімічні реактори [297], показані на рис. 6.41.



Рис. 6.40. Розміщення 1 271 567 куль, Приклад 6.17



Рис. 6.41. Форми каталітичних реакторів [297]

6.5.7 Моделювання композитів у матеріалознавстві

Авіа- та машинобудування, військова техніка та космічна промисловість – високотехнологічні галузі, яким потрібні вироби із тривалим терміном експлуатації, але отримані з мінімальними витратами часу, фінансів та енергії. Саме такі вимоги до технологій, за якими треба виробляти необхідні конструкційні матеріали. На лазерних 3-D принтерах можна виготовити не тільки окремі деталі, але й елементи конструкцій складної конфігурації, витративши невеликий проміжок часу та забезпечивши можливості ремонту пошкодженої продукції. Для виготовлення виробів

використовуються порошкові матеріали різного хімічного та фазового складу, зокрема порошки та титанові сплави різних легуючих систем. Вважається, що сферична форма частинок порошку найкраща для 3D-друку, проте технологія виготовлення таких порошкових матеріалів є складною й їх вартість становить \$800-1000 за 1 кг. На цей час актуальною є задача визначити можливість використання натурних порошків титанових сплавів сферичної форми, які піддаються гідруванню та дегідруванню. Такі порошки значно дешевші та можуть бути успішно використані в адитивних технологіях.

В рамках досліджень, проведених у дисертаційній роботі, розроблений алгоритм та програмне забезпечення для розв'язання задачі оптимального заповнення заданого контейнера, який має просторову форму кубоїда.

Дослідження виконуються для порошків із титанового сплаву з розмірами частинок від 200 до 1000 мкм. Порошкові фракції отримано ситовим методом, що характеризується невеликим розкидом розмірів частинок (рис. 6.42).

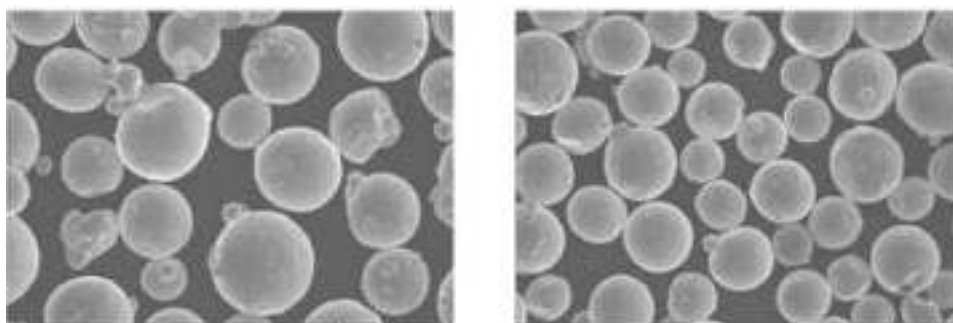


Рис. 6.42. Приклад композитного матеріалу

(<https://cyberleninka.ru/article/n/proizvodstvo-metalloporoshkovyh-kompozitsiy-vysokoy-chistoty-titanovyh-splavov-metodom-induktsionnoy-gazovoy-atomizatsii-dlya/viewer>)

Розміри контейнера $L \times W \times H = 1500 \times 1500 \times 9000$. Максимально можлива кількість куль – 10000000. З урахуванням метричних особливостей куль задача за випадкового вибору куль еквівалента задачі 3D-ІПРР з цільовою функцією (3.20), і для розв'язання можна застосувати Стратегію 6.

Приклад 6.19. Порошок фракції $d = 630$. Максимальна кількість куль – $N^* = 37$. Обчислювальний час – 0.375 с.

Приклад 6.20. Порошок фракції $d = 400 \dots 630$. Максимальна кількість куль – $N^* = 41$. Обчислювальний час – 0.828 с.

Приклад 6.21. Порошок фракції $d = 250 \dots 400$. Максимальна кількість куль – $N^* = 725$. Обчислювальний час – 10.75 с.

Приклад 6.22. Порошок фракції $d = 200 \dots 250$. Максимальна кількість куль – $N^* = 1761$. Обчислювальний час – 26.455 с.

Приклад 6.23. Порошок фракції $d = 50 \dots 100$. Максимальна кількість куль – $N^* = 11048$. Обчислювальний час – 137.453 с.

Ілюстрації прикладів 6.19–6.23 наведені на рис. 6.43–6.47.

6.6 Обчислювальні експерименти для задач розміщення кругів та куль з урахуванням похибок вихідних даних

У більшості прикладних задач вихідні дані задаються з деякою похибкою. Один із способів урахувати похибку – задати мінімально допустимі відстані між розміщуваними об'єктами, які дорівнюють похибці. Це дає можливість оцінити вплив похибки на значення функції цілі. При розв'язанні задачі розміщення з похибками даних виникають багатокритеріальні задачі, тому вибираються компромісні рішення (множини Парето та Слейтера [298,299]). Розглянемо задачу (3.2)–(3.4).

Приклад 6.24. Круги C_i , $i = 1, 2, \dots, 25$, необхідно розмістити у прямокутнику з шириною $w = 8$. Радіуси кругів та ширина задані з похибкою 10%.

В результаті розміщення кругів значення мінімальної довжини $l^* = 15.9344$ є верхньою оцінкою. В табл. 6.32 наведені значення радіусів та координати центрів кругів. Графічна ілюстрація показана на рис. 6.48. Нижньою оцінкою буде мінімальна довжина прямокутника за умови, що радіуси кругів задані без похибки. Розв'язання такої задачі дає результат $l^* = 12.9383$. Таким чином, маємо, що $12.9383 \leq l^* \leq 15.9344$.

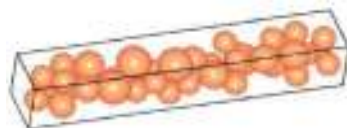


Рис. 6.43. Ілюстрація розміщення 37 куль

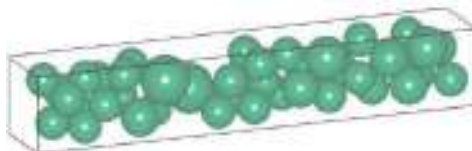


Рис. 6.44. Ілюстрація розміщення 41 куль

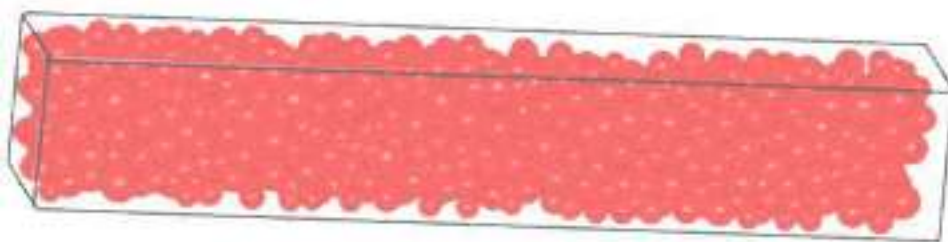


Рис. 6.45. Ілюстрація розміщення 725 куль

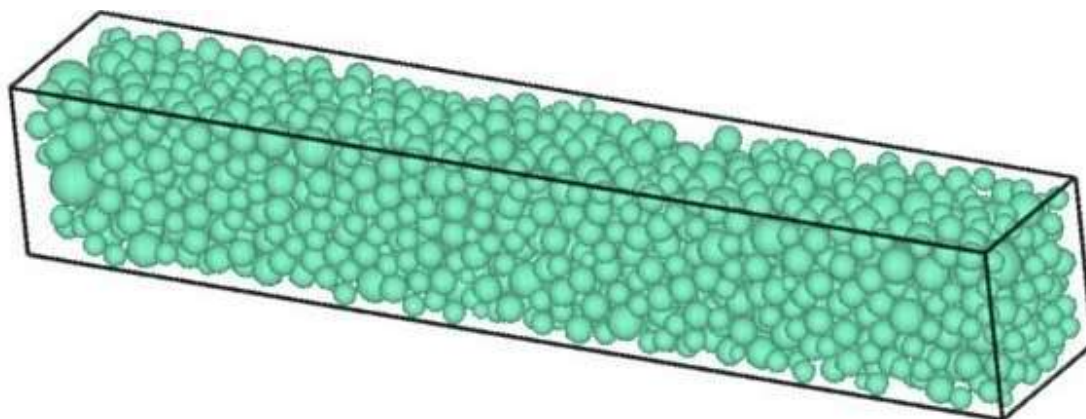


Рис. 6.46. Ілюстрація розміщення 1761 куль

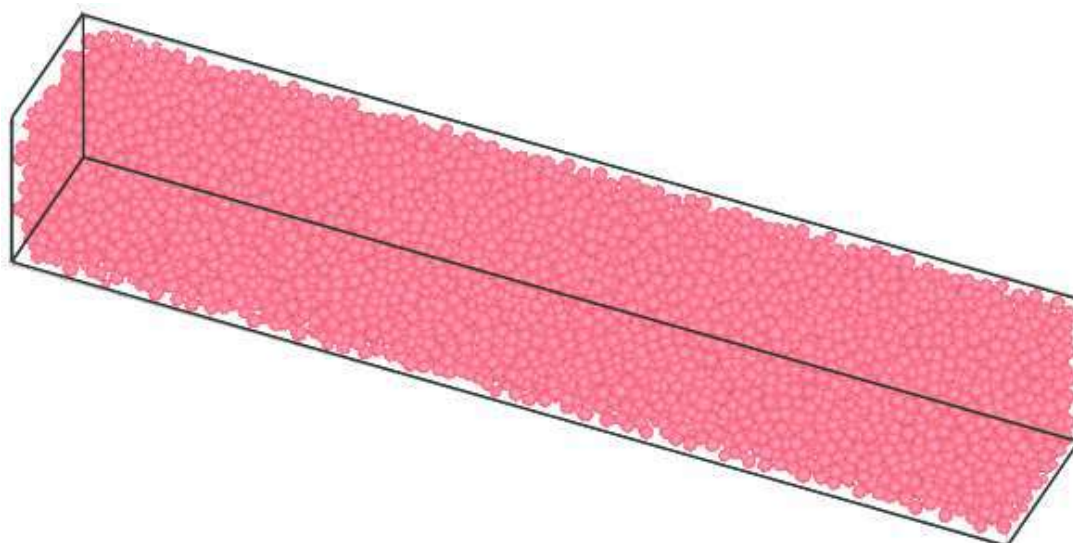


Рис. 6.47. Ілюстрація розміщення 11048 куль

Таблиця 6.32

Результати розміщення кругів, заданих з похибкою

i	r_i	x_i	y_i	i	r_i	x_i	y_i
1	0.8215	0.9037	4.0179	14	1.0724	8.9293	1.3269
2	1.4877	1.6365	6.9635	15	1.4041	9.4376	4.0378
3	0.6254	2.3209	4.7422	16	1.4245	10.2801	7.0331
4	1.3812	4.1218	3.4660	17	1.2600	11.4321	1.8909
5	0.9128	4.0907	5.9892	18	0.9580	11.8705	4.9500
6	0.6700	3.7843	0.7370	19	0.5805	12.2807	7.9615
7	0.8841	5.1966	7.6275	20	1.2467	13.7017	6.5400
8	0.9984	5.5414	1.2668	21	0.5188	12.5690	3.4834
9	0.5605	3.6454	7.9835	22	1.1432	14.6768	4.0987
10	1.4386	6.5942	5.3391	23	0.5957	15.1625	7.9447
11	0.9848	7.1564	2.7333	24	1.3090	14.2218	1.4399
12	0.8337	7.4626	7.6829	25	1.4613	1.6074	1.6074
13	0.6073	7.2031	0.6680				

Розглянемо задачу (3.18)–(3.19): контейнер – кубоїд $C = P3$ та циліндричний шар $C = CL$.

Приклад 6.25. Кулі S_i , $i=1,2,\dots,30$, необхідно розмістити в кубоїді з довжиною $l=9.9$ та шириною $w=8.5$. Радіуси кругів та метричні характеристики кубоїда задані з похибкою 10%.

Результати розв'язання – координати центрів куль наведені в табл. 6.33. Графічна ілюстрація – на рис. 6.49. Мінімальне значення висоти кубоїда – $h^*=10.3477$. Якщо радіуси куль задані без похибки, то $h^*=10.0534$.

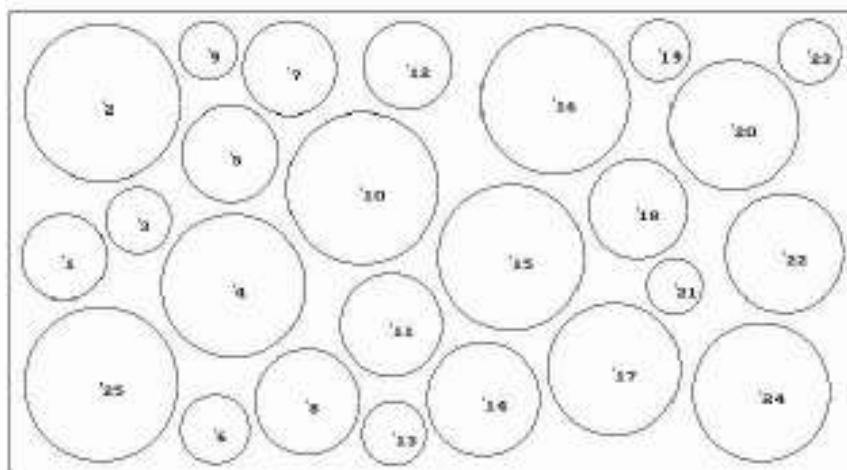


Рис. 6.48. Графічна ілюстрація розміщення кругів, заданих з похибкою

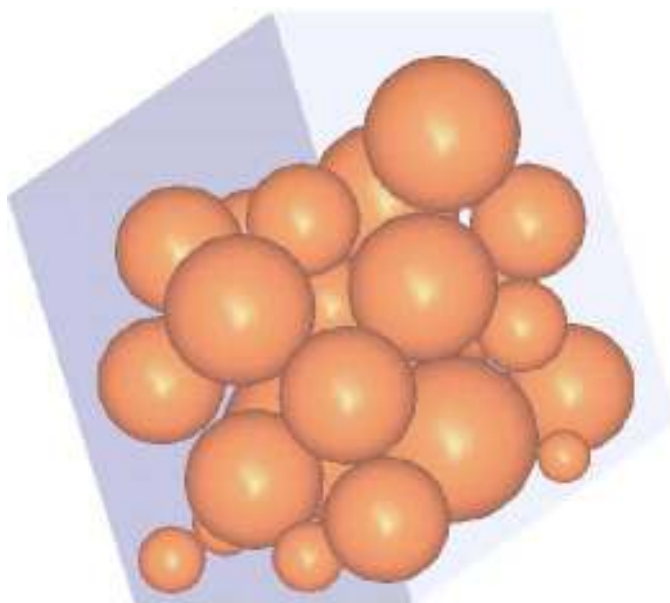


Рис. 6.49. Графічна ілюстрація розміщення куль, заданих з похибкою, у кубоїді

Приклад 6.26. Кулі S_i , $i=1,2,\dots,100$, з радіусом $r=1$ необхідно розмістити в циліндричному шарі з радіусами $\rho_1=4.5$ та $\rho_2=9$. Радіуси кругів та циліндричного шару задані з похибкою 1%.

Результати розв'язання (координати центрів куль) наведені в табл. 6.34. Графічна ілюстрація – на рис. 6.50. Мінімальне значення висоти циліндричного шару – $h^*=21.7331$. Якщо радіуси куль задані без похибки, то $h^*=20.9834$.

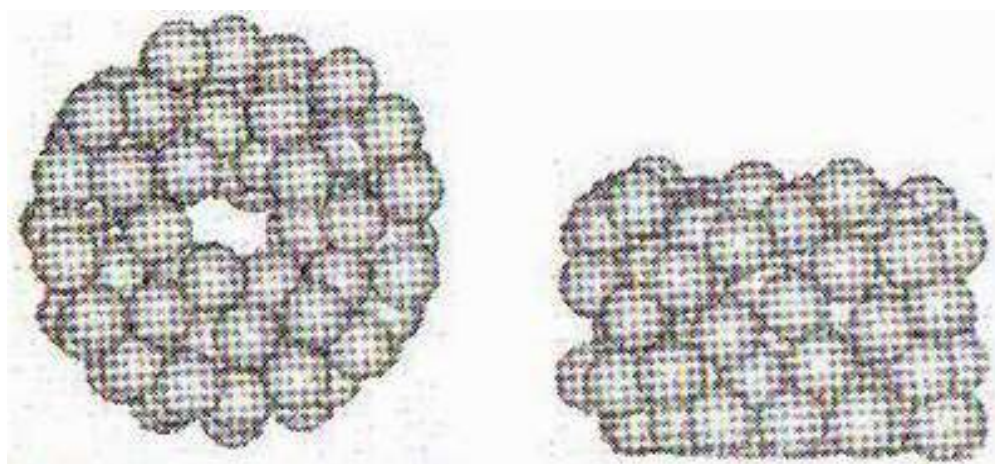


Рис. 6.50. Графічна ілюстрація розміщення рівних куль, заданих з похибкою, в циліндричному шарі

Таблиця 6.33

Результати розміщення куль, заданих з похибкою, у кубоїді

i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	1,5178	1,533	1,533	1,533
2	1,4631	7,1073	8,5213	1,4777
3	1,5132	7,0567	1,5283	1,5283
4	0,7802	0,788	9,211	0,788
5	0,5672	3,1426	0,5729	0,5729
6	1,9824	2,0022	5,0053	2,0022
7	1,9345	6,6312	5,1564	1,9538
8	0,8292	4,9764	9,1615	0,8375
9	1,6093	3,2772	8,3736	2,4367
10	0,6002	0,6062	3,2236	0,6062
11	0,6729	5,2034	0,6796	0,6796
12	1,327	4,2026	2,5779	1,3403
13	1,4224	5,0631	1,4366	3,7211
14	0,764	0,7716	7,1653	0,7716
15	1,3668	1,3805	2,5599	4,2552
16	1,598	6,971	8,385	4,5634
17	0,9158	5,0815	7,3535	0,925
18	1,0803	7,4939	2,8512	3,7465
19	1,4802	1,495	8,504	4,9948
20	1,7412	6,8264	4,8645	5,6497
21	1,1044	1,1154	5,9256	4,8459
22	1,3477	7,2238	1,3612	5,6753
23	1,7466	3,4624	1,7641	6,4734
24	1,7554	4,3028	8,226	6,6435
25	1,2656	1,2783	4,1182	6,4069
26	1,4946	1,5095	6,6971	7,4402
27	1,1413	3,1892	4,2094	4,907
28	1,8083	6,7586	2,7194	8,5213
29	1,3157	3,652	4,7423	7,2861
30	0,6188	7,96	3,2617	0,625

Таблиця 6.34

**Результати розміщення рівних куль, заданих з похибкою, в
циліндричному шарі**

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
1	7.2275	0.0000	1.5986	51	0.3412	-7.2604	10.4359
2	6.5652	3.1190	1.5986	52	-2.9382	-5.4567	10.7495
3	6.5652	-3.1190	1.5986	53	3.2143	5.2880	10.8298
4	4.5916	5.6344	1.5986	54	5.2786	-4.9965	11.1376
5	4.5916	-5.6344	1.5986	55	0.5816	7.2451	11.1715
6	1.7296	7.0596	1.5986	56	6.0172	-1.4897	11.6338
7	1.7296	-7.0596	1.5986	57	-6.1626	0.2085	12.1483
8	-1.4671	7.1188	1.5986	58	2.8459	-6.6881	12.3388
9	-1.4671	-7.1188	1.5986	59	-3.3284	5.1921	12.4031
10	-4.3800	5.8004	1.5986	60	-6.6550	-2.9223	12.5700
11	-4.3800	-5.8004	1.5986	61	5.5966	2.6127	12.6242
12	-6.4452	3.3598	1.5986	62	-6.4591	3.3330	12.7584
13	-6.4452	-3.3598	1.5986	63	-1.4793	-7.1162	13.0603
14	-7.2634	0.2690	1.5986	64	-4.8275	-5.4337	13.3288
15	-6.0151	-1.3562	4.0528	65	2.6168	6.7810	13.5933
16	6.0151	1.3562	4.2087	66	-1.2347	7.1627	13.8014
17	0.1141	6.1651	4.2087	67	6.2412	-3.7251	13.9087
18	0.1141	-6.1651	4.2087	68	7.2638	0.2585	14.0028
19	-4.7070	3.9831	4.2087	69	5.1649	5.1140	14.5683
20	4.8512	-3.8062	4.2087	70	0.9636	-6.1009	14.8557
21	-5.2547	-4.4465	4.3598	71	-7.2150	-0.8792	14.9647
22	-7.0406	1.8053	4.3937	72	-5.1370	5.1420	15.0392
23	5.6834	4.5308	4.3937	73	4.2359	5.9064	15.1100
24	-2.9969	6.6218	4.7877	74	-5.9110	1.9704	15.5984
25	3.2399	-6.5063	4.7877	75	-2.6128	-5.5879	15.6296
26	7.0904	-1.5986	4.7877	76	-5.2368	-3.2910	15.6663
27	3.2223	6.5151	4.8713	77	5.7303	2.2838	15.9441
28	-2.9776	-6.6304	4.8772	78	0.7364	6.1233	16.0941
29	-6.6650	-2.8995	6.7765	79	5.9594	-1.5843	16.2666
30	-6.3176	3.5941	6.9432	80	-2.4290	5.9767	16.5198
31	6.6752	2.8759	6.9432	81	3.7347	6.2355	17.1987
32	-6.2058	0.2518	7.0606	82	-0.5533	-7.2473	17.4261
33	-0.8411	7.2195	7.0719	83	5.7127	-4.4939	17.5689
34	1.1077	-7.1835	7.0719	84	2.5980	-6.7882	17.7104
35	5.0652	-5.2128	7.0719	85	-7.2632	0.2733	17.946b
36	-3.9588	-4.7469	7.2672	86	-5.9796	4.1320	17.9533
37	4.0637	4.6756	7.3474	87	-4.7909	-5.4659	17.9671
38	6.2140	-0.2308	7.5416	88	7.2429	0.6079	18.2081
39	-3.5604	5.0982	7.5416	89	5.8977	4.2481	18.4613
40	-1.8934	-7.0174	8.1621	90	-6.6954	-2.8286	18.4736
41	2.0750	6.9659	8.3582	91	-0.5680	7.2461	18.7886
42	6.5785	-3.0908	8.9238	92	-3.9088	6.1278	19.3499
43	2.7486	-5.5196	9.2540	93	5.8502	-1.9581	19.5114
44	-7.1190	-1.4658	9.5980	94	-2.1652	-5.7786	19.7643
45	-6.9904	1.9908	9.6263	95	2.0798	5.8454	19.9065
46	6.0043	4.0960	9.8213	96	3.7277	-4.9125	20.0402
47	-5.8073	-4.3708	9.8486	97	-5.8521	1.9427	20.2799
48	-2.3235	6.8870	9.8852	98	0.8041	-7.2238	20.3208
49	-5.4813	4.7733	10.0767	99	5.8379	1.9911	20.7251
50	7.1763	1.1535	10.2582	100	-4.7663	-3.9321	20.7722

6.7 Висновки за розділом 6

У даному розділі наведено результати обчислювальних експериментів, проведених за допомогою програмного забезпечення, яке реалізує розроблені математичні моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення гіперкуль різної вимірності, розглянуті їх практичні застосування.

Розглянуто різноманітні приклади для різної вимірності простору та різної кількості розміщуваних гіперкуль. При розробці програмного забезпечення використовуються розв'язувачі задач лінійного та нелінійного програмування HOPDM [282], BPMPD [283] та IPOPT [280]. Для перевірки ефективності роботи розроблених методів і програмного забезпечення для деяких прикладів використовувався розв'язувач задач глобальної оптимізації GAMS/BARON [285].

Ефективність отриманих результатів підтверджується порівнянням з кращими світовими аналогами для різних реалізацій задачі HSOA, опублікованими в високореєтингових міжнародних журналах та на сайті <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/cci.html>. Розв'язання тестових прикладів показало, що для більшості з них отримано поліпшення значень функції цілі.

Розроблено нові тестові приклади (benchmark instances). Для нових задач побудовано тестові приклади, які можна використовувати в подальших дослідженнях розміщень гіперкуль. Для задач розміщення у дво- та тривимірних просторах створено графічну візуалізацію отриманих результатів.

Розроблені в роботі математичні засоби моделювання дозволили розв'язувати широкий спектр задач розміщення гіперкуль, що підтверджено обчислювальними експериментами.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано у таких роботах: [1, 3-5, 7-17, 19, 21-24, 28, 29, 31-33, 35-39, 41-44, 46-49, 52, 57, 61].

ВИСНОВКИ

У дисертації запропоновано методологію розв'язання задач оптимального розміщення гіперкуль на основі отриманих нових фундаментальних, теоретично обґрунтованих результатів, включаючи створення конструктивних засобів математичного моделювання, побудову нових математичних моделей, розробку ефективних методів розв'язання.

Основні наукові та практичні результати дисертації:

✓ сформульовано основну задачу розміщення гіперкуль (HSOA), яка охоплює широке коло актуальних практичних застосувань. Побудовано математичну модель задачі HSOA, в якій враховується вимірність гіперкуль (2D, 3D, nD , $n \geq 4$), просторова форма контейнера (гіперпрямокутник, гіперкуля, гіперциліндр, n -політоп), обмеження на мінімально допустимі відстані між гіперкулями, зони заборони

✓ розглянуто основні реалізації задачі HSOA відповідно до міжнародної класифікації задача розкрою та упакування (Cutting&Packing): задача із змінними метричними характеристиками (ODP) та задача, сформульована як задача про рюкзак (KP). У задачі ODP змінні метричні характеристики виступають як незалежні змінні. Задача KP пов'язана з вибором підмножини гіперкуль із заданного набору. Досліджено основні властивості математичних моделей задач ODP та KP.

✓ побудовано засоби математичного моделювання умов розміщення гіперкуль (2D, 3D, nD , $n \geq 4$) в опуклому контейнері, що має просторову форму гіперпрямокутника, гіперкулі, гіперциліндра, n -політопа, з урахуванням мінімально допустимих відстаней та зон заборони, межа яких утворена циліндричними, сферичними поверхнями та площинами, із застосуванням методу Ф-функцій Стояна;

✓ створено методологію, в якій залежно від функції цілі задачі та особливостей математичної моделі запропоновано 6 стратегій для розв'язання задач HSOA, що включають різні комбінації методів побудови

допустимих початкових точок, методів локальної та методів глобальної оптимізації. Проведено аналіз чинників, які впливають на вибір стратегії розв'язання.

✓ запропоновано метод, який дозволяє звести розв'язання задачі КР до розв'язання задач ODP.

✓ набули подальшого розвитку методи побудови допустимих початкових точок, які дозволяють урахувати вимірність гіперкуль, просторову форму області розміщення та інформацію про попередні розв'язки (hot-start);

✓ розроблено нові методи розв'язання задач HSOA, які ґрунтуються на методах нелінійного програмування, методі гілок та меж, послідовній статистичній оптимізації, ідеї гомотетичних перетворень гіперкуль та контейнера;

✓ запропоновано модифікації методів локальної оптимізації: методу можливих напрямків Зонтендейка, в якому застосовуються нова стратегія активних обмежень, що дозволяє поліпшити збіжність; методу оптимізації за групами змінних, в якому використовується спеціальний вибір груп змінних; комбінацію методу оптимізації за групами змінних та методу множників Лагранжа, яка дозволяє отримувати наближення до локального екстремуму завдяки розв'язанню систем нелінійних рівнянь у явному вигляді.

✓ запропоновано методи, які дозволяють знаходити наближення до глобальних екстремумів в задачі HSOA: модифікації методу околів, що звужуються; метод гомотетичних перетворень об'єктів; метод спрямованого перебору локальних екстремумів; модифікацію методу гілок та меж. Модифікації методу околів, що звужуються, дозволяють розв'язувати задачі ODP для рівних і нерівних куль. Метод гомотетичних перетворень гіперкуль призначений для розв'язання задачі PPP. Метод спрямованого перебору реалізує плавний перехід від одного екстремуму до іншого в задачі ODP для нерівних гіперкуль. Метод гілок та меж використовується для розв'язання

задачі розміщення нерівних гіперкуль, сформульованої як задача КР. Метод мультистарту (багаторазового запуску) дозволяє поліпшити якість розв'язків.

✓ створено відповідне програмне забезпечення, яке реалізує розроблені методи розв'язання задач HSOA із застосуванням сучасних розв'язувачів для задач лінійного та нелінійного програмування HOPDM, BPMPD, IPOPT, GAMS/BARON;

✓ ефективність отриманих результатів підтверджено порівнянням з кращими світовими аналогами для різних реалізацій задачі HSOA, опублікованими в високореєтингових міжнародних журналах та на сайті <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/cci.html>. Розв'язання тестових прикладів показало, що для більшості з них отримано поліпшення значень функції цілі;

✓ наведено приклади розв'язання практичних задач, які виникають в матеріалознавстві, ядерній енергетиці, порошковій металургії, адитивних технологіях, хімічній промисловості.

Програмне забезпечення використано при виконанні Договору № 338-28/270/21-2008 від 11.02.2008 р. "Розробка програми для імітаційного моделювання процесу властивостей сплаву в залежності від розмірів гранул" між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та ВО "Знамена", м. Полтава. Розроблені програми застосовуються на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету «Львівська політехніка» для розв'язання задачі оптимального заповнення заданого об'єму частинками сферичної форми. Результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі в Харківському національному університеті радіоелектроніки (Додаток В).

Отримані результати є теоретичною і практичною основою для побудови імітаційних моделей, інтелектуальних систем прийняття рішень, які пов'язані з оптимальним розміщенням об'єктів сферичної форми, подальшим

розвитком теорії математичного моделювання і обчислювальних методів в геометричному проектуванні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped. *Intelligent Decision Support* : book / Bortfeldt A. et al. (eds). Gabler, Germany, 2008. P. 47–67.
2. Стоян Ю. Г., Лазарева И. Е., Яськов Г. Н. Метод поиска локального минимума в задаче упаковки разных шаров в прямой цилиндр. *Доповіди НАН України*. 2000. № 6. С. 104–109.
3. Stoyan Y., Scheithauer G., Yaskov G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 11. Iss 4. 2003. P. 389–407.
4. Stoyan Y., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
5. Романова Т. Е., Гребенник И. В., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Упаковка шаров в параллелепипеде с учетом погрешностей. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 119–129.
6. Yaskov G. N. Mathematical model of problem of packing identical spheres into a cylindrical container. *Системи управління, навігації та зв'язку*: зб. наук. праць. К. : Центр. н.-д. ін.-т навігації і управління. 2007. Вип. 4. С. 128–130.
7. Yaskov G. N. Random packing of identical spheres into a cylindrical container *Системи обробки інформації*: зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2008. №. 1 (68). С. 128–130.
8. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки интервальных кругов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2008. № 1/4. Вип. 31. С. 25–29.
9. Yaskov G. N. Packing spheres into a parallelepiped by means of the decremental neighbourhood method. *Біоніка інтелекту*. 2008. № 1 (68). С. 84–86.

10. Яськов Г. Н. Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 43–49.
11. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2010. № 7(48). С. 95–98.
12. Яськов Г. Н. Метод решения задачи размещения разных кругов с выбором перспективных начальных точек. зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2010. Вип. 3. С. 119–122.
13. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*. 2010. Vol. 17. No. 1. P. 51–70.
14. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область. *Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжвід. наук.-техн. зб.* К.: Київ. нац. ун-т буд-ва і арх. 2010. Вип. 85. С. 306–312.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. Iss. 4. P. 855–868.
16. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. Iss. 10. P. 1355–1369.
17. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. *Системи обробки інформації*. 2012. Вип. 7(105). С. 150–157.
18. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді НАН України*. 2013. № 5. С. 44–50.
19. Яськов Г. Н. Размещение максимального числа равных кругов в круге. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 2. С. 60–67.
20. Яськов Г. Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 4(111). С. 97–100.

21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20(1). P. 79–99.
22. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. Vol. 8. Iss. 3. P. 949–970.
23. Yaskov G. N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблеми машиностроєння*. Харків. 2014. Т. 17. № 2. С. 48–53.
24. Stoyan Yu. G, Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 419–426.
25. Khlud O. M., Yaskov G N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No. 6. Iss. 46. P. 131–135.
26. Yaskov G. Methodology to solve multi-dimentional sphere packing problems. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 67–85.
27. Yaskov G., Shekhovtsov S. Methodological basis of solving sphere packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Advanced Information Systems*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 54-57.
28. Стоян Ю. Г., Яськов Г. М., Евсеева Л. Г. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплава". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 27362. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 23.01.2009.
29. Яськов Г. М., Чугай А. М. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 50773. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 19.08.2013.
30. Stoyan Yu. G., Gil N. I., Romanova T. E., Pankratov A. V., Yaskov G. N., Pridatko D. I. Mathematical Models and Methods for Optimization Placement Problems. *Communication and Control Technologies CCCT'03* : Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Orlando, Florida, USA, 2003. P. 383–389.

31. Stoyan Y., Yaskov G. Packing various spheres into parallelepiped. Proc. of the *1st ESICUP Meeting*, Lutherstadt Wittenberg, Germany, 2004. P. 29.
32. Stoyan Yu., Chugay A., Yaskov G. Packing a great number of identical spheres into a composed domain. Proc. of the *2nd ESICUP Meeting*, University of Southampton, UK, 2005. P. 24.
33. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. Proc. of the *Workshop on Cutting Stock Problems WSCSP2005*, Sapientia University of Miercurea-Ciuc, Romania, 2006. P.75–82.
34. Яськов Г. Н. Комбинированный метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики АППММ'06* : тез. докл. междунар. конф. Харьков: ИПМАШ НАНУ, НТУ "ХПИ", ХНУРЭ, НАУ "ХАИ", 2006. С. 46.
35. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. Proc. of the *5th ESICUP Meeting*, L'Aquila, Italy, 2008. P. 24.
36. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing problems of congruent circles into a circle and congruent spheres into a circular cylinder. Proc. of the 6th ESICUP Meeting, Valencia, Spain, 2009. P. 22.
37. Yaskov G. N. Packing a maximal number of congruent hyperspheres into a hypersphere. *Інформатика і системні науки ICH-2010* : матеріали всеукр. наук.-практ. конф. Полтав. ун-т споживчої кооперації, Полтава, 2010. С. 210–212.
38. Yaskov G. N. A method of packing congruent circles into a circle with circular prohibited areas. *Інформаційно-комп'ютерні технології 2010* : матеріали V міжнар. наук.-техн. конф. Житомир, 2010. С. 9–11.
39. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Интервальное моделирование свойств сплава. *Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010* : матеріали четвертої міжнар. наук.-техн. конф. Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава, 2010. С. 39.

40. Чугай А. М., Яськов Г. Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2011* : тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. національний університет ім. О. Гончара, Дніпро, 2011. С. 281.
41. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral container. Proc. of the *8th ESICUP Meeting*, Copenhagen, Denmark, 2011. P. 23.
42. Яськов Г. Н. Упаковка неравных кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 3-й междунар. конф., Кишинэу, Молдова, 2012. С. 562.
43. Stoyan Yu., Yaskov G. A local optimization switch algorithm for packing non-identical circles. Proc. of the *25th European conference on operational research*, Vilnius, Lithuania. 2012. P. 49.
44. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромисса в геометрическом проектировании. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012*: тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 78–79.
45. Яськов Г. Н. Особенности математической модели задачи упаковки неравных кругов с переменными метрическими характеристиками *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012* : тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 334–335.
46. Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G. Packing non-equal spheres into containers of different shapes. Dresden : Technische Univesität, 2013. 25 p. (Preprint. Technische Univesität Dresden, Germany; MATH-NM-07-2013).

47. Yaskov G. N. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral domain. *Питання оптимізації обчислень ПОО-XL* : тез. доп. міжнар. наук. конф. смт. Кацивелі, Крим, 2013. С. 291.
48. Яськов Г. Н. Упаковка гипершаров в гипершаре минимального радиуса. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2013* : тез. доп. XI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2013. С. 272–273.
49. Яськов Г. Н. Упаковка шаров в цилиндрическом слое. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 4-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2014. Т. II. Р. 512–519.
50. Субота І. О., Хлуд О. М., Яськов Г. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС-2015* : тез. доп. XXI всеукраїнської наукової конференції, Львів, 2015. С. 302–303.
51. Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. A mathematical model of optimal packing of unequal spheres into a sphere. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2015* : тез. доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2015. С. 226–227.
52. Stoyan Yu., Scheithauer G., Yaskov G. Packing unequal spheres into 3D containers. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. I. С. 327–328.
53. Яськов Г. Н. Математическая модель оптимальной упаковки неравных кругов в многоугольнике. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. II. Р. 349–354.
54. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения ориентированных эллипсоидов в многогранной области. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи AIIS'2016* : тез. доп. XVI міжнар. наук.-техн. конф. К., Україна, 2016. С. 55–56.

55. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения кругов и ориентированных эллипсов в многосвязной области. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2016* : тез. доп. XIV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2016. С. 226–227.
56. Яськов Г. Н. Дерево решений для задачи размещения неравных шаров в шаре заданного радиуса. *Інформаційні системи і технології ICT-2017* : тез. доп. 6-ої міжнар. наук.-техн. конф. м. Коблеве, Миколаїв. Обл., 2017. С. 143–144.
57. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing spheres into a larger sphere with the jump algorithm. *Proc. of the 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017*, Sofia, Bulgaria, 2017. P. 254–260.
58. Romanova T., Pankratov A., Yaskov G., Scheithauer G. Packing ellipses in a disconnected polygonal domain. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2017* : тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2017. С. 167–168.
59. Yaskov G. N. A mathematical model of packing unequal spheres into a multiconnected container. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : тез. доп. міжнар. наук. конф. Рівне, 2018. С. 25–26.
60. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Применение jump-алгоритма для задач упаковки неравных шаров в контейнере заданных размеров. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 6-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2018. С. 171–173.
61. Yaskov G. N. Packing unequal spheres into a multiconnected set. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тез. доп. I міжнар. наук.-техн. конф. Х., 2018. С. 78–79.

62. Yaskov G., Romanova T., Pankratov A. Optimization packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2018*: тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2018. С. 233–234.
63. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы решения, исследования : монография. Киев : Наук. думка. 2003. 264 с.
64. Сергієнко І. В. Інформатика та комп'ютерні технології : монографія. Київ : Наук. думка. 2004. 432 с.
65. Сергієнко І. В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності : монографія. Київ : Академперіодика. 2010. 296 с.
66. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами : монография. Киев : Наук. думка 1998. 500с.
67. Lyashko S. I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters : book. Dordrecht, Boston, London. Kluwer Academic Publishers, 2002. 455 p.
68. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів : монографія / Грицик В.В. та ін. Донецьк: ІПП "Наука і освіта". 2011. 480 с.
69. Шевченко А. И. Актуальные проблемы теории искусственного интеллекта : монография. Київ : ІППШ "Наука і освіта". 2003. 228 с.
70. Базилевич Р. П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств : монография. Львов : Вища школа. 1981. 168 с.
71. Базилевич Р. П. Визначення ефективності перенесення кластера в задачах декомпозиції. *Вісник НУ "Львівська політехніка"*. № 433. Львів. 2001. С. 124–127.

72. Бидюк П. И., Касицкий А. В. Анализ сходимости метода оптимизации Розенброка. *Системы технологии*. 2011. № 3. С. 51–60.
73. Бидюк П. И., Демківський Є. О., Бидюк О. П. Аналіз даних з використанням байєсівських моделей. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. 2012. № 1. С. 40–54.
74. Бидюк П. И., Гончарова М. В., Касицкий А. В. Анализ производительности ЭВМ при многопоточной реализации вычислений. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2011. № 3. С. 35–43.
75. Крак Ю. В. Оптимізація обчислень при побудові рівнянь руху маніпуляційних роботів. *Доповіді АН УРСР*. Сер. А. 1988. № 9. С. 72–76.
76. Крак Ю. В. Оптимізаційні постановки та методи в задачах дослідження маніпуляційних систем. *Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки*. 2000. № 2. С. 56–62.
77. Стецюк П. И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141–146.
78. Шор Н. З., Журбенко Н. Г., Лиховид А. П., Стецюк П. И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 4. С. 80–94.
79. Shor N. Z., Stetsyuk P. I. Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems. *Journal of Global Optimization*. 2002. Vol. 23. P. 1–41.
80. Киселёва Е. М., Шор Н. З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : монография. Киев : Наук. Думка, 2005. 564 с.
81. Kiseleva E. M., Stepanchuk T. On the Efficiency of a Global Non-differentiable Optimization Algorithm Based on the Method of Optimal Set Partitioning. *Journal of Global Optimization*. 2003. V. 25. P. 209–235.
82. Шило В. П., Шило О. В. Решение задачи о максимальном разрезе графа методом глобального равновесного поиска. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5. С. 68–79.

83. Шило В. П., Рощин В. А., Градинар И. П. Приближённое решение задачи нахождения максимального ρ -плотного множества вершин графа. *Компьютерная математика*. Киев, 2011. С. 157–164.
84. Гуляницкий Л., Сиренко И. Кооперативные модели-ориентированные метаэвристики для задач комбинаторной оптимизации. *Intelligent Support of Decision Making* (Eds. Krassimir Markov et al.) Int. Book Series "Information science and computing". Sofia : ITHEA, 2009. P. 165–172.
85. Hulianytskyi L. F., Sirenko S. I. Cooperative model-based metaheuristics. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2010. Vol. 36. P. 33-40.
86. Hulianytskyi L., Sokol V. Effective energy recomputation for low autocorrelation binary sequence problem. *Information Theories and Applications*. 2011. Vol. 18. No. 4. P. 344-357.
87. Канторович Л. В. Производственно-технический бюллетень Наркомата боеприпасов СССР (ДСП). 1942. № 7/8. С. 21–29.
88. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов : монография. Ленинград : Лениздат, 1951. 198 с.
89. Рвачев В. Л., Стоян Ю. Г. К задаче об оптимальном размещении круговых выкроек. *Кибернетика*. 1965. № 4. С. 70–75.
90. Рвачев В. Л., Стоян Ю. Г. Алгоритмы решения задачи оптимального раскроя кругами с учетом расстояний между парами кругов. *Кибернетика*. 1965. № 3. С. 77–83.
91. Стоян Ю. Г., Черепашин В. М. Об одном способе рационального размещения кругов в полосе. Прикладная математика и кибернетика: тр. всесоюзн. межвузов. симпозиума. Горький, 1967. С. 176.
92. Рвачев В. Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. *Докл. АН Украины*. 1963. № 4. С. 765–767.
93. Рвачев В. Л. Теория R-функции и некоторые ее приложения : монография. Киев : Наук. думка, 1982. 552 с.

94. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов : монография. Киев : Наук. думка, 1975. 240 с.
95. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов : монография. Киев : Наук. думка, 1976. 247 с.
96. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Свойства и способы реализации функции плотного размещения. Киев : Ин-т кибернетики АН Украины, 1972. 45 с. (Препринт. АН Украины, Ин-т кибернетики; 72-18).
97. Гиль Н. И., Ещенко В. Г, Комяк В. М. Построение с помощью ЭВМ рациональных планов раскроя материалов фигурными заготовками. Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении. Москва : ВНИИСИ, 1981. С. 227–231.
98. Комяк В. М. Оптимизация размещения плоских геометрических объектов в областях сложной формы : автореф. дисс. ... канд. техн. наук : 05.13.01. Харьков, 1980. 24 с.
99. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Метод асимптотического перебора локальных экстремумов. Харьков : Ин-т пробл. Машиностроения АН Украины, 1974. 48 с. (Препринт. АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; 1).
100. Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей : монография. Киев : Наук. думка, 1980. 205 с.
101. Пономаренко Л. Д., Макмак П. М. Новые подходы к минимизации на перестановках при упаковке геометрических объектов. *Вычислительная техника в машиностроении*. 1980. № 8. С.8–14.
102. Стоян Ю. Г. Об одном обобщении функции плотного размещения. *Докл. АН Украины*. Сер.А. 1980. № 8. С.71–74.
103. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования : монография. Киев : Наук. думка, 1986. 267 с.

104. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Чернов Н. И., Панкратов А. В. Полный класс Φ -функций для базовых объектов. *Доп. НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.
105. Scheithauer G., Stoyan Yu. G., Romanova T. Ye. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41. Iss. 3. P. 332–342.
106. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Optimized Packings with Applications*. Fasano G., Pintér J. (eds). Springer Optimization and Its Applications. Springer, Cham, 2015. Vol 105. P. 265–293.
107. Stoyan Y. G, Chugay A. M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. Vol. 2014. Article ID 571743, P. 1-19. DOI : <http://dx.doi.org/10.1155/2014/571743> .
108. Pankratov A. V., Romanova T. E., Chugay A. M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. *Проблеми машиностроєння*. Харків, 2015. Т. 18. № 2. P. 55–65.
109. Waescher G., Haussner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130.
110. Al-Mudahka I., Hifi M., M'Hallah R. Packing circles in the smallest circle: an adaptive hybrid algorithm. *Journal of the Operational Research Society*. 2011. Vol. 62. Iss. 11. P. 1917–1930.
111. Fukshansky L. On similarity classes of well-rounded sublattices of $\mathbb{Z}^2$. *J Number Theory*. Vol. 129. P. 2530–2556.
112. Huang X., Shen L. On the convergence of circle packings to the quasiconformal map. *Acta Math Sci*. 2009. Vol. 29. P. 1173–1181.
113. Huang X., Liu J., Shen L. Schwarz's lemma for the circle packings with the general combinatorics. *Sci CHINA Math*. 2010. Vol. 53. P. 275–288.

114. Butler S., Graham R., Guettler G., Mallows C. Irreducible Apollonian Configurations and Packings. *Discrete Comput Geom*. 2010. Vol. 44. P. 487–507.
115. Ishizaka K. New spatial measure for dispersed dot halftoning assuring good point distribution in any density. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2009. Vol. 18. Iss. 9. P. 2030–2047.
116. Yang Y. L., Guo R., Luo F., Hu S. M., Gu X. Generalized discrete Ricci flow. *Comput Graph Forum*. 2009. Vol. 28. P. 2005–2014.
117. Li W., Sun T. Silica artificial opal incorporated with silver nanoparticles. *Mater Chem Phys*. 2009. Vol. 116. P. 164–168.
118. Barclay D. R., Buckingham M. J. On the shapes of natural sand grains. *J Geophys Res B: Solid Earth*. 2009. Vol. 114. Iss. B2. P. 1-12. DOI: <https://doi.org/10.1029/2008JB005993>
119. Moore A. The circle tree – a hierarchical structure for efficient storage, access and multi-scale representation of spatial data. Proc. of SIRC 2002, Dunedin, New Zealand, 2002. P. 1-8.
120. Longuet-Higgins M. S. Snub polyhedra and organic growth. Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society : UK, 2009. Vol. 456. P 477–491.
121. Sugihara K., Sawai M., Sano H., Kim D.S., Kim D. Disk packing for the estimation of the size of a wire bundle. *Jpn J Indust Appl Math*. 2004. Vol. 21. P. 259–278.
122. Dowsland K.A., Gilbert M., Kendall G. A local search approach to a circle cutting problem arising in the motor cycle industry. *J Opl Res Soc*. 2007. Vol. 58. P. 429–438.
123. Cui Y., Xu D. Strips minimization in two-dimensional cutting stock of circular items. *Comput Opns Res*. 2010. Vol. 37. P. 621–629.

124. Fakoor M., Zadeh P.M., Eskandari H.M. Developing an optimal layout design of a satellite system by considering natural frequency and attitude control constraints. *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 71. P. 172–188.
125. Chen X., Yao W., Zhao Y., Zheng X. A practical satellite layout optimization design approach based on enhanced finite-circle method. *Struct Multidisc Optim*. 2018. Vol. 58. Iss. 6. P. 2635-2653.
126. Wang Y. S., Teng H. F., Shi Y. J. Cooperative coevolutionary scatter search for satellite module layout design. *Eng Comput*. 2009. Vol. 26. P. 761–785.
127. Liu J., Hao L., Li G., Xue Y., Liu Z., Huang J. Multi-objective layout optimization of a satellite module using the Wang-Landau sampling method with local search. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*. 2016. Vol. 17. Iss. 6. P. 527–542.
128. Giachetti R.E., Sanchez J.C. A model to design recreational boat mooring fields. *Nav Res Log*. 2009. Vol. 56. P. 158–174.
129. Zhang W., Zhang Q. Finite circle method for component approximation and packing design optimization. *Eng Optimiz*. 2009. Vol. 41. P. 971–987.
130. Lazarus S. B., Tsourdos A., White B. A., Zbikowski R., Silson P. Cooperative UAVs mapping complex environment using 2D splinegon. Proc. of the International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Institute for Systems and Technologies of Information, Control and Communication, Portugal, 2009. P. 413–416
131. Lazos L., Poovendran R., Ritcey J. A. Detection of mobile targets on the plane and in space using heterogeneous sensor networks. *Wirel Netw*. 2009. Vol. 15. P. 667–690.
132. Collins C.R., Stephenson K. A circle packing algorithm. *Comput Geom*. 2003. Vol. 25. P. 233–256.
133. Appelbaum J., Weiss Y. The packing of circles on a hemisphere. *Meas Sci Technol*. 1999. Vol. 10. P. 1015–1019.

134. Szabo P. G., Markot M. C., Csendes T., Specht E., Casado L. G., Garcya I. New approaches to circle packing in a square: With program codes. *Springer Optimization and Its Applications*. Vol. 6. Springer: New York, NY, USA, 2007. 238 p.
135. Tóth L. F. Regular Figures. Pergamon : London, 1964. 339 p.
136. Tu Y. S., Juang W. T. The payoff region of a strategic game and its extreme points. *Computer Science and Game Theory*. 2018. P. 1-15. URL: <https://arxiv.org/pdf/1705.01454v3.pdf>
137. George J. A., George J. M., Lamar B. W. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*. 1995. Vol. 84. Iss. 3. P. 693–712.
138. Hifi M., Paschos V. T., Zissimopoulos V. A simulated annealing approach for the circular cutting problem. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 159. Iss. 2. P. 430–448.
139. Huang W. Q., Li Y., Akeb H., Li C. M. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container. *J. Oper. Res. Soc.* 2005. Vol. 56. Iss. 5. P. 539–548.
140. Akeb H., Hifi M. Algorithms for the circular two-dimensional open dimension problem. *Int. Trans. Oper. Res.* 2008. Vol. 15. Iss. 6. P. 685–704.
141. Kubach T., Bortfeldt A., Gehring H. Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle. *Central Eur. J. Oper. Res.* 2009. Vol. 17. Iss. 4. P. 461–477.
142. Руднев А. С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу. *Дискретн. анализ и исслед. опер.* 2009. Т. 16. № 4. С. 61–86.
143. Kallrath J., Frey M.M. Packing circles into perimeter-minimizing convex hulls. *Journal of Global Optimization*, 2019. Vol. 73. Iss. 4. P. 723-759. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0724-0>.

144. Litvinchev I., Infante L., Espinosa E. L. O. Approximate circle packing in a rectangular container: integer programming formulations and valid inequalities. In González-Ramírez R. G., Schulte F., Voß S., Díaz J. A. C., (eds) Computational Logistics. ICCL 2014. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8760. Springer, 2014. P. 47–60, DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-11421-7_4.
145. He Y., Wu Y. Packing non-identical circles within a rectangle with open length. *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 56. Iss. 3. P. 1187–1215.
146. Castillo I., Kampas F.J., Pintér J.D. Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications. *European Journal of Operational Research*. 2008. Vol. 191. Iss. 3. P. 786–802.
147. Kravitz S. Packing cylinders into cylindrical containers. *Math. Mag.* 1967. Vol. 40. P. 65–71.
148. Graham R.L. Sets of points with given minimum separation (Solution to Problem E1921). *Amer. Math. Monthly*. 1968. Vol. 75. P. 192–193.
149. Pirl U. Der Mindestabstand von n in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten. *Math. Nachr.* 1969. Vol. 40. P. 111–124.
150. Goldberg M. Packing of 14, 16, 17 and 20 circles in a circle. *Math. Mag.* 1971. Vol. 44. P. 134–139.
151. Reis G. E. Dense packing of equal circles within a circle. *Math. Mag.* 1975. Vol. 48. P. 33–37.
152. Graham R. L., Lubachevsky B. D., Nurmela K. J., Ostergard P. R. J. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Mathematics*. 1998. Vol. 181. P. 139–154.
153. Locatelli M., Raber U. Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach. *Discrete Applied Mathematics*. 2002. Vol. 122. Iss. 1–3. P. 139–166.

154. Akeb H., Li Y. Basic heuristics for packing a large number of equal circles. Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie JulesVerne, 2005. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi:10.1.1.106.6590>.
155. Mladenović N., Plastria F., Urošević D. Formulation space search for circle packing problems. *Lect. Notes Comput. Sci.* 2007. Vol. 4638. P. 212–216.
156. López C. O., Beasley J. E. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers. *Eur. J. Oper. Res.* 2011. Vol. 214. Iss. 3. P. 512–525.
157. Birgin E. G., Gentil J. M. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips. *Comput. Oper. Res.* 2010. Vol. 37. Iss. 7. P. 1318–1327.
158. Birgin E.G., Sobral F.N.C. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems, *Comput. Oper. Res.* 2008.Vol 35. Iss. 7. P 2357–2375.
159. Liu J., Yao Y., Zheng Y., Geng H., Zhou G. An effective hybrid algorithm for the circles and spheres packing problems. *Combin. Optim. Appl.* 2009. Vol. 5573. P. 135–144.
160. Grosso A., Jamali A. R. M. J. U., Locatelli M., Schoen F. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. *J. Global Optim.* 2010. Vol. 47. Iss. 1. P. 63–81.
161. WenQi H., Tao Y. E. Quasi-physical global optimization method for solving the equal circle packing problem. *Sci. China.* 2011. Vol. 54. Iss. 7. P. 1333–1339.
162. Fu Z., Huang W., Lu Z. Iterated tabu search for the circular open dimension problem. *European Journal of Operational Research.* 2013. Vol. 225. Iss. 2. P. 236–243.
163. Specht E. The best known solutions of the circular open dimension problem (CODP). Otto-von Guericke-University of Magdeburg, Germany. 2012. URL: <http://www.packomania.com/cst/>.

164. Hifi M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies. *Adv. Oper. Res.* 2009. Vol. 2009. DOI: <https://doi.org/doi:10.1155/2009/150624>.
165. Bernal J. D. A Geometrical Approach to the Structure of Liquids. *Nature*. 1959. Vol. 183. P. 141–147.
166. Burtseva L., Valdez Salas B., Werner F., Petranovskii V. Packing of monosized spheres in a cylindrical container: models and approaches. *Rev. Mex. Fis.* 2015. Vol. 61. No. 1. P. 20–27.
167. Masalov V. M., Sukhinina N. S., Kudrenko E. A., Emelchenko G. A. Mechanism of formation and nanostructure of Stöber silica particles. *Nanotechnology*. Vol. 22. Iss. 27. P. 275718.
168. Abreu C R. A., Macias-Salinas R., Tavares F. W., Castier M. A Monte Carlo simulation of the packing and segregation of spheres in cylinders. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*. 1999. Vol. 16. Iss. 4. P. 395–405. DOI: <https://dx.doi.org/10.1590/S0104-66321999000400008>.
169. Gan Y., Kamlah M, Reiman J. Computer Simulation of Packing Structure in Pebble Beds. *Fusion Engineering and Design*. 2010. Vol. 85. Iss. 10-12. P. 1782–1787.
170. Frenkel D. Computer simulation of hard-core models for liquid crystals. *Computer Physics Communications*. 1987. Vol. 44, Iss. 3. P. 243–253.
171. Lal P., Sun W. Computer modeling approach for microsphere-packed bone scaffold. *Computer-Aided Design*. 2004. Vol. 36. Iss. 5. P. 487–497.
172. Schwidder S., Schnitzlein K. Predicting the static liquid holdup for cylindrical packings of spheres in terms of the local structure of the packed bed. *Chemical Engineering Science*. 2010. Vol. 65, Iss. 23. P. 6181–6189,
173. Aristoff D., Radin C. Random close packing in a granular model. *J. Math. Phys.* 2010. Vol. 51. P. 113302.

174. Umbanhowar P., Goldman D. I. Granular impact and the critical packing state. *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 82. Iss. 1. P. 010301.
175. Tan Y., Yang D., Sheng Y. Discrete element method (DEM) modeling of fracture and damage in the machining process of polycrystalline SiC. *Journal of the European Ceramic Society*. 2009. Vol. 29. Iss. 6. P. 1029–1037.
176. Radin C. Random close packing of granular matter. *Journal of Statistical Physics*. 2008. Vol. 131. Iss. 4. P. 567–573.
177. Banhart J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Progress in Materials Science*. 2001. Vol. 46. Iss. 6. P. 559–632.
178. Wang Z., Gao J., Chang, K. ,Meng L., Zhanga N., Guoa Z. Manufacturing of open-cell aluminum foams via infiltration casting in super-gravity fields and mechanical properties. *RSC Adv.*, 2018. Vol. 8. P. 15933–15939.
179. Bowen L., Lyons R., Radin C., Winkler P. A solidification phenomenon in random packings. *SIAM J. Math. Anal.* 2006. Vol. 38. No. 4. P. 1075–1089.
180. Vandewalle N., Lumay G., Ludewig F., Fiscina J. E. How relative humidity affects random packing experiments. *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85. Iss. 3. P. 031309.
181. Sollich P., Wilding N. B. Crystalline phases of polydisperse spheres. *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vo. 104. Vol. 11. P. 118302.
182. Yamada S., Kanno J., Miyauchi M. Multi-sized sphere packing in containers. Optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres. *IP SJ Online Transactions*. 2011. Vol. 4. P. 126–133.
183. Titscher T., Unger J. F. Application of molecular dynamics simulations for the generation of dense concrete mesoscale geometries. *Computers & Structures*. 2015. Vol. 158. P. 274–284.

184. Gavrilouk E. O. Unequal sphere packing problem in the context of stereotactic radiosurgery :book. Shaker Verlag GmbH, Germany. 2007. 94 p.
185. Wang J. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning. *Journal of Combinatorial Optimization*. 2010. No. 3. P. 160–168.
186. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy : mathematical models and methods of solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Vol. 2015. Article ID 142987. P. 1–8. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/142987>.
187. Chen D. Z., Xu J. Sphere packing and medical applications. *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*. T. F. Gonzalez (eds), Taylor & Francis Books, New York. 2007. P. 78.1–78.14.
188. Широканев А. С., Кирш Д. В., Ильясова Н. Ю. Куприянов А. В. Исследование алгоритмов расстановки коагулятов на изображение глазного дна. *Компьютерная оптика*. 2018. Т. 42. № 4. С. 712–721. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-4-712-721>.
189. Hales T. C. A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*. 2005. Vol. 162. Iss. 3. P. 1065–1185. DOI: <https://doi.org/10.4007/annals.2005.162.1065>.
190. Rankin R. A. The closest packing of spherical caps in n -dimensions. *Glasgow Mathematical Journal*. 1955. Vol. 2. P. 139–144.
191. Rogers C. A. The packing of equal spheres. *Proc. London Math. Soc.* 1958. Vol. s3-8. Iss. 4. P. 609–620.
192. Scott G. D., Kilgour D. M. The density of random close packing of spheres *Journal of Physics D : Applied Physics*. 1969. Vol. 2. Iss. 6. P. 863–866.
193. Onoda G. Y., Liniger E. G. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. Iss. 22. P. 2727–2730.
194. Tingate G. A. Some geometrical properties of packings of equal spheres in cylindrical vessels. *Nuclear Engineering and Design*. 1973. Vol. 24, Iss. 2. P. 153–179,

195. Rocke F. A. The cylindrically ordered packing of equal spheres. *Powder Technology*. 1971. Vol. 4. Iss. 4. P. 180–186.
196. Mueller G. E. Radial void fraction distributions in randomly packed fixed beds of uniformly sized spheres in cylindrical containers. *Powder Technology*. 1992. Vol. 72. Iss. 3. P. 269–275.
197. Mueller G. E. Radial porosity in packed beds of spheres. *Powder Technology*. 2010. Vol. 203. Iss. 5. P. 626–633.
198. Stanek V., Eckert V. A study of the area porosity profiles in a bed of equal-diameter spheres confined by a plane. *Chem. Eng. Sci.* 1979. Vol. 34. P. 933–940.
199. . Nolan G. T., Kavanagh G. T. The size distribution of interstices in random packings of spheres. *Powder Technology*. 1994. Vol. 78. Iss. 3. P. 231–238.
200. Mueller G. E. Numerical simulation of packed beds with monosized spheres in cylindrical containers. *Powder Technology*. 1997. Vol. 92. Iss. 2. P. 179–183.
201. Mueller G. E. Numerically packing spheres in cylinders. *Powder Technology*. 2005. Vol. 159. Iss. 2. P. 105–110.
202. Owe Berg T. G., McDonald R. L., Trainor jr. R. J. The packing of spheres. *Powder Technology*. 1969. Vol. 3. Iss. 1. P. 183–188.
203. Li E. K. H., Funkenbusch R. D. Experimental size ratio and compositional effects on the packing and hot isostatic pressing of spherical powders. *Materials Science and Engineering*. 1992. Vol. A157. P. 217–224.
204. Widom B. Random sequential addition of hard spheres to a volume. *J. Chem. Phys.* 1966. Vol. 44. P. 3888–3894.
205. Wensrich C. M. Boundary structure in dense random packing of monosize spherical particles. *Powder Technology*. Vol. 219. P. 118–127.
206. Roozbahani M. M., Huat B. B. K., Asadi A. Effect of rectangular container's sides on porosity for equal-sized sphere packing. *Powder Technology*. 2012. Vol. 224. P. 46–50.

207. Magnico P. Hydrodynamic and transport properties of packed beds in small tube-to-sphere diameter ratio: pore scale simulation using an Eulerian and a Lagrangian approach. *Chemical Engineering Science*. 2003. Vol. 58. P. 5005–5024
208. Jullien R., Pavlovitch A., Meakin P. Random packings of spheres built with sequential models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1992. Vol. 25. P. 4103–4113.
209. Stillinger F. H., Lubachevsky B. D. Crystalline-amorphous interface packings for disks and spheres. *J Stat Phys*. 1993. Vol. 73. Iss. 3-4. P. 497–514.
210. Baranau V., Tallarek U. Random-close packing limits for monodisperse and polydisperse hard spheres. *Soft Matter*. 2014. Vol. 10. Iss. 21. P. 3826–3841.
211. Hitti K., Bernacki M. Optimized Dropping and Rolling (ODR) method for packing of poly-disperse spheres. *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37. No. 8. P. 5715–5722.
212. Liu G., Thompson K. E. Influence of computational domain boundaries on internal structure in low-porosity sphere packings. *Powder Technology*. 2000. Vol. 113. Iss. 1-2. P. 185–196.
213. Shi Y., Zhang Y. Simulation of random packing of spherical particles with different size distributions. *ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition : proc. of ASME 2006, Chicago, USA, 2006*. P. 539–544.
214. Visscher W. M., Bolsterli M. Random packing of equal and unequal spheres in two and three dimensions. *Nature*. 1972. Vol. 239. P. 504–507.
215. He D., Ekere N. N., Cai L. Computer simulation of random packing of unequal particles. *Physical Review E*. 1999. Vol. 60. No. 6. P. 7098–7104.
216. Lochmann K., Oger L., Stoyan D. Statistical analysis of random sphere packings with variable radius distribution. *Solid State Sciences*. 2006. Vol. 8. No. 12. P. 1397–1413.

217. Yang R. Y., Zou R. P., Yu A. B., Choi S. K. 'Pore structure of the packing of fine particles. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2006. Vol. 299. No. 2. P. 719–725.
218. Lubachevsky B., Stillinger F. Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics*. 1990. Vol. 60. No. 5-6. P. 561–583.
219. Bagi K. A quasi-static numerical model for micro-level analysis of granular assemblies. *Mechanics of Materials*. 1993. Vol. 16. No. 1-2. P. 101–110.
220. Han K., Feng Y. T., Owen D. R. J. Sphere packing with a geometric based compression algorithm. *Powder Technology*. 2005. Vol. 155. Iss. 1. P. 33–41.
221. Kansal A. R., Torquato S., Stillinger F. H. Computer generation of dense polydisperse sphere packings. *J. Chem. Phys.* 2002. Vol. 117. P. 8212–8218.
222. Sutou A., Dai Y. Global optimization approach to unequal global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3D. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2002. Vol. 114. No. 3. P. 671–694.
223. Ostergard P. R. J. Book review. *Computers & Operations Research*. 2008. Vol. 36. P. 276–278.
224. Mladenovic N., Plastria F., Urosevic D. Reformulation descent applied to circle packing problems. *Computers & Operations Research*. 2005. Vol. 32. No. 9. P. 2419–2434.
225. Akeb H. A look-ahead-based heuristic for packing spheres into a bin : the knapsack case. *Procedia Computer Science: proc. of the International Conference on Communications, management, and Information technology ICCMIT 2015*. 2015. Vol. 65. P. 652–661.
226. Kubach T., Bortfeldt A., Tilli T., Gehring H. Greedy algorithms for packing unequal sphere into a cuboidal strip or a cuboid. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*. 2011. Vol. 28. P. 739–753.
227. Akeb H. A two-stage look-ahead heuristic for packing spheres into a three-dimensional bin of minimum length. *Recent Advances in Computational Optimization*. 2016. Vol. 610. P. 127–144.

228. Liu J., Song B., Liu Z., Huang W., Sun. Y., Liu W. Energy-landscape paving for prediction of face-centered-cubic hydrophobic-hydrophilic lattice model proteins. *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. Iss. 5. P. 052704.
229. Zeng Z. Z., Huang W. Q., Xu R. C., Fu Z. H. An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere. *Advanced Materials Research*. 2012. Vol. 546–547. P. 1464–1469.
230. Li Y., Ji W. Stability and convergence analysis of a dynamics-based collective method for random sphere packing. *Journal of Computational Physics*. 2013. Vol. 250. P. 373–387.
231. Farr R. S. Random close packing fractions of lognormal distributions of hard spheres. *Powder Technology*. 2013. Vol. 245. P. 28–34.
232. Soontrapa K., Chen Y. Mono-sized sphere packing algorithm development using optimized Monte Carlo technique. *Advanced Powder Technology*. Vol. 24. P. 955–961.
233. Hifi M., Yousef L. Handling lower bound and hill-climbing strategies for sphere packing problems. *Recent Advances in Computational Optimization. Studies in Computational Intelligence* : book / S. Fidanova (ed.). Springer, 2016. Vol. 610. P. 145–164.
234. Hifi M., Yousef L. A local search-based method for sphere packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2019. Vol. 274. Iss. 2. P. 482–500.
235. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance Layout Problems: Mathematical Modeling and Nonlinear Optimization. *Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications*. Fasano G., Pintér J. (eds). Springer Optimization and Its Applications. Springer, Cham, 2016. Vol. 114. P. 369–400.
236. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere packings, lattices and groups : book. New York : Springer-Verlag, 2010. 703 p.
237. Torquato S. Exactly solvable disordered sphere-packing model in arbitrary-dimensional Euclidean spaces. *Physical Review*. 2006. Vol. E73. P. 031106.

238. Skoge M., Donev A., Stillinger F. H., Torquato S. Packing hyperspheres in high-dimensional Euclidean spaces. *Physical Review*. 2006. Vol. E4. P. 041127.
239. Agapie S. C., Whitlock P. A. Random packing of hyperspheres and Marsaglia's parking lot test. *Monte Carlo Methods and Applications*. 2010. Vol. 16. Iss. 3-4. P. 197–209.
240. Torquato S. Perspective: basic understanding of condensed phases of matter via packing models. *Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 149. P. 020901. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5036657>.
241. Sloane N. J. A. The packing of spheres. *Scientific American*. 1984. Vol. 250. No. 1. P. 116–125.
242. Shannon C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 1948. Vol. 27. No. 3. P. 379–423.
243. Luban M., Michels J. P. J. Equation of state of hard D-dimensional hyperspheres. *Phys. Rev.* 1990. Vol. A41. Iss. 12. P. 6796–6804.
244. Torquato S. Random Heterogeneous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties : book. Springer-Verlag, New York, 2002. 703 p.
245. Bishop M., Whitlock P., Klein D. The equation of state of hard hyperspheres in four and five dimensions. *J. Chem. Phys.* 2005. Vol. 123. P. 014507.
246. Berryman J. G. Random close packing of hard spheres and disks. *Phys. Rev.* 1983. Vol. A27. Iss. 2. P. 1053–1061.
247. Torquato S., Stillinger F. H. Exactly solvable disordered sphere-packing model in arbitrary-dimensional Euclidean spaces. *Phys. Rev.* 2006. Vol. E73. Iss. 3. P. 031106.
248. Torquato S., Uche O. U., Stillinger F. H. Random sequential addition of hard spheres in high Euclidean dimensions. *Phys. Rev.* 2006. Vol. E74. P. 061308.
249. Jodrey W. S., Tory E. M. Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Phys. Rev.* 1985. Vol. A32. P. 2347–2351.
250. Fraser D. P. Setting up Random Configurations. *Information Quarterly for Computer Simulation of Condensed Phases*. 1985. Vol. 19. P. 53–59.

251. Maimbourg T., Sellitto M., Semerjian G., Zamponi F. Generating dense packings of hard spheres by soft interaction design. 2018. *SciPost Phys.* 2018. Vol. 4, P. 39. DOI: <https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.4.6.039>.
252. Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints. *Int. Trans. Opl Res.* 1998. Vol. 5. Iss. 1. P. 45–57.
253. Шмиголь В. Г. Математическое обеспечение локальной оптимизации задач геометрического проектирования: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.11. Харьков, 1991. 158 с.
254. Яковлев С. В. Метод искусственного расширения пространства в задачах размещения геометрических объектов. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 5. С. 82–89.
255. Коробчинский К. П., Яковлев С. В. Вычислительные аспекты метода искусственного расширения пространства в задачах размещения гомотетичных объектов. *Компьютерная математика.* Киев: Ин-т кибернетики НАН Украины. 2017. Вып. 2. С. 118–126.
256. Yakovlev S., Korobchinskiy K., Kartashov O. The method of artificial expansion of space in the optimal problem of balls. Proc. of 15th ESICUP Meeting, Zoetermeer, The Netherlands, 2018. P. 22.
257. Stoyan Y. G., Semkin V. V., Chugay A. M. Modeling close packing of 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52. Iss. 2. P. 296–304.
258. Чугай А. М. Математичне моделювання та методи розв'язання задач оптимальної упаковки тривимірних тіл: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 01.05.02. Харків, 2018. 51 с.
259. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pinter J. D., Stoian Y. E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications: part I. *Modeling and Optimization in Space Engineering.* Fasano G., Pinter J. (eds). Springer Optimization and Its Applications. Springer, Cham, 2019. Vol. 144. P. 395–437.

260. Новожилова М. В. Математичні моделі і методи розв'язання нелінійних задач розміщення геометричних об'єктів : автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.05.02. Харків, 1999. 35 с.
261. Гиль Н. И., Софронова М. С. Построение математической модели и решение задачи размещения выпуклых n -мерных политопов в n -мерном параллелепипеде. *Доповіді Національної Академії наук України*. 2006. № 8. С. 95–102.
262. Софронова М. С. Математичне моделювання розміщення опуклих n -вимірних політопів у n -вимірному параллелепіпеді : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02. Харків, 2007. 20 с.
263. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования. Харьков : Ин-т пробл. машиностроения АН Украины, 1983. 36 с. (Препринт. АН Украины, Ин-т пробл. машиностроения; 181).
264. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е. Математическая модель $E_k(R^2)$ -задачи размещения в R^2 . Харьков : Ин-т пробл. машиностроения АН Украины, 1989. 12 с. (Препринт. АН Украины, Ин-т пробл. машиностроения; 316).
265. Романова Т.Е. Система построения математической модели класса $E_k(R^2)$ -задачи размещения : автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.16. Киев. 1990. 16 с.
266. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию : монография Москва : Наука, 1977. 367 с.
267. Фукс Д.Б., Фоменко Ф.Т., Гунтмахер В.Л. Гомотопическая топология : монография. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1969. 459 с.
268. Berge C. Topological Spaces. Oliver and Boyd: Edinburg and London, 1963. 270 p.
269. Minkowsky H. Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1904. Vol. 1904. P. 311–355.

270. Стоян Ю.Г., Пономаренко Л.Д. Сумма Минковского и годограф вектор-функции плотного размещения. *Докл. АН УССР*. 1977. № 10. С. 888–890.
271. Coxeter H. S. M. *Regular Polytopes*. New York: Dover, 1973. 368 p.
272. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии : монография. Москва : Наука, 1989. 528 с.
273. Krowell R., Fox R. *Introduction to knot theory*. Ginn and company : Boston, 1963. 348 p.
274. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация : монография . Москва : Мир, 1985. 509 с.
275. Schewe L., Schmidt M. Computing feasible points for binary MINLPs with MPECs. *Mathematical Programming Computation* 2019. Vol. 11. Iss. 1. P. 95–118.
276. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Phi-function for 2D primary objects. *Studia Informatica*. 2002. Vol. 2. Iss. 1. P. 1–32.
277. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T. Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems. *Annals of Operations Research*. 2010. Vol. 179. Iss. 1. P. 343–368.
278. Toth L.F. Über einem geometrischen Satz. *Mathematische Zeitschrift*. 1940. Vol. 46. P. 83–85.
279. Кострикин А.И. Введение в алгебру : монография. Москва : Наука, 1977. 497 с.
280. Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106. Iss. 1. P. 25–57.
281. Zoutendijk G. *Methods of feasible directions. A study in linear and non-linear programming*. Amsterdam, London, New York, Princeton : Elsevier Publishing Company, 1960. 126 p.

282. Gondzio J. HOPDM (version 2.12) – A fast LP solver based on a primal-dual interior point method. *European Journal of Operational Research*. 1995. Vol. 85. Iss. 1. P. 221–225.
283. Mészáros C. On numerical issues of interior point methods. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2008, Vol. 30. Iss.1. P. 223–235.
284. Terno J., Lindemann R., Scheithauer G. *Zuschnittprobleme und ihre praktische Lösung*. Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt/Main, 1987. 207 p.
285. Tawarmalani M., Sahinidis N. V. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*. 2005. Vol. 103. Iss. 2. P. 225–249.
286. Gibson I., Rosen D., Stucker B. *Additive manufacturing technologies, 3D printing, rapid prototyping, and direct digital manufacturing*. Springer Verlag : New-York, 2015. 498 p.
287. Yang L., Hsu K., Baughman B., Godfrey D., Medina F., Menon M., Wiener S. *Additive manufacturing of metals: the technology, materials, design and production*. Springer International Publishing 2017. 168 p.
288. Klahn C., Mebold C. *Entwicklung und konstruktion für die additive fertigung*. Springer Vieweg, 2018. 350 p.
289. Lachmayer R., Lippert R. B. *Additive manufacturing quantifiziert – visionäre anwendungen und stand der technik*. Springer Verlag : Hanover, 2017. 234 p.
290. Brackett D., Ashcroft I., Hague R. Topology optimization for additive manufacturing. *Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symposium*, Austin, Texas, 2011. P. 348–362.
291. Thomas D. The development of design rules for Selective Laser Melting. Ph. D. Thesis. University of Wales Institute, Cardiff. 2009. 318 p.
292. Lippert R. B. *Restriktionsgerechtes Gestalten gewichtsoptimierter Strukturbauteile für das Selektive Laserstrahlschmelzen*. Technik und Wissen GmbH Verlag, Garbsen. 2018. 189 p.

293. Li Z., Zhang D. Z., Dong P., Kucukkoc I. A lightweight and support-free design method for selective laser melting. *International Journal of Additive Manufacturing Technologies*. 2016. Vol. 90. P. 2943–2953.
294. Leary M., Merli L., Torti F., Mazur M., Brandt M. Optimal topology for additive manufacture: a method for enabling additive manufacture of supportfree optimal structures. *Materials and Design*. 2014. Vol. 63. P. 678–690.
295. Ferris M. C. , Shepard M. C. Optimization of gamma knife radiosurgery. *Proc. of Discrete Mathematical Problems with Medical Applications*, 8-10 December, 1999, Rutgers University, Piscataway, NJ. 1999. P. 27–44.
296. Кузнецов И. С., Тарасова Е. Ю., Кузнецов С. И., Панин А. С., Петров А. Л. Особенности упаковок частиц в порошковых системах и их влияние на процесс лазерного спекания. *Известия Самарского научного центра РАН*. 2006. Том 8, №2. 429–434.
297. Afandizadeh S, Foumeny E. A. Design of packed bed reactors: guides to catalyst shape, size, and loading selection. *Applied Thermal Engineering*. 2001. Vol. 21. Iss. 6. P. 669–682.
298. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях : предпочтения и замещения : монография. Москва : Радио и связь, 1981. 560 с.
299. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач : монография. Москва : Наука, 1982. 256 с.

Додаток А

Список публікацій здобувача

1. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped. *Intelligent Decision Support* : book / Bortfeldt A. et al. (eds). Gabler, Germany, 2008. P. 47–67.
2. Стоян Ю. Г., Лазарева И. Е., Яськов Г. Н. Метод поиска локального минимума в задаче упаковки разных шаров в прямой цилиндр. *Доповіди НАН України*. 2000. № 6. С. 104–109.
3. Stoyan Y., Scheithauer G., Yaskov G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 11. Iss 4. 2003. P. 389–407.
4. Stoyan Y., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
5. Романова Т. Е., Гребенник И. В., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Упаковка шаров в параллелепипеде с учетом погрешностей. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С. 119–129.
6. Yaskov G. N. Mathematical model of problem of packing identical spheres into a cylindrical container. *Системи управління, навігації та зв'язку*: зб. наук. праць. К. : Центр. н.-д. ін.-т навігації і управління. 2007. Вип. 4. С. 128–130.
7. Yaskov G. N. Random packing of identical spheres into a cylindrical container *Системи обробки інформації*: зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2008. №. 1 (68). С. 128–130.
8. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки интервальных кругов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2008. № 1/4. Вип. 31. С. 25–29.
9. Yaskov G. N. Packing spheres into a parallelepiped by means of the decremental neighbourhood method. *Біоніка інтелекту*. 2008. № 1 (68). С. 84–86.

10. Яськов Г. Н. Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 43–49.
11. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2010. № 7(48). С. 95–98.
12. Яськов Г. Н. Метод решения задачи размещения разных кругов с выбором перспективных начальных точек. зб. наук. пр. Х.: Харк. університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. 2010. Вип. 3. С. 119–122.
13. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*. 2010. Vol. 17. No. 1. P. 51–70.
14. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Задача упаковки большого числа интервальных шаров в интервальную цилиндрическую область. *Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжвід. наук.-техн. зб.* К.: Київ. нац. ун-т буд-ва і арх. 2010. Вип. 85. С. 306–312.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *Journal of Global Optimization*. 2012. Vol. 52. Iss. 4. P. 855–868.
16. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. Iss. 10. P. 1355–1369.
17. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромиссов в геометрическом проектировании. *Системи обробки інформації*. 2012. Вип. 7(105). С. 150–157.
18. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины. *Доповіді НАН України*. 2013. № 5. С. 44–50.
19. Яськов Г. Н. Размещение максимального числа равных кругов в круге. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 2. С. 60–67.
20. Яськов Г. Н. Увеличение размерности задачи при упаковке равных шаров в шаре. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 4(111). С. 97–100.

21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20(1). P. 79–99.
22. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. Vol. 8. Iss. 3. P. 949–970.
23. Yaskov G. N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблеми машиностроєння*. Харків. 2014. Т. 17. № 2. С. 48–53.
24. Stoyan Yu. G, Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 419–426.
25. Khlud O. M., Yaskov G N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, navigation and communication systems*. 2017. No. 6. Iss. 46. P. 131–135.
26. Yaskov G. Methodology to solve multi-dimentional sphere packing problems. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 67–85.
27. Yaskov G., Shekhovtsov S. Methodological basis of solving sphere packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem. *Advanced Information Systems*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 54–57.
28. Стоян Ю. Г., Яськов Г. М., Евсеева Л. Г. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплава". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 27362. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 23.01.2009.
29. Яськов Г. М., Чугай А. М. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 50773. Україна. М-во освіти і науки. Держ. департамент інтелект. власності. 19.08.2013.
30. Stoyan Yu. G., Gil N. I., Romanova T. E., Pankratov A. V., Yaskov G. N., Pridatko D. I. Mathematical Models and Methods for Optimization Placement Problems. *Communication and Control Technologies CCCT'03* : Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Orlando, Florida, USA, 2003. P. 383–389.

31. Stoyan Y., Yaskov G. Packing various spheres into parallelepiped. Proc. of the *1st ESICUP Meeting*, Lutherstadt Wittenberg, Germany, 2004. P. 29.
32. Stoyan Yu., Chugay A., Yaskov G. Packing a great number of identical spheres into a composed domain. Proc. of the *2nd ESICUP Meeting*, University of Southampton, UK, 2005. P. 24.
33. Stoyan Y., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylindrical domain. Proc. of the *Workshop on Cutting Stock Problems WSCSP2005*, Sapientia University of Miercurea-Ciuc, Romania, 2006. P. 75–82.
34. Яськов Г. Н. Комбинированный метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики АППММ'06*: тез. докл. междунар. конф. Харьков: ИПМАШ НАНУ, НТУ "ХПИ", ХНУРЭ, НАУ "ХАИ", 2006. С. 46.
35. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. Proc. of the *5th ESICUP Meeting*, L'Aquila, Italy, 2008. P. 24.
36. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing problems of congruent circles into a circle and congruent spheres into a circular cylinder. Proc. of the *6th ESICUP Meeting*, Valencia, Spain, 2009. P. 22.
37. Yaskov G. N. Packing a maximal number of congruent hyperspheres into a hypersphere. *Інформатика і системні науки ICH-2010*: матеріали всеукр. наук.-практ. конф. Полтав. ун-т споживчої кооперації, Полтава, 2010. С. 210–212.
38. Yaskov G. N. A method of packing congruent circles into a circle with circular prohibited areas. *Інформаційно-комп'ютерні технології 2010*: матеріали V міжнар. наук.-техн. конф. Житомир, 2010. С. 9–11.
39. Евсеева Л. Г., Яськов Г. Н. Интервальное моделирование свойств сплава. *Комп'ютерна математика в науці, інженерії та освіті CMSEE-2010*: матеріали четвертої міжнар. наук.-техн. конф. Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава, 2010. С. 39.

- 40.Чугай А. М., Яськов Г. Н. Оптимальная упаковка трехмерных геометрических объектов. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2011* : тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. національний університет ім. О.Гончара, Дніпро, 2011. С. 281.
- 41.Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral container. Proc. of the *8th ESICUP Meeting*, Copenhagen, Denmark, 2011. P. 23.
- 42.Яськов Г. Н. Упаковка неравных кругов в прямоугольнике минимальной длины. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 3-й междунар. конф., Кишинэу, Молдова, 2012. С. 562.
- 43.Stoyan Yu., Yaskov G. A local optimization switch algorithm for packing non-identical circles. Proc. of the *25th European conference on operational research*, Vilnius, Lithuania. 2012. P. 49.
- 44.Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б., Яськов Г. Н. Алгоритм построения области компромисса в геометрическом проектировании. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012* : тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 78–79.
- 45.Яськов Г. Н. Особенности математической модели задачи упаковки неравных кругов с переменными метрическими характеристиками *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2012* : тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2012. С. 334–335.
- 46.Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G. Packing non-equal spheres into containers of different shapes. Dresden : Technische Univesität, 2013. 25 p. (Preprint. Technische Univesität Dresden, Germany; MATH-NM-07-2013).

47. Yaskov G. N. Packing equal spheres into a multiconnected polyhedral domain. *Питання оптимізації обчислень ПОО-XL* : тез. доп. міжнар. наук. конф. смт. Кацивелі, Крим, 2013. С. 291.
48. Яськов Г. Н. Упаковка гипершаров в гипершаре минимального радиуса. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2013* : тез. доп. XI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2013. С. 272–273.
49. Яськов Г. Н. Упаковка шаров в цилиндрическом слое. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 4-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2014. Т. II. Р. 512–519.
50. Субота І. О., Хлуд О. М., Яськов Г. М. Задача оптимальної упаковки гомотетичних орієнтованих еліпсоїдів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики APAMCS-2015* : тез. доп. XXI всеукраїнської наукової конференції, Львів, 2015. С. 302–303.
51. Stoyan Yu. G., Yaskov G. N. A mathematical model of optimal packing of unequal spheres into a sphere. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2015* : тез. доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2015. С. 226–227.
52. Stoyan Yu., Scheithauer G., Yaskov G. Packing unequal spheres into 3D containers. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. I. С. 327–328.
53. Яськов Г. Н. Математическая модель оптимальной упаковки неравных кругов в многоугольнике. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : тез. докл. 5-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2016. Т. II. Р. 349–354.
54. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения ориентированных эллипсоидов в многогранной области. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи AIIS'2016* : тез. доп. XVI міжнар. наук.-техн. конф. К., Україна, 2016. С. 55–56.

55. Хлуд О. М., Яськов Г. Н. Математическая модель задачи размещения кругов и ориентированных эллипсов в многосвязной области. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2016* : тез. доп. XIV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро, 2016. С. 226–227.
56. Яськов Г. Н. Дерево решений для задачи размещения неравных шаров в шаре заданного радиуса. *Інформаційні системи і технології ICT-2017* : тез. доп. 6-ої міжнар. наук.-техн. конф. м. Коблеве, Миколаїв. Обл., 2017. С. 143–144.
57. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing spheres into a larger sphere with the jump algorithm. *Proc. of the 7th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2017*, Sofia, Bulgaria, 2017. P. 254–260.
58. Romanova T., Pankratov A., Yaskov G., Scheithauer G. Packing ellipses in a disconnected polygonal domain. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2017* : тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро. 2017. С. 167–168.
59. Yaskov G. N. A mathematical model of packing unequal spheres into a multiconnected container. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : тез. доп. міжнар. наук. конф. Рівне, 2018. С. 25–26.
60. Стоян Ю. Г., Яськов Г. Н. Применение jump-алгоритма для задач упаковки неравных шаров в контейнере заданных размеров. *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии* : материалы 6-й междунар. конф. Кишинэу, Молдова, 2018. С. 171–173.
61. Yaskov G. N. Packing unequal spheres into a multiconnected set. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тез. доп. I міжнар. наук.-техн. конф. Х., 2018. С. 78–79.
62. Yaskov G., Romanova T., Pankratov A. Optimization packing problem: transformation of knapsack problem to open dimension problem.

Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем
MPZIS-2018: тез. доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетр. нац. ун-т
ім. О. Гончара, Дніпро. 2018. С. 233–234.

Додаток Б

Свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір

Б1. Комп'ютерна програма "Packing of balls into a composite domain"



Б2. Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплаву"

	
УКРАЇНА Міністерство освіти і науки України Державний департамент інтелектуальної власності	
СВІДОЦТВО про реєстрацію авторського права на твір № 27362	
Комп'ютерна програма "Імітаційне моделювання властивостей сплаву" (назва твору)	
Автор(и) Стоян Юрій Григорович, Яськов Георгій Миколайович, Євсєва Людмила Григорівна (повне ім'я, повідомити за наявності)	
Дата реєстрації	23.01.2009
Голова Державного департаменту інтелектуальної власності	 М.В.Паладій
	

Додаток В

В1. Впровадження у навчальний процес

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор
Харківського національного
університету радіоелектроніки

В.В. Семенев

« 29 » 18 2019 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи
Яськова Г. М. «Оптимізаційні задачі розміщення гіперкуль:
математичні моделі, методи розв'язання, застосування»

Ми, що нижче підписалися, начальник Навчального відділу ХНУРЕ Міхнова А.В., завідувач кафедри прикладної математики професор Тевяшев А.Д., професор кафедри прикладної математики Гусарова І.Г., склали цей акт про те, що результати докторської дисертаційної роботи Яськова Г.М. щодо прийняття рішень у теорії геометричного проектування, розв'язання задач оптимального розміщення гіперкуль різної вимірності впроваджені в навчальний процес на кафедрі прикладної математики в дисциплінах «Теорія прийняття рішень» (теми 2, 5 робочої програми к.т.н. доц. Г.М. Яськова), «Моделювання геометричних об'єктів» (теми 3, 5, 6, 7 робочої програми к.т.н. доц. Г.М. Яськова, д.т.н., проф. Т.Є. Романової, Ю.Є. Стояна). Комісія відзначає, що використання нових результатів в області математичного моделювання забезпечує поглиблене вивчення перспективних напрямів прикладної математики, а також знайомство студентів старших курсів з практичними аспектами застосування фундаментальних результатів при розв'язанні прикладних та наукових задач.

Начальник Навчального відділу

А.В. Міхнова

Завідувач кафедри
прикладної математики

А.Д. Тевяшев

Професор кафедри
прикладної математики

І.Г. Гусарова

В2. Довідка про використання програмного продукту**ДОВІДКА**

про використання програмного продукту, розробленого
Яськовим Георгієм Миколайовичем за темою дисертаційної роботи
«Оптимізаційні задачі розміщення гіперкуль: математичні моделі,
методи розв'язання, застосування»

Підтверджую, що розроблений Яськовим Г.М. програмний модуль оптимізації розміщення куль застосовується на кафедрі прикладного матеріалознавства та обробки матеріалів Національного університету «Львівська політехніка» для розв'язання задачі оптимального заповнення заданого об'єму частинками сферичної форми. Ці результати важливі при проведенні досліджень щодо можливості застосування вітчизняних порошків титанових сплавів сферичної форми, які пройшли процес гідрування і дегідрування, є на порядок дешевшими та можуть з успіхом використовуватися в адитивних технологіях.

Завідувач кафедри
прикладного матеріалознавства
та обробки матеріалів,
доктор технічних наук, професор

З. А. Дурягіна



В3. Лист підтримки від державного університету Нуево Леон, Мексика



FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
POSGRADO EN INGENIERIA DE SISTEMAS

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

To Whom It May Concern
Specialized Academic Council D 64.180.01
Institute for Mechanical Engineering Problems
National Academy of Sciences of Ukraine
Kharkiv, 61046, Ukraine

September 4, 2019

This letter is written in support of G.M. Yaskov's research work on
Optimization problems of packing hyperspheres: mathematical models, solution methods, applications.

The work presents models and solution techniques for optimized packing n -dimensional hyperspheres into convex containers in the presence of prohibited areas bounded by cylindrical/spherical surfaces and planes. (HSOA). This problem is studied taking into account the minimum allowable distances between the objects. Non-overlapping and containment constraints are formulated using Stoyan's phi-function technique. New methodologies for solving HSOA problems are proposed combining nonlinear programming, greedy and branch & bound algorithms, statistical optimization and the object homothetic transformation technique. Efficiency of the proposed mathematical models and methods is shown by comparing the obtained results with the best currently known, published in the leading international journals and available at specialized websites, such as <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cst/cst.html>, <http://www.packomania.com>. Solutions to practical problems arising in materials science, nuclear power engineering, powder metallurgy, additive manufacturing, chemical industry, and medicine are provided.

We would like to incorporate the models and techniques proposed in the work of Yaskov in our research projects "Large Scale Optimization Problems in Logistics and Supply Chain Networks" and "National Research Network for Decision Support and Intelligent Optimization in Complex and Large Scale Systems" supported by Mexican National Scientific Foundation (CONACYT).

I would like to express my strong support and recommendation of Yaskov's research work.

Sincerely yours,

Igor Litvinchev, PhD, DSc. (Habilitation)
Professor at the Graduate Program in Systems Engineering
Nuevo Leon State University, Monterrey, Mexico
Member of Mexican Academy of Sciences

Pedro de Alba s/n, Ciudad Universitaria, C.P. 66451,
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México,
Comm.: 8329-4020, Fax: 8332-0904, www.fime.uanl.mx

