МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ІМ. А.М. ПІДГОРНОГО НАН УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ТКАЧУК МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

МІКРОМЕХАНІЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОСЕРЕДНЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ МЕРЕЖЕВОЇ СТРУКТУРИ ТА ПРОМІЖНИХ ШАРІВ КОНТАКТУЮЧИХ ТІЛ

Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Галузь знань – технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

М.М. Ткачук

Науковий консультант – Львов Геннадій Іванович, доктор технічних наук, професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Ткачук М.М. Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2019.

Актуальна наукова і важлива для промисловості проблема аналізу деформування нових мережевих матеріалів аналізується на основі розробки нових моделей і методів аналізу нелінійної їх поведінки як в об'ємі, так і на поверхні твердих деформівних тіл в умовах контактної взаємодії із урахуванням мікромеханіки взаємодії волоконних ланцюжків, ниток в об'ємі матеріалу та мікронерівностей шорсткості або інших проміжних шарів на поверхні контактуючих тіл відповідно.

Метою дисертаційної роботи є розроблення нових методів розрахунку напружено-деформованого стану шляхом створення і застосування у практиці розрахунків нелінійних моделей деформування матеріалу елементів конструкцій в об'ємі та на поверхні на основі мікромеханіки суцільного середовища.

Об'єктом дослідження є процес розроблення нових методів розрахунку напружено-деформованого стану і створення нових мікромакромеханічних моделей деформування матеріалу в об'ємі та на поверхні контактуючих тіл із урахуванням структурних і фізичних нелінійностей. Предмет дослідження – нелінійні фізичні та математичні моделі деформування нових матеріалів на основі мікромеханіки мережевих структур на рівні статистичних наборів їх ланцюжків, нелінійні моделі контактної взаємодії на базі інтеграції моделей мікромеханіки контактної взаємодії поверхневих шарів матеріалів, методи розв'язання нелінійних прямих і обернених задач контактної взаємодії та обґрунтування геометричної форми складнопрофільних гладких і шорстких тіл, а також закономірності зміни НДС конструкцій при варіюванні геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик матеріалів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у створенні теоретичних основ аналізу деформування нетрадиційних мережевих матеріалів, напружено-

деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл та обґрунтування властивостей нетрадиційних матеріалів і форми поверхонь контактуючих тіл за критеріями міцності, а також у розв'язанні наступних наукових задач і отриманні нових наукових результатів. Уперше розроблено нелінійні математичні моделі деформування матеріалів у вигляді хаотичної мережевої структури одновимірних фрагментів, які побудовані із залученням принципово нових авторських підходів до опису фізико-механічних властивостей на мікрорівні статистичних наборів волоконних ланцюжків і просторової гомогенізації їх макровластивостей. Порівняно із традиційними моделями вони більш адекватно моделюють особливості деформування матеріалів у вигляді просторових хаотичних та упорядкованих мережевих структур, оскільки не залучають низки додаткових нефізичних гіпотез. Це створює принципово нові можливості не тільки для аналізу властивостей таких матеріалів, але й при створенні нових із заданими властивостями. Уперше розроблено нелінійні математичні моделі поведінки матеріалу на поверхні контакту або проміжного шару. Вони побудовані на основі поєднання моделей контактування мікронерівностей і умов непроникнення тіл одне в одне. Ці моделі, по-перше, фізично більш адекватно відображають механізм контактної взаємодії шорстких тіл, а, по-друге, на відміну від традиційних лінійних умов кінематичного контакту, призводять до більш складних, проте більш точних, нелінійних математичних моделей (тобто до формування т.з. структурно-фізично нелінійних задач). Це створює нові можливості аналізу контактної взаємодії тіл, оскільки враховується новий важливий чинник. Отримав подальший розвиток метод граничних елементів у напрямку розв'язання структурно-фізично нелінійних задач контактної взаємодії, які містять нелінійні, а не лінійні, як у традиційних підходах, члени в умовах сумісності переміщень на границях контактуючих тіл. Із цією метою розроблено модифікацію варіаційного принципу Калькера на випадок фізично нелінійних проміжних шарів. Це створює можливість дискретизації задачі із залученням апроксимацій шуканого розподілу контактного тиску на мережі граничних елементів. Відповідно, різко знижується розмірність дискретної моделі порівняно, наприклад, із застосуванням методу скінченних елементів. При цьому досягається значне підвищення оперативності розв'язання задач аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл при збереженні точності. Уперше створено підхід до формування системи розв'язувальних співвідношень на основі поступового поповнення множини чинників, які ураховуються при аналізі контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. Він відрізняється від традиційних тим, що при додаванні нових чинників у модель контактної взаємодії пружних тіл модифікований функціонал додаткової енергії, визначений на розподілі контактного тиску, поповнюється відповідними додатковими доданками. Із використанням властивості адитивності стає можливим без додаткових процедур, що супроводжують традиційні підходи, формувати розв'язувальні співвідношення. Враховуючи подальшу дискретизацію задачі на єдиному полі розподілу контактного тиску, стає можливим природний перехід до розв'язувальної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей. Уперше розроблено методи додаткових зазорів і змінних податливостей для розв'язання структурно-фізично нелінійних задач аналізу контактної взаємодії шляхом зведення їх до серії структурно нелінійних, але фізично лінійних задач. На відміну від традиційних, розроблені методи мають природну можливість зміни кількості розв'язувальних рівнянь, оскільки автоматична перевірка умов контактного сполучення або поповнює множину вузлів, у яких задіяні ці обмеження (тобто вони активні), або, навпаки, – зменшує. Таким чином, зменшується ступінь вкладеності та підвищується швидкість ітераційних процесів при уточненні поточного розв'язку задачі про контактну взаємодію порівняно із традиційними методами. Крім того, досягається природнє трактування задач про контактну взаємодію за наявності нелінійно пружних проміжних шарів як задачі із лінійно пружними шарами, проте із коригованими зазором або розподілом характеристик податливості. Уперше на основі чисельного моделювання установлено закономірності деформування матеріалів із мережевою структурою під механічним навантаженням. Зокрема, на противагу традиційним моделям типу «правила сумішей» чи більш складних, але таких, що не враховують складний зв'язок мікроструктри та макровластивостей такого типу матеріалів, одержані неунімодальні залежності фізико-механічних характеристик матеріалу, складеного із полімерних матеріалів із різною довжиною макромолекул. Це дає змогу більш точно прогнозувати властивості створюваних матеріалів, а також установлювати співвідношення різних складових, які призводять до реалізації заданих результуючих властивостей матеріалу-суміші. Уперше розроблено методи розв'язання задач мікромеханіки волоконних, нетканих і полімерних матеріалів, що відрізняються підходом до формування їх властивостей шляхом гомогенізації на основі нових авторських моделей осереднення. Ці моделі, на відміну від традиційних, у яких вводяться додаткові «нефізичні» гіпотези, базуються на строгих термодинамічних співвідношеннях та природних підходах до осереднення. Цим створюються можливості більш високої точності мікромакроспіввідношень, що пов'язують мікроструктуру та макровластивості матеріалів мережевої структури із одновимірних елементів. Більш того, забезпечується відтворення у ході чисельного моделювання якісних особливостей характеру деформування такого типу матеріалів. І, нарешті, створюються передумови для визначення шляхів досягнення заданих макровластивостей цих матеріалів шляхом цілеспрямованого вибору їх складу та мікроструктури.

Для вирішення сформульованих проблем розроблено загальний підхід, який базується на поєднанні мікро-макромасштабних моделей деформування нетрадиційних матеріалів мережевої структури в об'ємі та напружено-деформований стан контактуючих елементів конструкцій із шорсткою поверхнею та проміжним шаром на поверхні. У математичному плані розроблені варіаційні формулювання поставлених задач, які зводяться до проблеми пошуку екстремумів нелінійних функціоналів.

На основі розроблених удосконалених підходів мікромеханіки просторових мережевих систем одновимірних елементів розроблені моделі деформування нових нетрадиційних матеріалів, а також методи розв'язання системи розв'язувальних співвідношень. Для осереднення суцільних мереж створено новий мікромеханічний підхід. Він спирається на нове статистичне подання будови мережі та її деформування, яке базується на урахуванні початкової орієнтації та векторній змінній розтягнення волокон. Цим він відрізняється від більшості аналогічних теорій, які спираються на спрощене подання мережі. Запропоновано концепцію шляхів максимального просування, за допомогою якої було здійснено обґрунтоване поєднання мікро- та макрокінематики. Отримане співвідношення, що пов’язує розтягнення та повороти волокон із макроскопічним градієнтом деформації. Із його допомогою сформульовано варіаційний принцип мінімуму осередненої енергії для визначення рівноваги мікромереж та відгуку матеріалу. У дискретних моделях нетканих матеріалів було враховано принципово новий механізм незворотних деформацій та руйнування, пов'язаний із проковзуванням та висмикуванням волокон.

Розроблені методи і моделі для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів, які визначають їхню локальну контактну нелінійну жорсткість. У результаті одержано структурно-фізично нелінійні співвідношення. Для них розроблена слабка постановка, що зводиться до пошуку екстремуму модифікованого функціоналу додаткової енергії, визначеного на розподілах контактного тиску. Із застосуванням методу граничних елементів отримано дискретну форму розв'язувальних рівнянь та нерівностей. Для їх задоволення розроблено методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості. Установлені якісно нові закономірності впливу на розподіл контактного тиску профілю контактуючих тіл та властивостей проміжного шару. Розроблено постановку задач обґрунтування геометричної форми поверхонь контактуючих тіл. Із умов реалізації заданого розподілу контактного тиску запропоновано метод коригування геометричної форми поверхонь контактуючих тіл за рахунок пружного деформування від спеціально підібраного додаткового навантаження.

Із застосуванням створених методів, моделей та засобів досліджень розв’язано низку модельних та прикладних задач. Визначено характер деформування нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою одновимірних елементів. Установлено макровластивості цих матеріалів на основі розроблених мікромеханічних моделей та методів осереднення. Визначені особливості розподілу контактного тиску у спряженні контактуючих складнопрофільних тіл. Установлені закономірності впливу різних чинників на контактний тиск і контактні області. Обґрунтовані рекомендації щодо технічних рішень для елементів машинобудівних конструкцій, що забезпечують їх міцність. Розроблені моделі та засоби досліджень передані у практику розробок нових виробів. За рахунок їх впровадження досягнуто підвищення технічних характеристик низки захисних, функціональних та силових елементів транспортних засобів спеціального призначення, зубчастих передач, технологічного оснащення, гідропередач трансмісій тощо.

Здійснені розрахунково-експериментальні дослідження продемонстрували повну відповідність реальної поведінки матеріалів із мережевою структурою та контактуючих складнопрофільних тіл із проміжним шаром тій, що прогнозована на основі чисельних досліджень.

У роботі сформовано два нових наукових напрямки: статистична мікромакромеханіка деформування нетрадиційних матеріалів у вигляді мережевих структур одновимірних елементів із ентальпійною та ентропійною природою поведінки; структурно-фізично нелінійні задачі аналізу контактної взаємодії пружних складнопрофільних тіл за наявності проміжного нелінійного шару.

Ключові слова: механіка деформівного твердого тіла, матеріал із мережевою структурою, гомогенізація, шлях максимального просування, нетканий матеріал, складнопрофільне тіло, метод додаткових зазорів, контактна взаємодія, контактний тиск, проміжний шар

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА,

- ***в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:***

1. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.

2. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.

3. Linder C., Miehe C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 10. P.2134–2156.

4. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*. 2012. Vol. 92. P.779–2808.

5. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 3/7(93). P. 34–41.

6. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 5/7(95). P. 22–31.

7. Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saverska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*.

2019. No. 1/7 (97). P. 15–25.

8. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15.

9. Marchenko A., Kravchenko S., Tkachuk M., Tkachuk M., Saverska M. Discrete-Continual Strengthening Of Contacting Structural Elements: Mathematical And Numerical Modeling. *Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów Proceedings of the Institute of Vehicles*. 2018. No 1(115). P. 143–153.

10. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2012. № 10. С. 11–17.

11. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 2. С. 3–9.

12. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 1. Постановка задачи. 2. Кинематическая модель контакта гладких тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 3. С. 3–10.

13. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 3. Прямой и вариационный методы решения задачи негерцевского нормального контакта гладких тел. 4. Модель контакта шероховатых тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 4. С. 3–8

14. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 6. С.10–16.

15. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сло-

жнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 7. С. 11–20.

16. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (окончание). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 8. С. 6–8.

17. Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н. К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 19. С. 135–143.

18. Ткачук. М.А., Устиненко О. В., Протасов Р. В., Ткачук М. М. До 125–річчя НТУ «ХПІ». Розвиток теоретичних основ синтезу геометрії та моделювання втомної міцності нових зубчастих зачеплень в університеті. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного привода. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 26. С. 3–8.

19. Ткачук М.М., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы. *Вісник СевНТУ. Вип. 110. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь: СевНТУ, 2010. С. 55–60.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ».2011. № 22. С. 123–140.

21. Грабовський А., Ткачук М., Артьомов І., Барчан Є. Підхід до ідентифікації моделі для визначення ударної сили у віброударній системі. *Машинознавство*. 2011. № 5–6. С. 21–26.

22. Ткачук М.М., Негробова Н.Б., Ткачук М.А. Контактна взаємодія деталей машин з витягнутими контактними областями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного привода. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 29. С. 129–134.

23. Ткачук Н.А., Грабовський А.В., Костенко Ю.В., Артемов И.В., Ткачук Н.Н. Численное моделирование динамических процессов в виброударных системах. *Вісник*

Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Зб. наук. праць. Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 42. С.179–187.

24. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. Механіка та машинобудування. 2011. № 2. С. 75–86.

25. Ткачук Н.А., Кохановская О.В., Негробова Н.Б., Зарубина А.А., Ткачук Н.Н. Связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза для контактирующих сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 22. С. 121–147.

26. Ткачук Н.Н., Негробова Н.Б., Ткачук Н.А. Особенности распределения контактных зон и давлений при контакте тел конечных размеров по поверхностям близкой формы. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 36. С. 166–171.

27. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численный анализ влияния модели для определения силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Механіка та машинобудування.* 2012. № 2. С. 34–48.

28. Ткачук Н.Н., Костенко Ю.В., Ткачук А.В., Грабовский А.В. Изменение массы одного из компонентов и его влияние на характер динамических процессов в виброударных системах: модели и численные результаты. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 1(975). С. 71–85.

29. Костенко Ю.В., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Виброударные системы: определение периодических режимов движения *Вісник СевНТУ. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь, СевНТУ. 2013. С.81–85.

30. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А., Мухин Д.С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 41.

С. 133–142.

31. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. №14 (1057). С. 155–169

32. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Литвиненко А.В., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством. *Проблемы машиностроения.* 2014. Том 17. № 4. С. 17–22.

33. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Головченко В.И. Модели и разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 29(1072). С.160–173.

34. Бусяк Ю.М., Ткачук Н.Н., Васильев А.Ю., Литвиненко А.В., Мазур И.В., Даньшин Ю.А., Шаталов О.Е. Общие подходы к оценке и обеспечению защищенности бронекорпусов легких по массе машин. *Інтегровані технології та енергозбереження.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 3. С. 154–163.

35. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С. Оценка влияния шероховатости на контактные давления в сопряжении сложнопрофильных тел. *Механіка та машинобудування.* 2014. № 1. С. 29–35.

36. Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Ткачук Н.Н., Касай Е.И., Крылюк Б.И. Влияние формы беговой дорожки на контактное взаимодействие с шаровыми поршнями радиальной гидропередачи. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 31 (1140). С. 81–100.

37. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А., Ткачук Н.А. Экспериментальное исследование контактного взаимодействия сложнопрофильных шероховатых тел с учетом податливости. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 34 (1143). С. 124–129.

38. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Неделько К. Д. Влияние подат-

ливости шероховатого слоя на распределение контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 43(1152). С. 132–139.

39. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении. *Механіка та машинобудування.* 2015. № 1. С. 113–117.

40. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А. Расчетно-экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №12 (1184). С. 84–88.

41. Грабовський А.В., Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. та інш. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. Зб. наук. праць* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №18 (1190). С. 22–29.

42. Скрипченко Н.Б., Ткачук М.М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І. Контактна взаємодія складнопрофільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №39 (1211). С. 93–101.

43. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування.* 2016. № 1. С. 3–14.

44. Ищенко О. А., Демина Н. А.,. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовський А.В. и др. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 5(1227). С. 108–134.

45. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Саверська М.С. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами. *Механіка та машино-*

будування. 2019. №1. С. 36–50.

46. Ткачук М.М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12(1234). С. 86–95.

47. Ткачук Н.А., Ищенко О. А., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов штамповой оснастки. *Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии.* Краматорск, 2017. № 3 (24E). С. 11–19.

48. Іщенко О.А., Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мерецька К.О. Контактна взаємодія елементів розділових штампів: моделі, закономірності, критерії проектних рішень. *Механіка та машинобудування*. 2018. № 1. С. 48–59.

49. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 7 (1283). С. 132–141.

50. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Бондаренко М. О., Саверська М. С., Ткачук М. А., Тесля Д. О. Розрахунково-експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 1. С. 81–92.

51. Ткачук Н.Н. Анализ реакции волоконных материалов на действие нагрузок на основе микромеханических моделей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 25 (1301). С. 149–155.

52. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовский А. В., Саверская М. С., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Сериков В. И., Мерецкая К. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов механических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 29 (1305). С. 129–156.

53. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». *Серія: Динаміка і міцність машин. Зб. наук. праць.* 2018. № 33 (1309). С. 43–63.

54. Ткачук М. А., Іщенко О. А., Дьоміна Н. А., Ткачук М. М., Грабовський А. В., Шеманська В. В., Васильченко Д. Р. Контактна взаємодія елементів штампового оснащення. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. Зб. наук. праць.* Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 41 (1317). С. 67–76.

55. Ткачук М.М. Метод пружної гомогенізації бімодальних мереж. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 7 (1332). С. 107–113.

які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

56. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically based model for viscoelasticity of rubbery polymers. *10th GAMM Seminar on Microstructures.* TU Darmstadt, Germany. 2011. P. 46.

57. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven Computational Modeling of Polymers. *SimTech 2011. International Conference on Simulation Technology. Book of abstarcts: Advanced Mechanics of Multi-Scale and Multi-Field Problems.* University of Stuttgart. 2011. P. 26.

58. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven computational modeling of polymers. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* 2011. Vol. 11. P. 557–558.

59. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *COMPLAS XI. International conference on computational plasticity.* 2011. Barcelona, Spain.

60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *11th GAMM seminar on microstructures.* University of Duisburg-Essen, Germany. 2012.P. 46.

61. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the

homogenization of materials with random network microstructures. *GAMM 2012. 83nd annual meeting of the international association of applied mathematics and mechanics.* TU Darmstadt, Germany. 2012. P. 198–199.

62. Tkachuk M., Linder C. Homogenization of random elastic networks with non-affine kinematics. *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. 2012. Vol. 12. P. 417–418.

63. Tkachuk M., Linder C. Dynamic relaxation with local artificial modes for the analysis of floppy fiber networks. *PACAM XIII-6172. The pan american congress of applied mechanics. 2013. Houston, USA. Section 8-4. Biomembranes and tissues.*

64. Kostenko Yu., Tkachuk M., Grabovsky A., Tkachuk M.A. Subharmonic modes in vibroimpact systems. *The Fourth International Conference «Nonlinear Dynamics–2013». Proceedings.* Sevastopol (Ukraine). 2013. Pp. 83–86.

65. Kostenko Y.V., Artemov I.V., Tkachuk N.N. Sybharmonical modes in vibroimpact systems. *Международный научно-исследовательский журнал: Сборник по результатам XXV заочной научн. конф. Research Journal of International Studies.* Екатеринбург: МНИЖ. 2014. № 3, часть 2. С. 27–30.

66. Tkachuk M., M. Ganser, Linder C. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers. *WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics. Barcelona*, Spain. 2014.

67. Tkachuk M.A., Skripchenko N., Grabovskiy A., Tkachuk M.M. Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact. *Зб. «Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015)».* P. 393–398.

68. Tkachuk M.M., Kostenko Yu., Grabovsky A., Tkachuk M. A. Parameter analysis of vibro-impact machines dynamics with variable mass and stiffness. *Nonlinear Dynamics–2016: Proceedings of 5th International Conference*. Kharkov, NTU «KhPI», 2016. P. 238–244.

69. Tkachuk M. Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 2017*. P. 190–193.

70. Головченко В., Ткачук М., Шеремет В. Числове моделювання контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доповідей 2-й міжнар. наук.-практ. конф..* Львів, 2010. С. 41–42.

71. Ткачук М.М., Сердюк Ю.Б., Ткачук А.М. Контактна взаємодія плоского штампа з обмеженням з урахуванням жорсткості поверхневого шару. *10-й міжнар. симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Праці*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2011. С. 176–177.

72. Ткачук А.М., Ткачук М.М. Взаємодія плоского штампу з напівпростором: моделі та результати. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XIX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1* Харків, НТУ «ХПІ», 2011. С. 200.

73. Ткачук М.М., Ткачук М.А., Ткачук А.М. Зв'язана задача геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контакту. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2012. С. 220.

74. Скріпченко Н., Ткачук М. Варіант методу граничних елементів для аналізу контактної взаємодії гладких і шорстких тіл. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2013. С. 84–85.

75. Бондаренко М.А., Бондаренко О.А., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Кохановский В.И. Контакт сложнопрофильных тел: теория, методы и алгоритмы. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXI міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2013. С. 182.

76. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численное определение влияния вида силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. научн. конф. в 10 т. Т. 9. Секции 3, 5, 7, 10 / под общ. ред. А.А. Большакова*. Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т; Харьков, НТУ «ХПИ», 2012. С. 94–98.

77. Литвиненко О., Ткачук М., Грабовський А. Проектно-технологічне забезпечення захищеності бронекорпусів легкоброньованих машин від дії динамічних навантажень. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2012. С. 122–123.

78. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Кохановська О.В., Веретельник О.В. Контактна взаємодія індентора з перешкодою. *Перспективи розвитку*

озброєння та військової техніки Сухопутних військ. Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф.. Львів, Друкарня АСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, 2014. С. 53–54.

79. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Бондаренко Л.Н. Влияние свойств шероховатого слоя на контакт сложнопрофильных упругих тел. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2014. С. 235.

80. Ткачук М., Литвиненко О., Грабовський А. Обґрунтування проектно-технологічних рішень для забезпечення тактико-технічних характеристик легкоброньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей 4-й міжнар.наук.-техн.конф.*. Львів, 2014. С. 7–8.

81. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Васильєв А.Ю., Мартиненко О.В. Проектно-технологічне забезпечення міцності бронекорпусів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф.*. Львів, АСВ, 2015. С. 41–42.

82. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Середа А.В., Дзюба Ю.С., Іщенко О.А. Контакт складнопрофільних тіл: підходи, моделі, методи. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2015. С. 229.

83. Ткачук М.М. Мікромеханіка нетканих матеріалів. *12-й міжнар.симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Тез. доп*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2015. С. 25–26.

84. Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід*. Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2015. С. 234–238.

85. Ищенко О.А., Ткачук А.В., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н., Демина Н.А. Расчет базовых плит разделительных штампов. *Ресурсосбережение и энергоэффективность процессов и оборудования обработки давлением в машиностроении и металлургии: Тези доповідей VII міжнар. наук.-техн. конф.*. Харків, 2015. С. 25–28.

86. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.Ю., Мазур І.В. Проблеми забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин: теорія, ме-

тоди та моделі. *Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки. Тези доповідей VI наук.-техн.конф*. Київ, Видавничий дім Дмитра Бураго, 2015. С. 186–187.

87. Васильєв А.Ю., Шаталов О.Є., Ткачук М.М., Дудар Є.Є., Литвиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Наукове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: Тези доповідей VII наук.-практ. конф.. Секція № 2.* Харків, Національна академія Національної гвардії України, 2016. С. 27–29.

88. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Бондаренко Л.Н., Неделько Е.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В.Исследование контактного взаимодействия в модифицированном зубчатом зацеплении: модели. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIV міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ»., 2016. С. 226.

89. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Бусяк Ю.М., Вакуленко В.В., Магерамов Л.К.-А. Моделювання контактної взаємодії індентора з перешкодою методами скінченних і граничних елементів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НАСВ, 2016. С. 59.

90. Васильєв А. Ю., Танченко А. Ю., Ткачук М. М., Скріпченко Н. Б., Лісовол Я. М. Обґрунтування структури та параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин за критеріями захищеності. *Наука: безпека країни та розвиток військово-промислового комплексу: Інформаційно-комунікативний захід / відп. ред. В.С.Шовкалюк.* Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2016. С. 32–36.

91. Ткачук М.А., Грабовський А., Ткачук М.М., Васильєв А. Комп'ютерне моделювання як основа проектно-технологічних рішень для елементів бойових броньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали конференції.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2016. С. 12–14.

92. Ищенко О.А., Ткачук Н.Н., Кротенко Г.А., Ткачук Н.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, НТУ «ХПІ», 2016. С. 27–30.

93. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н. Б. Контактное взаимодействие сложнопрофи-

льных деталей машин: модели, методы, закономерности. *Механіка машин – основна складова прикладної механіки: Матеріали Всеукраїнської наук.-техн. конф..* Дніпро, НМетАУ, 2017. С. 228–231.

94. Скрипченко Н. Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А., Ляшенко А. С., Хузяхметова М. Р., Погребняк Д. А., Головин А. М. Расчетно-экспериментальные исследования контакта сложнопрофильных тел: методология. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXV міжнар. наук.-практ. конф.. у 4 ч. Ч. I.* Харків, НТУ «ХПІ», 2017. С. 222.

95. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В., Луньов Є.О. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних та колісних машин на основі комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів і станів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф...* Львів, НАСВ, 2017. С. 26–27.

96. Ткачук М., Скріпченко Н., Бондаренко М., Набоков А. Контактна взаємодія складнопрофільних тіл: моделі, методи, закономірності. *13–й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2017. С. 52–54.

97. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Веретельник О.В., Набоков А.В. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей V міжнар. наук.-практ. конф..* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2017. С. 201.

98. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Саверська М. С., Бондаренко М. О., Зарубіна А. О., Кохановська О. В., Храмцова І. Я., Бондаренко Л. М. Формування єдиної розв'язувальної системи співвідношень для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності між ними нелінійно пружного шару. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXVI міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. I.* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 201.

99. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Грабовський А. В., Головін А. М., Ляшенко А.С. Теоретичні моделі для аналізу властивостей волоконних матеріалів у складі елементів озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та вій-*

ськової техніки сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф. Львів, НАСВ. 2018. С. 67–68.

100. Ткачук М., Танченко А., Грабовський А., Ткачук-мол. М. Методи визначення усталених режимів руху віброударних систем. *Вібрації в техніці та технологіях: Тези доповідей XVII міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НУ «Львівська політехніка», 2018. С. 25–26.

101. Ткачук М.А., Брагіна Л. Л., Ткачук М.М., Воронов Г.К.Обґрунтування конструктивних і технологічних параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей VI міжнар. наук.-практ. конф..* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2018. С. 149–150.

102. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Спеціалізовані програмно-модельні комплекси для аналізу деформування волоконних матеріалів та контактної взаємодії складнопрофільних тіл на основі мікро-макромеханічних моделей. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї міжнар. наук.-техн. конф.* Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2018. С. 19–21.

103. Ткачук Н.А., Ищенко О.А., Демина Н.А., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Шеманская В.В., Васильченко Д.Р. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали X міжнар. наук.-техн. конф.*. Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 109–110.

104. Мартиняк Р., Ткачук М. А., Слободян Б., Ткачук М.М., Маланчук Н. Локальне зношування тіл з регулярним рельєфом. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра* [Електронний ресурс]. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 2. С. 59–60.

105. Ткачук М.М., Хлань О.В., Заворотній А.В., Малакей А.М., Шуть О.Ю., Набоков А.В., Рікунов О.М. Проектно-технологічне забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин. *Збірник тез доповідей наук.-практ. конф. «Службово-бойова діяльність Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспе-*

ктиви. Секція 2 Технічне та тилове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Національна академія Національної гвардії України. Харків, 2019. С. 170.

106. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мухін Д.С., Ткачук М.А., Саверська М.С. Методи аналізу напружено-деформованого стану, контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл на основі фізично і структурно нелінійних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXVII міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. IV*. Харків: НТУ «ХПІ». 2019. С. 330.

107. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.В., Хлань О.В. Забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин на проектно-технологічних етапах. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Зб. тез доповідей міжнар. наук.-техн.конф.*. Львів: НАСВ, 2019. С. 9.

108. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Мікромакромеханічні моделі для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій. *14-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму*. Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2019. С. 17–18.

ABSTRACT

Tkachuk M.M. Micromechanical models and averaging methods for properties of materials with network microstructure and interface layers between contacting bodies. – Manuscript.

Thesis for Doctor of technical sciences degree in speciality 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”. Podgorny Institute for mechanical engineering problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, 2019.

Mechanics of deformable materials with network microstructure as well as contact interaction of bodies with an interface layers is a relevant and practically important field of research. Development of new analysis methods for the evaluation of the nonlinear behavior in the bulk or on the surfaces, correspondingly, with account for the internal microstructures such as fibers or polymer chains in the material volume and microscopic roughness or other intermediate layers poses a complex scientific problem that have not previously been given a complete and satisfactory solution.

The main goal of this thesis is to develop new methods for stress-strain analysis as well as new nonlinear models of material deformation and contact interface layers based on micromechanics of continuum and apply them in structural analysis of machine elements.

The objects of the studies are finite deformations of materials with network microstructures and nonlinear response of intermediate layers in contact of elastic bodies. The subject matter concerns physical and mathematical models of deformable solids based on the micromechanics of network structures down to the level of randomly arranged fibers or polymer chains, nonlinear models of contact interaction based on the evaluation of the effective response of the microscopic intermediate layers, solution methods for direct and inverse problems of contact interaction and geometric shape generation for complex smooth and rough structural elements, as well as the variation of the stress-strain state of structures due to alternations in the geometry parameters and the physical properties of the materials.

The developed theoretical basis of structural mechanics for network materials and contact interaction as well as the proposed justification for the novel materials and the geometrical shape by the strength criteria comprise the scientific novelty of this work. The

fundamentally new scientific problems that have been solved and the obtained scientific results are listed as follows.

New nonlinear continuum mechanics models of materials composed of the irregular network microstructure of elongated filaments are derived. They are based on a fundamentally new approach proposed by the author for the first time that provide a detailed statistical representation of random arrangement of the fibers and provide the effective homogenization of the material properties up to the macroscopic level. Compared to the existing traditional models and alternative micromechanically-based models it is more adequate in terms of the real response of the spatial networks to the deformation, because it does not utilize redundant artificial assumptions. This results in a much wider application and better performance of the derived models not only in the analysis of such materials but as well in the achieving of the required material properties.

New nonlinear mathematical models of surfaces and intermediate layers in contact interaction have been developed. They incorporate on a unified basis the effective models of roughness profile microcontact and the macroscopic impenetration conditions. These models are more accurate compared to the traditional linear equations when it comes to the contact of rough bodies with close geometries. On the other hand they lead to more complex though more adequate set of nonlinear equations and inequalities that form structurally and physically nonlinear problems. It broadens the predictive capacities of the structural analysis since an important factor is taken into account.

The boundary element method has been given further extended towards structurally and physically nonlinear problems of contact interaction. Nonlinear terms have been incorporated into the displacement compatibility conditions for the contacting surfaces whereas the traditional formulations are limited to the linear displacements only. The variational Kalker's principle was accordingly modified for this purpose. It enabled consistent discretization of the contact problem based on an approximation of the sought-for contact pressure distribution by pyramidal basis on a regular hexagonal boundary element mesh. Accordingly, the dimensionality of the discretized problem is reduced dramatically compared to the finite element method. This significantly improves the computational cost for the analysis of contact interaction of complex-shaped bodies while retaining the accuracy.

The resolving set of equations is derived by means of a newly developed approach based on a gradual enrichment of the factor space taken into account in the structural analysis of contact interaction of machine elements. It is distinguished from a traditional methods in the manner the new factors are added to the model of contact interaction. This is performed via supplementing the complementary energy functional by new additive terms that reflect certain dependance on the variable contact pressure and thus introduce the according response to the system. This simplifies dramatically the formulation of the mathematical model, which does not require any additional specific procedures. Accordingly this allows a straight-forward discretization of the problem and transition to the resolving set of nonlinear algebraic equations and inequalities.

New methods of auxiliary gap and variable compliance for the numerical solution of the structurally and physically nonlinear contact problems have been developed. These methods perform reduction of the initial problem to a sequence of structurally nonlinear though physically linear ones. Unlike the traditional methods, the developed procedures perform the update of the active set by adding of removing variables to or from the set of equations naturally every time the contact conditions are checked. As a result less nested iterations are required for convergence towards the exact solution of the contact problem compared to the traditional iterative techniques. These two methods can be clearly interpreted as repetitive approximation of the nonlinear intermediate layers by linear ones with additional gap or the modified compliance.

Fundamentally new regularities are discovered for the materials with network microstructures that undergo finite deformations under mechanical loads. Contrary to the standard models that in particular support the rule of mixtures or micromechanically justified models that discard the relation between the microstructural response and the parameters of the internal structure the proposed models provide qualitatively different predictions of material properties, in particular for the polymers with composite network microstructures. This creates a basis for the new material designs derived from the newly established compositions of materials that provide the desired mechanical properties of the mixture.

The averaging technique newly proposed by the author leads to an advanced homogenization approach. It solves a fundamental problem of micromechanics of fiber-based and polymer materials. The main advantage compared to the traditional approaches that rely on nonphysical assumptions consists in rigorous thermodynamical principles and naturally justified averaging micro-macrorelations. This leads to a more accurate evaluation of the macroscopic properties for materials with network microstructures. The obtained numerical results reproduce qualitatively and quantitatively the real behaviour of these materials at large strains. This ultimately makes possible to choose consciously the composition and microstructure parameters that provide the desired macroscopic properties of the newly developed materials.

A unified approach has been developed to solve the formulated problems. It connects micro- and macroscale models of material deformation for network microstructures in the bulk of a solid and contact interaction of bodies with rough or microstructurally modified surfaces and intermediate layers. The mathematical formulation is derived in a form of variational principles that lead to a well-posed problems of nonlinear optimization.

The advanced approach to the micromechanics of spatial network structures of elongated one-dimensional elements have been used to develop novel material models. The corresponding numerical methods have been proposed to solve the obtained systems of equations. The new micromechanical approach to the elastic homogenization of permanently bonded networks accounts initial orientation of the fibers and introduces a vectorial variable for the microstretch. It distinguishes this model from the rest of the alternative theories that are based on a simplified representation of the network. A totally new concept of maximal advance paths have been proposed. This have led to a well-justified kinematical relation between micro- and macrodeformations. The obtained equation restricts kinematically admissible rotations and elongations of the fibers to the actual macroscopic deformation gradient. The variational principle of minimum averaged energy forms the equilibrium conditions for the network response and the homogenized response of the material. A fundamentally new mechanism of irreversible deformations and failure was introduced for the discrete models of nonwoven materials. It models the relative sliding of connected fibers and their consequent pull-out.

New methods and models have been developed for the analysis of contact interaction of complex-shaped bodies with account for the micromechanical properties of surface and intermediate layers characterized by nonlinear local contact stiffness. A set of structurally and physically nonlinear relations have been derived. A weak problem statement has been formulated as a minimum principle for the complementary energy in terms of the variable contact pressure distribution. The problem has been discretized by means of a boundary element approximation. The derived set of algebraic equations and inequalities is solved by the newly developed methods of auxiliary gap and variable compliance. The effect of the geometrical shape and intermediate layer properties on the distribution of the contact pressure have been studied for representative cases. As a result qualitatively new regularities have been discovered. An inverse problem statement has been derived for the justification of the contact geometry. A correction of geometry profile by specially adjusted additional external loads has been proposed in order to achieve the desired distribution of the contact pressure.

The developed methods and models as well as the numerical analysis tools have been applied to a series of model and applied problems. The deformation behaviour of novel materials with network microstructures of one-dimensional elements has been determined. Macroscopical properties of these materials have been evaluated based on the special microscopic models and the homogenization methods. Regularities in contact distribution and its dependence on geometrical and physical factors have been determined for various complex-shaped bodies. New design solutions for machine elements that improve their strength and durability have been justified. The developed methods and analysis tools have been introduced into the design of new engineering products. Their implementation resulted in improved technical characteristics of protection, structural and functional elements of transport vehicles of special purpose, gear transmissions, technical equipment, hydrovolumetric drives and so on.

The conducted computational and experimental studies showed good agreement with the real response of network materials and the observed behavior of interacting elastic bodies with intermediate contact layer.

Two major scientific fields have been established: micro-macro mechanics of materials with random network microstructures composed of one-dimensional elements of enthalpic and entropic response; structurally and physically nonlinear problems of contact interaction of complex-shaped bodies with nonlinear intermediate layer.

Keywords: solid mechanics, materials with network microstructures, homogenization, maximal advance path, nonvowen material, complex-shaped body, auxiliary gap method, contact interaction, contact pressure, intermediate layer

LIST OF PUBLICATIONS

that present the main scientific results of the dissertation:

1. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.

2. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.

3. Linder C., Miehe C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 10. P.2134–2156.

4. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*. 2012. Vol. 92. P.779–2808.

5. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 3/7(93). P. 34–41.

6. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 5/7(95). P. 22–31.

7. Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saverska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No. 1/7 (97). P. 15–25.

8. Tkachuk M. M. , Grabovskiy A., Tkachuk M. A. , Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15.

9. Marchenko A., Kravchenko S., Tkachuk M., Tkachuk M., Saverska M. Discrete-Continual Strengthening Of Contacting Structural Elements: Mathematical And Numerical Modeling. *Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów Proceedings of the Institute of Vehicles*.

2018. No 1(115). P. 143–153.

10. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2012. № 10. С. 11–17.

11. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 2. С. 3–9.

12. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 1. Постановка задачи. 2. Кинематическая модель контакта гладких тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 3. С. 3–10.

13. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 3. Прямой и вариационный методы решения задачи негерцевского нормального контакта гладких тел. 4. Модель контакта шероховатых тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 4. С. 3–8

14. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2014. № 6. С.10–16.

15. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 7. С. 11–20.

16. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (окончание). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* 2014. № 8. С. 6–8.

17. Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н. К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 19. С. 135–143.

18. Ткачук. М.А., Устиненко О. В., Протасов Р. В., Ткачук М. М. До 125–річчя НТУ «ХПІ». Розвиток теоретичних основ синтезу геометрії та моделювання втомної міцності нових зубчастих зачеплень в університеті. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного привода. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 26. С. 3–8.

19. Ткачук М.М., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы. *Вісник СевНТУ. Вип. 110. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь: СевНТУ, 2010. С. 55–60.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ».2011. № 22. С. 123–140.

21. Грабовський А., Ткачук М., Артьомов І., Барчан Є. Підхід до ідентифікації моделі для визначення ударної сили у віброударній системі. *Машинознавство*. 2011. № 5–6. С. 21–26.

22. Ткачук М.М., Негробова Н.Б., Ткачук М.А. Контактна взаємодія деталей машин з витягнутими контактними областями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного привода. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 29. С. 129–134.

23. Ткачук Н.А., Грабовський А.В., Костенко Ю.В., Артемов И.В., Ткачук Н.Н. Численное моделирование динамических процессов в виброударных системах. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 42. С.179–187.

24. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. Механіка та машинобудування. 2011. № 2. С. 75–86.

25. Ткачук Н.А., Кохановская О.В., Негробова Н.Б., Зарубина А.А., Ткачук Н.Н.

Связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза для контактирующих сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 22. С. 121–147.

26. Ткачук Н.Н., Негробова Н.Б., Ткачук Н.А. Особенности распределения контактных зон и давлений при контакте тел конечных размеров по поверхностям близкой формы. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 36. С. 166–171.

27. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численный анализ влияния модели для определения силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Механіка та машинобудування.* 2012. № 2. С. 34–48.

28. Ткачук Н.Н., Костенко Ю.В., Ткачук А.В., Грабовский А.В. Изменение массы одного из компонентов и его влияние на характер динамических процессов в виброударных системах: модели и численные результаты. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 1(975). С. 71–85.

29. Костенко Ю.В., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Виброударные системы: определение периодических режимов движения *Вісник СевНТУ. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь, СевНТУ. 2013. С.81–85.

30. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А., Мухин Д.С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 41. С. 133–142.

31. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. №14 (1057). С. 155–169

32. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Литвиненко А.В., Скрипченко Н.Б., Тка-

чук Н.А. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством. *Проблемы машиностроения.* 2014. Том 17. № 4. С. 17–22.

33. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Головченко В.И. Модели и разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 29(1072). С.160–173.

34. Бусяк Ю.М., Ткачук Н.Н., Васильев А.Ю., Литвиненко А.В., Мазур И.В., Даньшин Ю.А., Шаталов О.Е. Общие подходы к оценке и обеспечению защищенности бронекорпусов легких по массе машин. *Інтегровані технології та енергозбереження.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 3. С. 154–163.

35. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С. Оценка влияния шероховатости на контактные давления в сопряжении сложнопрофильных тел. *Механіка та машинобудування*. 2014. № 1. С. 29–35.

36. Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Ткачук Н.Н., Касай Е.И., Крылюк Б.И. Влияние формы беговой дорожки на контактное взаимодействие с шаровыми поршнями радиальной гидропередачи. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 31 (1140). С. 81–100.

37. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А., Ткачук Н.А. Экспериментальное исследование контактного взаимодействия сложнопрофильных шероховатых тел с учетом податливости. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Проблеми механічного приводу. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 34 (1143). С. 124–129.

38. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Неделько К. Д. Влияние податливости шероховатого слоя на распределение контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 43(1152). С. 132–139.

39. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении. *Механіка та машинобудування.* 2015. № 1. С. 113–117.

40. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А. Расчетно-

экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016 № 12 (1184). С. 84–88.

41. Грабовський А.В., Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. та інш. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. Зб. наук. праць* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №18 (1190). С. 22–29.

42. Скрипченко Н.Б., Ткачук М.М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І. Контактна взаємодія складнопрофільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №39 (1211). С. 93–101.

43. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування.* 2016. № 1. С. 3–14.

44. Ищенко О. А., Демина Н. А.,. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовський А.В. и др. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 5(1227). С. 108–134.

45. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Саверська М.С. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами. *Механіка та машинобудування.* 2019. №1. С. 36–50.

46. Ткачук М.М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12(1234). С. 86–95.

47. Ткачук Н.А., Ищенко О. А., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А. Расчетно-

экспериментальное исследование элементов штамповой оснастки. *Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии.* Краматорск, 2017. № 3 (24Е). С. 11–19.

48. Іщенко О.А., Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мерецька К.О. Контактна взаємодія елементів розділових штампів: моделі, закономірності, критерії проектних рішень. *Механіка та машинобудування*. 2018. № 1. С. 48–59.

49. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 7 (1283). С. 132–141.

50. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Бондаренко М. О., Саверська М. С., Ткачук М. А., Тесля Д. О. Розрахунково-експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 1. С. 81–92.

51. Ткачук Н.Н. Анализ реакции волоконных материалов на действие нагрузок на основе микромеханических моделей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 25 (1301). С. 149–155.

52. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовский А. В., Саверская М. С., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Сериков В. И., Мерецкая К. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов механических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Транспортне машинобудування. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 29 (1305). С. 129–156.

53. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». *Серія: Динаміка і міцність машин. Зб. наук. праць.* 2018. № 33 (1309). С. 43–63.

54. Ткачук М. А., Іщенко О. А., Дьоміна Н. А., Ткачук М. М., Грабовський А. В., Шеманська В. В., Васильченко Д. Р. Контактна взаємодія елементів штампового

оснащення. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. Зб. наук. праць.* Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 41 (1317). С. 67–76.

55. Ткачук М.М. Метод пружної гомогенізації бімодальних мереж. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Машинознавство та САПР. Зб. наук. праць.* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 7 (1332). С. 107–113.

and those which prove approbation of dissertation materials:

56. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically based model for viscoelasticity of rubbery polymers. *10th GAMM Seminar on Microstructures.* TU Darmstadt, Germany. 2011. P. 46.

57. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven Computational Modeling of Polymers. *SimTech 2011. International Conference on Simulation Technology. Book of abstarcts: Advanced Mechanics of Multi-Scale and Multi-Field Problems.* University of Stuttgart. 2011. P. 26.

58. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven computational modeling of polymers. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* 2011. Vol. 11. P. 557–558.

59. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *COMPLAS XI. International conference on computational plasticity.* 2011. Barcelona, Spain.

60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *11th GAMM seminar on microstructures.* University of Duisburg-Essen, Germany. 2012.P. 46.

61. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *GAMM 2012. 83nd annual meeting of the international association of applied mathematics and mechanics.* TU Darmstadt, Germany. 2012. P. 198–199.

62. Tkachuk M., Linder C. Homogenization of random elastic networks with non-affine kinematics. *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. 2012. Vol. 12. P. 417–418.

63. Tkachuk M., Linder C. Dynamic relaxation with local artificial modes for the

analysis of floppy fiber networks. *PACAM XIII-6172. The pan american congress of applied mechanics. 2013. Houston, USA. Section 8-4. Biomembranes and tissues.*

64. Kostenko Yu., Tkachuk M., Grabovsky A., Tkachuk M.A. Subharmonic modes in vibroimpact systems. *The Fourth International Conference «Nonlinear Dynamics–2013». Proceedings.* Sevastopol (Ukraine). 2013. Pp. 83–86.

65. Kostenko Y.V., Artemov I.V., Tkachuk N.N. Sybharmonical modes in vibroimpact systems. *Международный научно-исследовательский журнал: Сборник по результатам XXV заочной научн. конф. Research Journal of International Studies.* Екатеринбург: МНИЖ. 2014. № 3, часть 2. С. 27–30.

66. Tkachuk M., M. Ganser, Linder C. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers. *WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics. Barcelona*, Spain. 2014.

67. Tkachuk M.A., Skripchenko N., Grabovskiy A., Tkachuk M.M. Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact. *Зб. «Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015)».* P. 393–398.

68. Tkachuk M.M., Kostenko Yu., Grabovsky A., Tkachuk M. A. Parameter analysis of vibro-impact machines dynamics with variable mass and stiffness. *Nonlinear Dynamics–2016: Proceedings of 5th International Conference*. Kharkov, NTU «KhPI», 2016. P. 238–244.

69. Tkachuk M. Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 2017*. P. 190–193.

70. Головченко В., Ткачук М., Шеремет В. Числове моделювання контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доповідей 2-й міжнар. наук.-практ. конф..* Львів, 2010. С. 41–42.

71. Ткачук М.М., Сердюк Ю.Б., Ткачук А.М. Контактна взаємодія плоского штампа з обмеженням з урахуванням жорсткості поверхневого шару. *10-й міжнар. симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Праці.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2011. С. 176–177.

72. Ткачук А.М., Ткачук М.М. Взаємодія плоского штампу з напівпростором: моделі та результати. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XIX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1* Харків, НТУ «ХПІ»,

2011. С. 200.

73. Ткачук М.М., Ткачук М.А., Ткачук А.М. Зв’язана задача геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контакту. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: Тези доповідей XX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2012. С. 220.

74. Скріпченко Н., Ткачук М. Варіант методу граничних елементів для аналізу контактної взаємодії гладких і шорстких тіл. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2013. С. 84–85.

75. Бондаренко М.А., Бондаренко О.А., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Кохановский В.И. Контакт сложнопрофильных тел: теория, методы и алгоритмы. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: Тези доповідей XXI міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2013. С. 182.

76. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численное определение влияния вида силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. научн. конф. в 10 т. Т. 9. Секции 3, 5, 7, 10 / под общ. ред. А.А. Большакова.* Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т; Харьков, НТУ «ХПИ», 2012. С. 94–98.

77. Литвиненко О., Ткачук М., Грабовський А. Проектно-технологічне забезпечення захищеності бронекорпусів легкоброньованих машин від дії динамічних навантажень. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2012. С. 122–123.

78. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Кохановська О.В., Веретельник О.В. Контактна взаємодія індентора з перешкодою. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ. Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф..* Львів, Друкарня АСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, 2014. С. 53–54.

79. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Бондаренко Л.Н. Влияние свойств шероховатого слоя на контакт сложнопрофильных упругих тел. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: Тези доповідей XXII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2014. С. 235.

80. Ткачук М., Литвиненко О., Грабовський А. Обґрунтування проектно-

технологічних рішень для забезпечення тактико-технічних характеристик легкоброньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей 4-й міжнар.наук.-техн.конф..* Львів, 2014. С. 7–8.

81. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Васильєв А.Ю., Мартиненко О.В. Проектно-технологічне забезпечення міцності бронекорпусів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф..* Львів, АСВ, 2015. С. 41–42.

82. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Середа А.В., Дзюба Ю.С., Іщенко О.А. Контакт складнопрофільних тіл: підходи, моделі, методи. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2015. С. 229.

83. Ткачук М.М. Мікромеханіка нетканих матеріалів. *12-й міжнар.симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Тез. доп.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2015. С. 25–26.

84. Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід*. Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2015. С. 234–238.

85. Ищенко О.А., Ткачук А.В., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н., Демина Н.А. Расчет базовых плит разделительных штампов. *Ресурсосбережение и энергоэффективность процессов и оборудования обработки давлением в машиностроении и металлургии: Тези доповідей VII міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, 2015. С. 25–28.

86. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.Ю., Мазур І.В. Проблеми забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин: теорія, методи та моделі. *Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки. Тези доповідей VI наук.-техн.конф*. Київ, Видавничий дім Дмитра Бураго, 2015. С. 186–187.

87. Васильєв А.Ю., Шаталов О.Є., Ткачук М.М., Дудар Є.Є., Литвиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Наукове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: Тези доповідей VII наук.-практ. конф.. Секція № 2.* Харків, Національна академія Національної гвардії України, 2016. С. 27–29.

88. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Бондаренко Л.Н., Неделько Е.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В.Исследование контактного взаимодействия в модифицированном зубчатом зацеплении: модели. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIV міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ»., 2016. С. 226.

89. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Бусяк Ю.М., Вакуленко В.В., Магерамов Л.К.-А. Моделювання контактної взаємодії індентора з перешкодою методами скінченних і граничних елементів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НАСВ, 2016. С. 59.

90. Васильєв А. Ю., Танченко А. Ю., Ткачук М. М., Скріпченко Н. Б., Лісовол Я. М. Обґрунтування структури та параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин за критеріями захищеності. *Наука: безпека країни та розвиток військово-промислового комплексу: Інформаційно-комунікативний захід / відп. ред. В.С.Шовкалюк.* Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2016. С. 32–36.

91. Ткачук М.А., Грабовський А., Ткачук М.М., Васильєв А. Комп'ютерне моделювання як основа проектно-технологічних рішень для елементів бойових броньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали конференції.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2016. С. 12–14.

92. Ищенко О.А., Ткачук Н.Н., Кротенко Г.А., Ткачук Н.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, НТУ «ХПІ», 2016. С. 27–30.

93. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н. Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машин: модели, методы, закономерности. *Механіка машин – основна складова прикладної механіки: Матеріали Всеукраїнської наук.-техн. конф..* Дніпро, НМетАУ, 2017. С. 228–231.

94. Скрипченко Н. Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А., Ляшенко А. С., Хузяхметова М. Р., Погребняк Д. А., Головин А. М. Расчетно-экспериментальные исследования контакта сложнопрофильных тел: методология. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXV міжнар. наук.-практ.*

конф.. у 4 ч. Ч. І. Харків, НТУ «ХПІ», 2017. С. 222.

95. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В., Луньов Є.О. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних та колісних машин на основі комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів і станів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф...* Львів, НАСВ, 2017. С. 26–27.

96. Ткачук М., Скріпченко Н., Бондаренко М., Набоков А. Контактна взаємодія складнопрофільних тіл: моделі, методи, закономірності. *13–й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2017. С. 52–54.

97. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Веретельник О.В., Набоков А.В. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей V міжнар. наук.-практ. конф..* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2017. С. 201.

98. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Саверська М. С., Бондаренко М. О., Зарубіна А. О., Кохановська О. В., Храмцова І. Я., Бондаренко Л. М. Формування єдиної розв'язувальної системи співвідношень для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності між ними нелінійно пружного шару. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXVI міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. І.* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 201.

99. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Грабовський А. В., Головін А. М., Ляшенко А.С. Теоретичні моделі для аналізу властивостей волоконних матеріалів у складі елементів озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НАСВ. 2018. С. 67–68.

100. Ткачук М., Танченко А., Грабовський А., Ткачук-мол. М. Методи визначення усталених режимів руху віброударних систем. *Вібрації в техніці та технологіях: Тези доповідей XVII міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НУ «Львівська політехніка», 2018. С. 25–26.

101. Ткачук М.А., Брагіна Л. Л., Ткачук М.М., Воронов Г.К.Обґрунтування

конструктивних і технологічних параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей VI міжнар. наук.-практ. конф..* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2018. С. 149–150.

102. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Спеціалізовані програмно-модельні комплекси для аналізу деформування волоконних матеріалів та контактної взаємодії складнопрофільних тіл на основі мікро-макромеханічних моделей. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї міжнар. наук.-техн. конф.* Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2018. С. 19–21.

103. Ткачук Н.А., Ищенко О.А., Демина Н.А., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Шеманская В.В., Васильченко Д.Р. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали X міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 109–110.

104. Мартиняк Р., Ткачук М. А., Слободян Б., Ткачук М.М., Маланчук Н. Локальне зношування тіл з регулярним рельєфом. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра* [Електронний ресурс]. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 2. С. 59–60.

105. Ткачук М.М., Хлань О.В., Заворотній А.В., Малакей А.М., Шуть О.Ю., Набоков А.В., Рікунов О.М. Проектно-технологічне забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин. *Збірник тез доповідей наук.-практ. конф. «Службово-бойова діяльність Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Секція 2 Технічне та тилове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Національна академія Національної гвардії України.* Харків, 2019. С. 170.

106. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мухін Д.С., Ткачук М.А., Саверська М.С. Методи аналізу напружено-деформованого стану, контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл на основі фізично і структурно нелінійних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здо-*

ров'я: Тези доповідей XXVII міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. IV. Харків: НТУ «ХПІ». 2019. С. 330.

107. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.В., Хлань О.В. Забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин на проектно-технологічних етапах. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Зб. тез доповідей міжнар. наук.-техн.конф.*. Львів: НАСВ, 2019. С. 9.

108. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Мікромакромеханічні моделі для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій. *14-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму*. Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2019. С. 17–18.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

КГП – поверхня, що генерується кінематично

МГЕ – метод граничних елементів

МГІР – метод граничних інтегральних рівнянь

МДЗ – метод додаткових зазорів

МЗКВ – метод змінних коефіцієнтів впливу

МЗПП – метод змінних параметрів податливості

МПВР – метод послідовної верхньої релаксації

МСЕ – метод скінченних елементів

НДС – напружено-деформований стан

СЕ – скінченний елемент

СЕМ – скінченно-елементна модель

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь

СПТ – складнопрофільне тіло

ТТХ – тактико-технічна характеристика

ТВН – теорія варіаційних нерівностей

УДМШ – умова деформації максимальних шляхів

УЗП – універсально-збірне пристосування

ПАСМ – повністю афінна сіткова модель

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Забезпечення конструкційної міцності елементів машин часто вимагає розробки нових моделей деформування матеріалу твердих тіл в об'ємі та умов контактного сполучення на границі з іншими тілами задля більш адекватного і точного розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) та обґрунтування прогресивних технічних рішень щодо виробів із високими технічними і тактико-технічними характеристиками (ТХіТТХ), що проектуються та виготовляються на підприємствах різних галузей. При цьому, серед інших, важливі наступні обставини. Перша обставина диктується широким використанням і прогресуючою розробкою сучасних нетрадиційних матеріалів, в т.ч. – мережевої (волоконної) структури. Традиційні моделі не підходять для опису їх поведінки. Крім того, традиційний феноменологічний підхід у цьому випадку є недостатнім, тому що дає інформацію тільки для конкретного типу матеріалу в заданих умовах роботи і у скінченному діапазоні навантажень. У той же час перед механікою деформівного твердого тіла стоять у цьому розрізі більш широкі завдання: визначення тенденцій зміни фізико-механічних характеристик залежно, наприклад, від складу і будови ланцюжків волоконних фрагментів; створення композиційних матеріалів із заданими властивостями; пояснення часто неочевидних тенденцій у зміні фізико-механічних властивостей матеріалів при варіюванні хімічного складу, температури, технології виготовлення тощо.

Усі ці обставини висувають на перший план мікромеханічні підходи, які надають можливості розрахунку макрохарактеристик на основі розгляду поведінки мікроструктури матеріалу аж до моделей статистичної механіки волоконних ланцюжків. Натепер у світі цьому напрямку досліджень приділяється широка увага, зокрема, у відомих наукових школах університетів ФРН: Штутгарта – проф. К. Міє (C. Miehe), Нюрнберга – проф. П. Штайнман (P. Steinmann), Дортмунда – проф. А. Менцель (A. Menzel), Граца – проф. Г. Хольцапфель (G. Holzapfel); Франції (Париж) – проф. Ле Таллек (Le Tallec); США (Стенфорд) – проф. К.Ліндер (C. Linder).

Однак розроблені до теперішнього часу підходи дають результати, що не повною мірою відповідають експериментальним даним і даним практичної експлуатації. Це пов'язано зі складнощами математичного моделювання поведінки статистично представницьких наборів волоконних ланцюжків, макромолекул або ниток матеріалу у взаємодії одне з одним (наприклад, так званих нетканих матеріалів). Таким чином, розробка нових підходів та формування на їх основі нових нелінійних математичних моделей для більш адекватного опису фізико-механічних властивостей нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою шляхом аналізу їх поведінки на рівні статистичної механіки наборів волоконних ланцюжків є актуальною науково-технічною проблемою.

Друга обставина зумовлена тим, що велика кількість машинобудівних конструкцій містить елементи, які знаходяться в умовах контактного силового та кінематичного сполучення. З метою зменшення контактного тиску в цих зонах проектувальники прагнуть використовувати як спряжувані поверхні близької, а також частково, фрагментарно або майже співпадаючої (конгруентної) форми. Це, наприклад, модифікація робочих поверхонь зубів різних зубчастих передач, поверхонь роликопідшипників, бігових доріжок гідрооб'ємних передач (ГОП) тощо. Традиційні методи моделювання контактної взаємодії призводять у таких випадках або до значних похибок в одержуваних результатах, або до надмірно громіздких чисельних моделей. Ще одним суттєвим чинником є недостатньо адекватне моделювання умов контактного сполучення на границях цих складнопрофільних тіл (СПТ). Найчастіше для цього записується, наприклад, умова непроникнення для гладких тіл у лінеаризованому вигляді. Як один із найбільш адекватних варіантів – урахування шорсткості, яка моделюється, наприклад, вінклеровим шаром, що дає дещо уточнені, але також лінеаризовані умови контактної взаємодії, які є умовами сумісності переміщень відповідних точок сполучених поверхонь.

У той же час сам поверхневий шар шорсткості (напилень, плівок, покриттів тощо) має у загальному випадку нелінійні властивості у залежності «тиск – переміщення». У результаті отримувані залежності «локальної» контактної жорсткості (податливості) від тиску, швидкостей, температури, режимів і технологій зміцнення тощо, що базуються на мікромеханічних моделях, стають істотно нелінійними. До теперішнього часу для формування цих залежностей залучаються або дані експериментальних досліджень, або різні спрощені моделі контактної взаємодії мікронерівностей у вигляді стрижнів, напівсфер тощо. У цьому випадку на основі одержуваних даних встановлюються різні моделі локальної податливості, які породжуються мікронерівностями поверхні (або іншими джерелами). Тут слід виділити, зокрема, роботи І.В. Крагельського, Н.Б. Дьомкіна, Персона (Persson BNJ), Грінвуда (Greenwood JA) та інших. У той же час дотепер відсутня єдина завершена теорія мікромеханіки контактної взаємодії. Однак відразу можна відмітити, що вже запропоновані до теперішнього часу нові моделі, які описують зв'язок «нормальні переміщення – контактний тиск», є істотно нелінійними, тобто такими, що не лінеарізуються без втрати фізичної адекватності, математичної коректності та чисельної точності.

Таким чином, у записі умов контактної взаємодії (непроникнення) з'являються нелінійні доданки, зумовлені нелінійністю фізико-механічних характеристик матеріалів шарів шорсткості, що принципово відрізняє їх від традиційних лінеаризованих. У результаті структурна нелінійність задачі доповнюється фізичною, причому друга присутня у співвідношеннях, які відображають суть першої. Для розв'язання таких задач, що містять нелінійні доданки в умовах контактної взаємодії, необхідне розроблення нових методів і підходів. Більш того, потрібне створення нових шляхів розв'язання обернених задач, тобто геометричного синтезу сприятливих за міцністю профілів поверхонь взаємодіючих тіл і фізико-механічних властивостей проміжних або поверхневих шарів. Ці обставини формують актуальну наукову проблему розроблення нових методів аналізу контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій (ЕМБК) з урахуванням не тільки структурної, а й додаткової фізичної нелінійності, а також обернених задач синтезу (тобто обґрунтування геометричної форми поверхонь і властивостей поверхневих шарів матеріалів контактуючих тіл за критеріями міцності).

Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою і в завершеному вигляді до теперішнього часу відсутнє. У свою чергу, потреби машинобудування у розробці методів розв'язання такого типу задач переоцінити складно, оскільки їх відсутність нівелює всі переваги, що досягаються при синтезі нових матеріалів, форм деталей і технологічних операцій обробки їхніх поверхонь. У результаті склалося протиріччя між потребами практики, з одного боку, і можливостями механіки деформівного твердого тіла, – з іншого. Розв'язання цього протиріччя передбачає вирішення актуальної науково-практичної проблеми, яка полягає у розробці та реалізації нових моделей деформування і методів розв'язання фізично і структурно нелінійних задач визначення напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл.

Таким чином, сформульована комплексна актуальна наукова і важлива для промисловості проблема аналізу деформування нових мережевих матеріалів та забезпечення конструкційної міцності елементів машинобудівних конструкцій на основі розроблення нових моделей і методів аналізу їх нелінійної поведінки як в об'ємі, так і на поверхні твердих деформівних тіл в умовах контактної взаємодії із урахуванням мікромеханіки взаємодії волоконних ланцюжків, ниток в об'ємі матеріалу та мікронерівностей шорсткості або інших проміжних шарів на поверхні контактуючих тіл відповідно. Це становить напрямок дисертаційних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась відповідно до тематичного плану НДР Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ») «Удар» (№ д.р. 0100U001086т); «Розвиток теоретичних основ синтезу геометрії та моделювання втомної міцності нових зубчастих зачеплень» (№ д.р. 0110U001233); «Розробка спеціалізованих програмно-модельних комплексів для комп'ютерного моделювання контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл» (№ д.р. 0113U000420); «Розробка методів та моделей механіки контактної взаємодії складнопрофільних тіл методом граничних елементів» (№ д.р. 01150U000521), «Забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей» (№ д.р. 0117U004880). У цих темах здобувач був виконавцем та керівником робочих груп за етапами досліджень. Крім того, здобувач був виконавцем договору ДЗ-55/2015 «Розроблення технології дискретного зміцнення для збільшення ресурсів елементів конструкцій військової та цивільної мобільної техніки» (№ д.р. 0115U006518), а також договорів про співпрацю між НТУ «ХПІ», з одного боку, і Державним підприємством «Завод ім. В.О. Малишева» (ДП «ЗіМ»), Державним підприємством «Харківське конструкторське бюро з машинобудування ім. О.О. Морозова» (ДП «ХКБМ»), Державним підприємством «Харківське конструкторське бюро з двигунобудування» (ДП «ХКБД»), Державним концерном «Укроборонпром», ПАТ «Азовмаш». Здобувач також є науковим керівником НДР (№ д.р. 0117U004970) «Підвищення характеристик виробів військового призначення шляхом аналізу та синтезу властивостей матеріалів на основі мікроструктурних моделей». Він був також виконавцем за господарчими договорами:

«Розробка математичних і числових моделей динаміки і напружено-деформованого стану елементів вібромашин та паливозаправників» (м. Маріуполь), № 12673 «Аналіз технічних характеристик елементів двигунів типу 6ТД і технологічних систем для виготовлення військових гусеничних і колісних машин» та № 12762 «Корпус» із ДП «ЗіМ». У звітах про виконані договори містяться матеріали дисертаційних досліджень здобувача, а особисту участь підтверджено відповідними актами і довідковими матеріалами про впровадження.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розроблення нових методів розрахунку напружено-деформованого стану шляхом створення і застосування у практиці розрахунків нелінійних моделей деформування матеріалу елементів конструкцій в об'ємі та на поверхні на основі мікромеханіки суцільного середовища.

Для досягнення поставленої мети в роботі сформульовані та вирішені наступні *завдання* досліджень.

1. Аналіз моделей деформування матеріалів та існуючих методів розрахунку напружено-деформованого стану елементів конструкцій із урахуванням мікроструктури в об'ємі та на поверхні контактуючих тіл.

2. Постановка задач, обґрунтування підходів, методів, моделей та засобів дисертаційних досліджень.

3. Розроблення нових методів розрахунку і моделей для опису макромеханічних властивостей композиційних матеріалів типу полімерів, мережевих волоконних і нетканих матеріалів на основі підходів статистичної мікромеханіки складних просторових структур одновимірних елементів.

4. Розроблення методів і моделей для аналізу контактної взаємодії СПТ із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів матеріалів, що визначають їхню локальну контактну нелінійну податливість.

5. Аналіз впливу варіювання геометричної форми поверхонь взаємодіючих тіл і фізико-механічних властивостей матеріалів проміжних шарів на напружено-деформований стан елементів конструкцій.

6. Розв'язання прикладних задач аналізу процесів деформування, напружено-деформованого стану та контактної взаємодії елементів конструкцій.

7. Розрахунково-експериментальні дослідження елементів конструкцій із мате-

ріалів із мережевою структурою та контактуючих тіл.

8. Упровадження результатів дисертаційної роботи у виробництво.

Об'єктом дослідження є процес *деформування* середовищ мережевої мікроструктури в об'ємі, а також контактуючих тіл із проміжними шарами на поверхнях, із урахуванням структурних і фізичних нелінійностей.

Предмет дослідження – нелінійні фізичні та математичні *моделі* деформування нових матеріалів на основі мікромеханіки мережевих структур на рівні статистичних наборів їх ланцюжків, нелінійні моделі контактної взаємодії на базі інтеграції *моделей* мікромеханіки контактної взаємодії поверхневих шарів матеріалів, *методи* розв'язання нелінійних прямих і обернених задач контактної взаємодії та обґрунтування геометричної форми складнопрофільних гладких і шорстких тіл, а також *закономірності* зміни напружено-деформованого стану конструкцій при варіюванні геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик матеріалів.

Методи дослідження. Для вирішення поставленої наукової проблеми використовувалися методи механіки суцільного середовища, зокрема, для формування рівнянь стану. Для виведення нелінійних рівнянь, що описують фізико-механічні властивості полімерних і волоконних матеріалів, залучалися і вдосконалювалися співвідношення мікромеханіки просторових ланцюжків, які перебувають у взаємодії. Перехід до макромеханічних формулювань здійснювався на основі розроблених нових методів просторової гомогенізації властивостей матеріалів. При формуванні розв'язувальних рівнянь аналізу контактної взаємодії ЕМБК були використані загальні співвідношення механіки контактної взаємодії, теорії варіаційних нерівностей (ТВН), варіаційного принципу Калькера і методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР). Локальні властивості податливості внаслідок шорсткості поверхонь контактуючих тіл або наявності проміжних шарів враховувалися за допомогою різних моделей контактування мікронерівностей відповідно до механіки контактної взаємодії. Дискретизація розв'язувальних співвідношень для аналізу НДС досліджуваних тіл здійснювалася на основі розвитку методу скінченних елементів (МСЕ) і методу граничних елементів (МГЕ). Для розв'язання побудованої системи співвідношень були залучені методи чисельного розв'язання нелінійних рівнянь, у т.ч. розроблені методи додаткових зазорів і змінних параметрів податливості як частинні варіанти таких методів, які мають природне трактування. Також із цією метою залучалися та модифікувалися методи Ньютона-Рафсона та релаксаційні процедури. Експериментальні дослідження здійснювалися з використанням методу контактних відбитків, орієнтованого на технологію із застосуванням чутливих до контактного тиску плівок, а також електротензометрії та голографічної інтерферометрії. Крім того, залучалися результати експериментальних досліджень деформування волоконних, нетканих та м'яких матеріалів, які одержані за допомогою комплексів лабораторного обладнання. Комплекс чисельних досліджень здійснювався у середовищі програмних пакетів ANSYS, Matlab, Maple та SolidWorks. Із їх використанням створювалися комп'ютерні моделі, а також оригінальний програмний код, який реалізує розроблені математичні моделі. Ліцензійне забезпечення цих програмних продуктів підтримується НТУ «ХПІ», університетами Штутгарта (Німеччина), Барі (Італія) і Стенфордським університетом (США), у яких свого часу здобувач був або штатним співробітником (докторантом), або стажувався.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у створенні теоретичних основ аналізу деформування нетрадиційних мережевих матеріалів, напруженодеформованого стану із урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл із нелінійно пружними проміжними шарами, а також обґрунтуванні властивостей нетрадиційних матеріалів і форми поверхонь контактуючих тіл.

Розв'язані та отримані такі нові наукові результати.

1. *Уперше* на основі принципово нових підходів до опису фізико-механічних властивостей на мікрорівні статистичних наборів волоконних ланцюжків і просторової гомогенізації їх макровластивостей розроблено нелінійні математичні моделі деформування матеріалів у вигляді хаотичної мережевої структури одновимірних фрагментів. Порівняно із традиційними створені моделі більш адекватно описують особливості деформування матеріалів у вигляді просторових хаотичних та упорядкованих мережевих структур, оскільки не залучають низки додаткових нефізичних гіпотез. Це створює принципово нові можливості не тільки для аналізу властивостей таких матеріалів, але й для створення нових із заданими властивостями.

2. *Уперше* розроблено нелінійні математичні моделі деформування контактуючих тіл із урахуванням властивостей поверхневих або проміжних шарів, які побудовані на основі поєднання моделей контактування мікронерівностей і умов непроникнен-

ня тіл одне в одне. Ці моделі, по-перше, фізично більш адекватно відображають механізм контактної взаємодії тіл, а, по-друге, на відміну від традиційних лінійних умов кінематичного контакту, призводять до більш складних, проте більш точних, нелінійних математичних моделей (тобто до формування т.з. структурно-фізично нелінійних задач). Це створює нові можливості аналізу контактної взаємодії елементів реальних конструкцій.

3. Отримав *подальший розвиток* метод граничних елементів у напрямку розв'язання структурно-фізично нелінійних задач контактної взаємодії, які містять нелінійні, а не лінійні, як у традиційних підходах, члени в умовах сумісності переміщень на границях контактуючих тіл. Із цією метою розроблено модифікацію варіаційного принципу Калькера на випадок фізично нелінійних проміжних шарів. Це створює можливість дискретизації задачі із залученням апроксимацій шуканого розподілу контактного тиску на мережі граничних елементів. Відповідно, різко знижується розмірність дискретної моделі порівняно, наприклад, із застосуванням МСЕ. При цьому досягається значне підвищення оперативності розв'язання задач аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл при збереженні точності.

4. *Уперше* створено підхід до формування системи розв'язувальних співвідношень на основі поетапного поповнення множини чинників, які ураховуються при аналізі контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. Він відрізняється від традиційних тим, що при додаванні нових чинників у модель контактної взаємодії пружних тіл модифікований функціонал додаткової енергії, визначений на розподілі контактного тиску, поповнюється відповідними додатковими доданками. Із використанням властивості адитивності стає можливим без додаткових процедур, що супроводжують традиційні підходи, формувати розв'язувальні співвідношення. Із урахуванням подальшої дискретизації задачі на єдиному полі розподілу контактного тиску стає можливим природний перехід до розв'язувальної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей.

5. *Уперше* розроблено методи додаткових зазорів і змінних податливостей для розв'язання структурно-фізично нелінійних задач аналізу контактної взаємодії шляхом зведення їх до серії структурно нелінійних, але фізично лінійних задач. На відміну від традиційних, розроблені методи мають природну можливість зміни кількості розв'я-

зувальних рівнянь, оскільки автоматична перевірка умов контактного сполучення або поповнює множину вузлів, у яких задіяні ці обмеження (тобто вони активні), або, навпаки, – зменшує. Таким чином, зменшується ступінь вкладеності та підвищується швидкість ітераційних процесів при уточненні поточного розв'язку задачі про контактну взаємодію порівняно із традиційними методами. Крім того, досягається природнє трактування задач про контактну взаємодію за наявності нелінійно пружних проміжних шарів як задачі із лінійно пружними шарами, проте із коригованими зазором або розподілом характеристик податливості.

6. *Уперше* на основі чисельного моделювання установлено закономірності деформування матеріалів із мережевою структурою під механічним навантаженням. Зокрема, на противагу традиційним моделям типу «правила сумішей» чи більш складних, але таких, що не враховують складний зв'язок мікроструктри та макровластивостей такого типу матеріалів, одержані неунімодальні залежності фізико-механічних характеристик матеріалу, складеного із полімерних матеріалів із різною довжиною макромолекул. Це дає змогу більш точно прогнозувати властивості створюваних матеріалів, а також установлювати вміст різних складових, який призводить до реалізації заданих результуючих властивостей матеріалу-суміші.

7. *Уперше* розроблено методи розв'язання задач мікромеханіки волоконних, нетканих і полімерних матеріалів, що відрізняються підходом до формування їх властивостей шляхом гомогенізації на основі створених нових моделей осереднення. Ці моделі, на відміну від традиційних, у яких вводяться додаткові «нефізичні» гіпотези, базуються на строгих термодинамічних співвідношеннях та природних підходах до осереднення. Цим створюються можливості більш високої точності мікромакроспіввідношень, що пов'язують мікроструктуру та макровластивості матеріалів мережевої структури із одновимірних елементів. Більш того, забезпечується відтворення у ході чисельного моделювання *якісних особливостей характеру деформування такого типу матеріалів*. І, нарешті, створюються передумови для визначення шляхів досягнення заданих макровластивостей цих матеріалів шляхом цілеспрямованого вибору їх складу та мікроструктури.

Підсумково означені компоненти наукової новизни формують два нових наукових напрямки: *мікромеханіка деформування нетрадиційних матеріалів* у вигляді мережевих структур одновимірних елементів із ентальпійною та ентропійною природою поведінки; *структурно-фізично нелінійні задачі аналізу контактної взаємодії* пружних тіл за наявності проміжного нелінійного шару. Обидва заявлені напрямки об'єднані, з одного боку, природою зв'язку властивостей досліджуваних систем пружних тіл на мікро- та макрорівні, а з іншого, – слабкими варіаційними формулюваннями та зведенням до проблем пошуку умовних екстремумів функціоналів додаткової енергії на множинах силових чинників, які задовольняють умовам типу нерівностей.

Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній роботі, базується на використанні строгого математичного апарату математики і механіки, забезпечується шляхом поетапної перевірки відповідності моделей, що будуються, основним фізичним законам і підтверджується в ході комплексу розрахунково-експериментальних досліджень, а також на основі позитивних результатів багаторічної експлуатації машинобудівних конструкцій, спроектованих і експлуатованих із використанням розроблених рекомендацій.

Практичне значення отриманих результатів полягає у створенні ефективних засобів розв'язання задач забезпечення конструкційної міцності для реальних машинобудівних конструкцій. Розроблені засоби відрізняються від відомих більш високим ступенем адекватності створених моделей, точністю одержуваних результатів і достовірністю рекомендацій, що надаються. У кінцевому підсумку, як реалізація теоретичних розробок, створено комплекс чисельних моделей та програмних модулів, що має можливість адаптації до дослідження різних об'єктів, оперативність та можливість спряження із системами автоматизованого проектування. Це робить його затребуваним на етапах проектування, технологічної підготовки виробництва і оптимізації параметрів нових конструкцій із метою забезпечення більш високих ТХіТТХ.

Крім того, з точки зору значущості для машинобудування, із використанням результатів дисертаційних досліджень одержані засоби та рекомендації, що мають безпосереднє застосування в таких напрямках: створення основи для забезпечення макромеханічних властивостей матеріалів на основі математичного моделювання мікронаборів макромолекул, волоконних ланцюжків і ниткових мереж, що надає можливості прогнозування властивостей не тільки існуючих, але й ще тільки створюваних матеріалів; розроблення бази для конструювання нових мережевих матеріалів із заданими фізико-механічними властивостями; більш адекватне моделювання розподілу контактного тиску у сполученнях складнопрофільних деталей; обґрунтування геометричної форми поверхонь контактуючих тіл за міцнісними критеріями, а також створення основи для аналізу і призначення режимів обробки та формування поверхневих шарів, що забезпечують необхідні трибомеханічні їх властивості.

Упровадження результатів дисертаційної роботи дає можливість забезпечувати необхідний рівень технічних характеристик продукції вітчизняного машинобудування, підвищувати конкурентоспроможність виготовлених виробів на світовому ринку та скорочувати терміни проектних досліджень. Результати работи впроваджені, зокрема, на ДП «ЗіМ», ДП «ХКБМ», ДП «ХКБД» (усі – м. Харків), ПАТ «Азовмаш», ПрАТ «АзовЕлектоСталь», науково-інженерному центрі керуючої компанії «Рейлтрансхолдінг» (усі – м. Маріуполь), а також у наукових дослідженнях НТУ «ХПІ». Від цих організацій одержані відповідні довідка та акти впровадження, які додані до дисертаційної роботи. В аспекті конкретного застосування результати дисертаційної роботи використані при розробці функціональних, захисних та силових елементів машин військового та цивільного призначення, зокрема, при розробці нових та модернізації існуючих баготовісних транспортних засобів спеціального призначення, гідропередач для перспективних трансмісій важких військових машин, елементів технологічних систем (верстатні пристосування, прес-форми), зубчастих передач тощо. За рахунок обґрунтування раціональних проектно-технологічних параметрів цих об'єктів із використанням результатів дисертаційних досліджень забезпечуються їх високі ТХіТТХ, скорочуються терміни та знижується вартість проектних досліджень. Сумарний економічний ефект при цьому складає 2,2 млн. грн.

Особистий внесок здобувача в роботи, виконані у співавторстві, полягає у наступному: у монографії [2] здобувачем розроблені базові підходи до формування та вирішення розв'язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії пружних тіл; у статтях [3–9] автором запропоновано загальні підходи до вирішення поставлених завдань, розроблені чисельні моделі, отримані і проаналізовані результати досліджень; у статтях [10–17] здобувач розробив розв'язувальні співвідношення для аналізу контактної взаємодії СПТ; статті [18, 20, 22, 24–26, 31] містять авторськи розробки із аналізу НДС, контактної взаємодії та синтезу геометричної форми, а також опис здійснених досліджень; статті [19, 21, 23, 27–29] містять розробки здобувача стосовно критеріїв для визначення розподілу сили контактної взаємодії пружних тіл; статті [30, 32–34] містять опис розробок здобувача зі створення розв'язувальних співвідношень МГЕ; у статтях [35–54] викладені результати дослідження контактної взаємодії ЕМБК; тези та матеріали конференцій [56–63, 66, 83, 99, 102, 108] містять опис моделей, запропонованих здобувачем для моделювання мікромеханічних моделей матеріалів мережевої структури; тези [64, 65, 68, 76, 100] описують критерії визначення сили ударної взаємодії пружних тіл; тези та матеріали конференцій [67, 70–75, 77–82, 84–98, 101, 103–107] описують результати дослідження контактної взаємодії та міцності ЕМБК.

Роботи [1, 5, 20, 46, 51, 55, 69, 83] написані без співавторів.

Усі основні результати, викладені в дисертації, належать здобувачу, а саме: розроблення нових підходів до постановки задач і методів їх розв'язання, створення нових і вдосконалення існуючих математичних моделей, побудова дискретизованих розв'язувальних співвідношень і розробка методів їх розв'язання та комплексу параметричних моделей та програмних модулів, розв'язання за їх допомогою тестових і прикладних задач, створення експериментального стенду, розроблення методики і здійснення експериментальних досліджень напружено-деформованого стану тестових конструкцій, аналіз та узагальнення результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Окремі фрагменти дисертаційної роботи доповідалися на міжнародних науково-технічних (МНТК) і міжнародних науково-практичних (МНПК) конференціях: OxMOS. Joint Workshop on Atomistic Models of Solids University of Oxford (UK, 2009); МНПК «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (Харків, 2010–2019); 4th GAMM Seminar Multiscale Material Modelling, Ruhr-Universität Bochum (2010, Germany); 10th GAMM Seminar on Microstructures, TU Darmstadt (2011, Germany); міжнародних симпозіумах українських інженерів-механіків (Львів, 2011–2019); GAMM 2011. 82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics, TU Graz (2011, Austria); GAMM 2012. 83nd annual meeting of the international association of applied mathematics and mechanics, TU Darmstadt (2012, Germany); МНТК «Проблеми якості і довговічності зубчастих передач, редукторів, їх деталей і вузлів» (Севастополь, 2011–2013), (Одеса, 2014–2019); ICMM2. 2nd International conference on material modelling (2011, Paris, France); COMPLAS XI. International conference on computational plasticity (Barcelona,2011, Spain); 11th GAMM seminar on microstructures, University of Duisburg-Essen (2012, Germany); ESMC 2012. 8th EUROMECH Solids Mechanics Conference. TU Graz (2012, Austria); ECCOMAS 2012. European congress on computational methods in applied sciences and engineering, TU Vienna (2012, Austria); PACAM XIII. The Pan American congress of applied mechanics (Houston, USA, 2013); МНТК «Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ» (Львів, 2014–2019); WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics (Barcelona, Spain, 2014); МНТК «Вібрації в техніці та технологіях» (Львів, 2014, 2015, 2018); МНТК «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2014, 2016, 2018); конференції «Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки» (Київ, 2014–2018); інформаційно-комунікативному заході «Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України» (Київ, 2015); МНТК «Ресурсозбереження та енергоефективність процесів і обробки тиском в машинобудуванні та металургії» (Харків, 2015, 2016, 2018); ICMD 2015. 56th International Conference of Machine Design Departments (Братислава, Словацька Республіка, 2015); інформаційно-комунікативному заході «Наука: безпека країни та розвиток військово-промислового комплексу» (Київ, 2016); VII НПК «Наукове забезпечення службово-бойової діяльності Національної Гвардії України» (Харків, 2016, 2017); 5th International Conference «Nonlinear Dynamics – 2016» (Харків, 2016); Всеукраїнській НТК «Механіка машин – основна складова прикладної механіки» (Дніпро, 2017); XVIII Міжнародному симпозіумі «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (Харків, 2017); МНПК «Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки» (Київ, 2017–2019); 7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry (Stuttgart, Germany, 2017); XVIII НТК «Створення та модернізація озброєння і військової техніки в сучасних умовах» (Чернігів, 2018); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики, присвяченої 90-річчю від дня народження академіка Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України» (Львів, 2018).

У повному обсязі робота була апробована і схвалена на семінарі кафедр «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин» і «Динаміка та міцність машин» НТУ «ХПІ» (Харків, 2019), а також на науково-технічній проблемній раді Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, 2019), семінарах в НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського» (Київ, 2019), Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2019) та Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2019).

Публікації. Основні наукові положення і результати досліджень за темою дисертаційної роботи опубліковано у 108-ми наукових працях [1–108], серед яких 2 монографії [1, 2], 53 статті у фахових виданнях за переліком МОН України [3–55] (6 із них – статті у виданнях, що індексуються науково-метричною базою SCOPUS [3–8]) та 53 тези та матеріали конференцій, у тому числі – й міжнародних [56–108].

Структура та обсяг роботи. Дисертація викладена на 464 сторінках, складається зі вступу на 14 сторінках, семи розділів на 339 сторінках, висновків і рекомендацій на 6 сторінках, списку використаних джерел, який містить 482 найменування на 41 сторінці, та 6 додатків на 58 сторінках. Дисертація містить 231 рисунок, з них – 136 на 56 повних сторінках та 23 таблиці, з них – 17 на 24 повних сторінках.

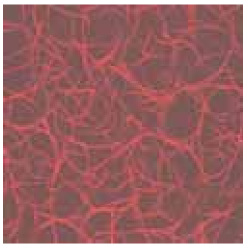
РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ ТА ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ МІКРОМАСШТАБНИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Методи і моделі мікромеханіки волоконних мереж

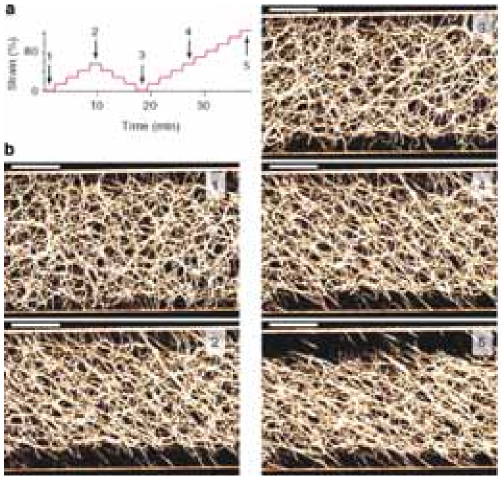
Для визначення сучасного стану теоретичних розробок із заявленої у роботі проблематики був проведений аналіз існуючих підходів, методів та моделей. Охвачені напрямки, які стосуються мікромеханіки волоконних мереж, мікромеханіки шорстких поверхневих шарів, матеріалів, математичних моделей контактної взаємодії складнопрофільних тіл та чисельних методів їх дискретизації, а також експериментальних методів досліджень.

Мережеві мікроструктури властиві багатьом матеріалам штучного, а також природного походження. Еластомери [109], гідрогель і м'які біологічні тканини [110–112] (рис. 1.1), неткані матеріали та піни [120–122] (рис. 1.2–1.4) – усі ці матеріали на мікроскопічному рівні складаються з подовжених одновимірних елементів, які можна в цілому охарактеризувати як волокна (нитки). Завдяки цій будові вони можуть набувати унікальних властивостей, здатності розтягуватися зі збереженням міцності (рис. 1.5). Коли ці м'які матеріали піддаються макроскопічній деформації, відповідним чином деформується і мікроструктура. Сили, що створюються деформованими нитками, а також їх взаємодія всередині нерегулярної тривимірної мережі, складають макроскопічний відгук матеріалу, що в свою чергу визначається механічними напруженнями. Відповідно, знання про мікромеханіку випадкових мереж є вкрай важливим для розуміння таких механічних властивостей як еластичність, що демонструються вищевказаними м'якими матеріалами. Ці мережі, по суті, є дискретними механічними системами, де окремі волокна є основними структурними одиницями.

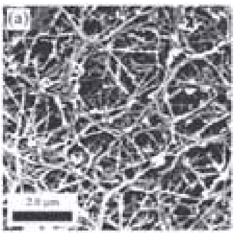
Визначення механічних властивостей подібних матеріалів за їхньою будовою з урахуванням дійсних механізмів деформування вимагає спеціальних методів осеред-



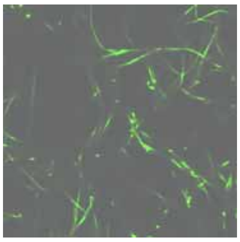
а



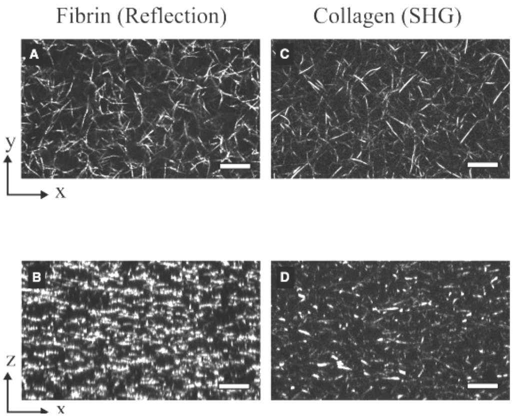
б



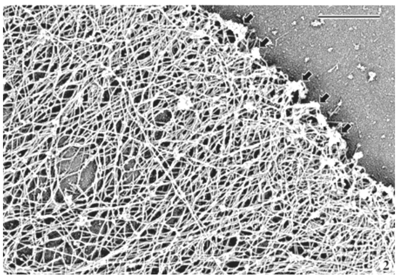
г



д

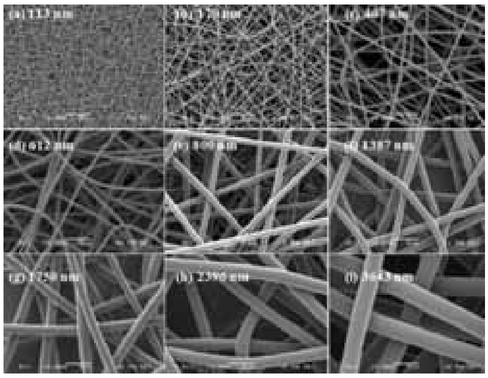


в

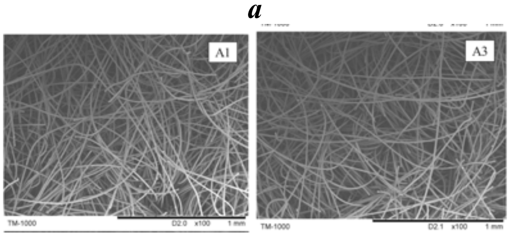


е

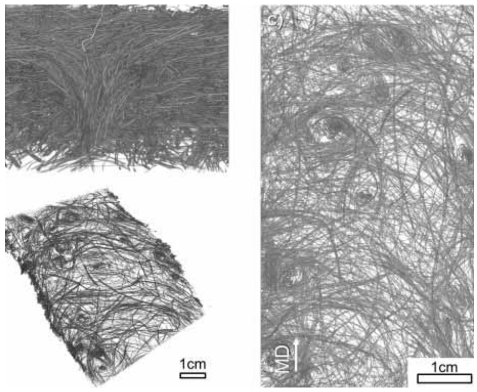
Рисунок 1.1 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів: біополімери: *а* – [113]; *б* – [114]; *в* – [115]; *г* – [116, 115]; *д* – [118]; *е* – [119]



а

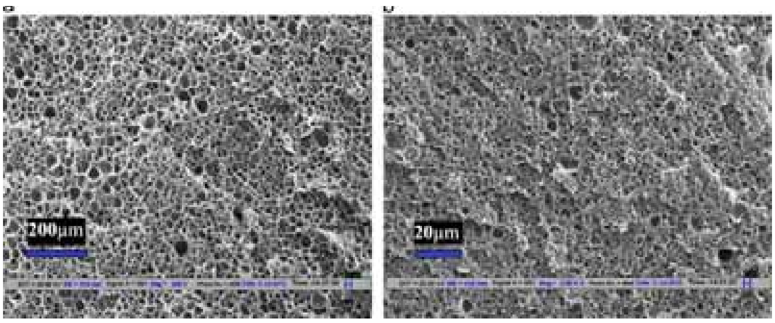


б

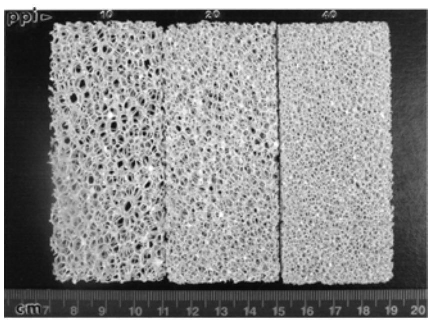


в

Рисунок 1.2 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів (пробивні неткані матеріали): *а* – [123]; *б* – [124]; *в* – [125]

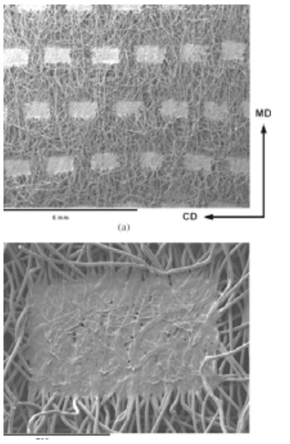


а

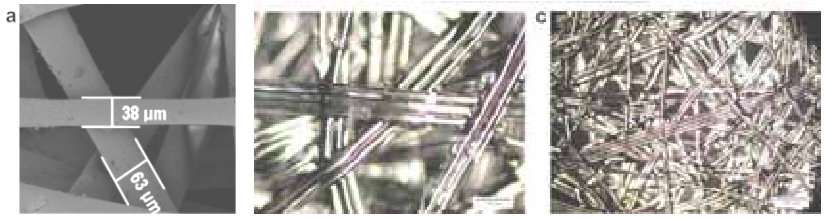


б

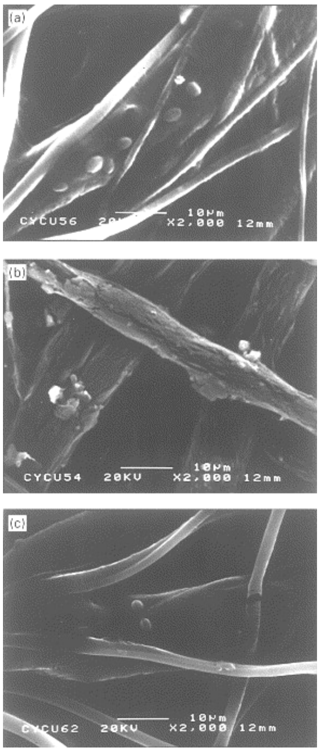
Рисунок 1.3 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів (мікропористі метали та полімери): *а* – [131]; *б* – [132]



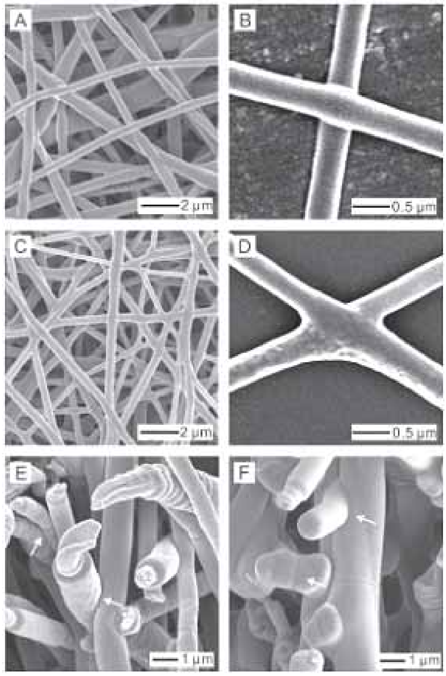
а



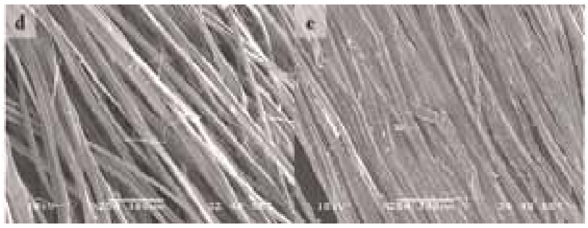
б



в

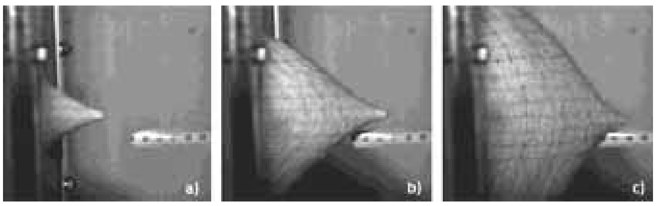


г

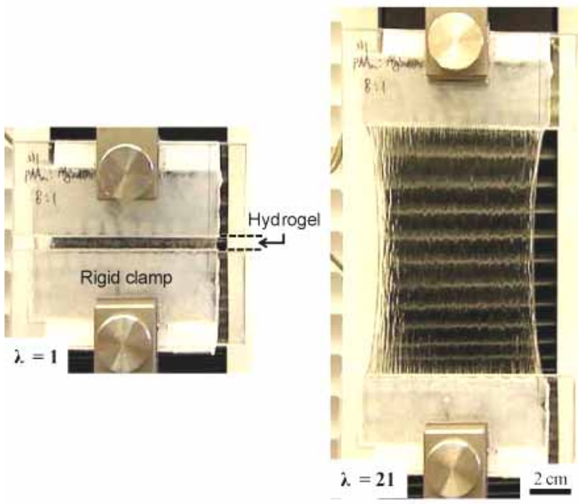


д

Рисунок 1.4 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів (термічно та хімічно поєднані неткані матеріали):
а – [126]; *б* – [127]; *в* – [128]; *г* – [129]; *д* – [130]



а



б

Рисунок 1.5 – Унікальні властивості волокнистих матеріалів:
а – нетканий текстиль з поліетиленових волокон для балістичного захисту [133, 134];
б – надзвичайно гнучкий та міцний гідрогель, утворений із іонно зшитого альгінату та ковалентно зшитого поліакриламіду [135]

нення. Вони є принципово відмінними від апарату добре розвиненого для гомогенізації матеріалів із суцільною мікроструктурою, в тому числі композитних матеріалів, зміцнених волокнами різної природи [136–141]. Зокрема для подібних матеріалів із випадковою будовою розроблено метод умовних моментів [137, 138]. Визначення ефективних механічних властивостей таких композиційних матеріалів вимагає отримання розв'язку задачі пружності для відповідної неоднорідної мікроструктури. Якщо вона є випадковою та задовольняє умовам ергодичності, то цей розв'язок можна отримати відносно усереднених напружень та деформацій, що істотно спрощує вихідну проблему. Зокрема це вимагає розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно вказаних величин.

Цей підхід широко застосовується у випадку трансверсально-ізотропних та ортотропних матеріалів, для яких він дозволяє ефективно обчислити пружні константи, наприклад за вмістом волокон зміцнення та їхніми властивостями. Більш того, його можна поширити також на фізично нелінійні матеріали, у випадках, коли напруження в матриці або волоконному наповнювачі нелінійно залежать від відповідних деформацій [139–141]. Це особливо актуально для використання полімерних матеріалів за високих температур, скловолокна. Однаково нелінійним є відгук матеріалів, що зазнають крихкового руйнування: кераміка, вуглецеві композити тощо. Тим не менше, ця теорія обмежена малими деформаціями, тобто залишається геометрично лінійною, адже в ній встановлюються співвідношення між гранично малими деформаціями та дійсними напруженнями Коші.

В роботах [142–145] розроблено підхід до обчислення осереднених властивостей матеріалів типу гуми, підсиленої впорядкованим кордом. Для цього розроблені відповідні енергетичні умови узгодження, за якими уточнюються ефективні пружні сталі композита відповідно до взаємного розташування матриці та волокна та їхнього сумісного деформування. В роботі [142] отримані співвідношення для визначення пружних сталих гумокордового матеріалу з урахуванням нестисності гуми та трансверсально-ізотропних властивостей корду. За ними обчислено залежність ефективних пружних констант від об'ємного вмісту корду в композиті. Також цей підхід може бути застосований для визначення ефективних механічних характеристик композиційного матеріалу, що містить два сорти однаково спрямованих армуючих волокон [143]. В цілому, як показано в роботі [144], процедура осереднення у випадку транверсальної ізотропії передбачає розв’язання двох крайових задач: зсув поперечно ізотропного суцільного циліндра, що відтворює волокнистий композитний матеріал, та комбінований поздовжній зсув порожнього та суцільного циліндрів, що відповідають матеріалам матриці і волокна.

У роботі [146] запропонована математична модель деформування сферолітної структури полімерів, що відбувається під час орієнтаційної витяжки. При цьому відбувається зміна форми сферолітів з сферичної на еліпсоїдальну. Відповідно до цієї моделі визначаються кінцеві пружні властивості полімерного матеріалу.

Композитні матеріали мають широке застосування в авіабудівній та ракетобудівній областях [147–149], тож визначення їхніх пружних властивостей є актуальною науково-практичною проблемою.

У роботі [150] за допомогою методу граничних елементів досліджено деформування включень у ковзному контакті з нескінченною еластичною матрицею. Зокрема розглянуто випадок коротких циліндричних волокнон, що використовуються у нанокомпозитах. Встановлено, що розподіл напружень та деформацій в матриці за ковзного контакту зі скінченним циліндричним волокном внаслідок застосування тривісного стиснення має якісні та кількісні відмінності від тих, що мають місце у випадку ідеального сполучення між матрицею та волокном. Цей фактор слід враховувати при моделюванні ефективних механічних властивостей волокнистих композитів за обмеженного зчеплення між матрицею та наповнювачем. У подальшому [151] було також розглянуто композиційний матеріал із вигнутими циліндричними волокнами. Мікро-макро формулювання засновувалося на обчисленні деформування репрезентативної комірки та осередненні поля пружних деформацій. В кінцевому результаті на макрорівні композиційний матеріал описується за моделлю Морі-Танака.

У роботі [152] до композитного матеріалу пневматичних шин застосовується чисельна процедура моделювання репрезентативного об’єму матеріалу, в якому повністю відтворюється його внутрішня структура. Схожий дворівневий підхід до обчислення ефективних пружних властивостей тканих композитів [153]. На рівні мікромасштабу усереднені властивості плетеного полотна обчислюються на основі відомих властивостей волокна та матриці. На рівні макромасштабу аналізується напружений стан репрезентативного об'єму тканого композиту та визначаються параметри тензору пружності еквівалентного однорідного матеріалу. У цьому випадку використовуються ефективні пружні характеристики ниток, виявлені на першому етапі, і враховуються обертання основних напрямків пружних властивостей ниток.

Існуючі теорії та моделі випадкових мереж у літературі, зокрема, ті, що подані на рис. 1.6, можна класифікувати, як це здійснено у табл. 1.1. Перша категорія містить у собі дискретні моделі, які відтворюють мікроструктуру у деталях. Такий підхід дає можливість досліджувати мережі різної природи і виявляти вплив різних специфічних явищ, таких як ентропійний та ентальпійний відгук волокон на осьове розтягнення або їх вигин [154–156], початкові внутрішні напруження [157, 158] або теплові флуктуації місць з'єднань волокон [159].

Моделювання мікромережі забезпечує глибоке розуміння мікроскопічних механізмів, які відповідають за загальну макроскопічну поведінку цих м'яких матеріалів. Тим не менш, вони часто вимагають великих обчислювальних витрат, а їх результатам властива статистична похибка, яка відрізняється від однієї випадково генерованої мережі до іншої.

Альтернативний клас моделей, наведених у табл. 1.1, заснований на підході осереднення для опису випадкових мереж. Вони зазвичай використовуються для обчислення поведінки матеріалу у скінченно-елементному моделюванні суцільних тіл. Ці теорії розглядають великі мікроскопічні мережі у термінах осереднених розподілів замість їх детальної дискретної будови. Зокрема, розглядаються розподіли величин, які описують мікродеформації мережі. Їх зв'язок із макроскопічною деформацією, яка є основним зовнішнім впливом на матеріал, є ключовим питанням, яке вирішується у цих осереднених моделях по-різному. Очевидне припущення полягає в тому, що мікродеформації і визначувані статистичні розподіли змінюються за афінним співвідношенням згідно градієнту деформації твердого тіла. До такого підходу вдаються класичні теорії пружності каучука Куна і Грюн [160] або Трелоара і Рідінга [162], а також багато інших більш сучасних моделей еластомерів та інших волокнистих матеріалів.

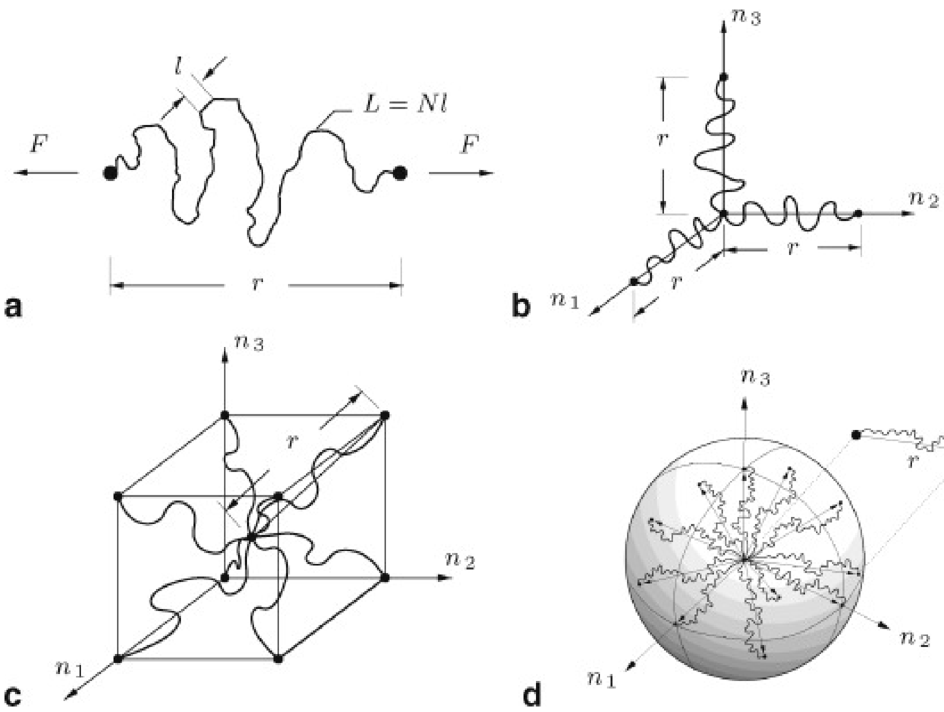


Рисунок 1.6 – Схематичне зображення різноманітних мережевих моделей: триланкової та восьмиланкової моделі, а також мікросферної моделі [136]

Таблиця 1.1 – Огляд випадкових мережевих моделей

Посилання	Геометрія	Кінематика	Мікромеханіка
	Дискретні моделі		
[154–159]	Випадковим чином генерується дискретна сітка волокон	Розтягування і вигин волокон за відповідними ступенями вільності	Загальна деформація мережі досягається в статичній або термодинамічній рівновазі
	Осереднені мережеві моделі		
[160–163]	Статистичний розподіл геометричних параметрів волокон у мережі	Поздовжнє розтягування волокон з цього розподілу	Афінний розподіл розтягування мікроволокон
[164–167]	Вісім волокон, розташованих на діагоналях паралелепіпеда	Ідентичне розтягування всіх восьми волокон у репрезентативному осередку	Розтягування сторін осередка відповідно до напрямів і значень головних деформацій
[168, 169]	Повний ізотропний розподіл волокон за їх початковими орієнтаціями	Поздовжнє розтягування волокон як функція їх первинної орієнтації	Неафінна мікродеформацій визначається з принципу мінімуму осередненої енергії

Завдяки простоті афінних співвідношень у багатьох випадках можливо обчислити осереднені напруження як функцію макроскопічних деформацій у аналітичній формі. Крім вищезгаданих теорій пружності гуми, з яких безпосередньо випливають співвідношення неогукового матеріалу, можна навести приклад аналітичних моделей пружності та міцності для паперу [162].

Одночасно з цим навколо афінної кінематики мікродеформацій волокон побудовано багато чисельних моделей, переважно об'єднаних загальним підходом. Він полягає в тому, що сукупність волокон у сітчастій мікроструктурі асоціюється із простором їх орієнтацій у деформованій конфігурації, так званій мікросфері [170]. Кожна окрема точка на цій сфері визначає одиничний вектор первинної орієнтації певної частки волокон у мікроструктурі. Якщо прийняти припущення, що поведінка однаково орієнтованих волокон збігається, тоді всі мікроскопічні величини можна розглядати як однозначні функції, визначені на мікросфері. Так, наприклад, в межах афінної кінематики подовження волокон визначається як норма вектора орієнтації в метриці тензора деформацій Гріна.

Такий підхід дає змогу визначати осереднений відгук матеріалу на деформації шляхом інтегрування на мікросфері енергії подовження волокон. Обчислення осереднених величин відбувається із використанням спеціальних квадратурних формул на одиничній сфері, таких як запропоновані у [171]. Квадратурні точки утворюють у просторі орієнтацій дискретну структуру, яка наближає розподілену у всіх можливих напрямках систему волокон до оригінальної мікроструктури. Кожний окремий дискретний напрямок можна подати як сконцентрований пучок волокон, який представляє певну частку сітки і має відповідну вагу у загальній структурі.

Незважаючи на всі переваги простоти такого підходу, є досить очевидним, що обмеження афінними деформаціями є занадто жорсткими для неупорядкованих мереж з безліччю ступенів свободи. Про недосконалість використовуваних припущень свідчать також і експериментальні дані [172], а також результати дискретного моделювання випадкових мереж [155, 156]. Багато явищ і властивостей, притаманних м'яким речовинам, жодним чином не узгоджуються з тим, що передбачається афінними мікромеханічними моделями. Зокрема, розбіжність із афінною теорією демонструє поведінка еластомерів при істотному одноосьовому і двовісних розтягненнях, адже вона не пояснює різниці границі, на якій відбувається різке зростання пружного модуля матеріалу між цими двома типами навантаження, яка спостерігається в експериментах [168, 172, 173]. Ця обставина заважає використанню неогуковскої моделі при деформаціях, що перевищують 50%. Іншим прикладом може служити поведінка біологічних гелів, що складаються з напівгнучких волокон. Перехід від м'якого режиму цих матеріалів, пов'язаного з вигином волокон, до посилення пружного відгуку, коли волокна починають зазнавати поздовжнє розтягання, також не відповідає афінним припущеннями, за якими волокна скорочуються або подовжуються при будь-яких ненульових деформаціях [155–1572, 174]. Для наведених прикладів розбіжність експериментальних спостережень із теоретичним прогнозом становить для афінної кінематики не просто кількісну відмінність, а й досягає якісного розриву.

Істотна неафінність мікродеформацій у матеріалах із волокнистою мікробудовою викликана особливостями механічного відгуку волокон та їх взаємодії у мережі одночасно з неоднорідністю і нерегулярністю дискретної мікроструктури, що містить безліч ступенів вільності. Ця внутрішня свобода передбачає можливість для волоконної мережі слідувати макроскопічній деформації багатьма способами, відмінними від афінної траєкторії. Визначення адекватних кінематичних співвідношень становить головне завдання мікромеханічних обґрунтованих моделей для м'яких матеріалів з мережевою мікробудовою.

Існує кілька підходів до урахування неафінних деформацій мікроволокон. Найпростіші з них штучно подають матеріал у точці еквівалентною тривимірною структурою. Ця структура може складатися з трьох груп волокон, орієнтованих уздовж головних напрямків деформації [175], або чотирьох [176], спрямованих в кути піраміди, або восьми, розташованих на діагоналях куба, як було запропоновано Арруда і Бойс [164]. Остання набула найбільшого поширення завдяки простоті виразу щодо першого інваріанта тензора деформацій, а також високій точності наближення реальної поведінки гуми при малих і великих ушкодженнях.

Проте, такі штучні конструкції, які представляють деформації мереж, істотно обмежують коло властивостей, які можна за їх допомогою змоделювати. Набагато більш універсальною виявилася відома неафінна модель мікросфери, яка була запропонована Міє і співавторами у роботі [168]. Ця модель розглядає повний простір орієнтацій волокон, однак, на відміну від раніше запропонованих підходів, при цьому відмовляються від прямих співвідношень між макроскопічною деформацією і мікроскопічними деформаціями волокон. Осьове подовження при цьому визначається як невідома функція на мікросфері орієнтацій, варіація якої обмежується кінематичними умовами зв'язку. Запропоноване кінематичне співвідношення засноване на феноменологічних міркуваннях без відповідного фізичного обґрунтування та містить штучний додатковий параметр.

Для визначення невідомих мікродеформацій у рамках цього підходу застосовується принцип мінімуму, а саме за дійсні подовження волокон приймаються такі, які мінімізують осереднену енергію деформації сітки за умови виконання вищевикладеного кінематичного обмеження. У випадку гумоподібних матеріалів енергія розтягування макромолекулярних ланцюжків є опуклою функцією, отже, задача умовної мінімізації має єдиний розв'язок за будь-яких накладених макродеформацій. Більш того, для запропонованого кінематичного співвідношення у роботі [168] розв'язок можна отримати у замкненій формі незалежно від моделі розтягування ланцюгів. Показово, що при певному значенні додаткового параметра цей вираз для розтягування виявляється ідентичним тому, який постулюється восьмиланковою моделлю [172]. Внаслідок цього розв'язком, крім мінімуму осередненої енергії, також визначаються і осереднені механічні напруження, а також пружний модуль матеріалу за скінченними деформаціями. Всі ці величини обчислюються за відомими квадратурними формулами [171, 177, 178].

Завдяки досить гнучкому формулюванню неафінної моделі, в її рамках на додаток до осьового розтягування може бути урахування і поперечного стиснення полімерних ланцюгів за так званою трубною теорією пружності еластомерів, яка розглядає взаємні обмеження поперечного руху ланцюгів у полімерних мережах [179, 180], як це показано на рис. 1.7. Із цією метою досліджуються додаткова кінематична величина стиснення мікротрубки, яка прив'язується до макроскопічних деформацій площин за допомогою співвідношень, аналогічних тим, які отримані в моделі для осьових розтягувань. Саме завдяки цьому компоненту вдається відтворити характерний S-подібний вигин кривої пружності, який демонструють натуральні та синтетичні каучуки.

Також на мікросфері можуть визначатися й інші мікромеханічні змінні, за допомогою яких можуть бути описані різні властивості ланок та їх поведінка. Зокрема, авторами оригінального підходу модель була поширена на явища в'язкопружності [181] (рис. 1.8), ефект пошкодження Мюлліна [182] і пластичності [183, 184].

Узагальнене формулювання моделі мікросфери, засноване на загальних засадах механіки стандартних дисипативних систем, запропоновано в роботі [185]. Зокрема представлено урахування релаксаційних процесів в межах неафінної кінематики деформування мережі, що врешті описують в'язкопружну поведінку еластомерів.

Такі складні процеси як ремоделювання м'яких тканин простіше описуються в рамках восьмиланкової моделі, у яку додається змінна трансверсальної анізотропії [165, 166]. Для опису пружності кров'яних судин у роботі [186] використовується осереднення на мікросфері у межах афінної кінематики, причому анізотропія цих тканин подана неоднорідною щільністю розподілу орієнтацій різних типів волокон. У [187, 188] через зміни цього розподілу у часі визначається ремоделювання м'яких тканин.

У роботі [189] застосовано структурно-феноменологічний підхід до визначення напружень в розведених розчинах недеформівних ланцюгових макромолекул полімерів з ньтонівськими розчинниками. Він полягає у моделюванні цих матеріалів як континууму з єдиним внутрішнім мікропараметром - одиничним вектором, що характеризує орієнтацію недеформівної макромолекули. Осереднення здійснюється за допомогою функції розподілу орієнтацій макромолекул за кутовими положеннями, яка визначається згідно як розв'язок рівняння гідродинамічного руху макромолекули Сайто у в'язкому середовищі.

Процесами, пов'язаними з переорієнтацією неіндукованих дипольних моментів в полімерних системах, також можуть пояснюватися зміни у часі електричних властивостей деяких наноструктурованих полімерів [190].

Афінна кінематика застосовується і в моделях актинових мереж, у яких додатково розглядається податливість з'єднуючих протеїнів [191] і відносне ковзання філаментів у з'єднаннях [192].

У роботах [193–195] явище кристалізації гуми при розтягуванні моделюється у межах повністю афінної кінематики, для кожної орієнтації пропонується одновимірна термодинамічна модель кінетики процесів, осередненими звичайними процедурами на мікросфері. Дещо інший підхід [169] передбачає певну ступінь неафінності деформацій, яка регулюється окремою складовою штрафу у записі енергії. У роботах [196] та [197] використовують неафінну модель мікросфери Міє та ін. [168] (схема останньої подана на рис. 1.9).

Мікромеханічно обгрунтована модель деформаційної кристалізації гуми сформульована відносно значень та напрямків головних розтягів [199]. Цей підхід обґрунтовується тим, що кристаліти в основному формуються вздовж навантаження матеріалу.

Модель деформівної кристалізації гуми та її адаптація до мережевої моделі запропоновані в роботах [200, 201]. Життєвий цикл кристаліту визначається уточненими кінетичними рівняннями, що відображаються зародження, ріст та повернення до аморфної фази. Відповідно, ці співвідношення застосовуються до кожного представницького ланцюжка в повній моделі мережі.

Для моделювання в’язкопружної поведінки застосовуються як неафінні [198], так і афінні [202] моделі осереднення мереж. Разом із тим залишається привабливою модель в’язкопружності Бекстром і Бойс [203, 204], яка заснована на восьмиланковому поданні деформації.

Мікромеханічні моделі пошкоджуваності гумоподібних матеріалів і біологічних тканин переважно ґрунтуються на афінному розтягуванні волокон [156, 205]: волокна, орієнтовані ближче до напрямку головного навантаження, підлягають руйнуванню раніше інших волокон.

Голкопробивне неткане полотно також може застосовуватися як один із шарів у поєднані із стандартними тканими матеріалами [206]. При цьому досягаються значно вищі показники балістичного захисту за аналоги, що не мають подібного шару. Енергія, що розсіюється, виявляється вищою за ту, що сумарно була б дисипована в окремих складових гібридного полотна.

Окремий випадок представляють неткані полотна незчеплених волокон. Вони тримаються докупи за рахунок виключно адгезії випадково розташованих у

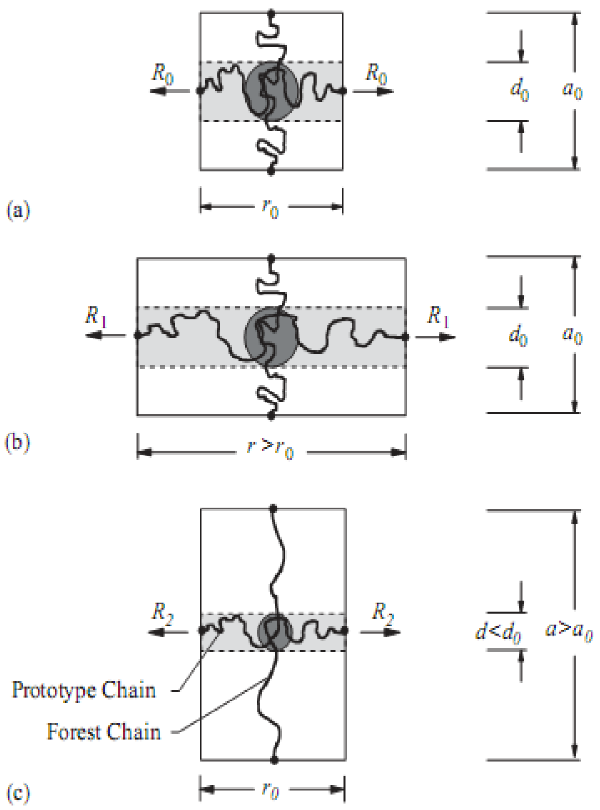


Рисунок 1.7 – Урахування механізму обмеження бічного руху макромолекул в моделі неафінної мікросфери [170]

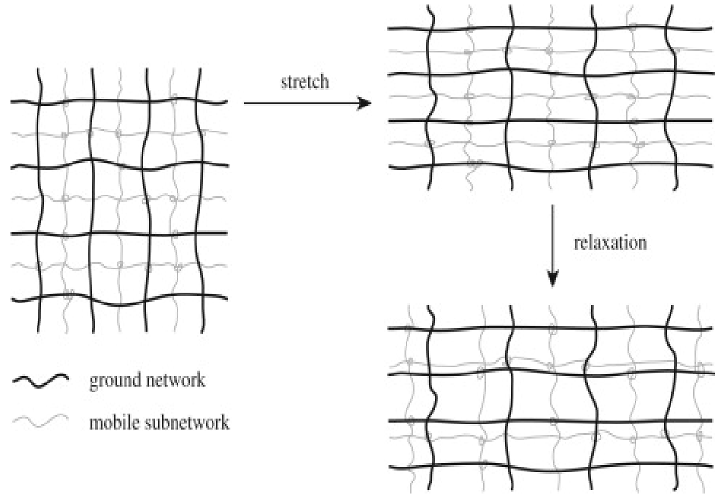


Рисунок 1.8 – Мікромеханічний механізм в’язкопружності на основі механізму релаксації незшитих полімерних ланок [181]

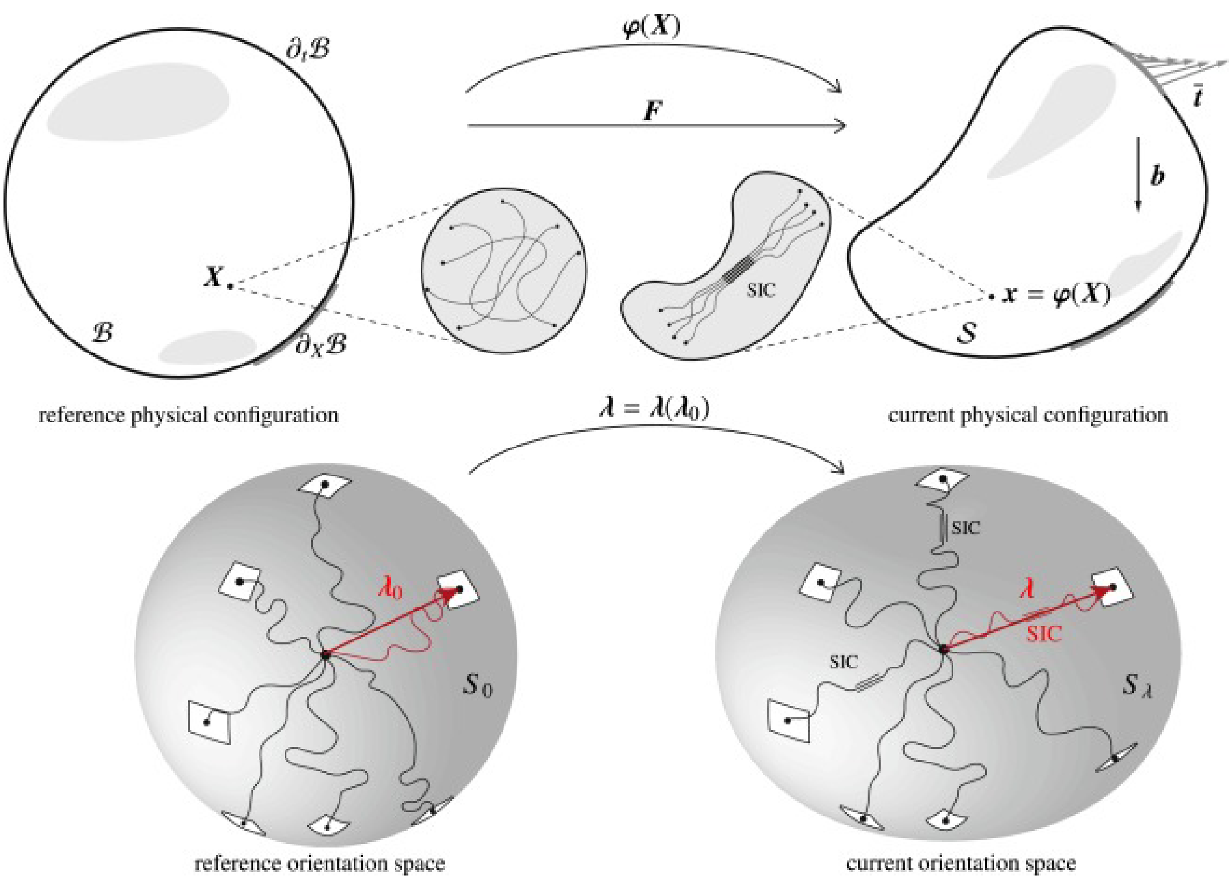


Рисунок 1.9 – Механізм кристалізації гуми при розтягуванні та його урахування в межах моделі неафінної мікросфери [198]

площині волокон та сил тертя у місцях їхнього перетину. Жодним іншим чином ці полотна не з'єднуються. У роботі [207] досліджуються дискретні моделі таких нетканих матеріалів. Розглядаються волокна різного початкового вигину, довжини, також варійованими є товщина повсті, міцність адгезії, тощо. Особливістю такої внутрішньої будови є те, що матеріал деформується майже виключно незворотньо. Лише невелика частка роботи зберігається у пружних деформаціях волокон, решта ж розсіюється за рахунок відносного ковзання із тертям. Відповідно за розтягу реакція матеріалу має дуже короткий пружний відтинок на початку. За ним слідує чітко визначений режим ковзання, що супроводжується поступовим зміцненням. У нетканих полотен із нескінченних чи дуже довгих волокон цей процес за достатньо великих деформацій призводить до повного випрямлення волокон, та утворення прямих шляхів розповсюдження сили, орієнтованих у напрямку навантаження. В такому стані полотно деформується виключно пружно та набуває високої жорсткості. Якщо ж довжина волокон скінченна, то полотно врешті втрачає міцність внаслідок руйнування контакту між волокнами через істотне відносне ковзання та значне зменшення щільності мережі.

Вплив структури волоконних мереж на їхні нелінійні пружні властивості та міцність яскраво продемонстровано в роботі [208] на прикладі комірчаних мереж. Авторами запропонована модифікація теселяції Пуассона-Вороного з опуклими комірками, яка в результаті призводить до випадкових неопуклих комірок. Ці мережі виявляються значно податливішими за оригінальні за тих самих номінальних параметрів мережі. При цьому однак їхній відгук залишається лінійно пружним в широкому діапазоні деформацій на відміну до звичного для традиційних мереж поступового від самого початку розтягнення зростання модуля. Одночасно ці модифіковані мережі демонструють значно менший ефект Пуассона, тобто скорочення в поперечному напрямку. Слід зазначити, що міцність цих випадкових мереж зростає із ступенем неопуклості комірок.

Останнім часом широко досліджуються механізми міцності випадкових волоконних мереж. У роботі [209] це питання досліджується за допомогою тривимірних моделей атермальних волоконних мереж. Розглядається руйнування мережі за малих і великих деформацій внаслідок розриву міжволоконних зв'язків. Встановлено, що міцність зростає лінійно з об’ємною щільністю та міцністю з’єднань волокон, тоді як подовження за максимального навантаження має зворотню залежність від цих двох параметрів. Лише невелика частка зв’язків руйнується до того, як мережа починає втрачати міцність, однак після досягнення пікового навантаження їхня кількість зростає дуже швидко. Випадкові відхилення міцності зв’язків призводять до зменшення міцності мережі, однак така неоднорідність заваджує локалізації пошкодження та врешті покращує здатність матеріалу до розтягнення.

Інший підхід до моделювання руйнування з’єднань між волокнами у випадкових мережах запропоновано в роботах [210, 211]. Мікромеханічна модель базується на поданні окремого сполучення в мережі. Зусилля, що передається між поєднаними волокнами, визначається за умовами рівноваги осьових сил у волокнах, що деформуються неафінно. Вважається, що відрив волокон відбувається, коли ця поєднуючи сила досягає граничного значення. Кожна така подія враховується на макроскопічному рівні як накопичення пошкоджуваності матеріалу у класичному її значенні. При цьому осереднення пошкоджуваності проводиться за нелокальною схемою, що враховує масштабний фактор.

Осереднена модель пошкоджуваності гумоподібних матеріалів була розроблена на базі статистичного підходу мікросфери орієнтацій та мікро-макро-співвідношень методу шляхів максимального просування [212]. Це дало змогу з високою точністю описати ефект Мюлліна, що спостерігається в вулканізованих гумах з наповнювачем.

Міцність гідрогелів досліджується за допомогою тривимірних моделей в роботі [213]. Особливість підходу полягає в тому, що хоча волокна мереж розташовані практично в одній площині, вони розглядаються не як одновимірні об’єкти, тобто стрижні, а як тривимірні, що на додачу до розтягу, вигину та зсуву можуть також зазнавати кручення, деформацій поза площиною мережі. Одночасно, застосовується модель міцності поєднань між волокнами, що передбачає різноманітні тривимірні моди руйнування. Підтверджено попередні результати стосовно залежності модуля пружності мереж від щільності, перехід від режиму домінуючого вигину до переваги розтягнення волокон із зростанням деформації. Визначені показники експоненти в залежності міцності мережі від її щільності.

Різноманітні гідрогелі подібні до бактеріальної целюлози завдяки добрій біологічній сумісності розглядаються для використання у біомедицинських імплантатах [214]. Велику роль при цьому відіграють механічні властивості цих матеріалів, адже механічні сигнали в цьому середовищі істотно впливають на активність клітин та тканин. Альтернативним субстратом можуть виступати легкі мережі електропряжених волокон [215], при цьому ключовим фактором, що впливає на пружність та врешті біосумісність такого штучного середовища, знову ж таки виступають структурні фактори, в першу чергу, – товщина волокон. Звертає на себе увагу можливість ситуації, за якої локальна жорсткість субстрата, до якого прикріпляються клітини, істотно відрізняється в більшу сторону від макроскопічних пружних властивостей матеріалу.

Масштабний ефект також може бути присутнім на рівні зовнішнього навантаження. Так, наприклад, у багатьох практичних випадках тепловий вплив або зволоження можуть здійснюватися на рівні зпівставному з розмірами мікробудови волоконного матеріалу [216]. Тобто джерела тепла чи температурні поля, а також волога можуть мати істотно неоднорідний розподіл навіть в межах окремого відтинку волокна. Проведене в цій роботі моделювання двовимірних випадкових мереж продемонструвало наступну закономірність: що більш істотним є коливання вологості чи температури, то вищим є рівень внутрішніх деформацій в мережі. При цьому області мережі з меншою щільністю є відповідальними за те, яким чином мережа перерозподіляє розбухання волокон.

У роботі [217] зроблена спроба побудувати моментну теорії пружності двовимірних волоконних мереж за малих деформацій. Параметри ефективного середовища ідентифікуються за допомогою аналізу репрезентативних комірок, до яких застосовуються граничні умови, щоураховують не лише лінійні деформації матеріалу, а і кривизну вигину. Окремі волокна подаються як стрижні Тимошенка, у їхніх перехрестях сполучуються не лише переміщення, але й повороти. Таким чином, окрім поздовжніх сил через мережу передаються іще й згинні моменти. Осереднення відгуку комірки до макроскопічного некласичного пружного середовища відбувається за енергетичним методом, характерні довжини ідентифікуються за отриманим осередненим пружним модулем.

Поряд із задачами чисельної гомогенізації також стоять проблеми топологічної оптимізації регулярних та випадкових мікроструктур [218].

Для створення біосумісних провідникових структур нещодавно було запропоновано використовувати спеціальні полімерні піни [219]. Завдяки спеціальному підходу до створення їхньої структури вдається досягнути постійної провідності незалежно від застосованих до цього матеріалу деформацій у широкому діапазоні величин розтягнення, а також швидкості та зміни напрямку навантаження.

Таким чином, у літературі натепер не існує єдиного підходу у моделюванні матеріалів з мережевою мікроструктурою. Це призводить до необхідності розвитку нових підходів. Наприклад, як варіант у цій роботі пропонується подальше вдосконалення запропонованого варіаційного підходу до гомогенізації матеріалів з сітчастою будовою, пов'язаного з уточненням кінематичних мікро- і макроспіввідношень.

У розд. 2, 3 запропоновані підходи, розвинені моделі та розроблені методи знайшли своє розгорнуте відображення, а у розд. 3, 6 описані результати здійснених на їх основі розвязання низки тестових та прикладних задач досліджень деформування різноманітних матеріалів.

1.2 Загальні методи аналізу контактної взаємодії тіл складної форми

Аналіз контактної взаємодії є одним із найбільш важливих напрямків у механіці. Це викликано як потребами машинобудування, де потужність у багатьох випадках передається за допомогою механічного контакту деталей, так і багатством математичних постановок контактних задач. Таким чином, сформувався цілий напрямок – механіка контактної взаємодії (або контактна механіка) [220].

Піонерськими у механіці контактної взаємодії вважаються роботи Г. Герца. Аналітичний розв'язок, що був запропонований, із певними змінами, доповненнями та уточненнями дійшов до нашого часу. Дійсно, він має надзвичайну привабливість, адже оперує із обмеженою кількістю параметрів – кривизнами контактуючих тіл у зоні стикання, фізико-механічними властивостями їхніх матеріалів та величиною притискного зусилля. Разом із тим модель Герца має жорсткі обмеження щодо геометричної форми та розмірів тіла у співставленні із розмірами контактної плями. Задача у загальному випадку зводиться до контакту двох параболоїдів, реакція котрих на дію контактних зусиль аналогічна реакції пружних напівпросторів.

Більш широка постановка задач контактної взаємодії та їх виділення у окремий клас сформульована у роботі Сіньоріні. У ній була описана загальна постановка задачі про контакт двох пружних тіл з гладкою границею без урахування тертя – т.з. задача Сіньоріні.

На розв'язання контактних задач у різних постановках були спрямовані зусилля багатьох дослідників: К. В. Аврамова, В.А. Александрова, В.О. Бабешка, М.І. Бобиря, Ю.С. Воробйова, І.І. Воровича, Л.О. Галіна, П.П. Гонтаровського, І.Г. Горячевої, С. М. Гребенюка, В. Б. Гриньова, О.М. Гузя, Б.Я. Кантора, А.С. Кравчука, В. С. Кирилюка, Л.В. Курпи, В. І. Куща, Г.І. Львова, Р.М. Мартиняка, З.Л. Мартиросяна, В.В. Михаськіва, В.І. Моссаковського, М.І. Мусхелішвілі, В.В. Панасюка, В.З. Партона, П.І. Перліна, А.М. Підгорного, Д. А. Пожарського, Г.Я. Попова, В.С. Проценка, В.Л. Рвачова, Б.Л. Ромаліса, К. М. Рудакова, О.О. Стрельнікової, М.І. Теплого, А.Ф. Улітки, Я.С. Уфлянда, А. П. Філіппова, М.І. Чебакова, І.Я. Штаєрмана, J.R. Barber, D.B. Bogy, M. Ciavarella, J.A. Greenwood, H. Hertz, K. L. Johnson, J.J. Kalker, M. Paggi, L. Pastewka, BNJ Persson, M. Robbins, A. Signorini, D.A. Spence, B.I. Wohlmuth, P. Wriggers, G. Zavarise та багатьох інших. Ними були задіяні та розвинені методи математичної фізики та функціонального аналізу, у т.ч. – асимтотичні методи, методи однорідних розв'язків, парних рівнянь, R-функцій тощо.

Постановки і методи розв'язання контактних задач про кочення з проковзуванням твердих і деформованих тіл при наявності між ними тонкого в'язкопружного шару, що моделює вплив проміжного середовища на характер взаємодії, викладені в [221]. Результати використовуються для аналізу залежності величини сили опору перекочування від властивостей цього шару, а також від коефіцієнта тертя ковзання між шаром і тілом, що котиться по ньому.

Разом із тим бурхливий розвиток останнім часом отримали чисельні методи, пов'язані із дискретизацією тіл методом скінченних (МСЕ) [222–224] та граничних елементів (МГЕ) [225]. Теоретичною базою цих чисельних методів для контактних задач можуть бути відповідно варіаційні формулювання та граничні інтегральні рівняння.

Що стосується варіаційних постановок, то вони, починаючи із роботи [226], отримали суттєвий розвиток на основі теорії варіаційних нерівностей [227–260]. Ця теорія адаптована для глибокого аналізу задач такого типу, оскільки не передбачає ніяких додаткових гіпотез відносно форми та розмірів контактних плям. Сам розподіл контактного тиску, а також форма і розміри контактної плями не задаються, а визначаються, наприклад із умов екстремуму деяких функціоналів. Зокрема, одним із варіантів такого типу постановок є варіаційний принцип Калькера [238]. Він оперує із функціоналом, визначеним на множині невід'ємних розподілів контактного тиску, на якій, власне, і розшукується його мінімум. Крім того, можливі самі різноманітні напрямки розвитку варіаційних постановок [261–268].

Метод граничних елементів як один із варіантів дискретизації граничних інтегральних рівнянь має свої переваги та недоліки. Перші відзначаються тим, що за його допомогою фізична розмірність задачі знижується на одиницю. Тим самим різко зменшується обсяг дискретизованої моделі. З іншого боку, йому властиві й недоліки, пов'язані із труднощами застосування до випадку контакту тіл скінченних розмірів, а також із тим, що у дискретизованій моделі доводиться оперувати не із рідкозаповненою, а із матрицею загального вигляду.

Різноманітні постановки, формулювання та методи й моделі разом із тим не вичерпують усього набору чинників, які потрібно враховувати. Так, у загальній постановці важко об'єднувати довільну форму контактуючих тіл, нелінійні властивості поверхневих шарів, шорсткості, прокладок, напилень, плівок тощо. У той же час, як показано у роботах [1, 2], є певна кореляція між гранично-елементною постановкою контактної задачі та варіаційним формулюванням: за певних умов дискретизовані їх форми співпадають. Це спонукає шукати загальні формулювання, які об'єднують, з одного боку, гранично-інтегральні та варіаційні постановки, а з іншого – різні додаткові чинники. Серед них значну роль відіграють неканонічність форми розподілів зазорів, а також нелінійні властивості приповерхневих, поверхневих або міжповерхневих шарів у системі контактуючих тіл.

Отже, виникла необхідність провести аналіз форми зазору (див. підрозд. 1.3), властивостей проміжних шарів між контактуючими тілами (див. підрозд. 1.4) та базових дискретизованих формулювань контактних задач (див. підрозд. 1.5). Цей аналіз здійснено без зниження загальності на прикладі шорсткуватості поверхневих шарів та гранично-елементних дискретизацій граничних інтегральних рівнянь або варіаційних постановок.

1.3 Аналіз впливу закону розподілу зазору на контактну взаємодію складнопрофільних тіл

Традиційні підходи контактної механіки полягають у розгляді контакту гладких тіл, поверхні яких або частково співпадають (так званий «узгоджений» контакт [220]), або зазор між ними описується степеневою функцією двух змінних у координатах точок площини, дотичної до точки початкового контакту (або «неузгоджений» контакт). У багатьох випадках такі підходи допустимі для первинного аналізу напружено-деформованого стану. Проте, з одного боку, прагнення реалізувати складні взаємні рухи призводить до формування складних поверхонь контактуючих тіл, які не можуть бути описані навіть локально поверхнями другого порядку. Це, зокрема, поверхні двопараметричних, евольютних та інших зубчастих передач [1, 2, 269–274], фасонні кулачки в механізмах двигунів внутрішнього згоряння [275], модифіковані поверхні підшипників та профільовані бічні поверхні їхніх поршнів [276].

Зниження габаритів зубчастих передач при одночасному збільшенні потужності, що передається, є актуальною проблемою сучасного машинобудування. У [270] показано необхідність переходу до розрахунку зубців на довговічність з урахуванням останніх досягнень в галузі механіки та запропоновано схему комплексної математичної моделі втомного руйнування зубчастого колеса.

Рівняння робочого профілю та перехідної кривої зубців у параметричному вигляді отримано у [271]. Розглянуто методику розрахунку приведеного радіуса кривизни та контактних напружень в евольютних зачепленнях. Виявлено, що в приполюсній зоні має місце двоякоопуклий контакт, на що вказує теорія евольютних зачеплень. У [274] запропоновано методику розрахунку на контактну витривалість двопараметричних зубчатих передач. Вона базується на розрахунках контактних напружень для окремих відносних положень коліс із наступним визначенням еквівалентного напруження. Такий підхід дозволяє коректно врахувати зміну контактних напружень у процесі роботи.

У монографії [276] наведено методологічні засади та способи розв'язання науково-технічної задачі – підвищення ефективності роботи високообертових вузлів тертя. З іншого боку, прагнення знизити рівень контактних навантажень призводить до тенденції зближення поверхонь контактуючих тіл на якомога більшій площі. Отже, зазор між контактуючими поверхнями не тільки не може бути задовільно описаний деякою апроксимаційною поверхнею другого порядку, але й стає сумірним із нормальними переміщеннями точок поверхонь контактуючих тіл та приповерхневих шарів на всій площі можливого контакту. Окрім того, розміри повехонь можливого контакту сумірні із розмірами контактуючих тіл. Таким чином, порушуються основні гіпотези, у рамках яких базуються традиційні моделі контактної взаємодії.

Отже, на розвиток традиційних постановок свого часу були розглянуті випадки, що є розширенням класичних постановок. Так, у роботах [220, 277, 278] множина функцій, якими описується зазор Φ між поверхнями контактуючих тіл, був розповсюджений на степеневі функції радіальної координати r їхніх точок у дотичній площині $\Phi(r) = A \cdot r^{2n}$, де n – натуральне число, а A – деякий коефіцієнт. Тут переміщення штампа – $\delta_0 = [(\pi\vartheta/2)P]^{2n/(2n+1)} \cdot \{[A(2n)!!(2n+1)^{2n}]/[(2n-1)!!(2n)^{2n}]\}^{1/(2n+1)}$ (випадок двох пружних тіл може бути зведений до проникнення штампа із профілем $\Phi(r)$ у пружній напівпростір) [277], притискне зусилля – P, $\bar{\nu} = (1-\nu^2)/\pi E$. Тоді радіус контактної області визначається як $a = (\pi\vartheta/2)\{[(2n+1)!!]/[2nA(2n)!!] \cdot P\}^{1/(2n+1)}$ [277].

Розподіл тиску підпорядковується формулі

$$q(r) = \left(1/\pi^2\vartheta\right) \cdot [(2n)!!/(2n-1)!!]2nAa^{2n-1}S_n(r/a) \cdot \sqrt{1-\left(r^2/a^2\right)}, \qquad (1.1)$$

де поліноми Штаєрмана S_n визначаються за формулою [277]

$$S_n(\rho) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\left[\rho^{2n-2} + \frac{1}{2}\rho^{2n-4} + \frac{3}{2\cdot 4}\rho^{2n-6} + \ldots + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\rho^2 + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right].$$

Зокрема, тиск у центрі кругової області контакту має значення

$$q(0) = \left(1/\pi^2\vartheta\right) \cdot [(2n)!!/(2n-1)!!]Aa^{2n-1} = \left(P/\pi a^2\right) \cdot [(2n+1)/2(2n-1)]$$

при середньому тиску $q_0 = P/\pi a^2$. Відповідно, (1.1) набуває вигляду [277] $q(r) = [(2n+1)/2]q_0 S_n(r/a) \cdot \sqrt{1-\left(r^2/a^2\right)}$. Як зазначається у [220, 277], при $n \geq 2$ тиск у центрі контактної площадки $P(0)$ стає меншим середнього тиску q_0. При цьому максимум контактного тиску переміщається від центру до периферії області контакту.

Крім того, у низці робіт [277, 279–288] визначено розв'язки для форми зазору у вигляді степеневого ряду або зі скругленими кромками штампу. Також визначається тиск для форми зазору у вигляді [220, 277] $\Phi(r) = Ar^{\lambda}$, де λ – довільне, не обов'язково ціле, число.

Перевагою аналітичних розв'язків [220, 277] є можливість оперативного якісного та кількісного аналізу впливу окремих параметрів на розподіл контактного тиску. Разом із цим для довільного розподілу зазору між контактуючими тілами необхідно залучати більш загальні підходи. Наприклад, для цього застосовні варіаційні формулювання [226–228, 230, 238, 277–291]. При цьому досягається більш висока універсальність, але, разом із тим, втрачається оперативність та наочність.

Більш високий ступінь універсальності, для прикладу, на основі теорії варіаційних нерівностей [227, 228, 230] , дає можливість урахування різних чинників, у т.ч. – нелінійних фізико-механічних властивостей матеріалу. Разом із тим при дискретизації задачі методом скінченних елементів велику роль для випадку контакту тіл їх майже конгруентними поверхнями починають відігравати похибки апроксимації форми зазору. Крім того, виникають проблеми із урахування різних додаткових чинників. Таким чином, потрібні альтернативні постановки.

Одним із чинників, які потрібно урахувати у першу чергу, є шорсткість поверхонь реальних деталей. Моделі шорсткості мають різну фізичну основу та математичне формулювання. Зокрема [277], враховуються шорсткість, субшорсткість, хвилястість [280–288, 292, 293]. Також розрізняють номінальну, фактичну і контурну площі контакту [294–296]. Відповідно, визначаються за різними моделями мікронерівностей (стержнева, сферична, параболоїдна, стохастична, фрактальна) залежності між зближенням між шорсткуватими поверхнями та контурним тиском [280–288, 294–300]. Ці моделі мають застосування та розвиток також у низці робіт [301–307]. Проте наявний арсенал моделей та методів не вичерпує усієї множини задач, доступних до розв'язання із їх залученням. Це стосується, у першу чергу, відсутності універсальних формулювань для генерування розв'язувальних співвідношень аналізу контактної взаємодії тіл із урахуванням різних чинників, а, крім того, механізмів індентації мікромеханічних моделей властивостей поверхневих і проміжних шарів у ці співвідношення та урахування їх залежності від історії навантаження. Разом із тим певні формулювання природним чином адаптовані до розвитку у напрямках, що становлять інтерес. Так, варіаційні принципи, які можуть бути сформовані на розвиток принципу Калькера [238], мають певну універсальність щодо властивостей контактуючих тіл. Це дає змогу, використовуючи принцип Калькера як початкове «ядро», нарощувати його за рахунок доданків, у яких зосереджені різні характерні властивості тих чи інших досліджуваних об’єктів. Це уможливлює урахування нелінійних властивостей поверхневих шарів матеріалів тіл, які піддані технологічним операціям зміцнення, напилення, термообробки тощо. Вплив цих ефектів є суттєвим, тому потрібно розробляти фізично адекватні та математично строгі моделі, які передбачають, зокрема, залежність поведінки матеріалів досліджуваних об’єктів від історії навантаження. Проте на сьогодні такі розробки, які повною мірою націлені на перелічені проблемні аспекти, у літературі відсутні. Отже, склалося протиріччя між потребами практики промислового виробництва у нових методах і моделях аналізу контактної взаємодії та можливостями механіки. На противагу існуючим розробкам [281–283, 301–313], авторські підходи [1–108] продемонстрували суттєвий прогрес у напрямку розвитку моделей та методів аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Разом із тим, окрім шорсткості, існує ще велика група інших чинників, які впливають на контактну жосткість приповерхневих шарів, зокрема, технологічного походження. Це і різні види зміцнення (дискретне, континуальне, комбіноване), і напилення, і плівки, а також різні варіанти термохімічного та механічного впливів на поверхні відповідальних деталей машин. Якраз ці особливості не мають засобів інтеграції моделей їхніх властивостей у загальні моделі контактної взаємодії. У випадку складнопрофільних тіл із контактуючими поверхнями близької форми приходимо до ситуації контакту СПТ із малим зазором та проміжним шаром із складним законом поведінки. Її аналіз на основі існуючих підходів, методів та моделей неможливий. У результаті виникає проблема аналізу контактної взаємодії системи СПТ із фізично нелінійним шаром. При цьому виокремлюються два пласти проблеми. Перший – мікромеханічний рівень. Він передбачає дослідження мікрооб’єму випадкового профілю мікронерівностей у контакті із спряженим. Інший пласт – макромеханічний. Він якраз формує і рівень, і розподіл навантажень між складнопрофільними тілами. Разом із тим цей розподіл залежить від властивостей, сформованих на мікрорівні. У підсумку приходимо до проблем контактної взаємодії СПТ, яка поєднує два рівні (мікро- та макро-). Основна нова методологічна проблема при цьому – поєднання цих різнорівневих підмоделей. Інша сторона проблеми – урахування ефекту впливу нелінійності залежності зминання поверхневого шару від контактного тиску. І, нарешті, основним аспектом проблеми є відсутність методів розв'язання сформованої системи рівнянь та нерівностей.

Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою та у завершеному вигляді дотепер відсутнє. У свою чергу, потреби практики у розробці методів розв'язання описаного типу задач переоцінити важко. Потреби практики спонукають подальший розвиток механіки нових розробок у механіки задля вирішення масштабної науково-практичної проблеми, яка полягає в розробці і реалізації методів розв'язання фізично і структурно нелінійних задач визначення напружено-деформованого стану та контактної взаємодії для забезпечення конструкційної міцності складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій. Це особливо важливо із огляду на те, що подібні елементи зазвичай є тими, що в основному визначають технічні характеристики машин.

При цьому слід зазначити, що відмова від будь-якої спрощуючої гіпотези призводить до неадекватних результатів при застосуванні традиційних моделей. У випадку ж, що розглядається у роботі, усі традиційні гіпотези контактної механіки у повному обсязі не працюють, отже, потрібні принципово нові підходи до побудови моделей контактної взаємодії та методів розв'язання створьованої системи співвідношень. А це спонукає до вирішення цих проблемних питань, оскільки вони стоять на заваді розв'язанню основних задач досліджень.

1.4 Мікромеханіка контакту: підходи і моделі

Для визначення напрямків досліджень у роботі у розд. 1 розглядається сучасний стан методів дослідження контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій складної геометричної форми, у т.ч. – у розрізі та із урахуванням мікромеханіки поверхневих та проміжних шарів. Як уже зазначалося вище (див. підрозд. 1.3), поверхні реальних тіл на мікроскопічному рівні не є ідеально гладкими, а мають випадковий профіль, що складається з опуклостей і западин. Це означає, що при первинному контакті стискання відбудеться не на всій номінальній поверхні, а лише на її малій частині, яка буде збільшуватися в міру зростання притискного зусилля у певному зв'язку із деформаціями мікронерівностей. Урахування впливу шорсткості на характер контактної взаємодії є фундаментальним завданням, яке, незважаючи на істотний прогрес декількох поколінь дослідників за тривалу історію, далеке від повного вирішення.

Перші спроби побудувати модель контакту шорстких тіл пов'язані із застосуванням теорії Герца до окремих вершин нерівностей. Однак, отримані таким чином теоретичні оцінки не узгоджувалися із експериментально встановленим законом пропорційності між величиною притискного зусилля P і площею плями контакту A. Протиріччя, на яке вказав Дж. Арчард [292], полягало в тому, що з ростом навантаження не тільки збільшується площа існуючих контактних майданчиків, а й виникають нові. Ним було запропоновано наближення, згідно з яким на нерівностях розташовуються мікронерівності, на яких у свою чергу присутні ще менші мікронерівності. Така модель зі зростанням числа ступенів збільшення у граничному значенні давала шукану пропорційність.

Наступні уточнення теорії шорсткого контакту мали на меті отримання не тільки якісно вірних, а й кількісно точних оцінок поведінки. Для цього були задіяні методи статистичного осереднення. Вичерпна теорія, що описує статистичні властивості випадкових поверхонь, запропонована в роботі [314]. Однак ще до її появи Грінвуд і Вільямсон розробили модель контакту, засновану на спрощуючих припущеннях щодо розподілу характеристик нерівностей [315]. Зокрема, їхня форма була прийнята сферичною, так що при навантаженні контакт здійснюється на кругових областях, а кривизна - постійна для всіх вершин незалежно від висоти. Із використанням співвідношень теорії Герца для всіх нерівностей та осередненням одержуваних випадкових величин були обчислені значення дійсної площі контакту і повного зусилля, що передається через мікронерівності, як функції середнього зазору між поверхнями. Отримані співвідношення містили в собі наступні параметри: щільність вершин, середню кривизну шорсткостей та середньоквадратичне відхилення передбачуваного гаусового розподілу висот нерівностей.

Теорія Грінвуда-Вільямсона допускає великі можливості для уточнення, зокрема щодо геометричних властивостей випадкових поверхонь. Так, на розвиток цієї моделі, що запропонований у роботі [316], враховується випадковий розподіл кривизн вершин нерівностей. У подальшому окремі положення моделі були переглянуті як самим Грінвудом [317], так і багатьма іншими авторами. Так, Маккул [318] запропонував використовувати двопараметричний розподіл Вейбулла для опису висот нерівностей. В оригінальній теорії Грінвуда-Вільямсона контакт окремих нерівностей враховувався незалежно. У роботах М. Чіаварелла [284, 285] було враховано взаємний вплив від деформацій, викликаних прикладанням контактних зусиль у сусідніх вершинах. Окремі моделі [319, 320] містять режим пластичних деформацій. Їх наявність зазвичай заперечується тим, що нерівності не збільшують значення максимального контактного тиску відносно середнього значення настільки сильно, щоб це призводило до істотних пластичних деформацій. Крім того, навіть у разі їх виникнення, є всі підстави вважати, що всі наступні навантаження після декількох циклів зминання найбільш навантажених ділянок поверхні відбуватимуться пружно.

Надалі розвиток теорії шорсткого контакту пов’язано з фрактальною природою геометрії тіл. Результати теоретичних досліджень [321–323] показали значимість впливу масштабного ефекту топографії поверхонь на прогнозовану контактну поведінку. Чим більше деталей фрактальної поверхні враховуються на все більш дрібному масштабі, тим більше контактна пляма дробиться на кластери мікроконтактів. При цьому у граничному значенні для самоподібної поверхні їх кількість прямує до нескінченності, при цьому повна площа контакту зменшується до нуля. Однак реальні системи характеризуються скінченними нижньою і верхньою границею масштабів нерівностей, і, відповідно, вони є ключовими характеристиками випадкової топографії. Ці висновки підтверджуються численними дослідженнями [324–326], у тому числі проведеними за допомогою чисельного моделювання.

Перссон розробив детальну модель, у якій обґрунтував обернено-потенціальну залежність значення контактного тиску від величини середнього зазору між притискуваними поверхнями [284]. Така поведінка очікується при помірному притисненні поверхонь, коли зближення призводить до розвитку контакту на великому числі вершин нерівностей, але далеко від встановлення повного контакту. Для перевірки основних положень цієї теорії були проведено чисельне моделювання, яке підтвердило якісно і в загальному також кількісно основні оцінки [302].

Ще однією величиною, що відображає властивості шорсткого контакту, є контактна жорсткість. Як показав Барбер [327], запропонувавши пряму аналогію між задачею пружного контакту і електричною провідністю, вона безпосередньо пов'язана з опором контактуючих тіл [303, 315]. Відповідно до теорії Грінвуда-Вільямсона, так само як і теорії Перссона, контактна жорсткість прямо пропорційна притискному зусиллю. Однак у низці інших досліджень вказується степенева залежність з показником від 0.5 до одиниці [286, 287, 328]. Ключовим параметром, що впливає на точне його значення, є фрактальна розмірність поверхні, що знайшло вираження в аналітичній оцінці, запропонованій Портом і Поповим [304, 305]. У роботі [329] відзначається, що ця залежність, яка прогнозує показник, менший одиниці, справедлива лише за малих розмірів систем, де значущим є лише найвища нерівність із фрактальним профілем. В інших же випадках, коли у контакт вступає статистично значимий ансамбль нерівностей на великій площі, виконується лінійний закон, що передбачається класичними теоріями.

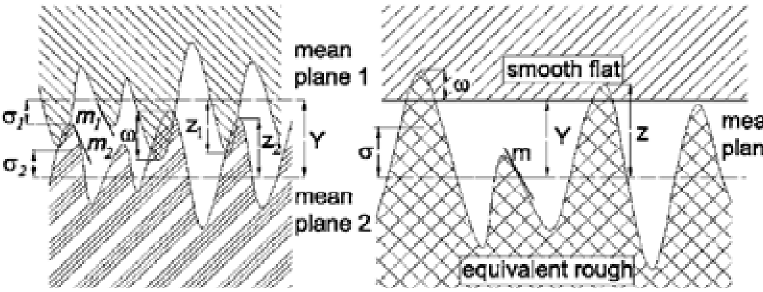
Наявність мікроскопічних нерівностей вносить істотну корекцію у характер контактної взаємодії тіл різної форми. Важливим випадком для вивчення є контакт пружної сфери з номінально плоскою шорсткою поверхнею. Грінвуд і Тріпп [293] показали, що поведінка такої системи узгоджується з теорією Герца лише за досить високих навантажень, тоді як при меншому притискному зусиллі осереднений розподіл контактного тиску виявиться істотно нижче і пошириться на більшу площу порівно з оцінкою для випадку гладких тіл. Пастевка і Роббінс [311] вивчили зміну дійсної площі контакту, встановивши кілька режимів навантаження. Спочатку (при гранично малих зусиллях) поведінка поверхневого шару повністю визначається першою вершиною, що увійшла в контакт. Із ростом числа дискретних контактів при помірних навантаженнях співвідношення між площею контакту і силою стає лінійним. І лише при дуже великих зусиллях відбувається перехід до герцевської поведінки. При цьому контакт стає практично суцільним, а розміри кругової зони контакту підпорядковується співвідношенням теорії Герца.

Порт і Попов в роботі [306] розглянули контактну жорсткість. Для цієї величини герцевському закону зміни з зусиллям передує фрактальний режим, аналогічний поведінці номінально плоских шорстких тіл. При цьому цей перехід відбувається за значно меншого навантаження, ніж те, яке потрібно для встановлення суцільної герцевської плями контакту.

Отже, можна зазначити, що існує значна кількість теоретично, чисельно та експериментально визначених моделей для опису властивостей поверхневих шарів контактуючих тіл. Застосування тих чи інших залежностей визначається конкретними умовами.

Дійсно, як уже визначалося, поверхні деталей механізмів і машин не є абсолютно гладкими. Іхній мікрорельєф (рис. 1.10) дає декілька складових. По-перше, на цей мікрорельєф чинить вплив структура зерен та міжзеренного простору (для кристалічних матеріалів) або міжкомпонентні (аж до масштабу міжмакромолекулярних) зв'язки (для аморфних, композиційних матеріалів). По-друге, суттєвим є вплив інструменту та режимів обробки поверхонь при виготовленні деталей, у т.ч. – механічної, тиском або литтям. При цьому важливим є способи модификації поверхневих шарів матеріалів (термообробка, хіміко-термічна обробка, напилення, пластичне деформування поверхневих шарів, нанесення тонких плівок тощо). По-третє, важливу роль відіграють залишкові напруження, що також впливають на властивості приповерхневих шарів деталей машинобудівних конструкцій. Ці напруження виникають внаслідок дій технологічних чинників, які нашаровуються у процесі виготовлення деталей.

Таким чином, у підсумку приповерхневі шари деталей машинобудіних конструкцій набувають форм і фізико-механічних властивостей, відмінних від основного матеріалу. Це чітко прослідковується, наприклад, на прикладі мікрорельєфу (див. рис. 1.10). Він має стохастичний характер розподілу висоти мікронерівностей. Для опису цього розподілу вводяться осереднені характеристики, наприклад, – середнє відхиленнявід умовного номінального рівня [332, 333]. Крок мікронерівностей (у координатах поверхні деталі) – від 10^{-6} до $8\cdot10^{-3}$ м, їхня висота – від $3\cdot10^{-8}$ до $3\cdot10^{-4}$ м [332, 333]. Базова довжина, тобто та довжина, на якій визначаються статистичні показники мікрорельєфу, складає $8\div22\cdot10^{-3}$ м залежно від класу чистоти обробки деталей. Якщо крок періодичних нрівностей перевищує цей розмір, то їх відносять до хвилястостей. Одиничні ж відхилення від номінальної форми є макровідхиленнями. На рис. 1.11 умовно показані співвідношення мікронерівностей, які характеризують шорсткість, хвилястості та макровідхилення.



геометрична модель: : а – двох шорстких поверхонь; б – гладкої та «еквівалентної» шорсткої поверхонь [220]

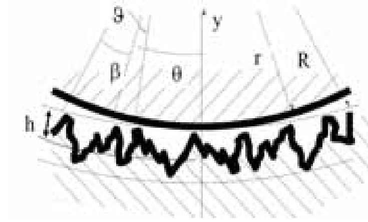
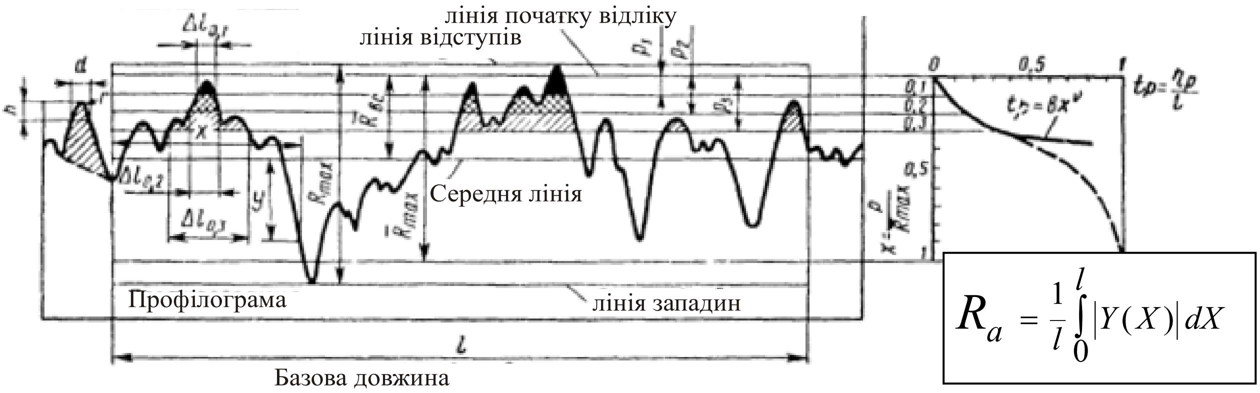
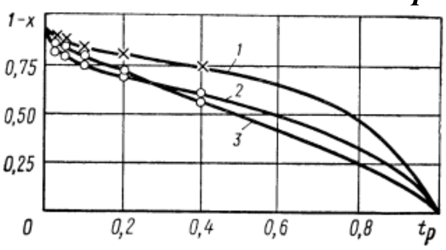


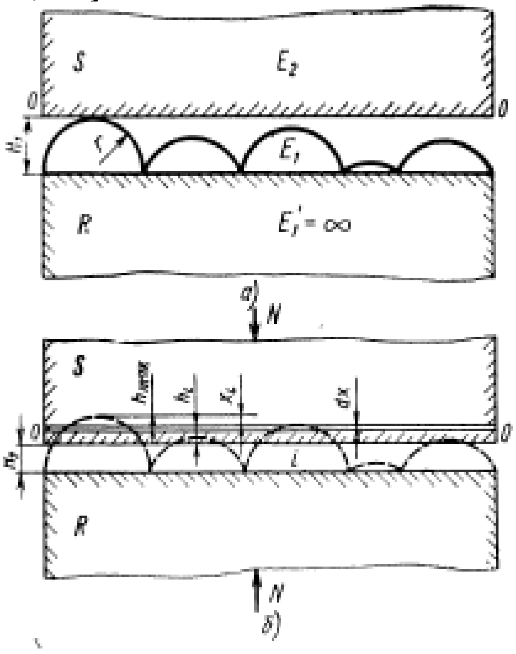
схема взаємодії круглих тіл, обмежених гладкою та «еквівалентною» шорсткою поверхнями [230, 290]



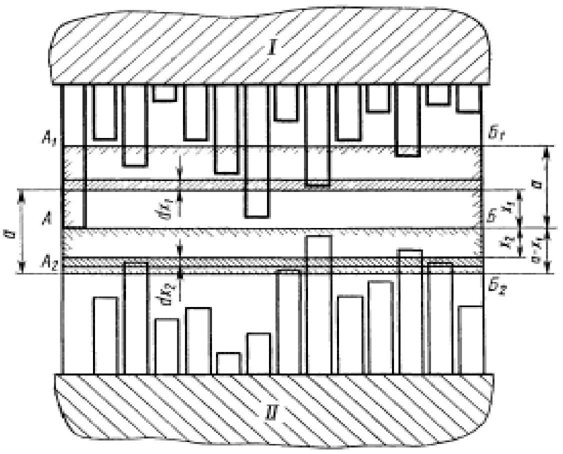
ділянка профілограми [330, 331]



Опорні криві профілей поверхонь, отриманих [330, 331]:
1 – поліруванням; 2 – точенням; 3 – шліфуванням



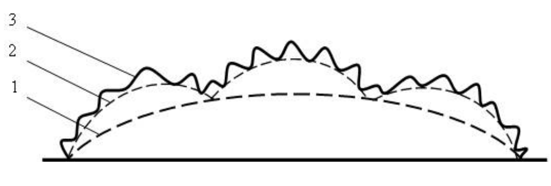
Основна розрахункова схема контакту ідеально гладкої та шорсткуватої поверхоні із сферичними нерівностями [330, 331]:
а – вихідне положення; б – після прикладання притискної сили



Контакт двох шорсткуватих тіл (стержнева модель) [330, 331]

Рисунок 1.10 – Приклади мікрорельєфу та моделі шорсткості

Рисунок 1.11 – Профіль поверхні деталі:
1 – макровідхилення; 2 – хвилястість;
3 – шорсткість [1, 2]



Крім особливостей геометричної форми, приповерхневі шари матеріалу тієї чи іншої деталі мають також фізико-механічні властивості, відмінні від властивостей матеріалу у глибині деталі. Це викликане не тільки мікроструктурою цих шарів, але й сукупною дією чинників, які впливають на ці приповерхневі шари при виготовленні (див. вище), а також в умовах реальної експлуатації. Крім того, із функціональних вимог між контактуючими тілами часто розміщують прокладки, плівки, шари – тобто тонкі деталі із відповідними характеристиками

Таким чином, з точки зору контактної механіки маємо взаємодію не гладких тіл, а тіл із нанесеними або привнесеними проміжними шарами. Фізично це призводить до того, що замість номінальної площі контакту (як для гладких тіл), до розгляду вводиться фактична площа контакту (тобто сукупність контактних зон мікронерівностей). Крім того, хвилястість формує кластери фактичних площадок контакту, сукупність яких є контурною площею контакту [333].

Для моделювання контактної взаємодії шорстких (шорсткуватих) тіл прямий опис усіх перелічених чинників незастосований, оскільки це призводить до занадто громіздких та неефективних із точки зору, наприклад, чисельного дослідження, моделей. З іншого боку, з огляду на слабкий взаємний вплив деформування окремих мікронерівностей, їх можна подати у вигляді псевдошару, віднісши усі характеристики мікрорельєфу до фізико-механічних властивостей матеріалу цього шару. При цьому, як правило, такі моделі описують місцеві деформації такого псевдошару, тобто силовий розподілений вплив викликає у цьому шарі тількі місцеві (локальні) його деформації. Така модель вперше до розгляду була запропонована І.Я. Штаєрманом [220, 194, 278]. Особливостями такого шару, на відміну від основи Вінклера [334], є: нормальний тиск на зовнішню його поверхню спричиняє не тільки «локальну» деформацію шару, але й передається на глибинні шари тіла, спричиняючи «глобальну» деформацію усього тіла; у загальному випадку залежність прогинів (локальних переміщень точок зовнішньої поверхні шару, умовно зафіксованих на внутрішній його поверхні) має нелінійних характер відносно нормального тиску p

$$w = w(p), \tag{1.2}$$

яка у багатьох випадках [335] замінюється лінійною залежністю

$$w = \lambda \cdot p, \;\; p = c \cdot w, \tag{1.3}$$

де λ, c – так звана контактна податливість та жорсткість відповідно [277].

У підсумку слід визнати, що подальші дослідження контактної взаємодії шорсткуватих тіл залежать від типу моделі, яка пов'язує мікроструктурні властивості приповерхневих шарів матеріалів деталей, із одного боку, та моделей місцевої (локальної) деформації (1.2), (1.3), – з іншого. На цьому рубежі здійснюється перехід від мікро- до макромеханіки контактної взаємодії.

Як уже було зазначено, для опису властивостей шарів шорсткості застосовуються різноманітні моделі. Вони досягли на сьогодні значного прогресу, проте не втратили застосовності також і традиційні підходи, які базуються або на спрощених моделях, або на емпіричних даних. Перші з них оперують, наприклад, певними геометричними формами мікронерівностей, розміри яких мають деякий статистичний розподіл у площині контакту. Так, у [220] розглядається синусоїдальний розподіл мікрорельєфу. Крім того, досліджується також моделі мікронерівностей, що подаються простими геометричними фігурами (сфери, піраміди, конуси, стержні тощо). При цьому контактна взаємодія кожної пари мікронерівностей описується, як правило, деякою аналітичною залежністю, наприклад, моделлю Герца [221]. Так, отримали розповсюдження стержнева модель Крагельского [330], еліпсоїдальна [336], двопараметрична модель Дьомкіна [333]. Серед емпіричних можна виділити модель, яка описана у [335]. Запропонована ступенева залежність

$$w = cp^m, \qquad (1.4)$$

де c, m – параметри, що залежать від матеріалу деталі, мікрорельєфу його поверхні та технологічної операції обробки.

Слід зазначити також, що нормальний контакт, як правило, не можна відділити від процесів тертя і зношування, які супроводжують експлуатацію деталей машин. Таким чином, формується взаємозв'язок та взаємовплив наступних чинників: розподіл контактного навантаження; мікрорельєф та властивості приповерхневих шарів деталей; розподіл контактного тиску та взаємних зміщень точок поверхонь спряжених складнопрофільних тіл; тертя на контактуючих поверхнях; зношування поверхневих шарів контактуючих деталей. Усі ці чинники знаходяться, так-би мовити, у постійному «динамічному» взаємозв'язку та взаємовпливі.

Дійсно, контактне навантаження розподіляється між тілами під впливом властивостей поверхневих шарів, викликаючи певний розподіл тиску. У свою чергу, тиск впливає на сили тертя, а ті – на зношування, яке, тепер уже у свою чергу, – на величину та розподіл навантаження, а також на мікроструктуру і властивості поверхневих шарів матеріалу. Частина перелічених чинників та виявлених при цьому залежностей описані, зокрема, у роботах [331, 337–349]. Так, мікроструктурні включення на поверхнях контакктуючих тіл у вигляді виїмок також може мати ефект не лише на розподіл контактного тиску, але і на електричні поля у випадку п’єзоелектричних матеріалів [338]. Дії пов’язаних електромеханічних сил перешкоджають утворенню повного контакту, що вимагає більш істотного притискного зусилля для закриття утвореного зазору. Крім того, параметри шорсткості можуть бути запрограмовані з метою отримання бажаної поведінки поверхонь за контакту. Для цього в роботі запропоновано відповідний метод оптимізації, побудований на аналогії між генетичною інформацією та випадковою шорсткістю.

Характер пружного відгуку тіл, що скріплюються за допомогою болтового з’єднання, також істотно впливає на утворення контакту, міцність та надійність цього з’єднання. Точний розрахунок таких конструкцій вимагає розробки спеціальних методів [339].

Робота [340] присвячується аналізу геометрично нелінійних контактних задач для системи смуг. Особливості представленої задачі полягають у дослідженні напружено-деформованого стану двох смуг, сполучених болтовим кріпленням із зазором і навантажених рівномірно розподіленим по верхній кромці поперечним зусиллям. У цій постановці задачі присутні геометрична і структурна нелінійності. Отримано основні закономірності НДС елементів силосів.

Шорсткість також істотно впливає на адгезійні властивості поверхонь. Останнім часом значну увагу приділено дослідженню різних моделей адгезійного контакту, огляд сучасних напрямків можна знайти в [343]. Зокрема, було переглянуто та доповнено класичну теорію Фюллера-Табора відносно оцінки параметра адгезії поверхонь, шорсткість яких вписується в модель Наяка [344]. У роботі [345] аналізується анізотропія адгезії за присутності дотичних зусиль, задля опису якої застосовуються співвідношення механіки крихкого руйнування. У роботі

[346] запропонована дуже проста модель адгезійної взаємодії твердого тіла із тонким еластичним покриттям. На основі методу енергетичного балансу запропоновано критерій відокремлення індентора від субстрату. У роботі [347] запропоновано ефективну оцінку впливу шорсткості поверхні на залежність величини відокремлення між поверхнями від адгезійного зусилля за широким спектром випадкового розподілу профілю шорсткості. Також у роботі [348] широкого застосування отримали варіанти методу граничних елементів на базі швидкого перетворення Фур'є. Огляд наукових успіхів в області моделювання трибологічних рівнях на мікро- та макрорівнях міститься у нещодавній спільній праці дослідницької спільноти [349].

Підводячи підсумки, можна на основі аналізу описаного матеріалу обгрунтувати наступні висновки.

1. Натепер відсутні універсальні моделі для урахування властивостей приповерхневих шарів деталей машинобудівних конструкцій, які би коректно враховували усі значущі чинники.

2. Існує велика кількість моделей, що пов'язують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів матеріалів; у загальному випадку вони, як правило, пов'язують місцеві (локальні) деформації проміжних шарів із контактним тиском.

3. Основною перепоною до моделювання реальних процесів і станів при контактній взаємодії складнопрофільних тіл є відсутність достатньо універсальної математичної моделі, яка б пов'язувала «локальні» та «глобальні» деформативні властивості поверхневих шарів контактуючих тіл, причому із урахуванням варіативності цих властивостей та їх зхалежності від історії навантаження.

4. Відсутні математичні моделі, які би пов'язували властивості мікроструктури поверхневих шарів, із одного боку, та форми деталей, – із іншого; отже, так-би мовити, не збудовані зв'язки мікро- та макрогеометричних параметрів контактуючих деталей, а, відповідно, складно дослідити їх взаємний вплив.

5. Натепер відсутні математичні моделі, які би пов'язували усі значущі чинники у єдиній розв'язувальній системі співвідношень для розв'язання задач синтезу геометричної форми контактуючих поверхонь складнопрофільних тіл та властивостей проміжних шарів (шорсткості, плівок, напилень тощо) за критеріями міцності,

довговічності, працездатності деталей машинобудівних конструкцій.

У той же час для частинних випадків вдається побудувати достатньо адекватні моделі, що описують фізико-механічні властивості приповерхневих шарів контактуючих тіл (типу (1.2)–(1.4)). Отже, принциповою проблемою є якраз побудова моделей та методів розв’язання співвідношень, які поєднують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів та усього об’єму контактуючих тіл. Ця обставина формує одну із задач досліджень, тобто створення такої системи співвідношень, яка відповідає природним потребам досліджень, а також методів їх розв’язання.

1.5 Базові дискретизовані формулювання задач дослідження контактної взаємодії із урахуванням властивостей матеріалу проміжних шарів

Розглянемо, слідуючи роботам [1, 2], застосування методу граничних елементів при аналізі контактної взаємодії на основі варіаційного формульовання та методу граничних інтегральних рівнянь.

Слід зауважити, що при дослідженні контактної взаємодії складнопрофільних тіл [1, 2] виникає необхідність проведення багатоваріантного розв’язання задач аналізу при варіюванні форми і розмірів взаємодіючих тіл. Як там зазначається, при цьому конкуруючими вимогами при розв’язанні одиничної задачі аналізу (значною мірою визначаються методом, обраним для її розв’язання) виступають оперативність і точність. Там же міститься аналіз та виклад початкових співвідношень, моделей та методів аналізу контактної взаємодії гладких та шорстких тіл. Нижче вони наведені у первинній редакції або близькій до неї, оскільки у подальшому у розд. 2, 4, 5 згадані положення використані як базові та відправні при при розвиткові теоретичних основ, розроблених у цій дисертації.

З усього розмаїття існуючих методів аналізу контактної взаємодії розглядаються, зокрема, метод Герца і метод скінченних елементів, слідуючи аналізу в [1, 2]: «...Метод Герца значно звужує множину тіл, для яких він дає прийнятну точність розв’язку, однак дає можливість здійснювати досить оперативну оцінку контактного тиску і контактних площадок. Другий застосовний МСЕ забезпечує високу точність моделювання для тіл скінченних розмірів будь-якої форми, однак вимагає великих витрат часу на формування чисельних моделей, особливо для контакту СПТ. Таким чином, за критеріями «точність – оперативність» ці методи нібито рознесені на протилежні краї уявного інтервалу показників «застосовність – ресурсовитратність», умовно позначаючи крайності можливостей за кожним із критеріїв. Компромісним із цієї точки зору видається метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР): він вільний від вимог теорії Герца про первинний точковий контакт тіл і про подання локального зазору у сполученні тіл у вигляді додатно визначеної квадратичної форми від координат, які задають точки загальної дотичної площини (що істотно розширює множину тіл, доступних для дослідження їх контактної взаємодії). З іншого боку, на відміну від методу скінченних елементів, він оперує з істотно меншими за розмірами дискретними моделями, оскільки знижує, як зазначалося вище, на одиницю фізичну розмірність при постановці задачі. Таким чином, для багатьох випадків досліджуваної контактної взаємодії СПТ метод граничних інтегральних рівнянь є альтернативою методу Герца і МСЕ, поєднуючи переваги першого та другого, і будучи позбавлений, значною мірою, їх недоліків. Тому він може вважатися кращим для розв'язання контактних задач» [1, 2].

Розглянемо модифікацію МГІР для дослідження контактної взаємодії гладких і шорстких складнопрофільних тіл, обмежених поверхнями довільної форми. Розв'язання задач проводиться у наступній послідовності: формування розв'язувальних рівнянь для випадку контакту гладких тіл; узагальнення отриманих співвідношень на випадок шорсткуватих тіл, у т.ч. – з нелінійною характеристикою «переміщення – контактний тиск».

Розглянемо модель контактної взаємодії складнопрофільних тіл, слідуючи [1, 2, 85, 86]. При дослідженні контакту гладких тіл з контактуючими поверхнями неузгодженої форми (тобто незбіжних) [1, 2, 350, 351] у першому наближенні за відсутності тертя розглядаються переміщення точок поверхонь і зазор між ними тільки у нормальному напрямку, і на цій основі визначаються кінематичні співвідношення контакту. Таке спрощення моделі нормального контакту базується на нехтуванні зміною напрямку векторів нормалі поверхонь взаємодіючих тіл [1, 2, 351–353]. Прикладом такої моделі є теорія Герца (відповідно до неї, як зазначалося вище, нормальний зазор між поверхнями наближено є квадратичною формою у локальній системі координат, пов'язаній із точкою початкового дотику тіл).

У більш загальному випадку (рис. 1.12, *а*) притискна сила **P** спричиняє зміну зазору між контактуючими тілами. Ця зміна зазору подається у вигляді трансляційної δ_i та деформаційної u_i компонент (рис. 1.12, *б*). Рівняння сумісності переміщень –

$$\begin{cases} u_{z_1}(x,y)+u_{z2}(x,y)+h(x,y)=\delta_1+\delta_2,\ S_1(x,y) \text{ и } S_2(x,y) - \text{в контакті;} \\ u_{z_1}(x,y)+u_{z2}(x,y)+h(x,y)>\delta_1+\delta_2,\ S_1(x,y) \text{ и } S_2(x,y) - \text{поза зоною контакту.} \end{cases} \tag{1.5}$$

При цьому між контактним тиском p і нормальними переміщеннями точок границі напівпросторів діє відоме інтегральне співвідношення [354] (рис. 1.12, *в*) $u_z(x,y)=\left(1-\nu^2\right)/\pi E\iint\limits_S\left[p(\xi,\eta)/\rho\right]d\xi\, d\eta$, $\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. Тоді

$$u_{z_1}(x,y)+u_{z_2}(x,y)=\left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\right)\iint\limits_S\frac{p(\xi,\eta)}{\rho}d\xi\, d\eta=\frac{1}{\pi E^*}\iint\limits_S\frac{p(\xi,\eta)}{\rho}d\xi\, d\eta. \tag{1.6}$$

Тут $\nu_i, E_i, i=1,2$ – коефіцієнт Пуасона і модуль пружності матеріалу кожного з контактуючих тіл, розподіл тиску $p(\xi,\eta)$ і контактна площадка S є невідомими і шуканими, а $E^*=(E_1E_2)/\left[\left(1-\nu_1^2\right)E_2+\left(1-\nu_2^2\right)E_1\right]$.

Як один із варіантів чисельного розв’язання контактної задачі використовується подання шуканого розподілу тиску p у вигляді комбінації пірамідальних кусково-лінійних функцій $p_n \equiv p_{ij}$ (рис. 1.12, *г*) $p_n:\ p(\xi,\eta)\cong\sum\limits_n\hat{p}(\xi-\xi_n,\eta-\eta_n)\cdot p_n$. Формування розв’язувальних співвідношень здійснено на основі двох наступних підходів: 1) *прямий метод (або метод колокацій),* у якому система формується шляхом запису умов (1.11) для заданого набору точок колокації [355, 356]; 2) *варіаційний метод (принцип Калькера)*, у рамках якого за дійсні приймаються вузлові значення контактного тиску, що мінімізують функціонал енергії [220]. При застосуванні методу колокацій маємо:

$$\begin{aligned} u_{z_1}(x,y)+u_{z_2}(x,y)&=(\pi E^*)^{-1}\iint\limits_S\left[p(\xi,\eta)/\rho\right]d\xi\, d\eta= \\ =(\pi E^*)^{-1}\sum_m\iint\limits_{S_m}&\left[\sum_n\left[\hat{p}(\xi-\xi_m,\eta-\eta_m)p_m\right]/\rho(x,y,\xi,\eta)\right]d\xi\, d\eta=\left|\begin{matrix}\xi=c\tilde{\xi},\ \eta=c\tilde{\eta}\\ x=c\tilde{x},\ y=c\tilde{y}\end{matrix}\right|= \\ =(\pi E^*)^{-1}c\sum_m\iint\limits_{S^{(1)}}&\left[\hat{p}^{(1)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)\cdot p_m/\rho(\tilde{x}-\tilde{\xi}_m,\tilde{y}-\tilde{\eta}_m,\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right]d\tilde{\xi}\, d\tilde{\eta}= \\ &=(\pi E^*)^{-1}c\sum_m w(\tilde{x}-\tilde{\xi}_m,\tilde{y}-\tilde{\eta}_m), \end{aligned} \tag{1.7}$$

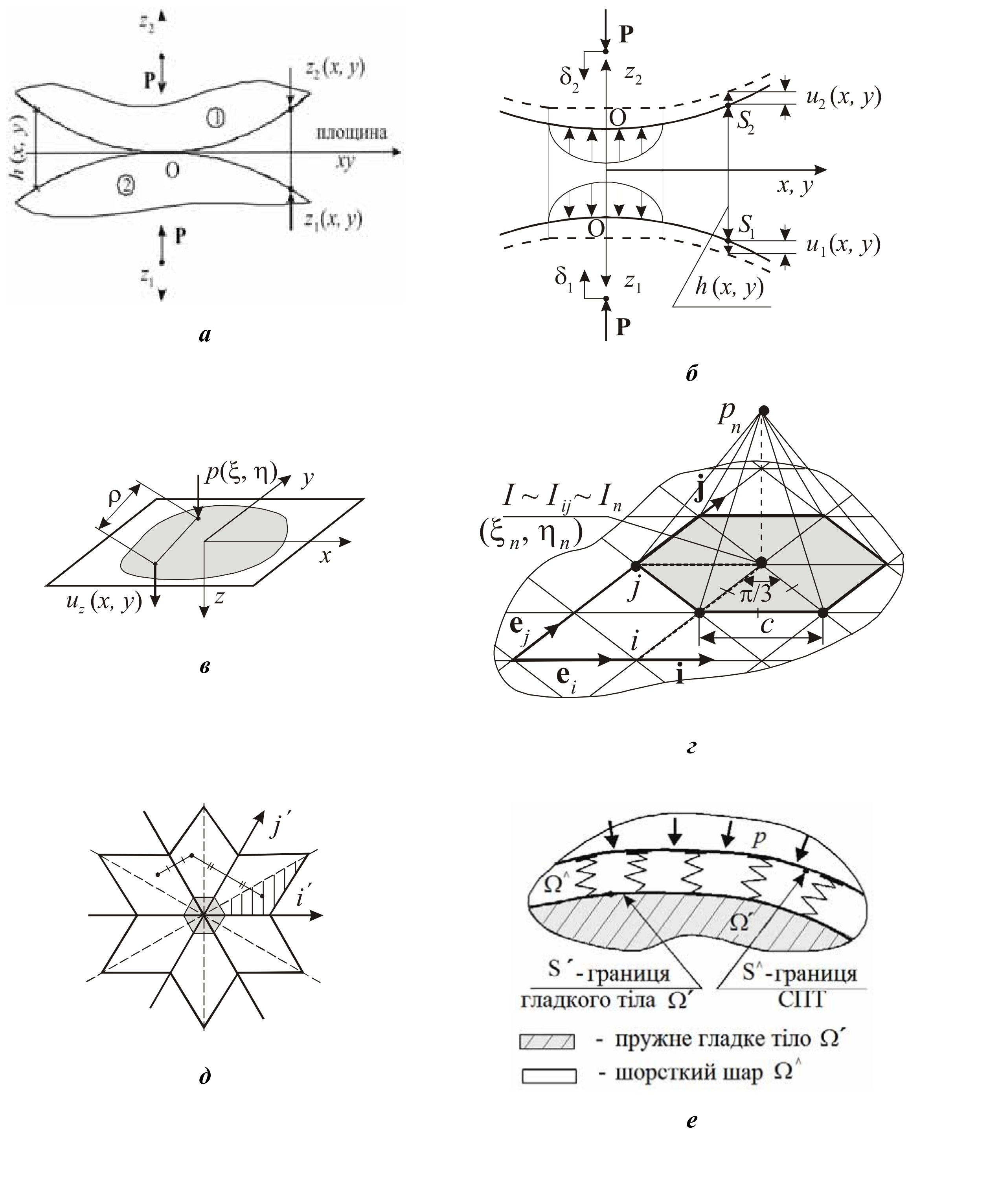


Рисунок 1.12 – До аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл: *а* – подання локального зазору між контактуючими тілами; *б* – деформація тіл і утворення контактної площадки під дією нормального зусилля (тіла 1 і 2 умовно рознесені); *в* – переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля; *г* – регулярна трикутна сітка з кроком *с* та із вузлами $(i,\ j)$ і пірамідальний елемент тиску $p_n \equiv p_{ij}$; *д* – відображення індексів для обчислення коефіцієнтів «шаблону»; *е* – модель шорсткого складнопрофільного пружного тіла

де $w(x,y)=\sum_m \iint_{(S^{(1)})}\left[\hat{p}^{(1)}(\xi,\eta)/\rho\right]d\tilde{\xi}\,d\tilde{\eta}$ – «шаблон» форми розподілу переміщень для одиничного пірамідального елемента (див. рис. 1.12, *г*).

Алгоритми обчислення $w(x,y)$ можуть бути різноманітними [1, 2, 356]. Зокрема, слідуючи [1], можна для вузлових точок записати (1.7) у вигляді:

$$\begin{gathered}u_n=u_{z_1}(I_n)+u_{z_2}(I_n)=u_{z_1}(I_{ij})+u_{z_2}(I_{ij})=u_{z_1}(x_{ij},y_{ij})+u_{z_2}(x_{ij},y_{ij})=\\=\frac{1}{\pi E^*}c\sum_{kl}w\left(\frac{x_{ij}-\xi_{kl}}{c},\frac{y_{ij}-\eta_{kl}}{c}\right)\cdot p_{kl}=\frac{1}{\pi E^*}c\sum_{kl}w(i-k,j-l)\cdot p_{kl}=\sum_m C_{nm}\,p_m.\end{gathered}\tag{1.8}$$

Тут фігурують значення матриці коефіцієнтів впливу $C=C_{nm}$ для різних розмірів гратки c. Для обчислення коефіцієнти впливу C_{nm} достатно скористатися тим, що ці коефіцієнти визначаються їх відносним, а не абсолютним, розташуванням: $C_{nm}=c(\pi E^*)^{-1}w(i(n)-i(m),\ j(n)-j(m))$.

Крім того, важливою властивістю є симетрія пірамідального елемента та базової сітки триангуляції області можливого контакту. Це дає підстави обчислювати значення коефіцієнтів $w_{i'j'}$ тільки у вузькому секторі $\{i'\ge 0,\ 0\le j'\le i'\}$ (на рис. 1.12, *д* – заштриховано). Для довільного $w_{i'j'}$ використовується власна вісь симетрії $w_{i'j'}=w_{j'i'}$, що графічно відображається відповідністю індексів (i',j'), наведених на рис. 1.12, *д*.

Дискретизовані умови контактування набувають вигляду:

$$\begin{cases}\sum\limits_m C_{nm}\,p_m+h_n-\delta=0, & \text{вузол } J_n \text{ – у контакті;}\\ \sum\limits_m C_{nm}\,p_m+h_n-\delta>0, & \text{вузол } J_n \text{ – поза зоною контакту,}\end{cases}\tag{1.9}$$

де $\delta=\delta_1+\delta_2$ – сумарне зближення, а $h_n=h(x_n,y_n)$ – вузлові значення початкового зазору. Природні вимоги до контактного тиску трансформуються у обмеження: $p_m\ge 0,\ m\in J$; $p_m=0$, $m\notin J$ (J_m – індекси вузлів сітки, що належать області контакту). Інша природна інтегральна умова – рівність сумарного зусилля, створюваного контактним тиском, притискному зусиллю: $\sum_m\sqrt{3}c^2p_m/2=P$. Отже, формується система співвідношень

$$\left\{\sum_{m_c\in N_c}C_{n_cm_c}\,p_{m_c}-\delta=-h_{n_c},n_c\in N_c;\ \sum_{m_c\in N_c}\sqrt{3}c^2p_{m_c}/2=P,\right.\tag{1.10}$$

що може бути розв'язана за допомогою ітераційної процедури, у ході якої уточнюється множина J.

Як альтернатива запропонованому підходу використаний варіаційний принцип Калькера [238]. Він полягає у тому, що дійсний розподіл *p* доставляє мінімум повної додаткової роботи Ф(*p*)

$$\left\{\Phi(p) = \frac{1}{2}\int_S p\left(u_{z_1} + u_{z_2}\right)dS + \int_S p(h-\delta)dS \to \min;\;\; p(\xi,\eta) \geq 0 \text{ в } S, \right. \tag{1.11}$$

де S – область, що покриває область можливого контакту.

Застосування певних квадратурних формул типу $\int_S f\,g\,dS = 0{,}5\sqrt{3}c^2 \sum_i f_i\,g_i$, призводить до наступної задачі квадратичного програмування:

$$\left\{\Phi_n\left(\{p_n\}_{n=1}^T\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}c^2\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm}p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m\left(h_m - \delta\right)\right] \to \min;\;\; p_m \geq 0, m = 1, N. \right. \tag{1.12}$$

Розширення вихідної постановки задачі про контакт гладких тіл може бути здійснено у багатьох напрямках. Зокрема, для шорстких тіл (рис. 1.12, *е*) можливе застосування різних аналітичних моделей контакту [1, 2, 335]. Так, проста модель типу Вінклера [335]

$$u_z^\wedge = \lambda p \tag{1.13}$$

описує властивості пружного шару з податливістю λ.

Приймаючи модель (1.13), одержуємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_m C_{nm}^\Sigma\, p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n - \text{у контакті;} \\ \sum\limits_m C_{nm}^\Sigma\, p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n - \text{поза зоною контакту.} \end{cases} \tag{1.14}$$

Тут модифіковані коефіцієнти матриці впливу $C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda\delta_{nm}$ визначаються з урахуванням підсумовування «глобальної» податливості гладких тіл (розглядаються як напівпростори) та «локальної» – шару Вінклера, що моделює, наприклад, властивості шорсткості. У підсумку маємо:

$$\left\{\sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c}^\Sigma\, p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c;\;\; \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3}c^2 p_{m_c}/2 = P. \right. \tag{1.15}$$

Цю систему співвідношень можна розв'язувати за допомогою процедури ітераційного уточнення області контакту і розподілу контактного тиску» [1, 2, 264, 288, 350, 357, 358].

У низці робіт [359–374] описані деякі підходи, моделі та методи дослідження напружено-деформованого стану тіл, у т.ч. – із урахуванням контактної взаємодії

Що стосується проблеми синтезу геометричної форми тіл за умови контактної міцності, то можливе пряме й безпосереднє застосування методів функцій рівня та зануреної границі [375–382], включно із оптимізацією в контактних задачах [383, 384] та методів змінної густини або SIMP (ізотропного суцільного матеріалу без штрафу) [385–394] до задачі про тіла, що контактують. Ці методи передбачають накладання, як правило, багатокрокових ітераційних процедур нелінійного програмування на багатократне розв’язання задач аналізу контактної взаємодії, що теж розв’язується переважно ітераційними методами. Отже, відбувається лавиноподібне нарощування (примноження) ітераційних процедур. Такий традиційний підхід зводить нанівець будь-які зусилля із підвищення ефективності розв’язання задач аналізу. Отже, вкрай необхідним є розроблення нового, альтернативного підходу, у якому передбачалося б об’єднання низки процедур із прозорим фізичним смислом, математичною формалізацією та обчислювальною ефективністю. Якраз це і складає одне із основних завдань цієї роботи (див. розд. 2, 4, 5).

1.6 Експериментальні методи дослідження контактної взаємодії пружних тіл

Задачі визначення напружено-деформованого стану та розподілу контактних зусиль між пружними тілами є тісно пов’язаними. З огляду на цю обставину експериментальні дослідження розподілу контактного тиску у деяких випадках суміщають із аналізом НДС. Так, на практиці широко застосовні методи тензометрії [395] залучаються до вимірювання компонент НДС у безпосередній близькості до зон дії контактних зусиль (рис. 1.13). При цьому чим ближче розміщується давач (чи їх групи), тим точніше визначення контактного тиску у зоні А (див. рис. 1.13). Якщо є вільна частина поверхні на контактуючих тілах, то можна із помірною точністю вимірювати розподіл тиску на периферії зони їхнього контакту. Для того, щоби визначити за допомогою тензодавачів розподіл контактного тиску всередині області контакту, в одному із тіл у спеціально виготовлених глухих отворах розміщують мікромесдози [395, 396] (рис. 1.14). Зовнішня поверхня цих мікромесдоз співпадає із початковою зовнішньою поверхнею тіла до виготовлення отворів. Часто ці зони із мікромесдозами заливають деяким матеріалом для формування суцільної приповерхневої структури. Проте навіть за цих умов реальні умови контакту тіл спотворюються порівняно із вихідним станом.

Такого ж типу проблеми супроводжують і застосування інших методів експериментальних досліджень для супутного визначення розполілу контактного тиску. Це відноситься, наприклад, до застосування методу голографічної інтерферометрії [397–399] (рис. 1.15). У цьому випадку при фіксації у лазерному світлі на реєструючому середовищі (див. рис. 1.15) голографічних інтерферограм або спекл-інтерферограм визначаються компоненти переміщень точок візуально доступних поверхонь контактуючих тіл. За ними можна визначити компоненти НДС, а, відповідно, оцінити контактний тиск на лініях контактних тіл, що взаємодіють.

Такими ж особливостями володіє також метод фотопружності [400–405]. Метод фотопружних покривів широко використовують для визначення НДС твердих тіл. Його реалізують, встановлюючи прозору діелектричну плівку на поверхню об'єкта. Плівка, деформуючись разом із об'єктом, змінює свої діелектричні властивості внаслідок ефекту фотопружності. Зміни реєструють, освітлюючи плівку поляризованим світлом та аналізуючи стан поляризації відбитого світла. Це дає можливість, використовуючи співвідношення фотопружності, визначити параметри деформації на поверхні об'єкта. Він також дає можливість визначати розподіл напружень у зоні контакту тіл, а, отже, оцінювати контактний тиск.

У роботах Кепича Т. Ю. [401] знайшов подальший розвиток теорії експериментальних методів при дослідженні впливу на точність вимірювань нелінійних оптичних ефектів та рефракції променя світла в зоні високих градієнтів напружень, що виникають при застосуванні традиційного методу фотопружності в околі концентраторів та дефектів типу тріщин.

Наведені вище варіанти застосування різних методів слугують прикладами супутніх досліджень. Незважаючі на корисність такого підходу, більш націленими на дослідження є саме спеціалізовані методи та засоби. Серед них можна виокремити: 1) метод візуальної, фото- та кінофіксації зон розподілу контактного тиску; 2) метод контактних відбитків із застосуванням копіювального паперу; 3) метод контактних відбитків із затосуванням писального паперу, світлопропускання якого змінюється залежно від контактного тиску; 4) метод контактних відбитків із застосуванням спеціальних плівок, інтенсивність забарвлення котрих змінюється залежно від контактного тиску [1, 2]; 5)метод контактних відбитків із затосуванням спеціальних плівок, електроємність або електроопір яких змінюється залежно від контактного тиску [1, 2, 270].

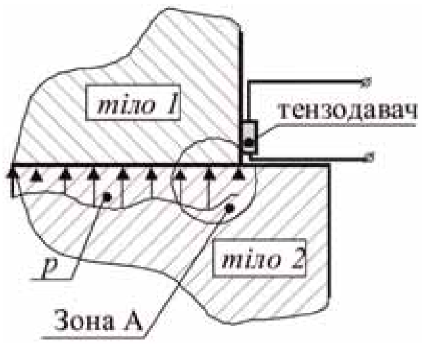


Рисунок 1.13 – Схема розміщення тензодавачів для фіксації компонент напружено-деформованого стану та контактного тиску *p* на периферії області контакту

Рисунок 1.14 – Зони розміщення тензодавачів (мікромесдоз) на області контакту

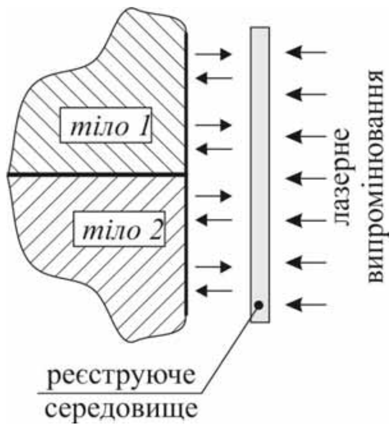
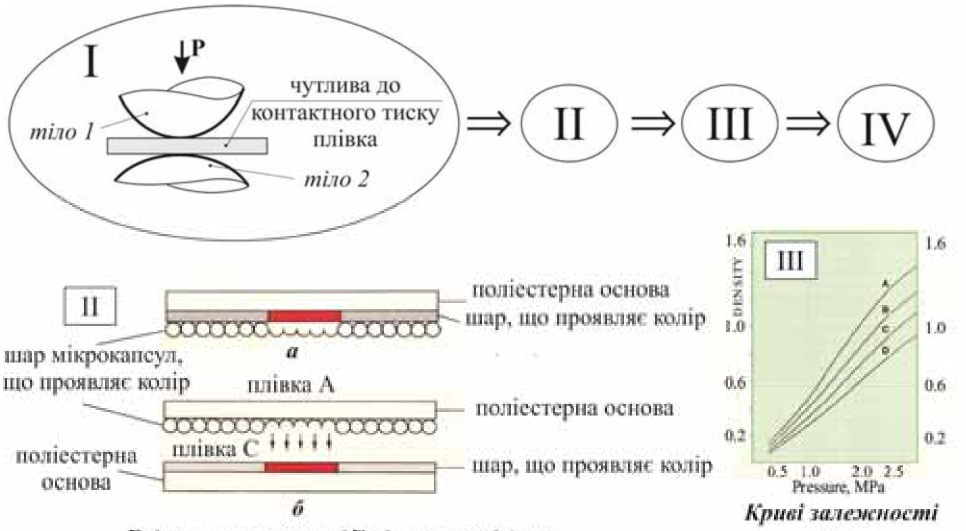


Рисунок 1.15 – Застосування методу голографічної інтерферометрії

Перелічені методи відрізняються тим, що передбачають наявність доступу до поверхні контакту (рис. 1.16), а, відповідно, дають можливість фіксувати розподіл контактного тиску на всій області контакту. Разом із тим група методів 1) вимагає, щоб хоча б одне із контактуючих тіл було прозоре; групи 2), 3) мають значні похибки вимірювань; групи 2)–5) привносять певне спотворення в умови контактного сполучення, адже створюють додаткову податливість за рахунок реєструючих тіл.

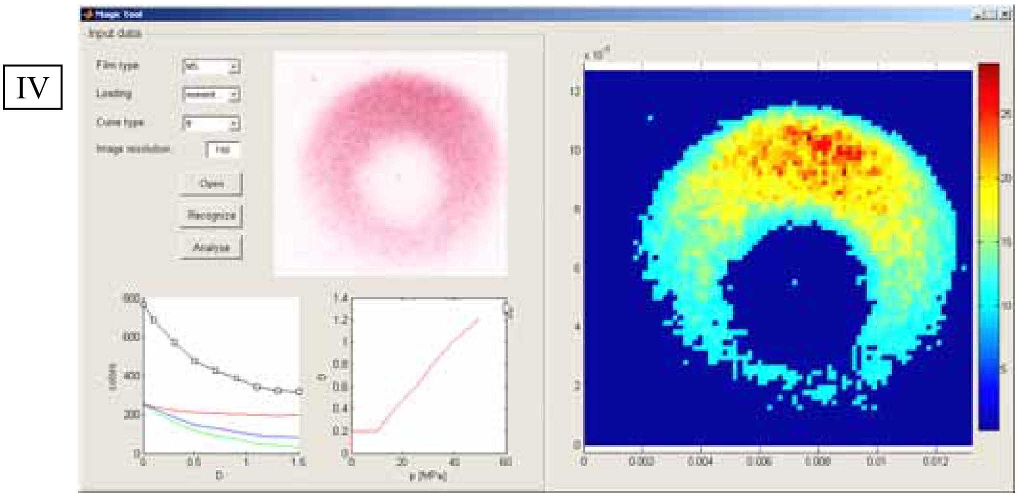
Таким чином, неможливо визначити безперечного лідера у всьому оглянутому спектрі методів експериментальних досліджень контактної взаємодії пружних тіл. Разом із тим низка переваг, які притаманні методу чутливих до контактного тиску спеціальних плівок, є аргументом на користь застосування саме їх у дослідженнях, передбачених завданнями дисертаційної роботи.

Мова йде, зокрема, про широкий діапазон контактного тиску між складнопрофільними тілами. Цій обставині відповідає цілий спектр таких чутливих плівок з різними діапазонами вимірювань. Таким чином, уся область контакту може бути по

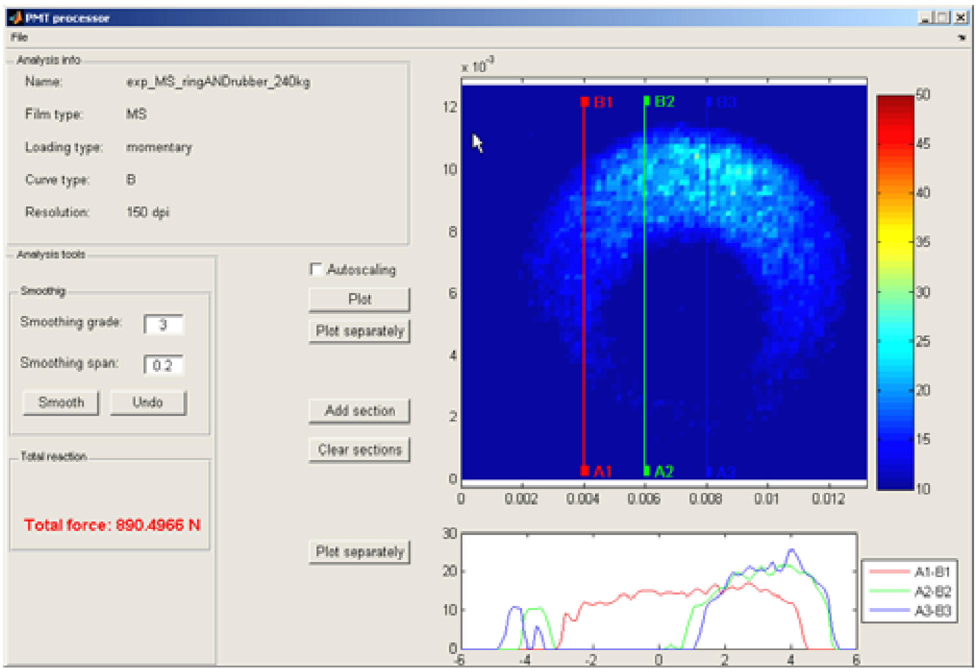


Будова та принцип дії одинарних (а) та складених (б) контактних плівок

Криві залежності «тиск - інтенсивність кольору»



Робоче вікно програми Pressure Mapping Tool (PMT)



Засоби аналізу обробки контактних відбитків у програмному пакеті PMT

Рисунок 1.16 – Схема застосування чутливих до тиску плівок крита множиною плівок, і кожна із них фіксуватиме розподіл контактного тиску у своєму діапазоні. Накладаючи окремі розподіли, можна отримати загальну картину відносно конфігурації плям контакту та розподілу контактного тиску.

Адаптація методу фіксації контактного тиску за допомогою чутливих плівок описана у розд. 7.

Висновки за аналізом існуючих методів, моделей та засобів. Постановка задач досліджень

У розділі описано аналіз існуючих методів, моделей та засобів дослідження деформування нетрадиційних волоконних матеріалів та контактної взаємодії складнопрофільних тіл із нелінійним проміжним шаром. Зокрема, здійснено аналіз проблеми побудови удосконалених моделей матеріалів зі складною мікроструктурою, що застосовуються для забезпечення високих характеристик проектованої техніки, та поставлені пріоритетні задачі з удосконалення існуючих підходів та створення нових методів осереднення випадкової будови тіл та поверхневих шарів. Також проаналізовані методи та моделі для дослідження контактної взаємодії елементів конструкцій. При цьому визначені наступні обставини.

1. На основі аналізу стану питання здійснені висновки про недостатні можливості існуючих мікроструктурних моделей матеріалів, особливо тих, що спираються на припущення стосовно афінності деформацій волокон. Показано, що ні афінна, ні розповсюджені три- та восьмиланкові моделі не відповідають дійсному характеру мікродеформацій у волоконних мережах навіть за пружної поведінки матеріалу. Ще менш придатними є зазначені теорії для урахування непружних механізмів, таких як незворотні пластичні деформації, кристалізація, в’язко-пружний гістерезис, пошкоджуваність та еволюція текстури у волоконних матеріалах. Наявні спроби побудувати чисельні моделі на цих засадах обмежені феноменологічним підходом до визначення внутрішнього стану матеріалів, який продиктований можливостями обраного опису мікробудови на противагу дійсній фізичній картині. Відтворення реальної поведінки вимагає більш детальної математичної моделі, що розрізняє якомога більше ознак і властивостей складових випадкової будови. Зокрема, велику значимість має початкова

орієнтація волокон та спосіб їх поєднання у мережі. Відповідно до цього сформульовано основні гіпотези щодо чинників та основних показників мікробудови, які впливають на остаточні властивості матеріалу та відповідно вимагають урахування у мікроструктурних моделях, що розробляються. Наведені аргументи на користь варіаційного підходу, де статистичний розподіл величин мікродеформацій є невідомою змінною, а відгук матеріалу до макроскопічних деформацій визначається мінімумом повної осередненої внутрішньої енергії. Виходячи з цього, визначено завдання дисертаційних досліджень з цього напрямку.

2. Проаналізовано перелік сучасних матеріалів, які відповідають окресленим ознакам (тобто розгалуджені просторові структури із одновимірних елементів). Виокремлено низку явищ та особливостей поведінки цих матеріалів, які становлять інтерес в обраній галузі застосування та дослідження. Це і неткані текстилі, і мікропористі матеріали, і сучасні полімери, а також біологічні гідрогелі та м'які тканини тощо.

3. На теперішній час відсутнє повне розв'язання проблеми аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням впливу фізично нелінійного проміжного шару, яке би поєднувало, з одного боку, фізичну адекватність, а з іншого, – високу точність та оперативність.

4. Традиційні процедури синтезу геометричної форми складнопрофільних тіл передбачають багатократне розв'язання задач аналізу контактної взаємодії, а, отже (див. п. 3), занадто ускладнюють розв'язання актуальних і важливих прикладних задач.

5. Найбільш придатними для аналізу НДС системи тіл із проміжними фізично нелінійними шарами видається комбінація варіаційної постановки типу принципа Калькера, метода граничних інтегральних рівнянь та дискретна апроксимація шуканих функцій із поданням їх у вигляді частинної суми ряду за базисними функціями із локальним носієм на поверхні можливого контакту.

Задля вирішення проблемних аспектів у роботі поставлені наступні задачі.

1. Розроблення загальних підходів, нових та удосконалених методів, моделей та засобів дослідження (див. розд. 2).

2. Розроблення методів і моделей для дослідження макромеханічних властивостей волоконних матеріалів на основі статистичної мікромеханіки (див. розд. 3).

3. Розроблення моделей та методів для аналізу контактної взаємодії складноп-

рофільних тіл із урахуванням нелінійних властивостей поверхневих та проміжних шарів (див. розд. 4).

4. Обґрунтування раціональної форми поверхонь контактуючих тіл та властивостей матеріалу проміжних шарів (див. розд. 5).

5. Розв'язання прикладних задач (див. розд. 6).

6. Експериментальні дослідження (див. розд. 7).

7. Впровадження результатів досліджень в виробництво (див. розд. 7).

При цьому виділяються два напрямки, поєднані, проте єдиним підходом, схожими фізичними моделями, подібними математичними постановками та чисельними методами дослідження. Це, з одного боку, – проблема визначення закономірностей деформування нових нетрадиційних волоконних матеріалів, з іншого боку – це визначення впливу фізично нелінійних властивостей матеріалу проміжних шарів на напружено-деформований стан складнопрофільних елементів конструкцій. Вони мають подібні фізичні закономірності на мікрорівні та потребують розробки моделей, що поєднують мікро- та макромасштабні підмоделі у єдиній мікромакромоделі. Крім того, одним із найбільш пріоритетних напрямків досліджень є перехід до варіаційних постановок. З точки зору методів дискретизації та методів розв'язання розв'язувальних співвідношень означені напрямки теж подібно зводяться до ітераційного уточнення розв'язку систем рівнянь та нерівностей.

У розділах 2–7 перелічені розробки за обома напрямками досліджень знайшли своє відображення та опис.

Матеріали розділу описані у роботах [1–108].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ЗАСОБИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо основні підходи до дослідження сучасних матеріалів на прикладі просторових волоконних структур та конструктивних елементів із традиційних матеріалів із урахуванням жорсткості та проміжних нелінейно пружних шарів. Для розв'язання поставлених у роботі задач потрібне залучення широкого арсеналу методів і моделей механіки деформівного твердого тіла, теорії пружності і механіки контактної взаємодії, а також їх розвиток і створення нових методів та моделей.

Вихідними співвідношеннями, від яких необхідно відштовхуватися при дослідженні НДС, контактних навантажень і міцності волоконних та зернистих структур, плівок, композитів, а також конструкцій, елементи котрих знаходяться у контактній механічній взаємодії, є [347, 406]: геометричні співвідношення, що визначають лінійні деформації внаслідок переміщення $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X},t):\mathbf{X}\to\mathbf{x}$ $(\mathbf{x}=\mathbf{X}+\mathbf{u})$ точок $\mathbf{X}\in\mathbf{B}$ суцільного тіла $\mathbf{B}$ через градієнт деформацій

$$\mathbf{F}=\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X},t)\,; \tag{2.1}$$

та інші міри деформації; рівняння рівноваги або закон збереження лінійного моменту, які застосовуються до розподілу внутрішніх зусиль у вигляді напружень, зокрема першого тензора Піоли-Кірхгофа $\mathbf{P}$, та зовнішньої об'ємної сили $\mathbf{Q}$ всередині тіла $\mathbf{B}$

$$\mathrm{div}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{P}(\mathbf{X})+\mathbf{Q}=\mathbf{0}\,; \tag{2.2}$$

а також фізичні співвідношення, що пов'язують між собою напруження та деформації; на відміну від рівнянь кінематики та рівноваги, що є універсальними для будь яких тіл в межах локальної теорії суцільного деформівного середовища, закон механічного відгуку на навантаження є специфічним для кожного матеріалу; загальними є лише термодинамічні співвідношення, якими напруження визначаються як спряжені до деформацій величини

$$\mathbf{P}=\partial_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F},\mathbf{I})\,, \tag{2.3}$$

відносно внутрішньої механічної енергії. Слід зауважити, що для незворотних процесів деформування функція щільності енергії залежатиме також від історії навантаження $\mathbf{I}$. Додатково визначаються крайові умови типу:

Діріхле	Неймана
$\varphi = \overline{\varphi}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \partial \mathbf{B}_u$ (2.4)	$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{I}), \quad \mathbf{X} \in \partial \mathbf{B}_\sigma,$ (2.5)

відповідно до поділу поверхні тіла на частини $\partial \mathbf{B}_u \cup \partial \mathbf{B}_\sigma = \partial \mathbf{B}$, де задані, відповідно, переміщення $\overline{\varphi}$ та зусилля $\overline{\mathbf{T}}$ до зовнішньої нормалі $\mathbf{N}$.

Крім того, на частині поверхні можливого контакту реалізуються крайові умови, які відображають умови непроникнення тіл одне в одного:

$$u_i^{(1)} \cdot v_i^{(1)} + u_i^{(2)} \cdot v_i^{(2)} \leq \delta^{(12)}. \tag{2.6}$$

У цих співвідношеннях справедливі позначення: $v_i^{(k)}$ – компоненти нормалі до тіла (k), а $\delta^{(ks)}$ – зазор у спряженні тіл k і s. Нерівності (2.6) справедливі на частини поверхні можливого контакту S_c.

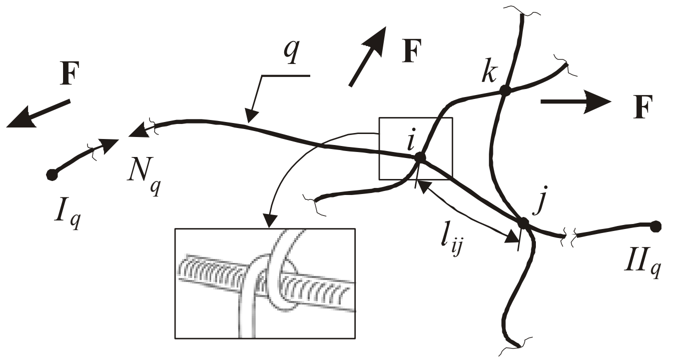
Співвідношення (2.1)–(2.6) є натепер достатньо відпрацьованими з точки зору методів розв'язання задач визначення НДС. У той же час вимоги техніки, можливості технології і матеріалознавства призводять до того стану, коли вихідні базові гіпотези і моделі виходять на границі області свого застосування. Зокрема, це відноситься до двох важливих аспектів. По-перше, на сьогодні у різних галузях промисловості знаходять своє широке застосування різноманітні волокнисті матеріали, зокрема, так звані неткані [170, 181, 184, 407]. Для дослідження поведінки таких матеріалів під навантаженням неприйнятні традиційні підходи на основі подання матеріалу у вигляді суцільного середовища. Справа у тому, що вже на мікрорівні (рис. 2.1) навіть елементарний фрагмент матеріалу не можна гомогенізувати із застосуванням традиційного підходу механіки суцільного середовища. У цьому випадку втрачається традиційний сенс поняття напруження. Це викликано тим, що на мікрорівні геометрична форма фрагмента Θ матеріалу, що піддається дії навантаження $\mathbf{F}$, визначається початковою конфігурацією положення вузлів взаємодії окремих волокон $i, j, k, \ldots$, а також початкових відстаней l_{ij} між окремими вузлами. Іншим важливим моментом є те, що у процесі навантаження і положення вузлів у просторі, і міжвузлові довжини є змінними. У цьому випадку через зникаючу малу згинну жорсткість волокон досліджуваного матеріалу при малому їхньому діаметрі єдиним силовим фактором є невід’ємне зусилля розтягування $\mathbf{N}$ (див. рис. 2.1), що зумовлене осьовим напруженням σ, яке розподілене рівномірно у перетині волокна. Природно, що при цьому

$$l_{ij} = \Delta r_{ij} \Leftrightarrow N_q > 0,\ \sigma_q > 0\ \forall q\,, \quad (2.7)$$

а внаслідок – гіпотеза про вільний ненапружений стан ділянки волокна при дотриманні умови

$$N_{q_i} = 0 \Leftrightarrow l_{ij} \geq \Delta r_{ij}\,, \qquad (2.8)$$

де $N_{q_i}, l_{ij}, \Delta r_{ij}$ – внутрішні зусилля на ділянці між вузлами i, j, довжина ділянки волокна і відстань між вузлами в актуальному стані відповідно.



i, j, k – вузли взаємодії окремих ниток фрагменту Ф; I_q, II_q – початкові та кінцеві краї волокна з номером q довжиною L_q і діаметром d_q

Рисунок 2.1 – Мережева структура волокнистого нетканого матеріалу

У самому вузлі з’єднання (рис. 2.2) відбувається або збереження відносного спокою внаслідок значної величини зусилля тертя спокою:

$$\Delta l_i = 0;\ N_{\text{тр}_i} = Q_i\, k_{\text{тр}} \geq N_{q_i}{}^{+} - N_{q_i}{}^{-}, \qquad (2.9)$$

або відбувається відносний рух на величину ковзання Δl_i до задоволення умов рівноваги

$$\Delta l_i > 0;\ N_{q_i}{}^{+} - N_{q_i}{}^{-} = N_{\text{тр}_i}\,. \qquad (2.10)$$

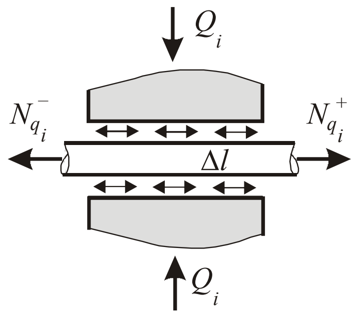


Рисунок 2.2 – Модель взаємодії волокон у вузлі i

Оскільки у цій системі присутні умови типу нерівностей (2.7)–(2.10), то процес необхідно розглядати у приростеннях навантажень $\Delta\mathbf{F}$ і конфігурацій $\Delta\Theta$. Цим самим отримує математичну формалізацію та відмінна фізична особливість, що механізм деформування такого матеріалу принципово різниться від механізму деформування традиційного композиційного матеріалу, зануреного у матрицю.

Зазначені вище дві особливості не дають змоги переходити до локального формулювання розв’язувальних рівнянь, що описують поведінку досліджуваного матеріалу на основі граничних підходів при аналізі станів малих граток матеріалу. Крім того, вимагає нової інтерпретації поняття компонент НДС.

Традиційними моделями для розв’язання зазначених проблемних ситуацій є застосування методів механіки для великих вибірок вузлів, які складають представницький фрагмент $\Theta^{\sim}$ досліджуваного матеріалу, а також моделей гомогенізації властивостей, що ставлять множині властивостей і характеристик напружено-деформованого стану волокон на мікрорівні, з одного боку, зведені характеристики НДС матеріалу на макрорівні, – з іншого. Ці питання частково відображені в роботах [347], однак запропоновані моделі не дають повного розв’язання проблеми. Більш того, у низці експериментів зафіксовані результати, які не можуть бути узгоджені та пояснені ніякими із загальноприйнятих моделей (див. підрозд. 1.1). Таким чином, для створення більш загальних моделей, придатних для опису поведінки матеріалів такого типу, необхідно: 1) розробити модель для коректного опису ансамблю волокон, що знаходяться у взаємодії між собою, на основі підходів мікромеханіки; 2) потрібне створення підмоделі гомогенізації властивостей при переході від мікро- до макромасштабу; 3) необхідно розробити модель, що поєднує перші дві підмоделі.

Розглянемо загальні підходи до розв’язання цих задач. Задача статистичного опису ансамблю взаємодіючих волокон може формулюватися як у локальній, так і у глобальній постановках. Для локальної постановки властиво виділити деяку множину вузлів, що складають представницький фрагмент $\Theta^{\sim}$, а потім записати для кожного вузла і волокна умови рівноваги для вузлів і подовжень для ділянок волокон, базуючись на рівняннях типу (2.7)–(2.10).

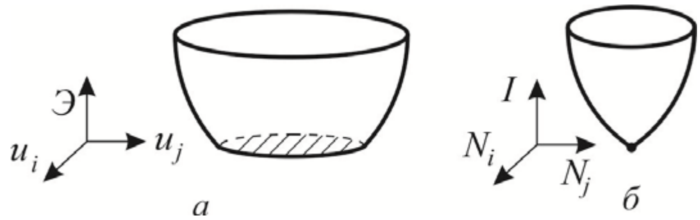


Рисунок 2.3 – Вигляд функціоналів:
а – повна внутрішня енергія;
б – додаткова енергія

Варіаційне формулювання може бути записане або у формі мінімізації прирощень повної внутрішньої енергії виділеного фрагмента $\Theta^{\sim}$ (тобто у проковзуваннях Δl і координатах Δr), або у формі мінімізації додаткової енергії (тобто у навантаженнях ΔN). У першому випадку отримуємо недиференційований функціонал (типу представленого на рис. 2.3, *б*), у другому – функціонал з областю невизначеності екстремуму (див. рис. 2.3, *а*). І у першому, і у другому випадку отримуємо проблеми пошуку однозначного розв’язку.

Проаналізувавши представлені варіанти, можна запропонувати наступні етапи досліджень: на основі локальної постановки досліджується фрагмент Θ, що містить одиниці волокон і вузлів їх з’єднання; на основі варіаційної постановки в переміщеннях досліджується представницький фрагмент $\Theta^{\sim}$ із кількістю вузлів кілька десятків і сотень із точки зору поведінки системи під навантаженням при збереженні початкової множини вузлів з'єднання волокон у поточному актуальному стані; на основі варіаційної постановки у навантаженнях досліджується представницький фрагмент $\Theta^{\sim}$ з кількістю вузлів кілька сотень і тисяч при можливій зміні множини вузлів з'єднання волокон у поточному актуальному стані порівняно із початковим.

Описані постановки, кожна окремо, а тим більше – в їх послідовному поєднанні, відрізняються від традиційних постановок: по-перше, вони орієнтовані не на регулярні повторювані структури, а на деякий стохастичний розподіл волокон і вузлів; по-друге, у вузлах взаємодії волокон передбачена не тільки можливість злиття (нерухомого з'єднання), а й проковзування волокон одне відносно іншого; по-третє, враховується тертя у сполученні волокон, а, отже, враховується історія навантаження, що змушує здійснювати розв'язання задачі у прирощеннях.

Для розв'язання задачі гомогенізації властивостей волокнистих нетканих матеріалів залучаються моделі осереднення за множиною напрямків. При цьому в модель гомогенізації привносяться операції інтегрування на замкненій поверхні, що оточує деяку точку всередині представницького об'єму $\Theta^{\sim}$, з ваговою функцією, яка певним чином розподілена на цій поверхні: $\langle\xi\rangle = \int \xi \rho_0(S)\, dS$, де ξ – осереднена величина стану, $\rho_0(S)$ – вихідна щільність розподілу волокон, а S – статистично представницька поверхня. Модель гомогенізації властивостей волокнистих нетканих матеріалів, яка розроблена і запропонована до використання у роботі, відрізняється від відомих саме процедурою осереднення із залученням інтегрування із вагою за замкненій поверхні навколо точки осереднення.

Крім розв'язання виникаючих описаних двох задач, потрібне також їх спільне розв'язання для аналізу реакції елементів конструкцій із волокнистих матеріалів на дію навантаження $\mathbf{F}$. Для цього пропонується об'єднати всі параметри, які беруть участь у розв'язанні цих задач, а потім визначити характеристики, що описують функціональні властивості елементів конструкцій з цих матеріалів. Це – окреме завдання, тому що традиційні характеристики міцності безпосередньо до досліджуваного об'єкта не можуть бути незастосовні. Дійсно, у деяких вузлах з'єднання волокон навіть при малих рівнях зовнішнього навантаження $\mathbf{F}$ можливе значне зміщення за рахунок взаємних трансляцій волокон без їхнього розриву. Більш того, ці волокна можуть виходити із механічного контакту. У традиційних підходах це можна трактувати або як ознаку початку руйнування, або як процес руйнування. Однак стосовно досліджуваних матеріалів коректніше було б визначити це як процес природного функціонування складної системи із протіканням структурних змін і частковою втратою інтенсивності внутрішніх силових та кінематичних зв'язків між компонентами системи. Цей процес має такі особливості: він починається з мінімального рівня навантаження $\mathbf{F}$, розосереджений у просторі і в певний момент може набути різко прискореного характеру; у цій частині він подібний до континуального накопичення пошкоджуваності, проте з тією принциповою різницею, що фізичні механізми, які їх породжують, – різні, а також різні механізми накопичення (у разі континуальної механіки пошкоджуваності має місце зростання характеристики в точці, і його швидкість залежить від напруженого стану в ній, а в разі волокнистих нетканих матеріалів прояв такої тенденції – не локальний, а загальний для представницького фрагмента або елемента конструкції); для нього характерна незворотність за параметром навантаження, як, наприклад, у механізмі пластичного деформування, проте така аналогія властива тільки окремо взятим парам у вузлі волокон; у багатьох випадках визначити граничний стан елементу конструкції з волокнистого матеріалу неможливо, ґрунтуючись лише на аналізі стану системи, що навантажується – важливий також і спосіб прикладання навантаження, і вид функціональної вимоги, що ставиться до цього елемента.

Отже, у загальному випадку не вдається виділити моделі, що пов'язують попарно, з одного боку, навантаження і напружено-деформований стан об'єкта, з іншого – НДС і міцнісні характеристики, а далі – міцнісні характеристики і функціональні властивості. Усі ці процеси, співвідношення та властивості потрібно розглядати у загальній їх сукупності, спираючись на локальні або варіаційні постановки і підходи статистичної механіки, а також орієнтуючись на фізичні процеси, що описують навантаження об'єкта і втрату його функціональних властивостей. Виходячи з цього, в цьому випадку маємо справу з механічною конструкцією, що описується системою рівнянь і нерівностей в прирощеннях, що залежить від початкового стану та історії навантаження: $\dot{I} \in \partial_{\dot{I}} \Phi(Z, I, \dot{I})$. Тут I – внутрішня змінна, Z – змінна стану, а Φ – потенціал дисипації.

Розроблені загальні підходи до дослідження такого типу конструкцій описані у розд 3. Саме нові мікромеханічні моделі, а також нові методи статистичної механіки стосовно волоконних мережевих структур становлять наукову новизну в плані створення у подальшому загальної теорії механіки деформівних матеріалів такого типу.

У розд. 4 представлені нові методи і моделі аналізу контактної взаємодії СПТ тіл з розділяючим їх нелінійно пружним шаром. При цьому, слідуючи роботі [175], можна виділити два випадки: контакт тіл неузгодженої і узгодженої форм. У першому випадку (див. підрозд. 1.3) початковий зазор між тілами подається у вигляді квадратичної форми координат (або іншої функції) у площині, дотичній до точки геометричного контакту тіл (у багатьох випадках може бути застосована модель Герца). У другому випадку має місце збіг (конгруентність) поверхонь контактуючих тіл на деякій ділянці поверхні. У той же час прагнення до поліпшення функціональних властивостей вузлів машин визначає тенденцію проектування деталей з близькими, але не співпадаючими поверхнями. У цьому випадку не застосовні ні модель Герца, ні Штаєрмана, ні інші моделі [175]. Більш того, не завжди контактуючі поверхні можуть бути описані аналітично. Таким чином, на додаток до традиційної класифікації, можна ввести третій тип контактуючих СПТ. Він характерний тим, що локалізація контакту у номінальному вихідному стані або лінійна, або точкова. При цьому величини зазорів, пружних переміщень, зближень за рахунок обтискання проміжних шарів – сумірні. А, значить, незастосовні моделі і методи, що працюють для двох перших випадків за [220]. Цим і визначається досліджуваний у роботі випадок контакту тіл, названих складнопрофільними.

Для розв’язання задачі про контактну взаємодію в одержуваній системі складнопрофільних тіл залучаються 3 підходи. Перший з них заснований на локальному формулюванні задачі про контакт напівнескінченних тіл. Він базується на виконанні умов сумісності нормальних переміщень точок поверхні взаємодіючих тіл (рис. 2.4):

$$u_\nu^{(1)} + u_\nu^{(2)} \le h, \tag{2.11}$$

де $u_\nu^{(1)}$, $u_\nu^{(2)}$ – нормальні переміщення точок поверхні тіл 1 і 2 відповідно, а $h = h_1 + h_2$ – зазор у спряженні контактуючих тіл за нормаллю ($\nu^{(1)} = -\nu^{(2)}$).

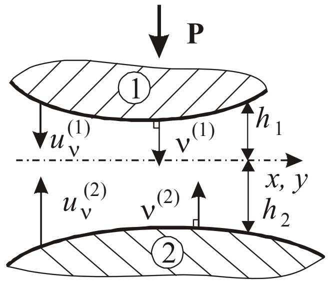


Рисунок 2.4 – Контактна взаємодія тіл 1 і 2

Подаючи нормальні переміщення точок поверхонь СПТ у вигляді

$$u_\nu^{(i)} = \delta^{(i)} - w^{(i)},\ i = 1, 2, \tag{2.12}$$

де $\delta^{(i)}$ – зміщення нескінченно віддалених точок тіл 1 і 2, а $w^{(i)}$ – розподіл прогинів точок границі напівпростору, викликане контактним тиском p, отримуємо співвідношення, що зв’язує локальне зближення $w = w^{(1)} + w^{(2)}$, загальне зближення тіл $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$, розподіл зазору h і контактний тиск p (див. рис. 1.12, *г*):

$$w = \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right] \int\limits_{(S)} \frac{p(\xi,\eta)}{\rho(x,u,\xi,\eta)} d\xi d\eta \ge \delta - h. \tag{2.13}$$

Це граничне інтегральне рівняння може бути дискретизоване із застосуванням, наприклад, базисних функцій, представлених на рис. 2.5. Тоді система співвідношень набирає вигляду [1, 2]:

$$\left\{ \sum_j C_{i,j}\, p_j = \delta - h_i,\ p_j \ge 0;\ \ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i p_i = P, \right. \tag{2.14}$$

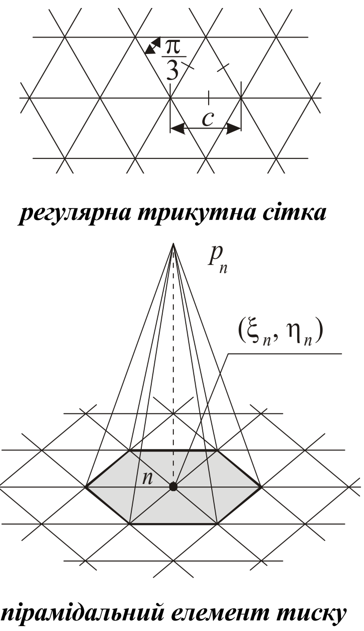


Рисунок 2.5 – Пропонована базисна функція

де C – матриця коефіцієнтів впливу, що визначає переміщення у i–му вузлі сітки дискретизації при дії тиску p_j одиничної величини і з розподілом за базисною функцією, що відповідає j–му вузлу (рис. 2.2, див. рис. 1.4), а h_i – вузлові зазори. Якщо між контактуючими тілами знаходиться пружний шар із фізично нелінійними характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p),\ i = 3, 4, \tag{2.15}$$

то у співвідношення (2.14) увійдуть додаткові складові:

$$\sum_j C_{ij}\, p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i, \tag{2.16}$$

де $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$ – додаткові прогини за рахунок деформування шарів на поверхнях контактуючих тіл 1 і 2. Це можуть бути, наприклад, шари шорсткості, для яких справедливі співвідношення [335]

$$w = \lambda p^s. \tag{2.17}$$

Тут λ, p – параметри, які визначаються мікромеханічними характеристиками шорсткості (середня висота виступів шорсткості R_a, фізико-механічні характеристики матеріалу і вид механічної обробки поверхні, див. розд. 1). Ці параметри можуть бути розраховані на основі статистичних мікромеханічних моделей контакту шорстких тіл [333, 335, 408] або з експериментальних даних [337, 339], або із статистичних моделей [284, 285, 294, 302, 303, 314–328] (див. розд. 1).

Отримується у загальному випадку нелінійна система рівнянь і нерівностей, відмінною рисою якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість відрізняє створену модель від традиційних [1, 2, 220, 228, 230], у яких в лівій частині рівнянь і нерівностей (2.11) присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка зумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною. При цьому складові, відповідальні за останню, присутні у співвідношеннях, що описують першу. У результаті отримуємо пов'язані нелінійні умови контактної взаємодії, далі в роботі названі структурно-фізичною нелінійністю.

Таким чином, застосування локальної постановки дало можливість різко розширити коло досліджуваних об'єктів механіки контактної взаємодії за рахунок включення в цей процес, крім гладких тіл [1], і тіл з лінійно-пружним шаром на поверхні [2], також і тіл з нелінійно-пружним проміжним шаром між ними. Важливо, що методологія формування розв'язувальної системи рівнянь залишилася в цілому аналогічною, хоча результат – якісно відмінний. Це дає можливість розглядати випадки контакту гладких тіл і тіл з лінійно-пружним шаром між ними як частинні випадки одержуваних співвідношень.

Постановкою, альтернативною локальній, є варіаційне формулювання контактної задачі. У цьому випадку можна розглянути два найбільш перспективних варіанти. Перший варіант випливає з постановок задач про контактну взаємодію пружних тіл на основі теорії варіаційних нерівностей [228, 230, 261, 262] (другий підхід). У досліджуваному випадку як таке нелінійне пружне тіло в системі присутній шар, матеріал якого підкоряється закону (2.17). Перетворивши це співвідношення, контактний тиск p можна надалі трактувати як напруження в тонкому шарі типу вінклерового, а, відповідно, можна застосувати підхід теорії варіаційних нерівностей, що зводить вихідну задачу в кінцевому рахунку до мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії досліджуваної системи тіл (включаючи і нелінійний шар):

$$I(u) \to \min, \qquad (2.18)$$

де u – множина розподілів переміщень точок взаємодіючих тіл, в т.ч. і нелінійно-пружного шару. Застосовуючи до цього функціоналу (2.18) процедуру дискретизації, наприклад, за МСЕ, отримуємо у результаті функціонал у вигляді суми квадратичної і лінійної форм, що відповідають за енергію лінійно-пружної частини досліджуваної системи, і нелінійного доданку, відповідного енергії нелінійно-пружного шару:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} X^T K X - FX + I^n(X). \qquad (2.19)$$

Процедура лінеаризації отриманого опуклого функціоналу (2.19) може бути здійснена методами множників Лагранжа [409], штрафу [410], застосуванням інших процедур [266–268] або шляхом прямої лінеаризації із проекцією на множину обмежень (2.11). У будь-якому випадку такі відомі методи володіють тим загальним недоліком, що як масив шуканих величин (при застосуванні, наприклад, методу скінченних елементів) виступають вузлові переміщення всіх вузлів скінченно-елементної сітки взаємодіючих тіл: і в об'ємі, і на поверхні. Таким чином, при застосуванні ітераційних процедур розв'язання задачі потрібно оперування з великими масивами вузлових змінних, в той час як в контактних умовах задіяна тільки та частина вузлових переміщень, яка знаходиться тільки у зоні можливого контакту.

Цього недоліку позбавлений третій підхід, заснований на застосуванні варіаційного принципу Калькера [238]. Він формується щодо шуканого контактного тиску, тобто фізична розмірність задачі знижується на одиницю. У підсумку, розширивши відоме формулювання принципу Калькера [238], отримуємо задачу мінімізації функціонала додаткової енергії

$$\Phi(p) = \frac{1}{2}\int_S p\left(u_{z_1} + u_{z_2}\right)dS + \int_S p\left(h - \delta\right)dS + \Phi_n(p) \to \min \qquad (2.20)$$

на невід'ємному тиску p. Цей опуклий функціонал складається з суми квадратичної форми тиску і нелінійної частини Φ_n, що відповідає нелінійно-пружному шару. Застосування квадратурних формул [411] переводить задачу (2.20) до вигляду:

$$Cp + D(p) = \delta - h. \qquad (2.21)$$

Тут C – матриця коефіцієнтів впливу (породжується квадратичною частиною функціоналу), $D(p)$ – компонента, що породжується нелінійною частиною функціоналу загального вигляду, p – масив значень контактного тиску у вузлах квадратурних формул, а δ і h – мають той же сенс, що і у (2.14). При застосуванні певного виду квадратурних формул, як це було показано у [270] (див. розд. 1), отримувані співвідношення (2.21) для випадку контакту гладких тіл співпадають із співвідношеннями, отриманими у локальній та гранично-інтегральній постановках. У той же час варіаційна постановка дає можливість більш строго обґрунтувати існування, єдиність і збіжність чисельного розв’язку контактної задачі.

Із трьох описаних вище підходів як провідний був обраний останній. Це пояснюється тим, що він володіє математичної строгістю, універсальністю та природним переходом до дискретної форми. З іншого боку, порівняно із традиційною скінченно-елементною постановкою різко знижується розмірність масиву шуканих змінних (оскільки як варійовані виступають вузлові значення тиску на сітці, що накинута тільки на поверхню, а не на весь об’єм, який займає СПТ), і у багатьох випадках це дає можливість підняти оперативність розв’язання задач аналізу при збереженні точності одержуваних результатів. Така властивість особливо важлива на перших етапах проектних досліджень, коли потрібне проведення великого обсягу різноманітних розрахунків НДС СПТ із урахуванням контактної взаємодії.

Метод, заснований на використанні варіаційного принципу Калькера, природно підходить до застосування у випадку контакту напівнескінченних тіл, деформування яких від дії нормального тиску на поверхні мало відрізняється від деформування пружного напівпростору. Одним із обмежень при цьому є вимога значного перевищення габаритів контактуючого тіла над розмірами плями контакту. У той же час при невиконанні цієї вимоги можна адаптувати запропонований метод, замінивши аналітичний розв’язок задачі Буссінеска для напівпростору на функцію Гріна для тіл скінченних розмірів [346]. У дискретному варіанті це означає заміну аналітично обчислюваних компонент матриці коефіцієнтів впливу C на такі, що визначаються чисельно (наприклад, за допомогою МСЕ). При цьому матриця C видозмінюється, проте додаткові операції будуть потрібні тільки на етапі формування системи розв’язувальних рівнянь, не зачіпаючи етапи розв’язання, які формують переважну складову загального обсягу розв’язання задачі.

Отримання розв'язувальних рівнянь типу (2.21) є тільки початковою частиною поставленої у роботі проблеми. Найважливішим же компонентом є розробка методів розв'язання цієї системи співвідношень, принциповою відмінністю якої від, наприклад, традиційної системи нелінійних рівнянь, є те, що невідомими є не тільки шукані вузлові змінні, але і склад їх множини, оскільки шуканою є також і область контакту. Таким чином, застосування традиційних методів розв'язання у даному випадку напряму – неприйнятне. З іншого боку, вже існують методи розв'язання подібних задач для гладких тіл і тіл з лінійно-пружними шарами, що продемонстрували працездатність і ефективність [269, 270]. У зв'язку із цим перспективним є розвиток та узагальнення цих методів на досліджуваний випадок. Зокрема, систему (2.21) можна подати як

$$Cp = \delta - \left[h + D(p)\right], \tag{2.22}$$

що дає можливість організувати ітераційний процес уточнення розв'язку, трактуючи останній доданок у (2.22) як певний додатковий зазор ($s = 0,1,2,...$):

$$\left\{p^{(s+1)} = C^{-1}\left[\delta - \widetilde{h}(p^{(s)})\right]; \qquad \widetilde{h}(p^{(s)}) = h + D(p^{(s)}).\right. \tag{2.23}$$

Співвідношення (2.23) відображають суть методу додаткових зазорів (МДЗ).

З іншого боку, систему (2.21) можна подати у вигляді:

$$\left[C + \lambda^{\wedge}(p)\right]p = \delta - h\,, \tag{2.24}$$

де змінна контактна податливість $\lambda^{\wedge}(p)$ визначається рівністю

$$\lambda^{\wedge}(p)\cdot p = D(p)\,. \tag{2.25}$$

Це дає можливість організувати ітераційний процес ($s = 0,1,2,...$)

$$\left\{p^{(s+1)} = \left[C^{(s)}\right]^{-1}\left[\delta - h\right]; \qquad C^{(s)}(p) = C + \lambda^{\wedge}(p^{(s)}).\right. \tag{2.26}$$

Співвідношення (2.26) реалізують метод змінних параметрів податливості (МЗПП).

Представлені методи (метод додаткових зазорів і метод змінних параметрів податливості) зводять вихідну структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності контактних задач для гладких тіл або тіл із лінійно пружним проміжним шаром між ними. Фізичне трактування цих методів полягає у тому, що розв'язок вихідної задачі збігається з розв'язком задачі для контакту гладких тіл зі спеціально підібраною корекцією профілю поверхні (МДЗ) або з вінклеровим шаром зі спеціально підібраною нерівномірною податливістю (МЗПП). Крім цих методів, можливе застосування, наприклад, процедур, аналогічних методу Ньютона-Рафсона, проте доповнених процедурою корекції множини активних обмежень (тобто тих вузлів, у яких виконуються умови контакту). Також для мінімізації нелінійного функціоналу Калькера на опуклій множині невід'ємного вузлового тиску у роботі запропоновано застосовувати релаксаційні методи, що складаються з реалізації алгоритмів для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу методу послідовної верхньої релаксації (МПВР), доповненою процедурою покрокової проекції поточного наближення розв'язку на обмеження. Запропоновано також нові процедури блочної релаксації з проекцією.

Крім того, розроблені нові підходи до якісного аналізу і кількісного опису контактної взаємодії СПТ. При цьому відгук картини розподілу контактного тиску на варіювання значущих параметрів, які фігурують у співвідношеннях для опису їх контактної взаємодії, трактується у вигляді двох процесів: зміна форми і розмірів плями контакту, а також зміна форми і розмірів «купола» розподілу тиску, що спирається на цю область контакту. При цьому можна визначити чутливість зміни контрольованих областей і розподілів на варіювання тих чи інших параметрів. У першу чергу, це дає уявлення про тенденції та інтенсивності зміни розв'язку задач аналізу контактної взаємодії при зміні певних величин. Відповідно, визначається множина параметрів, шляхом варіювання якими у першу чергу доцільно оптимізувати розв'язок задач за тим чи іншим критерієм. Для оцінки вкладу в загальний баланс переміщень у контакті СПТ розроблений новий спосіб їх геометричної інтерпретації. Він полягає в тому, що загальне переміщення в кожній точці контакту подається у вигляді суми трьох доданків: *перший* відповідає за переміщення, викликані «глобальною» пружною деформацією гладких СПТ; *другий* породжується локальним обтисканням проміжного шару; *третій* відповідає початковому зазору. Баланс переміщень представляється у вигляді точки на одиничній сфері. При зміні параметрів точка на сфері прокреслює характерну траєкторію. Крім поточкових, введена також і аналогічна інтегральна характеристика за всією областю контакту. Таким чином, побудовані нові характеристики, що дають можливість інтерпретувати внесок різних складових у баланс переміщень у контакті СПТ.

У результаті побудована система розв'язувальних співвідношень, які описують структурно-фізичну нелінійність у контакті, а також розроблені методи їх розв'язання, і, крім того, способи аналізу та оцінки зміни отримуваних розв'язків при варіюванні вихідних даних. Створені моделі, методи та засоби складають теоретичні підвалини, які лежать у основі наступних досліджень. Ці нові результати, а також результати розв'язання низки нових тестових задач, описані у розд. 4.

Сформульовані фізично-структурно нелінійні співвідношення, а також розроблені методи їх розв'язання, служать основою для розробки методів розв'язання обернених задач. Зокрема, становить інтерес задача синтезу геометричної форми контактуючих тіл з метою формування заданого розподілу контактного тиску p. У роботі для цього передбачається використовувати ті ж співвідношення (2.14), (2.16) і (2.21), що і для розв'язання задач аналізу. Дійсно, з формальної точки зору ці співвідношення можна трактувати і як щодо набору шуканих величин (p, δ) при заданих (h, P), і як – навпаки. Таким чином, вдається на єдиній системі співвідношень будувати як розв'язання задач аналізу, так і синтезу.

У той же час пряме задоволення всієї системи сформованих співвідношень не завжди дає прийнятний гладкий розв'язок, у силу чого необхідно звертатися до інших постановок задач синтезу. Слід зазначити, що розглядаючи розподіл зазорів h між контактуючими тілами як формоутворювальну інформацію, її можна також трактувати і як керуючу. Управляючи розподілом h, можна впливати на розподіл контактних зон і контактного тиску у контакті. Однак при цьому виникає проблема апроксимації h із використання базисних функцій з локальним носієм. У цих випадках спроби локального варіювання зазору призводять, як правило, до негладкої поведінки розв'язку. Це ілюструється, наприклад, варіюванням початкового нульового зазору між плоскими співпадаючими частинами поверхонь контактуючих тіл: тиск у вузлі при такому варіюванні – нульовий в разі зміни зазору «в плюс», номінальний – за відсутності варіювання, різко зростаючий – за зміни зазору «в мінус». Такі «нефізичні» осциляції розподілів p при варіюванні h змушують перейти до альтернативних постановок. Зокрема, в роботі запропоновано проводити варіювання не h, а p. Навіть якщо варіювати p через вузлові значення в розкладанні функції з локальним негладким носієм, будемо отримувати як реакцію гладку, хоча і нелокальну, зміну зазору h. Таким чином, цей спосіб є кращим (саме завдяки гладкості відгуку) для розв'язання задачі синтезу сприятливого профілю поверхонь контактуючих тіл. Як критерій при цьому можуть виступати:

$$p_{\max} \to \min, \ \sigma \to \min, \ w_{\max} \to \min, \tag{2.27}$$

де σ – деяка функція компонент напружено-деформованого стану (наприклад, інтенсивність напружень), а w – стиснення проміжного шару. У будь-якому з варіантів отримуємо деяку проблему типу

$$\tau(h(p)) \to \min, \tag{2.28}$$

сформульовану, у кінцевому рахунку, «у контактному тиску», а одержувана форма (розподіл h) є «випливаючим» результатом із розв'язку p (тут τ – деяка функція якості, яка конкретизована з набору (2.27) або іншим чином визначена, виходячи зі специфіки конкретної розв'язуваної задачі).

Крім методу формування сприятливого вихідного профілю контактуючих тіл, доцільна також і нова постановка задачі про корекцію цього профілю за рахунок додаткового навантаження, яке спеціально підбирається, і, відповідно, зміни початкового зазору внаслідок деформування взаємодіючих тіл. Така постановка викликана тим, що профіль, сприятливий з тієї чи іншої точки зору при одному рівні навантаження, перестає бути таким при його (рівня) зміні. Це – наслідок нелінійності задачі. Крім того, багато конструкцій працюють в умовах високих навантажень, що змінюються, і підібрати загальний сприятливий профіль не завжди видається можливим. У результаті у постановку привноситься додаткове зовнішнє навантаження $F_{\text{кор}}$, і воно визначається за критерієм

$$\tau\left\{h\left[p(f, F_{\text{кор}})\right]\right\} \to \min. \tag{2.29}$$

Таким чином, $F_{\text{кор}} = F_{\text{кор}}(F)$, і різним зовнішнім навантаженням F відповідає різне додаткове навантаження.

Перелічені вище постановки можуть бути узагальнені у двох напрямках. Перший напрямок стосується подвійності системи розв'язувальних рівнянь для аналізу контактної взаємодії (2.21). Будучи доповнені інтегральним співвідношенням для вузлових значень контактного тиску $\sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum_j p_j = P$, де P – величина зусилля притискання, вони містять: фізико-механічні характеристики: «глобальні», що породжуються контактуючими пружними тілами, описуються матрицею коефіцієнтів впливу C; «локальні», що породжуються нелінійним пружним шаром та описуються оператором D; геометричні характеристики, що відображаються набором вузлових зазорів h; силові характеристики (притискне зусилля P); статичні характеристики (розподіл контактного тиску p); кінематичні характеристики (зміщення тіла δ). Пряме формулювання контактної задачі визначає як задані масиви $\{h, P\}$, а як шукані – $\{p, \delta\}$. Формально ці дві постановки рівноправні, і за вихідною системою співвідношень для аналізу контактної взаємодії можна ставити і розв'язувати обернену задачу синтезу геометричної форми, що задовольняє бажаному розподілу контактного тиску.

Другий напрямок полягає у трактуванні всіх вхідних у побудовані розв'язувальні співвідношення не як постійних, а як варійованих величин і розподілів. Тоді запис цих співвідношень у розгорненому вигляді –

$$\begin{cases} Cp + D(p) \geq \delta - h; \qquad 2P = \sqrt{3} \cdot c^2 \sum\limits_i p_i, \; p_k \geq 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

і в операторному їх еквіваленті

$$Z(C,\, D,\, p,\, \delta,\, h,\, P) \geq 0 \tag{2.31}$$

дає можливість ставити і розв'язувати низку нових наступних задач: визначення чутливості розв'язку задачі аналізу до варіювання властивостей системи, наприклад, C, D, P, h, причому як при малому, так і при значному діапазоні такого варіювання, оптимальних значень і розподілів одних величин при варіюванні інших та тенденцій зміни розв'язків виникаючих задач при зміні варійованих величин у певних скінченних діапазонах; аналіз впливу стохастичного варіювання параметрів і розподілів, що входять у (2.31), на параметри і розподіли, що з них одержуються, і виявлення якісних особливостей, що викликаються урахуванням тих чи інших чинників, які привносяться у розрахункову модель досліджуваної системи.

Крім задачі обґрунтування раціональної форми контактуючих тіл, поставлені і запропоновані підходи до розв'язання задачі коригування умов взаємодії в області контактування тіл шляхом прикладання керованого додаткового навантаження. За рахунок дії цього навантаження внаслідок пружної деформації можливо вплинути на поточну форму профілю контактуючих тіл, а, відповідно, на розподіл зазорів у актуальному стані. Таким чином, створюється механізм «адаптації» умов контактування під рівень навантаження. Це особливо важливо для випадку тіл із частково збіжною або близькою формою контактуючих поверхонь, а також при зміні характеру картини визначення контактного тиску з ростом навантаження, наприклад, у разі виходу плями контакту на периферію області можливого контакту. За цих обставин рівень зазорів, реалізованих за рахунок формоутворення поверхонь контактуючих тіл, рівень зміни цих зазорів за рахунок пружної деформації від дії додаткової системи сил, а також рівень переміщень, що викликаються дією сил контактної взаємодії, – всі вони виявляються сумірними. Відповідно, доцільність застосування додаткового керованого навантаження, що «відслідковує» рівень основного навантаження, зростає порівняно із випадком контакту сильно неузгоджених поверхонь.

Із використанням запропонованих постановок розв'язано низку тестових задач, що дало продемонструвати, у кінцевому підсумку, можливість і доцільність (а також ефективність) запропонованих методів створення сприятливих профілів поверхонь контактуючих тіл, а також виявлення якісних особливостей і кількісних характеристик зміни розв'язку при випадковому або цілеспрямованому варіюванні властивостей досліджуваної системи взаємодіючих тіл із проміжним нелінійним пружним шаром. Опис розв'язання задач обґрунтування геометричної форми контактуючих тіл та властивостей матеріалів проміжних шарів наведено у розд. 5.

Таким чином, можна зробити наступні висновки: отримала нове формулювання задача обґрунтування геометричної форми контактуючих тіл за наявності нелінійно пружного шару між ними на основі єдиної взаємооберненої системи співвідношень для розв'язання задач аналізу та синтезу; розроблено нові постановки задачі про обґрунтування форми поверхонь контактуючих тіл, сформульовані, на відміну від традиційних, не «у зазорах», а «у контактному тиску», цим самим вдається уникнути негладкості при розв'язанні поставлених задач; уперше у загальному вигляді поставлена задача про контактну взаємодію з урахуванням варіювання всіх величин і розподілів, що дає можливість оцінювати тенденції і кількісні характеристики зміни розв'язку при стохастичній, заданій або цілеспрямованій зміні цих величин і розподілів; запропоновано метод аналізу особливостей при внесенні в систему контактуючих тіл нових елементів або при урахуванні нових чинників; розроблено нову постановку та запропоновано методи розв'язання задачі про корекцію умов контактування за рахунок застосування додаткового керованого навантаження і виникнення у зв'язку із цим додаткових зазорів внаслідок пружних деформацій.

Розроблені і описані в розд. 2–5 підходи, методи і моделі були використані для розв'язання низки прикладних задач, описаних в розд. 6. Зокрема, розв'язано задачу про раціональну мікроструктуру та властивості волокнистого матеріалу типу Denima (застосовується в елементах захисних конструкцій), про контактну деформації м’якого матеріалу, обґрунтування форми бігових доріжок гідрооб’ємної передачі танкової трансмісії, про аналіз реакції збирань із комплекту універсально-збірних пристосувань на дію зовнішніх зусиль, про вплив модифікованої геометричної форми робочих поверхонь зубчастих передач на їх навантаженість контактним тиском, про вплив шорсткості та хвилястості на характер контактної взаємодії по площині роз’єму напівматриць прес-форм. У результаті розв’язання цих задач встановлено низку закономірностей і тенденцій зміни НДС та контактної взаємодії між елементами досліджуваної системи тіл при варіюванні їх форми, властивостей і навантажень, а на цій основі розроблені рекомендації щодо обґрунтування раціональних проектно-технологічних рішень за критеріями міцності. Вони передані на низку підприємств і враховані при проектуванні, технологічній підготовці виробництва і виготовлення елементів військової та цивільної техніки, технологічного оснащення, трансмісій, захисних виробів тощо.

У розд. 7 описано низку експериментальних досліджень, використаних для аналізу адекватності розроблених математичних моделей, точності побудованих чисельних моделей і достовірності отриманих за їх допомогою результатів. Результати були отримані частково самостійно, а частково залучені із літературних джерел. Зокрема, було досліджено деформування матеріалів мережевої структури; контактну взаємодію кульового поршня гідрооб’ємної передачі ГОП-900 зі статором та елементів універсально-збірних пристосувань (УЗП) і прес-форм. Порівняння результатів, отриманих з експерименту, з результатами чисельних досліджень продемонструвало не тільки їх задовільну відповідність (відмінність на рівні 10-15%), але і збіг прогнозованої (розрахунковим шляхом) і виявленої (експериментально) тенденцій зміни розв’язків при зміні навантаження, геометричної форми і фізико-механічних властивостей матеріалів елементів досліджуваної системи взаємодіючих тіл. За підсумками роботи результати досліджень впроваджені на низці підприємств і в науково-дослідній роботі НТУ «ХПІ». Отримано акти впровадження.

У розділах 2, 4–7 перелічені розробки знайшли своє відображення та опис, загальна структура досліджень наведена на рис. 2.6.

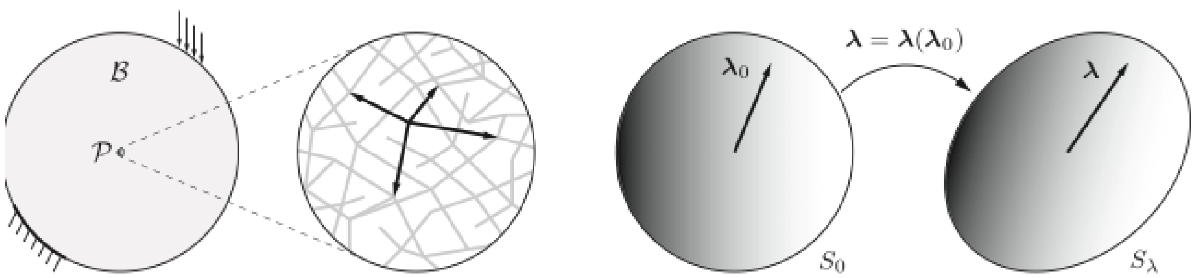
Описані в загальному вигляді в розд. 2 підходи, методи і моделі знайшли своє детальне відображення в матеріалах розд. 3–7 та у публікаціях [1–108].

Рисунок 2.6 – Структура дисертаційних досліджень

РОЗДІЛ 3
РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДІВ І МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МАКРОМЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВОЛОКОННИХ МАТЕРІАЛІВ НА ОСНОВІ МІКРОМЕХАНІЧНИХ ПІДХОДІВ

3.1 Мікромеханіка волоконних структур. Осереднення випадкових волоконних структур

У цьому розділі досліджуються матеріали, що мають на мікроскопічному рівні мережеву структуру і є порівняно новими з точки зору створення та використання на практиці. Такі структури утворені великою кількістю волокон, пов’язаних між собою в точках з’єднання. Оскільки один з розмірів волокон домінує над іншими, вони по суті є одновимірними об’єктами, зануреними у тривимірний простір, як показано на рис. 3.1. У цьому полягає їх істотна відмінність від інших неоднорідних структур, в яких присутні тривимірні компоненти (такі як включення, шари або пори, що займають певні області простору) або ж безрозмірні об’єкти (частки або окремі атоми, для яких істотна не форма, а лише положення в щільно упакованій структурі матеріалу).



а *б*

Рисунок 3.1 – Модель матеріалу з волоконною мікроструктурою:
а – випадкова сіткова мікроструктура безперервного твердого тіла *B* у матеріальній точці *P*, утворена довгими волокнами (прямі лінії), стрілками відзначені волокна, що йдуть від однієї з точок з’єднання в мережі;
б – статистичний опис випадкової сітки як набору волокон з ізотропним розподілом початкових орієнтацій $\boldsymbol{\lambda}_0$ на одиничній сфері S_0, а також її деформації, яка визначається векторною функцією мікророзтягнення
$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0):\ \boldsymbol{\lambda}_0 \in S_0 \to \boldsymbol{\lambda} \in S_\lambda \subset \mathrm{IR}^3$

Волоконні мережі можуть мати складну нерегулярну просторову геометрію. Для аналізу їх поведінки під навантаженням потрібне створення нових підходів, моделей і методів, адаптованих для дослідження таких матеріалів. Вони викладені у цьому розділі. Для опису структури і поведінки волоконних мереж пропонується статистичний підхід. У рамках цього підходу волокна не розглядаються окремо, а об'єднані у статистичний набір, у якому вони розрізняються за певними ключовими атрибутами. Зокрема, статистичний опис, запропонований у цьому підрозділі, розділяє волокна мережі за їх первинною орієнтацією в недеформованому стані за аналогією з роботами [145, 394]. Відповідно, деформація сітки задається розподілом величин деформації волокон за заданим статистичним простором. Сумарні значення пружної енергії та інших величин природним чином отримуються осередненням отримуваних розподілів енергії деформації окремих волокон із набору. Цей формалізм по суті забезпечує гомогенізацію випадкових мережевих мікроструктур.

Пропонований статистичний опис ґрунтується на наступних припущеннях про мережеву структуру, її геометрію та деформації: точки з'єднання не здійснюють теплового руху, отже, вони займають цілком певні положення у просторі; усі волокна мережі однотипні і мають однорідні властивості (рівну молекулярну вагу, вихідну довжину, жорсткість тощо); у початковій конфігурації сітки волокна мають однакову відстань між кінцями R_0 і орієнтовані ізотропно в усіх напрямках; деформації волокон з однаковою початковою орієнтацією строго співпадають. За цих припущень ототожнення випадкової сітки з набором волокон, що відрізняються тільки за їх вихідною орієнтацією, є виправданим.

Без втрати загальності можна вважати, що у початковій конфігурації усі волокна мають одиничне розтягнення $|\boldsymbol{\lambda}_0| = 1$, де початковий вектор розтягнення $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{R_0} / R_0$ є вектором $\mathbf{R_0}$, що з'єднує кінці волокна, віднесений до його абсолютної довжини R_0. Безрозмірний вектор розтягнення зручний для опису мікродеформації волокон за умови, що всі вони однакові і, зокрема, мають однакову довжину $\mathbf{R_0}$. Таким чином, одиничним вектором $\boldsymbol{\lambda}_0$ визначається початкова орієнтація волокон, за якою їх і пропонується розрізняти у вихідній структурі мережі. Оскільки кінці усіх одиничних векторів лежать на одиничній сфері S_0, можна, у свою чергу, асоціювати кожну точку на сфері із множиною всіх волокон із певною орієнтацією $\boldsymbol{\lambda}_0$, як показано на рис. 3.1. У літературі за S_0 устоялася назва мікросфери. Виходячи з припущення про рівномірний початковий розподіл орієнтації волокон у сітці, можна ввести однорідну одиничну щільність орієнтацій $1/|S_0| = 1/4\pi$, скальовану на множник $p_0(\boldsymbol{\lambda}_0) = 1$. Ця функція визначає частку волокон у мережі з початковою орієнтацією в нескінченно малому околі $d\boldsymbol{\lambda}_0$ точки $\boldsymbol{\lambda}_0$ як

$$\left(1/|S_0|\right) p_0(\boldsymbol{\lambda}_0) |d\boldsymbol{\lambda}_0| = \left(1/|S_0|\right) |d\boldsymbol{\lambda}_0| . \tag{3.1}$$

Осереднення на мережі довільної величини $\zeta = \zeta(\boldsymbol{\lambda}_0)$, асоційованої з волокнами певної орієнтації $\boldsymbol{\lambda}_0$, виконується шляхом інтегрування на одиничній сфері

$$\langle \zeta \rangle = \left(1/|S_0|\right) \int_{S_0} \zeta(\boldsymbol{\lambda}_0) |d\boldsymbol{\lambda}_0| . \tag{3.2}$$

Деформація сітки у рамках запропонованого формалізму описується векторною функцією $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$. Її значенням є вектор мікророзтягнення, який визначається як $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}/R_0$, де $\mathbf{R}$ є вектором, що з'єднує кінці деформованих волокон із початковою орієнтацією $\boldsymbol{\lambda}_0$. Ця функція відображає мікросферу S_0 в $\mathrm{I}\mathbf{R}^3$, або конкретніше, за умови, що функція $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$ неперервна, – на поверхні розтягнення S_λ, як показано на рис. 3.1, відповідно до виразу

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0):\ \boldsymbol{\lambda}_0 \in S_0 \to \boldsymbol{\lambda} \in S_\lambda \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^3 . \tag{3.3}$$

У деформованому стані осереднення величин, що прямо залежать від мікророзтягнення волокон $\zeta = \zeta(\boldsymbol{\lambda})$, здійснюється за аналогією з (3.2) як

$$\langle \zeta \rangle = \left(1/|S_0|\right) \int_{S_0} \zeta\left(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)\right) |d\boldsymbol{\lambda}_0| . \tag{3.4}$$

Пропонований статистичний опис містить найбільш важливу інформацію про мережу та її деформації, яка визначається векторною величиною розтягнення волокон. Інші сіткові моделі, які розглядають орієнтацію волокон, працюють зі скалярними полями, такими як абсолютна величина розтягнення [170], функція щільності орієнтації [412, 413] або щільність розподілу вектора подовження [163, 414], які є менш інформативними. Винятком є заснована на мікросфері модель [169], яка містить змінне векторне поле, відмінне, проте, від розглянутого у цій роботі. Воно служить не для подання фактичного розтягування волокон, а для опису зміни початкової орієнтації волокон, пов'язаної з ремоделюванням м'якої тканини.

У цій роботі зміна вектора розтягування мікроволокон містить в собі два основних механізми деформації в мережі: осьове подовження волокон та їх поворот. Реакція волокон на осьове розтягнення в кінцевому рахунку і складає загальний механічний відгук матеріалу на макроскопічну деформацію. Однак статистична міра мікродеформацій наразі введена як невідома змінна. Їх потрібно пов'язати з макроскопічною деформацією, що здійснюється за допомогою спеціального кінематичного співвідношення.

Зауваження 3.1.1: а) лише половина мікросфери фактично необхідна для подання всіх волокон в сітці, оскільки відсутня суттєва різниця між орієнтаціями $\boldsymbol{\lambda}_0$ і $-\boldsymbol{\lambda}_0$. Уникаючи вибору конкретної півсфери, передбачається, що волокна розподілені порівну між протилежними напрямками; б) дотримуючись центральної симетрії, що накладається тотожністю протилежних напрямків, функція вектора розтягування в рамках пропонованого статистичного опису і відображення (3.3) має задовольняти умові $\boldsymbol{\lambda}(-\boldsymbol{\lambda}_0) = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$; в) розроблена модель має справу з кінцевими деформаціями матеріалу, а також великими деформаціями волокон і, відповідно, формулюється в рамках теорії геометрично і фізично нелінійного деформівного тіла. Тим не менш, тензорні співвідношення, що виводяться в цій роботі, подаються для простоти в ортонормованих декартових координатах, відповідно, метричні тензори опущені в усіх виразах.

Рівняння кінематичного зв'язку для мікродеформацій. У роботі для складання кінематичних рівнянь зв'язку мікродеформацій волокон із макроскопічними деформаціями суцільного тіла розглядаються мережеві шляхи, що вводяться за аналогією із теорією графів. Ці шляхи складені з волокон, послідовно з'єднаних одне з одним у місцях сполучення. Якщо з'єднання між волокнами не руйнуються, то ці шляхи залишаються безперервними в ході деформування мікроструктури. Такий шлях, що складається з великого числа волокон, може з'єднувати точки на відстані, що значно перевищує розміри окремих волокон, і, відповідно, розростатися до масштабів макроскопічного тіла. В околі матеріальної точки суцільного тіла деформації макроскопічних об'єктів характеризуються тензором градієнта деформацій $\mathbf{F}$. Виходячи з того, що деформації такого шляху, як сукупності мікроскопічних волокон сітки, з одного боку, і лінійного елемента в околі матеріальної точки, з іншого боку, тотожні, видається можливим установити зв'язок між кінематичними величинами на мікро- та макрорівнях.

Для того, щоб шлях у сітці досягав необхідної довжини, він, крім іншого, повинен бути якомога більш прямим. Виходячи з цього, пропонується розглянути спеціальні шляхи, які у кожній точці з'єднання продовжуються уздовж волокна з максимальним просуванням у певному напрямку, названі *шляхами максимального просування*. Ці шляхи визначаються у початковому недеформованому стані сітки, в якому всі волокна мають одиничне розтягнення і рівномірно орієнтовані у всіх напрямках. Розглянемо довільний напрямок шляху, який визначається одиничним вектором $\mathbf{l}_0$ з $|\mathbf{l}_0| = 1$, тоді просування у цьому напрямку уздовж волокна з орієнтацією $\boldsymbol{\lambda}_0$ –

$$\xi = \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \mathbf{l}_0 \ . \tag{3.5}$$

Функція розподілу цієї випадкової величини виражається у такий спосіб:

$$F_\xi(x) = P\left(\xi = \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \mathbf{l}_0 \le x\right) = \left(1/|S_0|\right) \int\limits_{S_{0,x}} |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = 0{,}5(x+1)\,, \tag{3.6}$$

де $S_{0,x} = \{\boldsymbol{\lambda}_0 \in S_0;\, \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \mathbf{l}_0 \le x\}$ – підмножина напрямків, у яких просування у напрямку $\mathbf{l}_0$ не перевищує x. Відповідна функція щільності ймовірності обчислюється як

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx}\left(F_\xi(x)\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Розглянемо тепер вузол сітки, що належить шляху максимального просування, схематично зображений на рис. 3.2, *а*. У цьому вузлі з'єднано f волокон із початковими орієнтаціями $\left(\boldsymbol{\lambda}_0^i\right)_{i=1}^f$, де f становить функціональність сітки. За умови, що шлях прийшов до цього з'єднання вздовж одного з волокон $\boldsymbol{\lambda}_0^f$, залишається $(f-1)$ волокно, уздовж яких його можна продовжити далі. Ці волокна мають вектори орієнтації $\left(\boldsymbol{\lambda}_0^i\right)_{i=1}^{f-1}$, які покладаються випадковими некорелюючими величинами, кожна з яких має рівномірний розподіл на мікросфері S_0, як і в цілому на сітці.

Просування у напрямку $\mathbf{l}_0$ уздовж цих волокон визначається $f-1$ випадковими величинами $\xi^i = \boldsymbol{\lambda}_0^i \cdot \mathbf{l}_0$, кожна з яких має розподіл (3.6). Максимальне просування від цього вузла в напрямку $\mathbf{l}_0$ в підсумку становить

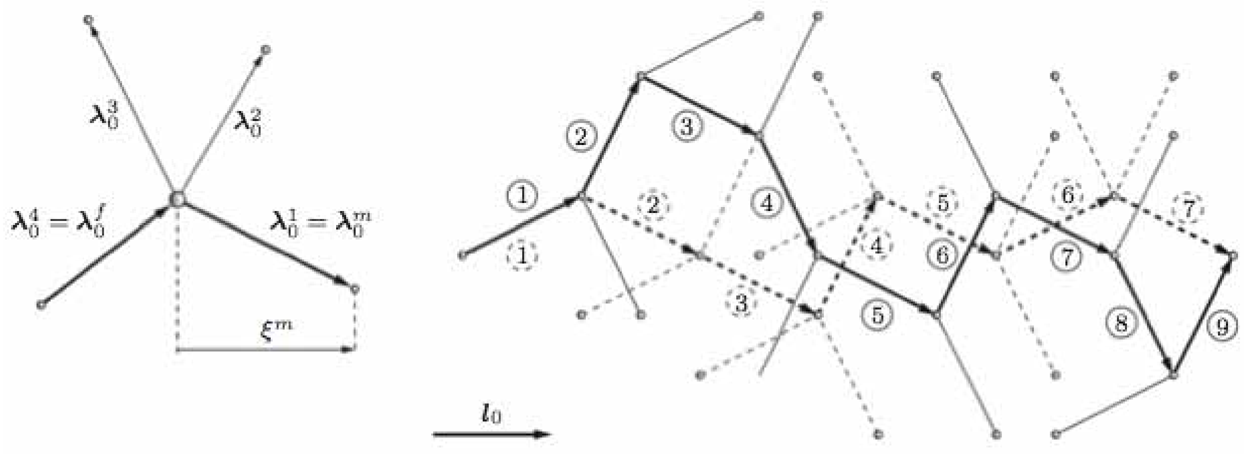
$$\xi^m = \max\left\{\xi^i\right\}_{i=1}^{f-1}, \tag{3.8}$$

що, у свою чергу, також є випадковою величиною з функцією розподілу

$$F_{\xi^m}(x) = P\left(\xi^m = \max\left\{\xi^i\right\}_{i=1}^{f-1} \le x\right) = \prod_{i=1}^{f-1} P(\xi^i \le x) = \left[0{,}5(x+1)\right]^{f-1} \tag{3.9}$$

і відповідною їй щільністю розподілу

$$p_{\xi^m} = 0{,}5(f-1)\cdot[0{,}5(x+1)]^{f-2}. \tag{3.10}$$



а *б*

Рисунок 3.2 – Шлях максимального просування в мережі:
а – точка з'єднання на шляху і волокно з максимальним просуванням ξ^m в напрямку $\mathbf{l}_0$; б) –вплив функціональності f на прямизну шляху на прикладі двох мереж із $f = 3$ (суцільні лінії) і $f = 4$ (додаткові сегменти нанесені пунктирними лініями) і відповідних їм шляхів максимального просування (чим вище функціональність, тим пряміші шляхи знаходяться у сітці)

У той час як середнє просування в мережі $\langle\xi\rangle = 0$, середнє максимальне просування

$$\langle\xi^m\rangle = \int_{-1}^{1} x\, d\big(F_{\xi^m}(x)\big) = \frac{f-2}{f} \tag{3.11}$$

вже відмінне від нуля. Крім значення максимального просування ξ^m, важливо також те, уздовж якого волокна воно досягається. Припустимо, що $\boldsymbol{\lambda}_0^m = \arg\max\left\{\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0 \in \left\{\boldsymbol{\lambda}_0^i\right\}_{i=1}^{f-1}\right\}$ є волокном із максимальним просуванням у напрямку $\mathbf{l}_0$ на шляху. Тоді його випадкова орієнтація має розподіл

$$p^m(\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{l}_0) = (f-1)[(\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0 + 1)/2]^{f-2} \tag{3.12}$$

на одиничній сфері орієнтацій S_0, радіально симетричній щодо осі $\mathbf{l}_0$. Цей розподіл визначає собою випадкове сімейство волокон з початковою орієнтацією $\boldsymbol{\lambda}_0^m$, максимально близькою до напрямку $\mathbf{l}_0$, що має властивість

$$\langle\boldsymbol{\lambda}_0^m\rangle = (1/|S_0|)\int_{S_0}\boldsymbol{\lambda}_0 p^m(\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{l}_0)|d\boldsymbol{\lambda}_0| = [(f-2)/f]\mathbf{l}_0. \tag{3.13}$$

Відповідно до цього вектор $\mathbf{R}_{l_0}$, що з'єднує початок і кінець довгого шляху максимального просування з n_{l_0} волокон, де n_{l_0} – велике, визначається за середнім значенням (3.13) вектора початкової орієнтацій $\boldsymbol{\lambda}_0^m$ волокон на шляху та їх довжини $\mathbf{R}_0$

$$\mathbf{R}_{l_0} = n_{l_0} \left\langle \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\lambda}_0^m \right\rangle = n_{l_0} \mathbf{R}_0 \left[(f-2)/f \right] \mathbf{l}_0 . \tag{3.14}$$

Як тільки довжина такого шляху стає досить великою, щоб вважати його макроскопічними лінійним об'єктом, можна вважати, що з макроскопічною деформацією він перетворюється аффінно градієнтом деформації **F**, а саме

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{F}\mathbf{R}_{l_0} = n_{l_0} \mathbf{R}_0 \left[(f-2)/f \right] \mathbf{l}, \qquad \mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{l}_0 . \tag{3.15}$$

З іншого боку, цей деформований шлях складається з розтягнутих волокон $\boldsymbol{\lambda}^m = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0^m)$ з вибірки (3.12), і альтернативно $\mathbf{R}_l$ знаходиться шляхом осереднення на шляху векторів мікродеформацій волокон

$$\mathbf{R}_l = n_{l_0} \left\langle \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\lambda}^m \right\rangle . \tag{3.16}$$

Зіставляючи вирази (3.15) і (3.16), отримуємо співвідношення

$$\left\langle \lambda^m \right\rangle = \left[(f-2)/f \right] \mathbf{l} \sim \left(1/|S_0| \right) \int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0) p^m(\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{l}_0) |d\boldsymbol{\lambda}_0| = \left[(f-2)/f \right] \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}_0 , \tag{3.17}$$

яке накладає множину обмежень, що відповідає всім можливим напрямам $\mathbf{l}_0 \in S_0$, на невідомий розподіл $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$ деформації волокон у сітці. Отримане рівняння зв'язку (3.17) будемо називати умовами деформації максимальних шляхів (УДМШ). З усією очевидністю, принаймні один розподіл мікродеформації в сітці буде поготів задовольняти кінематичні й мікро-макро умови, а саме афінне розтягування $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0) = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda}_0$. У разі, якщо усі волокна $\boldsymbol{\lambda}_0^m$ у максимальному шляху деформуються афінно, як $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^m = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda}_0^m$, то і сам шлях також зазнає подібного ж розтягнення:

$$\left\langle \bar{\boldsymbol{\lambda}}^m \right\rangle = \mathbf{F} \left\langle \boldsymbol{\lambda}_0^m \right\rangle \sim \left(1/|S_0| \right) \int_{S_0} \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0) p^m(\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{l}_0) |d\boldsymbol{\lambda}_0| = \left[(f-2)/f \right] \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}_0 . \tag{3.18}$$

Повністю афінні сіткові моделі (ПАСМ) [412, 415] показують саме такий відгук волоконної мікроструктури, виключаючи відхилення в розподілі мікродеформацій від афінного закону. Однак у загальному випадку волокна не мають дотримуватися афінної кінематики, відповідно до чого і запропоновано вважати мікродеформації $\boldsymbol{\lambda}$ варійованими і пов'язувати їх із макроскопічними деформаціями опосередковано через отримані вище умови сумісності.

Мікро-макро співвідношення (3.17) приймають вигляд лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої функції $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$, яка має суттєву властивість центральної симетрії, як було зазначено в *зауваженні 3.1.1.* Відповідно до цього, середнє значення вектора розтягнення у максимальному шляху можна перетворити в такий спосіб:

$$\left\langle \lambda^m \right\rangle = \left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0|, \tag{3.19}$$

де $\tilde{p}^m = 0{,}5\left[p^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0) - p^m(-\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)\right]$ – змінене з урахуванням симетрії ядро.

Виходячи з його властивості $\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,-\mathbf{l}_0) = -\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)$, можна вивести ще одну закономірність для середнього значення вектора розтягування вздовж шляху –

$$\left\langle \lambda^m \right\rangle\Big|_{\mathbf{l}_0=-\mathbf{l}_0} = \left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,-\mathbf{l}_0)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = -\left\langle \lambda^m \right\rangle. \tag{3.20}$$

Оскільки права і ліва частини у рівнянні (3.17) є непарними векторними функціями $\mathbf{l}_0$, достатньо, щоби воно виконувалося лише в окремій напівсфері $S_0^{1/2}$ простору напрямків S_0:

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \left[(f-2)/f\right]\mathbf{F}\cdot\mathbf{l}_0 \quad \forall \mathbf{l}_0 \in S_0^{1/2}, \tag{3.21}$$

де $\boldsymbol{\lambda}: S_0^{1/2} \to \mathbf{IR}^{3,}$ $\boldsymbol{\lambda}(-\boldsymbol{\lambda}_0) = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$, $\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0): S_0^{1/2}\times S_0^{1/2} \to \mathbf{IR}$.

При більш уважному вивченні ядра $\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)$ інтегрального оператора Фредгольма у (3.21) видно, що воно є многочленом для цілих значень $f \in \mathbf{IN}$ функціональності сітки. Його можна розкласти у вигляді скінченного ряду

$$\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\psi_\alpha(\mathbf{l}_0), \tag{3.22}$$

де $\alpha \in \{1,\ldots,a\} = A$, $\{\phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\}\big|_{\alpha=1}^{a}$ і $\{\psi_\alpha(\mathbf{l}_0)\}\big|_{\alpha=1}^{a}$ – лінійно незалежні.

Таким чином, оператор Фредгольма має скінченний ранг, і його образ є лінійною комбінацією $\{\psi_\alpha(\mathbf{l}_0)\}\big|_{\alpha=1}^{a}$.

Використовуючи афінний вектор розтягування, що задовольняє кінематичним умовам (3.18), інтегральне рівняння (3.21) можна зробити однорідним

$$\left(1/|S_0|\right)\int\limits_{S_0}\left[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)-\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0)\right]\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right|=0\,, \tag{3.23}$$

записавши відносно різниці між шуканими мікродеформаціями $\boldsymbol{\lambda}$ і афінним розтягненням $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$. Використовуючи розкладання в ряд (3.22), з цього співвідношення отримуємо далі:

$$\sum_{\alpha=1}^{a}\left\{\left(1/|S_0|\right)\int\limits_{S_0}\left[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)-\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0)\right]\phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right|\right\}\psi_\alpha(\mathbf{l}_0)=0\ \ \forall\mathbf{l}_0\in S_0\,. \tag{3.24}$$

У силу лінійної незалежності $\left\{\psi_\alpha(\mathbf{l}_0)\right\}\Big|_{\alpha=1}^{a}$, (3.24) виконується тоді і тільки тоді, якщо

$$\left(1/|S_0|\right)\int\limits_{S_0}\left[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)-\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0)\right]\phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right|=0\quad\forall\alpha\in A\,. \tag{3.25}$$

Це значить, що умови деформації максимальних шляхів (3.21) насправді накладають лише скінченне число обмежень (3.25) на варійовані мікродеформації.

Покажемо детально дію отриманих кінематичних умов та їхнє застосування для гомогенізації волоконних мікроструктур для випадку мереж функціональності $f = 4$. Такі мережі є найбільш характерними для гум і біополімерів [416]. Для цього значення функціональності запропоновані мікро-макро співвідношення приймають дуже зручну і добре інтерпретовну форму. Середнє максимальне просування (3.11) у недеформованій конфігурації приймає для $f = 4$ значення $\left\langle\xi^m\right\rangle=1/2$. Це означає, що шляхи максимального просування в тетрафункціональних мережах далекі від того, щоб бути прямими. Відповідно, можна очікувати істотної неафінності за рахунок випрямлення та перерозподілу деформації у цих шляхах. Співвідношення (3.21) визначають те, наскільки обмеженими є потенційні відхилення деформацій від афінних. Еквівалентна скінченна множина обмежень визначається за виразом ядра $\tilde{p}^m$, якого воно набуває за $f = 4$, а саме

$$\tilde{p}^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)=0{,}5\left[1{,}5\left(\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0+1\right)^2-1{,}5\left(-\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0+1\right)^2\right]=1{,}5(\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0)\,, \tag{3.26}$$

є поліномом відносно декартових координат вектора вихідної орієнтації волокон $\boldsymbol{\lambda}_0=\left[x_0,y_0,z_0\right]$ і вектора напрямку максимального шляху $\mathbf{l}_0=\left[\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{z}_0\right]$, для яких $\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\mathbf{l}_0=x_0\tilde{x}_0+y_0\tilde{y}_0+z_0\tilde{z}_0$. Таке ядро може бути записано у вигляді розкладання в ряд (3.22) за базисними функціями

$$\{\phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\}\big|_{\alpha=1}^{3} = \{x_0, y_0, z_0\} \text{ та } \{\psi_\alpha(\mathbf{l}_0)\}_{\alpha=1}^{a} = \{1{,}5\tilde{x}_0, 1{,}5\tilde{y}_0, 1{,}5\tilde{z}_0\}. \quad (3.27)$$

Для такого набору лінійно незалежних $\{\phi_\alpha(\boldsymbol{\lambda}_0)\}\big|_{\alpha=1}^{3}$, отриманих у (3.27), умови сумісності зводяться до трьох векторних обмежень виду (3.25), які можна подати у єдиній тензорній формі

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\left[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0) - \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0)\right]\otimes\boldsymbol{\lambda}_0|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = 0\ . \quad (3.28)$$

Середнє діадного добутку $\langle\bar{\boldsymbol{\lambda}}\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\rangle$ можна легко знайти як

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}_0)\otimes\boldsymbol{\lambda}_0|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \mathbf{F}\cdot\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\boldsymbol{\lambda}_0\otimes\boldsymbol{\lambda}_0|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \frac{1}{3}\mathbf{F} \quad (3.29)$$

за допомогою тотожності $\langle\boldsymbol{\lambda}_0\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\rangle = \frac{1}{3}\mathbf{1}$. Це в кінцевому підсумку дає можливість одержати вираз умов деформації максимальних шляхів для тетрафункціональних мереж у вигляді:

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)\otimes\boldsymbol{\lambda}_0|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \frac{1}{3}\mathbf{F}\ , \quad (3.30)$$

який видається дуже природним. Дійсно, підінтегральний вираз $\boldsymbol{\lambda}\otimes\boldsymbol{\lambda}_0$ певним чином відповідає деформації окремого волокна, оскільки цей тензор відображає вектор вихідної орієнтації $\boldsymbol{\lambda}_0$ волокна у вектор розтягнення $\boldsymbol{\lambda}$. Відповідно, (3.30) можна розглядати як співвідношення між осередненою мірою мікродеформації волокон мережі та локальною макроскопічною деформацією, представленою $\mathbf{F}$.

Отже, отримане загальне формулювання умов деформації максимальних шляхів (3.21). Вони співвідносять мікродеформації мережі, описані в рамках статистичної моделі з локальною макроскопічною деформацією матеріалу. Показано, що для заданої цілої функціональності f мережі на мікродеформації $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$ накладається лише скінченна множина обмежень (3.25). Урахування функціональності у формулюванні обмежень відображає дуже важливі топологічні властивості мережі. Її якісній вплив на кінематику мережі обговорюється далі. У кінцевому рахунку, для випадку $f = 4$, що має найбільше практичне і теоретичне значення, умови сумісності мікро- і макродеформацій отримані у легко інтерпретовній тензорній формі (3.30).

Зауваження 3.1.2: а) чим вище функціональність мережі, тим більше і ближче до 1 стає величина середнього максимального просування (3.11), що пояснюється наявністю більш прямих шляхів у мережах з великою кількістю волокон у кожній точці з'єднання; б) збільшення функціональності f мережі призводить до збільшення ступеня полінома (3.22), а також до збільшення числа незалежних обмежень (3.25) на варійовані мікродеформації $\boldsymbol{\lambda}$; відповідно, для більш високих значень функціональності мережі буде спостерігатися менше відхилення від афінного розподілу розтягнення волокон $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ у мережі, а це узгоджується з наведеним вище зауваженням щодо прямолінійності максимального шляху; у ланцюжку волокон, який стає пряміше, залишається істотно менше можливостей для перерозподілу розтягнення; в) хоча множина (3.27) отримана для конкретної ортонормованої системи координат у вихідній конфігурації, вона залишається інваріантною при відносному перетворенні координат. При відображенні $\mathbf{Q}:\left[x_0, y_0, z_0\right] \to \left[x_0', y_0', z_0'\right]$ множина (3.27) може бути знову отримана у початковій формі шляхом лінійної рекомбінації.

Релаксація мікродеформацій і гомогенізований рівноважний відгук волокнистих мікроструктур. Кінематичні умови деформації максимальних шляхів, сформульовані вище, не визначають мікродеформацію $\boldsymbol{\lambda}$, а тільки обмежують її варіації при заданій макроскопічній деформації. Для того, щоб визначити дійсні мікродеформації мережі, у цій роботі використовується принцип мінімуму вільної енергії. Він полягає в тому, що з усіх кінематично можливих мікродеформацій волокон вони набудуть саме такої, що мінімізує повну енергію мережі. Цей підхід був спочатку запропонований в роботі [170] для побудови неафінної моделі пружності каучуку. Ця робота відповідає загальній схемі осереднення, в яку вносяться новий статистичний опис мікродеформації з векторною величиною розтягнення волокон, заданої на мікросфері, а також запропоновані вище кінематичні мікро-макроспіввідношення. В цілому одержуваний відгук матеріалу є результатом релаксації мікроструктури за внутрішніми ступенями вільності, що визначаються розподілом мікророзтягнення $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)$, і, в кінцевому рахунку, виражається у вигляді осереднених механічних напружень.

Застосований статистичний опис мікродеформації мережі містить лише інформацію про розтягування волокон. Отже, в рамках запропонованого підходу можна розглядати тільки ті матеріали, для яких вільну енергію деформації можна пов'язати виключно із поздовжнім розтягненням волокон. Зокрема, це може бути явно здійснено у разі, коли мережі складаються з волокон, які взаємодіють тільки в місцях з'єднання, і самі собою створюють відгук на осьову деформацію при зміні відстані між вузлами. Незаплутані мережі гнучких полімерних молекул багатьох полімерних гелів, еластомерів, а також біополімери, що формують мережі з напівгнучкими або жорсткими ланками, добре вписуються у цю категорію.

Раз повна енергія мережі $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}$ складається з енергії розтягування окремих волокон $\psi_f(|\boldsymbol{\lambda}|)$ із множини всіх його волокон, то її можна виразити через середнє на мережі або згідно (3.4) як середнє на представницькій мікросфері

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}] = n\left\langle \psi_f(|\boldsymbol{\lambda}|)\right\rangle. \tag{3.31}$$

Тут n – це вихідна щільність мережі, яка визначається числом волокон в одиниці об'єму недеформованого матеріалу, до якого також зведена і обчислюється щільність енергії $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}$. З урахуванням цього виразу для енергії варіаційне формулювання може бути точніше позначене як принцип мінімуму осредненної енергії. Його математичне формулювання при обмеженні випадком тетрафункціональних мереж з $f = 4$ із застосуванням відповідної тензорної версії умов деформації максимальних шляхів (3.30) приймає вигляд наступної задачі умовної оптимізації:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}] \sim \left\langle \psi_f \right\rangle = (1/|S_0|)\displaystyle\int_{S_0} \psi_f(|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)|)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| \xrightarrow[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)]{} \min; \\ \left\langle \boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 \right\rangle = (1/|S_0|)\displaystyle\int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0) \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \dfrac{1}{3}\mathbf{F}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Енергія волокна ψ_f припускається опуклою, неперервною та диференційованою функцією абсолютної величини розтягнення $|\boldsymbol{\lambda}|$. Завдяки першому припущенню виключається нестійкість волокон. Друге гарантує, що функціонал $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}]$ або ж осереднена енергія волокон $\left\langle \psi_f \right\rangle$ у тих випадках, коли вони визначені, мають похідні відносно функції розтягнення $\boldsymbol{\lambda}$. Крім цього, можуть бути й інші умови щодо ψ_f, які визначають, чи є задача умовної оптимізації (3.32) коректно поставленою. Вони обговорюються далі в підрозділ. 6.1, з точки зору двох практично важливих типів реакцій волокон. На цьому етапі вважаємо, що існування та єдиність мінімуму розподілу вектора розтягнень $\boldsymbol{\lambda}^*$ забезпечується для деякої поки невизначеної множини макроскопічних деформацій $\Im$. У цьому випадку розв'язок задачі (3.32) може розглядатися як функція $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{F})$ градієнта деформації $\mathbf{F} \in \Im \subset \mathrm{SO}(3)$.

На закінчення розглянемо властивості рівноважної мікродеформації мережі та її релаксований осереднений відгук, одержуваний із принципу мінімуму (3.32). Для цього розглянемо лагранжіан задачі умовної мінімізації, який може бути записаний у вигляді:

$$L(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \psi_f\left(|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)|\right)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| - \mathbf{v} : \left(\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0) \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 \, |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| - \frac{1}{3}\mathbf{F}\right), \quad (3.33)$$

де $\mathbf{v}$ – тензор другого порядку множників Лагранжа, відповідний тензорній формі умов сумісності мікро- і макродеформацій (3.30) для цього випадку тетрафункціональних мереж. Рівняння Ейлера-Лагранжа визначають зникаючу варіацію L відносно мікродеформацій $\boldsymbol{\lambda}$ при дійсних $\boldsymbol{\lambda}^*$. Умова стаціонарності дає наступне співвідношення:

$$\mathbf{f}_f^* = \mathbf{f}_f^*\left(|\boldsymbol{\lambda}^*|\right)\left(\boldsymbol{\lambda}^* / |\boldsymbol{\lambda}^*|\right) = \mathbf{v}\boldsymbol{\lambda}_0, \quad (3.34)$$

де $\mathbf{f}_f = \partial\psi_f / \partial\boldsymbol{\lambda}$ є пов'язаною відносно розтягування поздовжньою силою у волокнах, яка релаксує у сторону $\mathbf{f}_f^* = \mathbf{f}_f^*(\boldsymbol{\lambda}^*)$ при досягненні рівноваги, а $f_f = \partial\psi_f / \partial|\boldsymbol{\lambda}|$ – її абсолютна величина, пропорційна дійсній фізичній силі $F_f = \partial\psi_f / \partial|\mathbf{R}|$.

За відомих для кожної допустимої деформації $\mathbf{F} \in \Im$ рівноважних розтяганнях волокон $\boldsymbol{\lambda}^*$ можна обчислити осереднення величини відгуку матеріалу. Зокрема, зміна повної вільної енергії мережі при зміні макроскопічної деформації

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}^*[\mathbf{F}] = n\left\langle \psi_f\left(|\boldsymbol{\lambda}^*|\right)\right\rangle = \left(1/|S_0|\right)\int_{S_0} \psi_f\left(|\boldsymbol{\lambda}^*|\right)|d\,\boldsymbol{\lambda}_0|. \quad (3.35)$$

Використовуючи цей вираз, за допомогою стандартних міркувань термодинаміки [417] можуть бути отримані гомогенізовані механічні напруження як похідні вільної енергії відносно відповідної попередньої деформації. Зокрема, перший тензор Піоли-Кірхгофа напружень обчислюється як

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}}\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}^*[\mathbf{F}] = n\left\langle \partial_{\mathbf{F}}\psi_f\left(|\boldsymbol{\lambda}^*|\right)\right\rangle = \left(n/|S_0|\right)\int_{S_0} \mathbf{f}_f^* \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}^*}{\partial\mathbf{F}}|d\,\boldsymbol{\lambda}_0|. \quad (3.36)$$

Інтеграл у правій частині цього рівняння може бути далі перетворений у вигляді суми

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\mathbf{f}_f^*\,\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial\mathbf{F}}|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| + \left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}\mathbf{f}_f^*\,\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}^* - \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial\mathbf{F}}|d\,\boldsymbol{\lambda}_0|\,, \tag{3.37}$$

у якій другий доданок поготів дорівнює нулю. Щоб довести це твердження, зауважимо, що кінематичні умови у формі (3.28) гарантовано задовольняються рівноважним розв'язком $\boldsymbol{\lambda}^*$ для всіх $\mathbf{F}$, так що

$$\left\langle(\boldsymbol{\lambda}^* - \bar{\boldsymbol{\lambda}})\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\right\rangle \equiv 0 \Rightarrow \left\langle\partial_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}^* - \bar{\boldsymbol{\lambda}})\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\right\rangle \equiv 0\,. \tag{3.38}$$

Згортка цієї тотожності з тензором $\mathbf{v}$ множників Лагранжа дає рівняння

$$\left(1/|S_0|\right)\int_{S_0}(\mathbf{v}\,\boldsymbol{\lambda}_0)\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}^* - \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial\mathbf{F}}|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = 0\,, \tag{3.39}$$

ліву частину якого можна ідентифікувати з другим інтегралом у (3.37), використовуючи співвідношення (3.34). У свою чергу, за допомогою тотожності $\partial_{\mathbf{F}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\lambda}_0$ решта виразу дає можливість остаточно визначити пружні напруження у вигляді:

$$\mathbf{P} = \left(n/|S_0|\right)\int_{S_0}\mathbf{f}_f^*\otimes\boldsymbol{\lambda}_0|d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = n\left\langle\mathbf{f}_f^*\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\right\rangle \tag{3.40}$$

через рівноважні значення сил у волокнах мережі. Знову ж таки, подібно до кінематичної умови (3.30), напруження отримуються у досить природній формі. Подібні вирази раніше отримані для неперервних тіл, у яких механічні напруження передаються за допомогою мікроскопічних сил осьової взаємодії [418]. Це спостереження підтверджує, що запропонований вище статистичний опис мікродеформації та умови деформації максимальних шляхів, одержані раніше, разом адекватно подають кінематику мережі та суцільного твердого тіла. За допомогою виразу (3.34) для вектора сили $\mathbf{f}_f^*$, може бути одержаний альтернативний компактний вираз для першого тензора напружень Піола-Кірхгофа

$$\mathbf{P} = n\left\langle(\mathbf{v}\,\boldsymbol{\lambda}_0)\otimes\boldsymbol{\lambda}_0\right\rangle = \frac{1}{3}\cdot n\mathbf{v}\,, \tag{3.41}$$

який знову ж указує на природу значення множників Лагранжа $\mathbf{v}$.

Слід зазначити ще раз, що наведені частинні результати одержані тут для тетрафункціональних мереж з $f = 4$, для яких мікро-макро умови зв'язку визначаються виразом (3.30), а енергія розтягування волокон задається середнім (3.31). Проте, запропонований підхід гомогенізації може бути легко розширений на випадок мереж довільної функціональності із вільною енергією, відмінною за формою від (3.31). По-перше, можна скористатися більш загальними кінематичними умовами у векторному записі (3.25) в разі $f \neq 4$. По-друге, варіаційний принцип, викладений у цьому підрозділі, відрізняється універсальністю і не обмежується конкретним виразом вільної енергії. Що стосується конкретної моделі, представленої в цій роботі, то вона може бути ефективно реалізована чисельно із застосуванням дискретизації одиничної сфери і квадратурних формул, запропонованих у роботі [171].

Чисельні результати, що ілюструють ефективність запропонованого підходу, наведені у розд. 6, де наводяться приклади неафінного відгуку матеріалів із гратчастою микроструктурою для двох якісно різних типів волокон.

3.2 Мікромеханічна модель в’язкопружності еластомерів

Для пояснення в’язкопружних властивостей полімерних матеріалів виправдане ідеалізоване подання мікроструктури подібних матеріалів, запропоноване у роботах [170], як сукупності полімерних сіток різної природи (див. рис. 1.8), де наведено мікроскопічне подання реакції полімерної сітки гумоподібних матеріалів (мікроструктура, розділена на міцно зшиту базову сітку (забезпечує пружний відгук) і мобільну підмережу (сформовану механізмом тимчасового сплутування ланцюжків і складову в’язку компоненту відгуку)), зображена схематично у початковому стані, а також миттєво і через певний час після застосування довільної макродеформації). Пружний відгук еластомерів ототожнюється з міцно зшитими полімерними ланцюжками, що утворюють основну сітку. Одночасно з цим незшиті рухливі макромолекули утворюють додаткові мережі при випадковому сплутуванні та русі.

Відповідно до цього опису обидві мережі реагують на миттєве прикладання макроскопічної деформації відповідним розтягуванням і поворотом ланцюжків. Однак вільні макромолекули мають можливість релаксувати до вихідного рівноважного стану, у якому вони не здійснюють макроскопічного відгуку. У той час, як пружні напруження можуть бути одержані за допомогою відомих мікромеханічних моделей, таких як eight-chain model [164] і non-affine microsphere model [170], або ж за допомогою запропонованого у попередньому підрозділі підходу гомогенізації, для визначення вузьких властивостей полімерів на основі їхньої молекулярної будови пропонується принципово інша теорія, викладена у цьому підрозділі.

Відповідно до класичного підходу до моделювання непружної поведінки матеріалів при скінченних деформаціях, викладеному в роботі [406], в'язкопружна макроскопічна реакція каучуку і подібних йому матеріалів розкладається на об'ємну та ізохорну частини. Відповідно до цього вільна енергія подається сумою

$$\psi = U(J) + \overline{\psi}(\mathbf{I}, \overline{\mathbf{F}}). \tag{3.42}$$

Тут $U(J)$ – енергія об'ємної деформації, $\overline{\psi}$ – ізохорна складова вільної енергії, $\overline{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}$ – ізохорна частина градієнта деформацій, а $\mathbf{I}$ – змінні історії навантаження пружного матеріалу. Відповідно до такого розкладання повні механічні напруження подаються сумою сферичної та девіаторної частин:

$$\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{1} + \overline{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{P}, \tag{3.43}$$

де $p = JU'(J)$ – гідростатичний тиск, а $\overline{\boldsymbol{\tau}} = 2\partial_{\mathbf{g}}\overline{\psi}(\mathbf{I}, \overline{\mathbf{F}})$ – пов'язаний з ізохорною частиною відгуку тензора напружень, до якого застосовується тензор девіаторної проекції $\mathbf{P}^{ab}_{cd} = \left[\delta^a_c\,\delta^b_d + \delta^a_d\,\delta^b_c\right]/2 - \delta^{ab}\delta_{cd}/3$.

Відповідно до подання про поділ структури матеріалу на пружну базову полімерну сітку і в'язку мобільну підмережу, показаний на рис. 1.8, ізохорна частина вільної енергії подається у вигляді суми

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}^e(\overline{\mathbf{F}}) + \overline{\psi}^v(\mathbf{I}, \overline{\mathbf{F}}), \tag{3.44}$$

де $\overline{\psi}^e(\overline{\mathbf{F}})$ – енергія пружних деформацій, а $\overline{\psi}^v$ – в'язка енергія, що залежить від історії навантаження.

Аналогічним чином розкладаються і напруження

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{\tau}}^e + \overline{\boldsymbol{\tau}}^v(\mathbf{I}) \tag{3.45}$$

на пружні $\overline{\boldsymbol{\tau}}^e(\overline{\mathbf{F}}) = 2\partial_{\mathbf{g}}\overline{\psi}(\overline{\mathbf{F}})$ і непружні $\overline{\boldsymbol{\tau}}^v(\mathbf{I}, \overline{\mathbf{F}}) = 2\partial_{\mathbf{g}}\overline{\psi}(\mathbf{I}, \overline{\mathbf{F}})$.

Таке розкладання можна подати у вигляді реологічної моделі максвелівського типу, представленої на рис. 3.3. У ній є основна пружна гілка і s дисипативних гілок, що відповідають широкому розподілу диссипативного спектра, яким зазвичай володіють розглянуті матеріали. У такому випадку в'язка енергія додатково розкладається у вигляді суми за цим спектром

$$\overline{\psi}^{\nu}(\mathbf{I},\overline{\mathbf{F}})=\sum_{i=1}^{s}\overline{\psi}^{\nu}(\mathbf{I},\overline{\mathbf{F}}), \qquad (3.46)$$

кожен з доданків якої пов'язаний із однією з гілок реологічної моделі, яка має власну історію навантаження $\mathbf{I}_i$.

У цьому підрозділі пропонується мікромеханічний опис поведінки незшитих полімерних мереж, який призводить до закону зміни їхнього стану при скінченних деформаціях, а також вираз для вільної енергії $\overline{\psi}_i^{\nu}(\mathbf{I}_i,\overline{\mathbf{F}})$ і напружень $\overline{\boldsymbol{\tau}}_i^{\nu}(\mathbf{I}_i)$.

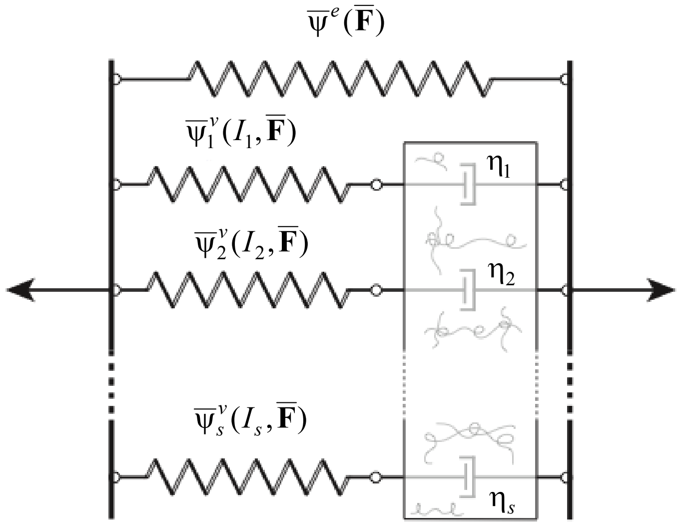


Рисунок 3.3 – Максвелівська реологічна модель ізохорної реакції матеріалу (складається з однієї пружної гілки, що представляє основну зшиту частину полімерної сітки, наведену на рис. 3.2, а також *s* в'язких гілок, кожна з яких відповідає окремій мобільній підмережі на рис. 3.2)

Дифузійне формулювання моделі перехідної макромолекулярної сітки. Основою пропонованого мікромеханічного підходу служить модель руху полімерних ланцюжків у мобільній підмережі. Для його опису застосовуються співвідношення нерівноважної мікромеханіки для дифузії, які задають еволюцію в часі функції щільності ймовірності станів полімерних ланцюжків. Розглядається зміна вектора подовження, що з'єднує кінці окремих сегментів ланцюгів, які здійснюють броунівський рух. Застосування статистичних методів опису мікромеханічних станів гумоподібних полімерів виправдовується як нескінченним різноманіттям форм, які можуть приймати гнучкі полімерні ланцюги, так і великою кількістю самих ланцюжків у представницькому об'ємі матеріалу. Нижче приведена гаусова статистика, що описує вигин окремих ланцюжків. Показано, як формалізм мікромеханіки броунівського руху точечних невзаємодіючих частинок, що відповідає за їхню дифузію, може бути поширений на систему довгих ланцюжків. З допомогою цього підходу отримані рівняння зміни мікроскопічних станів мобільної підмережі, що становлять основу розробленої моделі в'язкопружної поведінки матеріалів.

Дотримуючись класичних робіт W. Kuhn і фундаментальних монографій із фізики полімерів [109, 418], поведінка окремого макромолекулярного ланцюжка описується у найпростішому випадку наступною статистичною моделлю. Вважається, що такий ланцюжок складається з N вільно сполучених ланок, кожна з яких має довжину b і довільну випадкову орієнтацію, незалежну від інших ланок. Точки сполучення ланок, включаючи два кінця ланцюжка, займають положення у просторі, що визначаються набором $(N+1)$ вектора $\{\mathbf{r}_n\}_{n=0}^{N}$. Відносна конформація макромолекули при цьому задається векторами $\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{N}$, де $\mathbf{b}_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$, $n = 1,\ldots,N$. Розглядаючи ланцюжок як статистичну систему, ймовірність окремої конформації макромолекули можна обчислити: $p\left(\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{N}\right) = \prod_{n=1}^{N} p(\mathbf{b}_n)$, де $p(\mathbf{b}_n) = \left(1/4\pi b^2\right)\delta\left(|\mathbf{b}_n| - b\right)$, як сукупність ізотропних розподілів окремих векторів ланок фіксованої довжини b, які виражаються у просторі $\mathbf{R}^3$ потенціалом простого шару $p(\mathbf{b}_n)$, нормалізованим згідно умови $\int_{\mathbf{R}^3} p(\mathbf{b}_n) d\,\mathbf{b}_n = 1$. Подовження полімерного ланцюжка у цьому випадку може бути визначено вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_0 = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{b}_n$, який з'єднує його кінці.

Цей вектор у силу ізотропності випадкових положень має нульове середнє значення $\langle \mathbf{r} \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle \mathbf{b}_n \rangle = 0$, у той час як його середньоквадратичне значення становить $\left\langle \mathbf{r}^2 \right\rangle = \sum_{m,n=1}^{N} \langle \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n \rangle = Nb^2$. Осереднення $\langle \bullet \rangle$ будь-якої випадкової величини $\langle \bullet \rangle$, яка пов'язана з ланцюжком, проводиться на просторі конформацій відповідно виразу

$$\langle \bullet \rangle = \int \langle \bullet \rangle d\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{N}. \tag{3.47}$$

Окрім середніх значень подовження вільно зчленованих ланцюжків, сам імовірнісний розподіл вектора подовжень ***r*** набуває вигляду:

$$p(\mathbf{r}) = \int p\left(\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{N}\right)\delta\left(\mathbf{r} - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{b}_n\right) d\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{N} = \left[3/\left(2\pi r_0^2\right)\right]^{3/2} \exp\left[-1{,}5\left(r^2/r_0^2\right)\right], \tag{3.48}$$

що відповідний радіальному гаусовому розподілу $r = |\mathbf{r}|$ та $r_0^2 = \left\langle \mathbf{r}^2 \right\rangle$ (докладне виведення можна знайти у [418]). Слід підкреслити, що виходячи з центральної граничної теореми статистики, для $N >> 1$ вигляд розподілу (3.48), одержаний для шарнірно-сполученої моделі, поширюється і на більш загальний клас гнучких ланцюжків із тією лише різницею, що фактична довжина ланок b замінюється значенням еквівалентної довжини статистичного сегмента [418]. З іншого боку, вираз, наведений у (3.48), має нефізичну особливість, яка полягає в тому, що ймовірність подовження $r > Nb$, що перевищує довжину Nb повністю витягнутого ланцюжка, відмінна від нуля. Проте, гаусовий розподіл служить хорошим наближенням для моделювання явищ, для яких сильно подовжені стани полімерних ланцюгів не відіграють великого значення, як у випадку розглянутої тут моделі в'язкопружності на основі еволюції мобільних підмереж.

Розподіл $p(\mathbf{r})$ у формулі (3.48) можна розглядати як міру кількості конформацій ланцюжка і, отже, він може бути безпосередньо пов'язаний із ентропією. Для термодинамічної системи полімерного ланцюга з фіксованим положенням кінців ентропія S визначається співвідношеннями Больцмана як

$$S(\mathbf{r}) = k_B \ln p(\mathbf{r}) = -1{,}5 k_B \left(r^2 / r_0^2\right) + \text{доданок, не залежний від } \mathbf{r}, \qquad (3.49)$$

де k_B - постійна Больцмана.

Для випадку, коли обертанню полімерного ланцюжка навколо зв'язків не перешкоджають молекулярні сили, внутрішня енергія залишиться однаковою для всіх її конформацій [109], отже, вільна енергія Гельмгольца може бути обчислена виключно через ентропію системи (3.49)

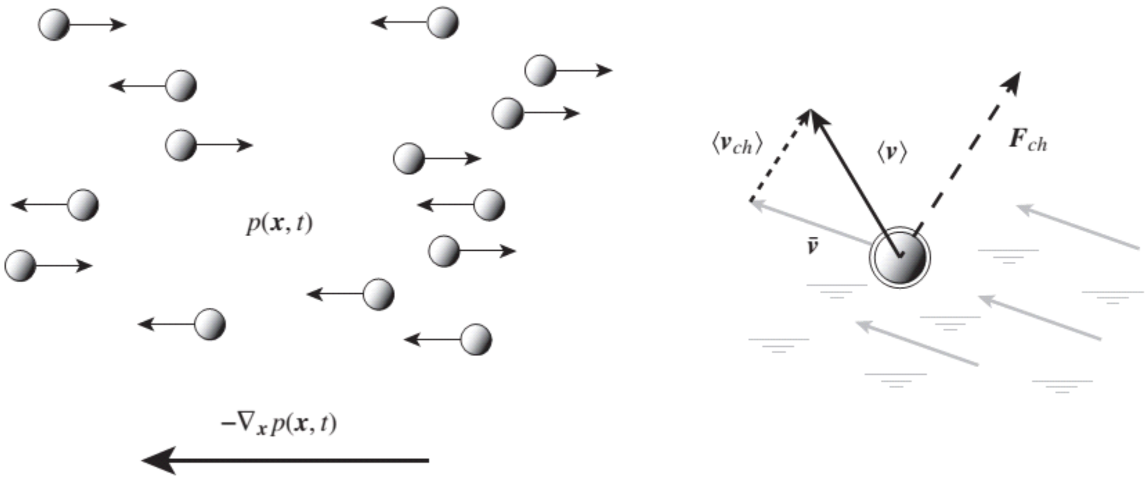
$$A(\mathbf{r}) = -\theta S(\mathbf{r}) = 1{,}5 k_B \theta \left(r^2 / r_0^2\right) + \text{доданок, не залежний від } \mathbf{r}, \qquad (3.50)$$

за заданої постійної температури θ полімеру. За аналогією з існуючими моделями намистин і пружинок [419] полімерний ланцюжок із закріпленими кінцями, який здійснює випадкові теплові коливання, може бути інтерпретований як ентропійна пружина. Термодинамічна сила, що виникає на кінцях ланцюжка як середня реакція від теплового руху сегментів, обчислюється як

$$F_r = \frac{\partial A}{\partial r} = 3 k_B \theta \left(r^2 / r_0^2\right). \qquad (3.51)$$

Ця найпростіша гаусова модель ентропійної пружності полімерних ланцюгів визначає стаціонарний відгук елементів мережевої мікроструктури. Урахування перехідних процесів (приєднання і від'єднання ланцюжків у мобільній підмережі) необхідно здійснювати вже у рамках нерівноважної термодинаміки, як показано далі.

Броунівський рух точечних невзаємодіючих частинок. В'язкопружність полімерів пов'язана з явно залежною від часу дисипацією механічної роботи, яка відбувається на мікроструктурному рівні матеріалу. Цей процес полягає у в'язкопружній релаксації розтягнень макромолекул у заплутаних сітках. У роботі пропонується слідувати формалізму броунівського руху, що застосовується для опису дифузії. Дотримуючись феноменологічного підходу [418], броунівський рух можна інтерпретувати як стохастичний процес, який підпорядковується відомим макроскопічними законам, застосованим до мікроскопічних об'єктів. Такий опис обмежений часовими масштабами, що перевищують характерний період теплових коливань частинок. У результаті еволюція стану системи зводиться до феноменологічного рівняння Смолуховського, що описує динаміку нерівноважних процесів.



а *б*

Рисунок 3.4 – Броунівський рух точечних невзаємодіючих частинок:
а – при нерівномірному розподілі часток в просторі виникає потік із областей з високою концентрацією до областей низьких концентрацій;
б – результуюча середня швидкість $\langle \mathbf{v} \rangle$ точечних частинок, занурених у в'язке середовище, що рухається зі швидкістю $\bar{\mathbf{v}}$

Візьмемо як відправну точку випадок просторової дифузії точечних невзаємодіючих частинок, рух яких обмежено трансляційними ступенями свободи. Нехай деяка велика їхня кількість займає певну область в'язкого середовища, як показано на рис. 3.4, *а*. У разі, коли концентрація цих частинок виявляється неоднорідною у всій області, спостерігається дифузія. Потік частинок матиме інтенсивність пропорційну, а напрям протилежним до градієнту їхньої концентрації. Це пояснюється тим, що кількість частинок, швидкості яких спрямовані в області меншої концентрації, перевищує кількість частинок, що рухаються у зворотному напрямку.

Імовірність виявити частинку в певному стані, що визначається її положенням $\mathbf{x}$, у певний момент часу t визначається функцією щільності ймовірності $p(\mathbf{x},t)$, яка співвідноситься з концентрацією частинок $c(\mathbf{x},t)$, що віднесена до загальної кількості частинок n відповідно до виразу $c(\mathbf{x},t) = n\,p(\mathbf{x},t)$. Зміна цього розподілу описується рівнянням нерозривності

$$\partial_t p(\mathbf{x},t) = -div_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x},t), \tag{3.52}$$

де потік $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ складається з компоненти $\mathbf{h}_{ch}(\mathbf{x},t)$, що викликана тепловим рухом частинок, а також накладеним на нього рухом навколишнього в'язкого середовища.Перша складова визначається як

$$\mathbf{h}_{ch}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)(1/\eta)\nabla_{\mathbf{x}}U_{ch}, \tag{3.53}$$

де $U_{ch}(\mathbf{x},t) = k_B\theta\ln p(\mathbf{x},t) + U(\mathbf{x})$ - так званий хімічний потенціал, що містить у собі ентропію неоднорідності розподілу часток та їхній потенціал $U(\mathbf{x})$ у зовнішньому стаціонарному полі, а $\eta > 0$ - коефіцієнт в'язкості руху частинок відносно навколишнього середовища.

Вочевидь, що потік, який визначається рівнянням (3.53), переміщує частинки із станів із більшою енергією, в ролі якої виступає хімічний потенціал, у стани з меншою енергією, так що цей процес можна характеризувати як релаксаційний. До цього руху призводить хімічна сила $\mathbf{F}_{ch}$, яка визначає середню швидкість $\langle\mathbf{v}_{ch}\rangle$ частинок у кожній точці відносно в'язкого середовища. Обидва векторних поля обчислюються як

$$\mathbf{F}_{ch} = -\nabla_{\mathbf{x}}U_{ch} \text{ и } \langle\mathbf{v}_{ch}\rangle = (1/\eta)\mathbf{F}_{ch} = -(1/\eta)\nabla_{\mathbf{x}}U_{ch}, \tag{3.54}$$

що відповідає співвідношенню між швидкостями і потоком $\mathbf{h}_{ch}(\mathbf{x},t) = p(\mathbf{x},t)\langle\mathbf{v}_{ch}\rangle$.

Другий компонент $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ у рівнянні (3.52) пов'язаний з макроскопічними рухами навколишнього середовища, в яку занурені частинки Для того, щоб врахувати відносні швидкості частинок внаслідок дифузії $\langle\mathbf{v}_{ch}\rangle$, необхідно додати макроскопічне поле швидкостей $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ таким чином, що сумарна середня швидкість $\langle\mathbf{v}\rangle$ і відповідний їй потік $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ складуть відповідно

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \bar{\mathbf{v}} + \langle\mathbf{v}_{ch}\rangle \text{ та } \mathbf{h}(\mathbf{x},t) = p(\mathbf{x},t)\langle\mathbf{v}\rangle. \tag{3.55}$$

Якщо підставити ці співвідношення до виразу зміни щільності частинок (3.52), то в результаті буде отримане відоме рівняння Смолуховського для броунівського руху частинок у зовнішньому полі та рухомому в'язкому середовищі

$$\partial_t p(\mathbf{x},t) = -div_{\mathbf{x}}\left[p(\mathbf{x},t)\,\overline{\mathbf{v}}\right] + (1/\eta)div_{\mathbf{x}}\left\{p(\mathbf{x},t)\nabla_{\mathbf{x}}\left[k_B\theta\ln p(\mathbf{x},t) + U(\mathbf{x})\right]\right\}. \qquad (3.56)$$

Зауваження 3.2.1: а) рівняння Смолуховського (3.56) - дисипативне, що виражається у поведінці так званої динамічної вільної енергії

$$A(p) = n\int p(\mathbf{x},t)U_{ch}\,|\,d\mathbf{x}|, \qquad (3.57)$$

яка визначається як сума хімічних потенціалів U_{ch} усіх n частинок системи за розподілом $p(\mathbf{x},t)$ в області простору, яку вони займають [418]. За відсутності руху навколишнього середовища ($\overline{\mathbf{v}} = 0$) і в ізотермічних умовах $(\theta = const)$ знаходимо, що зміна енергії в часі

$$\frac{dA}{dt} = -n\int \frac{\eta}{p(\mathbf{x},t)}\mathbf{h}_{ch}\cdot\mathbf{h}_{ch}\,|d\mathbf{x}| \le 0 \qquad (3.58)$$

(завжди буде недодатною). При виведенні цього результату використовується умова сталості кількості частинок $\int \partial_t p(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x}| = 0$ і обернення у нуль крайніх членів в інтегруванні частинами, що виражає той факт, що ця система є закритою; б) значення вільної енергії припиняється та нерівність (3.58) перетворюється на рівність, як тільки система приходить у стан рівноваги, в якому зникає потік частинок $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$=0. Такий стан досягається при вирівнюванні значення хімічного потенціалу у всій системі $\nabla_{\mathbf{x}}U_{ch} = 0$, що відповідає наступному рівноважному розподілу щільності частинок

$$p_{eq}(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{U(\mathbf{x})}{k_B\theta}\right]\Big/\int\exp\left[-\frac{U(\mathbf{x})}{k_B\theta}\right]|d\mathbf{x}|, \qquad (3.59)$$

яке задовольняє, вочевидь, умові нормалізації $\int p_{eq}|d\mathbf{x}| = 1$; в) якщо розкрити рівняння (3.56), то можна прив'язати в'язкість середовища до коефіцієнта дифузії за допомогою виразу $D = k_B\theta/\eta$.

Броунівський рух рухомих полімерних ланцюгів. Представлений вище формалізм, що описує дифузію точечних частинок, був поширений на рух гнучких полімерних ланцюжків. За аналогією із попереднім випадком передбачається, що полімерні ланцюжки у незшитих частинах сітки занурені у в'язке середовище. У цьому випадку це середовище відображає взаємодію цих ланцюжків з іншою частиною мережі, яка є каркасом із міцно зшитих між собою полімерних молекул. На відміну від точечних частинок, стан яких прив'язується до їх положення у просторі $\mathbf{x}$, тут нас цікавлять не зміна розташування ланцюжків в матеріалі, а лише їх відносне подовження. Воно виражається введеним раніше вектором $\mathbf{r}$, який з'єднує кінці гнучких ланцюжків. Для зручності введемо безрозмірний вектор розтягнення $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} / r_0$, який містить інформацію про подовження ланцюжка відносно квадратичного середнього r_0, а також про зміну орієнтації ланцюжка в цілому. Якщо покласти, що всі ланцюжки у підмережі мають однакову довжину і не розрізняються поміж собою, то в цілому термодинамічний стан цієї системи визначається поточною щільністю деформацій ланцюжків $p(\boldsymbol{\lambda}, t)$ у $\mathbf{R}^3$. Згідно з наведеною вище моделлю для гнучких полімерних ланцюгів кожна з них подається еквівалентною ентропійною пружиною з енергією, яка визначається виразом (3.50)

$$U(\lambda) = 1{,}5 k_B \theta \lambda^2 + \text{доданок, не залежний від } \lambda, \tag{3.60}$$

де $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = r / r_0$.

На відміну від зовнішнього стаціонарного поля $U(\mathbf{x})$ для точечних частинок, енергія розтягування полімерних ланцюжків $U(\lambda)$ є внутрішньою.

Припускається, що в'язка взаємодія рухомого ланцюжка з рештою частиною матеріалу може бути зведена до його кінців. Позначимо індексами «-» і «+» відповідно початкову та кінцеву точки вектора $\mathbf{r}$, що з'єднує кінці деякого ланцюжка (рис. 3.5). У цьому випадку для відносних швидкостей їхнього руху справедлива наступна кінематична тотожність:

$$\left\langle \mathbf{v}^{\pm} \right\rangle = \overline{\mathbf{v}}^{\pm} + \left\langle \mathbf{v}_{ch}^{\pm} \right\rangle, \tag{3.61}$$

де

$$\overline{\mathbf{v}}^{\pm} = \pm \mathbf{l}\mathbf{r} / 2 = \pm r_0 \, \mathbf{l} \boldsymbol{\lambda} / 2 \tag{3.62}$$

відповідає відносними швидкостями деформації суцільного середовища, а тепловий рух ланцюжків визначається за аналогією з броунівською частинкою їхнім хімічним потенціалом як

$$\left\langle \mathbf{v}_{ch}^{\pm} \right\rangle = \mp (1/\eta) \nabla_{\mathbf{r}} U_{ch}(\mathbf{r}, t) = \mp (1/\eta r_0) \nabla_{\lambda} U_{ch}(\lambda, t). \tag{3.63}$$

Перша компонента $\overline{\mathbf{v}}^{\pm}$ швидкості крайніх точок ланцюжка в (3.61) відображає той відгук рухомої мережі, якій слідує миттєвим відносним швидкостям макроскопічної деформації, заданим тензором $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$, де $\mathbf{F}$ - градієнт деформації в розглянутій матеріальній точці. Друга складова є середньою швидкістю дифузії $\left\langle \mathbf{v}_{ch}^{\pm} \right\rangle = \mathbf{F}_{ch}^{\pm} / \eta$, що викликає відхилення у розподілі деформацій полімерних ланцюжків від накладених макродеформацій під дією хімічної сили $\mathbf{F}_{ch}^{\pm} = \mp\nabla_{\mathbf{r}} U_{ch} = \mp\nabla_{\lambda} U_{ch} / r_0$ (похідною від хімічного потенціалу, що визначається у просторі розтягнень за аналогією з (3.53)) як

$$U_{ch}(\boldsymbol{\lambda}, t) = k_B \theta \ln p(\boldsymbol{\lambda}, t) + 1{,}5 k_B \theta \lambda^2 . \tag{3.64}$$

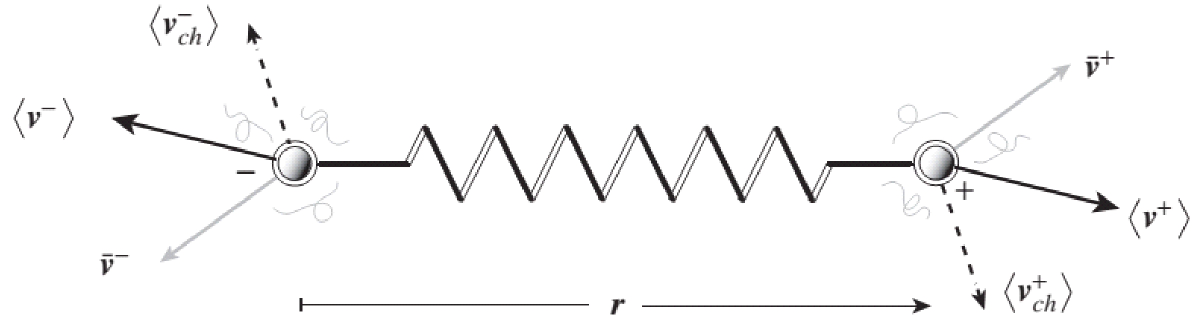


Рисунок 3.5 – Лагранжеве подання броунівського руху гнучких полімерних ланцюгів (полімерний ланцюг із подовженням $\mathbf{r}$ моделюється як ентропійна пружина, яка поміщена в середовище, що деформується, в'язка взаємодія ланцюжка з іншими зосереджена на її кінцях)

Додаючи обидві складові, отримуємо середню швидкість зміни вектора подовження $\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle = \left\langle \mathbf{v}^{+} \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}^{-} \right\rangle$. Рівняння деформації рухомих полімерних ланцюжків зручніше подати відносно вектора розтягнення $\boldsymbol{\lambda}$

$$\left\langle \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle = \mathbf{l}\boldsymbol{\lambda} - D^{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\ln p(\boldsymbol{\lambda}, t) + 1{,}5 \lambda^2 \right], \tag{3.65}$$

у якому D^{λ} є коефіцієнтом швидкості релаксації розтягнень, аналогічним коефіцієнту дифузії точечних частинок.

Зміна стану розглянутої мікроскопічної системи пов'язана з перерозподілом розтягнення та переорієнтацією гнучких ланцюжків. Стосовно щільності мікроскопічних станів можна записати еволюційне рівняння, подібне до (3.52), –

$$\partial_t p(\boldsymbol{\lambda}, t) = -div_{\boldsymbol{\lambda}} \left[p(\boldsymbol{\lambda}, t) \left\langle \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \right] = -div_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\mathbf{h}_{rev} + \mathbf{h}_{dis} \right]. \tag{3.66}$$

Оборотна та дисипативна частини еволюційного рівняння для розподілу ймовірностей (3.66) представлені двома потоками, які визначаються як

$$\mathbf{h}_{rev}(\boldsymbol{\lambda}, t) = p(\boldsymbol{\lambda}, t)\mathbf{l}\boldsymbol{\lambda}, \; \mathbf{h}_{dis}(\boldsymbol{\lambda}, t) = -D^{\lambda} p(\boldsymbol{\lambda}, t) \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\ln p(\boldsymbol{\lambda}, t) + 1{,}5 \lambda^2 \right]. \tag{3.67}$$

Оборотна частина відповідає деформації полімерних ланцюжків узгоджено з макроскопічним середовищем, у той час як дисипативна частина є результатом дифузії станів, що призводить до релаксації розтягнень ланцюжків і відновлення ізотропії їхніх орієнтацій.

Рівняння (3.65) і (3.66) можуть розглядатися як лагранжевий та ейлеровий описи мікроскопічних деформацій. У той час як перший з них відстежує окремі ланцюжки і визначає для кожного з них середню швидкість зміни вектора розтягнення $\langle\dot{\boldsymbol{\lambda}}\rangle$, то другий підхід полягає у знаходженні зміни щільності окремих станів $\boldsymbol{\lambda}$ і визначається рівнянням Смолуховського (3.66).

Зауваження 3.2.2: а) динамічна вільна енергія термодинамічної системи обчислюється як інтеграл від хімічного потенціалу (3.65) на всіх можливих станах $\boldsymbol{\lambda}$ у $\mathbf{R}^3$,

$$A = n\int\limits_{\mathbf{R}^3} p(\boldsymbol{\lambda},t)U_{ch}\,|d\boldsymbol{\lambda}| = nk_B\theta\int\limits_{\mathbf{R}^3} p(\boldsymbol{\lambda},t)\left[\ln p(\boldsymbol{\lambda},t) + 1{,}5\lambda^2\right]|d\boldsymbol{\lambda}|, \qquad (3.68)$$

де n – числом полімерних ланцюгів у системі; б) як і для випадку дифузії точечних частинок, можна показати, що за фіксованою макроскопічної деформації ($\mathbf{l}=0$) та за ізотермічних умов ($\theta = const$) вільна енергія є спадною в часі, що відповідає дисипативній природі релаксації напружень у мобільній підмережі; в) рівноважний стан системи відповідає природній незбуреній щільності ймовірності розтягнення станів ланцюжків

$$p_{eq}(\lambda) = \exp\left[-\frac{3}{2}\lambda^2\right]\Bigg/\int\limits_{R^3}\exp\left[-\frac{3}{2}\lambda^2\right]|d\lambda| = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{3}{2}\lambda^2\right], \qquad (3.69)$$

що є Гаусовим розподілом, для якого припиняється дисипація $\mathbf{h}_{dis}(\boldsymbol{\lambda},t)$; г) залежність значення коефіцієнта дифузії від середньоквадратичного подовження полімерних ланцюжків визначається співвідношенням $D^{\lambda} = 2k_B\boldsymbol{\theta}/(\boldsymbol{\eta}r_0^2)$, що підкреслює вплив довжини ланцюга на швидкість дифузії: що коротшим є ланцюжок, то вищим є його рухливість, завдяки чому в'язкопружна релаксація напружень відбувається швидше.

Отже, запропонований у цій моделі механізм в'язкопружності полімерних матеріалів подається у такий спосіб. Довільна макроскопічна деформація матеріалу $\mathbf{l}$ викликає збурення рівноваги, порушуючи природний стан незшитої частини макромолекул і початковий розподіл (3.69), як показано на рис. 3.6, *а*. Це призводить до зміни хімічного потенціалу $U_{ch}(\boldsymbol{\lambda},t)$, неоднорідність якого породжує хімічну силу $\mathbf{F}_{ch}$. Рухома нею дифузія (рис. 3.6, *б*) прагне відновити недеформований розподіл розтягнень ланцюжків та спричиняє дисипацію механічної роботи в системі.

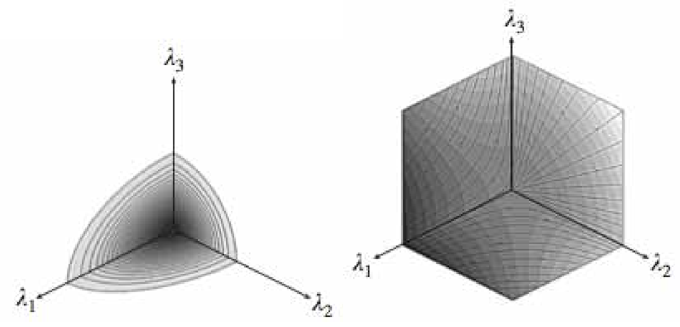


Рисунок 3.6 – Ейлерів опис броунівського руху гнучких полімерних ланцюгів: *а* – збурення розподілу ймовірностей $p(\boldsymbol{\lambda},t)$ у результаті миттєвої макроскопічної деформації; *б* – неоднорідне поле хімічного потенціалу $U_{ch}(\boldsymbol{\lambda},t)$ і сполучена ним релаксація $\mathbf{h}_{dis}(\boldsymbol{\lambda},t)$

Осереднення в'язкопружних деформацій у мобільних підмережах. На основі запропонованої вище мікроскопічної моделі можна вивести осереднений в'язкопружний відгук полімерних матеріалів за скінченних деформацій. Для цього необхідно обчислити макроскопічну вільну енергію $\overline{\psi}^{\nu}$ окремо взятої незшитої підмережі, яка присутня в реологічній моделі на рис. 3.3.

Раніше було показано, що внутрішній стан незшитих полімерних ланцюжків у певний момент часу визначається розподілом $p(\boldsymbol{\lambda},t)$, зміна якого описується рівнянням Смолуховського (3.66). Далі буде доведено, що у дійсності розподіл має певний вираз через тензорну величину, що характеризує збурення системи ланцюжків. При цьому отримані співвідношення мікромеханічної моделі зводяться до звичайного диференціального рівняння щодо цієї тензорної змінної, а повна внутрішня енергія обчислюється у замкненому вигляді як її функція. Це дає можливість побудувати термодинамічно узгоджену модель в'язкопружності, яка створює можливість ефективної чисельної реалізації для скінченно-елементного аналізу.

Тензорне подання зміни щільності ймовірності станів. Поточний стан рухомої складової мережі визначається розподілом $P(\boldsymbol{\Lambda})$: $L_{\mathbf{x}} \to \mathbf{R}^3$, де $L_{\mathbf{x}}$ – векторний простір розтягнень, асоційований з матеріальною точкою $\mathbf{X}$ у поточній конфігурації S. Її зміна визначається відносно до негативного розподілу P у недеформованої конфігурації B в точці $\mathbf{x}$. Природно припустити, що він є Гаусовим відносно абсолютного значення Λ вектора вихідного розтягування $\boldsymbol{\Lambda}$

$$P(\mathbf{\Lambda}) = (3/2\pi)^{3/2} \exp\left[-1{,}5\mathbf{\Lambda}^2\right]. \tag{3.70}$$

Обидва простори розтягнення можна поєднати лінійним відображенням

$$P : \{L_{\mathbf{X}} \to L_{\mathbf{x}}; \qquad \mathbf{\Lambda} \to \mathbf{P\Lambda} \,. \tag{3.71}$$

За такого припущення розподіл щільності розтягнення ланцюжків $p(\boldsymbol{\lambda}, t)$ відносно вихідного стану $P(\mathbf{\Lambda})$ пов'язується наступним співвідношенням:

$$p(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{\det \mathbf{P}} P(\mathbf{\Lambda}) \,. \tag{3.72}$$

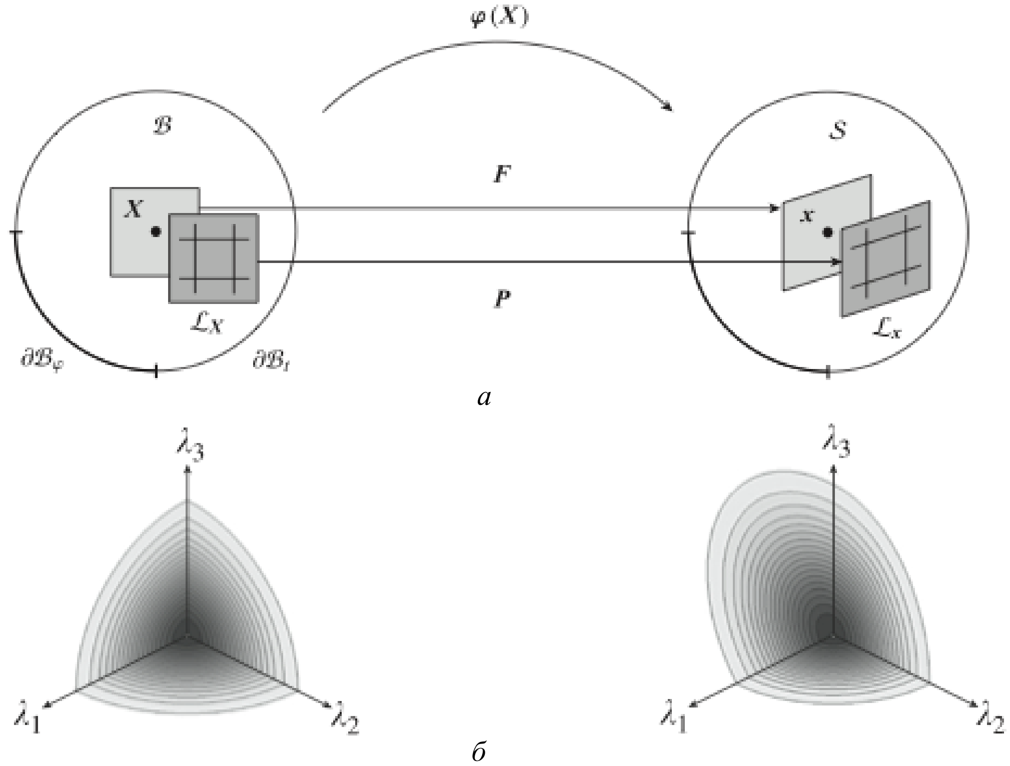


Рисунок 3.7 – Тензорне подання зміни функції ймовірності:
а – відображення мікродеформації $\mathbf{P}$ між просторами $L_{\mathbf{X}}$ і $L_{\mathbf{x}}$, прив'язаними до точок $\mathbf{X}$ і $\mathbf{x}$; *б* – зміна щільності ймовірності $p(\boldsymbol{\lambda})$ у $L_{\mathbf{x}}$ порівняно з рівноважним розподілом $P(\mathbf{\Lambda})$ у $L_{\mathbf{X}}$, що відповідає деякій мікродеформації $\mathbf{P}$

Схематично це подання мікроскопічних деформацій представлено на рис. 3.7. На ньому наведено збурений стан сітки, що характеризується розподілом $p(\boldsymbol{\lambda}, t)$, у точці $\mathbf{x}$ поточної конфігурації S у результаті мікродеформації $\mathbf{P}$ вихідного розподілу $P(\mathbf{\Lambda})$ у тій самій матеріальній точці $\mathbf{X}$ недеформованого тіла *B*. Слід зазначити, що простори $L_{\mathbf{X}}$ і $L_{\mathbf{x}}$ за своєю природою аналогічні дотичним просторам у точках $\mathbf{X}$ і $\mathbf{x}$, а елементи відповідних просторів можуть складатися і відніматися.

Використовуючи вирази (3.70) і (3.72) для розподілу розтягнення ланцюжків

$p(\boldsymbol{\lambda},t)$, актуальне значення хімічного потенціалу обчислюється як

$$U_{ch}(\boldsymbol{\lambda}) = k_B\theta\left\{-1{,}5\Lambda^2 - \ln(\det\mathbf{P}) + 1{,}5\lambda^2\right\} \tag{3.73}$$

із точністю до постійних членів. Цей вислів є квадратичним щодо розтягнень $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda\cdot\lambda}$, $\Lambda = |\boldsymbol{\Lambda}| = \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\Lambda}} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\lambda}}$.

Відповідно до рівняння (3.64), середня швидкість зміни вектора розтягування в свою чергу визначається як

$$\left\langle\dot{\boldsymbol{\lambda}}\right\rangle = \mathbf{l}\boldsymbol{\lambda} - 3D^{\lambda}\left(-\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}\right). \tag{3.74}$$

З іншого боку, припущення щодо того, що мікродеформації слідують лінійній залежності (3.71), обумовлює інший вираз для $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, також лінійний за $\boldsymbol{\lambda}$, а саме $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\lambda}$. Підставляючи його в (3.74), отримуємо наступне рівняння:

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\lambda} = \left[\mathbf{l} - 3D^{\lambda}\left(-\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{1}\right)\right]\boldsymbol{\lambda}, \tag{3.75}$$

яке з урахуванням лінійності відносно $\boldsymbol{\lambda}$ еквівалентне наступній тотожності

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \dot{\overline{\mathbf{F}}}\overline{\mathbf{F}}^{-1} - 3D^{\lambda}\left(-\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{1}\right). \tag{3.76}$$

Тим самим показано, що тензорне подання мікродеформацій (3.70)-(3.72) узгоджується з дифузійною моделлю для сіток незшитих полімерних ланцюжків у тому сенсі, що воно служить розв'язком рівняння Смолуховського за умов виконання еквівалентного йому звичайного диференціального рівняння щодо тензора $\mathbf{P}$ відображення (3.71). Це рівняння містить доданок $\mathbf{l} = \dot{\overline{\mathbf{F}}}\overline{\mathbf{F}}^{-1}$, що відповідає оборотним змінам розподілу розтягувань, які слідують ізохорній частині градієнту деформацій $\overline{\mathbf{F}}$, а також дисипативну складову, що відповідає введеному мікроскопічному механізму в'язкої релаксації, в якій присутній коефіцієнт дифузії D^{λ}.

Розклавши тензор мікродеформації $\mathbf{P}$ як $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ відносно нової тензорної змінної $\mathbf{P}_{\mathbf{X}} : L_{\mathbf{X}} \to L_{\mathbf{x}}$, еволюційне рівняння можна звести до наступного вигляду:

$$\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}} = 3D^{\lambda}\left(\overline{\mathbf{F}}^{-1}\overline{\mathbf{F}}^{-T}\mathbf{P}_{\mathbf{X}}^{-T} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\right), \tag{3.77}$$

в якому виключений градієнт швидкості деформацій $\dot{\overline{\mathbf{F}}}$. Наступним кроком після запровадження симетричної тензорної змінної

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{P}_{\mathbf{X}}^{T}, \tag{3.78}$$

отримуємо остаточне рівняння, що визначає зміну мікродеформації мобільних мереж:

$$\dot{\mathbf{A}} = \tau^{-1}\left(\overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{A}\right),\ \tau^{-1} = 6D^{\lambda} \tag{3.79}$$

Симетричний тензор $\mathbf{A}$ може бути інтерпретований як деяка проміжна метрика у просторі розтягувань. Відхилення її від метрики макроскопічних деформацій, представленої тензором Фінгера $\overline{\mathbf{C}}^{-1}$, оберненим ізохорній частині правого тензора Коші-Гріна $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{F}}\ \overline{\mathbf{F}}^{T}$, визначає еволюцію внутрішнього стану в'язкої частини матеріалу. Рівноважний стан досягається згідно з цим рівнянням, коли обидва метричних тензора збігаються. Введені тензорні величини, крім закону зміни мікродеформацій, дають можливість також обчислити в закритій формі значення повної внутрішньої енергії. Інтегруючи вираз для хімічного потенціалу (3.73) на всьому просторі мікродеформацій, отримуємо

$$\overline{\psi}^{v} = n\int_{L_{\mathbf{X}}} p(\boldsymbol{\lambda})U_{ch}(\boldsymbol{\lambda})|d\boldsymbol{\lambda}| = \mu^{v}\int_{L_{\mathbf{X}}} P(\boldsymbol{\Lambda})\left[\left(-1{,}5\Lambda^{2} + 1{,}5\lambda^{2}\right)|d\boldsymbol{\Lambda}| - \ln(\det\mathbf{P})\right], \tag{3.80}$$

де $\mu^{v} = nk_{B}\theta$ – в'язкопружний модуль, який відповідає окремій системі рухомих ланцюжків.

Інтегрування на просторі $L_{\mathbf{X}}$ здійснюється за абсолютною величиною Λ і орієнтацією $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Lambda}/\Lambda \in S^{2}$ (S^{2} – одинична сфера) вектора вихідного розтягнення ланцюжків. З урахуванням співвідношень $\lambda^{2} = \lambda \cdot \lambda = \Lambda^{2}\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^{T}\mathbf{P}\mathbf{T}$, $|d\Lambda| = \Lambda^{2}d\Lambda|d\mathbf{T}|$, знаходимо:

$$\int_{L_{\mathbf{X}}} P(\boldsymbol{\Lambda})\left(-1{,}5\Lambda^{2} + 1{,}5\lambda^{2}\right)|d\boldsymbol{\Lambda}| = \int_{0}^{\infty} P(\boldsymbol{\Lambda})\Lambda^{4}d\Lambda \cdot \int_{S^{2}}\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^{T}\mathbf{P}\mathbf{T} - 1\right)|d\mathbf{T}|\ . \tag{3.81}$$

З урахуванням відомого гаусового розподілу (3.70) перший інтеграл у правій частині (3.81) обчислюється як

$$\int_{0}^{\infty} P(\boldsymbol{\Lambda})\Lambda^{4}d\Lambda = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\left|S^{2}\right|}. \tag{3.82}$$

Інтеграл на одиничній сфері визначається за допомогою тотожності $\frac{1}{\left|S^{2}\right|}\cdot\int_{S^{2}}\left(\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}\right)|d\mathbf{T}| = \frac{1}{3}\mathbf{1}$ у вигляді згортки:

$$\frac{1}{\left|S^{2}\right|}\cdot\int_{S^{2}}\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^{T}\mathbf{P}\mathbf{T} - 1\right)|d\mathbf{T}| = \frac{1}{3}\mathbf{A} : \overline{\mathbf{C}}\ . \tag{3.83}$$

В остаточному вигляді в'язка частина вільної енергії визначається за значеннями правого тензора Коші-Гріна $\overline{\mathbf{C}}$ і внутрішньої змінної $\mathbf{A}$ у формі, подібній до неогукового матеріалу

$$\overline{\psi}^{\nu} = \overline{\psi}^{\nu}\left(\overline{\mathbf{C}}, \mathbf{A}\right) = 0{,}5\mu^{\nu}\left[\left(\mathbf{A} : \overline{\mathbf{C}} - 3\right) - \ln(\det \mathbf{A})\right] \tag{3.84}$$

та інваріантній відносно обертань мікроструктури. Виходячи із залежності (3.84) від міри макроскопічної деформації, в'язкопружні напруження визначаються наступним значенням тензора Кірхгофа:

$$\overline{\tau}^{\nu} = \overline{\mathbf{F}}\left[2\partial_{\overline{\mathbf{C}}}\overline{\psi}^{\nu}\left(\overline{\mathbf{C}}, \mathbf{A}\right)\right]\overline{\mathbf{F}}^{T} = \mu^{\nu}\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{A}\,\overline{\mathbf{F}}^{T}. \tag{3.85}$$

Зауваження 3.2.3: а) примітно, що запропонована мікромеханічна модель мобільних сіток для в'язкопружності полімерних матеріалів призводить до того ж виразу для макроскопічної вільної енергії (3.84) і відповідних в'язкопружних напружень (3.85), що і в роботі [420]. Еволюція мережевої мікроструктури в [420] пояснюється механізмом тимчасових зв'язків між ланцюжками. Швидкість руйнування та відновлення цих зв'язків в сітці згідно цієї моделі є основним феноменологічним параметром. У той же час, модель, запропонована у цій роботі, заснована на механізмі в'язкої взаємодії ланцюжків із навколишнім матеріалом. Випадкові взаємодії вільних макромолекул замінюються ефективною в'язкою силою, пропорційною швидкості відносних рухів ланцюжків із феноменологічним коефіцієнтом η; б) у виведенні моделей [420] і [421] передбачається, що детермінант внутрішньої змінної завжди дорівнює одиниці. Однак для введеної в цій роботі симетричної тензорної змінної (3.78) тотожність $\det \mathbf{A} = 1$ виконується у вихідному, а також у повністю релаксованому стані. Проте, еволюційні рівняння (3.79) не виключають, що значення детермінанта будуть відхилятся від одиничного значення. Відповідно до цього в виразі вільної енергії присутній доданок $\ln(\det \mathbf{A})$, який не наводиться у вищезазначених роботах.

Сформульована щодо тензорної внутрішньої змінної модель є термодинамічно узгодженою. Це є наслідком того, що сама по собі вона виводиться із рівнянь Смолуховського для дифузії, дисипативні властивості якого продемонстровані раніше. Проте, строге обґрунтування цього дається нерівністю для редукованої дисипації

$$D_{loc} = -2\partial_{\mathbf{A}}\overline{\psi}^{\nu} : 0{,}5\dot{\mathbf{A}} \geq 0\,. \tag{3.86}$$

Дійсно, відповідно до (3.84) для похідної вільної енергії за внутрішньою змінною справедлива рівність $2\partial_{\mathbf{A}}\overline{\psi}^{\nu} = \mu^{\nu}\left(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{A}^{-1}\right)$, звідки з урахуванням еволюційного рівняння (3.79) отримуємо:

$$D_{loc} = -\left(\mu^{\nu}/2\tau\right)\left(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{A}^{-1}\right):\left(\overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{A}\right) \geq 0\,. \qquad (3.87)$$

Остання нерівність доводиться наступним твердженням.

Твердження 1. Нехай $\overline{\mathbf{C}}$ – ізохорна частина правого тензора Коші-Гріна довільної деформації, а $\mathbf{A}$ – деяке значення симетричного тензора змінної стану, тоді виконується нерівність

$$\left(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{A}^{-1}\right):\left(\overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{A}\right) \leq 0\,. \qquad (3.88)$$

Розглянемо полярне розкладання обох симетричних тензорів $\overline{\mathbf{C}}$ і $\mathbf{A}$, а також їхні обернення у вигляді:

$$\overline{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{n_{\dim}} \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_i;\ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_{\dim}} \mu_j \mathbf{v}_j \otimes \widetilde{\mathbf{v}}_j;\ \overline{\mathbf{C}}^{-1} = \sum_{i=1}^{n_{\dim}} \lambda_i^{-1} \widetilde{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i;\ \mathbf{A}^{-1} = \sum_{j=1}^{n_{\dim}} \mu_j^{-1} \widetilde{\mathbf{v}}_j \otimes \mathbf{v}_j\,, \qquad (3.89)$$

де $\lambda_i > 0$, $\mu_j > 0$ – додатні власні значення, а $\{\mathbf{u}_i, \widetilde{\mathbf{u}}_i\}$, $\{\mathbf{v}_i, \widetilde{\mathbf{v}}_i\}$ – ортогональні власні вектори тензорів $\overline{\mathbf{C}}$ і $\mathbf{A}$ відповідно.

Оскільки $\sum_i \mathbf{u}_i \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \otimes \widetilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{1}$, а $\mathbf{1} : \mathbf{1} = 3$, то вираз у лівій частині нерівності (3.88) обчислюється як

$$\left(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{A}^{-1}\right):\left(\overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{A}\right) = 6 - \sum_{i,j}\left(\lambda_i \mu_j + \lambda_i^{-1}\mu_j^{-1}\right)\left(\widetilde{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i\right):\left(\mathbf{v}_j \otimes \widetilde{\mathbf{v}}_j\right). \qquad (3.90)$$

Оскільки $\alpha + \alpha^{-1} \geq 2$ для $\alpha > 0$, то для додатних власних чисел справедливо $\lambda_i \mu_j + \lambda_i^{-1}\mu_j^{-1} \geq 2$. Крім того, для згортки власних векторів виконується нерівність $\left(\widetilde{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i\right):\left(\mathbf{v}_j \otimes \widetilde{\mathbf{v}}_j\right) = \left(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j\right)\left(\widetilde{\mathbf{u}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_j\right) = \left(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j\right)^2 \geq 0$, звідки остаточно приходимо до необхідного результату

$$\left(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{A}^{-1}\right):\left(\overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{A}\right) \leq 6 - 2 \cdot \mathbf{1} : \mathbf{1} = 0. \qquad (3.91)$$

Алгоритм чисельної реалізації. Запропонована модель в'язкопружності відзначається простотою чисельної реалізації і може бути легко застосована у скінченно-елементному аналізі елементів конструкцій з гуми та подібних їй матеріалів. Чисельний алгоритм ґрунтується на дискретизації у часі еволюційного рівняння (3.78) для внутрішньої змінної **A**. Застосування явної схеми інтегрування на часовому проміжку від t_n до $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ з кроком Δt дає нове значення змінної стану окремої в'язкої підмережі

$$\mathbf{A}_{n+1} = \left(1 + \Delta t / \tau\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_n + \frac{\Delta t}{\tau} \overline{\mathbf{C}}_{n+1}^{-1} \right) \qquad (3.92)$$

для заданого часу релаксації $\tau = 1/6D^{\lambda}$, що визначається мікроскопічною моделлю і коефіцієнтом дифузії D^{λ}. Внаслідок лінійності рівняння (3.79) його алгоритмічне подання (3.92) отримане у замкненій формі. Для актуального значення внутрішньої змінної в'язкопружні напруження (3.85) виражаються наступним чином:

$$\overline{\tau}_{n+1}^{v} = \mu^{v} \overline{\mathbf{F}}_{n+1} \mathbf{A}_{n+1} \overline{\mathbf{F}}_{n+1}^{T} = \mu^{v} \left(1 + \Delta t / \tau\right)^{-1} \left[\overline{\mathbf{F}}_{n+1} \mathbf{A}_{n+1} \overline{\mathbf{F}}_{n+1}^{T} + \left(\Delta t / \tau\right) \mathbf{1} \right]. \qquad (3.93)$$

Алгоритмічний дотичний модуль щодо збільшення деформацій на кроці t_{n+1} для цього виразу напружень знаходиться як

$$\overline{\mathbf{C}}_{n+1}^{v} = 2 \partial_{\mathbf{g}} \overline{\tau}_{n+1}^{v} = -2\mu^{v} \ \Delta t / \tau \left(1 + \Delta t / \tau\right)^{-1} \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}^{abcd} = \left[(\delta)^{ac} (\delta)^{bd} + (\delta)^{ad} (\delta)^{bc} \right] / 2 . \qquad (3.94)$$

Зауваження 3.2.4: а) слід підкреслити, що результат обчислення в'язкопружних напружень у (3.93) повинен бути об'єднаний із пружною реакцією зшитої частини сітки, а також внеском всіх інших в'язких мереж. Отриманий ізохоричний відгук потім повинен бути об'єднаний із гідростатичними напруженнями, які визначаються властивостями нестисності розглянутих матеріалів. Для практичної реалізації обрано наступний вираз для об'ємної частини енергії деформації $U(J) = \kappa\left(J^2 - 1 - 2\ln J\right)/4$, де κ – досить великий коефіцієнт стиснення матеріалу; б) модель окремої в'язкопружної підмережі містить два мікроскопічно обґрунтованих параметри τ і μ^{v}. Якщо у феноменологічній моделі розглядається s в'язких гілок, то відповідно необхідно мати справу з набором 2s параметрів. Зокрема, s різних значень часу релаксації $\{\tau_i\}_i^s$ є дисипаційним спектром цієї в'язкопружної моделі, а s модулів $\{\mu_i^{v}\}_i^s$ – їх питомі в'язкопружні жорсткості. При чисельній реалізації історія деформації для кожної із гілок представлена окремою внутрішньою тензорною змінною $\mathbf{A}_i$, що відповідає із урахуванням симетрії $\mathbf{A}$, необхідності зберігання та обчислення для кожного наближення 6s скалярних змінних.

3.3 Дисипативні механізми нетканих матеріалів

Механіка нетканих матеріалів володіє істотними особливостями, які відрізняють їх від інших текстилів. При навантаженні їхня поведінка супроводжується множиною явищ, які відбуваються на різних рівнях, починаючи від окремих волокон і закінчуючи мікроскопічною волокнистою мережею і суцільним полотном тканини. Сплутані волокна зазнають різних видів деформації: осьове подовження при розтягуванні, вигин і кручення. У місцях з'єднання осьові сили, згинальні та крутний момент передаються між волокнами і перерозподіляються складною просторовою мережевою структурою. У нетканих текстилях, утворених голкопробивним способом, дуже багато залежить від вузлів: вони володіють складною геометрією, відрізняються числом волокон і множиною інших властивостей. При такому способі з'єднання волокна мають можливість відносного проковзування, що має величезне значення. Для щільних текстилей також неминуча взаємодія за межами вузлів. У такому випадку істотні ділянки волокон виявляються у контакті з іншими волокнами. У кінцевому рахунку, технологічний процес виробництва текстилей призводить до утворення залишкових напружень, урівноважених у початковому матеріалі. Раціональний підхід до моделювання подібних матеріалів має ґрунтуватися на компромісі між складністю будови та поведінки, властивих цьому класу матеріалів, з одного боку, а також точністю та достовірністю передбачення їх властивостей, - з іншого. Як наближення в цій роботі пропонується дискретна мережева модель. У ній сегменти волокон подаються як лінійні елементи, з'єднані у точкових вузлах. Такого роду моделі успішно застосовувалися для матеріалів з різною мікроструктурою, таких як бетон, композити, полімери, папір та інші волокнисті матеріали.

У рамках цього ідеалізованого подання будуть враховуватися особливості поведінки, специфічні розглянутому класу нетканих текстилей. У першу чергу, в моделі буде враховано відносне проковзування волокон, з'єднаних тертям у вузлах. Передбачається, що саме цей механізм відповідальний за необоротну поведінку і зміну нетканого матеріалу при його навантаженні. Суть цього явища полягає в тому, що частина довгого волокна може бути протягнута через заплутаний вузол, в разі, коли натяг з однієї зі сторін виявляється у змозі подолати опір сил тертя у вузлі, як показано на рис. 3.8. Цим механізмом можна описати незворотні деформації, еволюцію текстури,

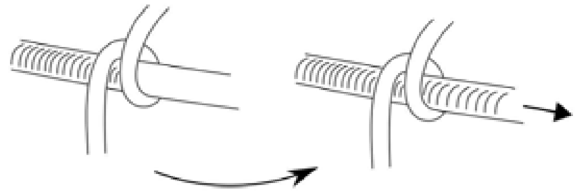


Рисунок 3.8 – Механізм відносного проковзування волокон у вузлі: при перевищенні зусилля праворуч частина суцільного волокна зліва протягується на іншу сторону

зміцнення і подальше пошкодження нетканого полотна при його плоскій деформації. У пружному діапазоні волокна обертаються, орієнтуючись у напрямку максимального розтягнення, що дає можливість передавати нормальні зусилля за допомогою поздовжнього навантаження більшої кількості волокон. При необоротних проковзуваннях з тертям у вузлах відбувається наступне: довжина найбільш навантажених волокон збільшується за рахунок протягування частин інших, менш навантажених волокон у їхню сторону, - в результаті чого напруження перерозподіляються у волоконній мікроструктурі, і їхній рівень знижується. Цей додатковий механізм підвищує несучу здатність тканини. Стверджується, що найбільш міцні неткані матеріали, утворені голкопробивним способом, які отримують подовження до 50-250% до розриву, зобов’язані таким унікальним властивостям виключно наявності проковзувань волокон у місцях з’єднань. На відміну від існуючих підходів у запропонованій моделі будуть враховуватися скінченні проковзування, які передбачають послідовне висмикування вільних кінців волокон, що дає можливість відстежити процес повного розриву нетканого полотна.

У дискретній моделі буде цілком представлений весь макроскопічний зразок. У плоскій області, що повторює форму навантажуваного зразка, відтворюється структура з подовжених волокон, з’єднаних між собою у точечних вузлах із випадковим або регулярним розміщенням залежно від технології виготовлення текстилю. У моделі приймаються наступні припущення щодо структури та поведінки матеріалу: волокна мають однорідні властивості, а варіацією довжини, товщини та пружних властивостей можна знехтувати; волокна піддаються виключно подовжньому розтягуванню і не опираються стисканню, вигину або крученню, що відповідає моделі тонкої нитки; значення тертя знаходиться на одному рівні для всіх вузлів, але підлягає малим випадковим відхиленням; опір у вузлі не залежить від натягу волокон або кута, під яким вони приходять до вузла; волокна розтягуються пружно, пластичні деформації відсутні, міцність волокон вважається достатньою, щоб уникнути їх розриву.

Слід зазначити, що навіть у разі, коли полотно скріплюється із масиву волокон однакової довжини, у результаті довжина їхніх сегментів, що міститься між послідовними вузлами, виявляється випадковою. Початковий розподіл геометричних параметрів та сама топологія мережі значною мірою залежать від технології виготовлення. У роботі пропонується відтворити початкову конфігурацію волокон та їхнє поєднання у нетканих текстилях за допомогою моделей типу Мікадо. Оскільки орієнтація сегментів волокон не впливає на їхній відгук при поздовжньому розтягуванні, а також на опір сил тертя в вузлах, їхні деформації можна розглядати в одновимірній постановці, як показано на рис. 3.9. Кожне волокно має два вільних кінця, які, згідно з цим поданням, можна позначити як лівий і правий. Виходячи з цього, вузли, в яких це волокно з'єднується з нетканою мережею, можна пронумерувати зліва направо в порядку зростання. Сегмент s, розміщений між двома послідовними вузлами i і j, має певну довжину L_s, що становить певну частину від загальної довжини L_f волокна. У деформованому стані це волокно приймає подовження R_s, що дорівнює поточній відстані між вузлами.

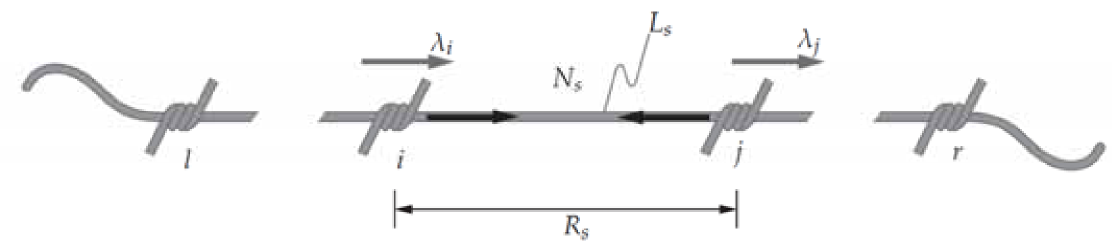


Рисунок 3.9 – Окреме волокно, розгорнуте у поздовжньому відношенні (сегмент s розташовується між двох послідовних вузлів i і j, два вільних кінця прикріплені лише з однієї зі сторін в лівому і правому вузлі відповідно, з деформацією матеріалу подовження сегментів R_s змінюються, реакція волокон при розтягуванні виражається додатньою осьовою силою N_s, натяг волокон здатен долати опір у вузлах, що призводить до проковзування волокон і зміни довжини сегментів L_s)

Коли розв'язок задачі рівноважного відгуку нетканої мікроструктури шукається в переміщеннях, подовження волокон виступають як зовнішні чинники навантаження, подібно до того, як деформації служать зовнішніми параметрами у механіці матеріалів. При заданій історії навантаження необхідно визначити відгук волокна. У першу чергу він виражається у поздовжніх силах N_s всіх його сегментів, що діють на вузли, до яких прикріплені окремі ділянки волокна, у протилежних напрямках.

Осьове зусилля виникає у відповідь на деформацію ε волокна. Як згадувалося раніше, для виробництва нетканих матеріалів голкопробивним способом використовуються досить тонкі волокна. Тому природно застосовувати модель пружних ниток для опису поведінки різних ділянок волокна. Коли подовження R_s перевищує довжину сегмента L_s, волокна зазнають натяг. В іншому ж випадку волокна втрачають стійкість і вільно згинаються, не створюючи стиснення сили. Отже, осьова деформація матеріалу волокна визнається на всій довжині сегмента s наступним чином:

$$\varepsilon_s = \{(R_s - L_s)/L_s,\ R_s > L_s; \quad 0, \qquad R_s \le L_s. \tag{3.95}$$

Вільні краї волокон, очевидно, весь час залишаються нерозтягнутими $\varepsilon_{l,r} \equiv 0$. Згідно вихідних припущень, у статичному аналізі приймається, що матеріал волокон поводиться лінійно пружно і не досягає межі міцності в ході навантаження. Відповідно до цього внутрішня енергія є квадратичною функцією деформацій

$$\psi_s = 0{,}5E\,A\,\varepsilon_s^2\,L_s. \tag{3.96}$$

Як уже зазначалося, за наявності скінченного тертя у вузлах довжини сегментів L_s і вільних країв $L_{l,r}$ не є постійними і зазнають незворотних змін. При проковзуванні відбувається перетягування окремих частин волокон крізь вузли, у яких вони переплітаються з іншими волокнами, у результаті чого їхні довжини змінюються. Повна довжина волокна L_f при цьому, очевидно, зберігається. Домовимося вважати додатнім напрямок швидкості проковзування λ_j, що відповідає ковзанню зліва направо відносно вузла *j*. У такому разі зміни довжин сегментів і вільних кінців визначаються наступним чином:

$$\dot{L}_{ij} = \lambda_i - \lambda_j,\ \dot{L}_l = -\lambda_l,\ \dot{L}_r = \lambda_r\ . \tag{3.97}$$

Окреме волокно можна розглядати як дисипативну механічну систему. Зовнішній вплив на неї задається зміною відстані між вузлами і відповідним вектором подовження сегментів $\mathbf{R} = \{R_s\}$, який виконує роль зовнішнього параметра навантаження. Внутрішній стан, залежно від історії, у свою чергу визначається значеннями довжин сегментів і вільних кінців $\mathbf{L} = \{L_s\}$. У кінцевому рахунку, завдання полягає у визначенні відгуку системи, що складається з сил натягу сегментів $\mathbf{N} = \{N_s\}$, що діють на вузли сітки. Для безперервного процесу швидкість дисипації повинна задовольняти так званій нерівності Клаузіуса-Планка:

$$D = W - \dot{\psi} \geq 0\,, \tag{3.98}$$

яка виражається у тому, що зовнішня робота повинна бути більшою, ніж приріст внутрішньої енергії системи для будь-якого допустимого процесу.

Зовнішня робота

$$W = \sum_s N_s\, \dot{R}_s = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{R}} \tag{3.99}$$

здійснюється проти внутрішніх сил N_s в кожному сегменті при їх розтягуванні.

Повна ж внутрішня енергія деформованого волокна обчислюється як сума енергії розтягнення окремих його сегментів $\psi = \psi(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = \sum_s \psi_s\left(R_s\, L_s\right)$.

До опису поведінки проковзування волокон застосуємо стандартний математичний апарат дисипативних систем. На додаток до визначеної вище внутрішньої енергії системи $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{I})$, для опису незворотних змін внутрішніх параметрів системи $\mathbf{I}$ потрібно задати потенціал дисипації $\phi(\mathbf{R}, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{I}})$. Параметри стану $\mathbf{I}$ в цьому випадку можуть бути обрані ідентичними довжинам $\mathbf{L}$ або будь-якими іншими, що дають можливість однозначно визначати їх значення як деяку функцію $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{I})$.

Еволюція системи визначається відомим рівнянням Біо

$$\partial_{\mathbf{I}} \psi(\mathbf{R}, \mathbf{I}) + \partial_{\dot{\mathbf{I}}} \phi(\mathbf{R}, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{I}}) \ni 0\,, \tag{3.100}$$

згідно з яким термодинамічно спряжена сила $\mathbf{F}$ повинна належати субдиференціалу потенціалу дисипації щодо швидкості зміни внутрішніх змінних $\dot{\mathbf{I}}$

$$\mathbf{F} = -\partial_{\mathbf{I}} \psi(\mathbf{R}, \mathbf{I}) \in \partial_{\dot{\mathbf{I}}} \phi(\mathbf{R}, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{I}})\,. \tag{3.101}$$

Виходячи з результатів випробувань нетканих матеріалів, у яких поведінка макроскопічних зразків не залежала від швидкості навантаження, можна припустити, що процес проковзування, очевидно, не містить явної залежності від масштабу часу. У такому випадку потенціал дисипації має бути однорідною ступеня 1 функцією швидкості зміни стану $\dot{\mathbf{I}}$. Така функція буде недиференційованою при $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$, де її субдиференціал становитиме

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},\mathbf{I}) = \partial_{\dot{\mathbf{I}}}\phi(\mathbf{R},\mathbf{I},\dot{\mathbf{I}}=\mathbf{0}) = \left\{\mathbf{F}\middle|\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{I}} \le \phi(\mathbf{R},\mathbf{I},\dot{\mathbf{I}})\right\} \tag{3.102}$$

опуклу множину допустимих значень спряженої сили $\mathbf{F}$. Форма множини $\mathbf{E}$ залежить від змінних $\mathbf{R}$ та $\mathbf{I}$. При відомому виразі цієї залежності може бути встановлено зворотній зв’язок субдиференціалу (3.102) зі значеннями потенціалу, а саме:

$$\phi(\mathbf{R},\mathbf{I},\dot{\mathbf{I}}) = \sup_{\mathbf{F}\in\mathbf{E}} \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{I}}. \tag{3.103}$$

Форму області $\mathbf{E}$ сил, за яких поведінка системи є оборотною, або пружною, можна задати системою нерівностей

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},\mathbf{I}) = \left\{\mathbf{F}\middle|\ f_\alpha(\mathbf{R},\mathbf{I},\mathbf{F}) \le c_\alpha,\ \alpha = 1,...,m\right\}. \tag{3.104}$$

У цьому випадку екстремальне значення потенціалу дисипації, яке досягається у (3.103), визначається скінченним набором коефіцієнтів Лагранжа $\phi = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_\alpha$, що відповідають обмеженням у вигляді нерівностей в (3.104). Відповідно до цього еволюційні рівняння (3.100) набудуть наступного вигляду:

$$\left\{\dot{\mathbf{I}} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_{\mathbf{F}} f_\alpha(\mathbf{R},\mathbf{I},\mathbf{F});\ \lambda_\alpha\cdot(f_\alpha - c_\alpha) = 0,\ \lambda_\alpha \ge 0,\ f_\alpha \le c_\alpha.\right. \tag{3.105}$$

Структура наведених співвідношень повною мірою повторює співвідношення для пружно-пластичного матеріалу, для якого область пружних напружень обмежується системою поверхонь течії. Застосуємо цю теорії до проковзування тонких волокон у вузлах з тертям, обравши як змінні історії навантаження $\mathbf{I}:\gamma = \{\gamma_i\}$, де γ_i – повна величина проковзування уздовж вузла *j*. Відповідно до нього поточна довжина сегментів порівняно з їх початковим значенням L_{ij}^0 визначається як $L_{ij}^0 = L_{ij}^0 + (\gamma_i - \gamma_j)$. У отримуваному виразі сили, спряженної проковзуванню γ_i,

$$F_j = -\partial_{\gamma_j}\psi = \underbrace{EA(\varepsilon_{j,j+1} - \varepsilon_{j-1,j})}_{\Delta N_j}\left(1 + \frac{\varepsilon_{j,j+1} + \varepsilon_{j-1,j}}{2}\right), \tag{3.106}$$

при цьому присутнє значення різниці натягів по обидві сторони від вузла $\Delta N_j = N_{j,j+1} - N_{j-1,j}$. Величина цієї різниці природним чином співвідноситься з опором проковзуванню у вузлі *j*, а саме її абсолютне значення обмежене границею тертя $|\Delta N_j| \le \Delta N_j^Y$. Використовуючи цю нерівність, можемо визначити пружну область у вигляді (3.104), де $f_j = |F_j|$, а

$$\left\{c_j^a = \Delta N_j^Y \left[1 + (\boldsymbol{\varepsilon}_{j,j+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1,j})/2\right];\ c_j^b = \Delta N_j^Y \left(1 + \boldsymbol{\varepsilon}^Y/2\right),\right. \qquad (3.107)$$

де $\varepsilon^Y \equiv \Delta N_j^Y / EA$, а другий вираз в (3.107) c_j^b дає нижню наближену границю.

Рівняння проковзування за асоціативним законом течії (3.105) відповідно приймуть такий вигляд $\dot{\gamma}_j = \lambda_{j^+} - \lambda_{j^-}$, в якому системи проковзування додатково розділені на додатню та від'ємну з $f_{j^\pm} = \pm F_j$, $c_{j^\pm} = c_j$.

Представлені у підрозділі моделі дають можливість описувати дисипативні механізми у нетканих матеріалах.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 представлені нові підходи, моделі і методи дослідження мережевих структур з одновимірних елементів (волокон), молекул, ниток, що взаємодіють між собою в окремих вузлах просторової сітки. Ґрунтуючись на отриманих результатах, можна зробити такі висновки.

1. На відміну від традиційних підходів до гомогенізації звичайних композиційних матеріалів, для досліджуваних типів волоконних структур вони неприйнятні. Відповідно, були розроблені: підхід, заснований на виділенні представницького статистичного набору; модель співставлення енергії пружного деформування системи осередненій енергії системи; метод співставлення мікро-макрохарактеристик деформації, що відрізняється способом осереднення за шляхом векторів мікродеформацій волокон на одиничній мікросфері.

2. Для мережевих структур запропоновані нові моделі для опису в'язкопружних процесів на основі аналізу статистичних наборів волоконних мережевих структур.

3. Для середовищ типу нетканих матеріалів розроблені базові співвідношення для опису процесів розтягування волокон, вузлових проковзувань і вузлових розривів. Сформована нова варіаційна постановка задачі у вузлових зусиллях.

Таким чином, у розділі знайшли відображення теоретичні основи дослідження механіки волоконних структур на базі нових підходів, моделей і методів мікромеханіки. Вони знайшли застосування при дослідженні деформування захисних, силових та функціональних структур із такого типу матеріалів (див. розд. 6, 7).

Матеріали розділу описані у роботах [3, 4, 49,51, 55–63, 66, 83, 99, 108].

РОЗДІЛ 4
РОЗРОБЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ТІЛ ІЗ УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОВЕРХНЕВИХ ТА ПРОМІЖНИХ ШАРІВ

4.1 Загальна постановка задач розроблення моделей та методів для аналізу контактної взаємодії

Узагальнення науково-технічної інформації з прийнятого напряму досліджень, вивчення проблемних ситуацій, які виникають при моделюванні контактної взаємодії складнопрофільних тіл традиційними методами, співставлення позитивних та негативних властивостей різних методів досліджень стосовно контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням фізичної та структурної нелінійності описані у розд. 1. Узагальнення науково-технічної інформації та формування на цій основі напрямків наукових розробок для усунення існуючих протиріч та недоліків існуючих підходів, методів та моделей, дослідження переваг методу граничних інтегральних рівнянь та загальних варіаційних постановок порівняно із локальними, а також формування на цій основі підходів до формування системи розв'язувальних рівнянь із урахуванням фізичної та структурної нелінійності містяться у розд. 2.

Формування структури та наповнення єдиної системи розв'язувальних рівнянь аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл та геометричного синтезу форми їх поверхонь із урахуванням фізичної та структурної нелінійності та визначення шляхів розв'язання системи рівнянь та нерівностей складає зміст розд. 4 (див. нижче). Зокрема, слід відзначити, що на сьогоднішній день актуальним завданням є поповнення множини методів і моделей, за допомогою яких можна здійснювати чисельне дослідження контактної взаємодії складнопрофільних гладких і шорстких тіл, а також тіл із нелінійно-деформівним контактним шаром між ними. Це зумовлено тим, що розширення арсеналу інструментів для визначення контактних площадок і тиску підвищує достовірність і точність результатів, одержуваних на різних етапах проектних розробок. Особливо це важливо для складнопрофільних тіл, для яких традиційне аналітичний або чисельний опис форми і реальних умов контактування на поверхнях часто не задовольняє вимогам точності та адекватності опису реальної контактної взаємодії, а тим більше – за наявності проміжного нелінійно-деформівного шару між цими тілами. У першу чергу ускладнює завдання та обставина, що досліджувані СПТ, як правило, не є ні повністю узгодженими на поверхнях контакту (тобто поверхнями, що збігаються) [175], ні неузгодженими (тобто, наприклад, за моделлю Герца, такі, що подаються як два напівнескінченних тіла, обмежених параболоїдами). Вони утворюють клас тіл, близьких за поверхнями контакту настільки, що їх загальне зближення, переміщення за рахунок деформування СПТ як гладких тіл, а також переміщення за рахунок локального обтиснення, наприклад, шорсткості – всі вони виявляються сумірними з величиною зазору в початковому ненавантаженому стані.

Дійсно, наявність і опис шорсткості (або іншого шару), що спотворює картину контактування тіл, які розглядаються як гладкі, є додатковим чинником, що ускладнює модель контактної взаємодії. Відповідно, для СПТ, обмежених поверхнями неканонічної форми і контактуючими на цих поверхнях (причому по майже співпадаючих попарно в зонах сполучення складнопрофільних тіл), важко розраховувати на аналітичні розв’язки, і для проектних досліджень найбільшою мірою підходять саме чисельні методи аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії. Однак і тут пряме застосування традиційних чисельних методів утруднено в силу зазначених особливостей СПТ.

Із урахуванням зазначених обставин актуальною і важливою науково-практичною проблемою є вдосконалення існуючих та розробка нових моделей і чисельних методів визначення НДС складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з урахуванням їх контактної взаємодії як гладких або шорстких тіл, вирішенню якої присвячена ця робота.

Зокрема, в розділі поставлена і розв’язана задача про розробку математичних моделей взаємодії гладких і шорстких тіл, а також тіл із нелінійним пружним шаром між ними. Задача зводиться до граничного інтегрального рівняння або варіаційної задачі. Дискретизація шуканого контактного тиску здійснена за допомогою методу граничних елементів. Вплив шорсткості чи інших шарів моделюється за допомогою нелінійного вінклеровського пружного шару. У кінцевому підсумку, отримується система структурно-фізично нелінійних співвідношень. Для їх розв’язання розроблені нові ітераційні методи, що зводять розв’язання структурно-фізично нелінійної задачі до послідовності структурно-нелінійних, але фізично лінійних задач.

4.2 Формування системи розв’язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії з урахуванням фізично та структурно нелінійної поведінки поверхневих шарів взаємодіючих тіл

Математична модель напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із урахуванням їх контактної взаємодії може будуватися, як це зазначалося в розд. 1 і 2, на основі різних постановок. Це завдання зводиться до проблеми мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії системи взаємодіючих тіл на множини переміщень, які відповідають умові їх непроникнення одне в одне. Крім того, можлива постановка на основі граничних інтегральних рівнянь, а також правомірна постановка на основі узагальнення варіаційного принципу Калькера.

У першому випадку приходимо до проблеми [230, 235, 261, 262]

$$I(\mathbf{u},\mathbf{u}) \to \min,\ \mathbf{u} \in K\,, \tag{4.1}$$

де $\mathbf{u} = \bigcup\limits_{\alpha} u^{(\alpha)}$ – множина полів переміщень точок контактуючих тіл, а $\alpha = 1, 2, ..., N_\alpha$ – номери контактуючих тіл;

$$I = \sum_{\alpha} I^{(\alpha)}\left(u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right) - \tag{4.2}$$

функціонал повної внутрішньої енергії системи взаємодіючих тіл;

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} a^{(\alpha)}\left(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\right) - \sum_{\alpha} L\left(v^{(\alpha)}\right); \tag{4.3}$$

$a^{(\alpha)}\left(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\right) = \int\limits_{\Omega^{(\alpha)}} \left(\sigma_{ij}(u^{(\alpha)})\,\varepsilon_{ij}(v^{(\alpha)})\right) d\Omega$ – білінійна форма; σ_{ij}, ε_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно; $L\left(v^{(\alpha)}\right) = \int\limits_{\Omega^{(\alpha)}} f_\Omega^{(\alpha)}\, v^{(\alpha)} d\Omega + \int\limits_{S^{(\alpha)}} f_S\ v^{(\alpha)} dS$ – лінійна форма на полях переміщень $v^{(\alpha)}$.

Множина K визначається наступною умовою:

$$K = \left\{u : u_{v_{(\alpha_1)}}^{(\alpha_1)} + u_{v_{(\alpha_2)}}^{(\alpha_2)} \le \delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}\right\}, \tag{4.4}$$

де $\nu_{(\alpha)}$ – вектори нормалі до тіл на поверхнях $S^{(\alpha)}$, а $\delta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ – початкові (в ненавантаженому стані) зазори у сполученні тіл α_1 і α_2.

За наявності фізичної нелінійності «напруження – деформації» в I замість квадратичного доданка з'являється опуклий функціонал $I^{(\alpha)}\left(u^{(\alpha)}\right)$.

У другому випадку, як випливає з аналізу постановки, представленої в розд. 1, при використанні базисних функцій для апроксимації контактного тиску у вигляді кусочно-лінійних пірамідальних розподілів на трикутній регулярній сітці (з шестикутною основою), отримуємо для випадку гладких тіл систему співвідношень [1, 2]

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} \sum\limits_m C_{nm}\, p_m + h_n - \delta = 0, \text{вузол } J_n - \text{в контакті}, n \in J; \\ \sum\limits_m C_{nm}\, p_m + h_n - \delta > 0, \text{вузол } J_n - \text{поза зоною контакту}, n \notin J; \end{cases} \\ &\left\{ p_m \ge 0,\ m \in J;\ \ p_m = 0,\ m \notin J;\ \sum_m \sqrt{3}c^2 p_m / 2 = P. \right. \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

При введенні між контактуючими тілами лінійно-пружного шару всі співвідношення (4.5) залишаються у силі, за винятком заміни коефіцієнтів матриці жорсткості C на коефіцієнти модифікованої матриці

$$C^{\Sigma} = C + diag(\lambda), \tag{4.6}$$

де λ – вузлова контактна податливість (в загальному випадку – нерівномірна у вузлах, на відміну від рівномірної (тобто коли $C^{\Sigma} = C + \lambda E$, а E – одинична матриця).

Для варіанту використання варіаційної постановки (на базі принципу Калькера) із застосуванням певних квадратурних формул (див. (1.13) в розд. 1) отримувана система співвідношень відповідає (4.5) з урахуванням (4.6). Як зауваження слід зазначити, що співвідношення (4.5), модифіковані з урахуванням (4.6), як уже зазначалося, зберігають структуру не тільки для рівномірного розподілу податливості λ, але і при її нерівномірному розподілі на контактній площадці. У цьому випадку маємо покомпонентно співвідношення (4.6) у вигляді:

$$C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda_n \delta_{nm}, \tag{4.7}$$

де λ_n – «вузлова» податливість, тобто податливість у вузлі з номером n.

Ці співвідношення випливають як із дискретизації прямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь, так із варіаційного принципу Калькера. Дійсно, при доповненні функціоналу, що мінімізується, складовою

$$\Phi^{\lambda} = \frac{1}{2}\int\limits_{(S)} \lambda(S) p^2 dS \tag{4.8}$$

і при його наближенні квадратурними формулами з точками інтегрування, які збігаються з вузлами введеної на S тріангуляції, з'являються складові, пропорційні квадратам вузлових контактних тисків і вузловим податливостям λ_n. Це після мінімізації дає такі ж співвідношення для C^{Σ}, як і для (4.7).

На розвиток цього формулювання можна поширити використовуваний підхід і на випадок ненульової розподільчої здатності лінійно пружного шару. У цьому випадку замість (4.7) отримуємо

$$C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda_{nm}, \tag{4.9}$$

де компоненти матриці λ_{nm} визначають переміщення в вузлі n при дії базисного зусилля у вузлі m (тільки за рахунок деформування проміжного шару).

Наведені зауваження визначають напрямки розвитку відомих постановок без зміни загальної структури розв'язувальних співвідношень. У той же час представлені співвідношення в цілому не вичерпують постановку контактної задачі. Йдеться про те, що, виходячи з мікромеханіки контактної взаємодії шорстких тіл типу (2.5) або (2.7), приходимо до фізично нелінійної залежності в описі зміни нормальних переміщень від контактного тиску. До такого типу нелінійності призводять також фізично нелінійні моделі тонких плівок, напилень, прокладок тощо. Таким чином, потрібна розробка більш сучасних постановок, які враховують нелінійність у залежностях «нормальні переміщення – контактний тиск».

При аналізі контактної взаємодії складнопрофільних тіл з проміжним нелінійно пружним шаром пропонується здійснити розвиток раніше запропонованих методів і моделей для випадку гладких або шорстких тіл з лінійно-пружним вінклеровим шаром між ними (див. розд. 1).

Модель контакту тіл із розташованим між ними нелінійним вінклеровим шаром. Моделі, запропоновані раніше [220, 235, 239] і описані в розд. 1, мають, серед інших, ще й деяку додаткову цінну якість, що дає можливість «нарощувати» початкове ядро, доповнюючи його відповідно до нових врахованих чинників. Це зумовлено тим, що прийняті за основу співвідношення є нічим іншим, як умовами сумісності переміщень точок взаємодіючих у контакті тіл. Ці геометричні співвідношення у вихідному вигляді не залежать від фізико-механічних властивостей контактуючих тіл і виконуються в актуальному стані для будь-якої досліджуваної системи об'єктів. Вплив же пружних властивостей взаємодіючих тіл проявляється в кожному випадку у вигляді залежності переміщень точок їх поверхні від контактного тиску. Таким чином, з огляду на ті чи інші фізичні співвідношення, що зв'язують нормальні переміщення точок поверхонь з контактним тиском та іншими величинами (наприклад, описують вплив мастила, швидкості взаємного руху, температури тощо), можна істотно модифікувати вихідну математичну модель. При цьому не зачіпаються вихідний принцип і структура моделі самого «нижнього» рівня (для випадку гладких тіл). Модель нібито «обростає» новими компонентами, що у деяких випадках змінюють її якісно (за наповненням), але зі збереженням успадкованої початкової форми.

Так, для моделювання поведінки шорсткості або іншого пружного шару між контактуючими тілами можна застосувати не тільки лінійну модель, але і модель загального вигляду (що випливає з аналізу мікромеханіки контакту (див. розд. 1))

$$w \equiv u_z^{\wedge} = u_z^{\wedge}(p) \equiv w(p). \tag{4.10}$$

Зокрема, у низці робіт [175, 335–337] описана ступенева залежність (див. (2.7)) переміщень від контактного тиску (для урахування властивостей шорсткості). Можливі, доречні та реалізовні також й інші залежності, аби вони тільки адекватно описували властивості шорсткості, прокладок, напилення, плівок чи інших шарів між контактуючими тілами.

Тоді отримуємо, доповнюючи, наприклад, співвідношення (1.11), наступну систему в розгорненому і матричному вигляді відповідно:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{cases}
\sum\limits_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} + w(p_{m_c}) - \delta = -h_{n_c}, \; n_c \in N_c; \\
\sum\limits_{m_c \in N_c} \sqrt{3}/2 \cdot c^2 p_{m_c} = P; \quad p_{m_c} \ge 0;
\end{cases} \\
\begin{cases}
Cp + D(p) + h = \delta; \; \delta^- p = \dfrac{2\sqrt{3}}{3c^2} P; \; p \ge 0.
\end{cases}
\end{array}\right\} \tag{4.11}$$

Тут $D(p)$ – діагональна матриця з компонентами $w(p)$, C – матриця коефіцієнтів впливу, а $\delta^- = \{1;1;...,1\}$ – одиничний вектор-рядок.

Таким чином, вихідна система (4.11), що містить у лівій частині умов сумісності переміщень раніше [1, 2] тільки лінійні члени, приростає нелінійними складовими $w(p)$. Іншими словами, структурна нелінійність доповнюється фізичною, і в записі співвідношень верхнього рядка (4.11) здійснити пряму лінеаризацію, як прийнято у відомих постановках [333, 335, 409], у загальному випадку не видається можливим. У цьому – принципова відмінність цієї моделі, в роботі названої структурно-фізично нелінійною, від традиційних структурно нелінійних, але фізично лінійних.

Співвідношення (4.11) або їм аналогічні можуть бути отримані також із узагальнення варіаційного принципу Калькера

$$\begin{cases} \Phi(p) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{(S)} p u_z dS + \int\limits_{(S)} p(h-\delta) dS + \int\limits_{(S)} \left[\int\limits_0^p w(p) dp \right] dS \to \min; \\ p(\xi,\eta) \geq 0 \text{ в } S. \end{cases} \tag{4.12}$$

Тут третій доданок у виразі $\Phi(p)$ описує енергію деформування нелінійно пружного шару (для окремого випадку лінійно пружного шару маємо для цього вираз $\frac{1}{2}\int\limits_{(S)} \lambda p^2 dS$). Застосовуючи ту ж, що і в (1.14), квадратурну формулу (1.13), отримуємо співвідношення, аналогічні (4.11).

Таким чином, можна запропонувати досить універсальний спосіб побудови математичної моделі контактної взаємодії системи складнопрофільних тіл за наявності нелінійно деформівних проміжних шарів. Він полягає у формуванні функціоналу $\Phi(p)$, що містить енергію пружного деформування усіх компонентів системи. У силу адитивності функціонала $\Phi(p)$ така процедура не становить значної складності. При цьому кожний додатковий доданок в $\Phi(p)$ може привносити нові види нелінійності. Це буде проявлятися на етапі застосування гранично-елементної апроксимації та квадратурних формул для обчислення дискретизованого аналога цього функціоналу. Після накладання вимоги мінімізації вже дискретизованого функціоналу $\Phi(p)$ можна або отримати умови у вузлах дискретизації, або запропонувати процедуру мінімізації на невід'ємних значеннях вузлових величин контактного тиску.

Запропонований підхід до побудови математичної моделі контактної взаємодії володіє не тільки універсальністю, але і математичною строгістю, причому на всіх етапах досліджень. Він оперує із проблемою мінімізації варійованого функціоналу $\Phi(p)$ на опуклій множини невід'ємних вузлових значень контактного тиску *p*. Цим самим обходяться всі проблеми обґрунтування існування та єдиності розв'язку задач, їх збіжності та точності при використанні дискретизованих моделей [357, 409 та ін].

Модифікація запропонованих підходів до тіл скінченних розмірів. Підхід, розроблений і описаний вище для випадку контакту напівнескінченних тіл (тобто тіл, площа плями контакту яких набагато менше розмірів контактуючих тіл), може бути розширений і на випадок контактування відносно великого (напівнескінченного) тіла з тілом скінченних розмірів. На рис. 4.1 представлена схема такої взаємодії. Тут тіло Ω_1 закріплене, а між ним і напівнескінченним тілом Ω_2 міститься нелінійно пружний шар Ω_3. До такої системи застосуємо запропонований вище підхід із тією лише різницею, що змінюється спосіб подання функціоналу (4.12):

$$\Phi(p) = \Phi_1(p) + \Phi_2(p) + \Phi_3(p), \tag{4.13}$$

де $\Phi_i(p)$ – функціонали, відповідні вкладам компонент Ω_i:

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{2}\int\limits_{(S)} p u_z^{(1)} dS; \tag{4.14}$$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{2}\int\limits_{(S)} p u_z^{(2)} dS + \int\limits_{(S)} p(h-\delta) dS; \tag{4.15}$$

$$\Phi_3(p) = \int\limits_{(S)} \left[\int\limits_0^p w(p)dp\right] dS. \tag{4.16}$$

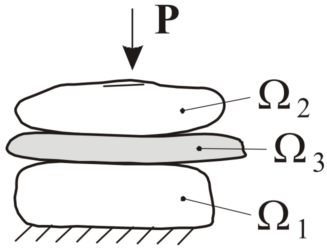


Рисунок 4.1 – Контакт із тілом скінченних розмірів

З огляду на, що тіло Ω_1 закріплене, нормальне переміщення його поверхні лінійно залежить від контактних навантажень, а функціонал $\Phi_1(p)$ є квадратичним. Однак, на відміну від (1.2), має місце більш складна залежність [354]:

$$u_z^{(1)}(x,y) = \int\limits_{(S)} p(\xi,\eta)\cdot G(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \tag{4.17}$$

де $G(x,y,\xi,\eta)$ – функція Гріна для крайової задачі визначення НДС тіла Ω_2, що визначає переміщення його точок на поверхні як функцію зосередженого навантаження у точці з координатами (ξ,η) (див. рис. 1.132, *в*).

Таким чином, у цьому випадку втрачається аналітичний зв'язок $u_z^{(1)}$ і *p*, оскільки для тіла в загальному випадку довільної форми побудова функції Гріна – складне завдання. Для вирішення цієї проблеми в роботі пропонується підхід, заснований на твердженні, що при дискретизації, аналогічній використовуваній вище, функціонал $\Phi_1(p)$ набуває вигляду:

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{2}\sum C_{n\,m}^{(1)} p_n p_m\,, \tag{4.18}$$

де $C_{n\,m}^{(1)}$ – коефіцієнти впливу, що визначають переміщення в вузлі n від дії тиску з розподілам базисної функції (див. рис. 1.12, *г, д*), що відповідає вузлу m.

Таким чином, втрачається простота обчислення компонент матриці коефіцієнтів впливу «за шаблоном». Однак сама структура матриці зберігається.

Залишається проблема обчислення цих самих коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(1)}$. Пропонується для цих цілей використовувати процедуру МСЕ. Дійсно, якщо на контактну поверхню S тіла 1 нанести трикутну сітку, аналогічно нанесеній гранично-елементній сітці, а далі згенерувати сітку призматичних або тетраедральних скінченних елементів, які «замощують» область Ω_1 (рис. 4.2), то при прикладанні навантаження у вузлі з індексом m можна зафіксувати за підсумками розв'язання за допомогою МСЕ нормальне переміщення у вузлі n. Це легко здійснити, зберігши обернену матрицю жорсткості МСЕ:

$$K \cdot X = f \Rightarrow X = K^{-1} f\,, \tag{4.19}$$

де K – матриця жорсткості скінченно-елементного ансамблю, яка описує поведінку тіла Ω_1 під вузловими навантаженнями f.

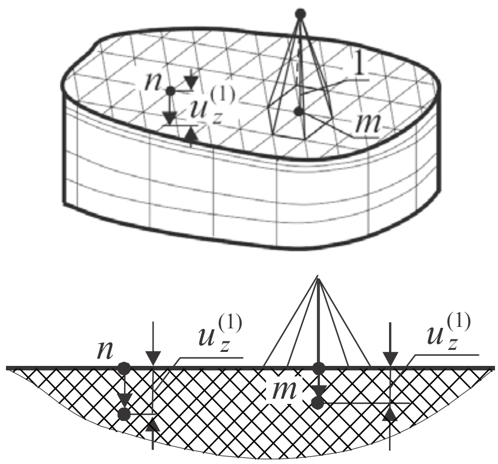


Рисунок 4.2 – До визначення коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(1)}$

Якщо у другому виразі у (4.19) взяти компоненту вузлового навантаження f, відповідну базисному одиничному розподілу тиску p (див. рис. 4.2), то для компонент вузлових переміщень, які відповідають нормальним переміщенням у вузлах n, отримуємо можливість визначення

$$C_{nm}^{(1)} = \kappa_m^{(n)} = K_{(n)(m)}^{-1} \cdot f_{(m)}\,. \tag{4.20}$$

Сукупність $\kappa_m^{(n)}$ формує матрицю впливу $C^{(1)}$.

Якщо ж у силу будь-яких міркувань застосування сітки скінченних елементів, що збігається з регулярною розбивкою S на трикутники, недоцільне, то можна застосувати розв'язок на іншій, відмінній від "породжуваної" описаним вище способом скінченно-елементної моделі, а потім коефіцієнти впливу можуть бути обчислені шляхом апроксимації отриманих результатів на трикутну сітку граничних елементів на границі S. Для обчислення же матриці коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(2)}$ застосовна звичайна процедура, використана вище.

Таким чином, у підсумку отримуємо матрицю коефіцієнтів впливу

$$C^{\vee} = C^{(2)} + C^{(1)}, \tag{4.21}$$

а співвідношення (4.11) зберігають свій вигляд, за винятком заміни C на $C^{\vee}$.

У результаті отримуємо узагальнення запропонованого в роботі підходу на більш широкий клас контактуючих тіл. Аналогічно цей підхід може бути поширений і на випадок контакту системи тіл скінченних розмірів з нелінійно пружними шарами між ними.

Модифікація системи розв'язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Розв'язувальна система співвідношень для аналізу контактної взаємодії СПТ (для випадку прикладання притискної сили **P**), породжувана чи то дискретизацією за методом точкових колокацій, чи то застосуванням квадратурних формул для обчислення функціоналу Калькера, що мінімізується, може бути перетворена шляхом «конденсації» співвідношень сумісності переміщень. Розглянемо кілька характерних випадків.

Випадок I. Контакт гладких тіл. Розглянемо розв'язувальну систему рівнянь у вигляді:

$$\left\{ Cp = \delta' - h; \ \sum_n p_n = P\frac{2\sqrt{3}}{3c^2} = P_I, \right. \tag{4.22}$$

де $\delta' = \delta \cdot \{1;1;...;1\}^T$ – вектор вузлових переміщень тіла як жорсткого, а $h = \{h_1; h_2; ...; h_N\}$ – вектор початкових вузлових зазорів.

Якщо $p = \{p_1; p_2; ...; p_N\}$ – вектор розв'язків ($p_i \geq 0 \ \forall i$), то, помножуючи ліву і праву частину рядка (4.22) на обернену матрицю C^{-1} і на вектор-рядок

$\delta^- = \{1; 1;...,1\}$ зліва, отримуємо:

$$p = C^{-1}\delta' - C^{-1}h; \qquad (4.23) \qquad \delta^- p = \delta^- C^{-1}\delta' - \delta^- C^{-1}h. \qquad (4.24)$$

Помітивши, що зліва в (4.24) вираз дорівнює правій частині нижнього рядка в (4.22) і вводячи позначення

$$A_I = \delta^- C^{-1}\delta' / \delta; \; B_I = \delta^- C^{-1} h, \qquad (4.25)$$

отримуємо для обчислення зміщення δ

$$\delta = \left(P_I + B_I\right) / A_I . \qquad (4.26)$$

Тоді, позначивши $\delta' = \delta \cdot \rho'$, отримуємо підсистему

$$Cp = \delta\rho' - h, \qquad (4.27)$$

де δ – відоме (із (4.26)).

Якщо піти далі, то (4.22) можна перетворити до вигляду

$$Cp = C^* p - H^* h - h, \qquad (4.28)$$

де діагональна матриця C^* складається з доданків $C_{nn} = \left(2\sqrt{3}/3c^2\right)/ A_I$, а матриця $H^* = (1/ A_I)\delta^- C^{-1}$. Тоді (4.28) приймає форму

$$\widetilde{C}p = h, \; \widetilde{C} = \left(H^* - E\right)^{-1}\left(C - C^*\right). \qquad (4.29)$$

Наведена «конденсація» дає можливість знизити на одиницю розмірність загальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Таким чином, здійснений перехід від задачі умовної мінімізації функціоналу $\Phi(p)$ (на множині з умовою типу рівності, див. нижній рядок в (4.22)) до задачі його безумовної мінімізації.

Випадок II. Контакт шорсткуватих тіл. Розв'язувальні співвідношення зазнають деяких змін. Зокрема, перше із співвідношень (4.22) набуває вигляду:

$$(C + \lambda E) p = \delta\rho' - h. \qquad (4.30)$$

Здійснюючи аналогічні здійсненим вище перетворення і вводячи позначення:

$$P_{II} = P_I; \; A_{II} = \delta^- (C + \lambda E)^{-1}\rho; \; B_{II} = \overline{\rho}(C + \lambda E)^{-1} h, \qquad (4.31)$$

отримуємо
$$\delta = (P_{II} + B_{II}) / A_{II}, \qquad (4.32)$$

і із системи (4.30) виключається невідоме δ.

Для цього випадку з (4.30) можна виключити, записавши, аналогічно (4.28) і (4.29), співвідношення

$$(C+\lambda E)p = C^{**}p - H^{**}h - h\,,\; C^{**}_{nn} = \left(2\sqrt{3}/3c^2\right)/A_{II}\,,\; H^{**} = (1/A_{II})\delta^{-}(C+\lambda E)^{-1}, \quad (4.33)$$

$$\tilde{\tilde{C}}p = h\,,\; \tilde{\tilde{C}} = \left(H^{**} - E\right)^{-1}\left(C + \lambda E - C^{**}\right). \quad (4.34)$$

Випадок III. Урахування фізичної нелінійності за методом додаткових зазорів. У цьому випадку на кожному кроці ітераційного уточнення розв'язку доводиться розв'язувати систему рівнянь (див. підразд. 4.2)

$$Cp = \delta\rho' - \left(h + w(p)\right), \quad (4.35)$$

де $w(p)$ – залежність для визначення «повузлового» обтискання проміжного нелінійного шару. Для виключення δ застосуємо співвідношення із позначеннями

$$P_{III} = P_I;\; A_{III} = A_I\,;\; B_{III} = \overline{\rho}\,C^{-1}\left(h + w(p)\right), \quad (4.36)$$

і тоді

$$\delta = (P_{III} + B_{III})/A_{III}\,. \quad (4.37)$$

Випадок IV. Урахування фізичної нелінійності за методом змінних параметрів податливості. На кожному кроці ітераційного уточнення розв'язку породжуються рівняння (див. підрозд. 4.3)

$$\left[C + D'(p)\right]p = \delta\rho' - h\,, \quad (4.38)$$

де $D'(p)$ – діагональна матриця, яка містить на головній діагоналі параметри податливості, що залежать від *p*. Тоді для виключення δ будуємо низку рівнянь:

$$P_{IV} = P_I;\; A_{IV} = \rho^{-}(C + D')^{-1}\rho';\; B_{IV} = \overline{\rho}(C + D')^{-1}h\,, \quad (4.39)$$

і аналогічно до наведеного вище –

$$\delta = (P_{IV} + B_{IV})/A_{IV}\,. \quad (4.40)$$

Аналіз співвідношень (4.26), (4.32), (4.37) і (4.40) показує, що їхня структура однакова, але наповнення їх, за винятком $P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}$, відрізняється. Проте, у кожному випадку задача (або окремий крок ітераційного процесу), зводиться до системи рівнянь, відповідних умові мінімізації квадратичного функціоналу Калькера $\Phi(p)$ на невід'ємних *p*. Таким чином, задача з обмеженням типу рівності і нерівностей перетвориться до задачі з обмеженнями тільки типу нерівностей.

Геометрична параметризація актуального стану контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Для кількісного опису актуального стану контактуючих тіл можна звернутися до співвідношень сумісності переміщень у вузлах тріангуляції їх контактуючих поверхонь. Ці умови можна подати у вигляді

$$Cp + D'(p) \cdot p + h = \delta' . \tag{4.41}$$

Тут C – матриця коефіцієнтів впливу, $D'(p)$ – діагональна матриця, що описує нелінійну податливість проміжного шару, $D(p) = D'(p)p$, h – масив початкових зазорів у сполученні складнопрофільних тіл, а $\delta' = \delta \cdot \{1;1;...;1\}^T$ – масив із зближень нескінченно віддалених точок взаємодіючих тіл.

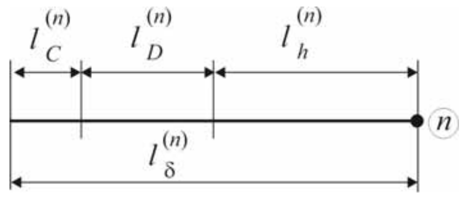


Рисунок 4.3 – До геометричного змісту рівнянь

Таким чином «повузлова» геометрична інтерпретація (4.41) може складатися у рівність

$$l_C + l_D + l_h = l_\delta,\ n \in J, \tag{4.42}$$

де складові в (4.42) покомпонентно відповідають складовим у (4.41).

На рис. 4.3 представлена ілюстрація умов сумісності у вузлі n. Індексуючи співвідношення (4.42), можна відзначити, що у кожному вузлі маємо

$$l_C^{(n)} / l_\delta^{(n)} + l_D^{(n)} / l_\delta^{(n)} + l_h^{(n)} / l_\delta^{(n)} = 1. \tag{4.43}$$

сумісності переміщень у вузлі n

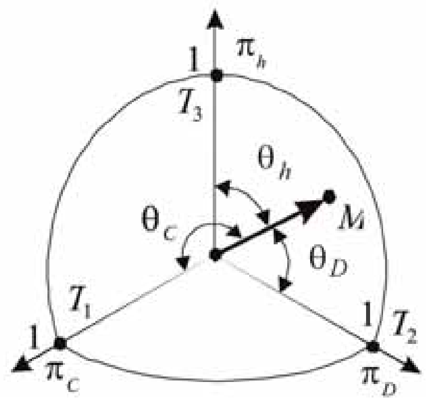


Рисунок 4.4 – Одинична сфера в координатах π_C; π_D; π_h

З огляду на, що в силу прийнятих обмежень усі складові в (4.42) є ненульовими додатними числами, співвідношення (4.43) можна подати як рівняння одиничної сфери в першому октанті координат $\pi_C = \sqrt{l_C / l_\delta}$; $\pi_D = \sqrt{l_D / l_\delta}$; $\pi_h = \sqrt{l_h / l_\delta}$ (рис. 4.4):

$$\cos^2 \theta_C + \cos^2 \theta_D + \cos^2 \theta_h = 1. \tag{4.44}$$

Будь-яку точку M на одиничній сфері (див. рис. 4.4) можна задати за допомогою кутів ψ_n, τ_n (рис. 4.5):

$$\theta_h^{(n)} = \psi_n;\ \cos\theta_C^{(n)} = \sin\psi_n \cdot \cos\tau_n;\ \cos\theta_D^{(n)} = \sin\psi_n \cdot \sin\tau_n . \tag{4.45}$$

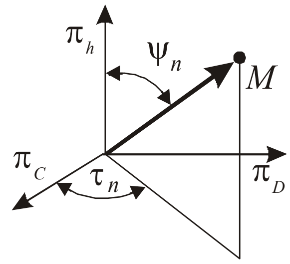


Рисунок 4.5 – До параметризації точки M (див. рис. 4.4)

Зміна кутів ψ, τ в межах $[0;\ \pi/2]$ вичерпує всі можливі поєднання вкладів «глобальної» (визначається матрицею C) податливості (виникає внаслідок деформування СПТ як гладких), «локальної» податливості (виникає через обтискання шару шорсткості чи іншого проміжного шару – залежить від розподілу λ) і початкового зазору у сполученні тіл у загальне «вузлове зближення». При цьому точка T_1 відповідає граничному випадку, коли початковий зазор – нульовий, а проміжний шар відсутній; точка T_2 визначає випадок контакту абсолютно жорстких і гладких тіл з нульовим зазором між ними і з податливим проміжним шаром; точка T_3 індикує границю зони контакту, тобто нульовий контактний тиск і локальну вибірку початкового зазору за рахунок зміщення контактуючих тіл як жорстких (див. рис. 4.4). Дуга $T_1 T_2$ (див. рис. 4.4) визначає контакт тіл при нульовому початковому зазорі, дуга $T_2 T_3$ описує контакт твердих тіл за наявності пружного проміжного шару, а дуга $T_3 T_1$ задає деформування гладких тіл у контакті. Довільна ж точка *M* (див. рис. 4.4) є певною довільною ж реалізацією умов контакту системи тіл із проміжним шаром.

Природно, що положення характерної точки *M* (див. рис. 4.4) отримується для кожного вузла виходячи з розв'язку загальної системи співвідношень типу (4.41). Таким чином, кути ψ і τ, а, значить, і положення точки *M*, є «апостеріорними» характеристиками поточного стану балансу переміщень різного походження в певному вузлі n. Варіюючи ті чи інші властивості системи (розподіл початкового зазору h, притискне зусилля *P*, фізико-механічні властивості контактуючих пружних тіл або проміжного шару), можна очікувати безперервного переміщення точки *M* на одиничній сфері уздовж траєкторії $L^{(n)}$ (рис. 4.6), що задається кутами

$$\psi = \arccos\left(\sqrt{l_h / l_\delta}\right), \quad \tau = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{l_D / l_C}\right). \quad (4.46)$$

Траєкторії $L^{(n)}$ можуть подаватися у різних координатах $\pi_C, \pi_D, \pi_h, \psi, \tau$. Отримувані зрізи можуть свідчити про тенденції у зміні поведінки розв'язку в тому чи іншому вузлі n.

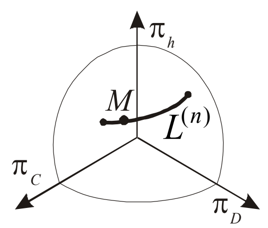


Рисунок 4.6 – Траєкторія $L^{(n)}$ руху точки *M* при варіюванні деякого параметра (властивості) у досліджуваній системі контактуючих СПТ

З іншого боку, цей підхід можна поширити на інтегральний стан умов контактної взаємодії досліджуваної системи тіл. Дійсно, множачи зліва і справа (4.41) на вектор-рядок $\delta^- = \delta \cdot \{1;1;...;1\}$, отримуємо

$$\delta^- Cp + \delta^- D(p) \cdot P + \delta^- h = \delta^- \delta' . \quad (4.47)$$

Помноживши далі ліву і праву частину (4.47) на $c^2\left(\sqrt{3}/2\right)$, отримуємо (відповідно покомпонентно)

$$V_C + V_D + V_h = V_\delta. \qquad (4.48)$$

Геометричний сенс компонент (4.48) видно з рис. 4.7. Він полягає в тому, що якщо застосувати до обчислення об'ємів, які замітаються зміщеннями контактної поверхні на величини l_C, l_D, l_h і l_δ (взятих у всій їх множині), квадратурну формулу з вагою $c^2\left(\sqrt{3}/2\right)$ в кожному вузлі і з поширенням на шестикутник S_6 із центром у цьому вузлі), то отримуємо наступну тотожність: сума об'ємів V_C, V_D, V_h дорівнює об'єму V_δ. Вводячи аналогічно вищенаведеним «вузловим» тепер уже «інтегральні» координати:

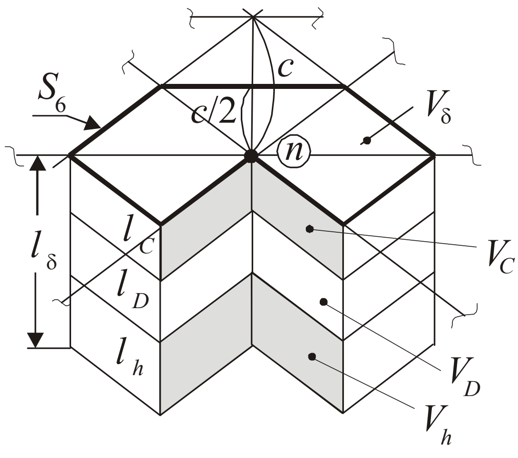


Рисунок 4.7 – До геометричного змісту співвідношень (4.48) (вирізана 1/6 частина)

$$\pi_C = \sqrt{V_C / V_\delta};\ \pi_D = \sqrt{V_D / V_\delta};\ \pi_h = \sqrt{V_h / V_\delta}, \qquad (4.49)$$

приходимо до подібних раніше отриманих співвідношень:

$$\begin{cases} \cos^2\theta_C + \cos^2\theta_D + \cos^2\theta_h = 1; \\ \theta_h = \psi;\ \cos\theta_C = \sin\psi\cdot\cos\tau;\ \cos\theta_D = \sin\psi\cdot\sin\tau. \end{cases} \qquad (4.50)$$

У (4.49), (4.50) присутні інтегральні (тобто не індексовані за номером вузла n, а за ними – сумарні) співвідношення величин, що характеризують баланс об'ємів V_C, V_D, V_h і V_δ.

На аналогічній «вузловим», але тепер уже – «інтегральній» одиничній сфері (див. рис. 4.4) при варіюванні тих чи інших параметрів (фізико-механічних властивостей матеріалів, притискних зусиль, профілів контактуючих поверхонь) так само, як і для окремих вузлів, прокреслюються характерні «інтегральні» траєкторії L. Ці траєкторії в деякому сенсі «породжуються» множиною траєкторій $L^{(n)}$, проходячи деяким чином всередині області, займаної усім сімейством цих кривих (якщо ототожнити між собою всі одиничні (і «повузлова», і «інтегральну») сфери у своїх координатах).

У багатьох випадках зручно використовувати траєкторії L для наочного відображення залежностей деяких характеристик від варійованих параметрів. Із цією метою можна ввести деяку «кількісно посилочну» (номінальну – nom) конфігурацію системи, що задається деяким визначеним набором параметрів (зазори, зусилля, властивості матеріалів тощо). Далі цей набір параметрів розбивається на дві групи: варійовані (var) – $p_k^{(v)}$ і постійні (const) – $p_\gamma^{(c)}$. Група варійованих параметрів параметризується за допомогою величин

$$t_m(p_m^{(v)}) = \operatorname{arctg}\left(p_m^{(v)} / p_m^{nom}\right). \tag{4.51}$$

У цьому випадку границі зміни $t_m \in \left]-\pi/2; \pi/2\right[$ або $t_m \in \left[0; \pi/2\right[$, тобто скінченні, причому значення $t_m = \pi/4$ відповідає номінальному варіанту.

Після такого подання варійованих величин можна параметризувати контрольовані характеристики $\widetilde{h}_i$ (наприклад, розмір плями контакту, максимальні контактний тиск, напруження, переміщення тощо, віднесені до таких за номінальних значеннях параметрів) і безпосередньо будувати залежності

$$h_i^\wedge \equiv \operatorname{arctg}\left(\widetilde{h}_i(t_m) / \widetilde{h}(\pi/4)\right) = h^\wedge(t_m). \tag{4.52}$$

Тут і аргументи t_m, і функції $h^\wedge$ укладені у скінченному інтервалі варіювання, що зручно для візуалізації отриманих характеристик. З іншого боку, можна спочатку на одиничній сфері (див. рис. 4.4) побудувати траєкторію $L(t_m)$ в межах від $t_m = t^{(0)}$ (точка M_0) до $t_m = t^{(k)}$ (точка M_k) (рис. 4.8). На цій кривій можна ввести параметризацію, схожу з природною параметризацією кривих

$$l_m^\wedge(t_m) = \operatorname{arctg}\left(l_{M_0M}(t_m) / l_{M_0M_k}\right). \tag{4.53}$$

При цьому $l_m^\wedge \in \left[0; \pi/2\right]$. Потім на введеному параметрі $l_m^\wedge$ можна будувати будь-які залежності

$$h_i^\wedge = h_i^\wedge\left(l_m^\wedge\right). \tag{4.54}$$

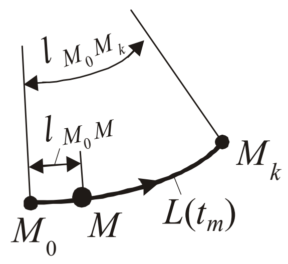


Рисунок 4.8 – До параметризації траєкторії $L(t_m)$

Перевагою (4.51) є тісний зв'язок цієї параметризації з фізичним змістом того чи іншого параметра, у той час як (4.53) має ту зручну якість, що межі зміни всіх $h_i^\wedge$ – однакові, тобто можливо відобразити на одному графіку залежності різних характеристик від різних змінних параметрів в єдиному діапазоні варіювання останніх. Диференціювання одержуваних залежностей дає інформацію про чутливість тих чи інших характеристик до варіювання певних параметрів.

Чутливість розподілу контактного тиску до зміни варійованих величин. При зміні варійованих параметрів (притискного зусилля, фізико-механічних характеристик матеріалів тіл, профіля контактних поверхонь – див. вище), крім контрольованих чисельних характеристик (максимальні контактні тиску, розміри плями контакту тощо), змінюються також і характери розподілу. У першу чергу можна виділити два з них: форма плями контакту і розподіл контактного тиску. Представляють інтерес разом із цим два пов'язаних один з одним аспекти: параметризація згаданих розподілів і визначення чутливості до варіювання того чи іншого параметра.

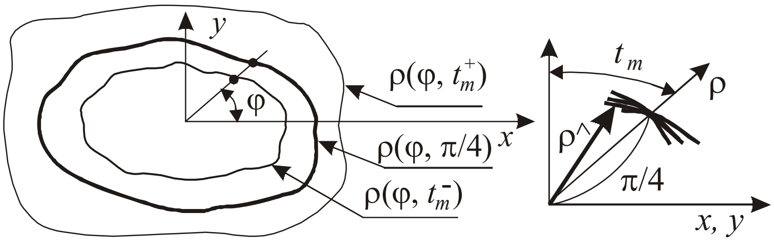


Рисунок 4.9 – До параметризації форми плями контакту

Що стосується параметризації форми і розмірів плями контакту, то в цьому випадку, як і раніше, зручно ввести номінальну конфігурацію системи, відхилення від якої характеризувати зміною безрозмірних параметрів типу (4.51). Далі можна побудувати параметричне сімейство залежностей (рис. 4.9):

$$\rho^\wedge(\varphi, t_m) = \operatorname{arctg}\bigl(\rho(\varphi, t_m)/\rho(\varphi, \pi/4)\bigr). \tag{4.55}$$

Ці поверхні містять повну інформацію про зміну форми і розмірів плями контакту при варіюванні t_m. Переходячи до сферичної системи координат, можна будувати поверхні (див. рис. 4.9)

$$\rho^\wedge = \rho^\wedge(\varphi,\ t_m),\ \varphi \in [0;\ 2\pi[,\ \ t_m \in [0;\ \pi/2[. \tag{4.56}$$

Для параметризації опису зміни розподілу контактного тиску можна ввести в розгляд наступні параметри:

$$\left\{ r^\wedge = \operatorname{arctg}\bigl(r(\varphi, t_m)/r(\varphi, \pi/4)\bigr);\ z^\wedge = \operatorname{arctg}\bigl(z(r, \varphi, t_m)/z(r, \varphi, \pi/4)\bigr). \right. \tag{4.57}$$

Тут границі зміни $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r^\wedge \in \{0; \rho^\wedge\}$, $z^\wedge \in [0; \pi/2]$, $t_m \in [0;\ \pi/2[$. У результаті сімейство поверхонь

$$z^\wedge = z^\wedge(r^\wedge, \varphi, t_m) \tag{4.58}$$

визначає характер залежності розподілу контактного тиску від варійованих параметрів t_m (рис. 4.10). Будь-який із перетинів $r^\wedge = const$, $\varphi = const$, $t_m = const$ дає можливість побудувати у сферичній системі координат відповідні перетину залежності (4.58) в обмежених межах зміни і аргументу, і функції. Природно, що отримувані функціонально-параметричні залежності (4.56), (4.58), хоча і вимагають великої кількості розв'язання задач аналізу контактної взаємодії, проте містять досить повну інформацію про розподіл і границь плям контакту, і контактного тиску. У той же час найчастіше потрібне визначення тенденцій і швидкості зміни цих залежностей при варіюванні деяких параметрів. Для цього необхідно провести диференціювання отриманих залежностей за варійованими параметрами.

Як зауваження слід зазначити, що якщо отримані розподіли (до речі, як і раніше визначені контрольовані характеристики) визначені у дискретному наборі точок чисельним шляхом, то для обчислення чутливості доречно використовувати скінченно-різницеву апроксимацію

$$\partial *(t_i)/\partial t_i \approx \left[*(t_i \pm \Delta t_i) \mp *(t_i)\right]/\Delta t_i, \qquad (4.59)$$

де * – характеристика або функція (розподіл), реакція яких на зміну параметрів досліджується. Отримані величини і розподіли чутливості відображають тенденції та швидкості зміни величин, що представляють інтерес до варіювання тих чи інших параметрів. Також слід зауважити, що для отримання пропорційних величин замість самих величин в (4.59) можна обчислювати їх arctg.

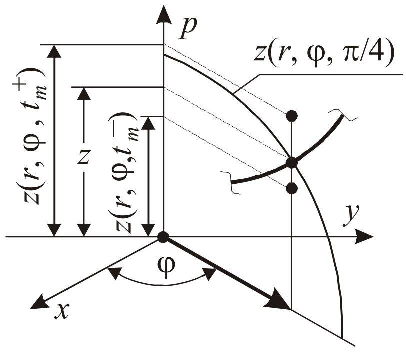


Рисунок 4.10 – До параметризації розподілу контактного тиску

Аналіз представлених в підрозділі матеріалів надає підґрунтя для наступних висновків:

1. У результаті розроблений принципово новий підхід до формування розв'язувальної системи співвідношень для аналізу НДС складнопрофільних тіл із урахуванням їх контактної взаємодії, причому беручи до уваги особливості цього типу контакту (на відміну від випадків контакту за узгодженими і неузгодженими поверхнями [220], він визначається як випадок з майже співпадаючими поверхнями СПТ). Запропонований підхід, на відміну від традиційних (які орієнтовані на створення математичної моделі контактної взаємодії для окремо взятої задачі), націлений на єдину технологію генерування математичних моделей для цілого класу об'єктів – СПТ за наявності між ними нелінійно-пружного шару. При цьому створюється ланцюг моде-

лей, ядро і відправна ланка яких – співвідношення для випадку контакту напівнескінченних гладких СПТ. Далі на них нашаровуються, по мірі урахування нових елементів або чинників, наступні компоненти, приводячи в систему розв'язувальних співвідношень додаткові члени, які відображають ті чи інші характерні фізичні залежності. Цим самим розроблена математична модель відкритої структури, а також спосіб її поповнення у міру ускладнення досліджуваної системи контактуючих об'єктів.

2. У роботі обґрунтована еквівалентність локальної, гранично-інтегральної та варіаційної постановок досліджуваної задачі про контакт складнопрофільних тіл в їх дискретному варіанті. Таким чином, можлива побудова ідентичних розв'язувальних співвідношень на основі методу поточкової колокації граничних інтегральних рівнянь, з одного боку, або на основі дискретизації функціоналу Калькера із застосуванням певних квадратурних формул для його обчислення, – з іншого.

3. Для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл з нелінійним пружним проміжним шаром отримані структурно-фізично нелінійні співвідношення. На відміну від традиційних, вони містять в записі умов сумісності переміщень на контактуючих поверхнях не тільки лінійні, але й нелінійні члени. При цьому, від традиційних нелінійних рівнянь їх відрізняє те, що сама множина невідомих – не фіксована, як у багатьох випадках, а змінна і уточнювана в ході розв'язання. Ця особливість вимагає розробки нових методів розв'язань цих систем рівнянь.

4. У підрозділі встановлена нова геометрична інтерпретація балансу переміщень у контакті складнопрофільних тіл за наявності проміжного шару. Для цього розглядаються складові, породжувані, по-перше, «глобальною» податливістю контактуючих СПТ, по-друге – «локальною» податливістю проміжного шару, по-третє – початковим зазором. Їх сума постійна у межах області контакту і дорівнює загальному зближенню тіл. Це дає можливість ввести одиничну сферу, кожна точка якої відповідає певному поєднанню «глобальних», «локальних» переміщень і початкового зазору. Крім «повузлових» характеристик, можна ввести аналогічну «інтегральну», яка відображає баланс об'ємів, займаних «глобальними» і «локальними» переміщеннями, а також початковим зазором, в загальному «об'ємі зближення» контактуючих тіл. Для ідентифікації точок на одиничній сфері запропоновані два кутових параметри, що дає можливість все різноманіття поєднання балансів відобразити у

скінченному діапазоні варіювання цих кутових параметрів в першому октанті побудованої одиничної сфери.

5. У роботі запропонований спосіб інтерпретації еволюції картин розподілу контактного тиску у сполученні СПТ у вигляді зміни розмірів і форми плями контакту, з одного боку, і трансформації «купола» розподілу тиску, – з іншого. Це дає можливість визначити якісні особливості та тенденції, кількісно оцінити напрямок та інтенсивність зміни розмірів і форми плями контакту, а також контактного тиску при варіюванні тих чи інших параметрів. На цій основі може бути виконаний аналіз доцільності тієї чи іншої постановки оптимізаційних задач.

Таким чином, можна зробити висновок, що в підрозділі сформована нове математичне формулювання задачі про контакт складнопрофільних тіл із урахуванням нелінійних мікромеханічних властивостей розташованих між ними проміжних шарів шорсткості, плівок, напилень, прокладок тощо. Отримані співвідношення багато в чому відрізняються від традиційних нелінійних рівнянь, що висуває задачу розробки нових ефективних методів їх розв’язання (див. підрозд. 4.3).

4.3 Методи розв’язання структурно та фізично нелінійних задач контактної взаємодії

У підрозд. 4.2 описана нова математична модель НДС і контактної взаємодії СПТ – гладких, шорсткуватих і тіл за наявності між ними у загальному випадку нелінійних пружних шарів. При цьому в результаті отримуємо структурно-фізично нелінійну систему співвідношень. Для розв’язання цієї системи співвідношень необхідно розробити нові методи, оскільки традиційні орієнтовані на розв’язання контактних задач з лінійно пружними компонентами. Якщо як приклад, не знижуючи загальності, прийняти нелінійну модель пружного шару, що моделює шорсткість контактуючих тіл або нелінійність проміжного шару, вигляду [339]

$$w = \bar{\lambda} \cdot p^{s}, \qquad (4.60)$$

де $\bar{\lambda}, s$ – деякі емпіричні або обчислювані параметри, то, як зазначалося вище, зміниться сам вигляд рівнянь сумісності переміщень точок контактуючих поверхонь взаємодіючих тіл (з лінійних вони перетворяться у нелінійні).

Таким чином, структурні нелінійності, тобто умови контактної взаємодії у вигляді умов непроникнення взаємодіючих тіл одне в одне, які в першому наближенні традиційно містять тільки лінійні функції від переміщень [230, 235], доповнюються в разі моделі (4.60) (чи іншої) нелінійними складовими (див. підрозд. 4.2). У результаті формально співвідношення сумісності можна звести до системи нелінійних рівнянь. Таким чином, виникає задача розробки методів розв’язання таких задач, що і складає, як уже зазначалося, мету даного підрозділу.

Метод додаткових зазорів. Якщо записати співвідношення сумісності переміщень, що входять в систему (4.11), у вигляді підсистеми

$$C\,p = \delta - h - \bar{\lambda} q;\;\; q = \left\{p_1^s, p_2^s, ..., p_N^s\right\}^T, \tag{4.61}$$

то формально її можна подати як

$$C\,p = \delta - \bar{h}\,,\; \bar{h} = \bar{h}(p) = h + \bar{\lambda} q = h + \Delta h(p)\,. \tag{4.62}$$

Тоді співвідношення (4.62) формально повторюють лінійні співвідношення в (4.11), але в яких початковий зазор h доповнений деякими компенсаційними складовими $\Delta h(p)$. За аналогією з методом додаткових навантажень [351] ці складові можна назвати додатковими зазорами.

Рівняння (4.62) є нелінійним операторним рівнянням, для якого дійсний розподіл контактного тиску є нерухомою точкою оператора повної системи рівнянь $\mathrm{K}\{h,\delta\}^T = \{h,P\}^T$ за умов $p \ge 0$. Таким чином, можна організувати ітераційний процес:

$$\begin{cases} \tau := 0; & (*) \\ p^{(\tau)} := 0; & (**) \\ q^{(\tau)} = \left\{\left[p_1^{(\tau)}\right]^S, ... \left[p_N^{(\tau)}\right]^S\right\}^T; & (***) \\ \Delta h^{(\tau)} = \bar{\lambda} q^{(\tau)}; & (\wedge) \\ \bar{h}^{(\tau)} = h^{(0)} + \Delta h^{(\tau)}; & (\wedge\wedge) \\ \left\{p^{(\tau)}, \delta^{(\tau)}\right\}^T = \mathrm{K}^{-1}\left\{\bar{h}^{(\tau)}; P\right\}^T; & (\wedge\wedge\wedge) \\ \tau := \tau + 1. & (:) \end{cases} \tag{4.63}$$

В (4.63) величини P, q, h, δ беруть участь в ітераційному уточненні розв’язку (^^^). При цьому $h^{(0)}$ – вектор початкових (номінальних) зазорів між поверхнями контактуючих тіл. Ітерації здійснюються у межах циклу $(***)\to(:)\to(***)$. Умовою закінчення цього процесу може бути або критерій щодо уточнення додаткових зазорів, або – тиску:

$$\left\{\Delta_h^{(\tau)} = \left\|\Delta h^{(\tau)} - \Delta h^{(\tau-1)}\right\| / \left\|\Delta h^{(\tau)}\right\| \le \varepsilon_h;\ \Delta_p^{(\tau)} = \left\|\Delta p^{(\tau)} - \Delta p^{(\tau-1)}\right\| / \left\|\Delta p^{(\tau)}\right\| \le \varepsilon_p. \right. \quad (4.64)$$

Тут $\Delta_h^{(\tau)}, \Delta_p^{(\tau)}$ – контрольовані параметри збіжності процесу, $\varepsilon_h, \varepsilon_p$ – наперед задані порогові значення відповідно для $\Delta_h^{(\tau)}, \Delta_p^{(\tau)}$, після досягнення яких згаданий ітераційний процес припиняється; а $\|\bullet\|$ – деяка норма (наприклад, евклідова або чебишевська) для оцінки величин векторів. Крім того, можна також контролювати ітераційний процес за швидкістю зміни $\delta^{(\tau)}$:

$$\Delta_\delta^{(\tau)} = \left|\delta^{(\tau)} - \delta^{(\tau-1)}\right| / \left|\delta^{(\tau)}\right| \le \varepsilon_\delta, \quad (4.65)$$

де зміст величин відповідає введеним в (4.64). Таким чином, розв’язок поставленої задачі еквівалентний розв’язку задачі (4.11) для контакту гладких тіл, але зі скоригованим розподілом зазорів. Природно, що сама область контакту внаслідок введення нелінійного пружного шару змінюється, тому задоволення в ході ітераційного уточнення вимагають не тільки умови типу рівності для переміщень в області контакту і тиску – поза нею, а й умови типу нерівності для тиску всередині області контакту і щодо переміщень – поза областю. У (4.11) всі вони сформульовані щодо шуканих p_n. У ході цього процесу змінюється відповідно множина $J^{(\tau)}$ вузлів, які відповідають умовам (4.11) на τ–му кроці ітераційного процесу. Таким чином, уточнюється і сама область контакту $S^{(\tau)}$. Саме по собі зрозуміле виконання рівняння $\sqrt{3}/2 \cdot c^2 \sum\limits_m p_m = P$.

Розв’язання задачі визначення контактного тиску за алгоритмом (4.63) вимагає обернення матриці з підматрицею *C*. Для підвищення чисельної стійкості у деяких випадках може бути доцільно модифікувати розв’язувальну систему рівнянь шляхом додавання в ліву і праву частини співвідношень (4.62) додаткових лінійних доданків. У цьому випадку результуюча система співвідношень, а також ітераційна процедура (4.63), залишаються незмінними.

Метод змінних коефіцієнтів впливу. Подавши рівняння сумісності переміщень в системі (4.11) за наявності на границі тіл вінклерова шару (4.60) у вигляді

$$C\,p + \left(\bar{\lambda} p^{(s-1)}\right)\cdot p = \delta - h, \tag{4.66}$$

і ввівши позначення $\bar{\bar{\lambda}}(p) = \bar{\lambda} p^{(s-1)}$, за аналогією з методом змінних параметрів пружності [343] (4.66) можна переписати у вигляді

$$\bar{\bar{C}}\,p = \delta - h, \bar{\bar{C}}(p) = C + \bar{\lambda}\cdot E \text{ (} E \text{ – одинична матриця).} \tag{4.67}$$

Для розв'язання (4.67) можна організувати ітераційний процес:

$$\begin{cases} \beta := 0; & (*) \\ \bar{\bar{C}}^{(\beta)} := C; & (**) \\ \mathrm{K}^{(\beta)} = \mathrm{K}\left(\bar{\bar{C}}^{(\beta)}\right); & (***) \\ \Pi^{(\beta)} = \{p^{(\beta)}, \delta^{(\beta)}\}^T = \left(\mathrm{K}^{(\beta)}\right)^{-1}\cdot \mathrm{H} = \left(\mathrm{K}^{(\beta)}\right)^{-1}\cdot \{h, P\}^T; & (\wedge) \\ \left.\begin{array}{l} J^{(\beta)} : \{p_n \geq 0\ \forall n \in J^{(\beta)};\ p_n = 0\ \forall n \notin J^{(\beta)}; \\ \Delta_n = 0\ \forall n \in J^{(\beta)}; \Delta_n \geq 0\ \forall n \notin J^{(\beta)}\}; \end{array}\right\} & (\wedge\wedge) \\ \bar{\bar{C}}^{(\beta)} := C + \bar{\lambda}\left[p^{(\beta)}\right]^{(s-1)}\cdot E; & (\wedge\wedge\wedge) \\ \beta := \beta + 1. & (:) \end{cases} \tag{4.68}$$

У (2.68) ітераційний процес йде у послідовності $(***) \to (:) \to (***)$. При цьому етап $(***)$ означає складання матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\mathrm{K}^{(\beta)}$ за скоригованою на етапі (^^^) підматрицею $\bar{\bar{C}}^{(\beta)}$ (тобто аналогічно K в (4.63), але з підматрицею $\bar{\bar{C}}$ замість *C*), причому множина контактуючих вузлів $J^{(\beta)}$ уточнюється на етапі (^^). Припинення ітераційного процесу (4.67) можна здійснювати за умовою стабілізації ітераційного наближення множина вузлів, у яких реалізується контакт:

$$J^{(\beta)} = J^{(\beta-1)}. \tag{4.69}$$

Представлений алгоритм (2.68) відрізняється від алгоритму (4.63) тим, що перебудові піддається не права частина системи рівнянь при незмінній за структурними компонентами підматріцею *C*, а, навпаки, змінюється сама матриця, в той час як права частина – постійна.

Запропонований підхід можна трактувати як узагальнення (4.7), а саме: у ході розв'язання (4.67) за алгоритмом (4.68) визначається такий розподіл на вузлах сітки коефіцієнтів податливості $\lambda_n\,(n \in J)$ лінійно пружного Вінклерова шару з нерівномірною за площею контакту жорсткістю, що розв'язок задачі з матрицею

$$C: C_{nm} = C_{nm} + \lambda_n \cdot \delta_{nm},\ \delta_{nm} = \{0,\quad m \neq n,\quad 1,\quad m = n \tag{4.70}$$

дає той же розподіл контактного тиску, що і в разі нелінійно пружного шару (4.60).

Зауваження: а) зазначена тут для обох методів незмінність матриці або правої частини дотримується в межах незмінності множини контактуючих вузлів. У іншому випадку перебудові піддаються всі компоненти підматриці впливу і відповідного підвектора правих частин; б) запропоновані вище методи додаткових зазорів і змінних коефіцієнтів впливу є всього лише окремими випадками розв'язання задачі про контактну взаємодію двох шорсткуватих тіл, модельованих півпростором з нелінійним вінклеровим шаром, розташованим на границі: описані лише два частинних методи з множини можливих до застосування для розв'язання систем нелінійних рівнянь; при цьому необхідно відзначити, що вони мають наочне фізичне трактування, яке не завжди наявне при використанні інших методів; використана лише степенева модель для опису властивостей шару шорсткості на контактуючих поверхнях, хоча в літературі міститься багато інших залежностей «переміщення – контактний тиск»; тут доречно, однак, відзначити, що степенева залежність досить часто застосовується для розв'язання множини прикладних задач [335] зі збереженням прийнятної точності; також можна повторно відзначити, що такий вибір у вигляді ступеневої залежності $w(p)$ не знижує загальності підходу.

Слід зауважити, що збіжність алгоритмів [422] (4.63), (4.68) залежить від властивостей нелінійно-пружного шару (тут – від параметрів $\bar{\lambda}, s$ в (4.60)).

Розглянемо врешті загальну постановку задачі про контактування шорсткуватих тіл, модельованих напівпростором. Відволікаючись від виду залежності «*w*–*p*», її у загальному випадку можна подати у вигляді:

$$w = w(p). \tag{4.71}$$

Ця залежність може мати складний характер у зв'язку з урахуванням різних чинників, бути найрізноманітнішою за способом використовуваних статистичних моделей для опису форми мікронерівностей або за використовуваним типом моделі одиничної мікронерівності в контакті, а також випливати з обробки масиву експериментальних даних тощо [330, 333, 335, 423]. Ці залежності не вичерпують усієї множини типів співвідношень (4.71), а лише ілюструють їх різноманіття. Тоді система розв'язувальних рівнянь, дискретизованих за методом граничних елементів, може бути подана у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + w(p_n) = \delta - h_n, \ n \in J; \ m \in J; & (i) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_n p_n = P, \ n \in J; & (ii) \\ p_n \geq 0, \ n \in J; & (iii) \\ p_n = 0, \ n \notin J; & (iiii) \\ \sum C_{nm} p_m < \delta - h_n, \ n \notin J; & (iiiii) \end{cases} \tag{4.72}$$

Цю систему співвідношень можна трактувати як нелінійну систему рівнянь (*i*), (*ii*) щодо вектора невідомих $\{p, \delta\}^T = \Pi$ за обмежень (*iii*), (*iiii*), (*iiiii*), що одночасно формують і кількість вузлів J, що контактують, а з ним – і компоненти підвектора *p*. Звідси, переписавши (4.72), отримуємо:

$$U(\Pi_J) = 0; \quad V(\Pi_J) \geq 0. \tag{4.73}$$

Тут U – оператор нелінійної системи рівнянь (*i*, *ii*) в (4.72), а V – оператор обмежень, записаних в (4.72) нижче. Тоді для відшукання розв’язку (4.73) можна застосувати, наприклад, процедуру Ньютона-Рафсона [422]

$$Cp + D(p) + h = \delta \ (p \geq 0). \tag{4.74}$$

Перевагами постановки (4.72) і алгоритму Ньютона-Рафсона є загальність, універсальність, стійкість і збіжність. Разом із тим втрачається наочність фізичної трактування (4.63) і (4.67).

Взагалі-то, ключові співвідношення сумісності переміщень містять два типи нелінійностей: в $D(p)$ зосереджена фізична нелінійність, а в $p \geq 0$ – структурна. Традиційні методи задовільно «працюють» з одним або іншим типом нелінійностей окремо. Проблема якраз полягає в поєднанні ефективності у рамках єдиного підходу. Часткове вирішення цієї проблеми запропоновано вище в підрозділі. Можливі також й інші підходи. Зокрема, це – релаксаційні процедури для мінімізації функціоналу, що збігаються з методами типу методу послідовної верхньої релаксації з проекцією для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Модифікація методів мінімізації функціоналу Калькера при аналізі контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Підхід до визначення контактного тиску як до задачі мінімізації квадратичного функціонала Калькера $\Phi(p)$ на опуклій множині обмежень $p_n \geq 0$ дає можливість застосувати релаксаційні методи з проекцією. Це стає особливо актуальним із зростанням розмірності задачі, оскільки призводить до необхідності вирішувати СЛАР із щільно заповненою матрицею. Застосування ж релаксаційних процедур не вимагає обернення всієї матриці СЛАР.

Варіант 1. При здійсненні релаксаційної процедури за методом послідовної верхньої релаксації (МПВР) маємо:

$$p_m^{(k+1)} = p_m^{(k)} + \omega \cdot \left(\Delta_m^{(k)} / C_{mv}\right), \qquad (4.75)$$

де $\Delta_m^{(k)}$ – вузлова нев'язка m–го рядка систем рівнянь сумісності переміщень, а $\omega = \left]0;\, 2\right[$ – параметр прискорення процесу.

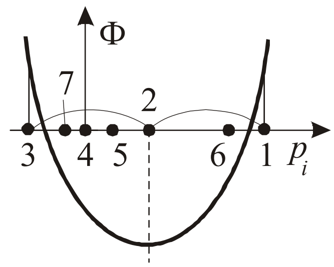


Рисунок 4.11 – Процедура методу послідовної верхньої релаксації з проекцією

Проекція розв'язку проводиться в межах кожного кроку за умовою

$$if\left(p_m^{(k+1)} < 0\right) \Rightarrow p_m := 0. \qquad (4.76)$$

Таким чином, у рамках єдиного процесу об'єднується релаксаційні поліпшення розв'язку і виконання обмеження типу нерівностей, тобто пошук границь контакту.

Варіант 2. Застосування МПВР з проекцією (див. вар. 1) передбачає перехід на кожному кроці ітераційного процесу з деякої вихідної точки (на рис. 4.11 – точка 1) залежно від значення параметра прискорення релаксаційного процесу до будь-якої внутрішньої точки з інтервалу 1–2–3 (див. рис. 4.11), де точка 2 відповідає мінімуму $\Phi(p)$ в обраному його перетині, а точка 3 симетрична точці 1 щодо точки 2. У цьому випадку можливі кілька ситуацій: при малому ω отримуємо наступну точку 6, і вона приймається за наступне наближення; при ω=1 – точка 2 з тим же результатом; при зростанні ω можемо потрапити в точку 5 і прийняти її за наступне наближення. При подальшому зростанні можливе попадання в точку 7, і в такому випадку наближенням буде призначена точка 4 як проекція точки 7 на систему обмежень.

Ідея блочної релаксації полягає в одночасному русі за декількома, а не за одним, напрямками (рис. 4.12). При цьому можливий більш широкий спектр ситуацій, ніж у попередньому випадку (див. вар. 1), при різних ω. Так, крок у точку 4 за напрямком 1–2–3 (де точка 2 відповідає мінімуму $\Phi(p)$ в цьому перетині, а точка 3 симетрична вихідній точці 1 щодо точки 2) є остаточним. Крок у точку 5 передує проекції на обмеження $p_m \geq 0$, тобто перехід до точки 6. Крок до точки 7 призводить до проектування на точку 8.

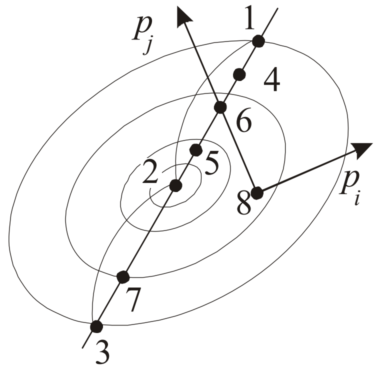


Рисунок 4.12 – Крок блочної релаксації

Формально блочна релаксація полягає у виділенні у векторі $\mathbf{p} = \{p_1; p_2; ...; p_N\}^T$ блоків (підвекторів) $\mathbf{p} = \{q_1; q_2; ...; q_{N_q}\}^T$. Відповідно, матриця C підрозділяється на блоки Λ_{lm}. Тоді $(k+1)$-й крок релаксації полягає у процедурі:

$$q_r^{(k+1)} = q_r^{(k)} + \omega \cdot \Lambda_{rr}^{-1} \cdot \overline{\Delta}_r^{(k)}, \qquad (4.77)$$

де $\overline{\Delta}_r^{(k)}$ – блок нев'язки, що відповідає блоку q_r, а ω – параметр прискорення релаксаційного процесу. Незважаючи на те, що в (4.77), на відміну від (4.75), з'являється операція обернення матриці, проте ця матриця Λ має, як правило, менший порядок, ніж C. Таким чином, виникає задача оптимізації розбиття p на блоки, оскільки при цьому є сусідніми дві тенденції: скорочення кількості кроків при охопленні процедурою релаксації всього вектора **p**, з одного боку, збільшення кількості кроків за рахунок зростання операцій з обернення підматриць. Супутньою проблемою при цьому є оптимізація параметра прискорення ω. Підсумовуючи, можна зробити висновок, що алгоритм блочної релаксації може привести до підвищення швидкості збіжності релаксаційного процесу.

Варіант 3. Застосування традиційної процедури блочної релаксації передбачає розбивку **p** на блоки будь-яким чином. Однак ніщо не перешкоджає більш гнучкому розбиттю на блоки, коли замість принципів неперетинання між собою ($q_i \cap q_j = \varnothing$) і охоплення всього масиву вузлових значень тиску **p** ($\mathbf{p} = \bigcup_j q_j$) можна ввести принципи допустимості перетинів ($q_i \cap q_j \neq \varnothing$) при збереженні – охоплення. Більш того, від кроку до кроку склад блоків може змінюватися, тобто порушується ще один принцип – стабільності розбивки. Природно, що апріорно досить важко вказати процедуру вибору схеми розбивки **p** на блоки. Це можна зробити на основі розв'язання ряду тестових задач або шляхом коригування цієї розбивки за швидкістю збіжності релаксаційного процесу вже у ході обчислень.

У кінцевому підсумку вибір варіанта організації релаксаційного процесу може призводити до комбінації запропонованих методів. Усі зусилля при цьому спрямовані на прискорення всього процесу розв'язання. Важливо зауважити, що на кожному кроці проводиться суміщення процедур уточнення поточного наближення і уточнення зони контакту. Узагальнення релаксаційних алгоритмів на випадок добавки нелінійних доданків у функціонал, що мінімізується, відбувається природним способом, тому що функціонал залишається опуклим, а вимагає уточнення лише вибір ω.

Підсумовуючи в цілому аналіз запропонованих методів розв'язання контактних задач, слід зазначити, що в підрозділі поставлені нові проблеми, запропоновані нові підходи і методи для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних шорсткуватих тіл. При цьому враховані такі особливості: нелінійність пружних властивостей вінклеровського шару, що моделює шорсткість, а також різних прокладок, плівок, напилень тощо; можливість зведення задачі до описаних раніше постановок для гладких і шорстких тіл з лінійної моделлю заміщуваного вінклеровського шару; пристосованість до розв'язання прямих задач аналізу розподілу контактного тиску. Представлені результати дають підставу для наступних висновків: розроблено метод додаткових зазорів, що дає можливість звести контактну задачу за наявності нелінійного пружного шару до ітераційної послідовності розв'язань задач про контактну взаємодію гладких тіл, але зі скоригованими (порівняно із дійсним) розподілом початкових зазорів між контактуючими тілами; як один з варіантів розв'язання задач аналізу контактної взаємодії розроблений метод змінних коефіцієнтів впливу (МЗКВ), або метод змінних параметрів податливості (МЗПП), за допомогою якого задача із нелінійно пружним вінклеровим шаром зводиться до ітераційної послідовності задач із введенням пружного шару, проте із нерівномірним розподілом характеристик жорсткісних властивостей на площадці контакту (при цьому жорсткісні характеристики цього шару уточнюються у процесі розв'язання на кожному циклі ітераційного процесу); для розв'язання задачі аналізу контактної взаємодії шорстких тіл і тіл з нелінійним проміжним шаром у загальному випадку запропоноване формулювання, яким передбачається застосування різних методів розв'язання системи нелінійних рівнянь з обмеженнями типу рівностей і нерівностей (зокрема, запропоновано використання для цих цілей методу Ньютона-Рафсона); для випадків великої розмірності сітки граничних елементів запропоновані релаксаційні схеми для мінімізації функціоналу Калькера на основі модифікації методу послідовної верхньої релаксації з проекцією; для розширення спектру застосування методів мінімізації функціоналу Калькера розроблені варіанти методу блочної релаксації з проекцією (при цьому запропонована, на відміну від традиційних жорстких процедур розбивки масиву невідомих на блоки, гнучка розбивка, що перебудовується і адаптується в ході розв'язання).

Перевагою запропонованих постановок, розглянутих моделей і розроблених методів є свобода від будь-яких спрощуючих припущень, крім адекватності властивостей «глобальної» податливості контактуючих тіл на поверхнях можливого контакту властивостям напівпросторів або тіл скінченних розмірів, а також про плавність повороту нормалі при обході цих поверхонь за довільними шляхами. При цьому «локальна» податливість, що описує властивості шорсткості, прокладок або плівок, моделюється нелінійними співвідношеннями «зближення – контактний тиск».

Важливою обставиною при цьому є та особливість, що відрізняє і систему розв'язувальних рівнянь, і розроблені методи їх розв'язання, що, на противагу звичайним нелінійним рівнянням, сам склад множини невідомих, щодо яких сформовані ці розв'язувальні співвідношення, є змінним (поповнюваним або урізуваним). Уже в силу цих особливостей застосування традиційних методів є складним. З урахуванням тільки цього чинника розробка нових методів розв'язання є актуальним завданням. Крім того, спонукальним додатковим мотивом є можливість поєднання в єдиному циклі і процесу ітераційного уточнення поточного наближення розв'язку, і процесу коригування складу активних обмежень, а з ним – і самої множини шуканих змінних і області контакту. Саме таким вимогам відповідають запропоновані у роботі методи додаткових зазорів і змінних параметрів податливості. У поєднанні із природним фізичним змістом, властивим цим методам, ця методологічна особливість становить новизну, відмінність і перевагу перед традиційними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь і нерівностей.

Також природне трактування мають розроблені варіанти на основі методу послідовної верхньої релаксації з проекцією. Вони реалізують зв'язок задачі про пошук мінімуму квадратичного (у загальному випадку – опуклого) функціоналу за наявності обмежень типу нерівностей, з одного боку, і МПВР для розв'язання породжуваної

СЛАР, доповнюваного проекцією розв’язку на обмеження, – з іншого. Методологічною новизною при цьому є метод виділення окремих блоків з масиву змінних, для компонентів яких проводиться черговий крок ітераційного процесу уточнення поточного розв’язку.

У цілому розроблені методи розв’язання виникаючих задач аналізу контактної взаємодії СПТ з нелінійно пружним проміжним шаром пристосовані для розв’язання розв’язувальних систем рівнянь і нерівностей. Це визначає їх перевагу перед відомими традиційними методами розв’язання систем нелінійних рівнянь.

4.4 Розв’язання тестових задач

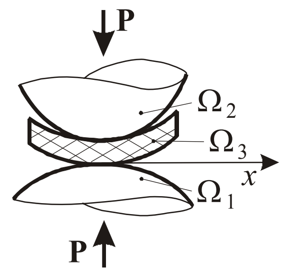


Рисунок 4.13 – Розрахункова схема взаємодії параболоїдів Ω_1, Ω_2 з розміщеним між ними нелінійним шаром

Розроблені методи і моделі аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності нелінійного пружного проміжного шару вимагають апробації на прикладах розв’язання тестових задач. Зокрема, проблемним місцем є питання збіжності чисельного рішення із використанням розроблених ітераційних процедур. В силу цього було запропоновано вирішити тестові задачі про контакт двох тіл, обмежених параболоїдами обертання з розміщеними між ними нелінійними пружними шарами (рис. 4.13). Варійованими тут є пружні характеристики, тобто залежності $w(p)$. При цьому, зокрема, були розглянуті наступні типи нелінійностей (рис. 4.14): пружно-жорстка характеристика (рис. 4.14, *а*); «коренева» характеристика типу $w=\overline{\lambda}\sqrt{p}$ (рис. 4.14, *б*); білінійна характеристика (рис. 4.14, *в*). На рис. 4.15 представлені розподіли контактного тиску залежно від зміни порога переходу на горизонтальну ділянку залежності $w(p)$ (див. рис. 4.14, *а*) (тут 1 – білінійна залежність, $\alpha_a = arctg 0{,}5$ (див. рис. 3.14, *в*); 2 – пружно-жорстка залежність $w(p)$, α_a = ½; 3 – контакт гладких параболоїдів; 4 – контакт параболоїдів з лінійно-пружним вінклеровим шаром, $\lambda = 10 C_{nn}$; 5 – «коренева» залежність $w(p)$ (див. рис. 4.14, *б*); 6 – білінійна залежність, $\alpha_2 = arctg 1{,}5$ (див. рис. 4.14, *в*); 7 – білінійна залежність, $\alpha_2 = arctg2$ (див. рис. 4.14, *в*); 8 – пружно-жорстка залежність $w(p)$, α_a= ½ : розв'язок отримано МЗПП; 9 – білінійна залежність, $\alpha_2 = arctg1{,}5$ (див. рис. 4.14, *в*): розв'язок отримано МЗПП). Поріг виставляється за значенням коефіцієнта $\alpha_a = p_{\text{кр}} / p^{\lambda}_{\max}$, де $p^{\lambda}_{\max}$ – максимальний контактний тиск у розподілі, отриманий під час розв'язання задач без обмежень $p_{\text{кр}}$ (випадок $\alpha_a = 0$ відповідає контакту гладких тіл). Як видно з представлених розподілів, спостерігається плавна їх видозміна при варіюванні коефіцієнта α_a в інтервалі [0; 1] (рис. 4.16, k – номер ітерації). Чітко видно зону переходу між областями I і II (рис. 4.17). В зоні $\alpha_a \approx 0{,}5$ спостерігається різна картина розподілів контактного тиску q в областях I і II, а між ними – перехідна зона. При наближенні α_a до 0 або 1 розподіли q наближаються до граничних (відповідно, при α_a=0, α_a=1).

На рис. 4.18 проілюстровано зміну відносного максимального контактного тиску в ході ітераційного процесу, а на рис. 4.19 – відносного максимального контактного тиску залежно від параметра α_a (див. рис. 4.14, а). Видно, що ітераційний процес сходиться досить швидко. Крім того, при варіюванні α_a рівень контактного тиску змінюється плавно, проте у досить широких межах. В табл. 4.1 наведено зміну картин розподілів контактного тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) за різних значень $P_{\text{кр}}$ (позначення кривих на рисунках аналогічно рис. 4.15). На рис. 4.20, 4.21 проілюстровано зміни розподілу контактного тиску при зміні параметра α_a. Помітна еволюція картин розподілів контактного тиску, а також перехідні зони між реалізаціями гілок I і II залежності $w(p)$ (див. рис. 4.14, *а*). На рис. 4.22, 4.23 наведені розподілу контактного тиску при реалізації «кореневої» залежності $w(p)$ (див. рис. 4.14, *б*). Відстежується коефіцієнт $\alpha_б = p^{\surd}_{\max} / p^{\lambda}_{\max}$, де $p^{\surd}_{\max}$ – максимальний контактний тиск при «кореневому» розподілі $w(p)$, $p^{\lambda}_{\max}$– те ж, але для лінійного вінклерового шару. Видно, що «коренева» модель породжує більш плавний розподіл контактного тиску, особливо в зоні периферії, в якій рівень тиску різко знижується.

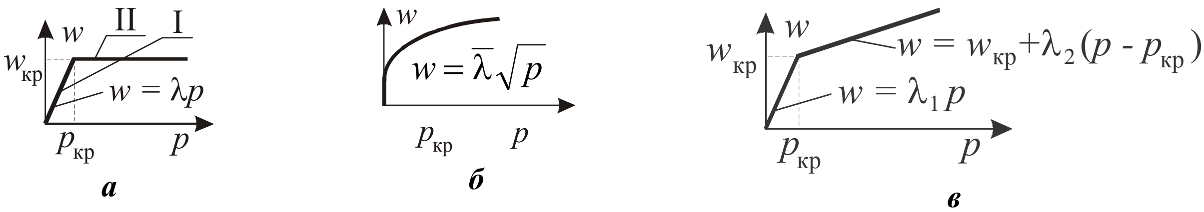
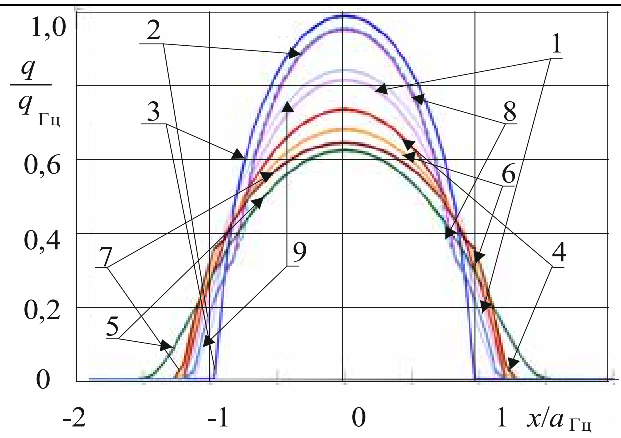


Рисунок 4.14 – Нелінійні характеристики $w(p)$

Рисунок 4.15 – Розподіл безрозмірного контактного тиску віднесеного за безрозмірною координатою $\bar{x} = x / x_{Гц}$ ($x_{Гц}$ – ширина плями контакту за моделлю Герца в осьовому перерізі



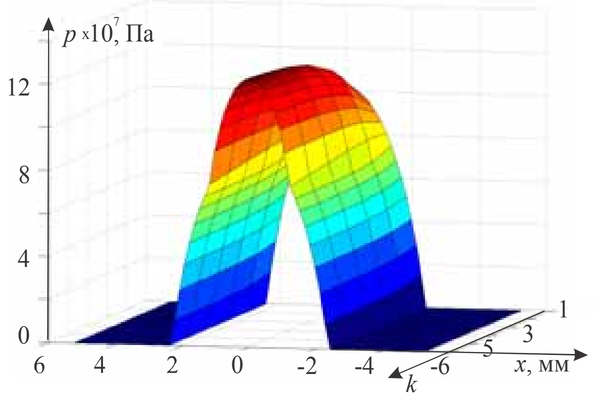


Рисунок 4.16 – Зміна картин розподілення контактних тисків в осьовому перерізі в ході ітераційного процесу їх уточнення для пружно-жорсткої моделі проміжного шару (див. рис. 4.14, *а*) при $\alpha_a = 0{,}6$

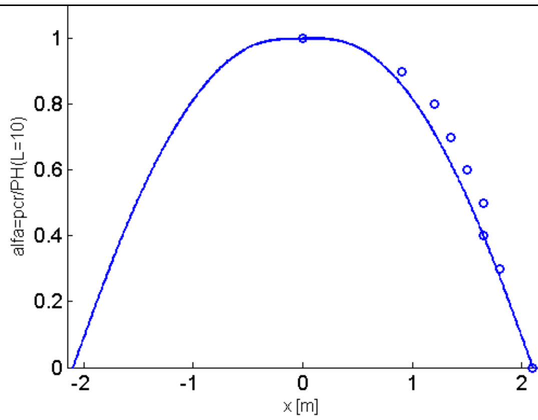


Рисунок 4.17 – Лінія переходу між пружною і «жорсткою» ділянкою залежності $w(p)$ (див.рис. 4.14, *а*) при зміні параметра $\alpha_a \in [0;1]$

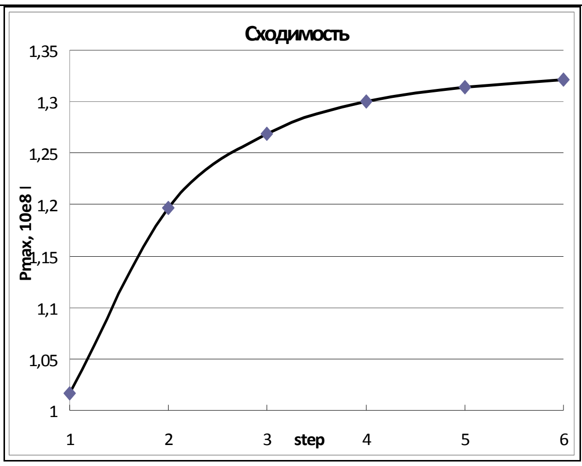


Рисунок 4.18 – Зміна відносного максимального контактного тиску в ході ітераційного процесу

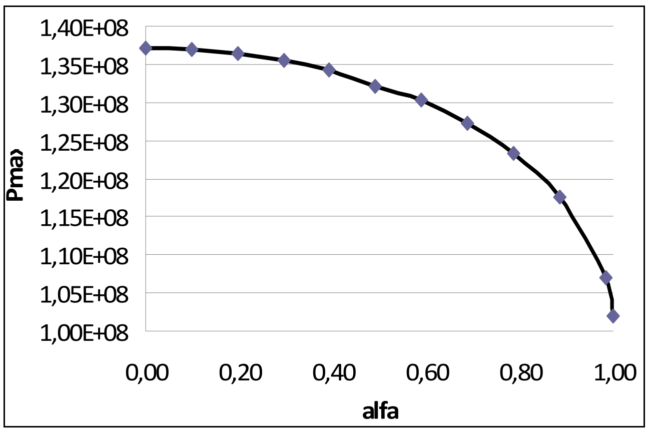
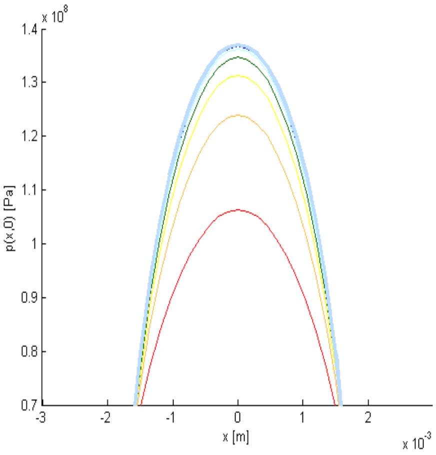
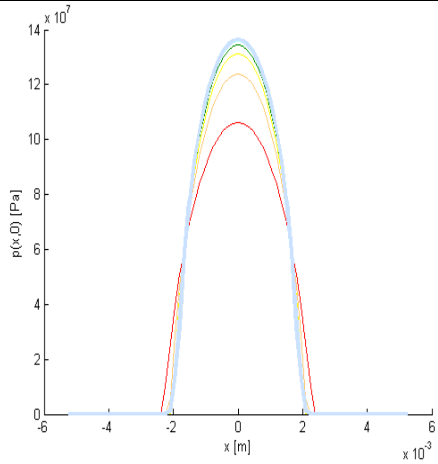
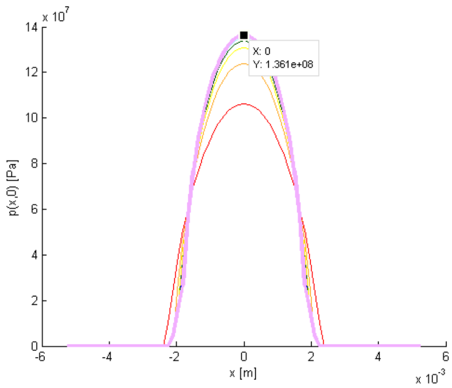
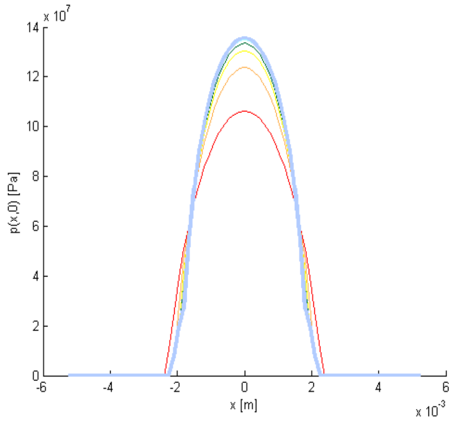
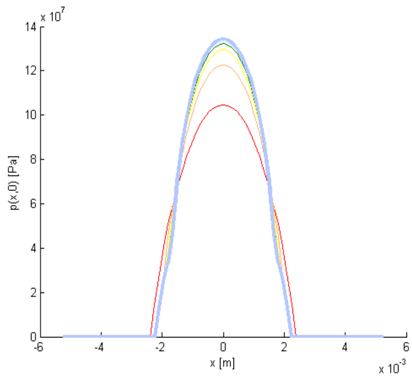
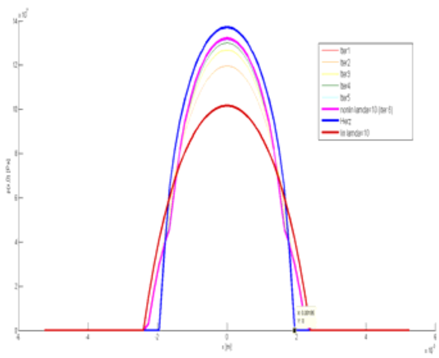
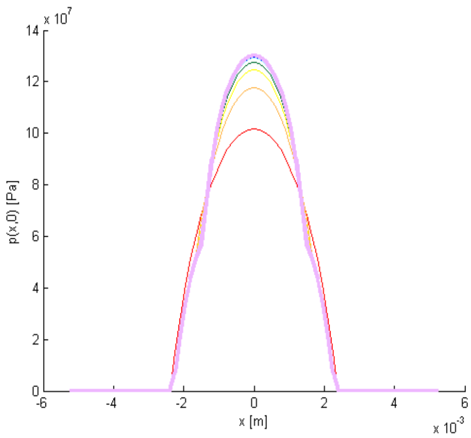
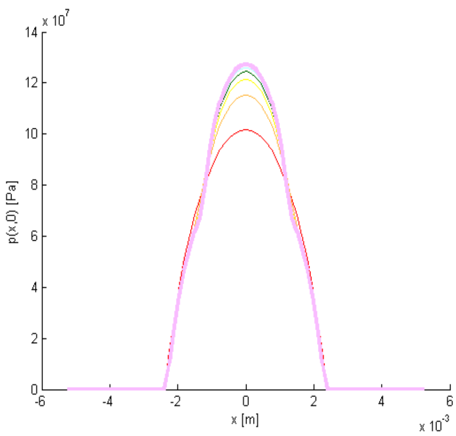
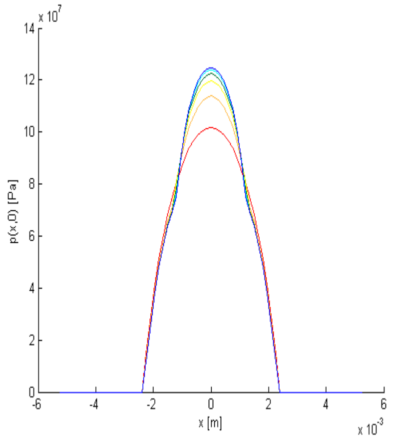
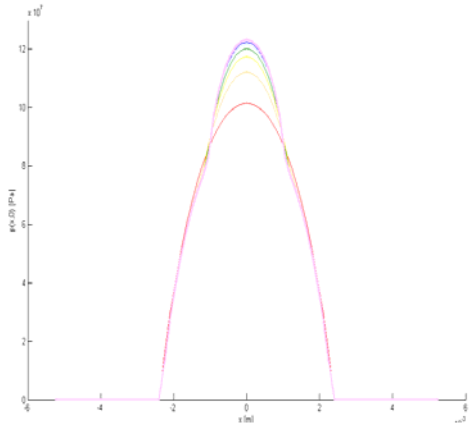
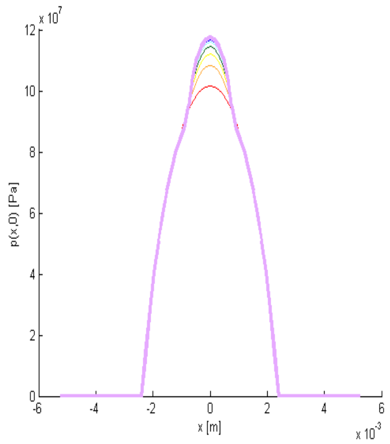
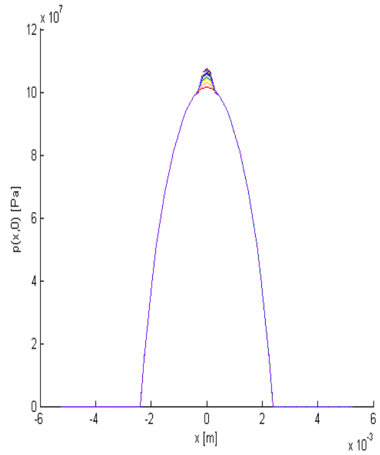
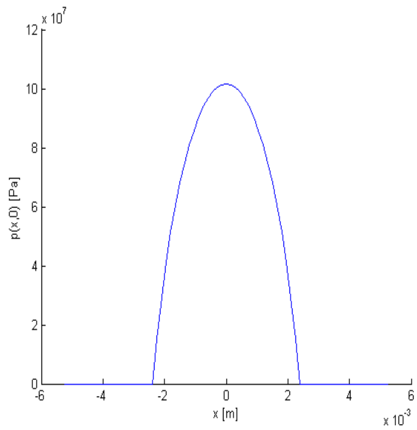


Рисунок 4.19 – Зміна відносного максимального контактного тиску залежно від параметра α_a (див. рис. 4.14, *а*)

Таблиця 4.1 – Картин розподілів контактного тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) при різних значеннях $p_{кр}$

$p_{кр}$, Па	Розподіл контактного тиску	$p_{кр}$, Па	Розподіл контактного тиску
$0{,}1\cdot10^{8}$		$0{,}2\cdot10^{8}$	
$0{,}25\cdot10^{8}$		$0{,}3\cdot10^{8}$	
$0{,}4\cdot10^{8}$		$0{,}5\cdot10^{8}$	
$0{,}6\cdot10^{8}$		$0{,}7\cdot10^{8}$	

Закінчення табл. 4.1

$p_{кр,}$. Па	Розподіл контактного тиску	$p_{кр,}$. Па	Розподіл контактного тиску
$0{,}75\cdot10^8$		$0{,}8\cdot10^8$	
$0{,}9\cdot10^8$		10^8	
$1{,}02\cdot10^8$			

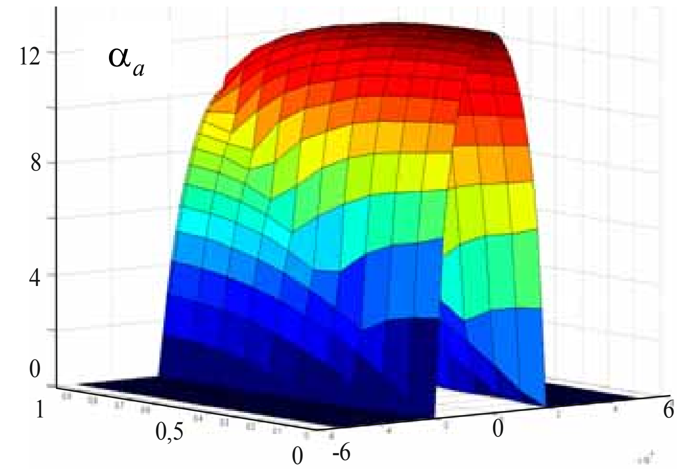


Рисунок 4.20 – Зміна картини розподілу контактного тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра α_a (див. рис. 4.14, *а*) (в ізометрії)

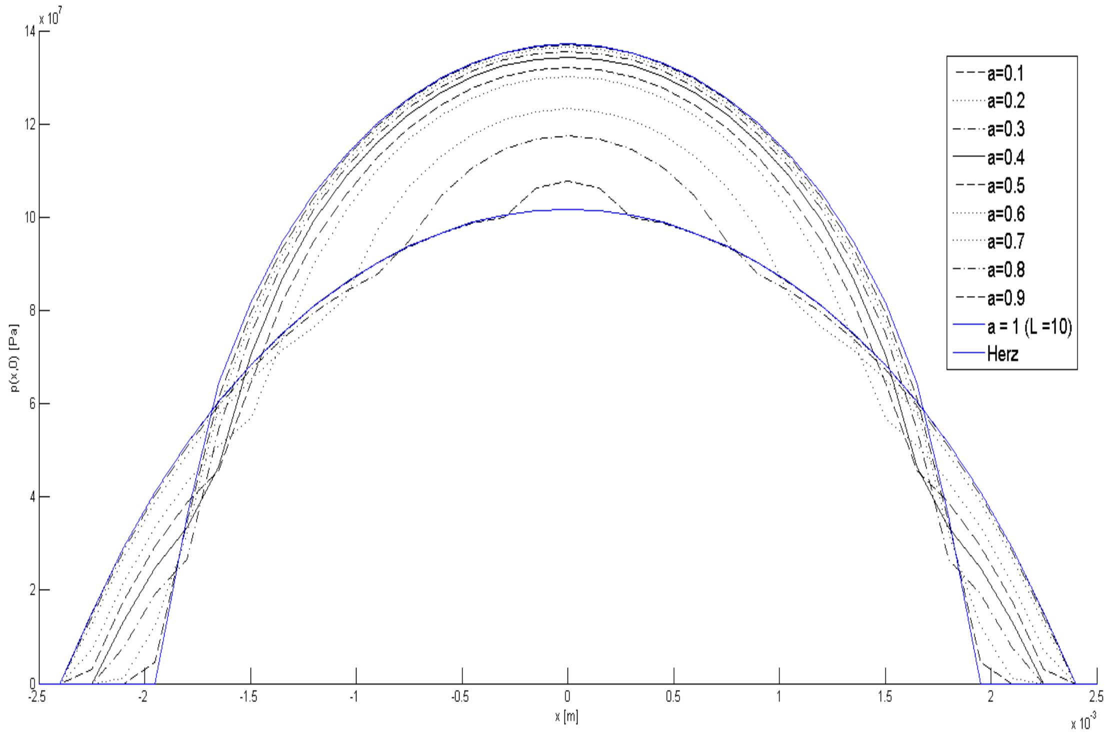


Рисунок 4.21 – Зміна картини розподілу контактного тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра α_a (див. рис. 4.14, *а*)

Рисунок 4.22 – Зміна картини розподілу контактного тиску при «кореневій» залежності $w(p)$ (див. рис. 4.14, *б*) залежно від номера k ітераційного процесу

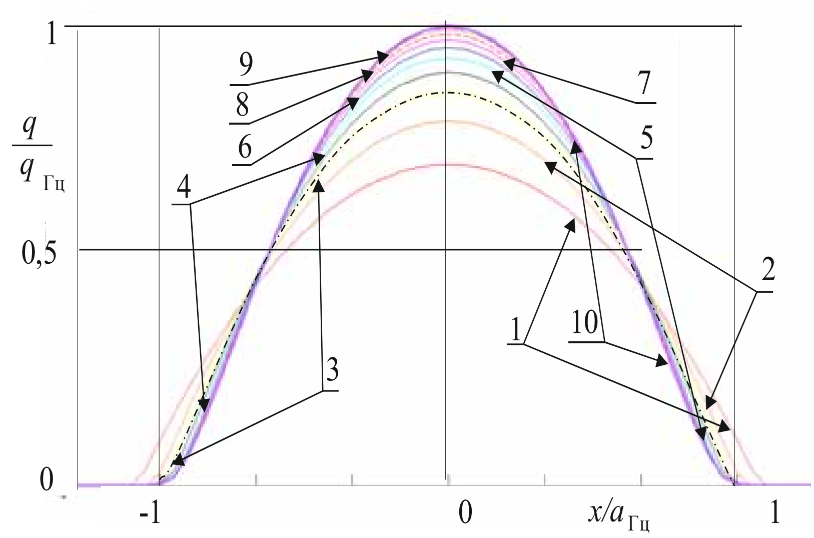
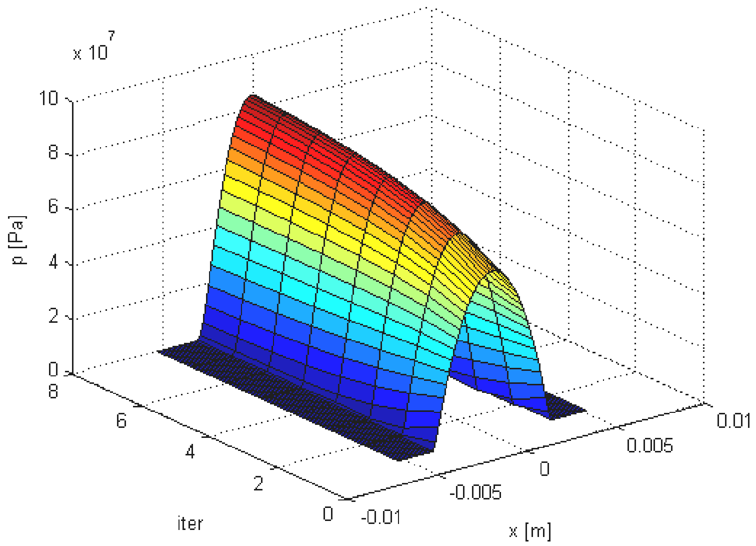


Рисунок 4.23 – Зміна картини розподілу контактного тиску при «кореневій» залежності $w(p)$ (див. рис. 4.14, *б*) залежно від номера k ітераційного процесу (в ізометрії)



На рис. 4.15 також представлені розподіли контактного тиску при варіюванні коефіцієнта $\alpha_в = \mathrm{arctg}(\lambda_2/\lambda_1)$ (див. рис. 4.14, *в*). Як випливає з аналізу отриманих розподілів, при наближенні $\alpha_в$ до нуля розподіл контактного тиску прагне до такого ж для пружно-жорсткої моделі (див. рис. 4.14, *а*). При наближенні до $\pi/2$ отримуються розподіли контактного тиску, що мають більш низький рівень в середній частині, а, відповідно, ширші площадки контакту. Тут же (див. рис. 4.15) представлені розподіли контактного тиску, отримані не тільки методом додаткових зазорів, а й методом змінних параметрів податливості. Видно, що отримані різними методами результати в цілому збігаються. Таким чином, як видно з отриманих результатів, коефіцієнти $\alpha_а, \alpha_б, \alpha_в$ досить сильно впливають і на характер розподілу контактного тиску, і на їх рівень. З цього випливає, що, варіюючи ці коефіцієнти, можна відчутно впливати на напружено-деформований стан контактуючих тіл.

Також необхідно відзначити, що при розв'язанні тестових задач в досліджених випадках не можна звернутися ні до відомих аналітичних розв'язків, ні до розв'язків, отриманих чисельно (наприклад, за допомогою методу скінченних елементів). Важко проводити порівняння з експериментальними даними в силу того, що залежності $w(p)$ для того чи іншого шару можуть бути отримані зі значною похибкою. У зв'язку з цим пропонується оцінювати точність розв'язку за рівнем нев'язки рівнянь.

Для цього обчислюється повузлова нев'язка для розв'язуваної системи співвідношень, а потім оцінюється їх відносний рівень. Наприклад, для рівнянь $\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n = 0$ рівень нев'язки – $\overline{\Delta}_n = \left[\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n\right]/\delta$, де δ – зближення тіл. Так, на рис. 4.24, 4.25 представлені розподіли нев'язки Δ_n для випадку моделі, представленої на рис. 4.14, а при $\alpha_а$ = 0,5 (отримано методом додаткових зазорів). Видно, що досягається досить точний розв'язок (рівень нев'язки – до 0,1% після сьомої ітерації). На рис. 4.26 – зміна характеру розподілу контактного тиску при ітераційному уточненні розв'язку. Очевидне різке уточнення отриманих результатів відразу після 3-4 ітерацій. На рис. 4.27, 4.28 представлений характер зміни нев'язки – максимуму і в центральній точці контакту. Видно, що спостерігається лінійна збіжність розв'язку до точного, що прийнятно для багатьох прикладних задач з помірною за розмірами гранично-елементною сіткою.

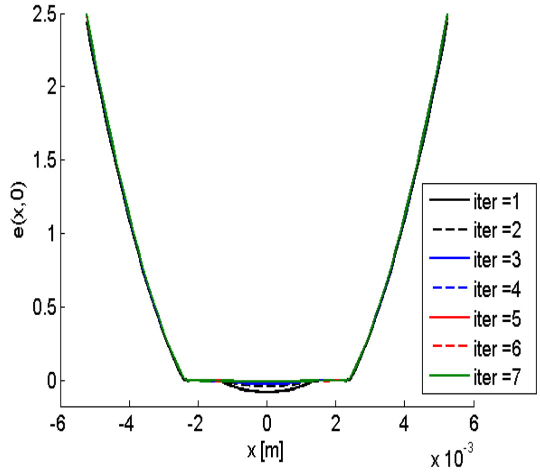


Рисунок 4.24 – Розподіл нев’язки
Рівнянь сумісності переміщень
(центральна частина – область контакту, периферія – поза контактом)
за ітераціями (iter =1÷7)

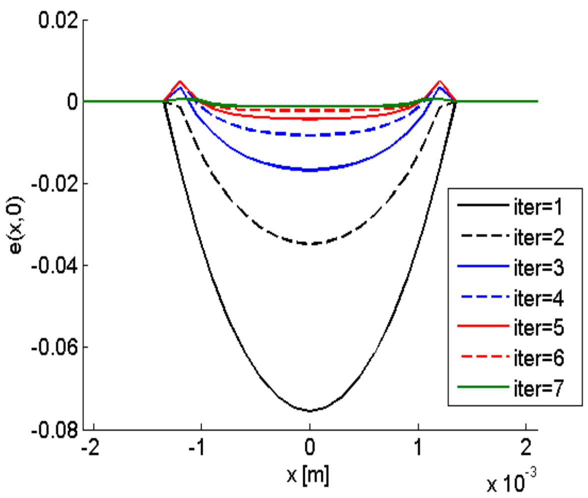


Рисунок 4.25 – Розподіл нев’язки рівнянь сумісності переміщень
в області контакту за ітераціями
(iter =1÷7)

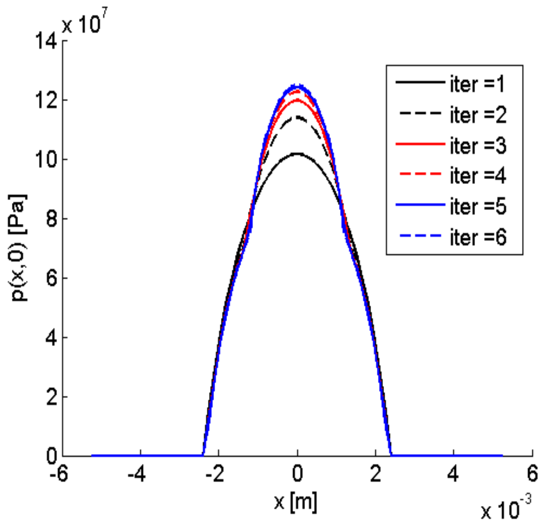


Рисунок 4.26 – Розподіл контактного тиску при ітераційному уточненні розв’язку, номер ітерації iter =1÷6

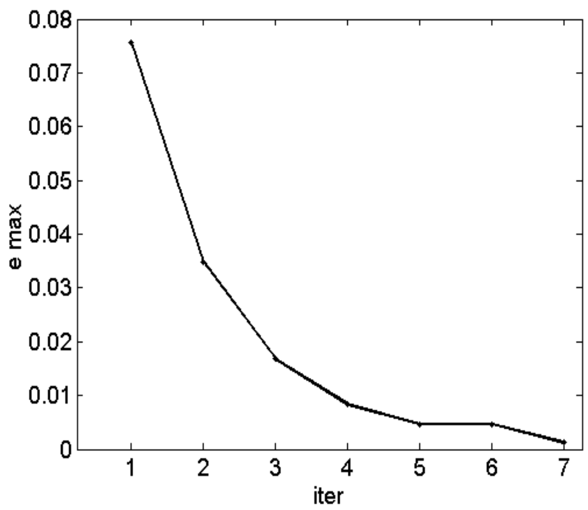


Рисунок 4.27 – Зміна максимальної нев’язки розв’язку
контактної задачі в зоні контакту

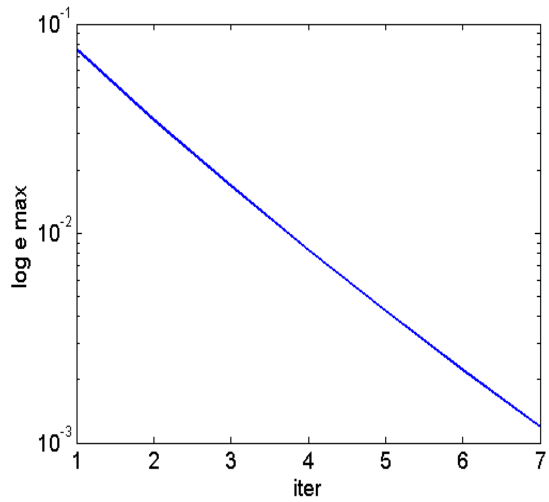


Рисунок 4.28 – Зміна нев’язки в центральній точці контакту в процесі ітераційного уточнення розв’язку (в напівлогарифмічному масштабі)

Таким чином, можна зробити висновок, що розроблені методи розв'язання розв'язувальної системи співвідношень продемонстрували досить високу точність. Це дає можливість переходити до розв'язання прикладних задач із застосуванням методів додаткових зазорів та змінних параметрів податливості, а також інших запропонованих методів.

Висновки до розділу 4

У розділі описані нові моделі та методи розв'язання структурно-фізично нелінійних задач.

Аналіз отриманих результатів дає підґрунтя для наступних висновків.

1. Задача про контактну взаємодію лінійно пружних тіл із нелінійно пружним шаром між ними за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь і варіаційного принципу Калькера зведена до структурно-фізично нелінійної задачі. Побудована математична модель, на відміну від традиційних постановок, зводиться до системи рівнянь і нерівностей, що складають умови сумісності переміщень, у яких містяться нелінійні доданки щодо невід'ємного контактного тиску. Таким чином, структурна нелінійність, математично відображена у співвідношеннях типу нерівностей, доповнюється фізичною, що породжує наявність нелінійних доданків у рівняннях сумісності. Це, в свою чергу, ускладнює математичну модель, проте робить її більш адекватною, що точніше описує поведінку реальних об'єктів. З іншого боку, це з неминучістю вимагає розробки нових методів розв'язання побудованої системи розв'язувальних співвідношень.

2. Для побудови математичних моделей про контактну взаємодію пружних тіл з нелінійно пружними шарами між ними, а також з урахуванням інших чинників, запропоновано новий підхід, заснований на поступовому ускладненні їх структури відповідно зі введенням у розгляд того чи іншого чинника. Початковим ядром у цій послідовності є рівняння сумісності переміщень точок поверхонь гладких тіл (у актуальному стані) відносно контактного тиску. Далі на це ядро нарощуються компоненти, що відповідають за вплив того чи іншого чинника. У результаті отримується система

співвідношень, що описує вплив різних чинників у сукупності.

3. Альтернативним (і досить ефективним) способом побудови математичної моделі про контактну взаємодію системи тіл і шарів є використання варіаційної постановки. При цьому, крім компонент початкового рівня (енергії деформування пружних гладких тіл), поступово можуть бути додані складові, що описують внесок інших компонент. Після їх вичерпання або застосовується пряма процедура мінімізації функціоналу, або будується система рівнянь і нерівностей із умов мінімуму і вимог обмежень, відповідно.

4. Для дискретизації математичної моделі використовується підхід, заснований на залученні гранично-елементних апроксимацій шуканого контактного тиску на регулярній трикутній сітці. У результаті задача зводиться до мінімізації опуклої функції на опуклій множині вузлових значень контактного тиску.

5. Вихідна постановка для випадку контакту напівнескінченних тіл узагальнена на випадок тіл скінченних розмірів. Для цього запропоновано обчислювати коефіцієнти впливу для гранично-елементних моделей на основі розв’язків, побудованих з використанням скінченно-елементних моделей, які на границі (на поверхні можливого контакту) збігаються з гранично-елементною розбивкою. У результаті отримується структура рівнянь, аналогічна випадку напівнескінченних тіл, проте із більш складною структурою матриці коефіцієнтів впливу. Можлива також апроксимація коефіцієнтів впливу в разі незбіжних на границі скінченно- і граничноелементних сіток.

6. Для розв’язання сформованих структурно-фізично нелінійних співвідношень розроблено методів додаткових зазорів. Він полягає у зведенні структурнофізично нелінійної задачі до послідовності структурно нелінійних, проте фізично лінійних задач, але зі спеціально підібраним розподілом фіктивних додаткових зазорів. Оскільки для таких задач раніше розроблені ефективні ітераційні алгоритми розв’язання, то це дає можливість розв’язувати фізично нелінійні задачі, причому досить оперативно і точно.

7. На додаток до методу додаткових зазорів розроблений метод змінних параметрів податливості. Його ідея – зведення фізично нелінійної задачі до послідовності фізично лінійних, але зі спеціально скоригованою нерівномірно розподіленою на

площі контакту податливістю лінійного вінклерового шару.

8. Як узагальнення, на додаток до методів додаткових зазорів і змінних параметрів податливості розроблений загальний підхід до розв’язання структурно-фізично нелінійних контактних задач, заснований на модифікації методу Ньютона-Рафсона. На відміну від традиційних варіантів цього методу, на кожному кроці модифікованого методу може змінюватися сама множина розв’язувальних співвідношень. Це викликано зміною поточної множини активних обмежень у процесі ітераційного уточнення розв’язку. Таким чином, на етапах розв’язання змінюються і поточне рішення, і масив шуканих вузлових значень контактного тиску.

9. Для мінімізації опуклого функціоналу Калькера на опуклій множині вузлових значень розроблені модифікації методу послідовної верхньої релаксації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (рівнянь сумісності переміщень) із проекцією на множину обмежень. На доповнення до відомих варіантів вузлової та блочної релаксації розроблений варіант «плаваючого», «адаптовного», «кориговного» розбиття масиву змінних на блоки. Це становить потенційну можливість прискорення релаксаційного процесу уточнення шуканого розв’язку.

10. Розв’язання тестових задач про контактну взаємодію пружних тіл зі структурно-фізично нелінійними шарами між ними продемонструвало точність, збіжність і високу оперативність розроблених методів.

11. Для кількісного аналізу вкладу «глобальної» та «локальної» податливості контактуючих шорсткуватих тіл, а також початкового зазору у загальний баланс переміщень розроблена геометрична інтерпретація, яка ставить у відповідність кожному окремому випадку точку на одиничній сфері у першому октанті спеціально введених координат. Ця інтерпретація дає можливість наочної візуалізації зміни характеристик контактної взаємодії при варіюванні тих чи інших параметрів.

12. Виявлено нові закономірності у розподілі контактного тиску між складнопрофільними тілами для різних варіантів залежностей $w(p)$. Для випадку «пружно-жорсткої» характеристики властивостей проміжного пружного шару встановлено, що отримувані розподіли контактного тиску мають дві характерні ділянки з перехідною зоною. При цьому зміна «порога» переходу від пружної до жорсткої гілки цієї характеристики призводить до безперервної зміни одержуваних розподілів контакт-

ного тиску. Для варіанту «кореневої» характеристики, що описує властивості проміжного пружного шару, визначено, що отримувані розподіли контактного тиску мають більш плавний перехід до нульового розподілу поза зоною актуального контакту порівняно із випадком лінійного пружного шару.

Підсумовуючи отримані результати, можна зробити висновок, що у розділі запропоновані нові методи, підходи і моделі для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл із нелінійним проміжним шаром між ними. Отримувані структурно-фізично нелінійні співвідношення розв'язуються за допомогою зведення до низки структурно нелінійних, але фізично лінійних задач. При цьому встановлені якісно нові ефекти впливу виду фізичної нелінійності на розподіл контактного тиску. Виявлено, що шляхом варіювання певних параметрів, що визначають ті чи інші фізичні нелінійності, можна істотно впливати на вигляд розподілу контактного тиску, а також на його максимальні значення. Це дає підставу для висновку про можливість, доречність, доцільність та ефективність розв'язання задач синтезу в розрізі відновлення геометричної форми поверхонь контактуючих тіл і обґрунтування властивостей матеріалу проміжного шару за деякими критеріями, причому у зв'язаній постановці.

Матеріали розділу описані у роботах [1, 2, 5–10, 12–36, 38, 39, 41–45, 50, 53, 54, 64, 65, 67–82, 84–98, 100, 103, 104, 106, 107].

РОЗДІЛ 5
ОБҐРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФОРМИ ПОВЕРХОНЬ КОНТАКТУЮЧИХ ТІЛ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ПРОМІЖНИХ ШАРІВ

5.1 Загальна постановка задачі про визначення впливу особливостей розподілу початкового зазору між складнопрофільними тілами на розподіл контактного тиску із урахуванням фізичної та структурної нелінійності

Задачі контактної взаємодії складнопрофільних тіл на перших етапах проектних досліджень машинобудівних конструкцій найчастіше служать як базові при обґрунтуванні визначальних проектно-технологічних параметрів їхніх найбільш навантажених та відповідальних елементів. При цьому основними критеріями для прийняття проектних рішень є забезпечення виконання взаємних рухів елементів конструкцій, вимог міцності, а також раціональне профілювання контактних поверхонь виходячи з прагнення зниження зношування або рівня контактного тиску.

Усі перераховані вимоги призводять до необхідності або багатоваріантного розв’язання задачі аналізу, або – побудови процедур синтезу раціональних технічних рішень. У розд. 4 описані нові підходи, методи і моделі аналізу контактної взаємодії з урахуванням раніше не враховуваних чинників. У той же час також і для розв’язання виникаючих задач синтезу для досліджених у роботі конструкцій безпосередньо застосовувати відомі традиційні методи недоцільно в силу специфіки цих об’єктів. Таким чином, необхідне формування нових підходів, постановок, формулювань обґрунтування раціональної форми поверхонь контактуючих тіл та властивостей матеріалу проміжних шарів стосовно системи контактуючих СПТ. Для цього далі у розд. 5 описане розв’язання наступних задач: формування взаємообернених систем розв’язувальних співвідношень; розв’язання зв’язаної задачі аналізу контактної взаємодії та обґрунтування геометричної форми контактуючих тіл; обґрунтування сприятливого профілю контактуючих деталей за критерієм мінімізації контактного тиску або компонент напружено-деформованого стану; створення актуального сприятливого профілю за рахунок додаткової керованої пружної деформації від дії спеціально розрахованої допоміжної системи сил; обґрунтування форми контактних поверхонь залежно від фізико-механічних властивостей пружного проміжного шару між ними; загальна постановка задачі аналізу чутливості розв'язків контактних задач до зміни варійованих параметрів системи розв'язувальних співвідношень.

Як уже зазначалося, багато машинобудівних конструкцій містять елементи, основне функціональне призначення яких – передача значних експлуатаційних зусиль і рухів між окремими тілами (деталями). Це, наприклад, опори обертання і ковзання, підшипники, зубчасті колеса, кулачки, колінчасті вали, гідрооб'ємні передачі, механізми перекочування і нахилу, катки, приводні колеса ланцюгових приводів та гусеничних рушіїв. Для них характерно, що основні взаємні руху здійснюються перекочуванням (з ковзанням або без) сполучених поверхонь взаємодіючих одне з одним тіл, а основним робочим зусиллям є нормальна сила контактної взаємодії. При проектуванні таких конструкцій, відповідно, виникають дві послідовні задачі, пов'язані логікою і послідовністю проектно-дослідницьких робіт: геометричний синтез поверхонь цих деталей і аналіз НДС утворених СПТ із урахуванням контактної взаємодії. Ці задачі отримали частинний розв'язок у роботі [1]. При цьому як метод геометричного синтезу був використаний кінематичний метод Литвина [424], а для аналізу НДС взаємодіючих тіл залучені моделі Герца, МСЕ і МГЕ. У цілому була створена досить ефективна методологія, спрямована на послідовно-ітераційне розв'язання задач геометричного синтезу та аналізу НДС (саме в такій послідовності) [1].

У той же час, як показує аналіз багатьох конструкцій, вимоги до спряжених поверхонь, записані у вигляді строгих рівнянь, що допускають, як правило, єдиний розв'язок, виявляються надмірно жорсткими. Для таких випадків умови кінематичного сполучення можуть часто бути ослаблені та записані у вигляді нерівностей, вимог опуклості, співвідношення радіусів кривизни тощо (тобто допускається множинність розв'язку). Таким чином, виникає деяка свобода варіювання геометричної форми при синтезі пов'язаних у рухомому контакті поверхонь, що утворює підмножину G можливих розв'язків. Якщо тепер взяти до уваги, що у співвідношення для аналізу НДС з урахуванням контактної взаємодії входить як вихідні дані геометрична інформація про контактуючі поверхні, то виникає можливість за рахунок варіювання їхньої геометричної форми провести її оптимізацію всередині області кінематично допустимих розв'язків G. На цьому етапі отримуємо повністю пов'язану задачу аналізу напружено-деформованого стану та геометричного синтезу (тепер у такому порядку в формальному записі). Ця нова задача є предметом розгляду у підрозділі.

Метою досліджень при цьому є розробка загального підходу до розв'язання поставленої задачі та однієї із можливих її математичних формулювань. Розглянемо рухомий контакт гладких тіл 1 і 2, обмежених поверхнями, що генеруються кінематично (КГП) [1], за якими ці тіла сполучаються у ході безперервного взаємного руху. Як відомо, умова реалізації такого руху [424] –

$$\mathbf{V}_{12} \times \mathbf{n} = 0, \tag{5.1}$$

де $\mathbf{V}_{12}$ – швидкість відносного руху тіл 1 і 2; $\mathbf{n}$ – вектор нормалі у точці поточного сполучення тіл на поверхнях, що генеруються кінематично, при заданні (або фіксуванні) форми поверхні одного з тіл призводить до формування системи нелінійних рівнянь, з яких за координатами точки заданої КГП можна відновити координати точки, їй спряженої, на шуканій поверхні, що генерується кінематично. При певних додаткових умовах з (5.1) формується система двох хмар попарно пов'язаних точок КГП, що забезпечують двопараметричний взаємний рух тіл 1 і 2. У той же час, змінюючи умови задання поверхонь тіл 1 і 2, а також вимог до їх взаємних рухів, можна, як зазначалося вище, відійти від надмірно жорстких умов (5.1). Розглянемо деякі окремі випадки.

1. *Випадок однопараметричного руху при точковому первинному контакті.* У відносному русі тіл 1 і 2, що займають області Ω_1 і Ω_2, які обмежені поверхнями, що генеруються кінематично, S_1 и S_2 відповідно, здійснюють переміщення, для яких вектор відносної швидкості $\mathbf{V}$ містить тільки одну ненульову компоненту (рис. 5.1):

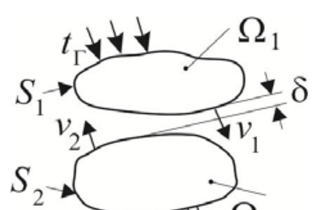


Рисунок 5.1 – До умов контактної взаємодії

$$\mathbf{V} = \{V_1; V_2\}^T,\ V_1 \neq 0;\ V_2 \equiv 0. \tag{5.2}$$

Тоді для реалізації такого руху достатньо виконання умови

$$R_{11} < R_{12},\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{M\}. \tag{5.3}$$

Тут R_{11}, R_{12} – радіуси кривизни поверхонь 1 і 2 в одній з площин Π_1 (xOz) головних кривизн, а π_1, π_2 – профілі, утворені перетином іншої площини головної кривизни Π_2 (yOz) з поверхнями S_1 і S_2 відповідно:

$$\pi_1 = \Pi_2 \cap S_1,\ \pi_2 = \Pi_2 \cap S_2. \tag{5.4}$$

Точка M у цьому випадку є точкою *початкового контакту в ненавантаженому стані* тіл 1 і 2:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{M\}. \tag{5.5}$$

Якщо множиною початкового контакту є лінія L, то маємо:

2. Випадок однопараметричного руху при лінійчастому початковому контакті (обмеження – ті ж, що і для випадку 1):

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{L\};\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{L\}. \tag{5.6}$$

3. *Випадок початкового контакту на поверхні* S. Якщо

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{S\}, \tag{5.7}$$

то можливі варіанти: якщо S – частина площини, то можливі три взаємних рухи тіл 1 і 2; якщо S – циліндрична поверхня, то – два; якщо S – довільна поверхня обертання або гвинтова поверхня, то – один; якщо S – поверхня загального вигляду, то реалізується нерухомий контакт тіл 1 і 2. Для останнього випадку

$$\mathbf{V} \equiv 0, \tag{5.8}$$

і реалізується контакт з конгруентними, узгодженими (в термінології [220]) поверхнями.

Рівняння (5.5)–(5.7) описують різні випадки контактного сполучення. Вони визначають разом із іншими співвідношеннями (5.2)–(5.8) умови кінематичного сполучення абсолютно твердих тіл 1 і 2 на поверхнях, що генеруються кінематично S_1, S_2. При цьому явно або неявно задані обмеження типу (5.3) або (5.6), (5.7) визначають підмножину G, що конкретизується для того чи іншого об’єкта порізному. Наприклад, це може бути умова відсутності підрізання у зубчастому зачепленні, недопущення інтерференції матеріалу кульового поршня і бігової доріжки у радіальній ГОП [425], відсутність взаємопроникнення опорного матеріалу сегмента механізму нахилу плавильної печі в елементи базової опорної конструкції [426]. Таким чином, формально поверхні S_1, S_2, що генеруються кінематично, можна визначити як підмножину пар поверхонь, які відповідають кінематичним умовам G сполучення абсолютно твердих тіл Ω_1 і Ω_2. Враховуючи, що у загальному випадку поверхні S_1, S_2 мають складну форму, то і, відповідно, тіла Ω_1 та Ω_2 будуть складнопрофільними. Ці СПТ на етапі розрахунку НДС із урахуванням контактної взаємодії подаються у вигляді деформованих гладких або шорстких тіл з нормаллю, що безперервно повертається, на S_1, S_2.

Кінематична модель контакту деформівних тіл призводить до співвідношень, що належать лише до границь S_1 і S_2 тіл 1 і 2. Для побудови замкненої математичної моделі НДС тіл 1 і 2 із урахуванням контакту необхідно використовувати рівняння стану у самих тілах. Зокрема, напружено-деформований стан СПТ відповідає мінімуму функціоналу [230, 235, 261, 262]

$$I(\mathbf{u}) = 1/2 \sum_{\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega - \sum_{\alpha} \int_{(\Gamma_\alpha)} t_\Gamma(\mathbf{u})\, d\Gamma \to \min \tag{5.9}$$

на множині K допустимих переміщень u, де Ω_α – області, займані тілами α із границями Γ_α ($\alpha = 1,2$).

Отже, описуючи геометричну форму взаємодіючих тіл 1 і 2 у початковій конфігурації звичайними або узагальненими параметрами $\overline{p}_1, \overline{p}_1, ..., \overline{p}_{N_p}$, які формують вектор $\overline{\mathbf{P}}$, отримуємо із умови кінематичного сполучення абсолютно твердих тіл підмножину G, яку можна ідентифікувати у вигляді системи обмежень

$$G(\overline{\mathbf{P}}) \geq 0. \tag{5.10}$$

При цьому мається на увазі справедливість прямої та оберненої відповідностей:

$$S_1 = S_1(\overline{\mathbf{P}}); \;\; S_2 = S_2(\overline{\mathbf{P}}); \tag{5.11}$$

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}(S_1, S_2). \tag{5.12}$$

Тоді (5.10) можна подати у вигляді

$$G(\overline{\mathbf{P}}(S_1, S_2)) \geq 0. \tag{5.13}$$

У актуальній конфігурації деформівні тверді тіла задовольняють умові мінімуму функціоналу (5.9), що може бути поданим у вигляді:

$$I(\mathbf{u}, S_1, S_2) \to \min, \mathbf{u} \in \mathrm{K}(S_1, S_2), \tag{5.14}$$

де S_1, S_2 можна розглядати як параметри, які неявно присутні у визначенні функціоналу I (через $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(S_\alpha); \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(S_\alpha)$, $\alpha = 1,2$), а також K (через обмеження $\left(u^2 - \hat{u}^1\right)\cdot \nu^1 + \delta \geq 0$, записані для функцій $\mathbf{u}_\alpha$, визначених на S_α, $\alpha = 1,2$, див. рис. 5.1).

Таким чином, задача визначення НДС тіл 1 і 2 із урахуванням контактної взаємодії на кінематично генерованих поверхнях S_1, S_2 можна подати як зв'язану задачу (5.14), (5.13). Її можна сформулювати як задачу пошуку $\mathbf{u}$, що доставляє мінімум деякому функціоналові I на опуклій множині K при варійованих у межах підмножини G КГП S_1 і S_2.

Запропонована система співвідношень дає можливість, оперуючи в основному тільки з нею, організувати розв'язання зв'язаної задачі аналізу НДС та геометричного синтезу. При цьому як вихідна інформація задається кінематичне обмеження G. Наприклад, для випадку однопараметричного руху без проковзування тіла обертання 2 біговою направляючою радіусу R_1 (рис. 5.2):

$$h \approx \frac{1}{2}\left[\frac{x^2(R_1 - R_2)}{R_1 R_2} + y^2\left(\cdot \pi_1''\Big|_{y=0} - \frac{1}{R_2}\right)\right], \qquad (5.15)$$

де $\pi_1(y)$ – профіль тіла 1 у перерізі площиною zOy. Тоді, задаючи спочатку R_1, R_2 і зафіксувавши у подальшому $R_2 = const > 0$, підмножину G визначаємо як (рис. 5.3)

$$\{R_1 > R_2;\ \pi_1''(0) > R_2. \qquad (5.16)$$

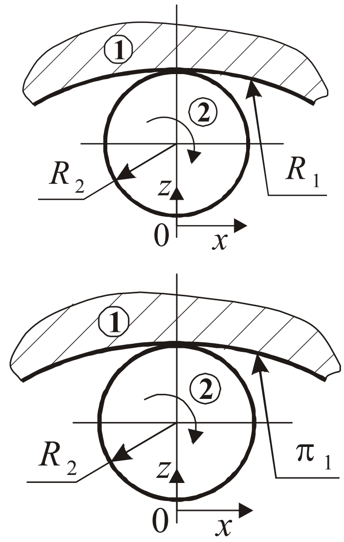


Рисунок 5.2 – Окремий випадок спряження тіл

У термінах дискретних величин маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{h(i+i,j) - 2h(i,j) + h(i-i,j)}{2\Delta_x^2} = const > 0; \\ \dfrac{h(i,j+1) - 2h(i,j) + h(i,j-1)}{2\Delta_y^2} > 0 \quad \forall i,j. \end{cases} \qquad (5.17)$$

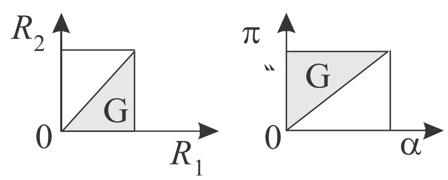


Рисунок 5.3 – Обмеження на геометричні параметри

Перші з цих співвідношень задають узгоджену змінну, другі – довільні, але зі збереженням знака другої похідної. У результаті як варійовані у циклі геометричного синтезу можна прийняти величину $R_1 > R_2$ та профіль $\pi_1(y)$, причому $\pi_1''(y) > R_2$.

Таким чином, задаючи деяке обмеження або критерій (за напруженнями, контактним тиском, переміщеннями), можна безпосередньо із аналізу НДС, доповненого кінематичними обмеженнями, визначати розв’язок задачі геометричного синтезу. Запропонований підхід об’єднує в єдиному циклі процедури аналізу НДС та геометричного синтезу СПТ, що контактують з можливістю взаємного руху або без нього. Ці особливості відрізняють цю постановку від традиційних, забезпечуючи більшу ефективність чисельних досліджень.

5.2 Узагальнена система співвідношень для урахування мікромеханічних моделей контактної взаємодії шорстких та модифікованих поверхонь із урахуванням фізичної та структурної нелінійності

Аналізуючи систему розв’язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії гладких тіл, записаних у вигляді:

$$\begin{cases} h_n = \delta - \sum\limits_m C_{nm} p_m, \ n, m \in I_c; \quad P = \sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum\limits_m p_m; \\ p_m \geq 0; \ h_n \geq \delta - \sum\limits_m C_{nm} p_m, \ n, m \notin I_c, \end{cases} \tag{5.18}$$

для рівнянь (перші два рядки в (5.18)), можна відзначити такі особливості.

1. Формально рівняння (5.18) об’єднують у прямому «сконденсованому» вигляді: фізико-механічні характеристики досліджуваної системи (вони представлені матрицею коефіцієнтів впливу C_{nm}); компоненти НДС (у вигляді розподілів контактного тиску p_m, через які за відомими співвідношеннями відновлюються всі компоненти векторів переміщень, напружень і деформацій на границях і всередині областей Ω_1, Ω_2); інтегральне зусилля **P**; зближення тіл як жорстких – δ; геометрична форма сполучених поверхонь (натягнуті на дискретну множину ординати h_1, h_2 у вузлових точках).

2. Отримана підсистема рівнянь (5.18) є лінійною за вузловими значеннями контактного тиску p, за сумарними зазорами h, зміщеннями δ і силою P.

3. Формально розв’язок (p_m, δ) не залежить від розподілу вузлових значень відстаней до поверхні S_1 і S_2 (тобто h_1, h_2 відповідно), а тільки від їх суми

$h = h_1 + h_2$. Таким чином, при запропонованому підході система не відображає індивідуальність кожної і спряжених поверхонь, а тільки сумарність зазору між ними. Іншими словами, розподіл контактного тиску «індиферентний» відносно умовного «переносу» тонкого поверхневого шару з одного тіла на інше. Зокрема, одну з поверхонь (S_1 або S_2) можна «сплющити» за рахунок такої процедури, віднісши усі їх сумарні відступи від плоскої форми на іншу. Як зауваження можна також відзначити, що і характеристики податливості можна рознести, одне з тіл представивши як абсолютно жорстке (тверде, тобто штамп), а до другого віднісши сумарну податливість. У сукупності дві такі процедури формалізують еквівалентність задачі про контакт двох пружних тіл задачі про дію жорсткого штампа на пружний напівпростір.

4. Система рівнянь у (5.18) щодо шуканих (p_m, δ) хоча і виглядає ідентичною лінійним алгебраїчним рівнянням, не є лінійною у силу обмежень на невід'ємність p_m всередині області контакту, на їх обнуління поза цією зоною, а також в силу неприпустимості контакту поза цією областю (тобто в силу підсистеми нерівностей в (5.18)).

5. Формально систему (5.18) можна «інвертувати», тобто трактувати її як рівняння відносно невідомих (h_m, δ), що доставляють системі задане зближення δ і нав'язаний розподіл p_m.

Останній із висновків відображає властивість оберненості і зв'язаності, виражене у системі рівнянь (5.18) у явному вигляді. Дійсно, при аналізі напружено-деформованого стану (тобто коли шуканими є (p_m, δ) при заданих (h_m, P)) геометричну форму поверхонь (в сенсі інтегральну функцію зазору, див. висновок 3) задає набір h_m, при цьому варіювання геометричної форми здійснюється шляхом покомпонентної зміни h_m. З іншого боку, при визначенні форми зазору у сполученні контактуючих тіл (тобто коли шукані і задані величини міняються місцями) можна задавати бажаний розподіл контактного тиску p_m шляхом призначення його вузлових значень, а також варіювати його, просто міняючи покомпонентно масив цих вузлових значень контактного тиску. При цьому слід зауважити, що і пряма (див. висновок 4), і обернена трактовна підсистеми рівнянь у співвідношеннях (5.18) не дає можливості оперувати з ними як лінійними, оскільки діє, крім них, ще й множина обмежень типу нерівностей у (5.18).

Іншими словами, якщо задовольнити вимогу невід'ємності контактних вузлових значень тиску p_n (тобто два заключні рядки в (5.18)), то співвідношення (5.18) формально є системою лінійних алгебраїчних рівнянь щодо змінних – вузлових значень $p = \{p_1,...p_N\}^T$, а також величини зближення δ, при заданих зусиллі P і масиві вузлових зазорів $h = \{h_1,...h_N\}^T$. Таким чином, цю систему рівнянь у загальному випадку можна записати у вигляді відображення T множини $\{h, P\}$ на множину $\{p, \delta\}$:

$$\{p, \delta\} = T\{h, P\}. \tag{5.19}$$

У цьому конкретному випадку відображення T конкретизується за допомогою оберненої матриці K лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\mathbf{\Pi} = \{p, \delta\}^T = \mathrm{K}^{-1}\{h, P\}^T; \mathbf{\Pi} = \mathrm{K}^{-1}\mathbf{H},\ \mathrm{K} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & C & & ... \\ & & & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 & ... & \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

а в лівій та правій частинах – вектори $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{H}$, складені з шуканих та заданих величин відповідно. З іншого боку, задачу (5.18) можна обернути:

$$\{h, P\} = T^{-1}\{p, \delta\}, \tag{5.21}$$

причому конкретно для системи (5.20) це – зв'язок формально лінійний:

$$\mathbf{H} = \{h, P\}^T = \mathrm{K}\{p, \delta\}^T;\ \mathbf{H} = \mathrm{K}\mathbf{\Pi}. \tag{5.22}$$

Таким чином, отримуємо пару взаємнообернених задач (5.19), (5.21), або в конкретизированому матричному вигляді – (5.20), (5.22), причому системи (5.20) і (5.22) – формально лінійні.

Наведені постановки (знову ж таки формально) рівноправні. Відповідно, вони безпосередньо можуть бути застосовні як для розв'язання задач аналізу, так і геометричного синтезу (відновлення форми поверхонь контактуючих тіл). Тут мається на увазі, що задача аналізу полягає у визначенні розподілів контактного тиску p при заданому зусиллі P і розподілі зазору h, а геометричний синтез полягає у знаходженні такого h, який забезпечує заданий розподіл p. Початковий якісний аналіз структури співвідношень (5.18) у руслі роботи [17] дає підставу для наступних висновків: коефіцієнти матриці С визначають фізико-механічні властивості взаємодіючих пружних тіл; величина δ описує зміщення тіл як недеформівних; масив величин h визначає розподіл зазору, тобто, по суті, відмінність форми поверхонь взаємодіючих тіл у напрямку нормалі між ними; сила P задає загальний інтегральний вплив на контактуючі тіла.

Таким чином, як уже зазначалося, структурно у співвідношеннях (5.18) є присутні «геометрична» h, «кінематична» δ, «силова» P, «статична» p складові інформації, із якою здійснюється оперування у ході розв’язання задач (5.19), (5.21) (або (5.20), (5.22)). Якщо у будь-які з цих складових загального інформаційного масиву вноситься будь-яка корекція, то загальна структура співвідношень зберігається, хоча самі вони можуть видозмінюватися за складом множини змінних.

Так, якщо врахувати шорсткість поверхонь взаємодіючих контактуючих тіл у вигляді лінійного Вінклерова шару (рис. 5.4), для якого зв’язок «переміщення w – тиск p» має вигляд: $w = \lambda p$, де λ – податливість, то рівняння сумісності переміщень точок поверхонь тіл в контакті в (5.18) не зміниться. При цьому самі коефіцієнти матриці C зміняться: $C := C + \lambda E$, де E – одинична діагональна матриця.

Якщо ж розглянути загальний випадок структурно-фізичної нелінійності (див. рис. 5.4 – тут в загальному випадку податливість $\lambda = \lambda(p, x, y)$), то система співвідношень у (5.18) поповнюється нелінійними складовими і набуває вигляду:

$$\begin{cases} h = \delta - \sum\limits_m C_{nm} p_m - w(p_n), \ n, m \in I_c; \\ P = \sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum\limits_m p_m. \end{cases} \qquad (5.23)$$

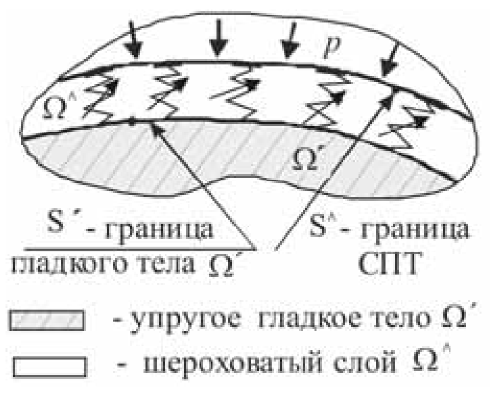


Рисунок 5.4 – Модель шорсткого тіла з нелінійним пружним поверхневим шаром

Таким чином, формально лінійна система лінійних рівнянь такою перестає бути, однак при цьому у певному сенсі зберігається властивість взаємнооднозначної відповідності (5.21) при заданій залежності $w(p)$. У результаті при розв’язанні тепер уже оберненої задачі (5.21) із нелінійним пружним шаром, який підпорядковується залежності $w = \bar{\lambda} \cdot p^s$, де $\bar{\lambda}, s$ – деякі емпіричні або обчислювані параметри, можна організувати, наприклад, наступний ітераційний процес пошуку розв’язку:

$$\begin{cases} \gamma := 0; \quad P = \sum_r p_r; & (*) \\ \delta = \sum_r C_{\mu r} p_r \; r \in J; \; \mu : h_\mu = 0; & (**) \\ h_n^{(\gamma)} = \delta - \sum_m C_{nm} p_m - \bar{\lambda}\; p_n^s; n \in J, m \in J; h \neq \mu; & (***) \\ h_n^{(\gamma)} = \delta - \sum_m C_{nm} p_m, n \notin J, m \in J; & (\vee) \\ \overline{h}_n^{(\gamma)} :\geq h_n^{(\gamma)}, n \notin J; & (\wedge\wedge) \\ \overline{h}_n^{(\gamma)} : \left\{ L_e \left(p'_{e_f} \cdot \Delta_{e_f}^{(\gamma)(\gamma)'}{}_{e_f} \right) \varepsilon, e \in \Gamma(J); f = 1 \div 7 \right\}; & (\wedge\wedge\wedge) \\ \gamma := (\gamma + 1). & (:) \end{cases} \tag{5.24}$$

У ітераційному процесі (5.24) цикли здійснюються в межах $(**) \to (:) \to (**)$. При цьому пряме та явне обчислення зазорів h_n на етапі з номером *γ* за співвідношеннями (***) не розв’язує задачі безпосередньо (хоча в цих рівняннях не присутні складові, що явно змінюються з γ). Неявний же вплив здійснюється за результатами етапів (^)–(^^^). Зокрема, на етапі (^^) здійснюється задоволення умові додатності зазору поза зоною контакту шляхом призначення там зазорів $\overline{h}_n^{(\gamma)}$, що перевищують $h_n^{(\gamma)}$, які задовольняють (^), але поза областю контакту.

Крім того, призначені таким чином зазори $\overline{h}_n^{(\gamma)}$ можна підпорядкувати певним вимогам на границі Γ області контакту. Якщо виходити з виконання тотожності Герца-Сіньоріні

$$\Omega = p \cdot \Delta \equiv 0 \tag{5.25}$$

всюди, де $\Delta = \begin{cases} \overline{h}_n^{(\gamma)} - h_n^{(\gamma)}, n \notin J; & 0, \; n \in J \end{cases}$ – зазор між контактуючими тілами в актуальній конфігурації, то при диференціюванні Ω вздовж нормалі *n* до Г умова

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \Delta + p \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial n} \tag{5.26}$$

виконується за рахунок обнуління там *p* в силу закономірностей контакту тіл з поверхнями, що мають плавно змінювану нормаль [175], а також в силу, того, що зазор

$$\left\{ \Delta\big|_S \equiv 0, \Gamma \subset S \right\} \Rightarrow \Delta\big|_\Gamma \equiv 0\,. \tag{5.27}$$

Повторне диференціювання дає:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \cdot \Delta + 2\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial n} + p\frac{\partial^2 \Delta}{\partial n^2}, \tag{5.28}$$

і для виконання умови $\left.\frac{\partial^2 \Omega}{\partial n^2}\right|_\Gamma = 0$ потрібно, щоб

$$\left.\left(\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial n}\right)\right|_\Gamma = 0. \tag{5.29}$$

Із (5.29) випливає обнуління градієнта p на границі контакту або градієнта зазору в актуальному стані. Це – сильне обмеження. З огляду на довільність у заданні розподілу p, виконання (5.29) слід забезпечити за рахунок градієнта Δ, причому не строго, а з деякою заданою похибкою ε (див. (^^^) в (5.24)), враховуючи також, що задача розв’язується на дискретній сітці.

У разі дискретизації задачі за методом граничних елементів, як це здійснено у цій роботі, границя області контакту подається у вигляді множини вузлів Γ_J, що примикають до *J*. Якщо їх пронумерувати через $e = 1,2,...,N_\Gamma$, то вони, розглядувані як центральні для кожної шестикутної комірки, виявляться сусідніми із шістьма іншими. Серед цих вузлів частина належить множині *J*, частина – ні. Такі осередки є, умовно кажучи, «змішаними» (що містять вузли сітки, які належать і не належать *J*). Таким чином, утворюється множина «змішаних» шестикутних осередків, що частково перекривають один одного. Якщо ввести в кожному осередку свою локальну нумерацію $e_f, f = 1 \div 7$, то умова (5.29) може отримати свій дискретний аналог (див. (^^^) в (5.24)). Там L_e – оператор, який здійснює апроксимацію (колокацію або осереднення) лівої частини (5.29) за осередком (околом) *e*. У дужках (тобто «аргументи» оператора L_e) в (^^^) – дискретні аналоги операторів $\partial p / \partial n$ і $\partial \Delta / \partial n$ в (5.29) відповідно. Вони віднесені до набору вузлів e_f в осередку.

Як уже зазначалося, вимога рівності нулю похідної уздовж нормалі до межі контактної області на самій границі Г найчастіше неможливо задовольнити в сильному сенсі в силу недиференційованості умов Герца-Сіньоріні. Однак ослаблене формулювання типу описаного вище може бути застосоване. Із огляду на це, умову (5.29) можна намагатися виконати або точно (з дотриманням усіх обмежень на тиск і зазори), або з деякою допустимою похибкою. У будь-якому випадку визначений взагалі і таким чином зокрема набір зазорів $h_n^{(\gamma)} (n \in J)$ та $\overline{h}_n^{(\gamma)} (n \notin J)$ має не порушувати умов подання властивостей пружних тіл властивостями напівпросторів (наприклад, неприпустиме утворення за рахунок варіювання h розривів («сходинок», зламів тощо)). Якщо умови, перераховані тут, не вдається виконати за рахунок відповідного вибору $\overline{h}_n^{(\gamma)}$, то доведеться або перепризначити розподіл $p_n (n \in J)$, а значить, $J^{(\gamma)}$ стане змінним у ході ітераційного процесу, або змінити δ, і отримаємо змінюваний $\delta^{(\gamma)}$.

Таким чином, розв'язання задачі геометричного синтезу умовно поділяється на більш прості процедури обчислень для внутрішніх вузлів зони контактування (J), і на більш складні – для зовнішніх і приграничних до/з нею вузлів.

Представлені вище співвідношення є взаємооберненими за набором заданих і шуканих величин. Це – суттєва їх перевага. Разом із тим ця система рівнянь була розглянута з ніби за замовчуванням виконаними обмеженнями типу нерівностей у (5.18). Проте ці обмеження діють, і їх потрібно задовольняти. Природно, що це може коригувати розв'язання (наприклад, на етапі ($\wedge\wedge$) в (5.24)). Однак при цьому будуть, як плата за цей крок, порушуватися умови гладкості поверхні контактної взаємодії: на ній можуть провокуватися уступи або злами на границі зон контакту. Це – природний недолік, що випливає зі складної природи *контактної взаємодії* складнопрофільних тіл. Адже в разі відсутності таких обмежень будь-якому бажаному розподілу p можна було б легко поставити у відповідність профіль h, який такий розподіл контактного тиску забезпечує.

Виходячи із зазначених обставин, необхідно звернутися до альтернативних постановок задач обґрунтування геометричної форми поверхонь контактуючих тіл.

5.3 Методи обґрунтування сприятливого профілю контактних поверхонь за критерієм мінімізації контактного тиску або компонент напружено-деформованого стану

Прийнята у роботі постановка задачі аналізу контактної взаємодії контактуючих тіл дає можливість трактувати задачу синтезу геометричної форми контактуючих поверхонь як задачу відновлення розподілу зазорів h у вигляді функції двох змінних, які задають дотичну площину до поверхні у серединній точці області контакту. При цьому на розподіл контактного тиску p або на компоненти НДС накладається деяка вимога (цільова функція) вигляду

$$p^{\max} \to \min, \sigma^{\max} \to \min, \tag{5.30}$$

де $p^{\max}$ – максимальний контактний тиск у плямі контакту; а $\sigma^{\max}$ – максимальне значення деякої критеріальної величини, що є функцією компонент напружено-деформованого стану і характеризує міцність контактуючих тіл (наприклад, максимальні дотичні напруження). Запишемо (5.30) у загальному вигляді для заданої (різної у різних випадках) величини

$$\tau \to \min. \tag{5.31}$$

З огляду на те, що розподіл h «вбудовано» у систему розв'язувальних рівнянь для опису контактної взаємодії, задача (5.31) перетвориться до вигляду

$$\tau(h) \to \min. \tag{5.32}$$

Природно, що крім вимог (5.32), можуть діяти і деякі обмеження

$$\zeta(h) \geq 0. \tag{5.33}$$

Формально застосовуючи до задачі про контактну взаємодію процедуру дискретизації, наприклад, за МСЕ, методом скінченних різниць або МГЕ, отримуємо у підсумку замість (5.32) та (5.33) їхні дискретні аналоги:

$$\overline{\tau}(h) \to \min, \overline{\zeta}(h) \geq 0, \tag{5.34}$$

де тепер уже h – набір вузлових значень зазорів.

Перехід до скінченновимірних подань змінних стану (переміщень точок u, напружень σ або контактного тиску p) спонукає аналогічно до цього переводити до такої апроксимації і розподіл міжвузлових зазорів. Ця ніби очевидна дія може призвести при розв'язанні задач оптимізації зазору до деяких особливостей. Зокрема, при варіюванні h від нульового розподілу, наприклад, кусочно-лінійної функції типу «шестигранна піраміда» на рис. 1.4.4 або на рис 5.2, отримуємо ситуацію, представлену на рис. 5.5.

Як видно, на певному етапі ітераційного процесу $(s = 1, 2, ...)$ може скластися ситуація, коли поточний розподіл $p\left(h^{(s)}\right)$, що отримується як кусочно-лінійна апроксимація за вузловими значеннями $p_m^{(s)}$, які визначені на цьому кроці розв'язання у ході здійснення ітераційного процесу, потребує обчислення компонент чутливості за вузловими зазорами. Якщо безпосередньо застосовувати ту ж кусочно-лінійну апроксимацію для h_m, то варіювання зазору за рахунок розширення в нижнє тіло (див. рис. 5.5) – випадок Δh_n^I (локальне «розмивання», убування матеріалу одного з тіл), може призвести до розподілу $p\left(h^{(s)} + \Delta h_n^I\right)$ а, значить, і τ (далі – також) із нульовим вузловим значенням p_n. В іншому випадку, коли варіювання призведе до нарощування матеріалу нижнього тіла назовні, отримуємо розподіл $p\left(h^{(s)} + \Delta h_n^{II}\right)$ з різким зростанням значення p_n. Це створює проблеми з обчисленням компонент Гессіана, наприклад, із застосуванням скінченно-різницевих формул типу

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial h_r} \approx \frac{\tau_k^{(s)}\left(h^{(s)} + \Delta h_r^I\right) - \tau_n^{(s)}\left(h^{(s)}\right)}{\Delta h_r^I} \approx \frac{\tau_k^{(s)}\left(h^{(s)} + \Delta h_r^{II}\right) - \tau_n^{(s)}\left(h^{(s)}\right)}{\Delta h_r^{II}}. \tag{5.35}$$

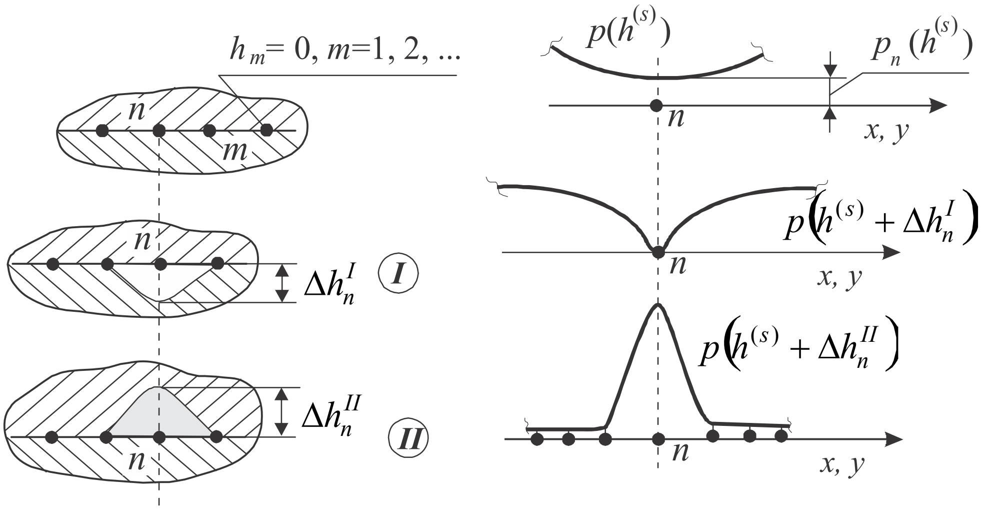


Рисунок 5.5 – До варіювання вузлових зазорів у плоскому стику

Дійсно, обчислення цих компонент за способами I і II у (5.35) призводить до результатів, що різко відрізняються. Ця ситуація ускладнюється тим, що на $(s+1)$-му кроці може скластися «градієнт» у конкретному напрямку варіювання h_r, який не збігається з напрямком його варіювання при обчисленні похідних за формулою (5.35). Тоді ситуація «градієнт I – скінченна різниця II» (ГI – СРII) може призвести на наступному кроці до ситуації ГII – СРI, відбудеться «розгойдування» у чисельній процедурі. Таким чином, може статися і наростання чисельної похибки, і чисельна нестійкість.

Як альтернативний варіант пропонується перейти від змінних h до змінних p:

$$h = h(p) \Rightarrow \tau(p,h) = \tau\big(h(p),p\big) \Rightarrow \frac{\partial\tau_k^{(s)}}{\partial h_r} \approx \sum_m \frac{\partial\tau_k^{(s)}}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial h_r}. \tag{5.36}$$

Застосовуючи скінченно-різницеве диференціювання у виразі під знаком підсумовування в (5.36), слід зазначити, що компоненти типу $\Delta\tau_k^{(s)} / \Delta p_m$ потребують розв'язання спеціальних додаткових задач контактного взаємодії, проте в цілому очікувана гладка зміна одержуваних розв'язків. Компоненти типу $\Delta p_m / \Delta h_r = (\Delta h_r / \Delta p_m)^{-1}$ також змінюються плавно, тому що вони схожі за характером з функцією відгуку на дію вузлового тиску, прикладеного за розподілом базисної функції, що відповідна вузлу m (див. рис. 5.5).

Запропонований спосіб розв'язання має потенційне перевагу перед традиційним прямим підходом варіювання h, однак при цьому втрачається «локальність» його (h) варіювання. Однак така «плата» варіювання відповідає і характеру контактної взаємодії, для якого локальна зміна тиску призводить до нелокальної зміни картини деформування поверхні контактуючих тіл, і «цінності виграшу», внаслідок якого стає можливим чисельна реалізація алгоритмів мінімізації для задач (5.30)–(5.34).

Також слід брати до уваги специфіку варіювання вузлових значень p_m, яке проводиться із дотриманням інтегральної умови $P = \sqrt{3/2}\cdot c^2 \sum_m p_m = const$. Крім того, для компонент $p_r = 0$ варіювання вузлового тиску можливе лише в бік додатних значень. Також очевидно, що у прийнятій постановці існує таке варіювання зазору (безпосередньо через h), яке призводить до рівномірного приросту або зменшення матеріалу контактуючих тіл на поверхні контакту, що у кінцевому підсумку кореспондується із незмінністю розподілу контактного тиску, а, значить, і компонент НДС взаємодіючих тіл, а також функцій якості τ, на них побудованих.

Наведені особливості важливо враховувати при розв'язанні задач синтезу геометричної форми в будь-якій із постановок.

5.4 Методи створення актуального сприятливого профілю контактних поверхонь за рахунок додаткової керованої пружної деформації від дії спеціально розрахованої допоміжної системи сил

Задача формоутворення є вихідним проектно-технологічним етапом при створенні з’єднань деталей машинобудівних конструкцій, які є складнопрофільними тілами зі слабо відмінними формами їхніх поверхонь, що сполучаються. Основним кроком при цьому традиційно вважається критерій реалізації кінематичного зміщення, який закладається як у процесі конструктивного опису поверхонь деталей, так і в процесі їх виготовлення. І у першому, і у другому випадку деталі, що сполучаються, розглядаються як абсолютно жорсткі тіла.

На першому етапі мова йде про забезпечення заданого або бажаного взаємного руху елементів конструкції. Зубці зубчастих передач, поршні двигунів внутрішнього згоряння і гідропередач, тіла обертання підшипників кочення і ковзання, опорні поверхні механізмів нахилу дугових електроплавильних печей, система «колесо – рейка», опорні поверхні валів турбін і колінчастих валів ДВЗ – усе це приклади СПТ, які здійснюють або складні рухи у просторі, або складні рухи відносно інших тіл, або рухи в умовах тертя, змащення і зношування, або передачу високих навантажень. Відповідно, у загальному випадку складний відносний рух двох сполучених тіл зводиться до миттєвого гвинтового руху. Частинні його випадки призводять або до перекочування поверхонь тіл без взаємного ковзання, або до ковзання без перекочування, або до вертіння, або до їх комбінації. При цьому, чим складніший необхідний рух, тим складніша геометрична форма контактуючих поверхонь, однак, чим вище навантаження, тим більшою повинна бути область контакту. Останній аргумент пояснює очевидну тенденцію: чим вище рівень контактного тиску, тим більшого значення набуває модифікація номінальної форми поверхонь, яка (форма) забезпечує в ідеальному випадку велику (в сенсі таку, що перевищує) область контакту. Модифікація дає можливість за рахунок зміни локалізації первинного контакту скоригувати несприятливий вплив детермінованих або випадкових чинників, що чинять різко негативний вплив на роботу пар в контакті (перекоси, загальні деформації деталі, похибки збирання і базування, зміна навантаження, вібрації, температурні деформації, – все це як причини і джерела, а як наслідок – кромочні контакти, нерівномірні зношування, непрогнозована концентрація контактних напружень тощо).

Таким чином, на теперішній час набули високого рівня розвитку методи і засоби попередження проблем, що виникають на етапі експлуатації, шляхом коригування відповідної геометричної форми на етапі проектування. Крім того, ця тенденція реалізується на етапі технологічної підготовки виробництва (тобто розробки технологічних процесів виготовлення деталей) і власне у процесі виготовлення. Крім того, останнім часом в модель роботи часто привносять [1, 424] також і вплив пружних деформацій на умови контактної взаємодії під навантаженням.

Однак для багатьох конструкцій усі перелічені чинники не дають можливості уникнути високих рівнів контактних навантажень. Більш того, виникає ситуація, коли сприятлива геометрична форма поверхонь, розрахована на один рівень навантаження, перестає такою бути для іншого. При цьому, як правило, резерви міцності матеріалу та технологій зміцнення виявляються вже вичерпаними.

У таких умовах слід звернутися до першоджерел виникнення проблемної ситуації. Вона викликається, у першу чергу, обмеженнями на розміри і масу елементів машин, які диктуються компонувальними та іншими міркуваннями. У другу – прагнення поліпшити умови контактної взаємодії змушує здійснювати модифікацію контактуючих поверхонь із переходом від поверхневої локалізації контакту до лінійчастої або початково точкової. У третю чергу, що найважливіше, у цих умовах рівні, по-перше, зазорів між поверхнями контактуючих тіл, по-друге, – нормальних переміщень їхніх точок, спричинених «глобальною» податливістю (тобто податливість внаслідок деформування всього тіла), а, по-третє, – нормальних переміщень внаслідок «локальної» податливості шорсткості, пружного шару або плівки, – усі ці величини, як уже зазначалося раніше в роботі, виявляються сумірними. Більш того, характер розподілу контактного тиску може різко змінюватися при невеликій зміні технологічних чинників.

У зв’язку з цим за відсутності домінуючої компоненти складно спиратися тільки на тенденції зміни, наприклад, контактного тиску або контактних площадок при незначному варіюванні деяких параметрів, оскільки сама зміна, цим викликана, може виявитися сумірною із рівнем контрольованих величин у початкових станах.

Як один із варіантів досягнення позитивного ефекту у такому випадку може бути задіяне привнесення у множину діючих чинників додаткового. Дійсно, якщо і зміна рівня навантажень від номінального, і зміна форми поверхонь сполучених деталей, а також зміна фізико-механічних властивостей проміжного шару здійснює негативний вплив на працездатність, довговічність або функціональні властивості деталей (або резерви використані повністю), то можливості компромісних рішень у цьому просторі чинників вичерпані. У цих умовах введення додаткового чинника може призвести до позитивного ефекту. Зокрема, у такій ролі може виступити додаткове навантаження $\mathbf{F}_{ad}$, яке діє незалежно від експлуатаційного (з одного боку), а, з іншого, – може під нього адаптуватися. На користь можливості та доцільності такого кроку свідчить той факт, що оскільки рівень початкових зазорів між контактуючими тілами малий, то пружне їх деформування може призвести до поля переміщень на контактуючих поверхнях, за рівнем сумірних із початковими зазорами, а, значить, здатних істотно змінити умови контактування, у т.ч. – у сприятливому напрямку. Внаслідок цього може бути запущений механізм оптимізації складу множини додаткових навантажень та їх величини.

Формальна постановка задачі полягає в тому, що в систему розв'язувальних рівнянь (5.36) вводиться додаткова компонента переміщень $v(x,y)$ точок контактуючих поверхонь:

$$Cp + D(p) = \delta - \left(h + v(\mathbf{F}_{ad})\right). \tag{5.37}$$

Слід взяти до уваги, що умова інтегральної рівності вузлових значень контактного тиску притискному зусиллю формально залишається без зміни.

Задача синтезу оптимального поточного профілю контактуючих поверхонь перетворюється у вимогу

$$\tau(p, h, \mathbf{F}_{ad}) \to \min, \tag{5.38}$$

де τ – як і раніше, деяка функція якості (максимальні тиск, напруження тощо).

З іншого боку, для кожного рівня навантаження Р можна визначити свій оптимальний профіль через раніше введений критерій (5.32), а потім здійснити за рахунок підбору $\mathbf{F}_{ad}$ його коригування.

Формально вимога (5.38) може призвести до дуже складного (для практичної реалізації) закону розподілу $\mathbf{F}_{ad}$. У зв'язку із цим пропонується ввести у розгляд множину базових навантажень $f_{ad}^k, k = 1,2,...,N_f$, які можна реалізувати без істотних проблем, а потім, з огляду на лінійність за додатковими навантаженнями, записати лінійну комбінацію

$$v = \sum \pi^k \cdot \bar{v}^{(k)}(x, y)\,, \tag{5.39}$$

де $\bar{v}^{(k)}(x, y)$ – переміщення точок контактує поверхні від дії f_{ad}^k.

З урахуванням (5.39) задача (5.38) перетвориться до пошуку оптимального набору коефіцієнтів π^k, що мінімізують τ як функцію тепер уже цих коефіцієнтів.

У результаті реалізації запропонованого підходу створюється потенційна можливість корекції умов контактної взаємодії залежно від виду та рівня поточного основного експлуатаційного навантаження.

5.5 Обґрунтування форми контактних поверхонь залежно від фізико-механічних властивостей пружного проміжного шару між ними

Можливості синтезу сприятливої геометричної форми контактуючих поверхонь складнопрофільних тіл доповнюються ще й арсеналом властивостей нелінійно пружного шару, розміщеного між ними. При цьому варійованими можуть бути: форма шару, тобто розподіл його товщини h_c; вид матеріалу шару або характеристики механічної чи термічної його обробки; закон зміни залежності $w(p)$. Тоді рівняння контактної взаємодії приймуть вигляд:

$$Cp + w(p) = \delta - (h + h_c)\,,\ \sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum_m p_m = P\,. \tag{5.40}$$

У (5.40) присутні члени, що містять додатковий зазор h_c (див. п.1 вище), а також переміщення $w(p)$ як функції тиску p і фізико-механічних властивостей матеріалу проміжного шару (див. пп. 5.2, 5.3 вище). При цьому залежність $w(p)$ зазвичай містить набір доданків вигляду:

$$w(p) = \sum \mu_k \rho_k(p),\ k = 1, 2, ..., N_p\,, \tag{5.41}$$

де μ_k – деякі коефіцієнти, що відображають фізико-механічні властивості матеріалу, а $\rho_k(p)$ – характерні складові залежності $w(p)$, визначаються видом матеріалу (гуми, пластики, кераміка тощо). Тоді при заданому складі множини $\rho_k(p)$ задача (5.40) зводиться до вигляду

$$\tau(\mu_k, h_c) \to \min. \tag{5.42}$$

З іншого боку, можна поставити задачу синтезу не тільки товщини шару і деяких властивостей його матеріалу, а й синтезу самого типу матеріалу. При цьому як варійовані формально можна залучити досить широкий набір $\rho_k(p)$, властивий різним матеріалам, а потім звернутися до критеріальної вимоги

$$\tau(\mu_k, h_c, \rho_k) \to \min. \tag{5.43}$$

Отримані профілі h_c і властивості матеріалу можуть бути бажаними, але технічно важко реалізованими. Наприклад, якщо мова йде про напилення багатошарового покриття, то з технологічних вимог товщина кожного шару є слабо змінною на площадці покриття (і, як правило, знаходиться в обмеженому коридорі можливих значень); якщо шар є складеною прокладкою, то зазвичай шари або рівномірні за товщиною, або конусні, або рифлені, причому типорозміри за різними параметрами – дискретні; якщо мається на увазі шар шорсткості, то його властивості визначаються матеріалом, способом виготовлення (лиття, прокат) і механічної обробки (чистове точіння, шліфування, полірування), а також від виду термообробки. У таких умовах оптимальне поєднання μ_k, h_c, ρ_k відшуковується нібито в «проекції» на технічно і технологічно можливі рішення. У той же час для унікальних і особливо відповідальних конструкцій можлива також і постановка «з відкритою» множиною варіювання і форми, і властивостей матеріалів проміжного шару.

5.6 Загальна постановка задач аналізу чутливості при дослідженні контактної взаємодії складнопрофільних тіл

Запишемо систему розв'язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії шорстких складнопрофільних тіл у вигляді

$$\begin{cases} C^\wedge p + D(p)p + h - \delta\rho' = 0, \ \sum_m p_m = P^\wedge,\ P^\wedge = \dfrac{2\sqrt{3}}{3c^2}P. \end{cases} \tag{5.44}$$

Співвідношення (5.44) визначають систему рівнянь щодо невід'ємних p_n всередині області зближення δ. При цьому вигляд матриці $C^\wedge$ визначається наявністю або відсутністю лінійно пружного вінклерового шару на границі контакту, а матриця D визначає нелінійну компоненту пружного шару. З іншого боку, ці співвідношення можна записати у загальному вигляді

$$L^{\wedge}(p, E^{*}, \lambda, D, \delta, h, P) = 0, \qquad (5.45)$$

де оператор $L^{\wedge}$ описує функціональну залежність розв'язувальної системи співвідношень щодо тиску р і зближення δ, а також визначає параметричну залежність від фізико-механічних властивостей матеріалів контактуючих тіл (зведений модуль пружності E^{*}), пружних властивостей лінійного (податливість λ) і нелінійного (податливість $D(p)$) проміжних шарів, притискного зусилля Р і початкового зазору між тілами h.

Розподіл контактного тиску в силу (5.45) залежить від значень варійованих параметрів $(E^{*}, \lambda, D, h, P)$. Природно, що варіювання цих параметрів позначається на розв'язку. При цьому досить важливим є питання аналізу чутливості розв'язку до варіювання тих чи інших параметрів. Це важливо і з точки зору визначення швидкості та тенденції зміни р при варіюванні параметрів із метою визначення їх оптимального значення, і для виявлення збурення розв'язку за детермінованої (проектної) або стахостичної (виробничо-технологічної) зміни цих параметрів.

Істотним міркуванням при визначенні чутливості розв'язку до варіювання перерахованих вище параметрів є те, що сама вихідна система розв'язувальних співвідношень сформована у дискретному вигляді. Це зумовлює застосування скінченно-різницевих співвідношень для визначення чутливості (див. розд. 4) тих чи інших розподілів (наприклад, p) або характеристик (наприклад, $p_{\max}$) до зміни того чи іншого змінного параметра

$$\partial * / \partial p_k^{\mathrm{var}} \approx \left[\pm * \left(p_k^{\mathrm{var}} \pm \Delta p_k^{\mathrm{var}} \right) \mp * \left(p_k^{\mathrm{var}} \right) \right] / \Delta p_k^{\mathrm{var}}, \qquad (5.46)$$

де * – контрольований розподіл (або характеристика).

У результаті застосування співвідношень (5.46) отримується масив розподілів (або величин) $\bullet_k = \partial \bullet / \partial p_k^{\mathrm{var}}$. Якщо становить інтерес збурення одержуваного розв'язку при деякому базовому (номінальному) наборі параметрів p_k^{bas}, то зручно розглянути варіювання p_k^{var} через безрозмірні параметри α_k:

$$p_k^{\text{var}} = p_k^{bas}(1+\alpha_k), \tag{5.47}$$

Тут межі зміни α_k визначаються фізичним змістом p_k^{var}. Тоді можна побудувати залежності $*(\alpha_k)$, що визначають вплив ступеня зміни того чи іншого параметра на зміну контрольованої функції або розподілу. Також у термінах «α_k» стає можливим визначення чутливості. При цьому (5.46) набирає вигляду:

$$\bullet_k = \left\{\pm *\left[p_k^{bas}(1\pm\alpha_k)\right] \mp *\left(p_k^{bas}\right)\right\} / \alpha_k p_k^{bas}. \tag{5.48}$$

Отримана таким чином інформація про зміну розв’язку задачі про контактну взаємодію СПТ може бути покладена в основу аналізу збурення одержуваного розв’язку на детерміновану або стохастичну зміну параметрів p_k^{var}, а також оптимізації розв’язку (5.45) за тими чи іншими критеріями. Крім того, важливими є питання безперервності та стійкості зміни розв’язку за окремим p_k^{var}, які також можуть бути оцінені за одержуваною у результаті інформацією. Таким чином, представлені підходи можуть бути покладені в основу аналізу збурень розв’язку контактної задачі або обґрунтування доцільності та ефективності тих чи інших способів досягнення рішень, які відповідають тим чи іншим вимогам і обмеженням.

5.7 Розв’язання системи тестових задач контактної взаємодії та синтезу поверхонь складнопрофільних тіл із урахуванням фізичної та структурної нелінійності

Розроблені та описані у розд. 4, 5 підходи, методи та моделі дають можливість здійснювати розв’язання низки тестових задач про контактну взаємодію складнопрофільних тіл із урахуванням структурної та фізичної нелінійності, а також обґрунтування форми поверхонь контактуючих тіл. Нижче у підрозділі описані розв’язання цих задач.

Вплив форми профілю поверхонь контактуючих складнопрофільних тіл на розподіл контактного тиску між ними. Для прикладу розглядається задача про осесиметричний контакт СПТ, зазор між якими записується у вигляді:

$$h = G_1 \cdot \left[(x^2+y^2)^{K/2} / a^K\right] + G_2 \cdot (x^2+y^2)^{L/2} / a^L. \tag{5.49}$$

Тут $K = 2$, $L = 4$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радіус-вектор поточної точки в площині xy (дотична до контактуючих поверхонь), а G_1, G_2 – варійовані параметри ($G_1 + G_2 = 1$) (у табл. 5.1 наведені варіанти поєднань параметрів G_1, G_2, за яких здійснювалися чисельні дослідження). Надалі визначався p_H – максимальний контактний тиск, що отримано при розв'язанні задачі Герца (K =2, $\lambda = 0$); а також a_H – розмір контактної плями, що отримано при розв'язанні задачі Герца (K =2, $\lambda = 0$). Відповідно, у розгляд введено безрозмірні величини

$$x_a = x / a_H, \qquad q = p / p_{H\max}. \tag{5.50}$$

На рис. 5.6–5.8 наведені деякі характерні розподіли, отримані у ході досліджень. Тут на рисунках позначені варіанти: *а* – розподіли контактного тиску у осьових перерізах; *б* – зміна характеру розподілу контактного тиску залежно від параметра G_1; *в* – зміна максимального значення контактного тиску залежно від параметра G_1; *г* – зміна значення контактного тиску у центральній точці контакту залежно від параметра G_1.

Як видно із аналізу отриманих результатів, залежно від співвідношення γ_1 та γ_2 розподіл контактного тиску або подібний до «герцівського» при $\gamma_1 = 0$ (тобто розподіл із єдиним максимумом у центрі), або тяжіє до розподілу із локальним мінімумом у центрі та максимумом на деякій віддалі від центра (характерний, наприклад, для розподілів тиску при розв'язанні задачі Штаєрмана при ступеневому законі розподілу із показником ступеня 4 та більше). Отже, варіюванням параметрів γ_1 та γ_2 можливо впливати і на розміри контактної плями, і на розподіл контактного тиску, і на його максимальне значення.

Задача визначення впливу форми профілю та податливости проміжного шару на характеристики контактної взаємодії. На тестовому прикладі розв'язується задача визначення впливу форми профілю та податливості проміжного шару на характеристики контактної взаємодії.

$$Cp + \lambda p = \delta - h, \tag{5.51}$$

якщо

$$h = A(r / A_0)^K. \tag{5.52}$$

Таблиця 5.1 – Поєднання параметрів G_1, G_2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_1	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1	0,75	0,5	0,25	0
G_2	-1	-0,75	-0,5	-0,25	-0,1	0	0,25	0,5	0,75	1

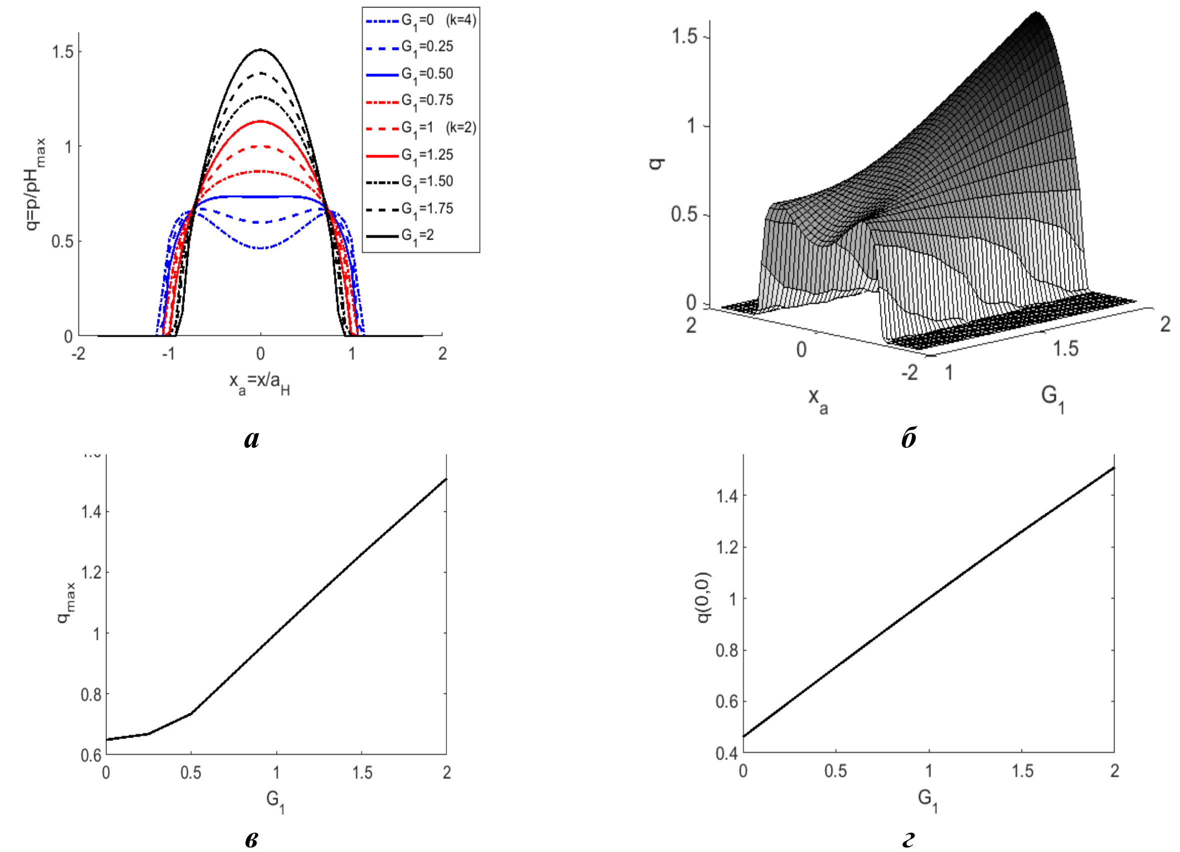


Рисунок 5.6 – Залежність контактного тиску від параметрів при $\lambda = 0$

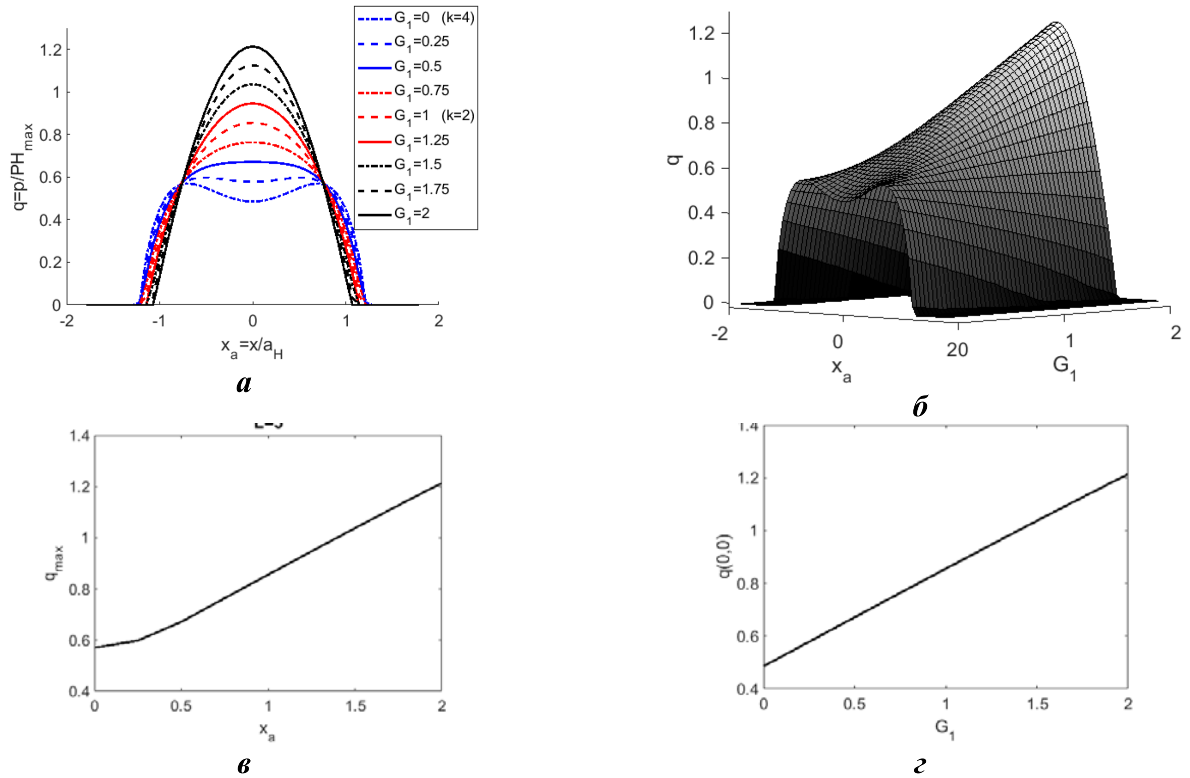
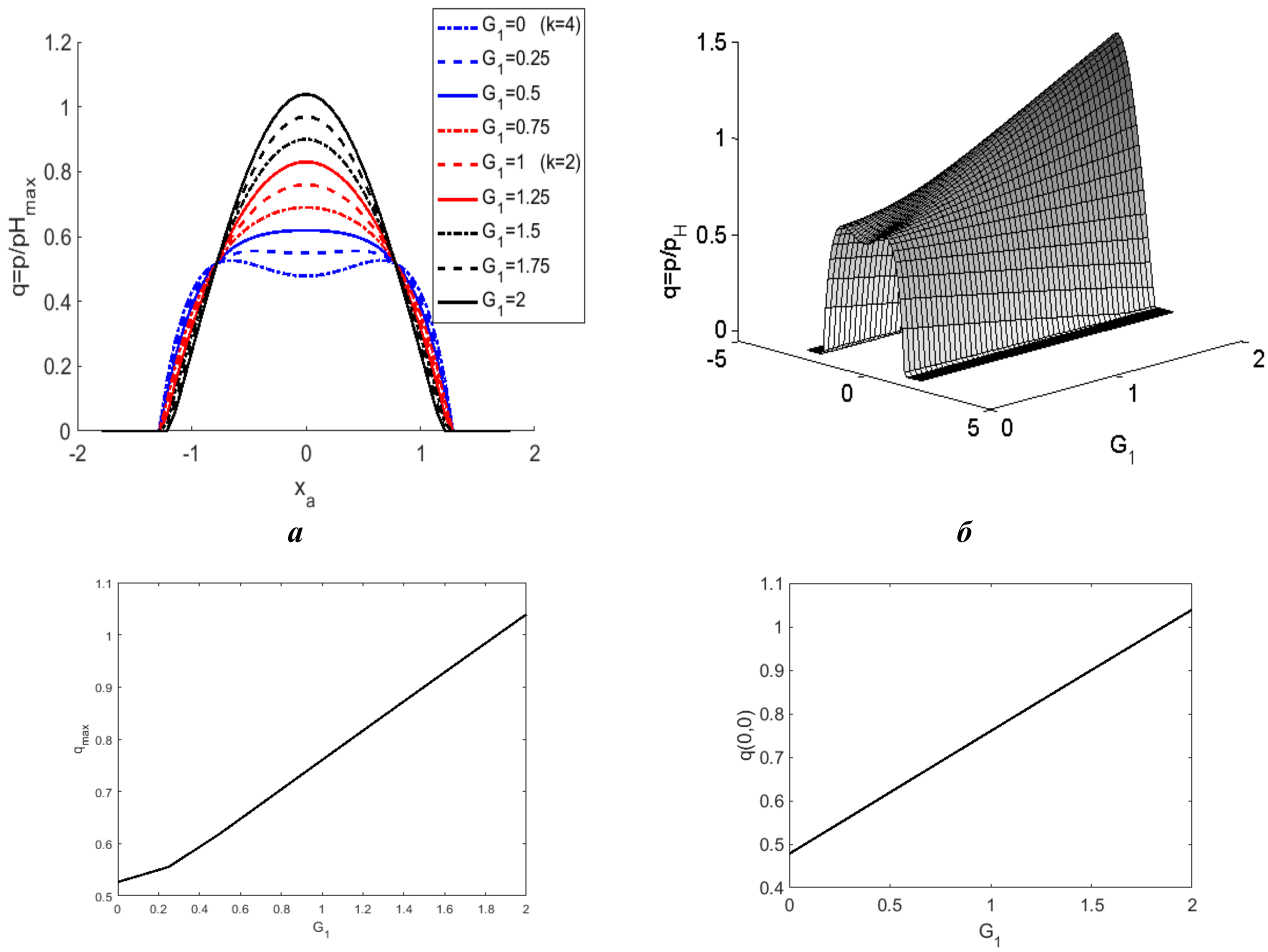


Рисунок 5.7 – Залежність контактного тиску від параметрів при $\lambda = 5$



а *б*

в *г*

Рисунок 5.8 – Залежність контактного тиску від параметрів при $\lambda = 10$

Розв'язується задача визначення $p(r, K, \lambda)$, $p_{\max}(r, K, \lambda)$. Вихідним є розв'язок задачі Герца $p^H(K = 2, \lambda = 0)$, а базовим – розв'язок при $K = 2, \lambda^* = 5$ (відповідає шліфовці). Вводяться два види параметрів: «апріорні»

$$h = A(r / A_0)^K \qquad S_2 = arctg(\lambda / \lambda^*); \quad p = p(S_1, S_2). \tag{5.53}$$

та «апостеріорні», що випливають із співвідношення

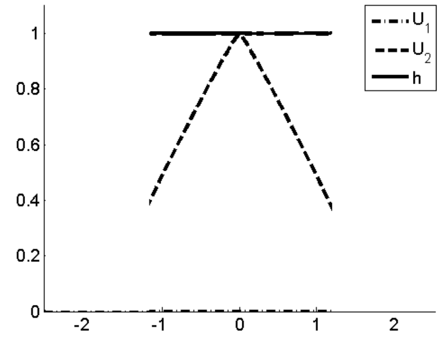
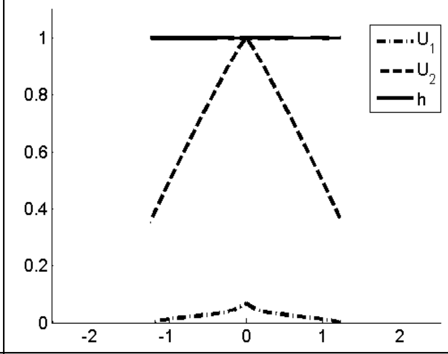
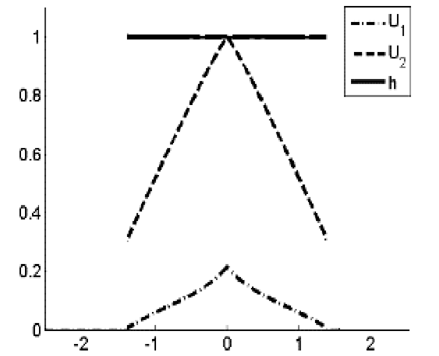
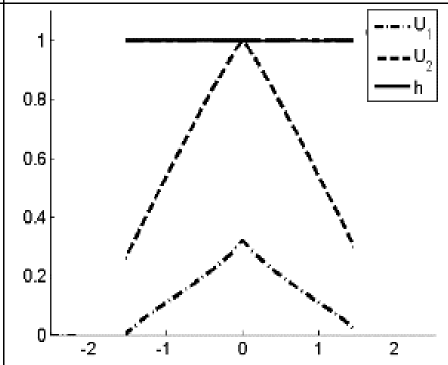
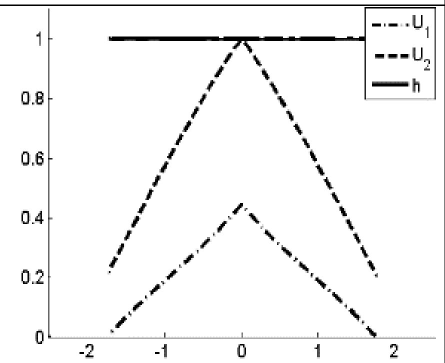
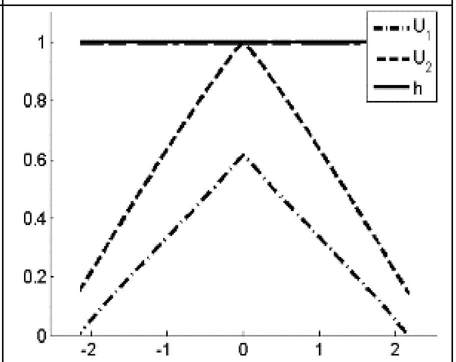
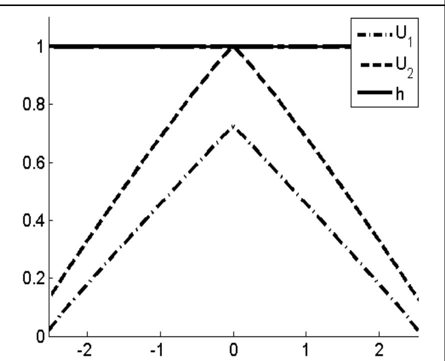
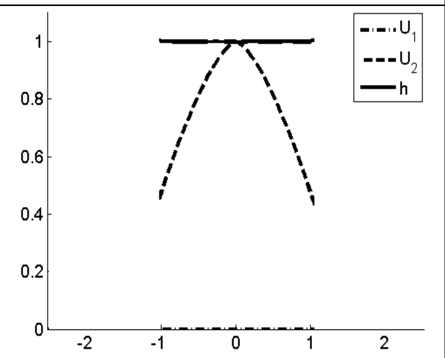
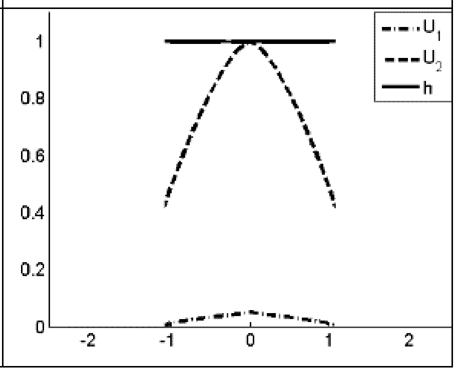
$$\sum c_p / \delta + \lambda \sum p / \delta + \sum h / \delta = 1: \tag{5.54}$$

$$\theta = ar\cos\left[\left(\sum h\right) / \delta\right]; \qquad \varphi = arctg\left[\left(\sum c_p\right) / \delta\right]; \qquad p = p(\Theta, \varphi). \tag{5.55}$$

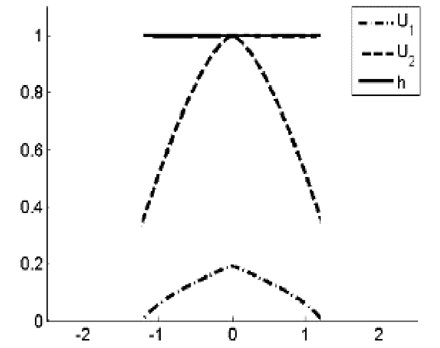
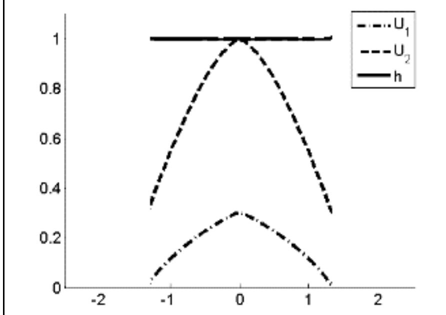
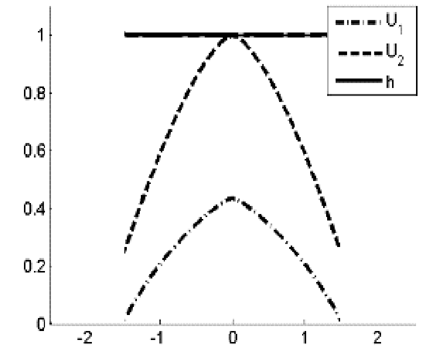
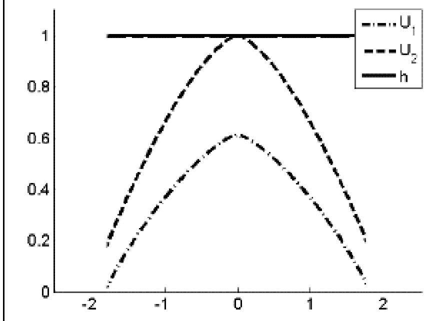
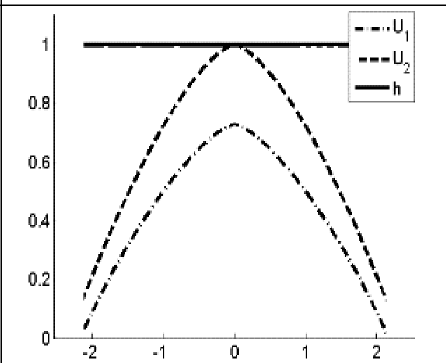
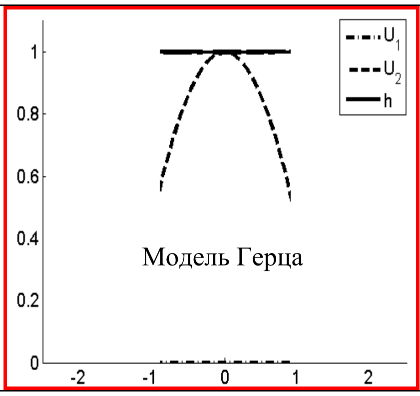
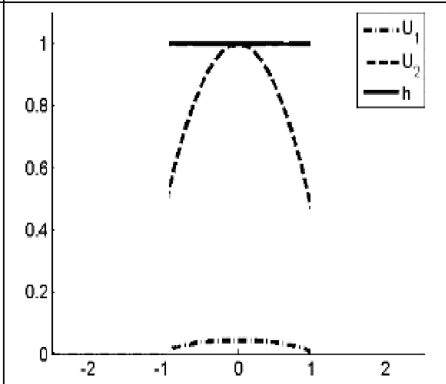
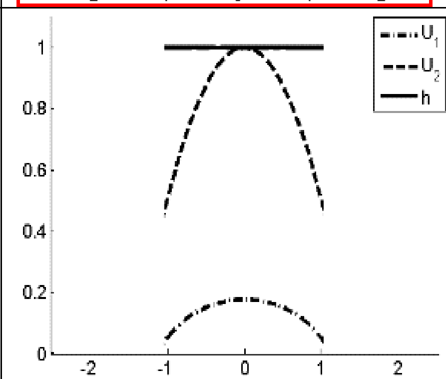
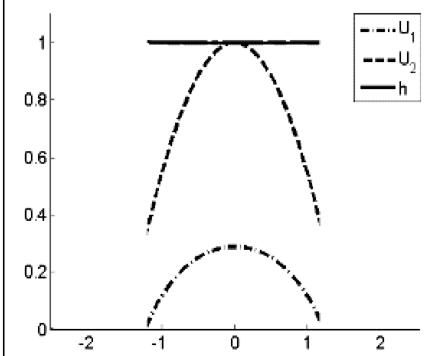
У табл. 5.2, 5.3 наведені отримані картини розподілів переміщень, викликаних «локальними» та «глобальними» податливостями контактуючих тіл, величини зазору між тілами (у співставленні), а також розподіли контактного тиску.

Аналіз представлених розподілів свідчить про сильний вплив форми розподілу зазору та фізико-механічних властивостей проміжних шарів на баланс вкладу «локальної» та «глобальної» податливостей контактуючих тіл сумісно із зазором

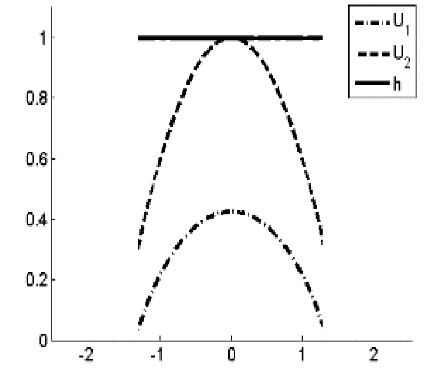
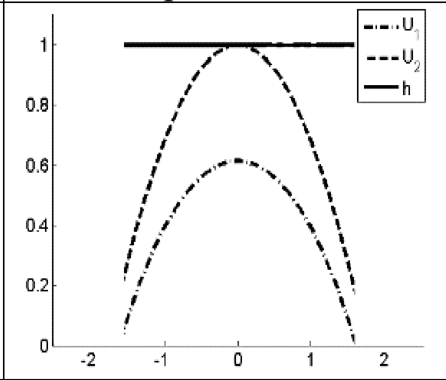
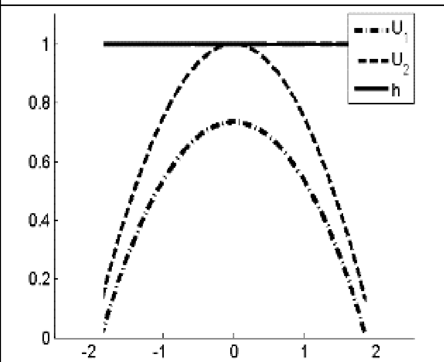
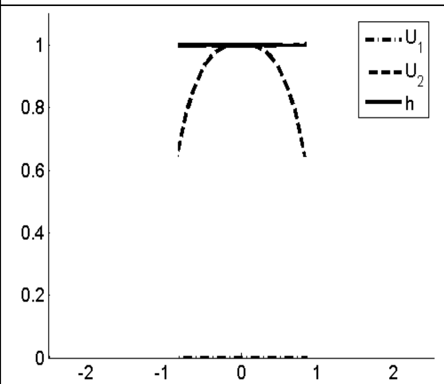
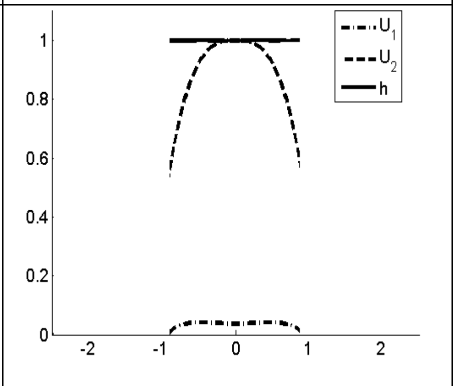
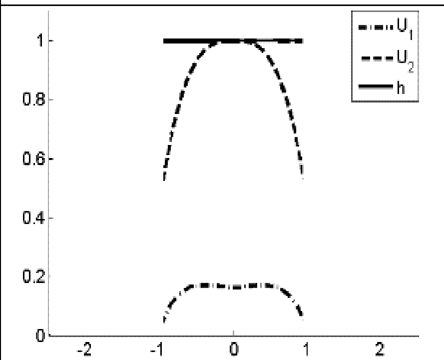
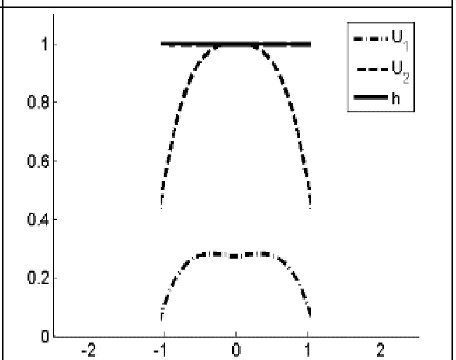
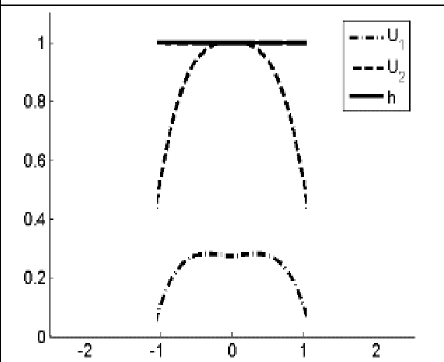
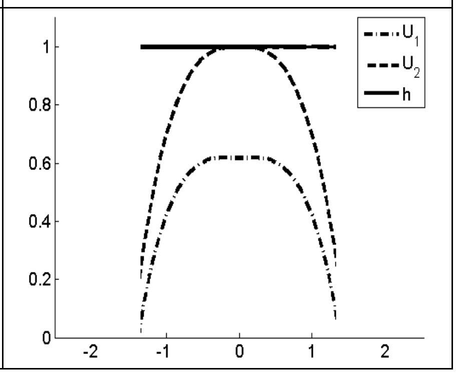
Таблиця 5.2 – Глобальні і локальні переміщення при різних значеннях K та S_1

	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення
$K = 1.1 / S_1 = 0.503$	**λ=0/S_2=0, Θ=0.889, φ=1.57**		**λ=1/S_2=0,467, Θ=0.870, φ=0.739**	
	λ =5/S_2=0.785, Θ=0.833,φ=1.217		**λ =10 / S_2=1.07, Θ=0.804 , φ=1.110**	
	λ=20/S_2=1.471, Θ=0.776, φ=0.987		**λ=50/S_2=1.531, Θ=0.735, φ=0.816**	
	λ =100 / S_2=1.551, Θ=0.739, φ=0.674			
K=1.5 / S_1=0.644	**λ=0 / S_2=0, Θ=0.969 φ=1.57**		**λ =1 / S_2=0.467, Θ=0.948 φ=1.385**	

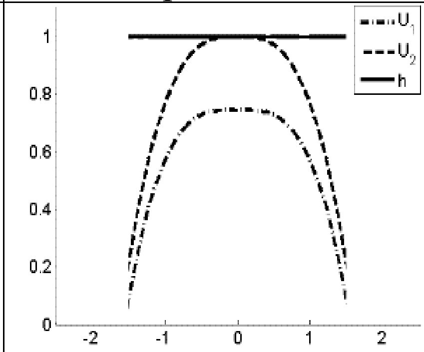
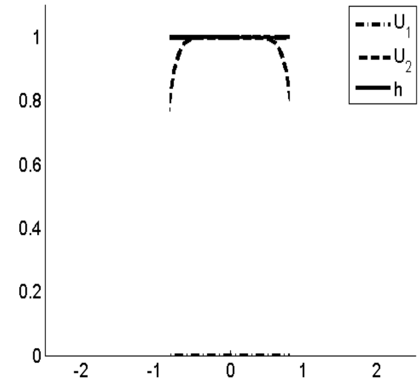
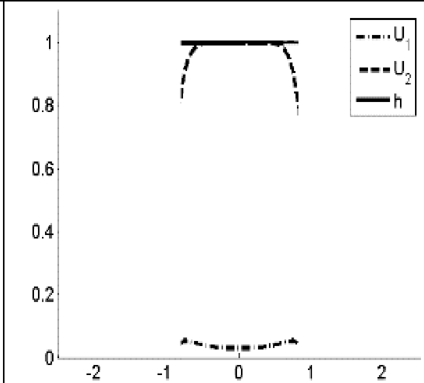
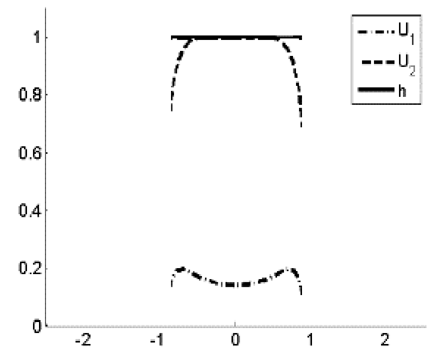
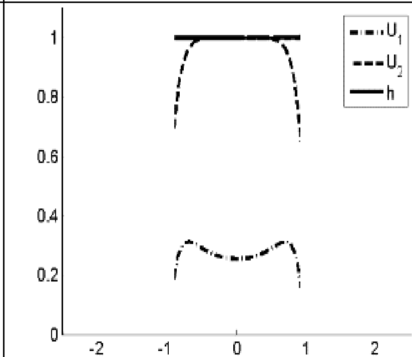
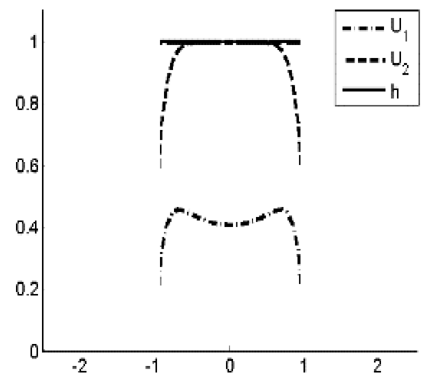
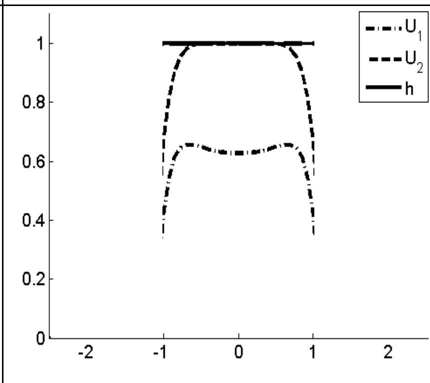
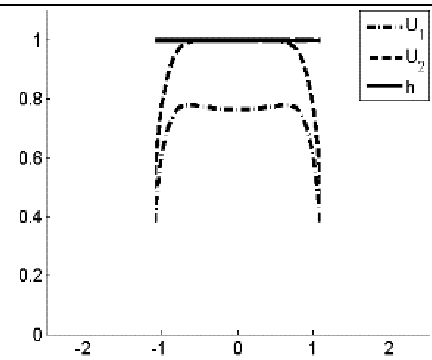
Продовження табл. 5.2

	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення
$K=1.5$ / $S_1=0.644$	$\lambda=5$ / $S_2=0.785$, $\Theta=0.909$ $\varphi=1.194$		$\lambda=10$ / $S_2=1.07$, $\Theta=0.878$ $\varphi=1.080$	
	$\lambda=20$ / $S_2=1.471$, $\Theta=0.846$ $\varphi=0.952$		$\lambda=50$ / $S_2=1.531$, $\Theta=0.804$ $\varphi=0.774$	
	$\lambda=100$ / $S_2=1.551$, $\Theta=0.775$ $\varphi=0.645$			
$K=2$ / $S_1=0.785$	$\lambda=0$ / $S_2=0$, $\Theta=1.048$ $\varphi=1.57$		$\lambda=1$ / $S_2=0.467$, $\Theta=1.022$ $\varphi=1.376$	
	$\lambda=5$ / $S_2=0.785$, $\Theta=0.981$ $\varphi=1.175$		$\lambda=10$ / $S_2=1.07$, $\Theta=0.944$ $\varphi=1.059$	

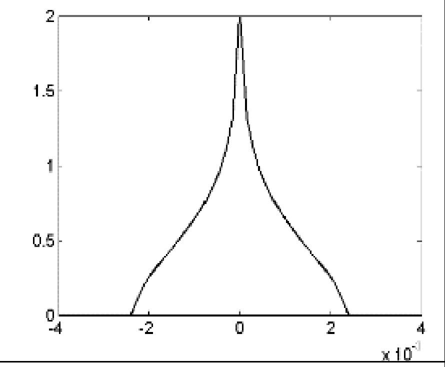
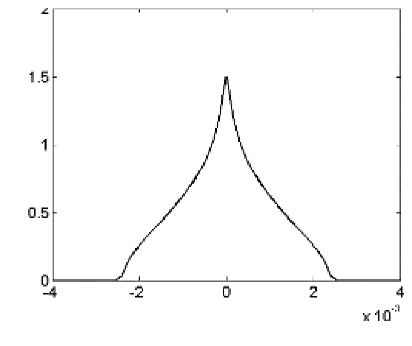
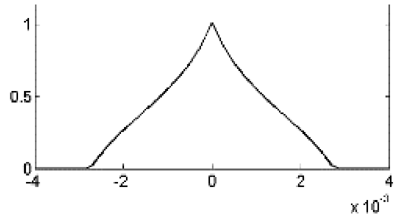
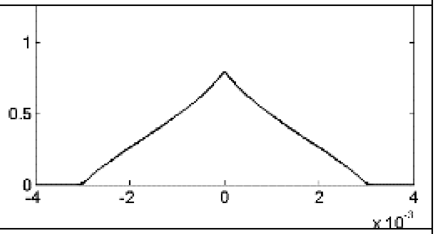
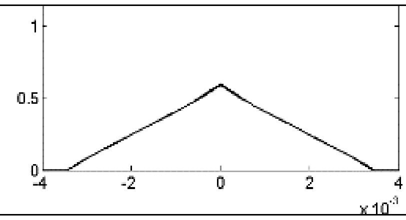
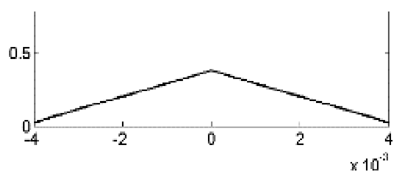
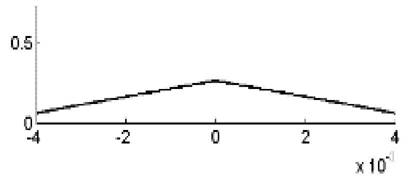
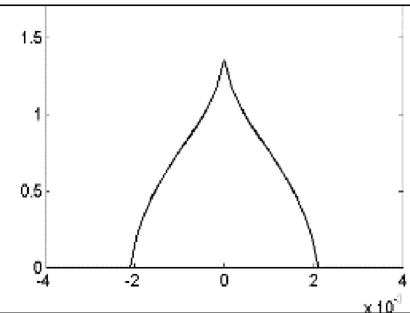
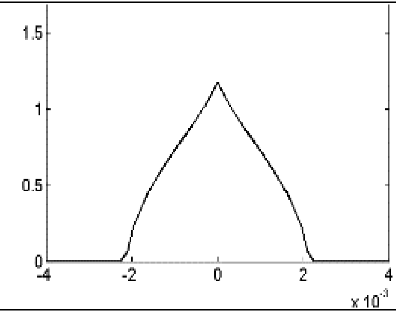
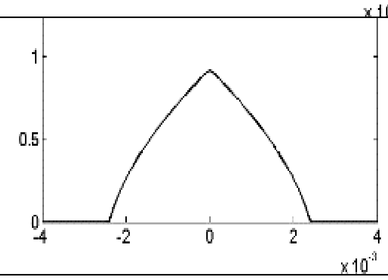
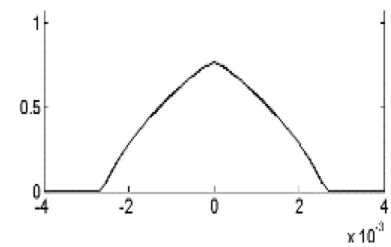
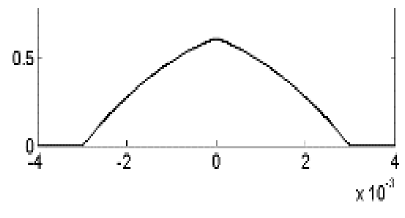
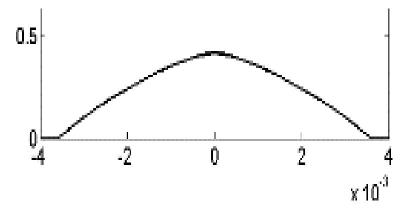
Продовження табл. 5.2

Значення параметрів		Глобальні і локальні переміщення	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення
$K=2$ / $S_1=0.785$	**$\lambda=20/S_2=1.471$, $\Theta=0.912$ $\varphi=0.924$**		**$\lambda=50/S_2=1.531$, $\Theta=0.865$ $\varphi=0.742$**	
	$\lambda=100$ / $S_2=1.551$, $\Theta=0.840$ $\varphi=0.609$			
$K=3$ / $S_1=0.981$	**$\lambda=0$ / $S_2=0$, $\Theta=1.138$, $\varphi=1.57$**		**$\lambda=1$ / $S_2=0.467$, $\Theta=1.112$ $\varphi=1.369$**	
	$\lambda=5$ / $S_2=0.785$ $\Theta=1.071$ $\varphi=1.158$		**$\lambda=10$ / $S_2=1.07$, $\Theta=1.041$ $\varphi=1.033$**	
	$\lambda=20/S_2=1.471$, $\Theta=1.006$, $\varphi=0.892$		**$\lambda=50/S_2=1.531$, $\Theta=0.965$, $\varphi=0.699$**	

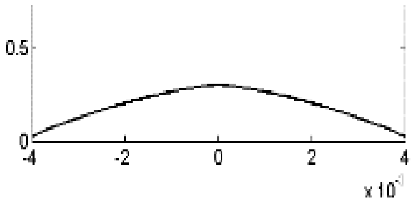
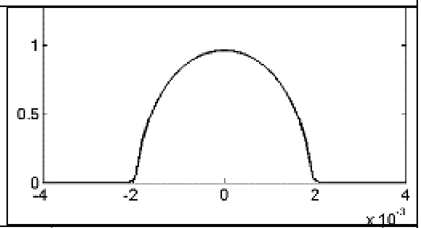
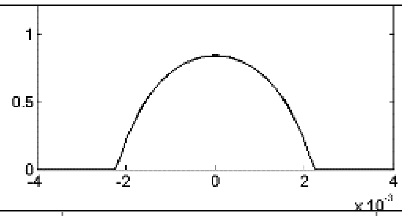
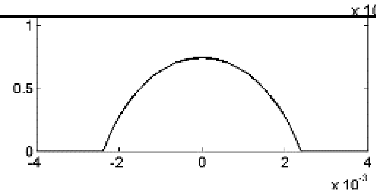
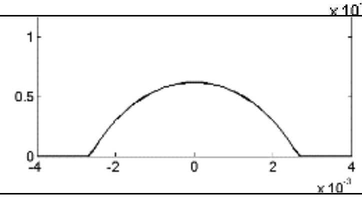
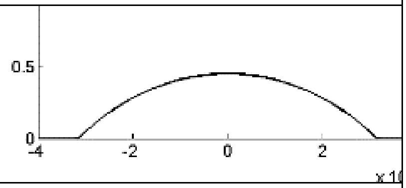
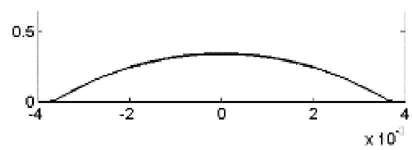
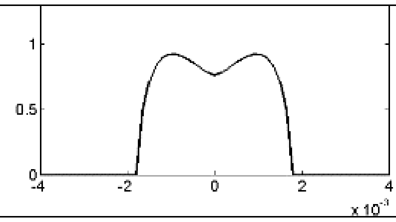
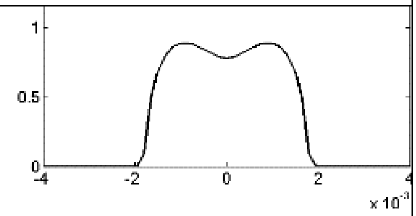
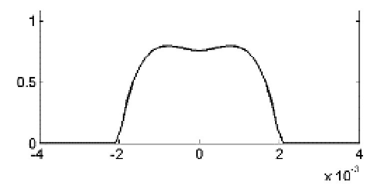
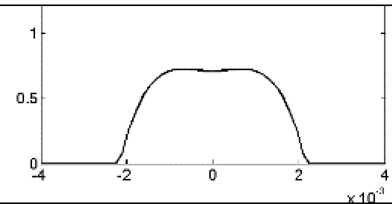
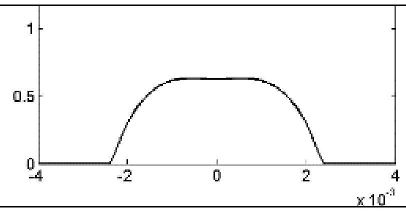
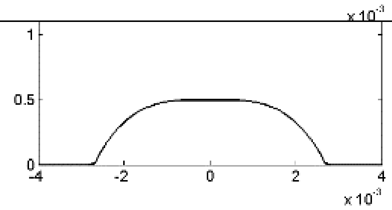
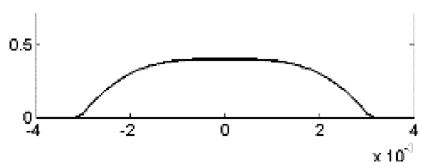
Закінчення табл. 5.2

<table>
<tr><th colspan="2">Значення параметрів</th><th>Глобальні і локальні переміщення</th><th>Значення параметрів</th><th>Глобальні і локальні переміщення</th></tr>
<tr><td>$K=3$ / $S_1=0.981$</td><td>$\lambda=100$ / $S_2=1.551$, $\Theta=0.936$ $\varphi=0.565$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">$K=8$ / $S_1=1.326$</td><td>$\lambda=0$ / $S_2=0$, $\Theta=1.332$ $\varphi=1.57$</td><td></td><td>$\lambda=1$ / $S_2=0.467$, $\Theta=1.299$ $\varphi=1.360$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda=5$ / $S_2=0.785$, $\Theta=1.250$ $\varphi=1.139$</td><td></td><td>$\lambda=10$ / $S_2=1.07$, $\Theta=1.231$ $\varphi=1.001$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda=20/S_2=1.471$, $\Theta=1.206$ $\varphi=0.847$</td><td></td><td>$\lambda=50/S_2=1.531$, $\Theta=1.165$ $\varphi=0.641$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda=100$ / $S_2=1.551$, $\Theta=1.143$ $\varphi=0.499$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

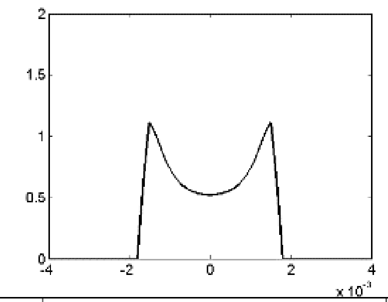
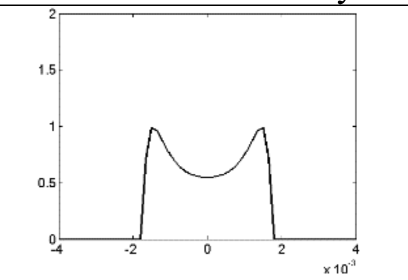
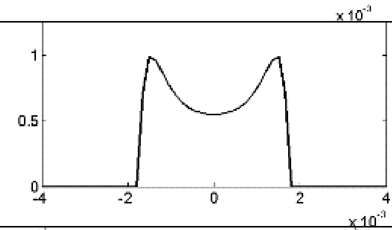
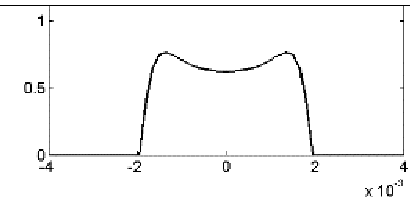
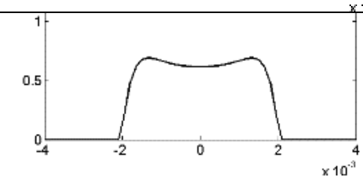
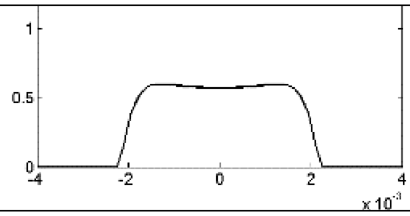
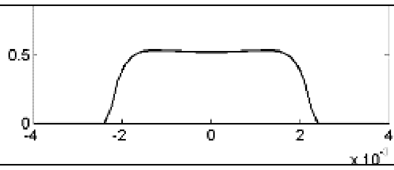
Таблиця 5.3 – Залежності відносного контактного тиску q при різних значеннях K та S_1

Значення параметрів		Залежність відносного контактного тиску	Значення параметрів	Залежність відносного контактного тиску
$K=1.1/S_1=0.503$	$\lambda=0/S_2=0$, $\Theta=0.889$, $\varphi=1.57$		$\lambda=1/S_2=0{,}467$, $\Theta=0.870$, $\varphi=0.739$	
	$\lambda=5/S_2=0.785$, $\Theta=0.833$, $\varphi=1.217$		$\lambda=10/S_2=1.07$; $\Theta=0.804$, $\varphi=1.110$	
	$\lambda=20/S_2=1.471$, $\Theta=0.776$, $\varphi=0.987$		$\lambda=50/S_2=1.531$; $\Theta=0.735$, $\varphi=0.816$	
	$\lambda=100/S_2=1.551$; $\Theta=0.739$, $\varphi=0.674$			
$K=1.5/S_1=0.644$	$\lambda=0/S_2=0$, $\Theta=0.969$, $\varphi=1.57$		$\lambda=1/S_2=0.467$, $\Theta=0.948$, $\varphi=1.385$	
	$\lambda=5/S_2=0.785$, $\Theta=0.909$, $\varphi=1.194$		$\lambda=10/S_2=1.07$, $\Theta=0.878$, $\varphi=1.080$	
	$\lambda=20/S_2=1.471$, $\Theta=0.846$, $\varphi=0.952$		$\lambda=50/S_2=1.531$, $\Theta=0.804$, $\varphi=0.774$	

Продовження табл. 5.3

Значення параметрів		Залежність відносного контактного тиску	Значення параметрів	Залежність відносного контактного тиску
K=1.5/S_1=0.644	**λ =100 / S_2=1.551, Θ=0.775, φ=0.645**			
K = 2 / S_1 = 0.785	**λ =0 / S_2=0, Θ=1.048 φ=1.57**		**λ =1 / S_2=0.467, Θ=1.022 φ=1.376**	
	λ =5 / S_2=0.785, Θ=0.981 φ=1.175		**λ =10 / S_2=1.07, Θ=0.944 φ=1.059**	
	λ =20/S_2=1.471, Θ=0.912 φ=0.924		**λ =50/S_2=1.531, Θ=0.865 φ=0.742**	
	λ =100 / S_2=1.551, Θ=0.840 φ=0.609			
K =3 / S_1 = 0.981	**λ =0 / S_2=0, Θ=1.138, φ=1.57**		**λ =1 / S_2=0.467, Θ=1.112 φ=1.369**	
	λ =5 / S_2=0.785 Θ=1.071 φ=1.158		**λ =10 / S_2=1.07, Θ=1.041 φ=1.033**	
	λ =20/ S_2=1.471, Θ=1.006, φ=0.892		**λ =50/ S_2=1.531, Θ=0.965, φ=0.699**	
	λ =100 / S_2=1.551, Θ=0.936 φ=0.565			

Закінчення табл. 5.3

Значення параметрів		Залежность відносного контактного тиску	Значення параметрів	Залежность відносного контактного тиску
$K = 8 / S_1 = 1.326$	$\lambda = 0 / S_2 = 0$, $\Theta = 1.332$ $\varphi = 1.57$		$\lambda = 1 / S_2 = 0.467$, $\Theta = 1.299$, $\varphi = 1.360$	
	$\lambda = 5 /$ $S_2 = 0.785$, $\Theta = 1.250$ $\varphi = 1.139$		$\lambda = 10 /$ $S_2 = 1.07$, $\Theta = 1.231$ $\varphi = 1.001$	
	$\lambda = 20/$ $S_2 = 1.471$, $\Theta = 1.206$ $\varphi = 0.847$		$\lambda = 50/$ $S_2 = 1.531$, $\Theta = 1.165$ $\varphi = 0.641$	
	$\lambda = 100 /$ $S_2 = 1.551$, $\Theta = 1.143$ $\varphi = 0.499$			

у загальне зближення контактуючих тіл, а також на характер розподілу та рівень контактного тиску. Таким чином, шляхом варіювання цими величинами можна впливати на властивості розподілу контактних зусиль, а, відповідно, і на НДС контактуючих складнопрофільних тіл.

Вплив різного розподілу зазору у різних напрямках на контактний тиск у сполученні складнопрофільних тіл. Розглядається задача визначення контактного тиску між складнопрофільними тілами, зазор між якими має вигляд:

$$h = U(x/a)^K + V\left(y/b\right)^L. \tag{5.56}$$

Тут K і L – ступені розподілів зазорів у перерізах $y = 0$ та $x = 0$.

На рис. 5.9–5.11 наведені характерні розподіли контактного тиску. Вони свідчать про різкий вплив параметрів K та L на характер розподілу контактного тиску. Це дає підстави стверджувати, що варіюванням цих параметрів можна управляти розподілом контактного тиску, а, відповідно, – і напружено-деформованим станом контактуючих складнопрофільних тіл.

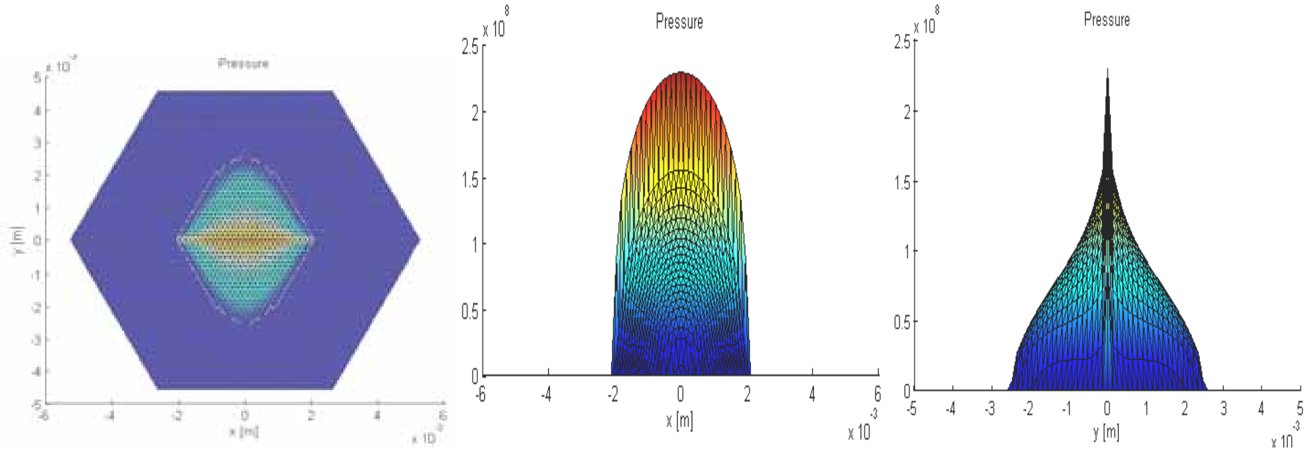


Рисунок 5.9 – Розподіл контактного тиску у сполученні СПТ (K =2; L = 1.1)

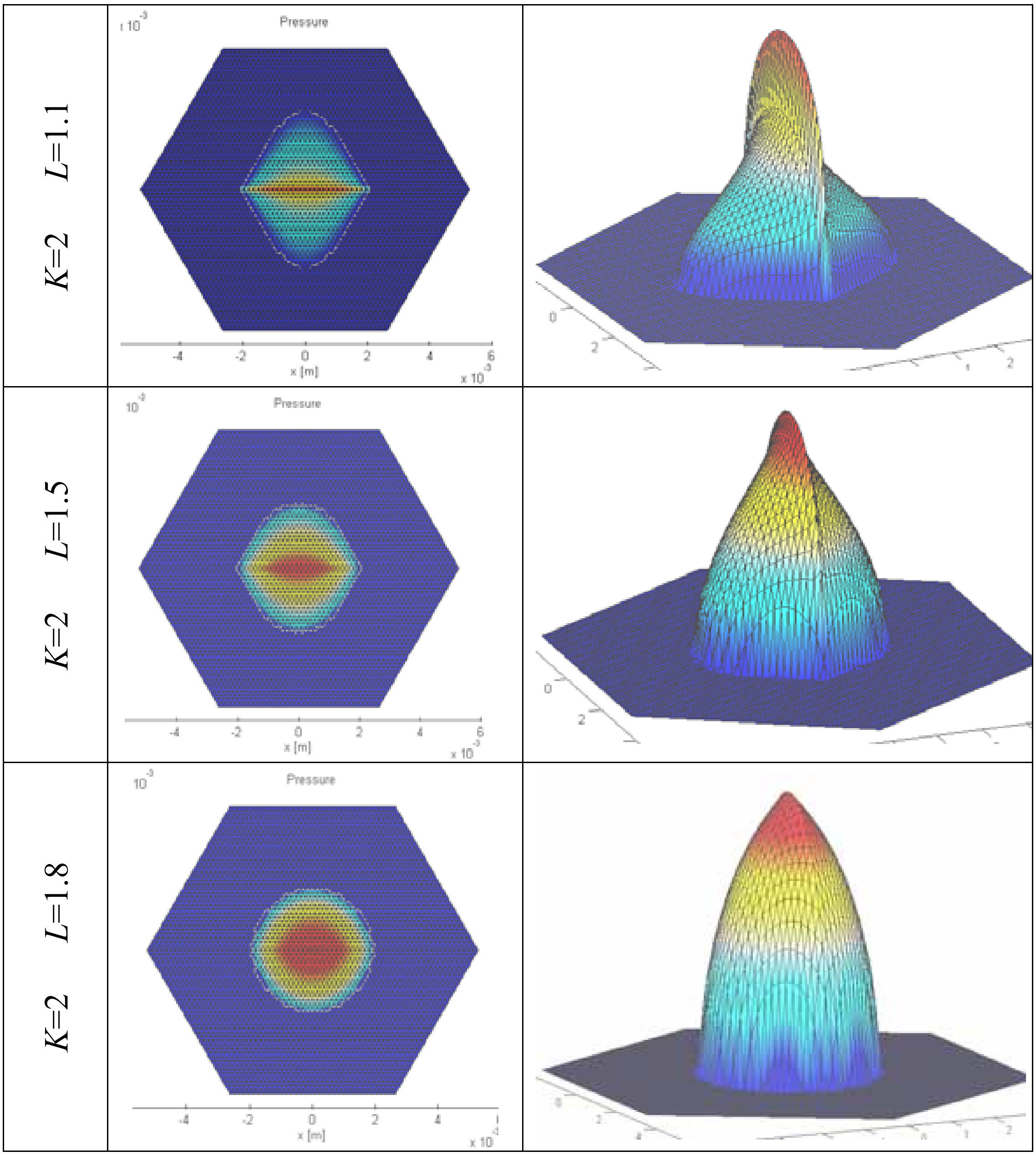


Рисунок 5.10 – Розподіл контактного тиску у сполученні складнопрофільних тіл при K =2; L = 1.1, K =2; L = 1.5 та K =2; L = 1.8

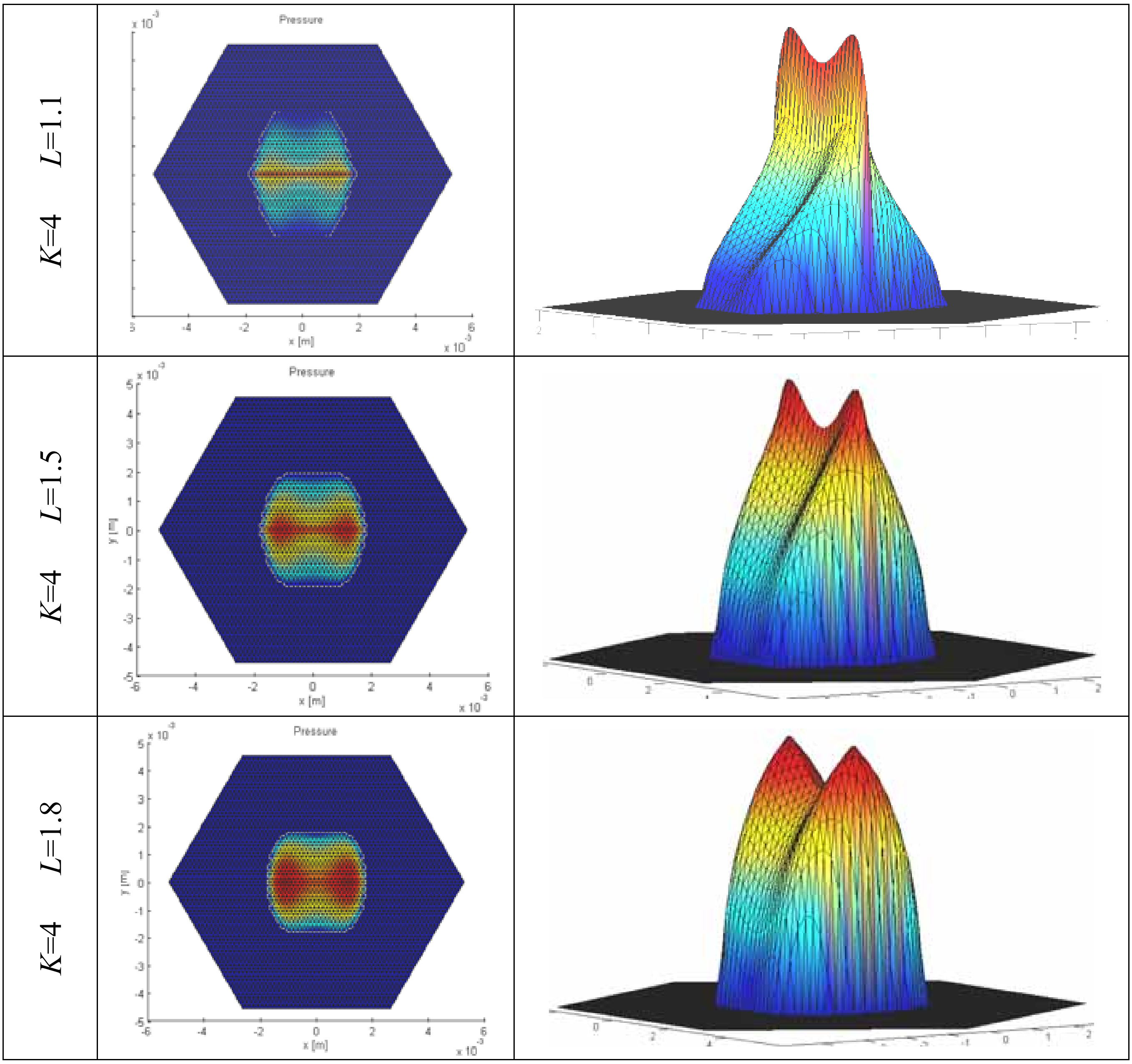


Рисунок 5.11 – Розподіл контактного тиску у сполученні складнопрофільних тіл при K =4 та L = 1.1, L=1,5, L = 1.8

Вплив збурення форми зазору в окружному напрямку на розподіл контактного тиску у сполученні складнопрофільних тіл. Як свідчать результати попередніх досліджень, описаних вище у розд. 5, на розподіл контактного тиску чинять сильний вплив різні величини. Зокрема, це стосується розподілу зазору між контактуючими тілами. Як один із частинних випадків у цьому підрозділі розглядається закон зміни крутизни зазору в окружному напрямку:

$$h = U(r/a)^S,\ S = 2 + \varepsilon \cdot \sin(n\varphi). \qquad (5.57)$$

Тут φ – кут між віссю x та радіус-вектором поточної точки; n =2; ε – варійований параметр.

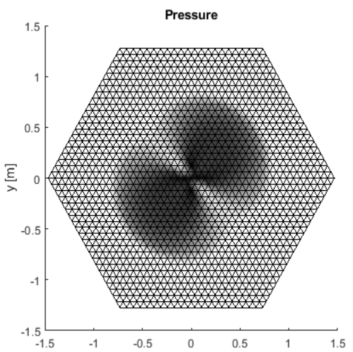
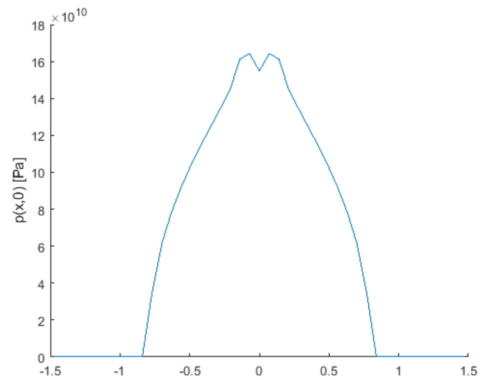
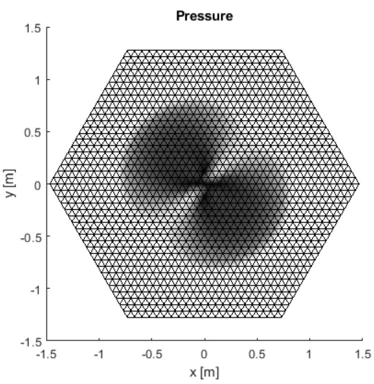
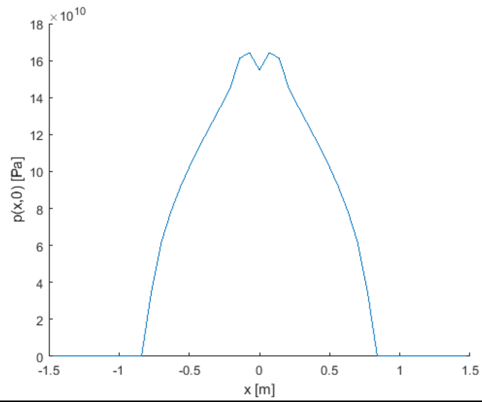
У табл. 5.4 наведені картини розподілу контактного тиску при різних параметрах ε. Спостерігається суттєва зміна форми розподілу контактного тиску залежно від ε. Зміна розподілу контактного тиску при варіюванні притискного зусилля P ($\varepsilon = 1$) проілюстрована у табл. 5.5. На рис. 5.12–5.14 – зміни контактного тиску та плями контакту при варіюванні ε порівняно із задачею Герца ($\varepsilon = 0$). На рис. 5.15 – розподіли контактного тиску при різних значеннях n у (5.57).

Наведені результати підтверджують сильний вплив на розподіл контактного тиску форми зазору між контактуючими тілами.

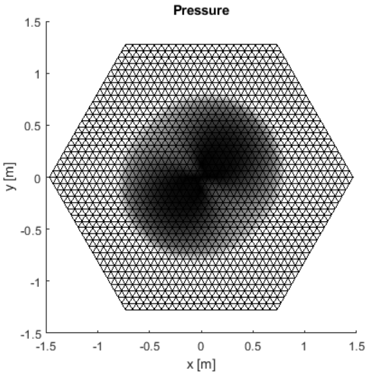
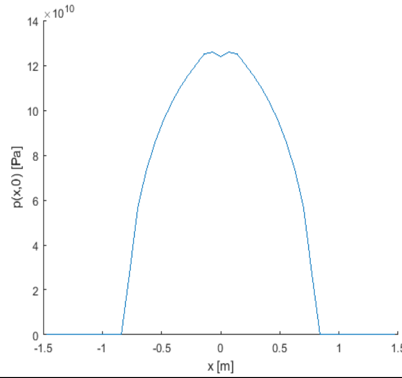
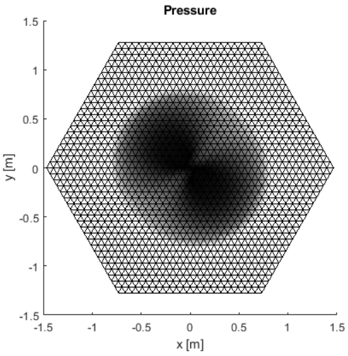
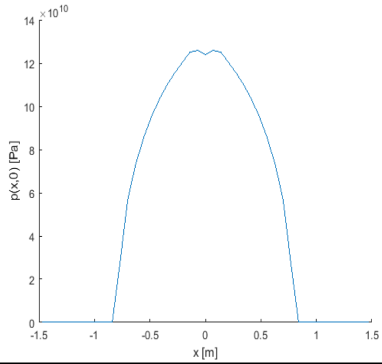
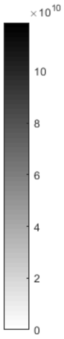
Крім проведених досліджень, додатково було досліджено вплив властивостей пружного шару (λ) та модуля пружності контактуючих тіл (E) на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами при зафіксованій області контакту. Розглядалися випадки заданого зближення Δ (Delta) та притискного зусилля p. Аналіз на рис. 5.16 – розподіли контактного тиску та його збурення при варіюванні λ та E (у правій колонці на рис. 5.16 – реакція тиску на таке варіювання).

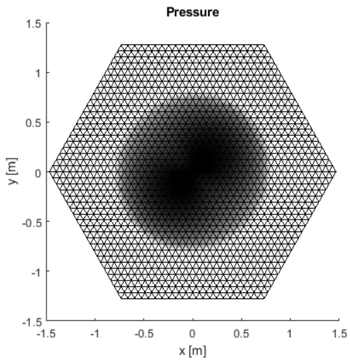
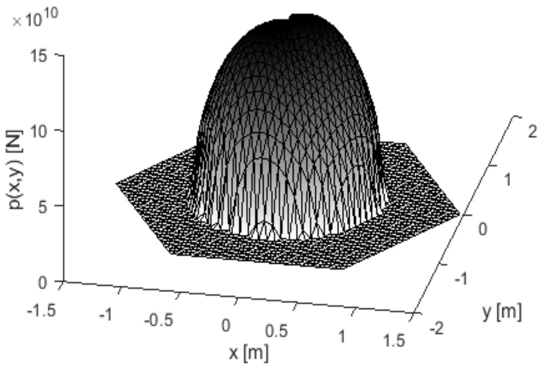
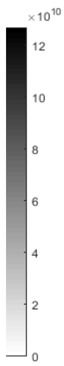
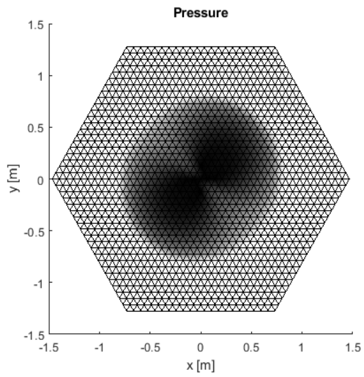
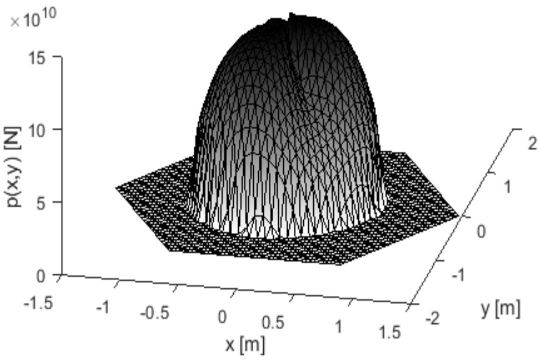
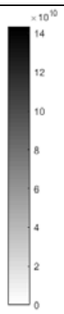
Таким чином, отримані якісні та кількісні характеристики зміни контактного тиску при варіюванні певних параметрів.

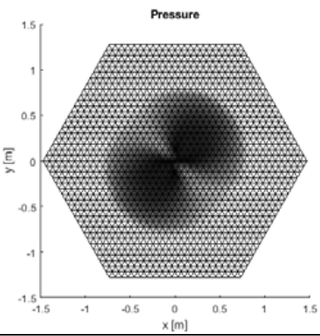
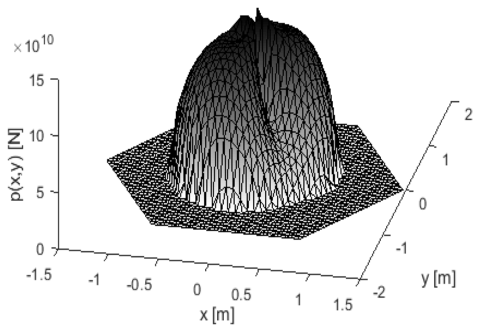
Таблиця 5.4 – Розподіл контактного тиску при варіюванні ε

ε	Розподіл контактного тиску	
1		
–1		

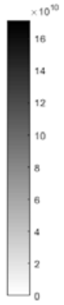
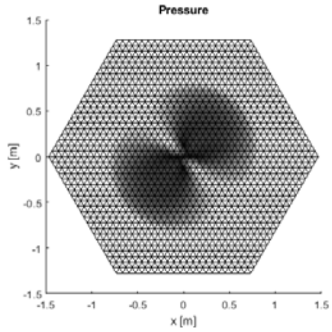
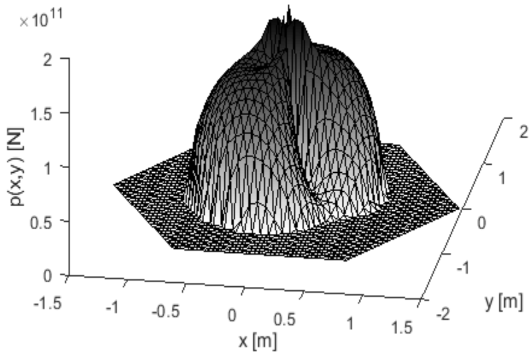
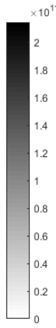
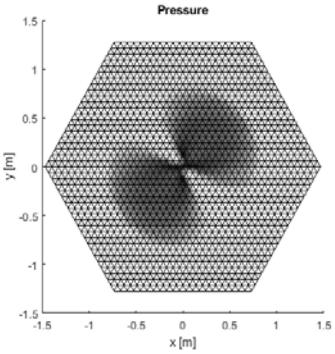
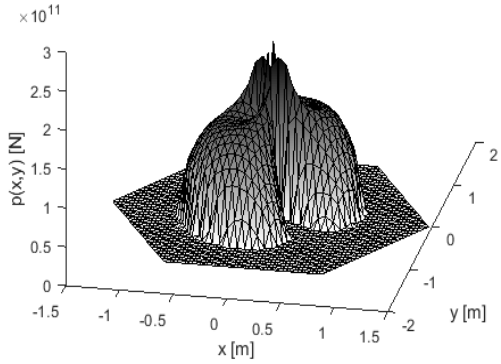
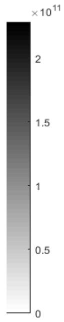
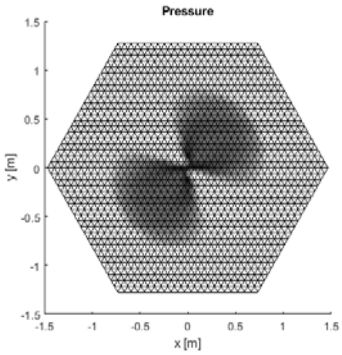
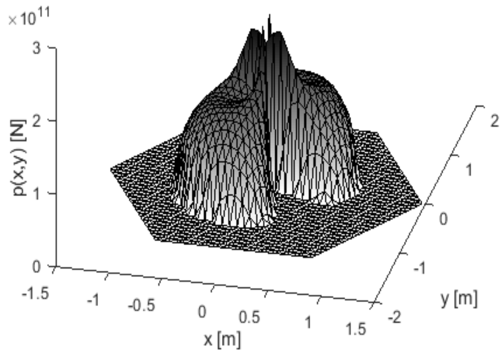
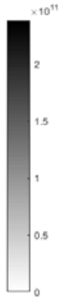
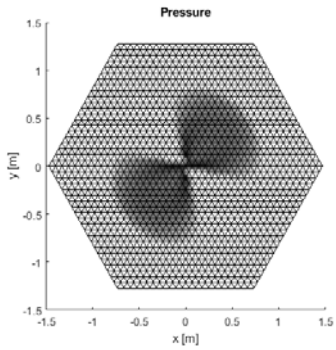
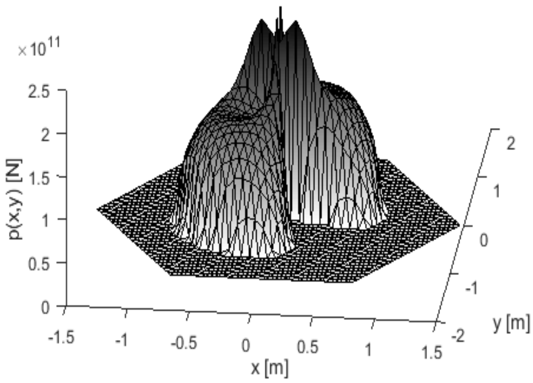
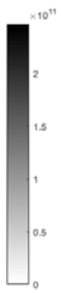
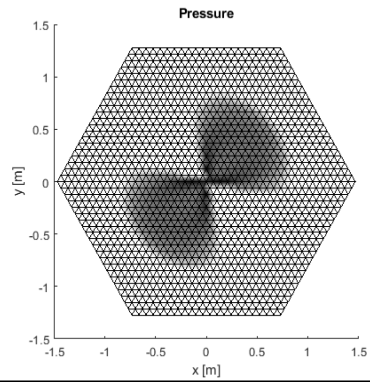
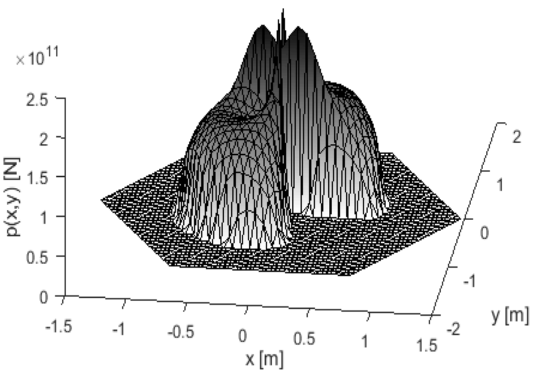
Продовження табл. 5.4

<table>
<tr><th>ε</th><th colspan="2">Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td>0.5</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>–0.5</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

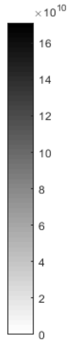
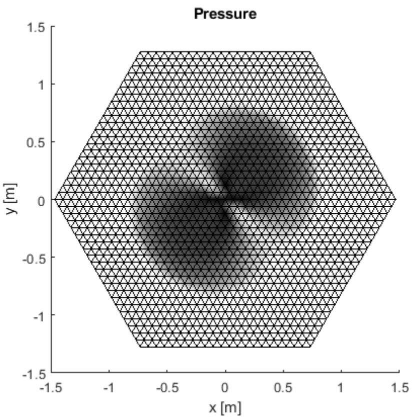
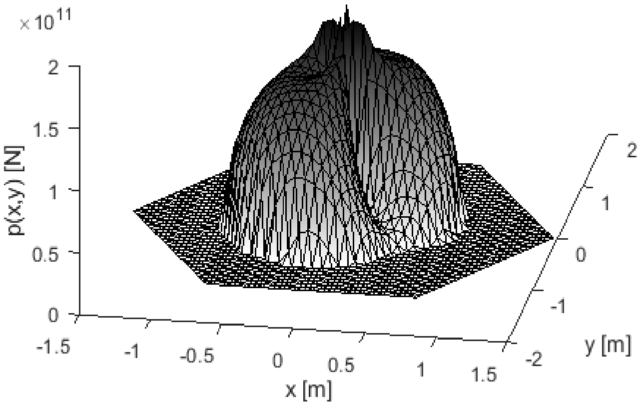
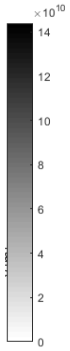
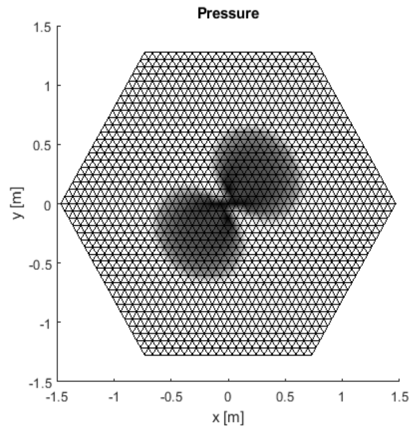
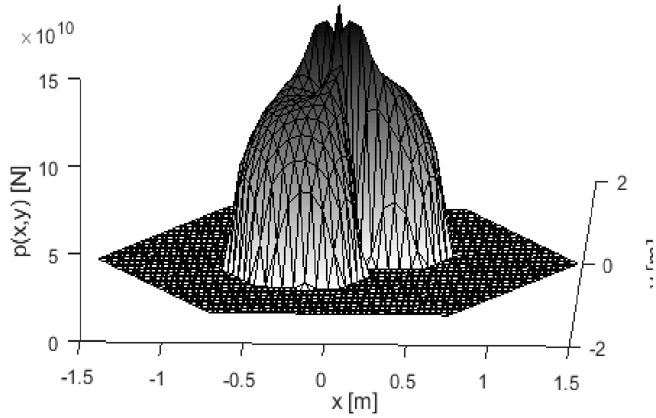
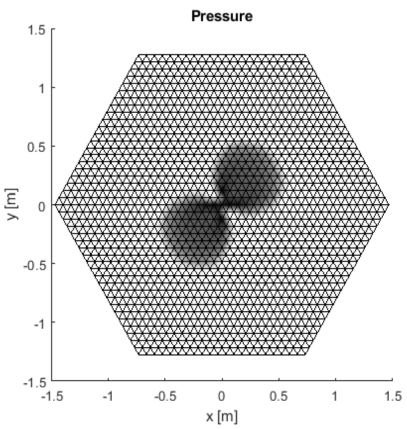
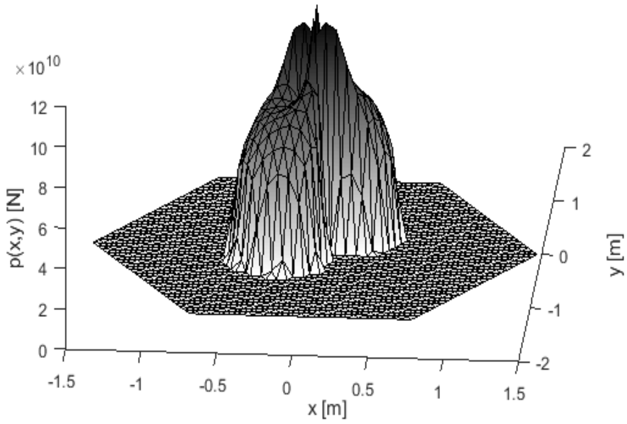
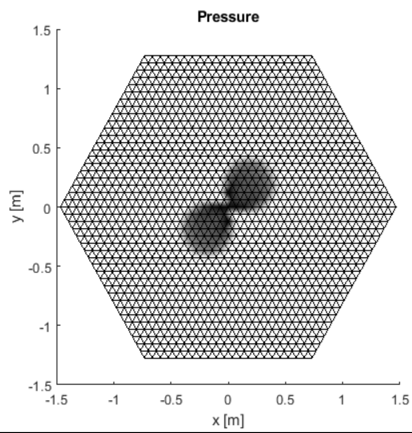
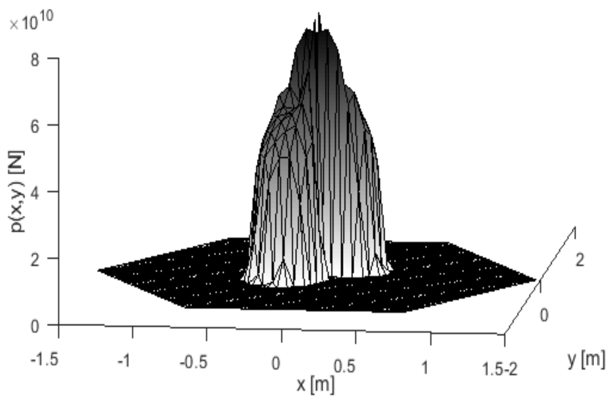
0.25</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0.5

</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

0.75</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 5.4

<table>
<tr><th>ε</th><th colspan="2">Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td>1.0
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.25
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.5
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.75
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.0
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таблиця 5.5 – Зміна розподілу контактного тиску при варіюванні притискного зусилля *P* при ε = 1

<table>
<tr><th>P</th><th colspan="2">Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td>P
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.5P
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.25 P</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.1P</td><td></td><td></td></tr>
</table>

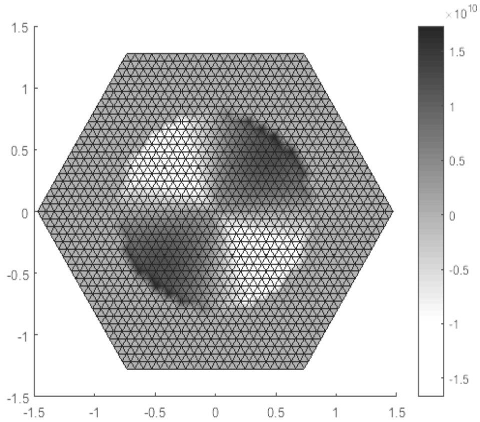


Рисунок 5.12 – Різниця контактного тиску ψ $(\psi = p(eps = 1.25) - p(eps = 0))$

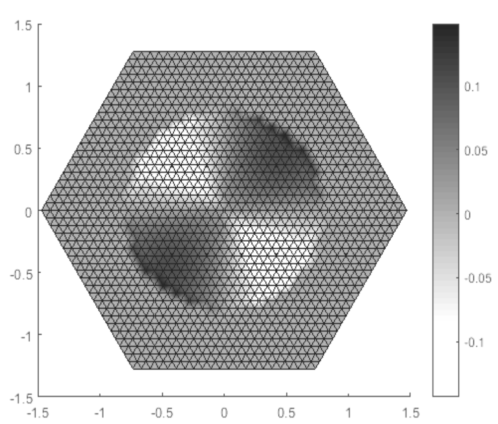


Рисунок 5.13 – Різниця контактного тиску $\psi' = \psi / p_{\max}^{H}$

Висновки за розділом 5

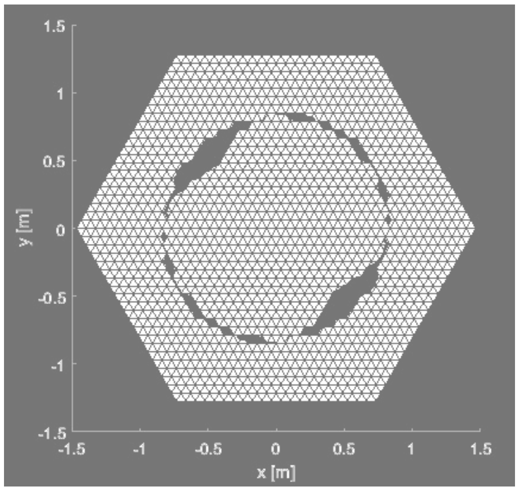


Рисунок 5.14 – Перекриття плям контакту для задач $\varepsilon = 0$ та $\varepsilon = 1$

Основною задачею проектних досліджень машинобудівних конструкцій є обґрунтування оптимальних технічних рішень за рівнем технічних і тактико-технічних характеристик машин, у т.ч. за навантажувальною здатністю, міцністю, довговічністю тощо. У цьому наборі задач особливого значення набуває задача пошуку сприятливої геометричної форми поверхонь контактуючих тіл близької форми за наявності нелінійно пружного шару між ними. Вони зводяться до різного роду обернених задач відновлення геометричної форми за різноманітними критеріями. У розд. 5 деякі аспекти виникаючих задач були розглянуті та запропоновані нові постановки і методи розв’язання виникаючих задач.

Зокрема, розв’язані задачі: створення розв’язувальної системи співвідношень для урахування мікромеханічних моделей контактної взаємодії із урахуванням фізичної та структурної нелінійності; визначення впливу особливостей розподілу початкового зазору між СПТ на розподіл контактного тиску із урахуванням фізичної та структурної нелінійності; формування розв’язувальної системи рівнянь та нерівностей на основі розробки варіанту МГЕ, у якому об’єднуються

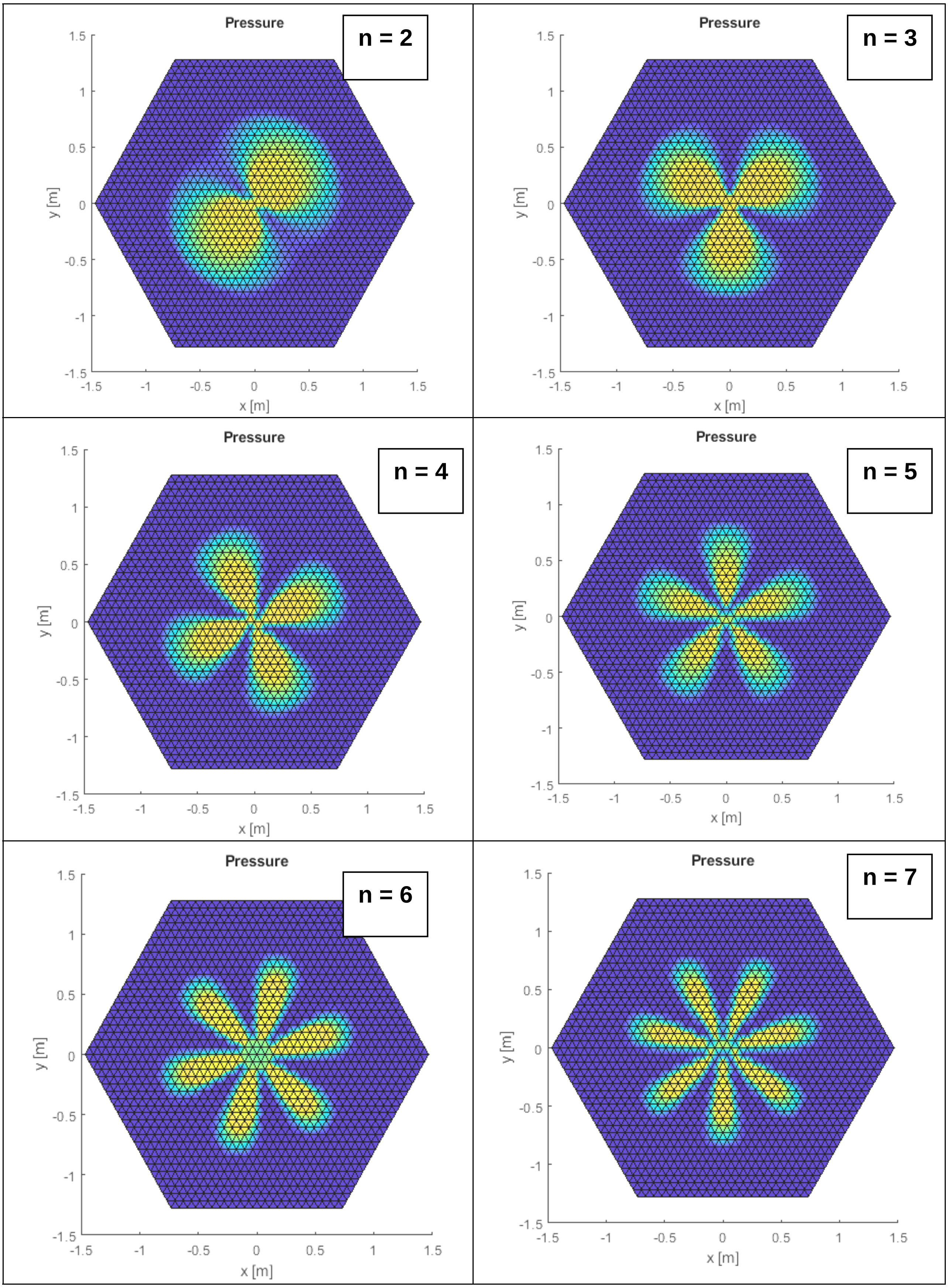
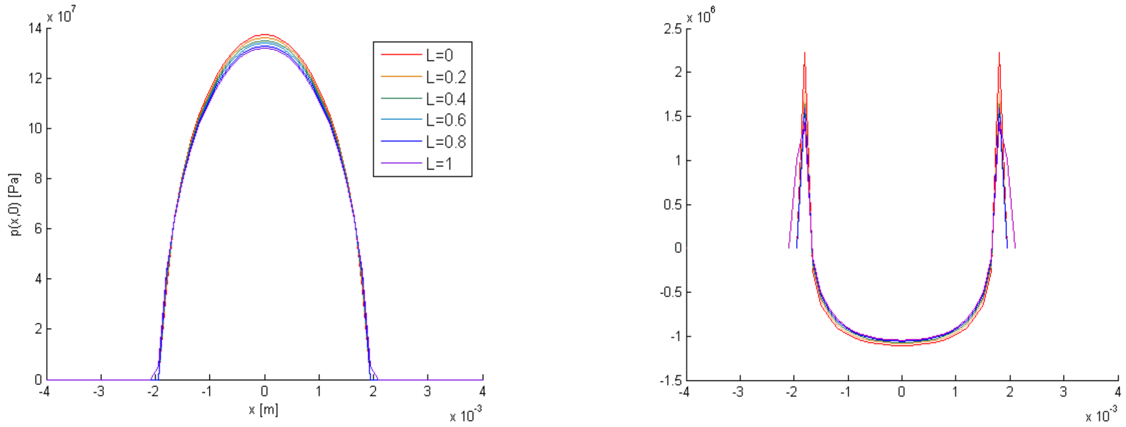
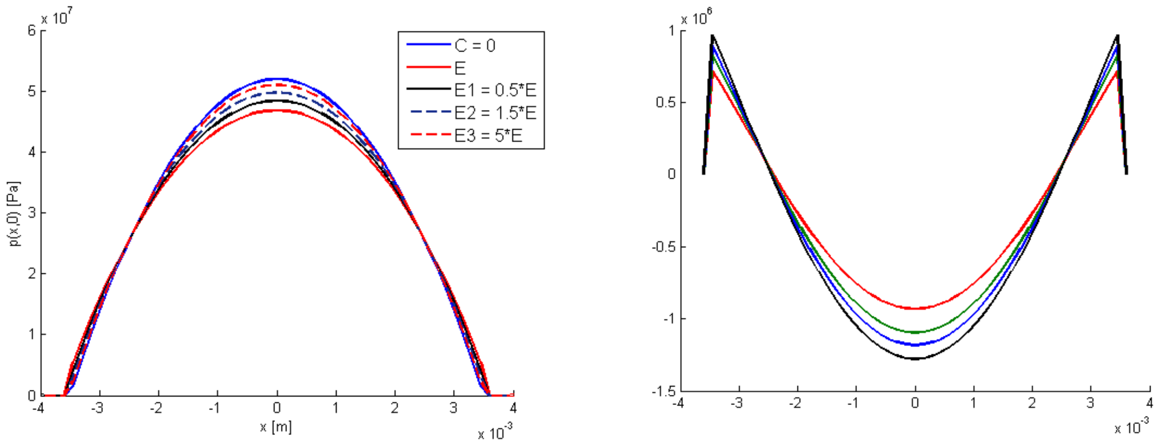


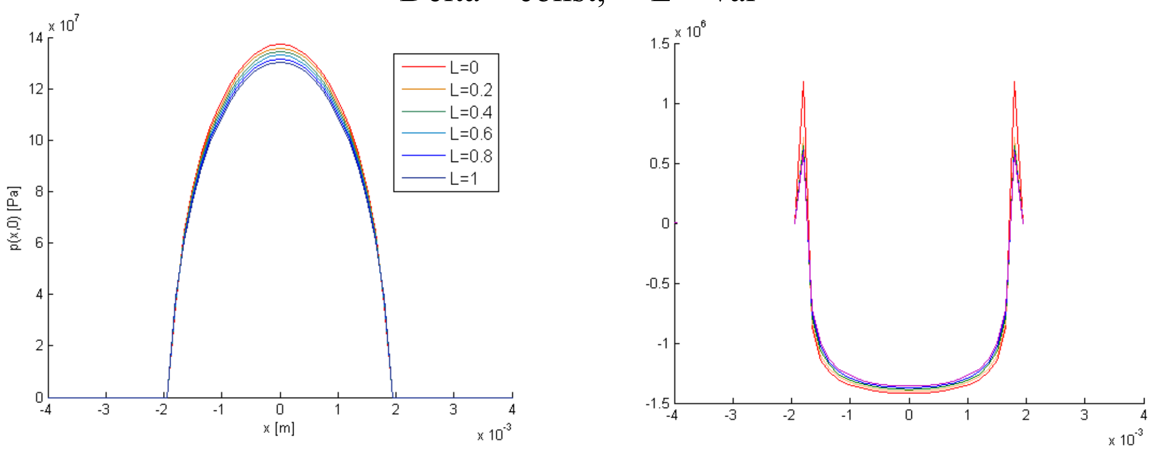
Рисунок 5.15 – Розподіл контактного тиску при різних кількостях пелюсток у окружному розподілі зазору
P – const, L – var



P – const, E – var



Delta – const, L – var



Delta – const, E – var

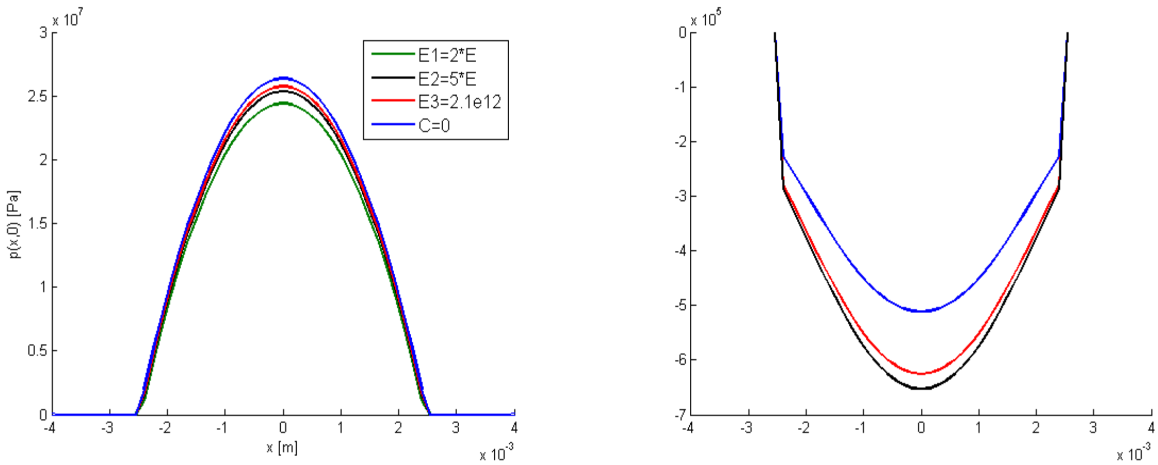


Рисунок 5.16 – Картини розподілу контактного тиску та його збурення при варіюванні $\lambda(L)$ та E

кінематичні, статичні, геометричні та фізико-механічні характеристики контактуючих тіл із урахуванням фізичної та структурної нелінійності; узагальнення розв'язувальної системи співвідношень для урахування мікромеханічних моделей контактної взаємодії шорстких та модифікованих поверхонь із урахуванням фізичної та структурної нелінійності; тестові задачі контактної взаємодії СПТ.

При цьому отримані наступні результати, що дають можливість зробити низку висновків.

1. Прагнення забезпечити різні задані види руху у сполученнях деталей машин формує кінематичні вимоги, які служать вихідними при розв'язанні задач відновлення форми і формоутворення контактуючих поверхонь. У розділі ця задача поставлена у загальному вигляді у зв'язці із задачею визначення контактного тиску і контактних площадок у сполученні контактуючих тіл.

2. Для формування зв'язаної задачі аналізу контактної взаємодії та синтезу геометричної форми поверхонь контактуючих тіл у роботі вперше запропоновано використовувати єдину систему розв'язувальних рівнянь і нерівностей на основі МГІР та варіаційних постановок. Ця система співвідношень містить усі види відомостей: про фізико-механічні властивості контактуючих тіл і нелінійних шарів між ними, про навантаження, про зближення, про контактний тиск і притискні зусилля тіл. При цьому, приймаючи як задані та шукані різні набори змінних, вдається на єдиній базі співвідношень будувати розв'язки і прямої, і оберненої задач, що є перевагою постановки. Недоліком же є не цілком гладкі одержувані розв'язки обернених задач синтезу геометричної форми.

3. Розроблено нову загальну постановку задачі обґрунтування сприятливої геометричної форми контактуючих поверхонь за критеріями мінімізації максимальних рівнів тиску, напружень, переміщень тощо. При цьому, на відміну від традиційних постановок, пропонується як варійовані обирати не локальні розподіли зазорів, а контактний тиск. Як розвиток цієї постановки є подання варійованого зазору у вигляді розкладання за потенціалом Чезарі-Буссінеска, а в дискретному аналогові – за функціями впливу від дії локально визначеної функції у розкладанні контактного тиску. У цьому випадку вдається побудувати гладкий розв'язок задачі синтезу геометричної форми поверхонь контактуючих тіл близької форми.

4. У роботі вперше поставлено задачу про визначення додаткового навантаження, що створює сприятливий профіль не тільки в початковий момент контактування або при дії фіксованого експлуатаційного навантаження, але і в будь-якому поточному актуальному стані при дії експлуатаційних зусиль різного рівня. Це досягається за рахунок додаткового пружного деформування поверхонь тіл у зоні контакту і, як наслідок, сприятливої зміни розподілу зазору. На відміну від традиційного підходу, пропонується «відстежуюче» (а не постійне) за навантаженням управління умовами контактної взаємодії.

5. Для обґрунтування рекомендованого розподілу товщини і властивостей матеріалу шару між контактуючими тілами вперше розроблена загальна оптимізаційна постановка. Вона дає розв'язок задачі синтезу властивостей матеріалів і розподілів товщини шарів із них для створення сприятливих умов контактної взаємодії. Також запропоноване формулювання для випадку обмежених (технічно і технологічно) реальних можливостей. На додаток розроблена загальна постановка для аналізу чутливості розв'язку контактної задачі до варіювання всієї множини визначальних параметрів.

6. При розв'язанні задач про контактну взаємодію СПТ чутливість розподілу контактного тиску на варіювання первних параметрів визначено, що реакція системи може бути подана у вигляді двох процесів: деформування контактної плями (за формою та розмірами) та зміна куполу розподілу.

7. У ході розв'язанні низки тестових задач установлені особливості зміни областей контактування складнопрофільних тіл і закону розподілу контактного тиску від варіювання форми зазору між СПТ та властивостей матеріалу проміжного шару між ними.

Таким чином, у розділі запропоновані нові постановки, моделі та методи розв'язання задач обґрунтування геометричної форми контактуючих складнопрофільних тіл близької форми, а також форми і властивостей матеріалів проміжних шарів між ними за критеріями міцності.

Матеріали розділу описані у роботах [5, 12–16, 24–26, 31, 34, 38, 39, 73, 86–93, 97, 98, 105, 106].

РОЗДІЛ 6
РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

6.1 Прикладні задачі пружної гомогенізації

У рамках запропонованого в підрозділ. 3.1 підходу можлива ефективна гомогенізація пружного відгуку матеріалів, мікроструктура яких статична міцно зшита у сітку. Суть чисельної процедури полягає в мінімізації повної внутрішньої енергії деформації волокон, пов'язаної з макроскопічною деформацією спеціальними кінематичними співвідношеннями. Ця задача була сформульована для волокон довільної природи. У підрозд. 3.1 конкретний вигляд функції енергії ψ_f та її властивості, необхідні для того, щоб розподіл розтягнень $\boldsymbol{\lambda}$, що мінімізує осереднену енергію мережі, існував і був єдиним, ще не обговорювалися. Попередньо робилося припущення, що енергія є опуклою, безперервною та диференційованою функцією, що залишає значний простір для варіацій. У цьому підрозділі будуть розглянуті докладно два практично значущих типу відгуку волокон на розтягнення.

Різниця між цими двома випадками полягає у значенні розтягнення $|\boldsymbol{\lambda}|$, яке відповідає мінімуму енергії окремого волокна. Гнучкі полімерні ланцюжки характеризуються найменшою вільною енергією при нульовому векторі, що з'єднує кінці. Їх відгук має ентропійних природу, і саме нульове розтягнення відповідає максимально великій кількості конфігурацій форм вигину ланцюжка. Це справедливо для полімерних ланцюжків, персистентна довжина яких значно менша, ніж довжина ділянок між послідовними зшивками [426], як у випадку із еластомерами, здатними до значних розтягнень. У тих же випадках, коли волокна подібною гнучкістю не володіють, таких як напівгнучкі біополімери або механічні волокна, вільна енергія мінімальна при деякому ненульовому подовженні [427]. Поведінка матеріалів залежить істотно від того, з якого типу волокон складена його мікроструктура.

Нижче наводяться результати дослідження декількох ключових питань щодо обговорених вище двох типів мереж. По-перше, це існування рівноважних мікродеформацій в обумовлених межах деформації матеріалу, а також стійкість одержуваного пружного відгуку. По-друге, це особливості неафінного перерозподілу мікророзтягнень волокон і відмінності між випадками гнучких і негнучких волокон. По-третє, показано, як передбачуваний теорією гомогенізований відгук матеріалів співвідноситься якісно і кількісно з результатами експериментальних спостережень.

Неафінна деформація мереж гнучких ланцюжків. Моделі вільного обертання ланок передбачають вільну енергію розтягування, мінімум якої припадає на нульову відстань між їхніми кінцями. Основний внесок в енергію дає ентропійна складова вільних флуктуацій обертання за вигину відносно хімічних зв'язків мономерів. Таку картину дають одразу кілька ідеалізованих теорій, такі їх як моделі гаусового ланцюжка [428, 429], негаусових ланцюжків, що вільно обертаються (ЛВО) [430], і червоподібні ланцюжки (ЧПЛ) [431], виведені у рамках мікромеханіки. Три пераховані вище моделі зведені в табл. 6.1, у якій наведені також конкретні вирази для вільної енергії. Графіки енергії як функції розтягування ланцюжка, а також ентропійної сили, що діє на кінцях, наведені для всіх трьох моделей на рис. 6.1.

Таблиця 6.1 – Моделі гнучких ланцюжків

Модель	Вільна енергія ψ_f	Термодинамічна сила F_f
Гаусовий ланцюжок [1]	$\frac{3}{2}k_B T\frac{R^2}{Nb^2}$	$3k_B T\frac{R}{Nb^2}$
Негаусовий ланцюжок, що вільно обертається [1, 2]	$Nk_B T\left(\lambda_r \mathcal{L}^{-1}(\lambda_r)+\ln\frac{\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r)}{\sinh \mathcal{L}^{-1}(\lambda_r)}\right)$	$k_B T\frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r)$
Червоподібний ланцюжок [3]	$\frac{k_B T}{4l_p}\frac{R^2}{\Lambda}\left(2+\frac{1}{1-R/\Lambda}\right)$	$\frac{k_B T}{4l_p}\left(4\frac{R}{\Lambda}+\frac{1}{(1-R/\Lambda)^2}-1\right)$

Примітки: [1] N – число ланок ланцюжка, b – довжина Куна сегментів; [2] $\lambda_r = R/L$ – відносне розтягнення порівняно з довжиною $L = Nb$; $\mathcal{L}^{-1}$ – обернена функції Ланжевіна $\mathcal{L}(\bullet) = \coth(\bullet) - 1/(\bullet)$; [3] наведено наближення, справедливе в межах $l_p << L$, де l_p – персистентна довжина черв'якоподібного ланцюжка, а Λ – її повна довжина

У цьому розділі розглядаються мікродеформації мереж, складених з таких гнучких ланцюжків, що передбачано запропонованим підходом. Єдиність рівноважних мікророзтягнень у цьому випадку може легко бути доведена. Більш того, може бути показано, що отримувані гомогенізовані напруження у разі нестискуваності матеріалу визначають стійкий відгук матеріалу при скінченних деформаціях. Зокрема, детально вивчені дві з перерахованих вище моделей ланцюжків, а саме лінійна гаусова і нелінійна ланжевінова. Показано, що у другому випадку мікродеформації у сітці стають істотно неафінними з наближенням межі розтяжності ланцюжків. Цей ефект пояснює характер різкого зростання напруження при одноосьовому і двовісному розтягуванні еластомерів.

Для початку доказу єдиності зауважимо, що для всіх моделей гнучких ланцюжків, які здійснюють теплові флуктуації, вільна енергія є монотонною опуклою функцією відстані між кінцями $|\mathbf{R}|$ або розтягнення $|\boldsymbol{\lambda}|$. Крім того, ентропійна сила невід'ємна і строго зростає з подовженням від нульового значення, яке досягається при поєднанні кінців ланцюжка. Це означає, що енергія ланцюжка як функція вектора розтягування $\psi_f(\boldsymbol{\lambda}) = \psi_f(|\boldsymbol{\lambda}|)$ також є строго опуклою в IR^3, іншими словами, для будь-яких $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{IR}^3$ і $\alpha \in [0,1]$:

$$\psi_f(\boldsymbol{\lambda}) = \psi_f(|\boldsymbol{\lambda}|) \le \psi_f(\alpha|\boldsymbol{\lambda}_1| + (1-\alpha|\boldsymbol{\lambda}_2|) \le \alpha\psi_f(|\boldsymbol{\lambda}_1|) + (1-\alpha)\,\psi_f(|\boldsymbol{\lambda}_2|), \qquad (6.1)$$

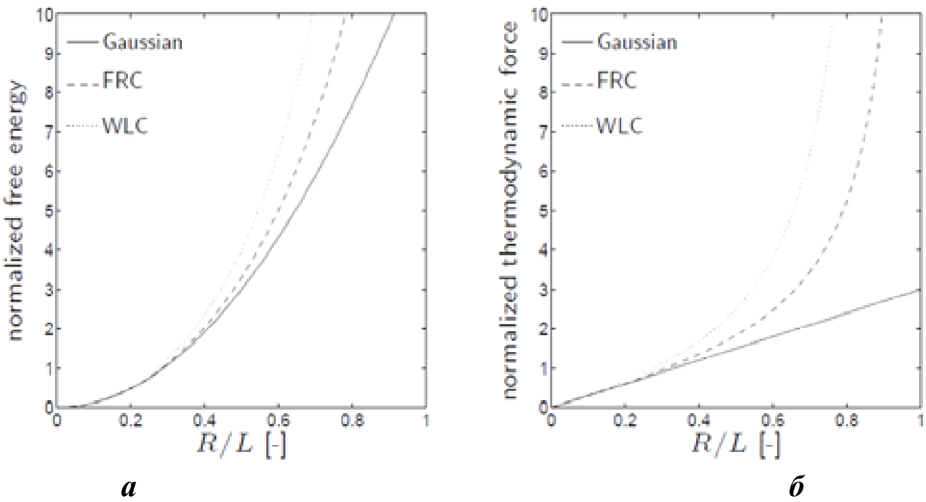


Рисунок 6.1 – Графіки, що якісно відображають залежність внутрішньої енергії (*а*) і термодинамічної сили (*б*) від подовження гнучкого ланцюжка відповідно до гаусового наближення, моделі ланцюжка, що вільно обертається та моделі червоподібного ланцюжка (для двох останніх характерна кінцева розтяжність з зміцненням відгуку при досягненні відстані між кінцями ланцюжка *R* її довжини *L*)

де $\boldsymbol{\lambda} = \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}_2$. А оскільки енергія окремого волокна опукла, то і повна енергія $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}$ або ж осереднена на мережі енергія $\langle \psi_f \rangle$, яка мінімізується в (3.32), також є опуклою відносно розподілу мікророзтягнень, що визначаються невідомою функцією

$\lambda(\lambda_0) :\in S_0 \to \mathrm{IR}^3$. З огляду на те, що енергія, яка мінімізується, обмежена нулем знизу і неперервна по $\boldsymbol{\lambda}$, а також на лінійність кінематичного обмеження, розв'язок задачі умовної мінімізації (3.32) існує і єдиний, за винятком випадків, коли цільова функція $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}]$ невизначена (нескінченна) на усій множині кінематично допустимих $\boldsymbol{\lambda}$. Подібне може статися при високих макроскопічних деформаціях, коли сітки не можуть до них пристосуватися, не порушуючи межу розтяжності волокон. Подібного не відбувається, коли градієнт деформацій $\mathbf{F}$ знаходиться в межах значень, обмежених певною множиною $\Im$. Ця множина є опуклою. Рівноважні мікророзтягнення визначені однозначно функцією $\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{F})$ у всій області визначення $\Im$.

Разом з релаксованою мікродеформацією $\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{F})$ також визначається гомогенізована енергія сітки як функція $\boldsymbol{\Psi}^*_{\mathrm{net}}(\mathbf{F})$ для всіх $\mathbf{F} \in \Im$. Більш того, ця функція буде строго опуклою по $\mathbf{F}$ у всій області $\Im$. Дійсно, розглянемо два значення градієнта деформації $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \Im$ та їхню лінійну комбінацію $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}_1 + (1-\alpha)\mathbf{F}_2 \in \Im$ з $\alpha \in [0,1]$. Нехай $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ і $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ – рівноважні мікродеформації, які відповідають $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, тоді їх лінійна комбінація $\boldsymbol{\lambda} = \alpha\,\boldsymbol{\lambda}_1^* + (1-\alpha)\,\boldsymbol{\lambda}_1^*$ задовольнятиме кінематичним рівнянням сумісності з деформацією $\mathbf{F}$. Відповідно, енергія деформації $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}]$, обчислена для цього розподілу розтягувань, буде більшою або рівною, ніж мінімум $\boldsymbol{\Psi}^*_{\mathrm{net}}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{F})]$. З іншого боку, в силу опуклості функції енергії її значення не перевищуватиме лінійної комбінації $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}_1^*]$ і $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}_2^*]$. Разом ці спостереження приводять до наступної нерівності:

$$\boldsymbol{\Psi}^*_{\mathrm{net}}(\mathbf{F}) \le \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{net}}[\boldsymbol{\lambda}] \le \alpha \boldsymbol{\Psi}^*_{\mathrm{net}}(\mathbf{F}_1) + (1-\alpha)\boldsymbol{\Psi}^*_{\mathrm{net}}(\mathbf{F}_2)\,. \tag{6.2}$$

Гомогенізована вільна енергія мережі, що є опуклою за $\mathbf{F}$, одержувана для розглянутого типу відгуку волокна на розтягнення, не визначає всю пружну поведінку матеріалу. Інакше всі такі тіла і складові їх сітки стискалися б у вільному стані в точку, оскільки всі волокна прагнуть до нульового розтягнення. Насправді ж мають місце сили стеричного відштовхування між ланцюгами, взаємодія з молекулами розчинника та інші чинники, що визначають скінченний об'єм, який займається матеріалом [121]. Одним із способів урахування цього ефекту є додавання від'ємного доданка до вільної енергії одиночних волокон, як це здійснено у [412, 414], що призведе до зміщення рівноважного подовження ненавантажного волокна до нульового значення. Насправді ж міжмолекулярні сили об'ємної взаємодії не можна відносити до кожного з волокон окремо, і вони мають бути враховані у відмінній від (3.31) формі. У рамках запропонованого підходу пропонується винести об'ємну взаємодію за рамки мікромеханіки мереж. Замість цього, вони можуть бути подані феноменологічно у континуальній моделі умовою нестискності матеріалу. Її традиційно наближають за допомогою функції штрафу $\boldsymbol{\Psi}_{\text{vol}}(J)$, яку включають у вираз для вільної енергії

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\Psi}_{\text{vol}}(J) + \boldsymbol{\Psi}^*_{\text{net}}(\mathbf{F}). \tag{6.3}$$

Об'ємний доданок $\boldsymbol{\Psi}_{\text{vol}}(J)$ з ізольованим мінімумом при $J = 1$ визначає жорстку реакцію у вигляді гідростатичного тиску на найменші зміни в об'ємі. Визначений розклад (6.3) є полівипуклою функцією градієнта деформацій, оскільки $\boldsymbol{\Psi}_{\text{vol}}(J)$ опукле за J, а $\boldsymbol{\Psi}^*_{\text{net}}(\mathbf{F})$ опукле за $\mathbf{F}$, що забезпечує стійкість гіперпружної поведінки матеріалу [168].

Окремо зупинимося на випадку мережі гаусових ланцюжків, для яких квадратична вільна енергія скінченна за будь-якого розтягнення. Прийнявши за відстань між кінцями ланцюжків в початковому стані найбільш імовірне середнє значення $R_0 = \sqrt{Nb}$, що є стандартним припущенням у моделях пружності гум [170, 432], функцію енергії можна записати як $\psi_f = 1{,}5 k_B T \, |\boldsymbol{\lambda}|^2$. Спряжена сила розтягнення $f_f = 3 k_B T \, |\boldsymbol{\lambda}|$ лінійно залежить від $|\boldsymbol{\lambda}|$, що дає можливість розв'язати (3.34) що до рівноважних векторів розтягування

$$3k_B T \left|\boldsymbol{\lambda}^*\right| \left(\boldsymbol{\lambda}^* / \left|\boldsymbol{\lambda}^*\right|\right) = \nu \boldsymbol{\lambda}_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}^* = \nu \boldsymbol{\lambda}_0 / \left(3k_B T\right). \tag{6.4}$$

Видно, що ці мікророзтягнення визначаються афінним перетворенням початкових орієнтацій $\boldsymbol{\lambda}_0$ відображенням $\nu / \left(3k_B T\right)$ і здатні задовольнити кінематичним умовам (3.30) лише в разі виконання співвідношенняя щодо множників Лагранжа

$$\left\langle \boldsymbol{\lambda}^* \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{\nu}{3k_B T} = \frac{1}{3} \mathbf{F} \Leftrightarrow \frac{\nu}{3k_B T} = \mathbf{F}. \tag{6.5}$$

Звідси випливає, що мікродеформації мережі гаусових ланцюжків збігаються тотожно з афінними $\boldsymbol{\lambda}^* = \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda}_0$, що відповідають прикладеній макроскопічній деформації.

Як уже зазначалося, для неафінного перерозподілу розтягнення ланцюжків необхідно, щоб їх відгук був істотно нелінійним. Покажемо це на прикладі негаусових ланцюжків, що вільно обертаються, основні співвідношення для яких наведені у табл. 6.1. Для них розв'язок задачі умовної мінімізації (3.32) не може бути отриманий аналітично. Відповідно, рівноважні розподіли мікродеформацій $\boldsymbol{\lambda}$ і гомогенізовані напруження $\mathbf{P}$ у цьому випадку визначаються чисельно. Досліджуються три модельні мережеві мікроструктури, утворені ланцюжками із різними значеннями загальної довжини $N=$ 4, 16, 64, для яких відповідні границі розтягування складають $\boldsymbol{\lambda}^{\lim} = \sqrt{N} = 2, 4, 8$. Незважаючи на те, що випадок коротких ланцюжків довжиною в чотири статистичних сегменти погано описується наближенням оберненою функцією Ланжевіна, він приведений тут із демонстраційною метою. Запропонована у роботі модель для цих сіток передбачає поведінку, істотно відмінну від одержуваної за допомогою повністю афінних моделей [171, 415].

Завдяки внутрішній свободі, яку надають кінематичні умови сумісності, і закладеній у модель релаксації варійованих мікродеформацій, відгук, що передбачається, значно м'якший порівняно з афінними моделями. У цьому можна переконатися, порівнявши графіки компонент тензора напружень для афінних і неафінних сіток при ізохорному одноосьовому і двоосьовому розтягуванні, наведені на рис. 6.2. Можна помітити, що за тих самих параметрів ланцюжків, неафінні мережі демонструють нескінченне зростання напружень (так званий «locking») за значно більших подовженнях порівняно із афінними. Останні досягають границі розтягуваності значно раніше, тільки-но головні макроскопічні розтягнення наближаються до $\boldsymbol{\lambda}^{\lim}$. У результаті, напруження при одноосьовому і двоосьовому розтягуванні спрямовуються до нескінченності, тільки-но $\boldsymbol{\lambda}_x$ досягає значення 2, 4 або 8 відповідно до довжини ланцюжків. Неафінна мережа при аналогічному навантаженні поводиться зовсім по-іншому. Як тільки ланцюжки, орієнтовані близько до головних напрямків деформацій, починають зазнавати значного розтягнення, відбувається перерозподіл мікродеформацій у сітці. Завдяки тому, що інші ланцюжки беруть на себе частину деформацій і також повертаються у напрямку розтягування, у цілому рівень натягу і повна енергія деформацій у мережі знижуються.

Ефект неафінного перерозподілу мікродеформації ілюструється на рис. 6.3, 6.4. На першому показана залежність максимального розтягнення $\boldsymbol{\lambda}^{\max} = \max\{|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)|, \boldsymbol{\lambda}_0 \in S_0\}$

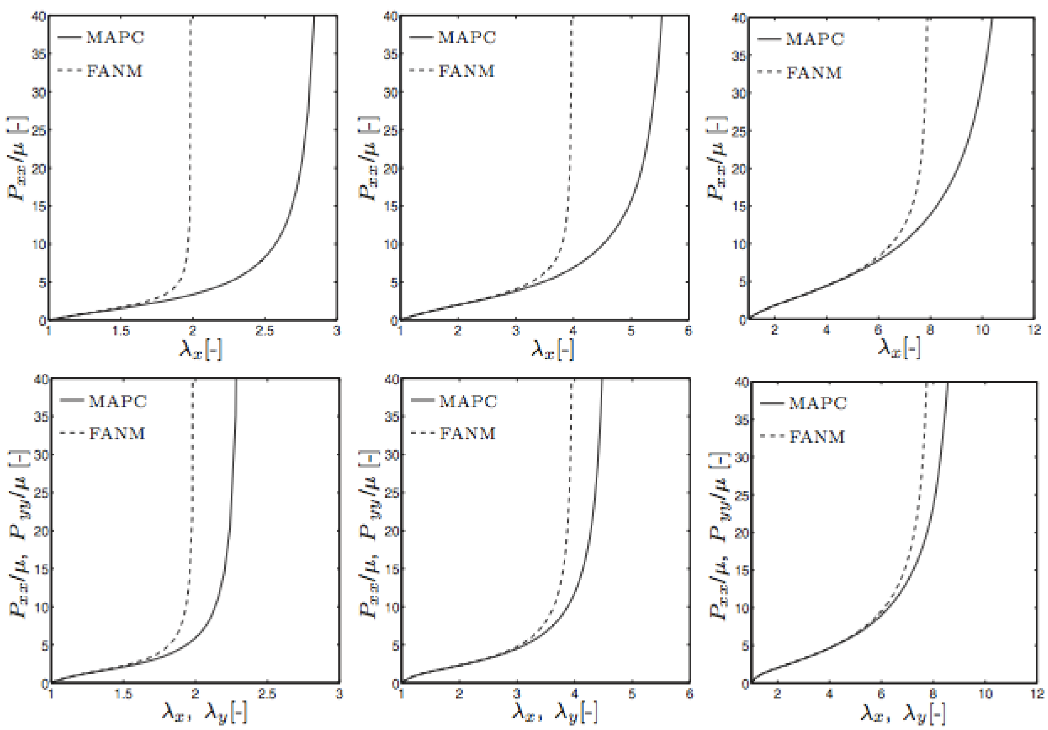


Рисунок 6.2 – Механічні напруження, що передбачаються пропонованою моделлю (MAPC) і повною афінною моделлю (FANM) для одноосьового (верхній ряд) і двовісного (нижній ряд) розтягування в модельному нестисливому матеріалі для одиничного модуля $\mu = nk_BT = 1$, функціональності сітки $f = 4$ і трьох значень межі розтяжності ланцюжків $\sqrt{N} = 2, 4, 8$ (відгук неафінної сітки м'якшій і характеризується більшою межею розтяжності порівняно з афінною моделлю)

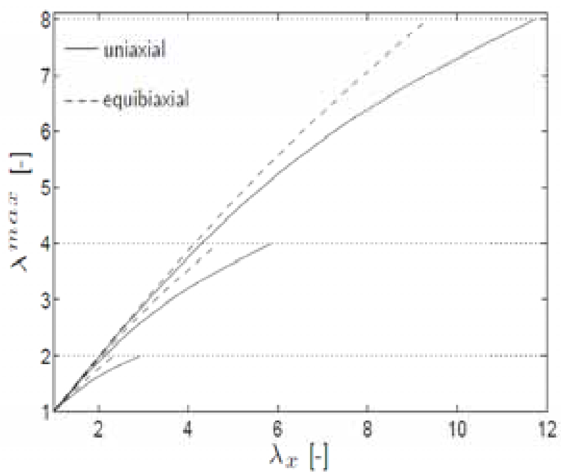


Рисунок 6.3 – Зміна максимального розтягнення волокон в мережі $\lambda^{\max}$ зі збільшенням макроскопічної деформації при одноосьовому і двоосьовому розтягуванні, що прогнозована запропонованою моделлю для трьох сіток функціональності $f = 4$, складених з ланцюжків з межами розтяжності $\sqrt{N} = 2, 4, 8$, зазначеними горизонтальними пунктирними лініями (коли $\lambda^{\max}$ наближається до граничних значень, напруження нескінченно зростають, див. рис. 6.2)

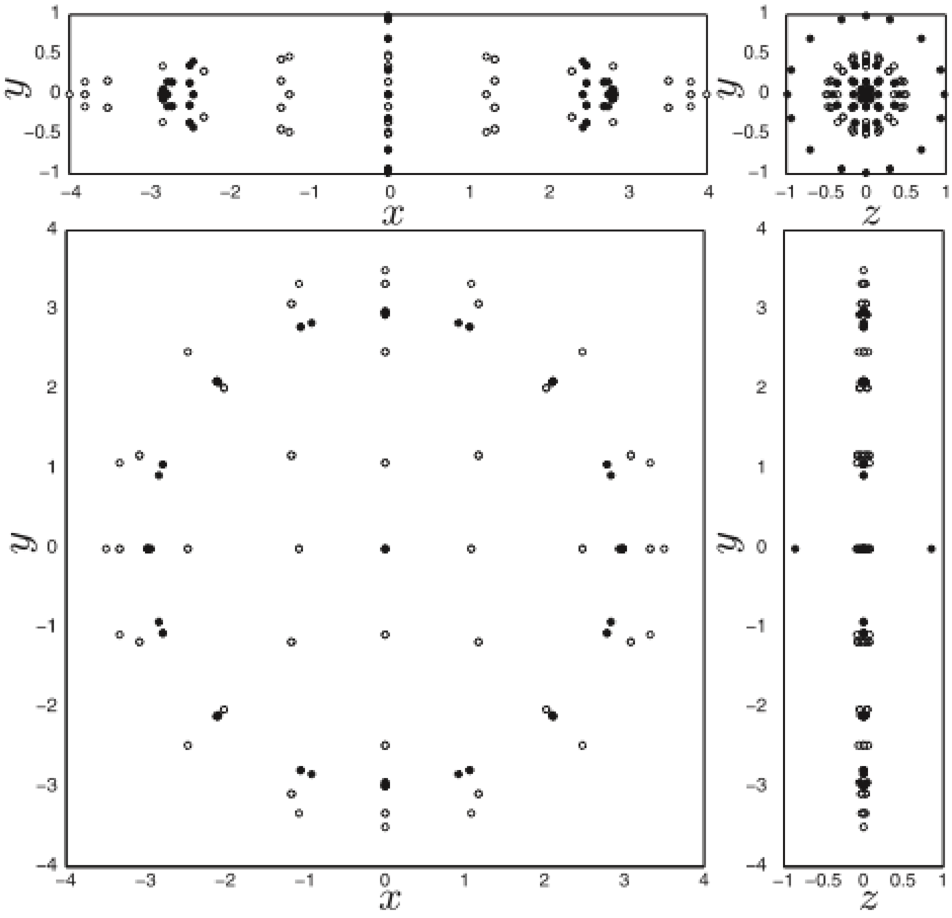


Рисунок 6.4 – Неафінні мікродеформації $\boldsymbol{\lambda}^*$, що передбачаються МАРС моделлю (заповнені точки) для сітки з межею розтяжності ланцюжків $\sqrt{N} = 3$, порівняно з афінним розтягнення $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ (порожні точки) при одноосьовому розтягненні з $\boldsymbol{\lambda}_x = 4$ (верхній ряд) і двоосьовому розтягненні з $\boldsymbol{\lambda}_x = \boldsymbol{\lambda}_x = 3{,}5$ (нижній ряд) (точками у проекції площин *x-y* і *z-y* відображені кінці векторів мікродеформацій, отримані для волокон з дискретними початковими орієнтаціями, відповідними квадратурній формулі [433], використаній для чисельного розв’язання)

серед усіх волокон мережі для всіх трьох розглянутих значень довжин ланцюжків від деформації матеріалу. Видно, що $\boldsymbol{\lambda}^{\max}$ залишається нижчим за значення головної деформації $\boldsymbol{\lambda}_x$ і досягає відповідних меж розтяжності, позначених пунктирними горизонтальними лініями на відмітках 2, 4 і 8, за значно більших макроскопічних деформацій порівняно з афінними сітками.

Різниця у рівні головних деформацій, за яких напруження нескінченно зростають, між афінними і неафінними мережами найбільш помітна для одноосьового подовження, для якого воно досягає 50%. Завдяки перерозподілу деформацій сітка з ланцюжків з межею розтягування $\boldsymbol{\lambda}^{\lim} = 8$ може приймати одновісне розтягнення $\boldsymbol{\lambda}_x$, що дорівнює 11.72. При двоосьовому розтягуванні ефект проявляється меншою мірою, але, тим не менш, цілком відчутний.

Наступним прикладом може служити інша модельна мережа з довжиною ланцюжків $N = 9$ і межею розтяжності $\boldsymbol{\lambda}^{\lim} = 3$. На рис. 6.4 показані мікродеформації цієї сітки для двох макроскопічних деформацій. Перша – одноосьове розтягнення з $\boldsymbol{\lambda}_x = 4$, друга – двовісне розтягнення з $\boldsymbol{\lambda}_x = \boldsymbol{\lambda}_x =$ 3,5. Значення головних деформацій підібрані таким чином, що в обох випадках волокна наближаються до межі розтяжності, що дорівнює 3. Мікродеформації представлені дискретними значеннями векторів розтягнень $\boldsymbol{\lambda}$ для набору квадратурних точок, використовуваних для отримання чисельного розв'язку. Видно, що при двоосьовому розтягуванні порівняно із одноосьовим у мережі є значно менше свободи для перерозподілу деформацій ланцюжків, які повині задовольняти кінематичним умовам. Відповідно, неафінні мікродеформації при двоосьовому розтягуванні відхиляються значно менше від афінних (див. рис. 6.4).

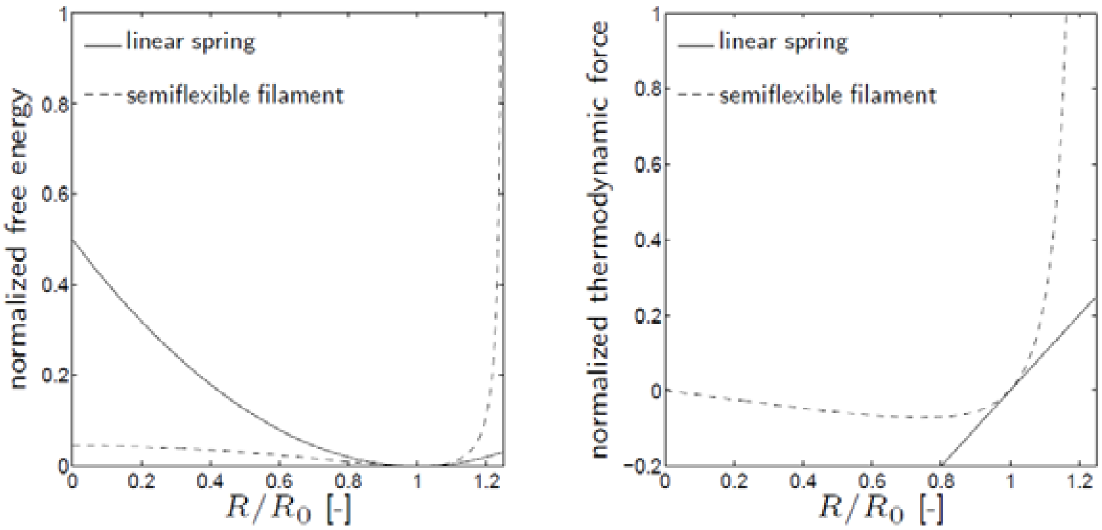
Неафінна деформація мереж негнучких волокон. Окремим випадком є мережі, складені з негнучких волокон. Для них енергія деформації мінімальна за ненульової відстані між кінцями. Відповідно, такі волокна можуть зазнавати як осьового розтягнення, так і осьового стиснення подібно до стрижнів, на відміну від розглянутих раніше ентропійних пружин, що створюють виключно додатну силу. Така поведінка властива мікроскопічним волокнам, що складають такі матеріали як папір або неткані текстилі [121]. Напівгнучким біополімерам також властивий профіль енергії деформації з ненульовим рівноважним подовженням. Їх змішаний ентропійно-ентальпійний відгук описується декількома моделями, переважно заснованими на поданні Краткі-Пород [173, 427, 435–438]. Частинне наближення для напівгнучких філаментів, запропоноване у [427], а також модель лінійного пружного волокна, використовувані у представлених нижче розрахунках, наведені та узагальнені у табл. 6.2. Зміна вільної енергії і відповідна цим моделям сила відображені на рис. 6.5.

Можна очікувати, що тривимірні сітки початково недеформованих волокон будуть стійкими до всіх видів деформації, включно із стисненням, розтягненням і зсувом. Однак більш детальний розгляд показує, що жорсткість сіток, складених із волокон, які сприймають осьове навантаження, залежить від їх геометрії і, в першу чергу, від їх функціональності. Максвелів підрахунок ступенів вільності, розміщених у вуз-

Таблиця 6.2 – Моделі негнучких волокон

Модель	Вільна енергія ψ_f	Термодинамічна сила $\mathbf{F}_f$
Лінійно пружне волокно [1]	$\frac{1}{2}\kappa\frac{(R-R_0)^2}{R_0}$	$\kappa\frac{R-R_0}{R_0}$
Напів-гнучкий ланцю-жок [2]	$k_B T\frac{\pi^2 l_p}{2L}\left(1-\frac{R^2}{L^2}\right)+\frac{2k_B TL}{\pi l_p}\left(1-\frac{R^2}{L^2}\right)^{-1}$	$k_B T\frac{R}{L^2}\left[\frac{4L}{\pi l_p}\left(1-\frac{R^2}{L^2}\right)^{-2}-\frac{\pi^2 l_p}{L}\right]$

Примітки: [1] $R_0 = L$ – початкова довжина волокна, що дорівнює його довжині L, $\kappa = EA$ – осьова жорсткість за заданих модуля пружності E і площі перетину волокна A; [2] – наведені вирази відповідають наближенню [428] залежності сили від подовження напівгнучкого філамента довжини L і персистентної довжини $l_p = x/k_B T$, згідно з яким рівноважна відстань між кінцями філамента за нульової осьової сили становить $1-(R_0/L)^2 = 2L/(\pi^{3/2} l_p)$



а ***б***

Рисунок 6.5 – Вільна енергія (*а*) і термодинамічна сила (*б*), віднесені до жорсткості волокна $\partial^2\psi_f/\partial R^2$ при $R = R_0$ для лінійно пружного волокна та напівгнучкого філамента (останній тип волокон демонструє анізотропію у поведінці при стисненні і розтягуванні, а також зростаючу жорсткість при випрямленні філамента до повної його довжини) лах сітки, і обмежень, що накладаються сегментами волокон, які виступають як пружні зв'язки, показує, що мінімальна функціональність, яка забезпечує стійкість цієї механічної системи, дорівнює 6 [158, 159, 439]. Таким чином, сітки з функціональністю $f = 4$, що представляють головний інтерес у цій роботі, є поготів нестійкими, якщо тільки у них не присутні інші дієві механізми, що стабілізують відгук волокон. Певною мірою кінцева жорсткість волокон до вигину здатна підтримати деформації тетрафункціональних сіток [158, 224, 440, 441]. Однак у пропонованому підході до гомогенізації сіток вигин не розглядається. Неафінні мікродеформації, одержувані за допомогою цієї моделі, можна розглядати як граничну поведінку матеріалу для випадку малої згинної жорсткості, що справедливо для досить тонких волокон, рідко скріплених між собою.

Отримуваний у разі негнучких волокон неафінний розподіл мікродеформацій істотно відрізняється від розглянутого раніше випадку гнучких ланцюжків. Як показано на рис. 6.5, вільна енергія ψ_f для них не є більше опуклою функцією вектора розтягнення $\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{IR}^3$, хоча і є опуклою за абсолютним значенням розтягнення $|\boldsymbol{\lambda}|$. Зокрема, опуклість порушується, коли волокна знаходяться у стиснутому стані за $|\boldsymbol{\lambda}| < 1$ і створюють від'ємну силу. З цієї причини мережа не буде стійко деформуватися за всіх значень макроскопічної деформації. Встановлено, що ця мікроструктура за певних умов буде деформуватися таким чином, що волокна будуть повертатися, залишаючись нерозтягнутими. Така поведінка у рамках статистичного опису мікродеформацій задається деякою функцією вектора розтягнення, який має одиничну довжину для всіх початкових орієнтацій $\boldsymbol{\lambda}_0$, а саме

$$|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_0)| = 1 \ \forall \boldsymbol{\lambda}_0 \notin S_0. \tag{6.6}$$

У такому стані мережа має мінімально можливу енергію і не створює механічне напруження, оскільки всі сили у волокнах дорівнюють нулю. Видається можливим охарактеризувати множину всіх тих макроскопічних деформацій $\Im \subset SO(3)$ ($SO(3)$ – це простір усіх лінійних відображень у тривимірному просторі), для яких спостерігається така поведінка мікроструктури.

Розглянемо довільну мікродеформацію (6.6), сумісну з отриманим у роботі кінематичним співвідношенням із макроскопічним градієнтом деформацій $\mathbf{F}$. Полярне розкладання цього тензора $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ містить у собі поворот і головні розтягнення

$\mathbf{V} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{\lambda}_x, \boldsymbol{\lambda}_y, \boldsymbol{\lambda}_z]$. Умови деформування максимальних шляхів (3.30) з урахуванням цього розкладу еквівалентні наступній тотожності

$$\langle \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}_0 \rangle = \frac{1}{3}\mathbf{V}. \tag{6.7}$$

Слід виразу у лівій його частині дорівнює $\langle \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}_0 \rangle$ і не перевищує 1, оскільки обидва вектори $\boldsymbol{\lambda}$ і $\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}_0$ – одиничні. Слід тензора у правій частині задовольняє іншій нерівності, а саме $\frac{1}{3} tr\mathbf{V} = \frac{1}{3}[\boldsymbol{\lambda}_x + \boldsymbol{\lambda}_y + \boldsymbol{\lambda}_z] \geq [\boldsymbol{\lambda}_x + \boldsymbol{\lambda}_y + \boldsymbol{\lambda}_z]^{1/3}$, оскільки всі головні розтягнення повинні бути додатними. Звідси можна зробити висновок, що поведінка волоконної мікроструктури може бути нестійкою через вільний поворот волокон без розтягування лише в разі, коли макроскопічна об’ємна деформація від’ємна. Іншими словами, градієнт деформації з $\mathfrak{I}$ зобов’язаний мати якобіан менший 1, тобто $J = \det \mathbf{F} < 1$.

Стійкий відгук системи за $\mathbf{F} \in \mathfrak{I}$ створюється рівноважним розтягуванням волокон, що визначаються єдиним чином як

$$\boldsymbol{\lambda}^* = f_f^{-1}(|v\boldsymbol{\lambda}_0|)(v\boldsymbol{\lambda}_0 / |v\boldsymbol{\lambda}_0|), \tag{6.8}$$

де обернена до функції сили натягу f_f^{-1} добре визначена, і для додатних значень $|v\boldsymbol{\lambda}_0|$ абсолютне значення розтягнення

$$|\boldsymbol{\lambda}^*| = f_f^{-1}(|v\boldsymbol{\lambda}_0|) > 1, \tag{6.9}$$

як добре видно на рис. 6.5. Як наслідок, стійкість мікродеформацій тетрафункціональних мереж вимагає, щоб усі волокна, що складають її, перебували у натягу. Як тільки розтягнення досягає одиниці зі зміною макроскопічної деформації, мережа втрачає жорсткість, схлопуючи за численними формами руху, які передбачає максвелів підрахунок ступенів вільності у разі функціональності f = 4. Перехід зі стійкого режиму деформацій за $\mathbf{F} \in \mathfrak{I}$ до податливого стану за $\mathbf{F} \in \overline{\mathfrak{I}}$ проілюстрований на рис. 6.6. На ньому схематично зображено поділ простору градієнтів деформації SO(3) на стійку та нестійку області.

Крім того, обидва розглянутих вище типи відгуку мереж продемонстровані прикладом одноосьового розтягування у разі лінійно пружних волокон, поведінка яких описується наведеними в табл. 6.2 співвідношеннями. Коли така мікроструктура піддана ізохорному одноосьовому розтягненню $\mathbf{F}_1 = \mathrm{diag}[1.4,\ 0.8452,\ 0.8452]$, волокна набувають стійких мікродеформацій, показаних на рис. 6.7. У повній відповідності з (6.9) усі волокна в релаксованому стані залишаються натягненими. І оскільки усі сили в волокнах – додатні, то і всі компоненти тензора напружень виявляться додатними $\mathbf{P}_1 / n\kappa\ = \mathrm{diag}[0.0412,\ 0.0180,\ 0.0180]$. Якщо не утримувати матеріал у напрямку, перпендикулярному напрямку осьового розтягування, то він буде прагнути стиснутися, з тим, щоб зникли компоненти напружень $\mathbf{P}_{yy}, \mathbf{P}_{zz}$. Це станеться за макроскопічної деформації $\mathbf{F}_2 = \mathrm{diag}[1.4,\ 0.5979,\ 0.5979]$, за якої усі волокна в мережі виявляться нерозтягнутими, як показано на рис. 6.7. В цьому пограничному стані на стику між $\mathfrak{I}$ і $\overline{\mathfrak{I}}$ разом із нормальними напруженнями у поперечних напрямках обернуться у нуль і осьові напруження $\mathbf{P}_{xx}$. Іншими словами, при однорідному одноосьовому розтягуванні матеріал із мікроструктурою з лінійно пружних волокон буде стискатися, не опираючись подовженню.

Від’ємна об’ємна деформація при розтягуванні є нетиповою, оскільки більшість матеріалів збільшуються в об’ємі при одноосьовому розтягуванні. При афінних деформаціях такої ж мікроструктури при ізохоричному розтягуванні $\mathbf{F}_1$ осереднені напруження $\mathbf{P}_{affine} / n\kappa\ = \mathrm{diag}[0.0723,\ -0.0123,\ -0.0123]$ виявляються від’ємними у поперечному напрямку, у якому волокна будуть відчувати стиснення. Відповідно, афінні деформації передбачають, що матеріал буде збільшуватися в об’ємі, розширюючись у поперечному напрямку порівняно з ізохорною деформацією.

Як показано вище, запропонована у цій роботі модель передбачає нетривіальні неафінні деформації для сіток із волокон з найпростішою лінійнопружною поведінкою. Для випадку напівгнучких філаментів із істотно нелінійною залежністю сили від розтягування можна очікувати більш складної картини. Дослідимо приклад модельної напівгнучкої сітки, що піддана макроскопічному зсуву $\mathbf{F} = 1 + \gamma_{xy}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ – базові вектори декартової системи координат. Ця деформація ізохорна, а тому, як і у попередньому випадку, рівноважні мікродеформації існують і стійкі, якщо тільки зсувна деформація γ_{xy} не є настільки великою, що волокна в мережі досягають межі розтяжності.

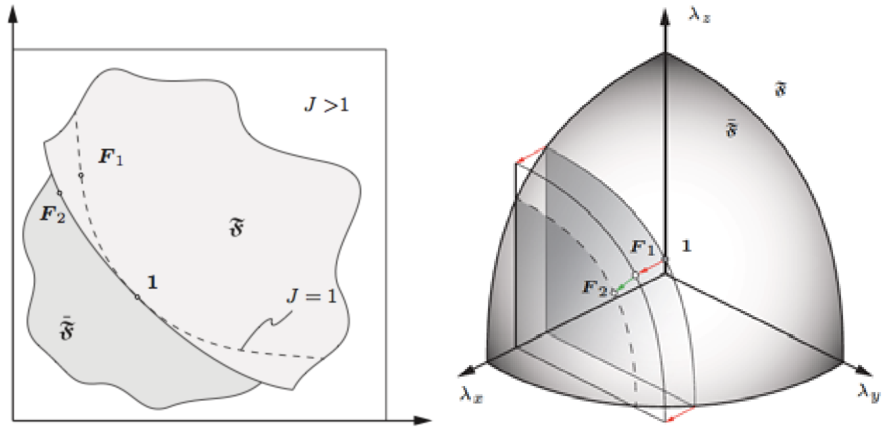
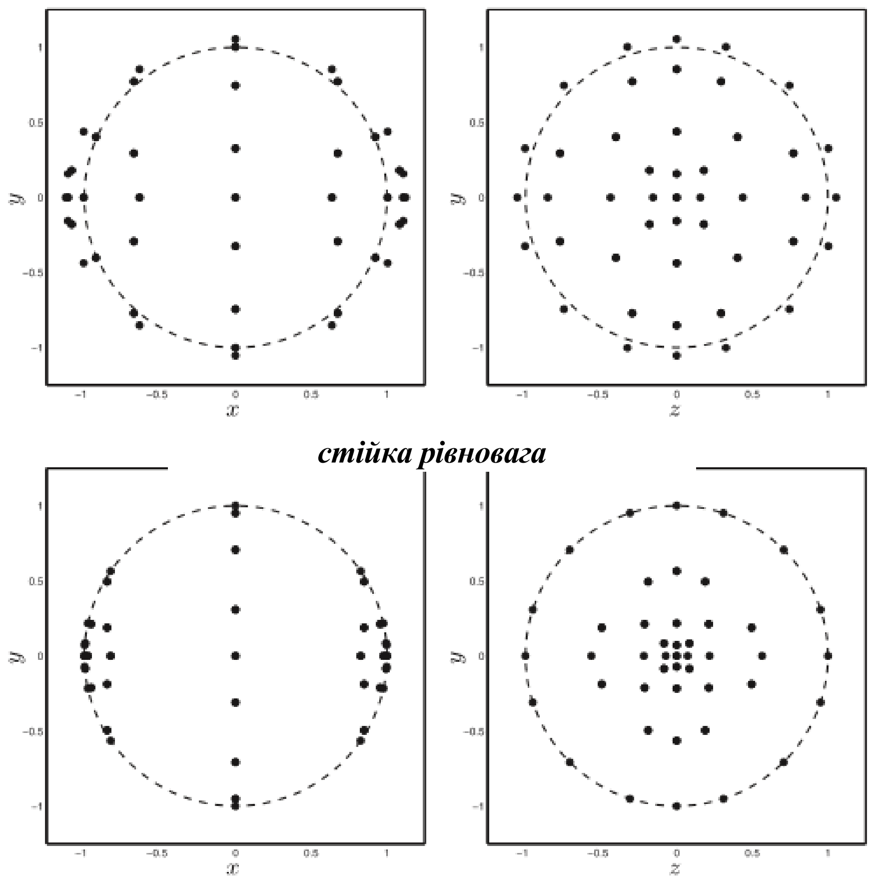


Рисунок 6.6 – Схематичне подання простору градієнтів деформації SO(3) і його поділу на область $\mathfrak{I}$ стійких рівноважних мікродеформацій сіток і область $\overline{\mathfrak{I}}$ податливої поведінки волокон, що вільно обертаються (показана ізохорна деформація одноосьовного розтягування $\mathbf{F}_1$ із $\mathfrak{I}$ і деформація $\mathbf{F}_2$ із від'ємною зміною об'єму на границі між $\mathfrak{I}$ та $\overline{\mathfrak{I}}$)



податливе деформування

Рисунок 6.7 – Ілюстрація двох типів мікродеформації в тетрафункціональних сітках жорстких волокон, які передбачаються МАРС моделлю (графічне подання, ідентичне використаному на рис. 6.4, одиничне коло відображене пунктиром задля ідентифікації: у першому випадку – подовжених волокон, у другому випадку – повернених волокон з одиничним розтягуванням: верхній ряд – пружні рівноважні мікродеформації за ізохорного одноосьового розтягнення $\mathbf{F}_1$, нижній ряд – податливі деформації сітки за стиснення у поперечному напрямку до деформації $\mathbf{F}_2$)

Розглядається модельний набір параметрів для напівгнучких волокон, поведінка яких описується моделлю, наведеною у табл. 6.2. Він обирається таким чином, щоби початкове подовження ненавантажених волокон $R_0 = 0.9L$ було близьке до стану повністю випрямленого волокна. Цьому відповідає межа розтяжності, що дорівнює $\boldsymbol{\lambda}^{\lim} = 1.11$. Поведінка цієї мікроструктури, передбачувана неафінною моделлю МАРС і повністю афінною моделлю, наведена на рис. 6.8.

Показані криві зсувних напружень $\mathbf{P}_{xy}$ і нормальних напружень $\mathbf{P}_{yy}$ на майданчику, уздовж якого здійснюється зсув. Як і у випадку гнучких ланцюжків обмеженої розтяжності, неафінна кінематика дає можливість мікроструктурі зазнавати більш високих макроскопічних деформації. У той час як за афінної поведінки волокна, повернені під кутом 45° відносно напрямку зсуву, досягають меж розтяжності $\boldsymbol{\lambda}^{\lim} = 1.11$ за $\gamma_{xy} = 0.2121$, неафінно деформована відповідно до запропонованої моделі мережа може зазнавати деформацій зсуву до $\gamma_{xy} = 0.5$ та більше. Розтягнення волокон за цієї макроскопічної деформації показані на рис. 6.9. Усі волокна у цьому рівноважному стані мережі перебувають у розтягненні, величина якого дивовижним чином варіюється у дуже вузькому діапазоні від $\left|\boldsymbol{\lambda}^*\right| = 1.0443$ до $\left|\boldsymbol{\lambda}^*\right| = 1.0603$, що може бути добре видно на ілюстрації. Для порівняння афінні деформації волокон при відповідному зсуві розрізнялися б від стиснення $\left|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right| = 0.7906$ до розтягування $\left|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right| = 1.2748$. Можна помітити, що тим самим волокна відповідно до запропонованої моделі працюють спільно, рівномірно розподіляючи зусилля і деформації у мережі.

На закінчення наведемо ще дві характерні риси, виявлені у поведінці неафінних мереж за малих і помірних деформацій. Перше спостереження стосується величини нормального напруження $\mathbf{P}_{yy}$, яка буде вищою, ніж напруження зсуву $\mathbf{P}_{xy}$, та їхнього знаку, який є додатним. Ані афінні мережі, ані більшість звичайних матеріалів не демонструють таку механічну поведінку за зсуву. Разом із тим у ході останніх експериментальних досліджень біополімерних гелів були виміряні саме подібні нетипові додатні значення нормальних напружень, що перевищують зсувні [180, 442]. Явище спостерігається виключно у біогелях, утворених напівгнучкими філаментами, а не гнучкими ланцюжками. При цьому його природа повністю узгоджується із запропонованою у роботі моделлю мікромеханіки матеріалів із волоконною мікроструктурою. Іншою особливістю результатів цієї моделі є асимптотика поведінки напруження за малих деформацій зсуву. Для звичайних матеріалівнапруження зсуву лінійно пропорційні деформації $\mathbf{P}_{xy}{\sim}\gamma_{xy}$ за γ_{xy}, близьких до нуля, тоді як нормальні напруження поводяться як квадрат величини зсуву $\mathbf{P}_{yy}{\sim}\gamma_{xy}^2$. Такою ж самою є поведінка афінних мереж (див. рис. 6.8). Неафінна мережа, навпаки, виробляє напруження, які співвідносяться як $\mathbf{P}_{xy}{\sim}\gamma_{xy}^3$ та $\mathbf{P}_{yy}{\sim}\gamma_{xy}^2$. Видно, що згідно з цими асимптотами реакція матеріалу у вигляді зсувних напружень виходить м'якшою, ніж у вигляді нормальних напружень. Мережа демонструє нульову жорсткість у вихідному недеформованому стані за $\gamma_{xy}=0$, коли усі волокна є нерозтягнутими і мікроструктура виявляється податливою до макроскопічних деформацій.

Дискретне моделювання волоконної мікроструктури. Особливості осередненої поведінки матеріалів із волоконною мікроструктурою, що передбачена запропонованою неафінною моделлю, узгоджуються з результатами дискретного моделювання. Як репрезентативний об'єм розглянуто періодичну комірку мережі, у якій випадковим чином згенеровано її геометрію, як показано на рис. 6.10. Випадковим чином розташовані вузли сітки по'єднано сегментами волокон, для яких задано лінійнопружну поведінку. Вектори $\mathbf{R}_{ij}$ і $\mathbf{r}_{ij}$, що з'єднують відповідно кінці сегментів у недеформованому і деформованому стані, визначаються з урахуванням періодичності як

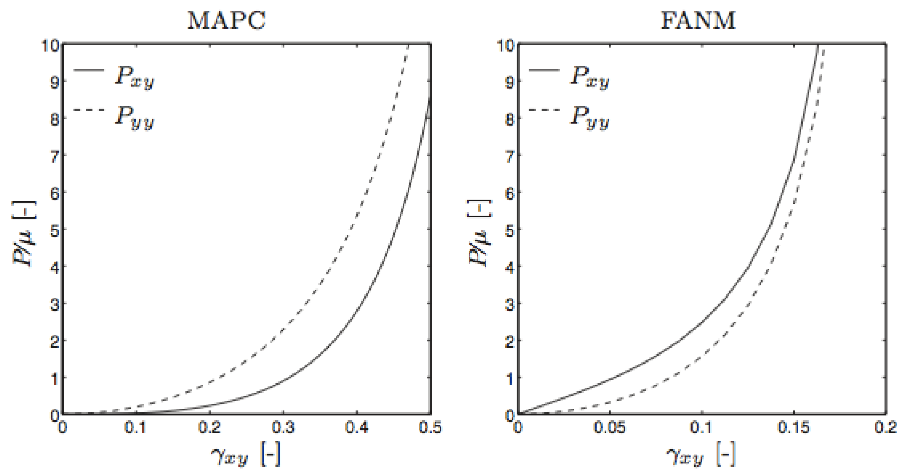
$$\mathbf{R}_{ij}=\mathbf{X}_j+\mathbf{\Delta}_{ij}-\mathbf{X}_i;\, \mathbf{r}_{ij}=\mathbf{x}_j+\mathbf{\delta}_{ij}-\mathbf{x}_i\,, \tag{6.10}$$

де $\mathbf{X}_{i,j}$, $\mathbf{x}_{i,j}$ – початкові і поточні положення вузлів, $\mathbf{\Delta}_{ij}$ – вектор періодичного зсуву недеформованої комірки, а $\mathbf{\delta}_{ij}=\mathbf{F}\,\mathbf{\Delta}_{ij}$ – його зміна за деформації.

У дискретній моделі мереж передбачалася лінійно пружна поведінка волокон, аналогічна наведеній у табл. 6.2. Енергія розтягнення окремого волокна визначається простим співвідношенням

$$\psi_f(\mathbf{r}_{ij})=0.5\,EA\left[\left(\mathbf{r}_{ij}-\mathbf{R}_{ij}\right)^2/\mathbf{R}_{ij}\right] \tag{6.11}$$

у припущенні, що у початковому стані всі волокна випрямлені та їхня довжина визначається початковою відстанню між вузлами $R_0=\left|\mathbf{R}_{ij}\right|$. Повна енергія цієї мікромеханічної системи обчислюється простим підсумовуванням по всіх волокнах:



а ***б***

Рисунок 6.8 – Безрозмірні механічні напруження, створені підданою зсуву мережею з напівгнучких філаментів (зсувні напруження $\mathbf{P}_{xy}$ і нормальні напруження $\mathbf{P}_{yy}$ відмасштабовані відносно характерного модуля $\mu = nk_BT$) згідно із:
а – неафінною МАРС моделлю, *б* – афінною моделлю

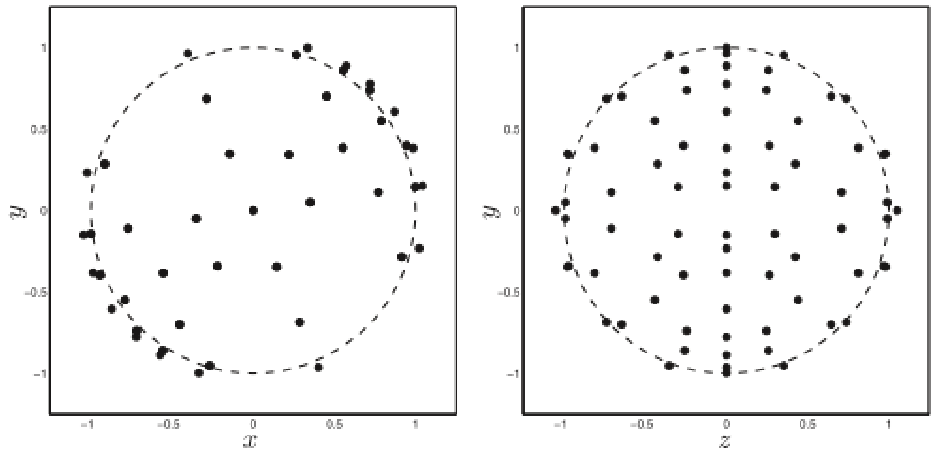


Рисунок 6.9 – Мікродеформації за макроскопічного зсуву у мережі з напівгнучких філаментів (використано графічне подання, ідентичне до рис. 6.7, де одиничне коло відображене пунктиром задля ідентифікації подовжених волокон)

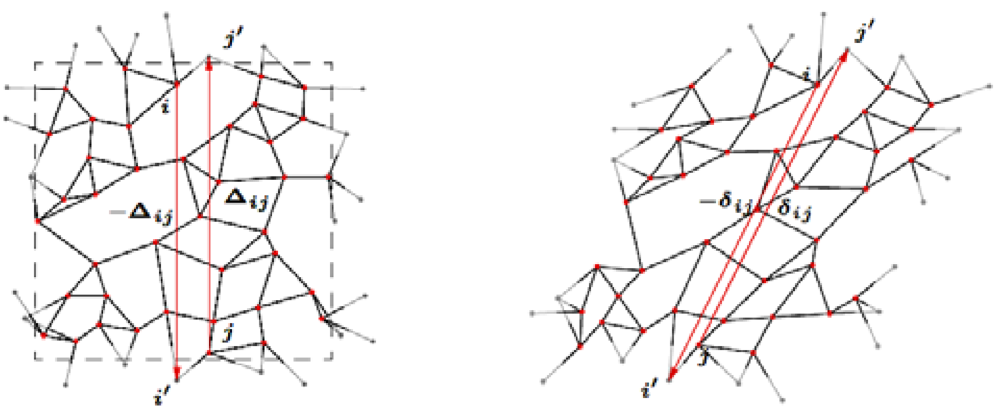


Рисунок 6.10 – Періодична комірка, що представляє випадкову мережеву мікроструктуру, та її деформація

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{net}} = \boldsymbol{\psi}_{\text{net}}(\mathbf{x},\mathbf{F}) = \sum_{f} \psi_{f}(\mathbf{r}_{ij}). \tag{6.12}$$

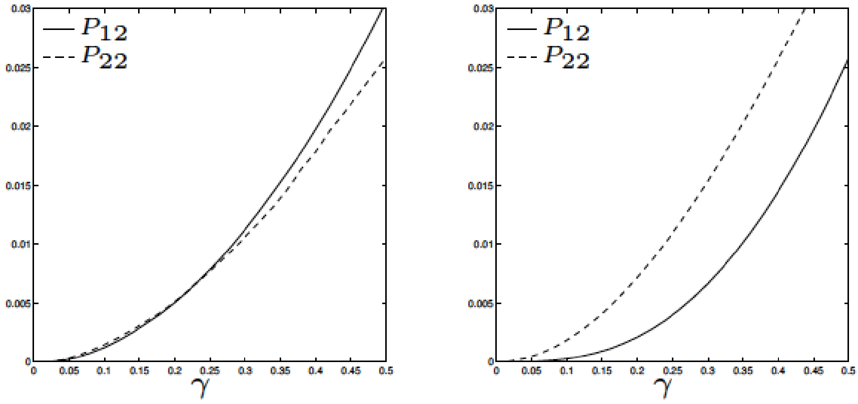
Рівновага у системі досягається у стані, що мінімізує її енергію, за аналогією з тим, як у статистичній моделі рівноважні розтягування визначалися мінімумом осередненої внутрішньої енергії. Розв’язок нелінійної задачі визначення актуальних положень вузлів сітки здійснюється методом Ньютона-Рафсона. За цим розв’язком, що характеризує механічний відгук мікроструктури, обчислюються безрозмірні напруження

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{f}_{ij} \otimes \boldsymbol{\Delta}_{ij} /(L_{\text{tot}}EA) = \sum_{ij} \mathbf{f}_{ij} \otimes \mathbf{R}_{ij} /(L_{\text{tot}}EA), \tag{6.13}$$

віднесені до загальної довжини волокон в сітці L_{tot} та їхньої поздовжньої жорсткості EA. Ці напруження коректно порівнювати із безрозмірними напруженнями, одержуваними за допомогою статистичної гомогенізації. Результати порівняння результатів, отриманих для зсувних деформацій, представлені на рис. 6.11. Як і раніше, спочатку мережа поводиться податливо, що видно з нахилу кривих компонент напруження в нулі. Однак дискретна модель показує значно меншу різницю у поведінці значень нормальних і зсувних напружень.

На рис. 6.12 показаний характер скінченних деформацій мережі при зсуві γ, що досягає значення 0.5. З картини розподілу осьових зусиль видно, що волокна практично не розтягуються, лише повертаючись у напрямку зсуву, аж до вельми істотного рівня деформацій. Надалі стає добре видно, що зусилля у мережі передаються уздовж чітко означених витягнутих шляхів. Така поведінка добре узгоджується з тим, що передбачає запропонована раніше осереднена модель для негнучких волокон. Представлені на рис. 6.13, 6.14 дані про розтягнення волокон, отримані за допомогою цих двох підходів, також свідчать про повну якісну їх відповідність.

Скінченно-елементне моделювання матеріалів із мережевою мікроструктурою. Запропонована статистична модель пружності матеріалів з мережевою мікроструктурою була реалізована у скінченно-елементному коді FEAP 8.3 за скінчених деформацій. За її допомогою було досліджено поведінку м’яких тіл та їх просторовий НДС. Інтерес представляє поведінка біополімерів із напівгнучких волокон. Для них раніше було встановлено, що стійкі деформації можливі лише в умовах, коли що-небудь перешкоджає об’ємному стисненню матеріалу. Зазвичай у цій ролі виступає розчинник,



а ***б***

Рисунок 6.11 – Компоненти безрозмірних напружень, отриманих з дискретної моделі (*а*) і статистичною гомогенізацією (*б*)

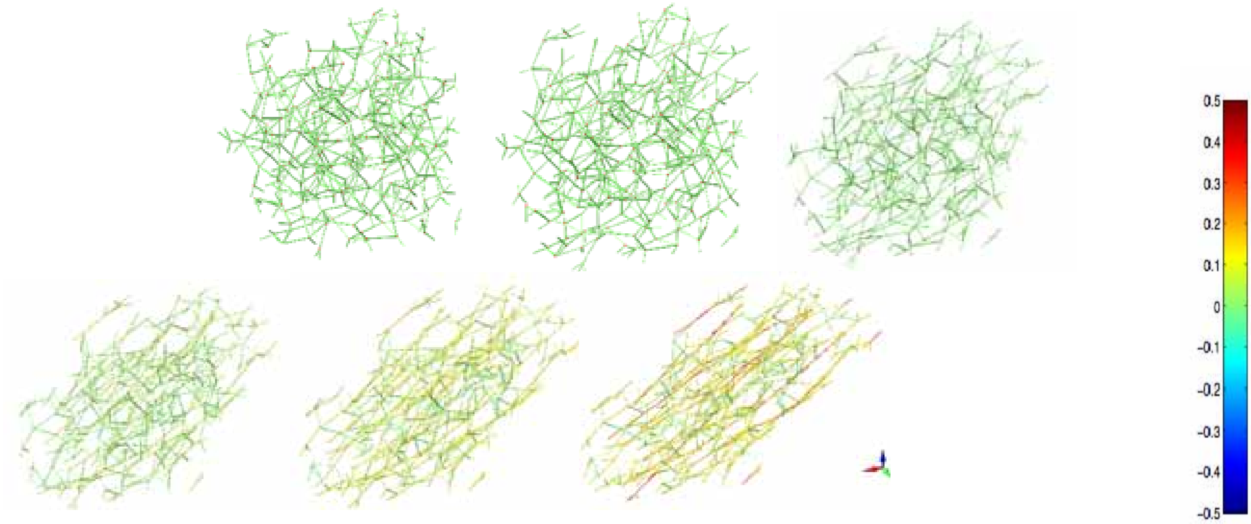


Рисунок 6.12 – Зсувна деформація тривимірної періодичної комірки, розподіл осьових зусиль у розтягнених волокнах

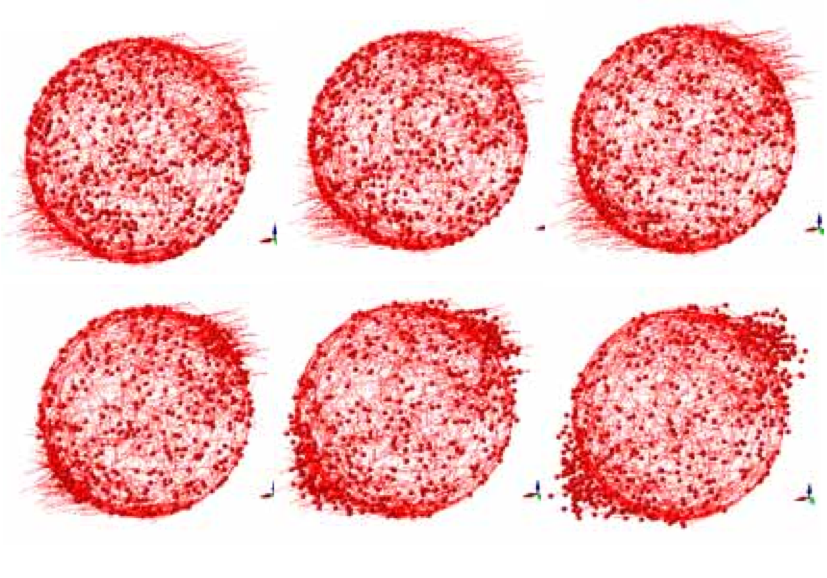


Рисунок 6.13 – Дискретні значення векторів розтягнення волокон за зсуву репрезентативної комірки (точками відзначені кінці векторів на поточному кроці навантаження, а суцільними лініями – їхні траєкторії; видно переорієнтацію волокон з подальшим розтягуванням у напрямку зсуву)

хімічний потенціал якого перешкоджає його витисненню з гелю. Нижче показані результати в граничному стані, коли вплив розчинника дуже малий. У цьому випадку єдиним стабілізуючим фактором виступають крайові умови.

Покажемо вплив закріплення і геометричних розмірів на характер деформування матеріалів, мережева мікроструктура яких здатна підтримувати лише розтягнення, на прикладі одноосьового розтягнення кругового циліндра. На рис. 6.15 показано зміну величини безрозмірних номінальних осьових напружень $\left\langle \mathbf{P}_{zz} \right\rangle / \mu$ за переміщення верхньої границі зразків із відношенням висоти до ширини h/d, що дорівнює 0.25, 0.5 і 0.75, а також НДС за скінченного розтягнення 20%. Видно, що за малих осьових переміщень усі зразки поводяться повністю піддатливо, не опираючись переміщенню. Короткий зразок раніше інших починає показувати стійкий відгук до розтягнення у вигляді осьової сили, у той час як найдовший зразок залишається ненапруженим аж до кінцевих деформацій у 20%. Це пояснюється крайовими умовами на верхній і нижній гранях, на яких були задані умови повного прилипання. Крім іншого, вони перешкоджають поперечним переміщенням матеріалу на гранях, що і перешкоджає його об’ємному стисненню. При цьому ефект обмежень для більшого зразка виявляється слабшим, у результаті чого він має можливість уникнути напружень мікроструктури за рахунок стиснення у всьому об’ємі.

Слід звернути увагу на увігнуту арку, яка утворюється на бічній поверхні зразка за його неоднорідної деформації. Стан матеріалу в точках на вільній границі істотно відрізняється від того, що спостерігається всередині зразка та на його закріплених гранях. Цю різницю наведено у табл. 6.3, де показано розтягнення найменшого з циліндрів і зміна мікродеформації його матеріалу у чотирьох точках. Видно, що в точках A і C на центральній осі поступово відбувається розтягнення волокон.

При цьому відбувається воно не тільки у вертикальному напрямку, а й у поперечних. У результаті матеріал у цій частині тіла знаходиться у стані, близькому до всебічного розтягнення. На противагу, у точці D на вільній поверхні волокна лише орієнтуються в напрямку розтягування, при цьому самі вони залишаються ненавантаженими. У цілому матеріал у центральній частині увігнутої арки, витягуючись, істотно зменшується у об’ємі. При цьому всі компоненти напружень на поверхні перетворюються в нуль. Деформації у кутовій точці B відповідають зсуву, якого зазнає мате-

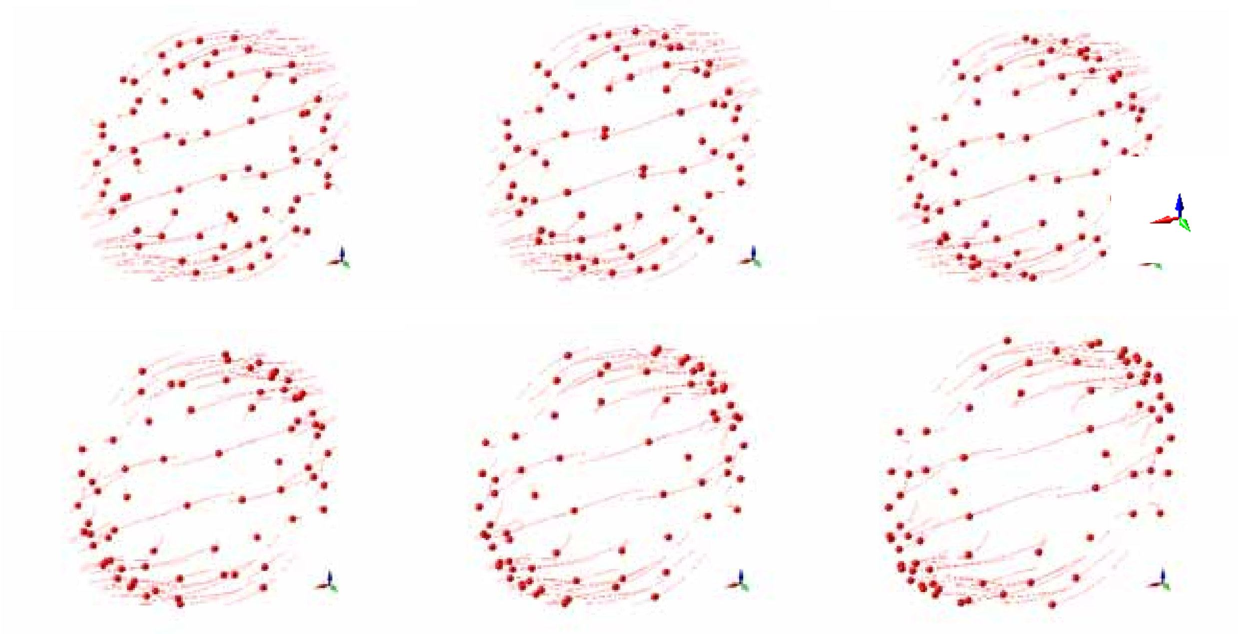
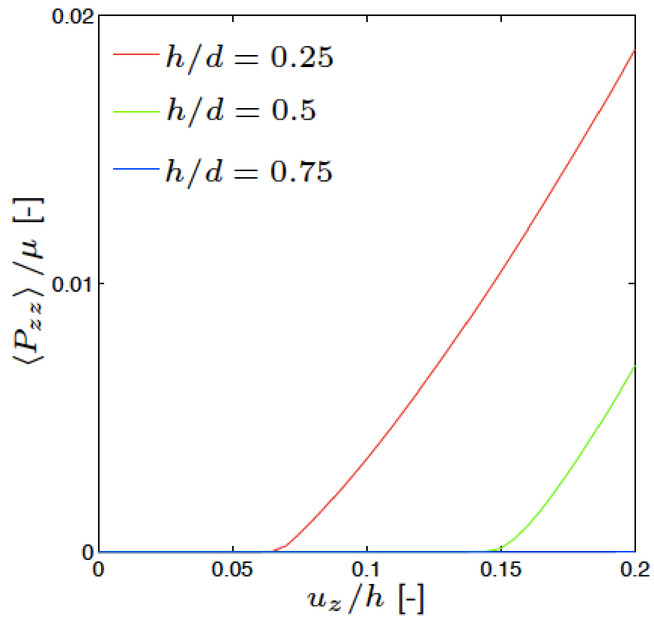


Рисунок 6.14 – Значення векторів розтягнення волокон за зсуву, отримані зі статистичної моделі (точками відображені кінці векторів розтягнення, отримані для волокон із дискретними початковими орієнтаціями, відповідними квадратурній формулі [434], використаній для чисельного розв’язання, суцільними лініями – їхні траєкторії)



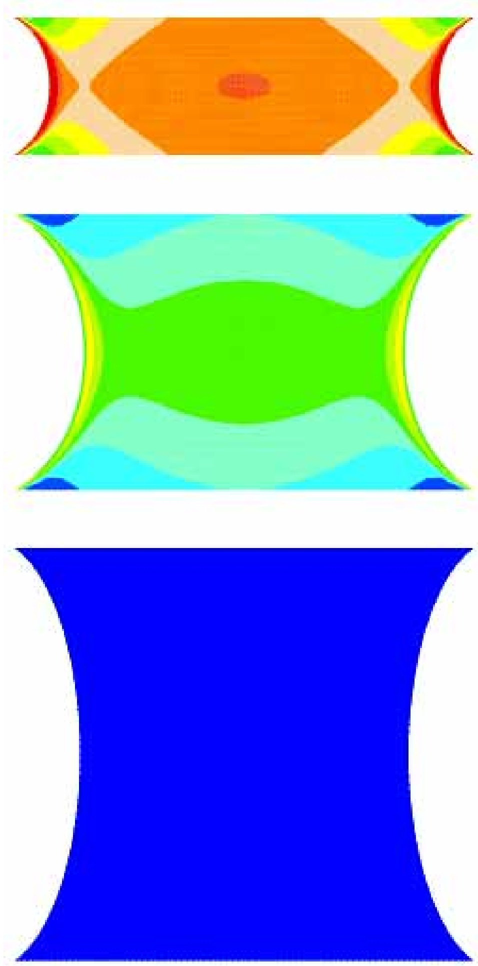
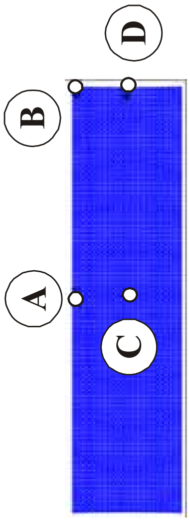
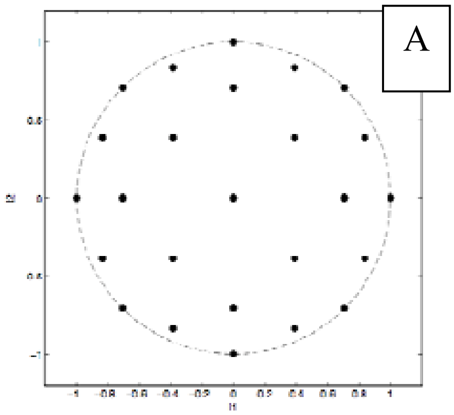
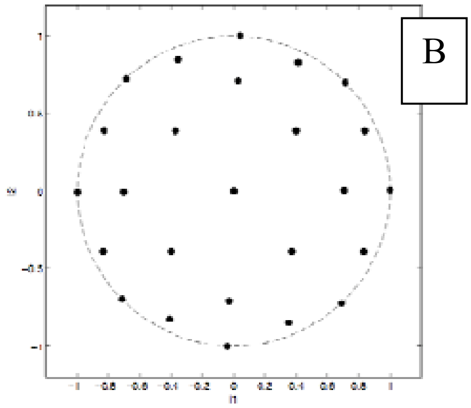
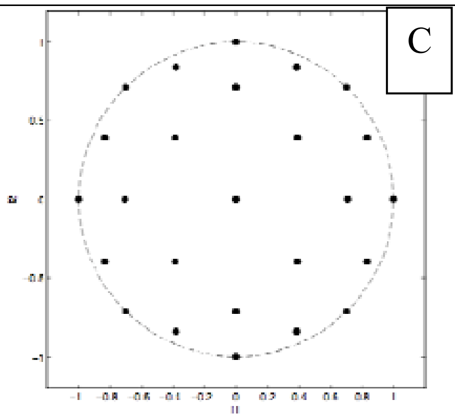
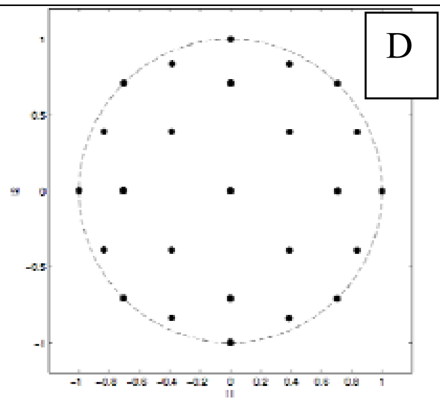
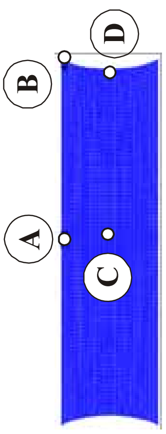
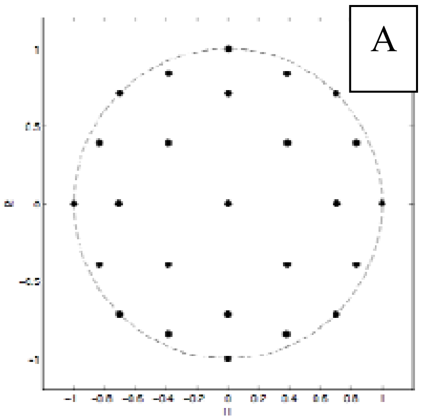
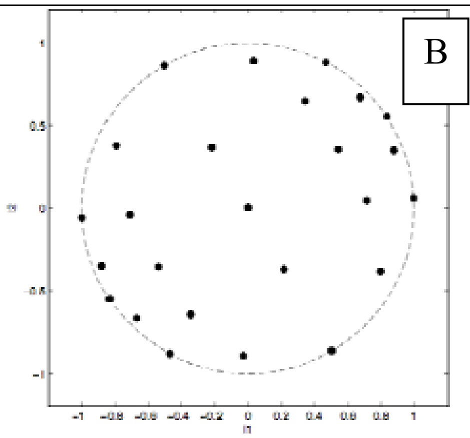
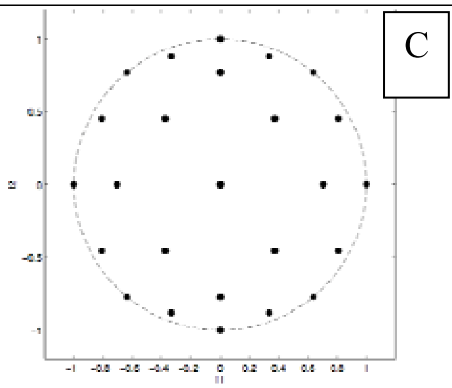
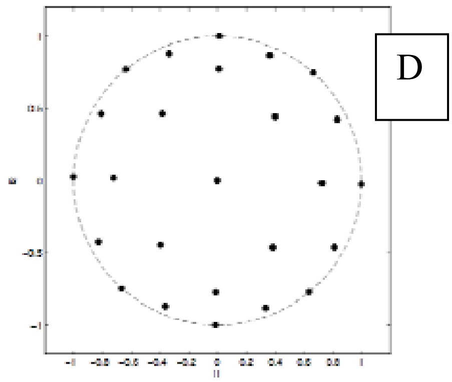
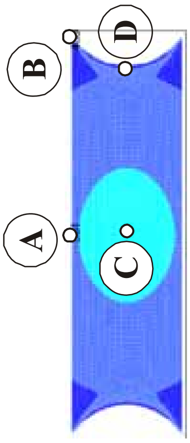
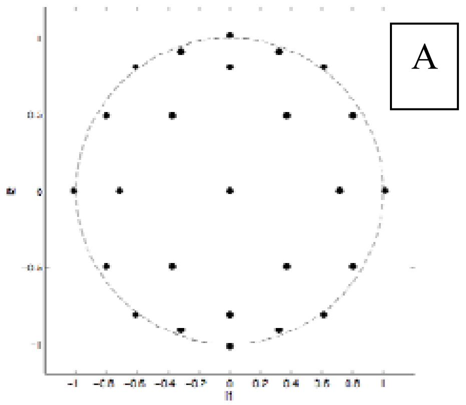
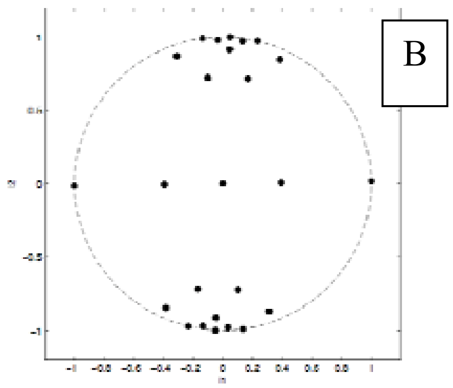
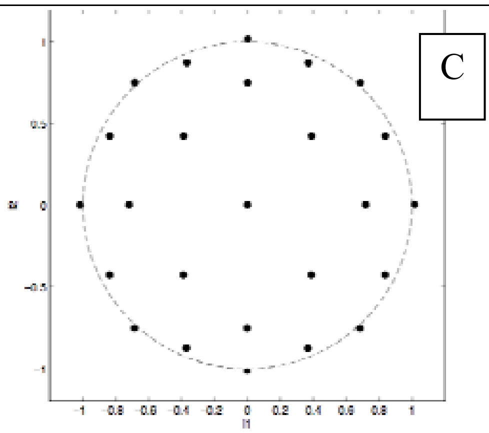
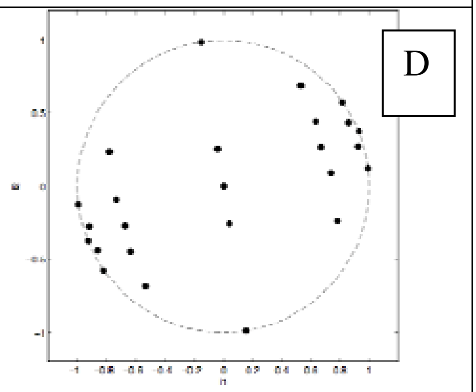
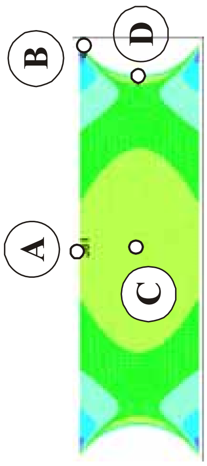
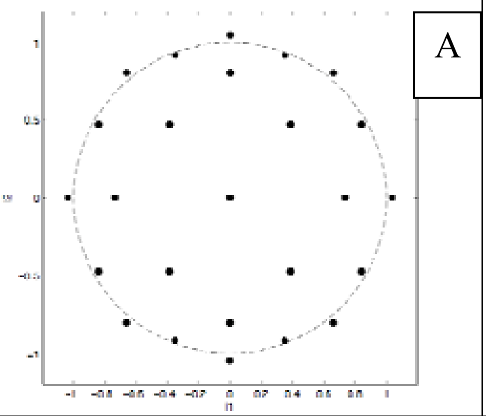
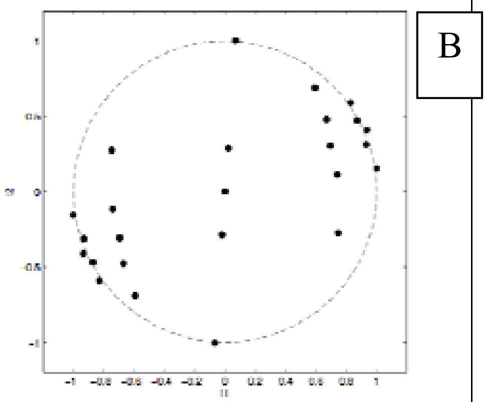
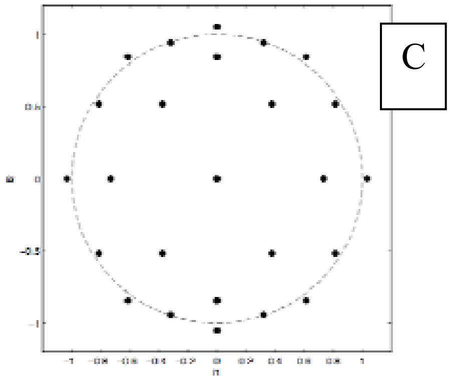
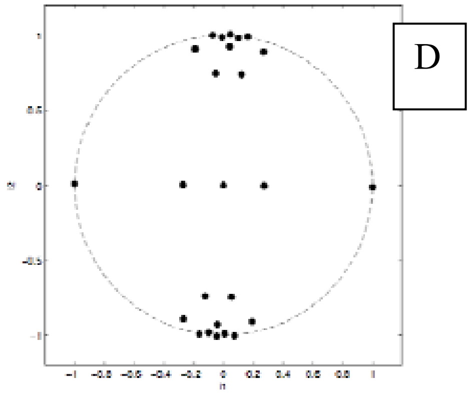


Рисунок 6.15 – Розтягування циліндричних зразків біогелю з відношенням висоти до ширини h/d, що дорівнює 0.25, 0.5 и 0.75

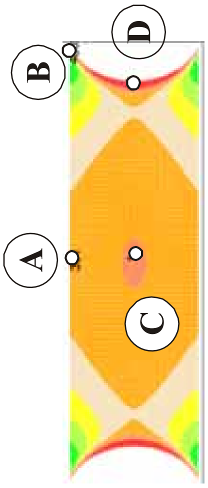
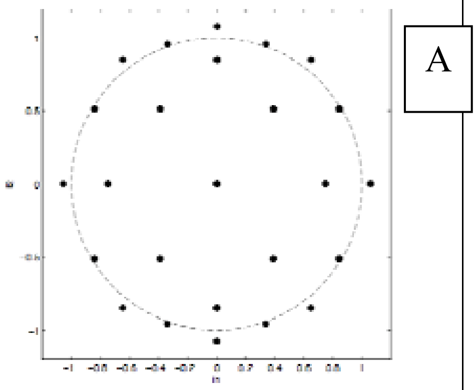
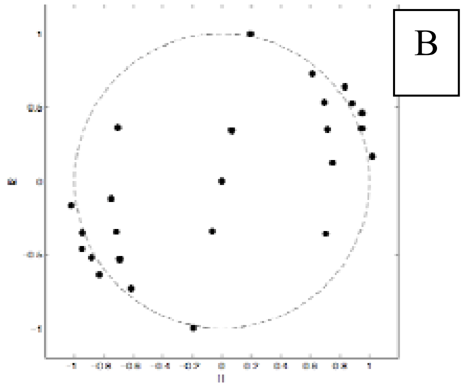
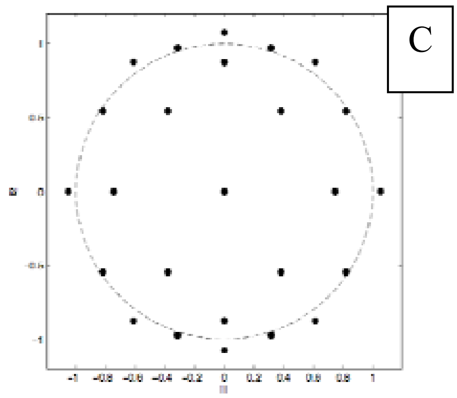
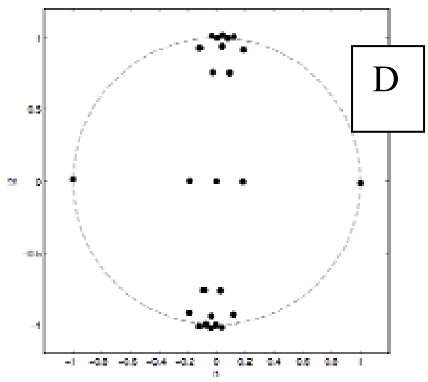
Таблиця 6.3 – Макроскопічна деформація зразка висотою $h/d = 0.25$ за одноосьового розтягнення і деформації мережевої мікроструктури в чотирьох точках

<table>
<tr><td>Схема розташування точок замірів</td><td colspan="2">Мікроскопічна деформація зразка</td></tr>
<tr><td colspan="3">0% розтягнення</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">5 % розтягнення</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Продовження табл. 6.3

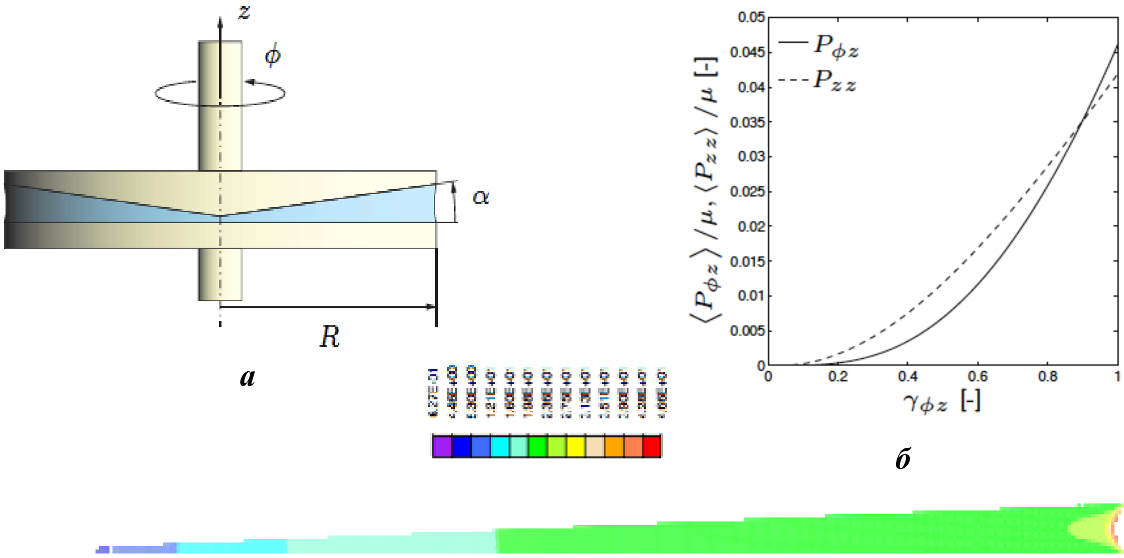
<table>
<tr><th>Схема розташування точок замірів</th><th colspan="2">Мікроскопічна деформація зразка</th></tr>
<tr><td colspan="3">10 % розтягнення</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">15% розтягнення</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 6.3

Схема розташування точок замірів	Мікроскопічна деформація зразка	
20 % розтягнення		
		
		

ріал. Як видно, у цій точці кут між закріпленою гранню і основою арки вільної поверхні стає гострим. Застосований мікромеханічний підхід дає можливість не тільки встановити особливості деформування такого м'якого тіла як біогель, але і виявити механізми на рівні мереж полімерних волокон, які пояснюють спостережувані закономірності.

Ще один скінченно-елементний аналіз здійснено для узгодження із експериментальними даними, наведеними у [436]. Під час реометричних вимірів було встановлено, що нормальні напруження у біогелях за зсуву є додатними, а за величиною перевищують зсувні напруження, що незвично для інших матеріалів. Раніше цьому було дано пояснення запропонованою гомогенізованою моделлю в ході аналізу результатів для напівгнучких волокон. Однак представлені вище розрахунки здійснені для однорідного зсуву. Попереднє скінченно-елементне моделювання, навпаки, показало, що гелі можуть деформуватися вкрай неоднорідно. Тому було здійснено додатковий розрахунок реальної геометрії зразка в реометричній машині між плоскою основою та конічним диском, зображеними на рис. 6.16. Для нестискуваних матеріалів у таких зразках досягається однорідний зсув γ, що визначається як ϕ/α, де ϕ – поворот конічного диска, а α – кут під конічною поверхнею верхнього диска. Видно, що поблизу вільної границі деформації випробуваного зразка неоднорідні. Варіація середніх значень напружень від центру до краю зразка склала більше 50%. У результаті поведінка осереднених на поверхні нижнього диска безрозмірних напружень $\langle \mathbf{P}_{\phi z} \rangle / \mu$ та $\langle \mathbf{P}_{zz} \rangle / \mu$ відрізняються від раніше отриманих для однорідних деформацій матеріалу.



в

Рисунок 6.16 – Аналіз неоднорідних деформацій зразка, поміщеного у конусній реометричній машині:
а – геометрія зразка, *б* – безрозмірні напруження $\langle \mathbf{P}_{\phi z} \rangle / \mu$ та $\langle \mathbf{P}_{zz} \rangle / \mu$, осереднені на поверхні нижнього диска, *в* – дотичні напруження у зразку

6.2 Застосування моделі в’язкопружності для гуми

У цьому підрозділі на прикладі практичних задач для гум, що мають промислове застосування, продемонстровані можливості запропонованої у підрозд. 3.2 мікромеханічної моделі в’язкопружності полімерів. Оцінюється її здатність точно описувати поведінку матеріалів для різних видів і у широкому діапазоні швидкостей навантаження. Як основний матеріал для цієї мети обраний нітрил-бутадієновий каучук HNBR50. Для нього визначені параметри числової моделі, якими наближаються результати одноосьових циклічних випробувань у інтервалі $\lambda_1 \in [0.75; 2.0]$. Ці значення перевіряються далі на відповідність виміряній поведінці за циклічного стиснення $\lambda_1 \in [0.75;1.0]$, а також під час випробування розтягненням-стисненням $\lambda_1 \in [0.75;2.0]$ із зупинками. Крім цього, проведено скінченно-елементний розрахунок неоднорідних деформацій у зразку, підданому зсуву.

Процедура ідентифікації параметрів. Використані експериментальні дані, наведені у роботі [181] для одновісних циклічних випробувань нітрил-бутадієнового каучуку HNBR50 виробництва Robert Bosch GmbH. Для цього матеріалу відзначено, що релаксовані напруження після тривалих зупинок навантаження завжди лягають на одну рівноважну криву, з чого можна зробити висновок про виключно в’язкопружну поведінку матеріалу. Параметри моделі матеріалу встановлюються шляхом найкращого наближення серії одноосьових циклічних випробувань у проміжку розтягнень $\lambda_1 \in [0.75;2.0]$. Відповідно до розкладання мікроструктури полімеру на пружну базову сітку і кілька в’язкопружних підмереж, необхідно встановити значення набору параметрів для кожної зі складових.

Для пружного відгуку матеріалу пропонується застосувати модель неафінної мікросфери [170]. За її допомогою у роботі [181], експериментальні дані з якої використовуються в цьому підрозділі для перевірки запропонованої мікромеханічнї моделі в’язкопружності, отримано вельми точне значення рівноважної пружної поведінки гуми HNBR50. За цими ж даними було встановлений і використаний для подальших розрахунків близький до наведеного в [181] набір значень параметрів $N = 5.2207$ – кількість ланок в сегментах ланцюжків в зшитій сітці, $\mu = 0.1602$ МПа – пропорційний щільності модуль мережі, $p = 1.0666$ – параметр неафінності розтягування ланцюжків, $U = 11.2122$ і $q = 0.2013$ – параметри вкладу обмеження поперечного руху ланцюжків.

Для визначення параметрів в’язкопружної частини моделі поведінки того ж матеріалу використані результати одноосьових циклічних випробувань, здійснених із трьома різними швидкостями деформації $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-2}$ хв.$^{-1}$, $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-1}$ хв.$^{-1}$ та $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{0}$ хв.$^{-1}$. У оригінальній роботі [181] зазначено, що дійсна швидкість розтягування може відрізнятися від заданої через похибки приводу випробувальної машини, особливо за повільного навантаження. Діапазон розтягнень незмінний, а саме

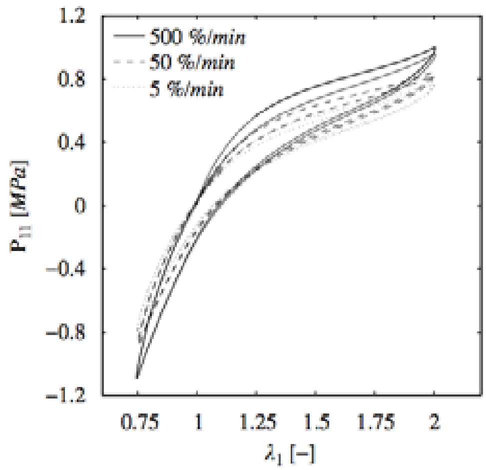


Рисунок 6.17 – Експериментальні криві для одноосьових циклічних випробувань у діапазоні розтягнень $\lambda_1 \in [0.75; 2.0]$ зі швидкостями деформації $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-2}$ хв.$^{-1}$, $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-1}$ хв.$^{-1}$ і $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{0}$ хв.$^{-1}$ [181]

$\lambda_1 \in [0.75; 2.0]$. Отримані криві зміни номінальних напружень P_{11} (першої компоненти тензора Піола-Кірхгофа $\mathbf{P} = \tau \mathbf{F}^{-T}$) наведені на рис. 6.17. Як і слід було очікувати, рівень напружень за швидкого розтягнення буде вищим. При цьому найвужча петля гістерезису спостерігається за повільного розтягнення $5 \cdot 10^{-2}$ хв$^{-1}$. Навпаки, під час випробування зі швидкістю деформації $5 \cdot 10^{0}$ хв$^{-1}$ в’язкопружна дисипація стає вельми відчутною. Також слід зазначити різницю між першим і наступними циклами навантаження в експерименті і, зокрема, зміну в’язкопружного модуля матеріалу.

Для оцінки здатності запропонованої мікромеханічної моделі відтворювати представлену вище поведінку матеріалу вивчається вплив її параметрів на зміну кривої нормальних напружень за циклічного розтягнення, показану на рис. 6.18, *а*. Для окремої в’язкопружної гілки результати визначаються значеннями двох параметрів: в’язкопружного модуля μ^v, який просто масштабує амплітуду напружень, і часу релаксації τ, який визначає характер зміни напружень при циклічному навантаженні. Останній слід зіставляти з періодом змінного подовження $T = 2\left(\lambda_1^{\max} - \lambda_1^{\min}\right)/|\dot{\lambda}_1|$. У разі $T/\tau << 1$, що відповідає майже миттєвому навантаженню, отримуємо квазіпружний відгук, тоді як для $T/\tau >> 1$ в’язкопружна гілка практично не реагує на розтягування. У першому випадку за період прикладання деформації немає достатньо часу для незворотних змін мобільної мережі, тоді як у другому випадку матеріал деформується настільки повільно, що сітка встигає повністю релаксувати до незбуреного стану, в якому вона не створює напружень. В’язкопружний гістерезис виникає лише за циклічного навантаження з періодом T, який можна зіставити з часом релаксації τ. Як видно на рис. 6.18, *б*, кількість дисипованої за один цикл навантаження енергії H відмінна істотно від нуля лише у вузькому діапазоні відношення T/τ, що сягає лише двох порядків, та має чітко означений максимум на цьому інтервалі.

Для урахування повного релаксаційного спектра розглядаються кілька дискретних в'язкопружних гілок. Зокрема, для наближення в'язкопружної поведінки за циклічних одноосьових випробувань, отриманої у роботі [181], у запропонованій моделі розглядається дискретний спектр із S = 5 дисипативних гілок із часом релаксації $\{\tau_i\}_{i=1}^{s} = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$ с. Використавши для пружного відгуку модель неафінної мікросфери [170] із наведеними вище параметрами, залишається лише встановити значення в'язкопружних модулів $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s}$ для цих гілок. З урахуванням декомпозиції девіаторної частини напружень

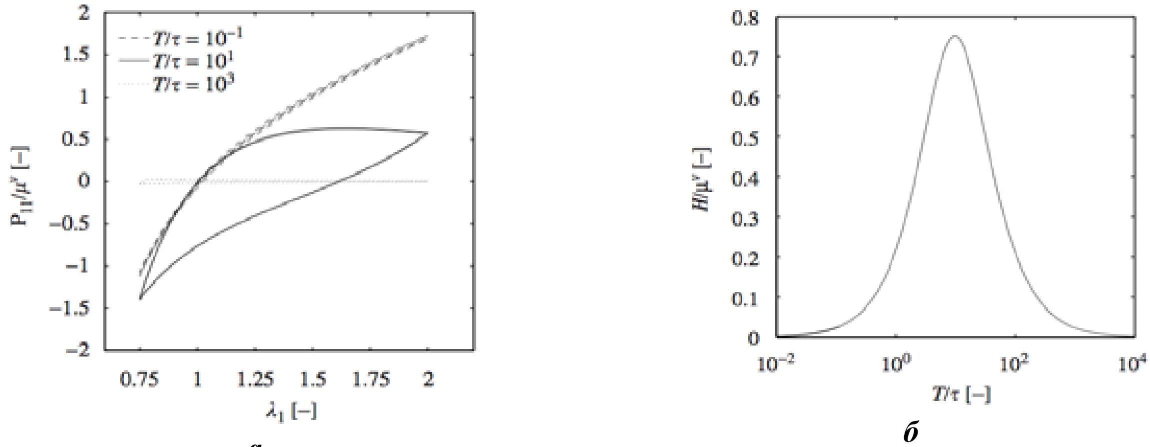
$$\overline{\tau}(t) = \overline{\tau}^{e}(t) + \sum_{i=1}^{s} \overline{\tau}_i^{v}(t) \tag{6.14}$$

на пружну складову $\overline{\tau}^{e}(t)$ і внесок від в'язкопружних гілок $\{\overline{\tau}_i^{v}\}_{i=1}^{s}$, їх значення, що передбачаються моделлю для трьох різних швидкостей навантаження, які позначаються індексами a, b і c, визначаються як лінійна комбінація

$$\overline{\tau}^{abc}(t) = \overline{\tau}^{e,abc}(t) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i^{v}\, \tilde{\overline{\tau}}_i^{v,abc}(t), \tag{6.15}$$

де $\{\tilde{\overline{\tau}}_i^{v,abc}\}_{i=1}^{s}$ – нормалізовані одиничним значенням модуля $\{\tilde{\mu}_i^{v}\}_{i=1}^{s}$=1 МПа часові криві напружень. Ці криві, отримані для кожної з в'язкоупругих гілок окремо, наведені для всіх трьох одноосьових випробувань на рис. 6.19. В'язкопружні модулі $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s}$ визначаються шляхом мінімізації розбіжності між експериментальними даними, наведеними на рис. 6.17, і розрахунковими значеннями, які визначаються лінійною комбінацією (6.15), коефіцієнти якої і є шуканими.

У результаті цієї процедури визначено такі значення в'язкопружних модулів: $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s}$= {0.5357, 0.0762, 0.1205, 0.0213, 0.0229} (МПа). Найкраще наближення одноосьових циклічних випробувань із отриманими значеннями параметрів наведено на рис. 6.20. Запропонована модель демонструє добру збіжність із експериментальними даними. Зокрема, амплітуда напружень і ширина петлі гістерезису, отримані для трьох швидкостей навантаження, узгоджуються з високою точністю із вимірюваними кри-



а *б*

Рисунок 6.18 – Відгук окремої в’язкопружної гілки:
а – безрозмірні напруження P_{11}/μ^{v}, отримані для тривалості періодів навантаження *T*, набагато менших, зіставних та таких, що істотно перевищують час релаксації τ;
б – залежність відносного гістерезису H/μ^{v} на першому циклі навантаження від відношення T/τ між часом навантаження і релаксацією

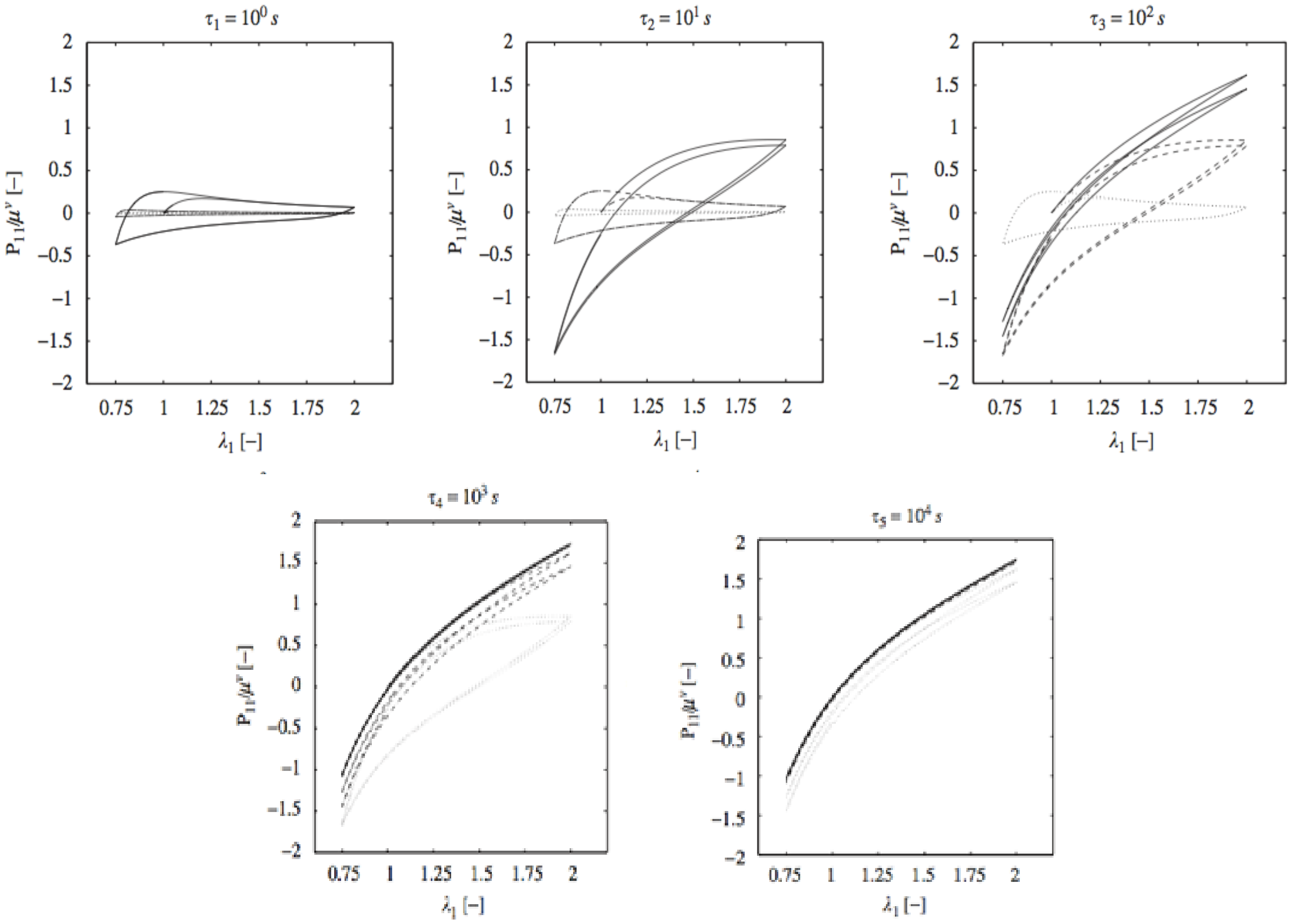
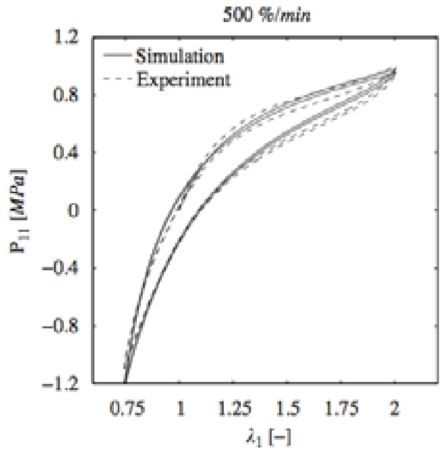


Рисунок 6.19 – Нормалізовані в’язкопружні напруження для $s = 5$ в’язкопружних гілок з часом релаксації $\{\tau_i\}_{i=1}^{s} = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$ (с) і одиничними значеннями модуля $\{\tilde{\mu}_i^{v}\}_{i=1}^{s}$=1 МПа для трьох циклічних одноосьових випробувань зі швидкостями навантаження: $|\dot{\lambda}_1| = 5\cdot10^{0}$ хв.$^{-1}$, $|\dot{\lambda}_1| = 5\cdot10^{-1}$ хв.$^{-1}$ и $|\dot{\lambda}_1| = 5\cdot10^{-2}$ хв.$^{-1}$



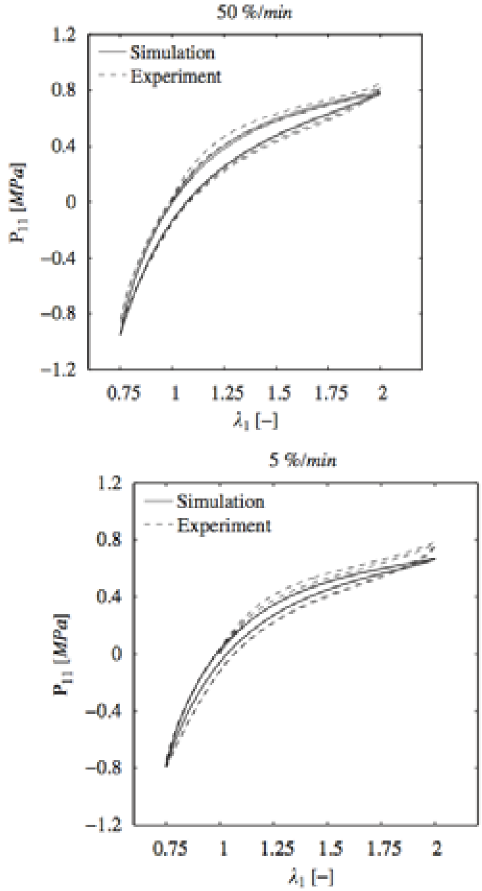
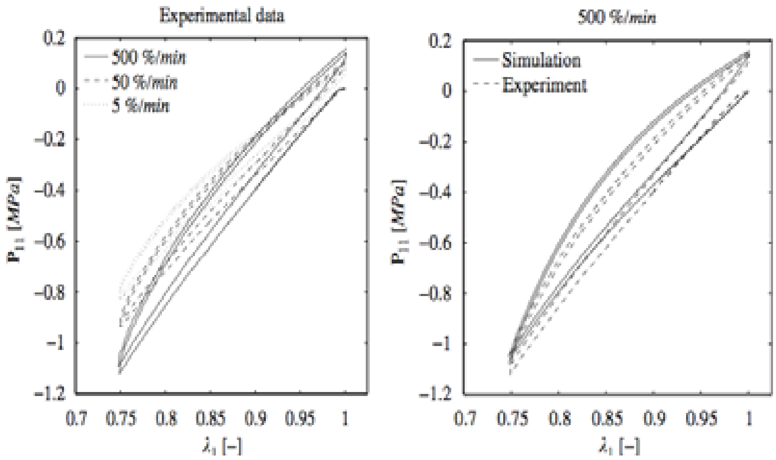


Рисунок 6.20 – Найкраще наближення трьох експериментальних кривих чисельною моделлю з використанням дискретного спектра релаксації $\{\tau_i\}_{i=1}^{s} = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$ (c) і оптимального набору значеньв’язкопружних модулів $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s}$= {0.5357, 0.0762, 0.1205, 0.0213, 0.0229} МПа



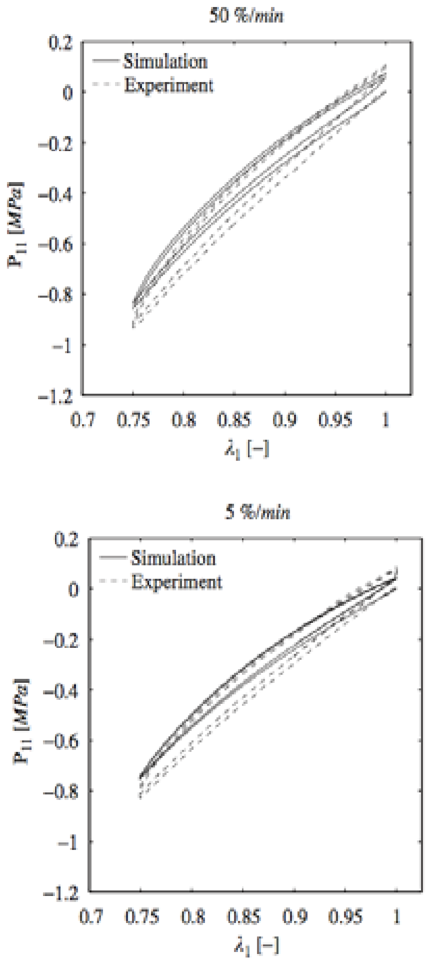


Рисунок 6.21 – Порівняння експериментальних даних [156] з чисельними результатами для одноосьового циклічного стиснення на інтервалі $\lambda_1 \in [0.75; 1.0]$ для трьох швидкостей деформації $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-2}$ хв.$^{-1}$, $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-1}$ хв.$^{-1}$ і $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{0}$ хв.$^{-1}$; використана модель в’язкоупружності з дискретним релаксаційним спектром $\{\tau_i\}_{i=1}^{s} = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$ (c) і оптимальним набором значень в’язкопружних модулів $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s}$= {0.5357, 0.0762, 0.1205, 0.0213, 0.0229} МПа

вими. Розбіжність можна помітити лише у різниці між першим і наступними циклами навантаження, які модель повною мірою не відтворює.

Верифікація моделі. Отримані для матеріалу HNBR50 параметри використовуються далі для оцінки застосовності цієї моделі на прикладі двох типів випробувань, відмінних від тих, що були задіяні у процедурі ідентифікації. Для них також здійснюється порівняння із експериментальними даними (рис. 6.21). Перший із них є одновісним циклічним стисненням у інтервалі деформацій $\lambda_1 \in [0.75;1.0]$ з трьома різними швидкостями $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-2}$ хв$^{-1}$, $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{-1}$ хв$^{-1}$ і $|\dot{\lambda}_1| = 5 \cdot 10^{0}$ хв$^{-1}$. Зазначені раніше характерні риси в'язкопружного відгуку матеріалу, такі як залежність амплітуди напружень від швидкості навантаження, зміна ширини петлі гістерезиса та відмінність першого та наступного циклів навантаження, спостерігаються і для цього виду випробувань [181]. При цьому чисельні дані показують розбіжності з початковим відгуком до навантаження, описуючи значно точніше лише наступні цикли стиснення.

Другий тест полягає в одноосьовому розтягуванні-стисненні із релаксаційними зупинками [181]. Він відрізняється від попередніх тим, що деформація здійснюється покроково. На кожному із кроків навантаження відбувається приріст поточного розтягнення або стиснення зі швидкістю $|\dot{\lambda}_1| = 3 \cdot 10^{0}$ хв$^{-1}$, після чого зразок витримується у заданому стані протягом однієї години. Такі зупинки здійснюються для послідовності значень одноосьової деформації $\lambda_1 = 0.75, 0.875, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75$ і 2.0.

Загалом експеримент включає в себе 12 кроків навантаження з подальшою релаксацією. Порівняння з чисельними результатами показує задовільну збіжність із експериментом, як видно на рис. 6.22. Зокрема, величина в'язкопружних напружень точно узгоджується для стиснення і помірних розтягнень. У запропонованій моделі величина в'язкопружної складової напружень пропорційна градієнту швидкості деформацій, і зокрема її компоненті $l_{11} = \dot{\lambda}_1 / \lambda_1$, яка з ростом розтягнення λ_1 за постійної швидкості навантаження $|\dot{\lambda}_1|$ зменшується. Цим і пояснюється недостатня ширина гістерезису між другою і шостою ступенями навантажування.

Скінченно-елементне моделювання неоднорідних в'язкопружних деформацій. Запропонована модель була реалізована у скінченно-елементному пакеті FEAP 8.3, що дало змогу провести аналіз неоднорідних в'язкопружних деформацій. Як приклад були обрані випробування поперечного зсуву зразка, що представляє собою плоску шайбу з увігнутою тороїдальною бічною поверхнею, форма і геометричні розміри якої показані на рис. 6.23, *а*. У ході експерименту нижня грань зразка була закріплена, тоді як верхня границя здійснювала горизонтальне переміщення у напрямку осі x. Матеріал цього зразка, як і у інших випробуваннях, наведених у роботі [181], є насиченим нітрил-бутадієновим каучуком HNBR50. Відповідно, для чисельного аналізу використовувалися раніше ідентифіковані значення параметрів моделі в'язкопружності.

Зразок піддавався трьом різним програмам навантаження з функціями переміщення $\{u_i\ (t)\}_{i=1}^{3}$, наведеними на рис. 6.23, *б*. Перші дві з них є циклічним зсувом зі швидкостями $|\dot{u}_1| = 40$ мм/хв. і $|\dot{u}_2| = 4$ мм/хв. У ході третього випробування зразкові надавався зсув $u_3 = 20$ мм за 30 с зі швидкістю $|\dot{u}_3| = 40$ мм/хв., після чого слідувала релаксаційна пауза тривалістю 60 с.

Чисельні результати отримані за допомогою моделі, що складається з 1152 восьмивузлових СЕ Q1P0. Порівняння з експериментальними даними для двох циклічних тестів показано на рис. 6.24, де наведені криві залежності сили від зсуву. Результати показують задовільну збіжність як з боку величини сили, так і форми в'язкопружного гістерезису.

Результати чисельного моделювання третьої програми випробувань представлені докладно на рис. 6.25, 6.26. На них наведені НДС зразка в момент часу t = 30 с після навантаження, а також для t = 90 с після релаксаційної паузи. Можна спостерігати істотну релаксацію напружень, зокрема компоненти σ_{xz}. Це явище у запропонованій мікромеханічній моделі пояснюється загасанням початкового збурення, викликаною деформацією матеріалу, і поверненням рухомих ланцюжків до рівноважного стану, як описувалося у підрозд. 3.2. Для ілюстрації цього механізму на рис. 6.25, 6.26 також наведені розподіли мікродеформацій ланцюжків у п'яти в'язкопружних мережах у матеріальній точці, розміщеній у центрі зразка.

Представлені як розподіли для окремих підмереж $p_i(\boldsymbol{\lambda}) = P\left(\mathbf{P}_i^{-1}\boldsymbol{\lambda}\right)/\det \mathbf{P}_i$, так і осереднений на всій мікроструктурі розподіл $p(\boldsymbol{\lambda}) = (1/n)\sum_{i=1}^{5} n_i\, p_i\left(\boldsymbol{\lambda}\right)$. Видно, що дифу-

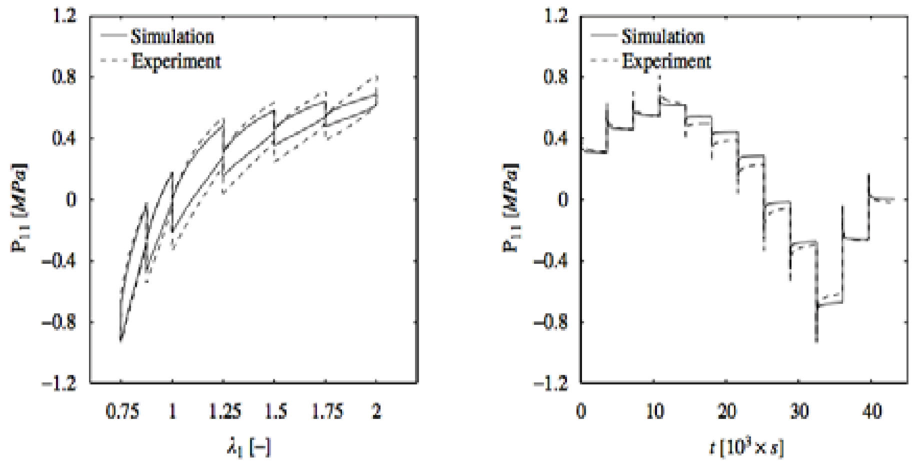
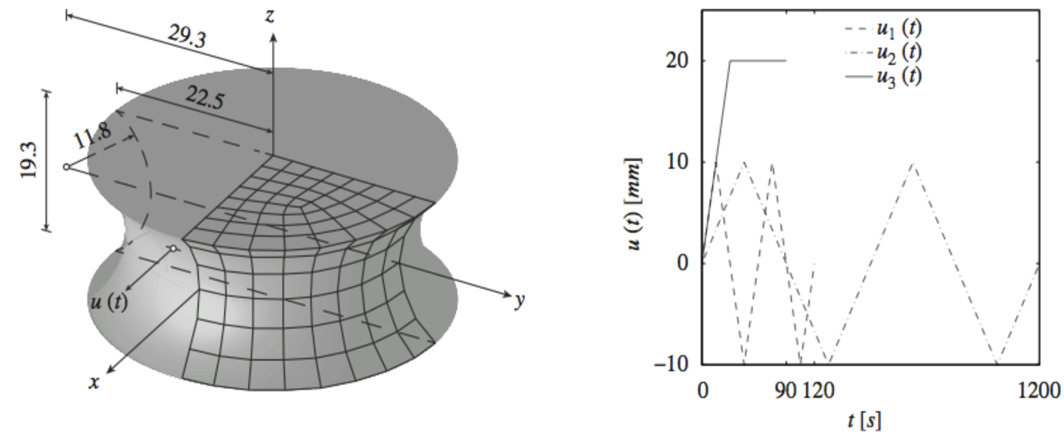


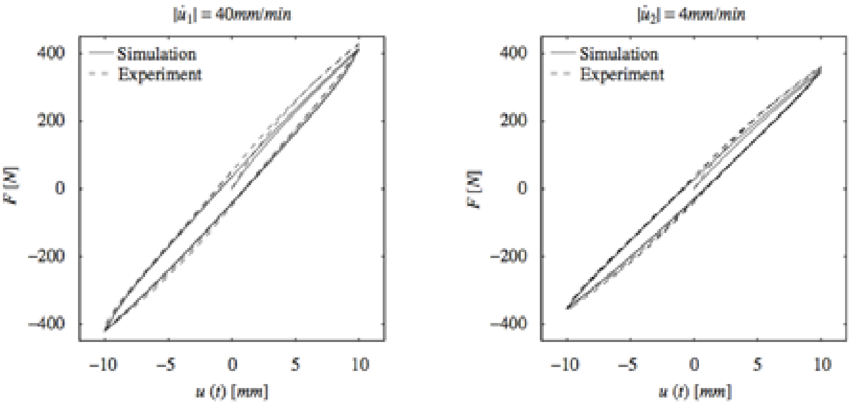
Рисунок 6.22 – Порівняння експериментальних даних [181] із чисельними результатами для одноосного розтягування-стискання з релаксаційними зупинками $\lambda_1 = 0.75$, 0.875, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75; використана модель в'язкопружності із дискретним релаксаційним спектром $\{\tau_i\}_{i=1}^{s} = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$ (с) і оптимальним набором значень в'язкопружних модулів $\{\mu_i^v\}_{i=1}^{s} = \{0.5357, 0.0762, 0.1205, 0.0213, 0.0229\}$ МПа



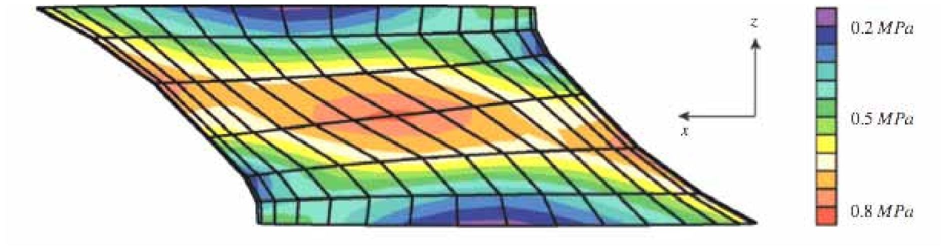
а *б*

Рисунок 6.23 – Моделювання неоднорідних в'язкопружних деформацій:
а – геометрія гумового зразка і його розміри в мм, а також його скінченно-елементна дискретизація; *б* – програми випробування зразка циклічним зсувом зі швидкостями $|\dot{u}_1| = 40$ мм/хв. і $|\dot{u}_2| = 4$ мм/хв., а також скінченним зсувом $u_3 = 20$ мм протягом 30 с зі швидкістю $|\dot{u}_3| = 40$ мм/хв. із подальшою релаксаційною паузою тривалістю 60 с

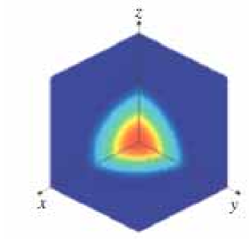
Рисунок 6.24 – Порівняння експериментально отриманих кривих навантаження [181] із чисельними результатами для випробування зразка циклічним зсувом зі швидкостями:
а – $|\dot{u}_1| = 40$ мм/хв.,
б – $|\dot{u}_2| = 4$ мм/хв.



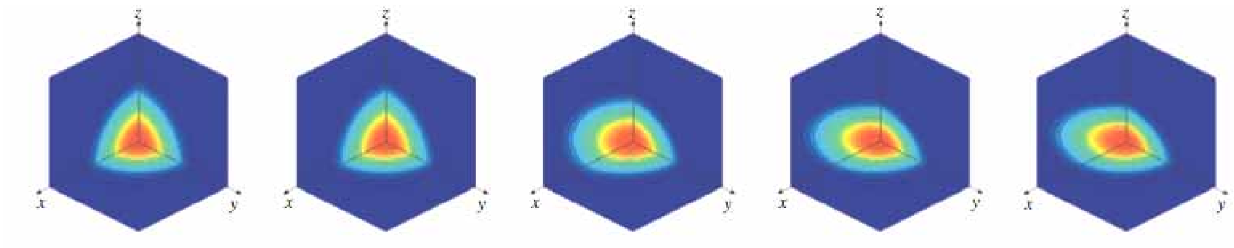
а *б*



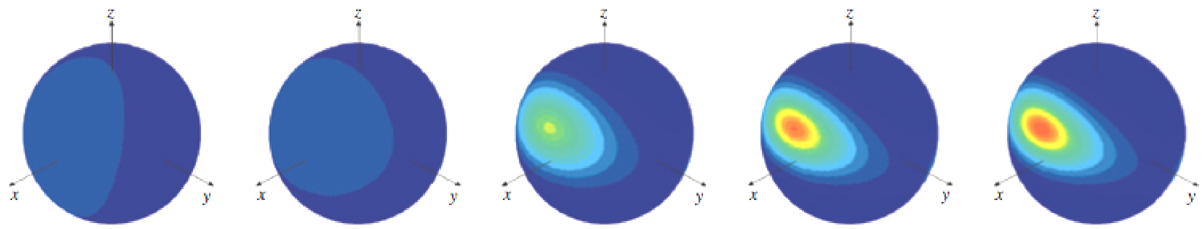
а



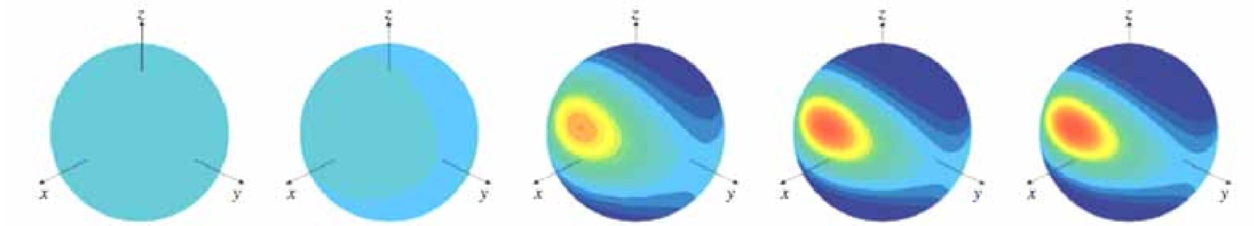
б



в

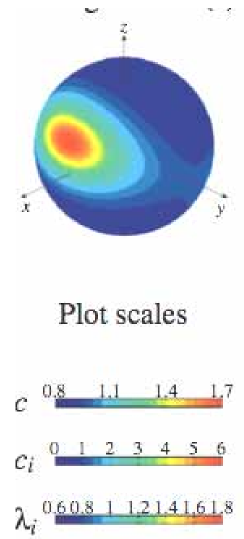


г

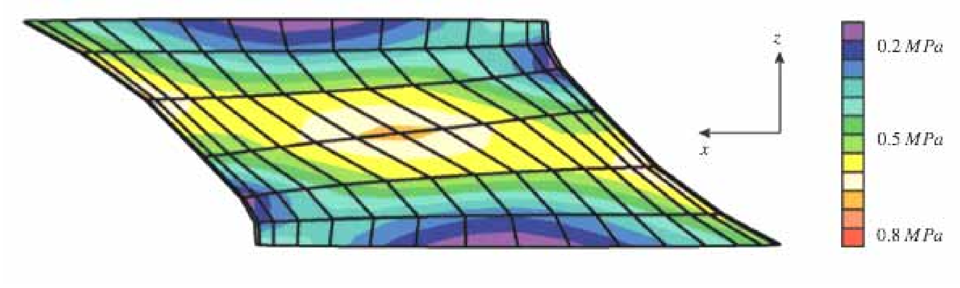


д

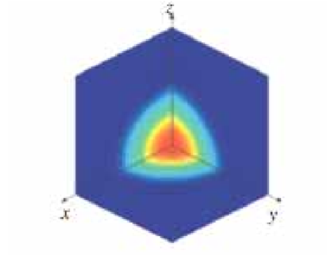
Рисунок 6.25 – Деформований стан зразка після зсуву в момент часу 30 с і внутрішній стан рухомих мереж у матеріальній точці в центрі зразка:
а – розподіл зсувних деформацій σ_{xz};
б – середній розподіл вектора розтягнення $p(\boldsymbol{\lambda})$; *в* –розподіл вектора розтягнення $p_i(\boldsymbol{\lambda})$;
г – щільності орієнтації ланцюжків $c_i(\mathbf{t})$;
д – величини афінного розтягнення $\lambda_i(\mathbf{t})$;
е –середня щільність орієнтацій $c(\mathbf{t})$



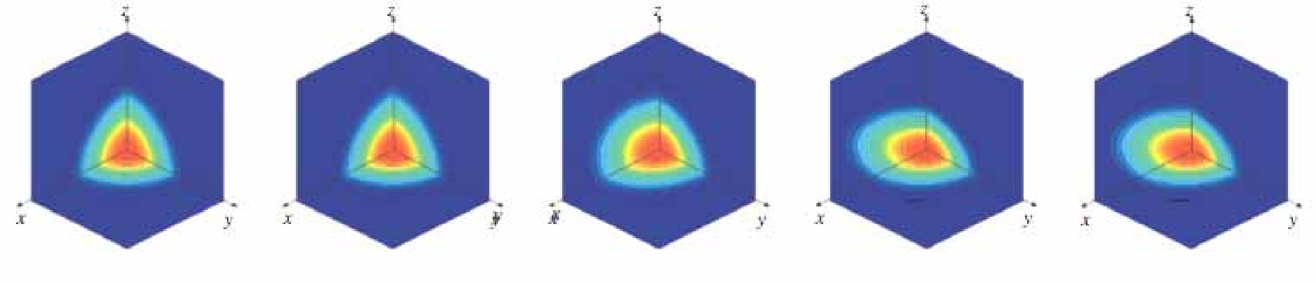
е



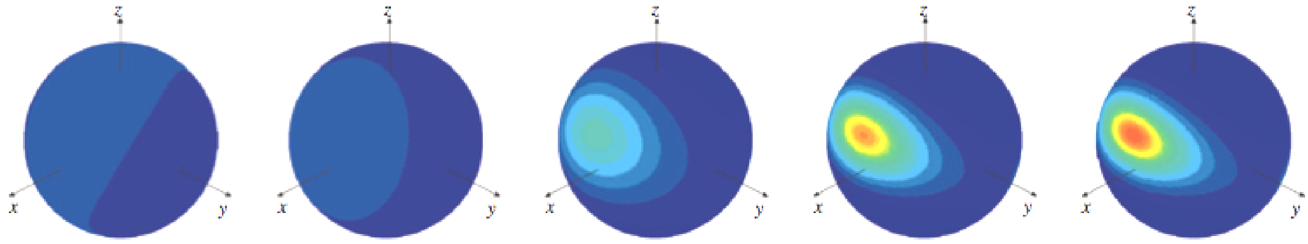
а



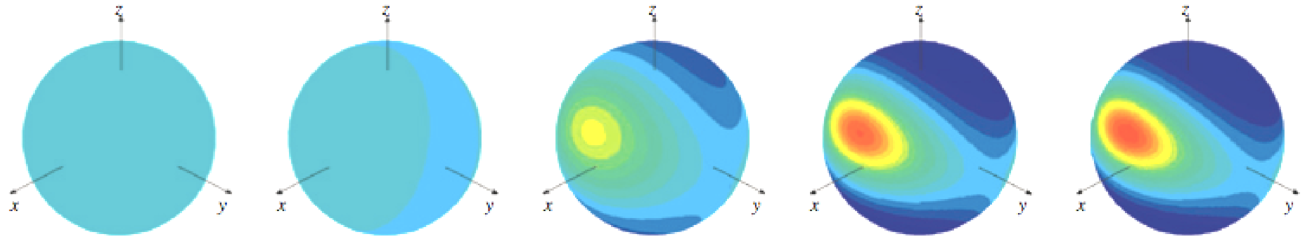
б



в



г



д

Рисунок 6.26 – Деформований стан зразка після релаксаційної паузи в момент часу 90 с і внутрішній стан рухомих мереж у матеріальній точці в центрі зразка:

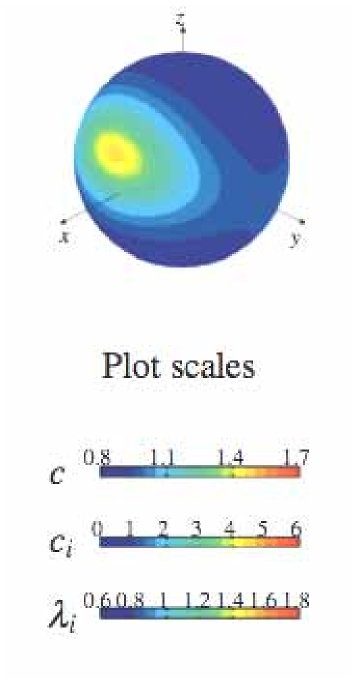
а – розподіл зсувних деформацій σ_{xz};

б – середній розподіл вектора розтягнення $p(\boldsymbol{\lambda})$; *в* –розподіл вектора розтягнення $p_i(\boldsymbol{\lambda})$;

г – щільності орієнтації ланцюжків $c_i(\mathbf{t})$;

д – величини афінного розтягнення $\lambda_i(\mathbf{t})$;

е –середня щільність орієнтацій $c(\mathbf{t})\ \lambda_i(\mathbf{t})$



е

зія станів ланцюжків включає в себе як переорієнтацію, так і релаксацію розтягнень. Простежити за поворотами ланцюжків можна за допомогою розподілущільності орієнтації ланцюжків відносно актуального простору напрямків $\mathbf{t}$, що визначається для кожної з підмереж як $c_i(\mathbf{t}) = 4\pi\int_0^\infty p(\lambda\mathbf{t})\lambda^2 d\lambda$ (для рівномірного розподілу значення щільності складе $c_i(\mathbf{t}) =$ 1). Додатково наведена середня за мікроструктурою щільність орієнтацій $c(\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i c_i(\mathbf{t})$. У актуальних орієнтаціях також подана величина афінного розтягнення $\lambda_i(\mathbf{t}) = \left(\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{t}\cdot\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{t}\right)^{-1/2}$, що дає можливість оцінити скорочення ланцюжків під час релаксації.

6.3 Пружна гомогенізація бімодальних мереж

Оригінальна мікромеханічна модель базувалася на припущенні, що геть усі ланки мережі є ідентичними. Вочевидь, для бімодальних мереж виникає нобхідність вирізняти окремі її компоненти. У першу чергу це стосується статистичного опису. Якщо для випадку монодисперсної мережі було достатньо розглянути лише випадкову початкову орієнтацію ланцюжків, то бімодальність вимагає залучити принаймні два окремих статистичних простори. Кожен із них становитиме мікросферу одиничних векторів початкових орієнтацій у відповідній фракції:

$$S_0^p = \left\{\boldsymbol{\lambda}_0^p : \left|\boldsymbol{\lambda}_0^p\right| = 1\right\}; \qquad (6.16) \qquad\qquad S_0^q = \left\{\boldsymbol{\lambda}_0^q : \left|\boldsymbol{\lambda}_0^q\right| = 1\right\}. \qquad (6.17)$$

Якщо припустити ізотропію обох складових мережі, то щільність вірогідності на обох сферах буде однорідною та дорівнюватиме з урахуванням множника $1/\left|S_0\right| = 1/4\pi$ одиниці, тобто $p_0^p(\boldsymbol{\lambda}_0^p) = 1$ та $p_0^q(\boldsymbol{\lambda}_0^q) = 1$. Відповідно до цього, осереднення всередині окремої фракції буде здійснюватися так само, як і раніше: будь-яка величина $\xi^{p,q}$, що залежить від початкової орієнтації ланок фракції p або q, матиме середне значення

$$\left\langle \xi^{p,q} \right\rangle = \frac{1}{\left|S_0^{p,q}\right|}\int_{S_0^{p,q}} \xi^{p,q}(\boldsymbol{\lambda}_0^{p,q})\left|d\,\boldsymbol{\lambda}_0^{p,q}\right|. \qquad (6.18)$$

Осереднення на суцільній мережі вже вимагатиме урахування питомих часток p та q ($p + q = 1$) кожної із фракції, а також різниці властивостей між обома типами ланок мережі. Зокрема, якщо початкова відстань між кінцями ланцюжків складатиме $\mathbf{R}_0^p$ та $\mathbf{R}_0^q$, то шлях максимального просування, що складатиметься з n_{l_0} ланцюжків, становитиме

$$\mathbf{R}_{l_0} = n_{l_0}\left(p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q\right)\left\langle\boldsymbol{\lambda}_0^m\right\rangle = n_{l_0}\left(p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q\right)\left[(f-2)/f\right]\mathbf{l}_0, \qquad (6.19)$$

адже за умов дійсно випадкового поєднання ланок різних типів у мережі випадкова орієнтація $\boldsymbol{\lambda}_0^m$ не залежатиме від того, уздовж ланок якої із фракцій, p або q, розповсюджується шлях у тому чи іншому вузлі. Більш того, розподіл вектора $\boldsymbol{\lambda}_0^m$ збігатиметься з оцінкою (3.12)

$$p^m\left(\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{l}_0\right) = (f-1)\left[\left(\boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \mathbf{l}_0 + 1\right)/2\right]^{f-2}. \qquad (6.20)$$

Однак у деформованому шляху ця обставина вже матиме значення, адже функції розтягнення $\boldsymbol{\lambda}^p(\boldsymbol{\lambda}_0^p)$ та $\boldsymbol{\lambda}^q(\boldsymbol{\lambda}_0^q)$ взагалі-то різняться між собою. Отже, зіставивши вектор подовження шляху, який обчислюється, з одного боку, як осереднення вкладу мікродеформацій ланок, а з іншого, – є афінним перетворенням свого початкового значення відповідно до макроскопічної деформації матеріальної точки тіла, отримаємо наступну тотожність:

$$\mathbf{R}_l = n_{l_0}\left(p\mathbf{R}_0^p\left\langle\boldsymbol{\lambda}^{m,p}\right\rangle + q\mathbf{R}_0^q\left\langle\boldsymbol{\lambda}^{m,p}\right\rangle\right) = n_{l_0}\left(p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q\right)\frac{f-2}{f}\mathbf{l},\ \mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{l}_0. \qquad (6.21)$$

Це співвідношення встановлює кінематичний зв'язок між макроскопічними деформаціями та мікродеформаціями, які для обох фракцій у мережі розглядаються окремо. Як і у випадку ізотропної монодисперсної мережі, це рівняння може бути піддане подальшим перетворенням, які спираються на властивості ядра розподілу вірогідності напряму максимального просування, а саме

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|S_0|}\int\limits_{S_0}\left(p\mathbf{R}_0^p\,\boldsymbol{\lambda}^p(\boldsymbol{\lambda}_0) + q\mathbf{R}_0^q\,\boldsymbol{\lambda}^q(\boldsymbol{\lambda}_0)\right)p^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right| = \\ &\quad = \frac{1}{|S_0|}\int\limits_{S_0}\left(p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q\right)\bar{\boldsymbol{\lambda}}p^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right|;\end{aligned} \qquad (6.22)$$

$$\frac{1}{|S_0|}\int\limits_{S_0}\left(\tilde{p}\boldsymbol{\lambda}^p + \tilde{q}\boldsymbol{\lambda}^q - \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)p^m(\boldsymbol{\lambda}_0,\mathbf{l}_0)\left|d\boldsymbol{\lambda}_0\right| = 0,\ \tilde{p} = \frac{p\mathbf{R}_0^p}{p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q},\ \tilde{q} = \frac{q\mathbf{R}_0^p}{p\mathbf{R}_0^p + q\mathbf{R}_0^q}. \qquad (6.23)$$

Як і раніше, ця тотожність має виконуватись для усіх можливих напрямків шляхів максимального просування $\mathbf{l}_0 \in S_0$. У разі, коли функціональність мережі дорівнює 4, ядро рівняння є поліномом та має скінченний ранг. Відповідно до цього, інтегральне рівняння Фредгольма (6.23) тотожно зводиться до вже знайомої тензорної форми

$$\frac{1}{|S_0|}\int_{S_0}(\tilde{p}\boldsymbol{\lambda}^p + \tilde{q}\boldsymbol{\lambda}^q) \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \frac{1}{3}\mathbf{F}\ . \tag{6.24}$$

Кінематичне співвідношення (6.24) обмежує варіацію невідомих полів $\boldsymbol{\lambda}^p$ та $\boldsymbol{\lambda}^q$. Для того, щоб визначити цей деформований стан мережі, застосовується принцип мінімуму осередненої внутрішньої енергії. Остання обчислюється для бімодальної мережі наступним чином:

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{net}}\left[\boldsymbol{\lambda}^p,\, \boldsymbol{\lambda}^q\right] = n\left\{p\left\langle\psi_f^p\right\rangle + q\left\langle\psi_f^q\right\rangle\right\}, \tag{6.25}$$

$$\left\langle\psi_f^{p,q}\right\rangle = \frac{1}{|S_0|}\int_{S_0}\psi_f^{p,q}(\boldsymbol{\lambda}^{p,q})|d\boldsymbol{\lambda}_0|. \tag{6.26}$$

Таким чином, відгук мережі до зовнішньої макроскопічної деформації зводиться до рівноваги пов'язаних із нею внутрішніх мікродеформацій та визначається із розв'язку наступної задачі мінімізації з обмеженнями:

$$\begin{cases} \left\langle\psi_f^{p,q}\right\rangle n\dfrac{1}{|S_0|} = \dfrac{1}{|S_0|}\displaystyle\int_{S_0}\left\{p\psi_f^p(\boldsymbol{\lambda}^p) + q\psi_f^q(\boldsymbol{\lambda}^q)\right\}|d\boldsymbol{\lambda}_0| \to \min; \\ \dfrac{1}{|S_0|}\displaystyle\int_{S_0}(\tilde{p}\boldsymbol{\lambda}^p + \tilde{q}\boldsymbol{\lambda}^q) \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| = \dfrac{1}{3}\mathbf{F}. \end{cases} \tag{6.27}$$

Функціонал Лагранжа для неї має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} L\left[\boldsymbol{\lambda}^p, \boldsymbol{\lambda}^q, \mathbf{v}\right] = n\frac{1}{|S_0|}\int_{S_0}\left\{p\psi_f^p(\boldsymbol{\lambda}^p) + q\psi_f^q(\boldsymbol{\lambda}^q)\right\}|d\boldsymbol{\lambda}_0| - \mathbf{v} : \\ \frac{1}{|S_0|}\int_{S_0}(\tilde{p}\boldsymbol{\lambda}^p + \tilde{q}\boldsymbol{\lambda}^q) \otimes \boldsymbol{\lambda}_0 |d\,\boldsymbol{\lambda}_0| - \frac{1}{3}\mathbf{F} \to \text{stat.} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Умови його стаціонарності, в свою чергу, визначають афінний розподіл термодинамічно спряжених до розтягнення сил $\mathbf{f}_f^{p,q} = \partial\psi_f^{p,q} / \partial\boldsymbol{\lambda}^{p,q}$:

$$\left\{np\,\mathbf{f}_f^p(\boldsymbol{\lambda}^p) = np\,\mathbf{f}_f(\boldsymbol{\lambda}^p)\left[(\boldsymbol{\lambda}^p)/\left|\boldsymbol{\lambda}^p\right|\right] = \tilde{p}\mathbf{v}\boldsymbol{\lambda}_0; nq\,\mathbf{f}_f^q(\boldsymbol{\lambda}^q) = np\,\mathbf{f}_f(\boldsymbol{\lambda}^q)\left[(\boldsymbol{\lambda}^q)/\left|\boldsymbol{\lambda}^q\right|\right] = \tilde{q}\,\mathbf{v}\boldsymbol{\lambda}_0.\right. \tag{6.29}$$

Мікроскопічні деформації волокон та сили складають відгук внутрішньої будови матрілу, який піддають заданій макроскопічній деформації. Результатом цього зовнішнього впливу є певний напружений стан тіла. Він визначається, зокрема, тензором напружень Піола-Кірхгофа, що є термодинамічно спряженим до градієнта деформації та дорівнює похідній пружної внутрішньої енергії

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}} \mathbf{\Psi}^*_{\text{net}} = n\left\{p\left\langle \partial_{\mathbf{F}} \mathbf{\Psi}^p_f\left(\left|\boldsymbol{\lambda}^p\right|\right)\right\rangle + q\left\langle \partial_{\mathbf{F}} \mathbf{\Psi}^p_f\left(\left|\boldsymbol{\lambda}^p\right|\right)\right\rangle\right\}. \tag{6.30}$$

Використовуючи перетворння, аналогічні тим, що наведені у розд. 3, актуальні для бімодальних мереж кінематичні співвідношення (6.24) та тотожностей (6.29) для мікроскопічних сил, можна отримати наступний вираз для шуканого першого тензора напружень Піола-Кірхгофа

$$\mathbf{P} = n\left\{p\left\langle \mathbf{f}^p_f \otimes \boldsymbol{\lambda}^p_0\right\rangle + q\left\langle \mathbf{f}^q_f \otimes \boldsymbol{\lambda}^q_0\right\rangle\right\} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\nu}, \tag{6.31}$$

який знову ж таки подібний до раніше отриманого для монодисперсних мереж результату.

Аналіз питання існування та єдиності умовного мінімуму задачі (6.27) містить у собі більшу варіативність порівняно з випадком монодисперсних мереж із гнучких ланцюжків та жорстких ланок. У композитних матеріалах мова може йти про досить довільні комбінації цих двох типів елементів. Найочевиднішим є випадок, коли обидві фракції складаються з гнучких ланцюжків. У цьому разі енергія розтягнення $\psi^{p,q}_f$ для кожної із них є опуклим функціоналом, а, отже, функціонал $\mathbf{\Psi}_{\text{net}}\left[\boldsymbol{\lambda}^p, \boldsymbol{\lambda}^q\right]$ є також опуклим відносно невідомих полів мікродеформації. Це значить, що мережа досягатиме стійкої рівноваги за будь-якої макроскопічної деформації $\mathbf{F}$. Більш того, усі ланцюжки передаватимуть зусилля осьового розтягнення. Додатні величини сил $\mathbf{f}^{p,q}_f$ при цьому є взаємнооднозначними функціями абсолютних величин розтягнень $\boldsymbol{\lambda}^{p,q}_f$.

Слід зазначити, що стійка рівновага має спостерігатися і у початковому недеформованому стані. Вочевидь, цей стан має характеризуватися відсутнім розтягненням ланцюжків $\boldsymbol{\lambda}^p \equiv \boldsymbol{\lambda}_0$ та $\boldsymbol{\lambda}^q \equiv \boldsymbol{\lambda}_0$ в обох фракціях. Відповідно до умов стацірнарнсті (6.29) за одиничних $\left|\boldsymbol{\lambda}^p\right| = 1$ та $\left|\boldsymbol{\lambda}^q\right| = 1$ матимемо наступні співвідношення відносно осьових сил та множника Лагранжа:

$$\begin{cases} p\,\mathbf{f}^p_f(1)\,\boldsymbol{\lambda}_0 = \widetilde{p}\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{\lambda}_0; \\ q\,\mathbf{f}^q_f(1)\,\boldsymbol{\lambda}_0 = \widetilde{q}\,\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{\lambda}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nu} = \nu\,\mathbf{1}; \\ \dfrac{p\,\mathbf{f}^p_f(1)}{q\,\mathbf{f}^q_f(1)} = \dfrac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{f}^p_f(1)}{\mathbf{f}^q_f(1)} = \dfrac{R^p_0}{R^q_0} \end{cases} \text{або } F^p_f(1) = F^q_f(1). \tag{6.32}$$

Перший висновок полягає у тому, що розподіл зусиль у мікромережі є радіально ізотропним та створює гідростатичний напружений стан. У той саме час друге співвідношення дає можливість встановити зв'язок між абсолютними величинами осьового розтягнення у кожній із францій, який зумовлює встановлення між ними рівноваги у початковому стані. Зокрема, це дає змогу правильно оцінити невідомі структурні фактори мережі, яку утворюють ланцюжки різних типів.

Для бімодальних мереж окремі складові є макромолекулами ідентичного хімічного складу, що відрізняються лише молекулярною вагою або довжиною. У випадку гумоподібних еластомерів поведінка гнучких полімерів добре описується моделлю ланцюжків вільного обертання, що враховує скінченну здатність до подовження та передбачає негаусову поведінку з нелінійною силою, що визначається співвідношеннями (див. табл. 6.1):

$$F_f(R) = \frac{\partial \mathbf{\Psi}_f}{\partial R} = \frac{k_B T}{b} \Im^{-1}\left(\frac{R}{Nb}\right); \quad (6.33) \qquad f_f(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \mathbf{\Psi}_f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \frac{k_B T}{b} R_0 \Im^{-1}\left(\frac{\lambda R_0}{Nb}\right). \quad (6.34)$$

Тут b – довжина статистичного сегмента; N – кількість цих сегментів у ланцюжці або його довжина; k_B – константа Больцмана, T – температура, а $\Im^{-1}$ – обернена функція Ланжевина. Треба звернути увагу на те, що фізична ентропійна F_f та термодинамічно спряжена до величини розтягнення відносна сила

$$f_f(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = R_0 F_f(\boldsymbol{\lambda}), \tag{6.35}$$

де R_0 – це відстань між кінцями ланцюжків у недеформованій мережі, відносно якої визначаються розтягнення $R = R_0\boldsymbol{\lambda}$, відрізняються між собою на множник R_0.

Поширене припушення полягає в тому, що у результаті утворення мережі поєднання між ланцюжками утворюються в їхній найбільш вірогідній конфігурації, коли відстань між кінцями окремих відтинків складає величину порядка $\sqrt{N}b$. Саме тому межу розтягнення негаусових ланцюжків оцінюють як $\sqrt{N}$, що дорівнює відношенню між максимальним подовженням $R_{\max} = Nb$ та початковою відстанню $R_0 = \sqrt{N}b$. Однак у дійсності відхилення у пружних характеристиках та поведінці при розбуханні під дією розчинника свідчать про те, що ця оцінка є неточною. Вихід із цієї ситуації знаходиться, якщо прийняти величину R_0 за невідомий параметр, або ж декілька параметрів, як у випадку бімодальних мереж. Адже кожна із фракцій ланцюжків у недеформованому стані може мати своє специфічне початкове подовження R_0^p та R_0^q відповідно. І тут слід зазначити, що значення цих параметрів не можуть бути обрані довільно. Справді, якщо підставити значення відносно сили f_f з рівняння (6.34) за одиничного розтягнення $\boldsymbol{\lambda} \equiv 1$

$$f_f^{p,q}(1) = \left(k_B T / b\right) R_0^{p,q} \Im^{-1}\left(R_0^{p,q} / N^{p,q} b\right) \qquad (6.36)$$

в умови стаціонарності (17), то отримаємо наступну тотожність:

$$\left[R_0^p \Im^{-1}\left(\lambda R_0^p / N^p b\right)\right] / R_0^q \Im^{-1}\left(\lambda R_0^p / N^p b\right) = R_0^p / R_0^q . \qquad (6.37)$$

Звідси остаточно встановлюється рівняння, яке поєднує початкові розтягнення у різних фракціях недеформованої бімодальної мережі:

$$R_0^p / N^p b = R_0^q / N^q b . \qquad (6.38)$$

Видно, що найбільш вірогідне значення початкової відстані $R_0^{p,q} = \sqrt{N^{p,q}}$, обчислене для кожного із окремих типів ланцюжків, цьому співвідношенню не задовольняє.

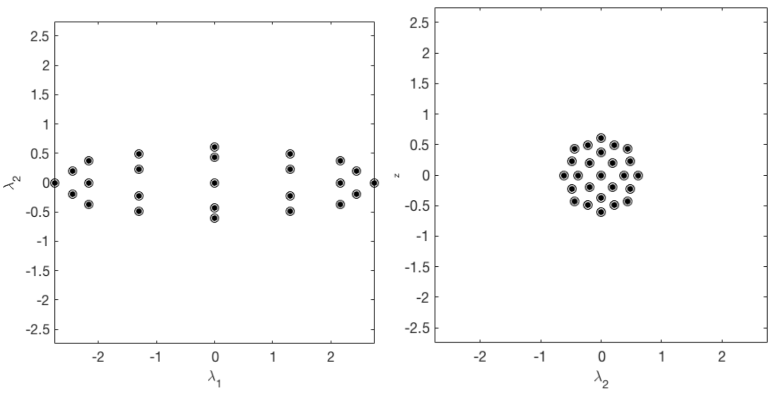
Зі співвідношення (6.38) добре видно, що в обох складових мережі ланцюжків матимуть однакову межу розтягнення відносно початкового стану. Дійсно, величина

$$\lambda_{\lim}^{p,q} = R_{\lim}^{p,q} / R_0^{p,q} = N^p b / R_0^{p,q} \qquad (6.39)$$

є тотожною для обох фракцій. Таким чином, модель ланцюжків вільного обертання у разі її застосуванні призводить до наступного результату. Деформації в обох складових бімодальної мережі $\boldsymbol{\lambda}^p$ та $\boldsymbol{\lambda}^q$ виявлятимутся однаковими. Це випливає із того, що за будь-якого значення тензора $\mathbf{v}$ розв’язок першого рівняння умов стаціонарності (6.29) задовольнятиме другому рівнянню автоматично. Цей висновок підтверджується результатами чисельного моделювання для модельної мережі з $p = 0.1$, $N^p = 36$ та $q = 0.9$, $N^q = 4$, представленими на рис. 6.27.

6.4 Розроблення чисельного методу дослідження для осесиметричного адгезійного контакту на базі варіаційного принципу Калькера

Явище адгезії виникає через виникнення молекулярних сил під час зближення поверхонь тіл на малу дистанцію дії. У результаті цієї взаємодії між тілами може передаватися не тільки стискання, але й розтяжні зусилля. За рахунок потенціалу поверхневих сил, який тяжіє до збільшення площі контакту, у пружних тілах виникають додаткові деформації, які необхідні для його встановлення. Внаслідок цього навіть після зникнення навантаження між тілами утворюється залишковий контакт, а для його руйнування необхідно прикласти певне зусилля відриву.



а **б**

Рисунок 6.27 – Розподіл мікродеформацій $\boldsymbol{\lambda}^p$ та $\boldsymbol{\lambda}^q$ за одноосного розтягнення $\lambda_{11} = 3$ у фракціях довгих ланцюжків з $p = 0.1$, $N^p = 36$ та коротких ланцюжків з $q = 0.9$, $N^q = 4$: *а* – у площині *xy*; *б* – у площині *yz*

Класична теорія Джонсона-Кендалла-Робертса [443] для адгезійного контакту параболічних тіл визначає дійсний радіус плями контакту із умов мінімуму повної внутрішньої енергії, що складається з енергії пружних деформацій та енергії втрати вільної поверхні. Схожі аналітичні розв'язки були отримані для окремих інших випадків геометрії тіл, наприклад контакту параболоїду із осесиметричною хвилястою поверхнею [444].

Інший відомий підхід, запропонований Дерягіним-Мюллером-Тороповим [445], передбачає утворення сил притягання у зоні поза межами контакту, де проміжок між тілами не перевищує певної малої величини. Перевагою цієї моделі є урахування скінченної відстані дії молекулярних сил. Однак його суттєвим недоліком є те, що вони не враховуються під час визначення пружних деформацій тіл.

Обчислення адгезійного контакту у випадку загальної форми тіл та з використанням різноманітних фізичних моделей взаємодії вимагає застосування чисельних методів. Найбільш фундаментальний підхід полягає у досконалому відтворенні мікроскопічної структури тіл та визначенні їхньої пружної поведінки та контактної взаємодії в межах молекулярної механіки [311]. Для цього необхідно обчислити атомарні сили між всіма частками системи, що є надзвичайно витратним. У роботах [446, 447] запропоновано метод гомогенізації сил міжатомної взаємодії, що дає можливість здійснити перехід до механіки суцільного середовища та ефективно застосовувати МСЕ для аналізу адгезійного контакту. Використання молекулярних потенціалів можливо і в МГЕ, де з їхньою допомогою можна сформулювати закон залежності контактного тиску від відстані між поверхнями тіл [448–450]. Однак суттєва нелінійність цього співвідношення висуває високі вимоги відносно дискретизації тиску та переміщень поверхонь для досягнення задовільної точності, особливо на межі плями контакту. В роботах [451, 452] запропоновано евристичний критерій відокремлення тіл, що перебувають в адгезійному контакті. Відповідно до нього, відрив в елементі сітки дискретизації відбувається за досягнення певного рівня зусиль розтягу, що визначаються за значеннями енергії адгезії, пружними властивостями матеріалів тіл та розміром сітки. Якщо поверхні контакту мають нерівності, то взаємодія локалізована спочатку навколо вершин. Розподіл контактного тиску може бути наближено дискретною системою місцевих контактів, що складає основну ідею наближених методів, які запропоновані у роботах [453–455].

У роботі [456] запропоновано узагальнення принципу мінімуму для адгезійного контакту та декілька його альтернативних формулювань. Тут пропонується варіаційна постановка, що безпосередньо випливає із цього принципу, а також її чисельна реалізація для загального випадку осесиметричного контакту. На відміну від [457], не використовуються перетворення Абеля, тож запропонований метод легко доступний для модифікації стандартних гранично-елементних програм. Цей метод матиме застосування до аналізу адгезійних властивостей поверхонь різноманітної форми, що зустрічається на практиці. Зокрема, актуальним питанням є вплив шорсткості на адгезійну міцність контакту.

Метою проведеного та описаного нижче дослідження є ефективна та універсальна реалізація методу граничних елементів для розв’язання контактних задач із адгезією. Перевагу надано послідовному підходу, що базується, як і фундаментальна модель Джонсона-Кендалла-Робертса, на термодинамічних засадах.

Досягнення поставленої мети передбачало вирішення наступних завдань: сформулювати варіаційний принцип стаціонарності повної додаткової енергії у поверхневій формі відносно невідомих плями контакту та розподілу на ній контактного тиску; побудувати дискретизацію варіаційної задачі у випадку осесиметричного контакту з однозв'язною круговою областю контакту, реалізація чисельного методу розв'язання системи нелінійних рівнянь; провести аналіз модельних задач, дослідження точності методу та його верифікацію.

Варіаційна постановка та чисельний розв'язок контактної задачі з адгезією. Для отримання розв'язку контактної задачі за наявності адгезійних сил пропонується розглянути наступний міні-макс принцип:

$$\max_C \min_p \Phi[p, C], \tag{6.40}$$

$$\max_C \min_p \Phi[p, C] = \frac{1}{2}\int_C p \cdot u[p]\, dS + \int_C p \cdot (h - \delta) dS + \int_C \gamma\, dS, \tag{6.41}$$

де C – шукана область контакту, p – шуканий розподіл контактного тиску, $u[p]$ – переміщення на поверхні пружного напівпростору, які обчислюються у формі інтеграла із сингулярним ядром фундаментального розв'язку задачі Бусінеска

$$u[p](x) = \frac{1}{\pi E^*}\int_C \frac{p(y)}{\rho(x, y)} dS_x dS_y\,, \tag{6.42}$$

де E^* – еквівалентний модуль пружності обох тіл, h – початковий зазор, δ – задане відносне зближення, γ – поверхнева енергія, а $\rho(x, y)$ – відстань між точками x та y у площині контакту.

Внутрішня мінімізація за змінною контактного тиску p за фіксованої області контакту C зачіпає лине перші дві складові функціоналу (6.41), які за формою тотожні виразу додаткової енергії в оригінальному принципі Калькера [238]. Однак, на відміну від випадку одностороннього контакту тіл, значення контактного тиску в (6.40) не обмежуються лише додатними величинами, адже за наявності адгезії тіла можуть і притягуватися одне до одного уздовж поверхонь. Отже варіація функції p є довільною, з чого випливає наступна умова мінімуму:

$$\delta\Phi = \int_C \delta p \cdot u[p]\, dS + \int_C \delta p(h - \delta) dS = 0 \ \forall \delta p\,. \tag{6.43}$$

Це, в свою чергу, еквівалентно тому, що на всій області визначення варійованої функції дотримуються умови

$$u + h - \delta = 0 \quad \text{в } C\,, \tag{6.44}$$

що повністю відповідає визначенню множини C як плями контакту.

Легко переконатися, що результатом мінімізації додаткової енергії Φ^e є від'ємна енергія пружних деформацій тіл

$$\Phi^e[p,C] = \frac{1}{2}\int_C p \cdot u[p]\,dS + \int_C p\cdot(h-\delta)\,dS = -\frac{1}{2}\int_C p\cdot u[p]\,dS = -\Pi^e\,. \qquad (6.45)$$

Так само і складова адгезійних сил у виразі (6.41) присутня з протилежним знаком, адже з утворенням контакту на частині поверхні C втрачається ця сама частина вільної поверхні обох тіл, а зміна енергії складає $-\int_C \gamma\, dS$. Таким чином, маємо повну відповідність задачі (6.40) варіаційному принципу, який застосовувався до адгезійного контакту в роботах Джонсона [220] та Калькера [238, 456], а саме: дійсна область контакту та дійсний розподіл контактного тиску, що задовольняють умовам контакту, мінімізують повну енергію системи. Основною перешкодою для практичного застосування цього принципу є складність у формалізації зміни множини C та відповідної зміни області визначення функції розподілу контактного тиску p. Тим не менш, існує декілька можливостей побудови наближених методів розв'язання контактної задачі з адгезією із його використанням саме у формулюванні (6.40), наведеному на початку.

Для цього в першу чергу необхідно здійснити апроксимацію наявних функцій, а саме контактного тиску та розподілу початкового зазору. Загалом для кожної з них можна використати окреме наближення із власним базисом:

$$p(x) \cong \sum_a p_a \varphi_a(x), \qquad (6.46) \qquad\qquad h(x) \cong \sum_j h_j \psi_j(x)\,. \qquad (6.47)$$

Слід зазначити, що визначення вихідних функцій, а, отже, і їхніх апроксимацій, прив'язано до області C. У разі, якщо використані базиси побудовані на сітці, це означає, що наближений метод має враховувати зміну розташування відповідних вузлів x_a та x_j, а також імовірного їхнього поєднання. За будь-якого розв'язання цієї задачі кінцева дискретизація функціоналу (6.41) має наступний вигляд:

$$\Phi[p_a, C] = \frac{1}{2} p_a B_{ab} p_b + p_a W_{aj}(h_j - \delta) + \gamma|C|, \qquad (6.48)$$

де p_a та h_j є вузловими значеннями шуканого контактного тиску та заданого початкового зазору, а коефіцієнти білінійних форм обраховуються за обраними базисними функціями як

$$B_{ab} = \int_C \varphi_a\, u[\varphi_b]\,dS\,, \qquad (6.49) \qquad\qquad W_{aj} = \int_C \varphi_a\, \psi_j\, dS\,. \qquad (6.50)$$

Якщо розглядати загальний випадок і допускати довільну форму області контакту, визначення варіації коефіцієнтів B_{ab}, W_{aj} функціоналу (6.48), а також значень зазору h_j зі зміною цієї множини і, відповідно, розташування вузлів x_a та x_j, є складною задачею, яка вимагає застосування методів деформації сіток. Натомість для осесиметричного випадку можна уникнути істотних складнощів і запропонувати простий та ефективний наближений метод. Якщо обмежитися припущенням, що контакт здійснюється виключно на круговій області із центром на осі симетрії, то її зміну можна описати єдиним чисельним параметром, а саме розміром s:

$$C(s) = sC(1) = \{x : |x| < S\}. \tag{6.51}$$

За присутності симетрії усі функції визначаються на одновимірній радіальній осі $r = |x|$: $p(x) = p(r)$, $h(x) = h(r)$. Якщо розглянути перетворення $r = s\tilde{r}$ до безрозмірних координат $\tilde{r}$, що перебувають в межах інтервалу [0, 1], то можна досить просто розв'язати проблему зміни розташування вузлів, побудови базисних функцій та обчислення варіаційного функціоналу. Пропонується використати сітку, що є масштабним перетворенням

$$r_a = s\tilde{r}_a, \; r_j = s\tilde{r}_j \tag{6.52}$$

сітки рівновіддалених вузлів $\tilde{r}_j = 0, 1/N, \ldots, 1$ та серединних вузлів $\tilde{r}_a = 0.5/N, 1.5/N, \ldots, (N-0.5)/N$ на інтервалі [0, 1]. Кусково-постійні базисні функції для розподілу контактного тиску та кусково-лінійні – для зазору є ідентичними у дійсних та безрозмірних координатах

$$\varphi_a(r) = \tilde{\varphi}_a(\tilde{r}), \tag{6.53}$$

$$\psi_j(r) = \tilde{\psi}_j(\tilde{r}). \tag{6.54}$$

Це дає змогу отримати остаточний вираз дискретизованого функціоналу

$$\Phi[p_a, C(s)] = \Phi[p_a, s] = 0.5 p_a B_{ab} p_b + p_a W_{aj}(h_j - \delta) + \pi\gamma s^2 \tag{6.55}$$

та визначити коефіцієнти в ньому як

$$B_{ab} = s^3 \tilde{B}_{ab}, \; \tilde{B}_{ab} = \int_{\tilde{C}} \tilde{\varphi}_a \cdot u[\tilde{\varphi}_b]\, d\tilde{S}, \tag{6.56}$$

$$W_{aj} = s^2 \tilde{W}_{aj}, \; \tilde{W}_{aj} = \int_{\tilde{C}} \tilde{\varphi}_a \tilde{\psi}_j \, d\tilde{S}. \tag{6.57}$$

Значна перевага полягає в тому, що витратні обчислення безрозмірних $\tilde{B}_{ab}$, $\tilde{W}_{aj}$ здійснюються лише одноразово, і в подальшому дійсні значення B_{ab}, W_{aj} можна отримати простим множенням, що суттєво прискорює чисельне розв'язання. Умови стаціонарності наближеного функціоналу (6.55) є системою нелінійних рівнянь

$$\left\{ B_{ab} p_b + W_{aj}(h_j - \delta) = 0; \frac{1}{2} p_a \frac{\partial B_{ab}}{\partial s} p_b + p_a \frac{\partial W_{aj}}{\partial s}(h_j - \delta) + p_a W_{aj} \frac{\partial h_j}{\partial s} + 2\pi\gamma s = 0, \right. \quad (6.58)$$

із якої можна отримати вузлові значення контактного тиску p_a та радіус кругової плями контакту s. Чисельний розв’язок можна отримати методом Ньютона-Рафсона.

Чисельний розв’язок репрезентативних задач. Контакт пружної сфери з площиною. Контакт сфери з площиною або ж двох сфер описується класичною теорією Герца. Осесиметричний початковий проміжок наближується квадратичною функцією

$$h(r) = r^2 / 2R, \quad (6.59)$$

де R – зведений радіус кривизни.

Аналітичний вираз еліпсоїдального розподілу контактного тиску для цього випадку отримується із загального розв’язку сингулярного інтегрального рівняння. При цьому дійсні розміри плями контакту визначаються із умов непроникнення поза її межами. Відповідно до цієї теорії, сила притискання, величина зближення та радіус плями контакту пов’язані наступними співвідношеннями:

$$P = \frac{4}{3} R^{1/2} E^* \delta^{3/2}, \quad \delta = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3},$$

$$s = \sqrt{R\delta} = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (6.60)$$

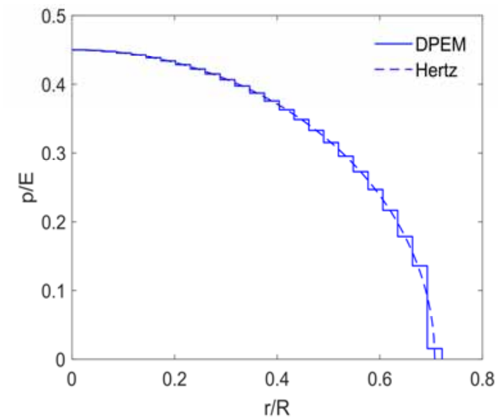


Рисунок 6.28 – Чисельно отриманий розподіл контактного тиску порівняно із герцевським розв’язком

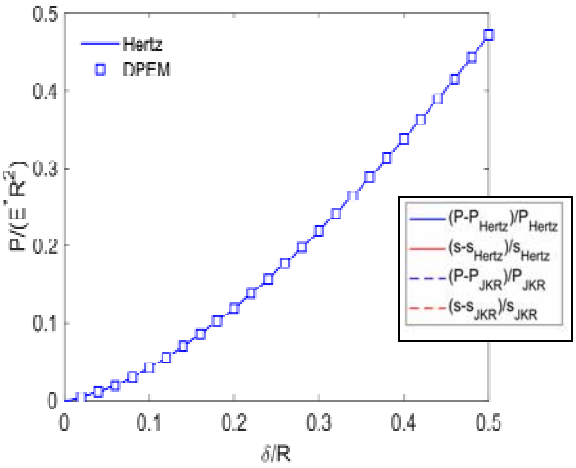
На відміну від теорії Герца, запропоноване варіаційне формулювання не враховує безпосередньо переміщення поза межами визначеної зони контакту. Однак умови стаціонарності функціоналу (6.41), як доведено в роботі [456], забезпечують очікувану поведінку наближеного розв’язку. Зокрема, значення контактного тиску залишаються додатними та сходяться до нуля на межі області контакту, як видно на рис. 6.28. Порівняння отримуваного результату з теоретичними оцінками притисного зусилля та розміру зони контакту (6.60) представлено на рис. 6.29. Навіть із невеликою кількістю вузлів дискретизації спостерігається повна кількісна відповідність. Тим не менше, можна помітити певну похибку у визначенні площі плями контакту, яка пояснюється малою чутливістю похідної наближеного функціоналу (6.55) до значення змінної s за відсутності адгезії.

Модель Джонсона-Кендалла-Робертса (JKR) для осесиметричного контакту сфери у герцевському наближенні параболоїдом має варіаційну основу [443], аналогічну до тієї, на яку покладається і ця робота. Єдина відмінність від запропонованого наближеного підходу полягає в тому, що у випадку квадратичного початкового зазору (6.59) розподіл контактного тиску за фіксованого зближення та розміру кругової області контакту є відомим та виражається аналітично. Отже існує можливість отримати наступні точні співвідношення

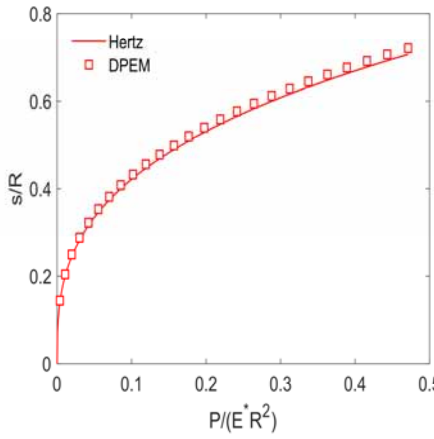
$$\delta = \frac{s^2}{R} - \sqrt{\frac{2\pi\gamma s}{E^*}}\,, \quad P = \frac{4E^* s^3}{3R} + \sqrt{16\pi\gamma E^* s^3}\,. \tag{6.61}$$

Легко помітити, що цей розв'язок повністю відтворює співвідношення теорії Герца (6.57) за умови $\gamma = 0$, тобто зникнення поверхневої адгезії. У противному випадку є істотна відмінність у контактній поведінці. По-перше, розподіл тиску не є виключно додатним у всій області взаємодії. Більш того, його від'ємні значення необмежено зростають із наближенням до границі контактної плями, як видно на рис. 6.30. По-друге, співвідношення (6.61) між основними величинами, на відміну від герцевських, позбавлені строгої монотонності. Стала пляма контакту за достатньо значного притискання поступово звужується, коли тіла віддаляються одне від одного. При цьому сила контактної взаємодії із додатної стає від'ємною та набуває мінімального значення $-P_c$ ($P_c = 3\pi\gamma R$) за скінченного розміру плями контакту $s_c = \left(9\gamma R^2 / 4E^*\right)^{1/3}$. У разі фізичного експерименту, в якому здійснюється контроль сили навантаження P, саме у цей момент відбудеться раптовий відрив тіл. Якщо ж контролювати відносне зближення δ, то можливе подальше віддалення тіл зі збереженням сталого контакту до того моменту, поки розмір плями контакту не зменшиться ще більше до $s_c / 3^{2/3}$ [220]. Сила притягання при цьому складатиме $-5P_c/9$.

Для того, щоб обчислити повну криву навантаження включно з нестабільною ділянкою (рис. 6.31), запропоновано застосувати так званий метод подовження (arc-length method) для розв'язання системи нелінійних умов стаціонарності (6.58). Контроль змінних задачі адгезії здійснюється за допомогою квадратичної функції (spherical control) та включає в себе приріст значень зближення та сили контактної взаємодії, а



а



б

Рисунок 6.29 – Порівняння наближеного методу та теорії Герца, залежність: *а* – сили контактної взаємодії від відносного зближення тіл; *б* – площі плями контакту від сили

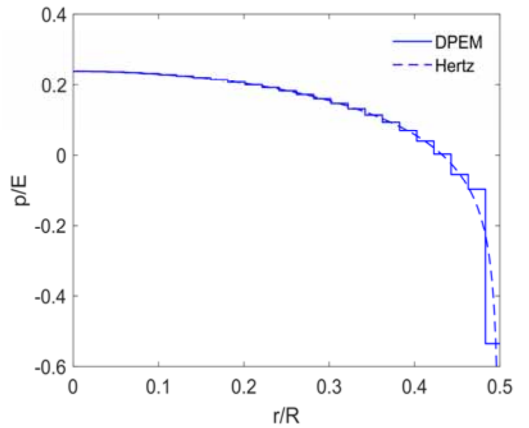


Рисунок 6.30 – Чисельно отриманий розподіл контактного тиску порівняно з теорією Джонсона-Кендала-Робертса

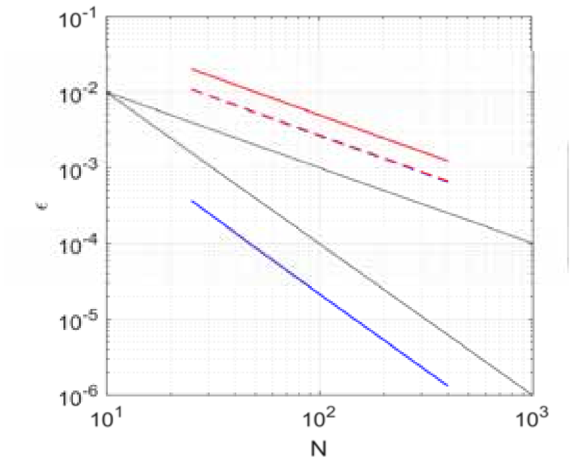
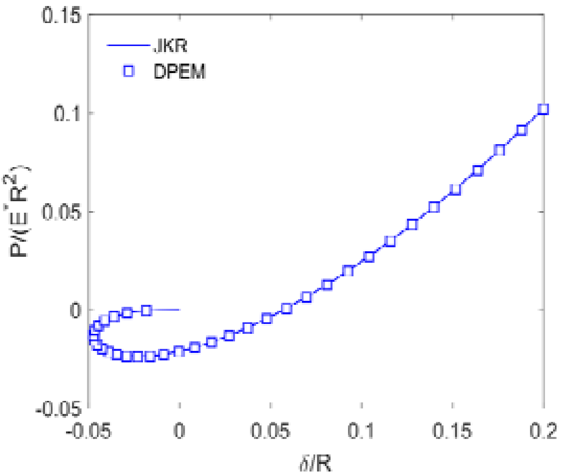
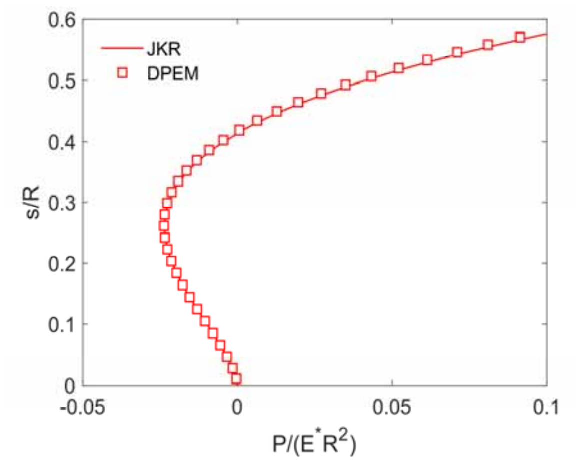


Рисунок 6.32 – Похибка в обчисленні сили контактної взаємодії та розміру контактної плями наближеним методом залежно від щільності дискретизації



а



б

Рисунок 6.31 – Порівняння наближеного методу та аналітичної моделі Джонсона-Кендала-Робертса: *а* – залежність сили контактної взаємодії від відносного зближення тіл; *б* – залежність площі плями контакту від сили також розміру плями контакту. Останній параметр є ключовим для того, щоб ітераційна процедура стало сходилася.

Контакт пружної сфери з осесиметричною хвилястою поверхнею. За більш складної форми тіл, що контактують, можна спостерігати якісно нові адгезійні властивості. Зокрема, відомо, що шорсткість поверхні одного з тіл або їх обох істотно впливає на міцність адгезії [458–461]. Модельна задача, яка дозволяє дослідити це питання, була запропонована в роботі [444]. У ній розглянуто контакт пружної сфери з хвилястою поверхнею обертання, зображений на рис. 6.33. Через те, що геометрія зберігає радіальну симетрію, цю задачу можна розв'язати запропонованим наближеним методом. Функція початкового зазору для цього випадку набуває вигляду $h(r) = r^2/2R + A\left(1-\cos\left(2\pi r/\lambda\right)\right)$, де A – амплітуда косинусоїдального профілю хвилястої поверхні, а λ – довжина хвилі. За певних умов похідна $h'(r)$ буде додатною уздовж усього проміжку між тілами. У такому випадку пляма одностороннього контакту без адгезії буде гарантовано зв'язною круговою областю без розривів. Достатньою умовою для цього є виконання нерівності $\lambda^2/(AR) > 8.5761$ [444]. На рис. 6.34 наведено розподіли контактного тиску для геометричних параметрів $A/\lambda = 0.01$ та $\lambda/R = 0.1$, за яких вищезазначена умова виконується. Як можна бачити, значення контактного тиску завжди залишаються додатними, отже, відриву поверхонь у круговій області контакту дійсно не відбувається. Слід зазначити, що розподіл тиску та ширина плями відрізняються від герцівських. Наявність хвилястості спричиняє концентрації напружень у вершинах косиноїдального профілю та, відповідно, розвантаження у проміжках між ними. Вочевидь, у разі збільшення амплітуди A це відхилення може досягти такої величини, що контактний тиск перетне межу додатніх значень на частині області контакту, що автоматично означатиме його руйнування. Зменшення хвильового числа λ матиме той самий ефект. Однак, збільшення притискного зусилля дає можливість відновити повний контакт без розривів. За будь-якої шорсткості із розповсюдженням контакту на достатню ширину відносний вклад квадратичного профі-

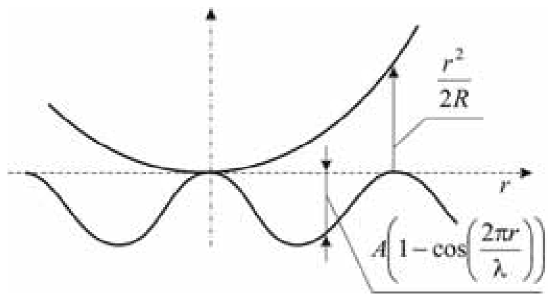
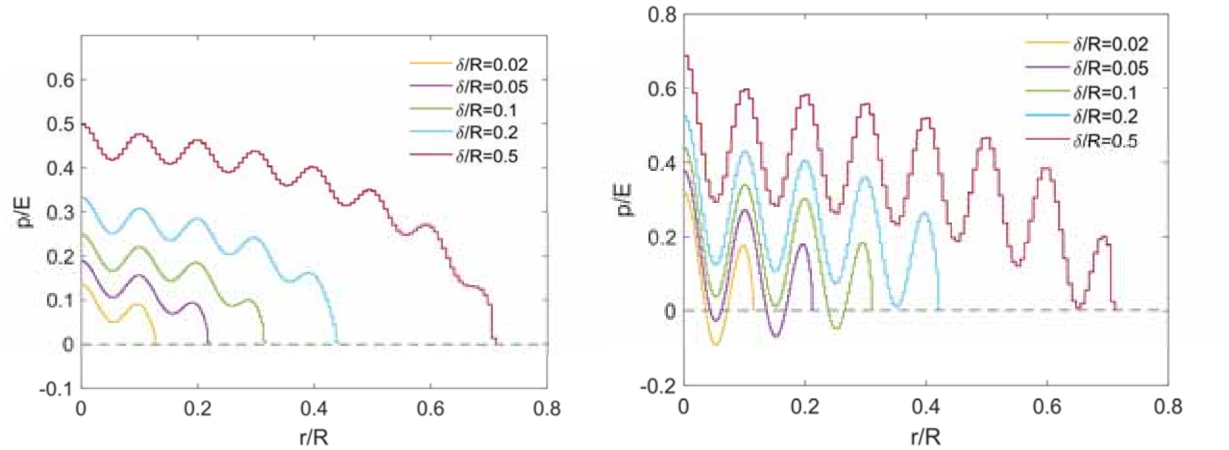


Рисунок 6.33 – Контакт пружної сфери з косинусоїдальною хвилястою поверхнею обертання

лю сфери переважитиме та забезпечить виконання нерівності $h'(r) > 0$ на істотній частині поверхні. Це твердження підтверджується результатами на рис. 6.34, *б*, що були отримані за припущення зв'язності області контакту чисельним методом для $A/\lambda = 0.1$ та $\lambda/R = 0.1$.

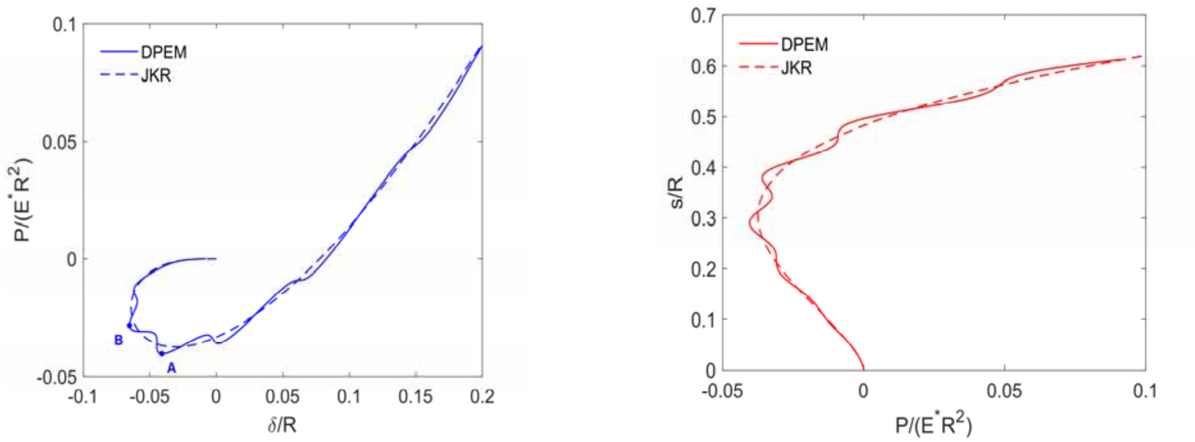
Із аналізу отриманих розподілів поверхневих зусиль може скластися враження, що шорсткість виключно перешкоджає утворенню контакту. Однак, як зазначено в роботі [444], її вплив на адгезійні властивості поверхонь є парадоксально сприятливим. Розглянемо за аналогією із цим дослідженням випадок $A/\lambda = 0.01$, $\lambda/R = 0.1$ для значення параметра адгезії $\gamma' = 2\pi\gamma/\left(E^* R\right) = 0.05$. Криві сили контактної взаємодії та зміни розмірів плями контакту для нього наведені на рис. 6.35. Через відносно невелику шорсткість відхилення у поведінці від моделі JKR, тобто контакту гладких тіл, є незначним. Якщо за відправну точку обрати певний стан притискання тіл, що характеризується умовами $\delta > 0$, $P > 0$, то їхнє роз'єднання відбуватиметься поступово зі зменшенням зближення δ та зусилля *P*. Якщо під час цього процесу контрольованим є зусилля, то раптове відокремлення сфери відбудеться у точці А, де значення *P* досягає абсолютного мінімуму. У разі контролю переміщення відрив станеться в дещо іншій точці В, коли відстань $-\delta$ за умов збереження контакту є найбільшою. Легко побачити, що в обох режимах відокремлення тіл вимагає відповідно більшого зусилля відриву та відстані відтягування порівняно із випадком гладкої поверхні. Цей ефект стає іще більш помітним зі збільшенням амплітуди хвилястих нерівностей.

На рис. 6.36 представлено відповідний випадок з $A/\lambda = 0.05$, $\lambda/R = 0.05$ та $\gamma' = 0.025$. Для нього підвищення зусилля відриву складає вже понад 50%. Крім того, крива навантаження отримує чітко виражений немонотонний характер. У результаті цього процес роз'єднання сфери з хвилястою поверхнею буде нестійким та супроводжуватиметься серією раптових стрибків стану контакту. Це привносить якісно новий дисипаційний механізм, який відсутній у моделі JKR для контакту з гладкою поверхнею. Ця контактна поведінка показана на рис. 6.37 для різних типів навантаження. Якщо контрольованою є відстань між тілами, то нестійкий стрибок відбуватиметься у кожній точці рівноважної кривої навантаження, де та є дотичною до вертикальних ліній $\delta = const$ (див. рис. 6.37, *а*).



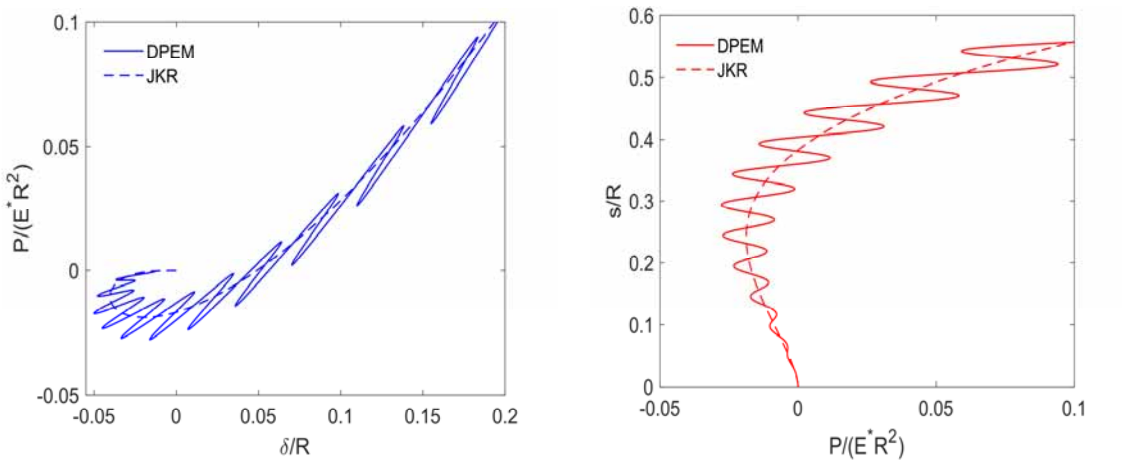
а ***б***

Рисунок 6.34 – Розподіл контактного тиску по круговій області у випадку: *а* – $A/\lambda = 0.01$ та $\lambda/R = 0.1$; *б* – $A/\lambda = 0.1$ та $\lambda/R = 0.1$



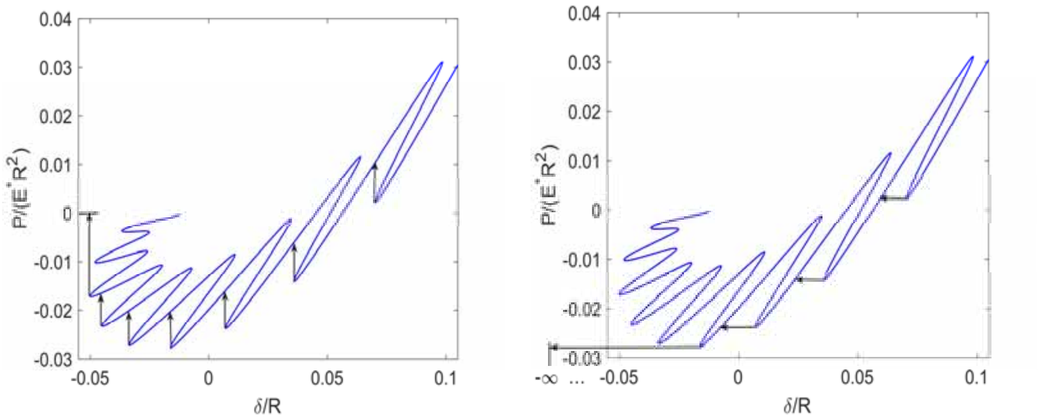
а ***б***

Рисунок 6.35 – Обчислені рівноважні криві для $A/\lambda = 0.01$, $\lambda/R = 0.1$ та $\gamma' = 2\pi\gamma/\left(E^* R\right) = 0.05$ порівняно із контактом гладких поверхонь згідно JKR: *а* – сила взаємодії; *б* – радіус плями контакту



а ***б***

Рисунок 6.36 – Обчислені рівноважні криві для $A/\lambda = 0.05$, $\lambda/R = 0.05$ та $\gamma' = 0.025$ порівняно із контактом гладких поверхонь згідно JKR: *а* – сила взаємодії; *б* – радіус плями контакту



а *б*

Рисунок 6.37 – Дисипація енергії через втрату стійкості та раптових незворотних змін стану контакту для випадку $A/\lambda = 0.05$, $\lambda/R = 0.05$ та $\gamma' = 0.025$ за умов контролю: *а* – відстані між тілами; *б* – сили контактної взаємодії

Під час кожного з них пляма контакту зазнаватиме раптового скорочення на скінченну величину, разом з чим відповідно зменшуватиметься до наступного стійкого значення сила контактної взаємодії. Схожим чином у випадку силового навантаження система перестрибуватиме уздовж горизонтальних ліній $F = const$ (див. рис. 6.37, *б*). Можна переконатися, що розташування критичних точок пов'язано із проходженням границі зони контакту повз вершини нерівностей, яка переміщується кожного разу до деякої точки на спаді наступної хвилі косинусоїди на відстань порядку λ. Під час кожної втрати стійкості та раптової зміни контакту між тілами незворотньо вивільняється енергія пружних деформацій. Завдяки цьому дисипативному механізму пояснюється здатність шорсткості підвищувати енергію, яку вимагає руйнування контакту.

Зазначимо, що наведені результати отримані для тіл, що були попередньо стиснуті із достатнім для утворення повного контакту зусиллям. Це залишає поза межами аналізу процес зближення тіл, що передує цьому стану. Під час нього може порушуватися припущення стосовно зв'язності плями контакту через стрибок, а також через раптове зближення та злиття серії концентричних кілець, перш ніж утвориться стала кругова область контакту. Вочевидь, запропонований наближений метод для визначення такої поведінки вже не придатний.

Запропоноване варіаційне формулювання засновується на принципі Калькера стаціонарності повної додаткової енергії. Порівняно із загальним випадком для осесиметричної геометрії, визначення змінної області контакту не викликає складнощів. За рахунок цього вдалося побудувати простий і ефективний наближений метод розв'язання. Однією із переваг представленої чисельної реалізації є те, що обчислення коефіцієнтів квадратурних форм здійснюються лише раз, а далі отримуються легким перетворенням зі зміною радіусу плями контакту в ході її ітераційного уточнення. Для обчислення нестійких відтинків кривої навантаження застосовано метод подовження, що здійснює контроль за приростом як зближення тіл, так і змінного радіусу контакту. Перевагою методу є те, що він дає можливість обчислювати неперервну зміну розмірів плями контакту, а разом із цим – і її площу. Це дає можливість застосовувати цей метод для дослідження впливу шорсткості на характер контактної взаємодії. Зокрема, неперервний розв'язок дає змогу обчислювати похідні таких величин як площа контакту та зусилля відносно зближення тіл, що дає уявлення про електро- та теплопровідність контакту та його жорсткість.

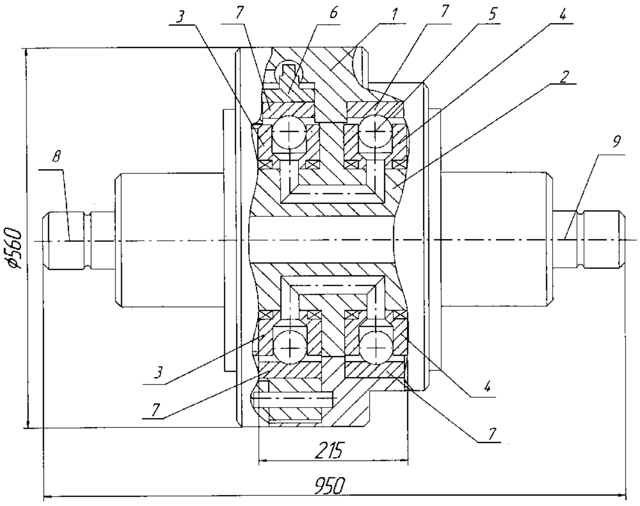
Подальше вдосконалення запропонованого підходу пов'язане поширенням на випадок несуцільної області контакту та відмінної від осесиметричної геометрії тіл. Для цього необхідно розробити апарат варіювання двовимірної форми плям контакту, яка не може більше визначатися єдиним числовим параметром. Для цього можуть бути придатними методи функцій рівня, що вже застосовувалися для аналізу контакту мембран із перешкодою [462]. Запропонований метод також може бути застосованим до моделювання типів взаємодії, відмінних від молекулярної адгезії, наприклад, тиску газів та рідинних містків [463, 464].

6.5 Чисельний аналіз напружено-деформованого стану елементів гідропередачі трансмісії для важких гусеничних машин

Для оснащення важких гусеничних машин перспективним є застосування гідрооб'ємної передачі, зокрема, ГОП-900, що розроблена Державним підприємством «Харківське конструкторське бюро з машинобудування ім. О.О. Морозова» [411, 425], [www.morozov.com.ua] (рис. 6.38, табл. 6.4). Одним із чинників, які стримують досягнення високих робочих режимів її роботи, є міцність кулькового поршня під час взаємодії із профільованою біговою доріжкою статора.

У роботах [1, 2] описані деякі аспекти дослідження контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою ГОП-900. Визначався розподіл контактного тиску у цьому спряженні залежно від низки конструктивних, технологічних та експлуатаційних параметрів. Зокрема, мова йшла про форму зазору між поршнем та біговою доріжкою, про шорсткість поверхневих шарів спряжених деталей, а також притискне зусилля поршня до бігової доріжки (залежно від величини внутрішнього тиску робочої рідини у циліндрі ГОП-900).

Разом із тим, вплив шорсткості поверхневих шарів здійснено у недостатньому обсязі та тільки у рамках лінійно пружної моделі проміжного шару. Крім того, потребує додаткового дослідження НДС поршня та бігової доріжки ГОП-900, що визначає їх міцність. Відповідно, у цій роботі поставлені та розв’язані наступні задачі.



1 – корпус; *2* – блок цапфових розподілювачів; *3* – блок циліндрів насоса (ротор); *4* – блок циліндрів гідромотора (ротор); *5* – кульковий поршень; *6* – статор насоса; *7* – обойми (бігові доріжки) насоса та гідромотора; *8* і *9* – вхідний і вихідний вали гідропередачі

Рисунок 6.38 – Гідропередача ГОП-900 із кульковими поршнями [425]

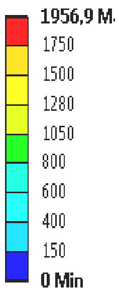
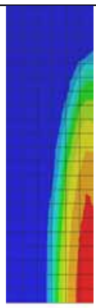
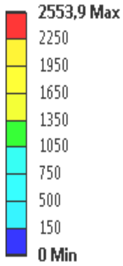
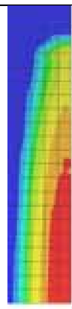
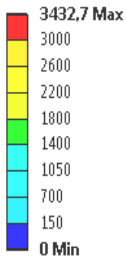
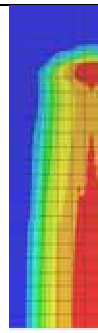
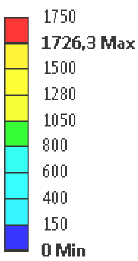
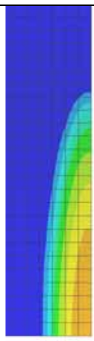
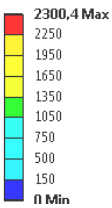
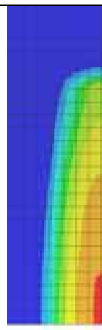
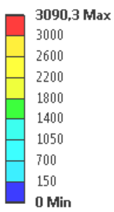
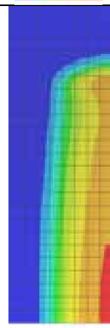
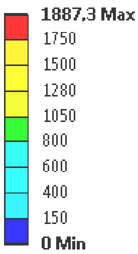
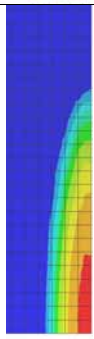
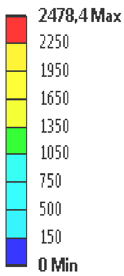
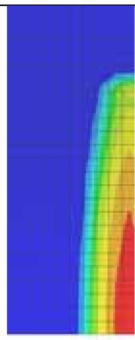
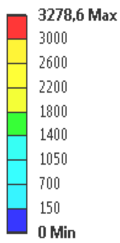
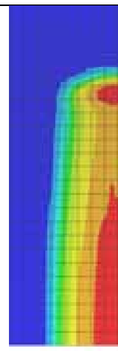
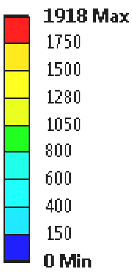
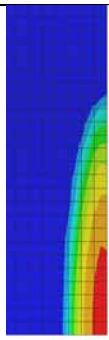
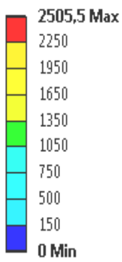
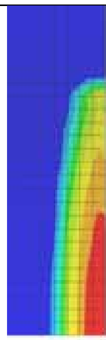
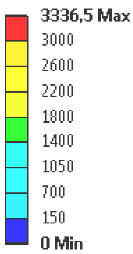
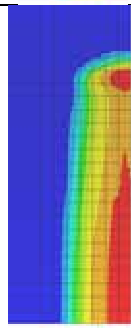
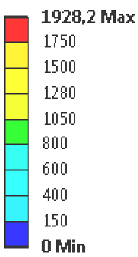
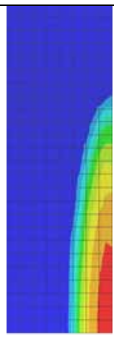
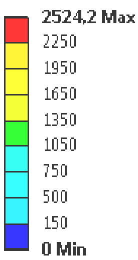
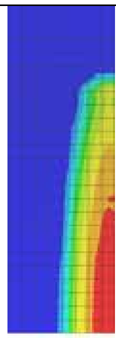
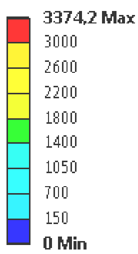
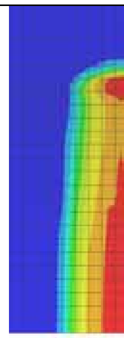
1. *Вплив контактної жорсткості проміжного шару на закон розподілу та рівень контактного тиску між кульковим поршнем та бігової доріжкою ГОП-900.* Розв’язана за допомогою МСЕ та МГЕ задача про контакт без тертя кулькового поршня та бігової доріжки гідропередачі. У табл. 6.5 наведені розподіли контактного тиску при варіюванні контактної жорсткості поверхневих шарів у спряженні «поршень – бігова доріжка» гідрооб’ємної передачі ГОП-900.

Таблиця 6.4 – Базові параметри елементів ГОП-900

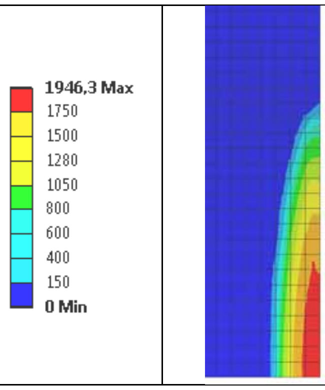
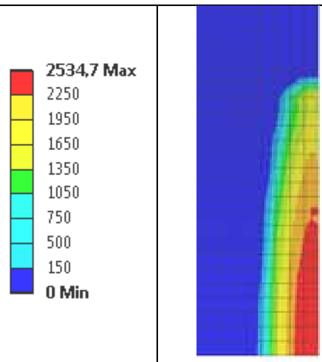
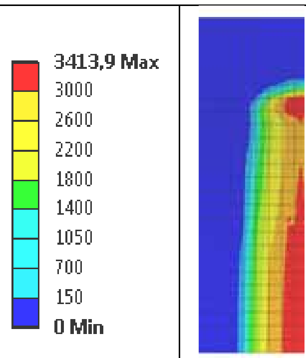
Назва		Значення
радіус	поршня	$R_p = 0.03175$ м
	кругової траєкторії центру поршня	$R_{sp} = 0.128$ м
	статорного кільця	$R_{st} = 0,15975$ м
	корпусу ротора	$R_{rot} = 0.145$ м
максимальний ексцентриситет		$\delta = 0.012$ м
модуль пружності		$E = 200$ ГПа
коефіцієнт Пуассона		$\nu = 0.3$
притискне зусилля у сполученні поршня зі		$P = 15 \div 120$ кН

Аналіз наведених розподілів дає підстави для висновку про те, що зі зменшенням контактної жорсткості контактна площадка зростає, рівень контактного тиску знижується, а його максимум

Таблиця 6.5 – Розподіл контактного тиску у спряженні «поршень – бігова доріжка» гідрооб’ємної передачі ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) при різних значеннях притискної сили

Варіанти досліджень		Притискна сила, кН					
		50		100		200	
Базовий варіант							
із шаром жорсткості, нижчою, ніж базова , у	100 разів						
	20 разів						
	10 разів						
	5 разів						

Закінчення табл. 6.5

Віріанти досліджень	Притискна сила, кН		
	50	100	200
із шаром жорсткістю, у 2 рази нижчою			

зміщується від центру до периферії. Це, в свою чергу, дає можливість ставити задачу про оптимізацію вимог до технологічних операцій обробки поверхневих шарів поршня та бігової доріжки. Із аналізу наведених результатів випливає, що раціональним варіантом обробки поверхонь є полірування із доведенням контактної жорсткості сталевих поршня та бігової доріжки до 10^{14} Н/м. Це відповідає шорсткості на рівні $R_a \approx 0{,}8$ мкм.

2. *Аналіз напружено-деформованого стану кулькового поршня гідрооб'ємної передачі ГОП-900* На рис. 6.39-6.48 та у Дотатку Б наведені картини розподілу компонент НДС та еквівалентних за Мізесом напружень у кульковому поршні гідрооб'ємної передачі ГОП-900 при варіюванні тих же параметрів, що і при розв'язанні *задачі 1*.

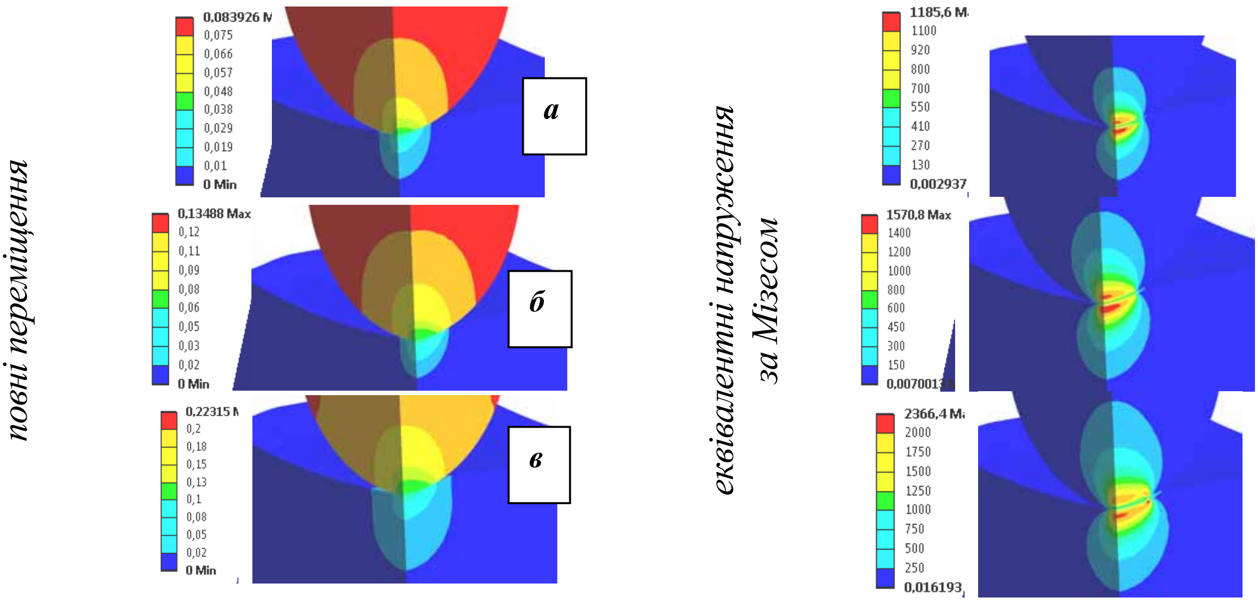
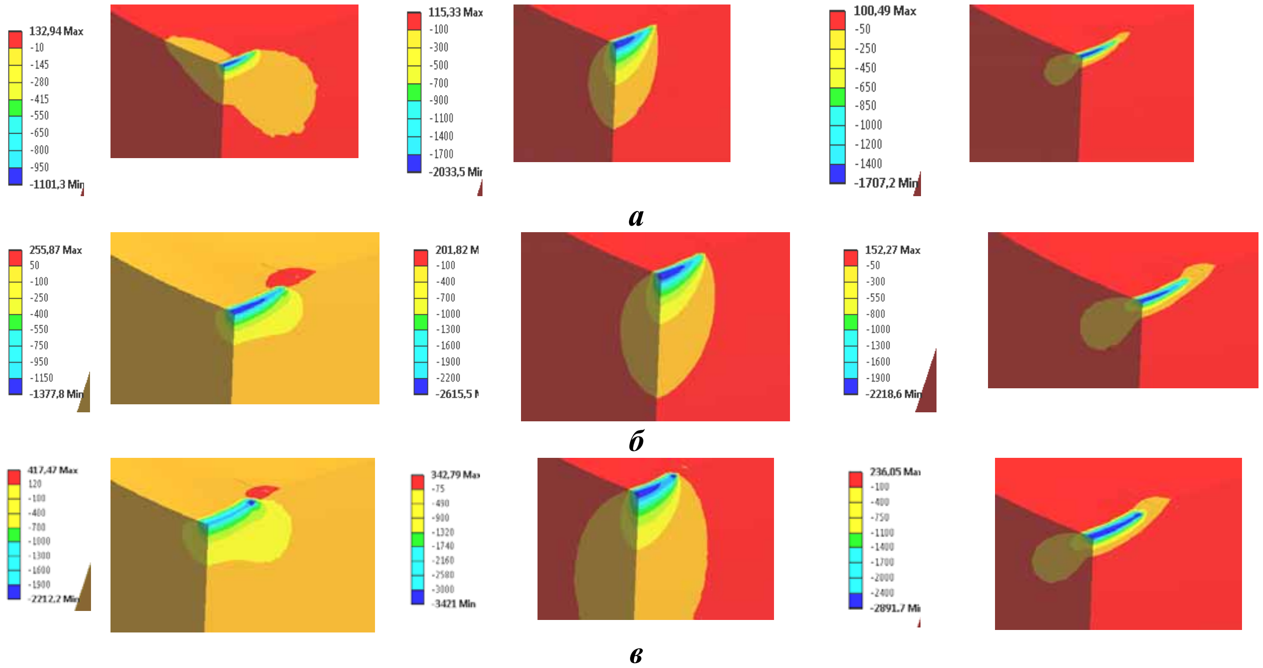
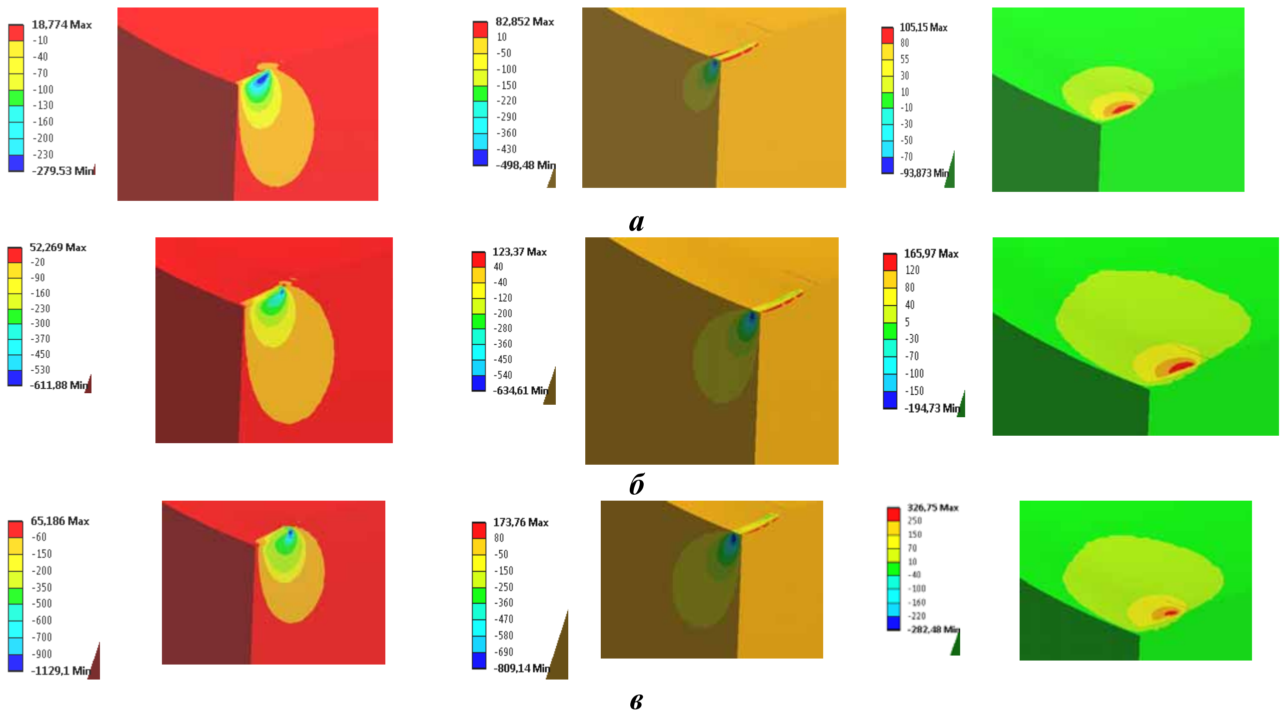


Рисунок 6.39 – Розподіли повних переміщень (мм) та еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) у гідрооб'ємній передачі ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН



σ_x σ_y σ_z

Рисунок 6.40 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у біговій доріжці ГОП-900 (показано 1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН



τ_{xy} τ_{yz} τ_{xz}

Рисунок 6.41 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у біговій доріжці ГОП-900 (показано 1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН

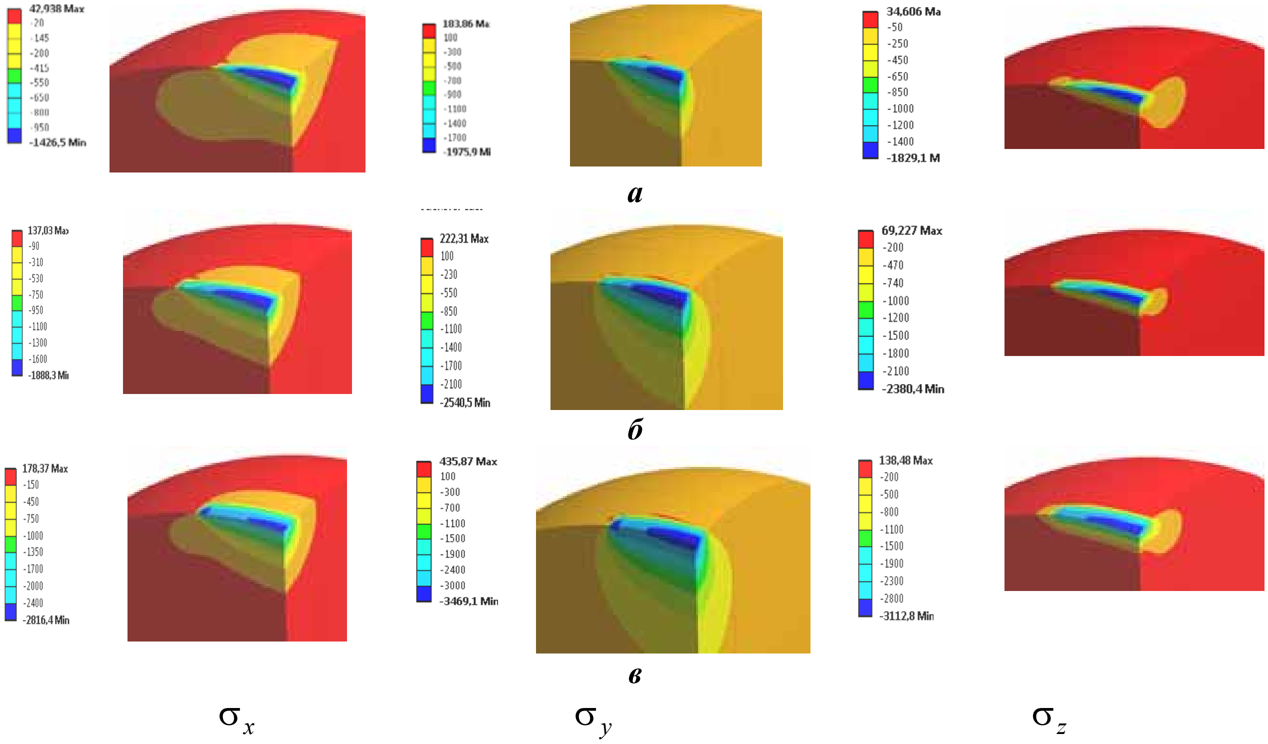


Рисунок 6.42 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 (показано 1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН

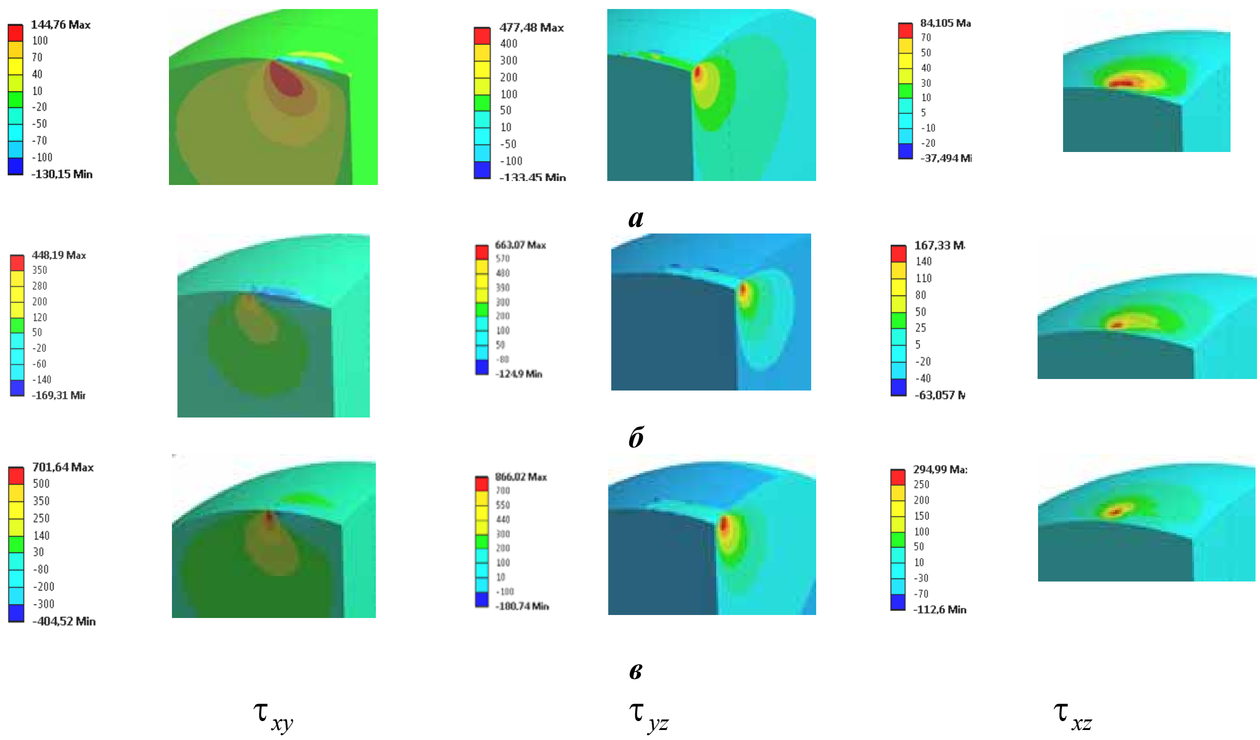
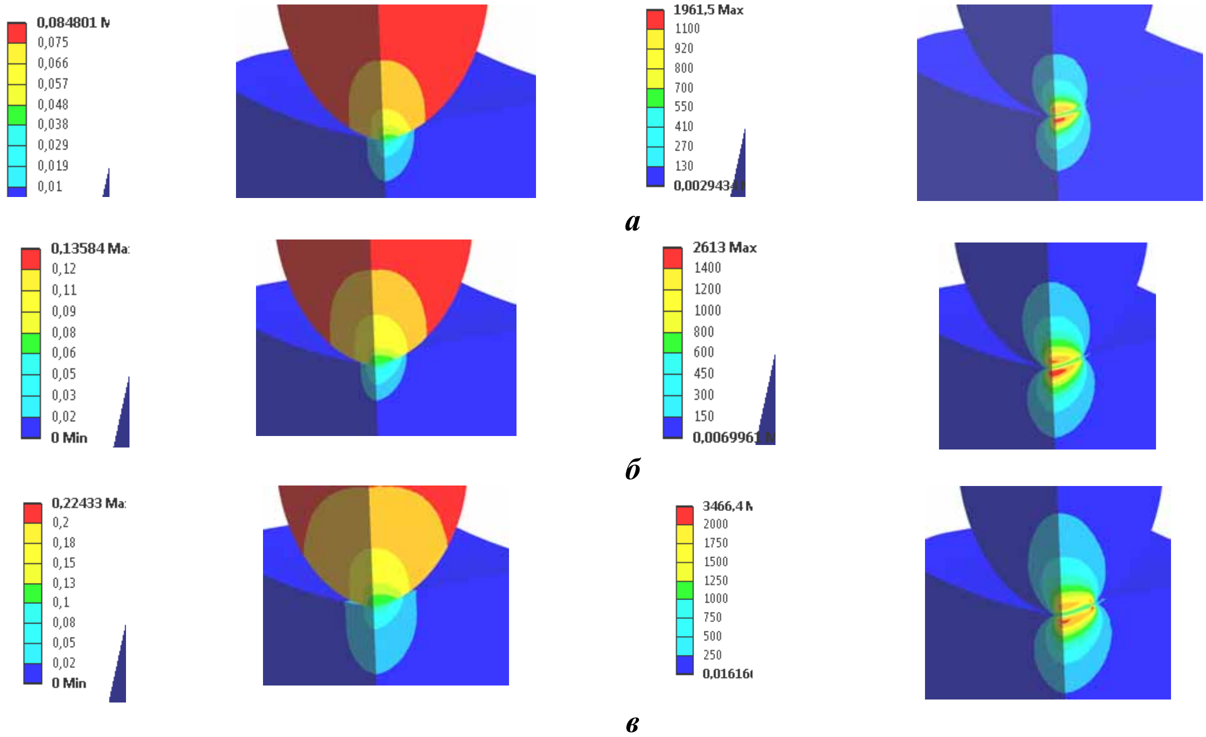
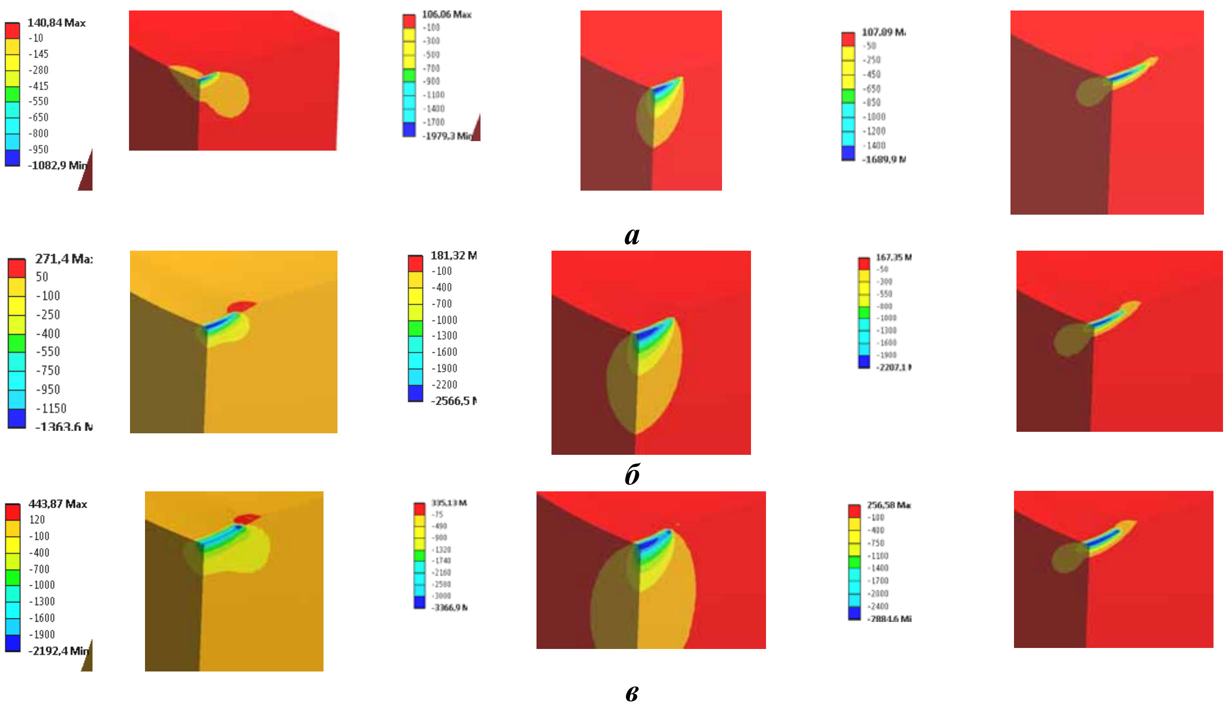


Рисунок 6.43 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова) за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН



повні переміщення *еквівалентні напруження за Мізесом*

Рисунок 6.44 – Розподіли повних переміщень (мм) та еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) у гідрооб'ємній передачі ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, у 10 разів нижчої, ніж базова, за різних значень притискної сили: *а* – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН



σ_x σ_y σ_z

Рисунок 6.45 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у біговій доріжці ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, у 10 разів нижчої, ніж базова, за різних значень притискної сили:
а – 50 кН; *б* – 100 кН; *в* – 200 кН

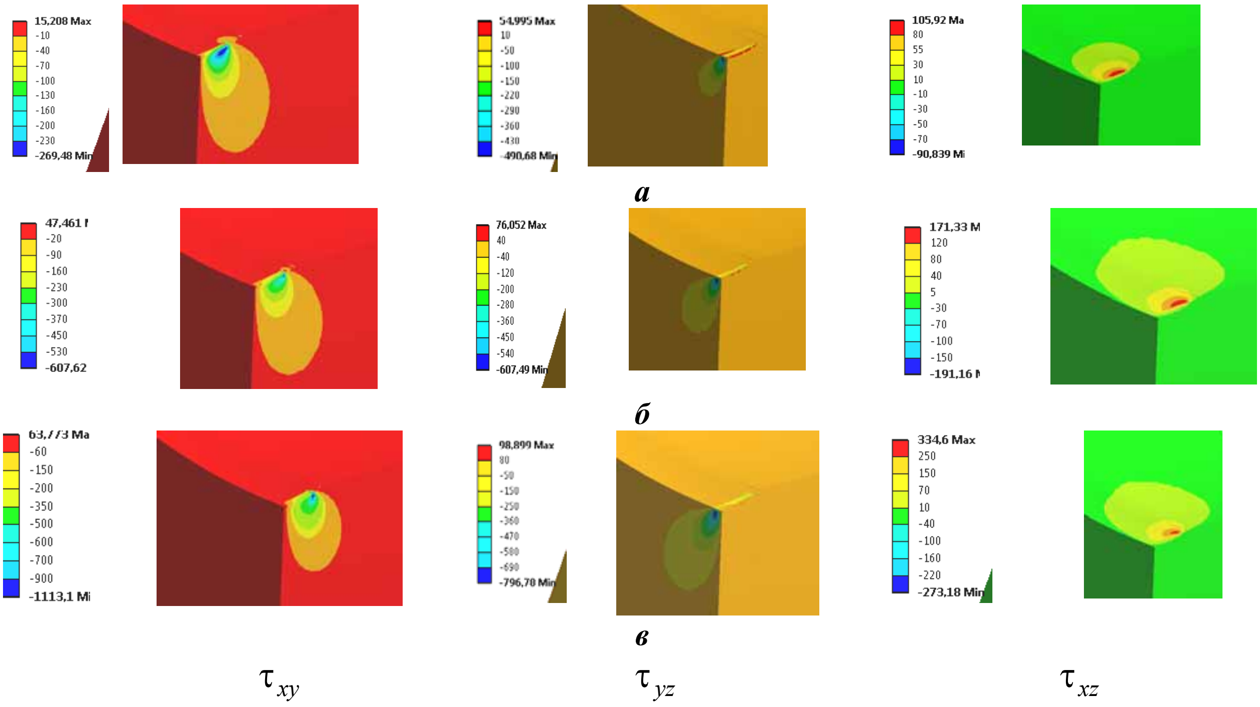


Рисунок 6.46 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у біговій доріжці ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, у 10 разів нижчої, ніж базова, за різних значень притискної сили:
а – 50 кН; б – 100 кН; в – 200 кН

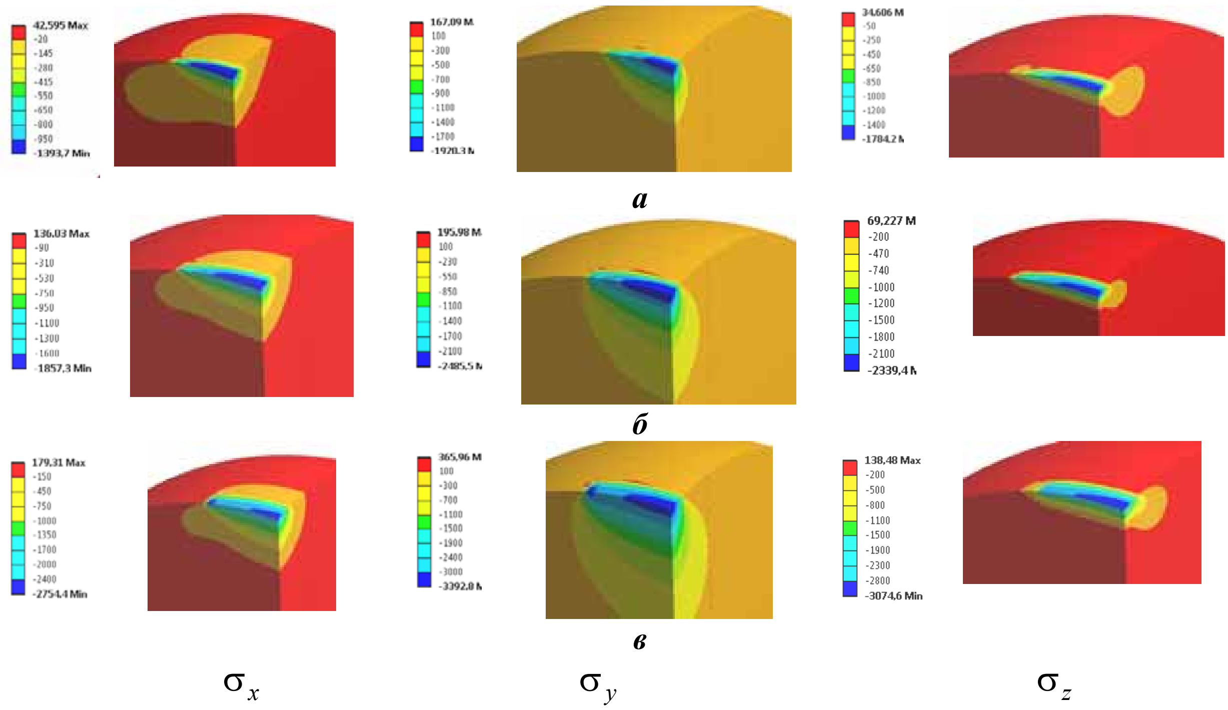


Рисунок 6.47 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 (1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, у 10 разів нижчої, ніж базова, за різних значень притискної сили:
а – 50 кН; б – 100 кН; в – 200 кН

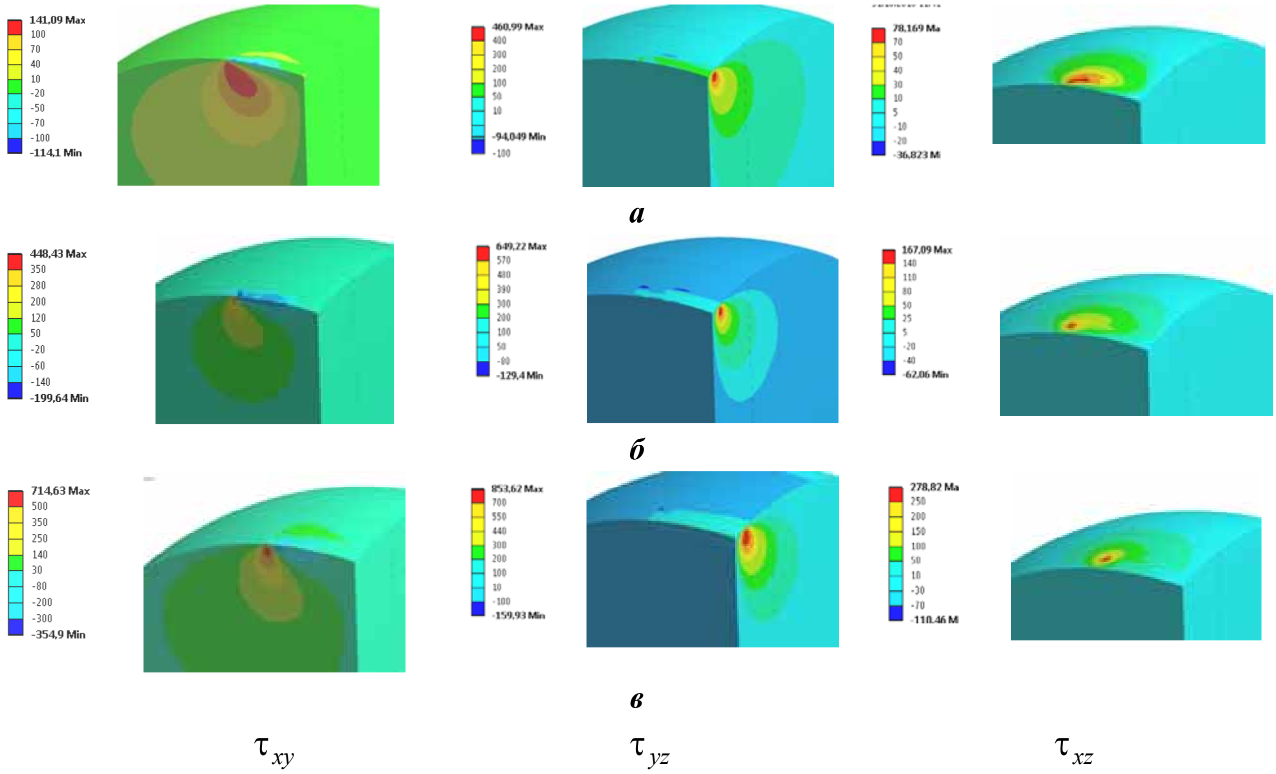


Рисунок 6.48 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 (показано 1/4 частина моделі) за значень контактної жорсткості, у 10 разів нижчої, ніж базова, за різних значень притискної сили:
а – 50 кН; б – 100 кН; в – 200 кН

3. *Вплив нелінійного характеру залежності величини зминання проміжного шару від контактного тиску на розподіл цього тиску у спряженні поршня з біговою доріжкою гідрооб'ємної передачі ГОП-900.* На рис. 6.49 наведені результати досліджень зміни розподілу контактного тиску за варіювання властивостей фізично нелінійного проміжного шару між кульковим поршнем та біговою доріжкою ГОП-900. Для лінійно-жорсткого закону залежності «зминання – тиск» контактний тиск набуває розподілу, який є проміжним між випадком лінійного шару та контактом гладких тіл. Відповідно, це впливає на рівень контактного тиску. У досліджуваному випадку мова йде про відмінність на рівні 15–20 % між крайніми випадками.

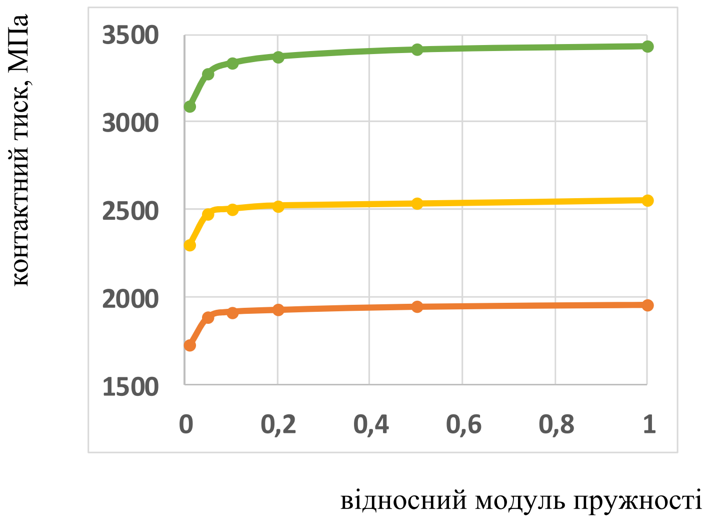


Рисунок 6.49 – Розподіли контактного тиску між кульковим поршнем та та біговою доріжкою ГОП-900

Докладний аналіз контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою статорного кільця радіальної гідрооб'ємної передачі ГОП-900 був здійснений на основі розрахункової схеми, наведеної на рис. 6.50. Було прийнято: радіус бігової доріжки статорного кільця R_{sp} = 0,128 м, радіус поршня R_p = 0,03175 м, поперечний профіль бігової доріжки статорного кільця у площині zy (див. рис. 6.50) утворений дугами кіл із радіусами R_t, $R_c = R_t / 2$ із кутом спряження $\theta = \pi / 12$. Модулі пружності матеріалів сталевого поршня та статорного кільця E прийняті рівними $2 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнти Пуасона – 0,3. Притискне зусилля $P_r = 20 \cdot r$ (кН), r = 1, ..., 10.

Між взаємодіючими тілами введено проміжний шар (моделює шорсткість поверхні), проміжні властивості якого описуються нелінійною характеристикою «величина зім'яття w – контактний тиск p», яка зображена на рис. 6.51. Тут прийнято для визначеності: $p_I = 2 \cdot 10^8$ Па, $p_{II} = 2 \cdot 10^9$ Па, $p_{III} = \infty$. Таким чином, отримуємо два лінійно-жорстких шари I, II та один пружний III, який має характеристику $w = \lambda p$, де коефіцієнт податливості λ_β приймає у дослідженнях наступні чотири варіанті значень: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10^{-15}$ м^3/Н, $\lambda_3 = 10^{-14}$ м^3/Н, $\lambda_4 = 10^{-13}$ м^3/Н.

З огляду на можливі варіанти вибору радіуса кривизни досліджені наступні варіанти співвідношень радіусів дуги центральної частини поперечного профілю бігової доріжки R_t та радіуса кола кулькового поршня: $R_t^a = 1{,}05\,R_p$, $R_t^b = 1{,}01\,R_p$, $R_t^c = 0{,}99\,R_p$. Отже, варіант розрахункової схеми $\overline{V}$ можна ідентифікувати трьома індексами: $\overline{V} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, де $\alpha = I, II, III$; $\beta = 1 \div 4; \gamma = \{a, b, c\}$.

Для чисельної дискретизації області можливого контакту у площині xy побудоване розбиття на правильні трикутники із розміром сторони c = $2{,}5 \cdot 10^{-4}$м та кількістю вузлів $N \times M = 48 \times 20$.

На рис. 6.52 наведено розподіл зазору h (див. рис. 6.50) як функції координат дотичної площини x, y (у різних проекціях та у поперечному розрізі). Для цього випадку розподілу зазору одержані розподіли та залежності максимального контактного тиску p від величини притискного зусилля ($P = 20 \div 200$ кН із кроком 20 кН). На рис. 6.53 наведені залежності $p_{\max}(P, \beta)$. У табл. В.1 зведені розподіли $p(x, 0, P)$ та

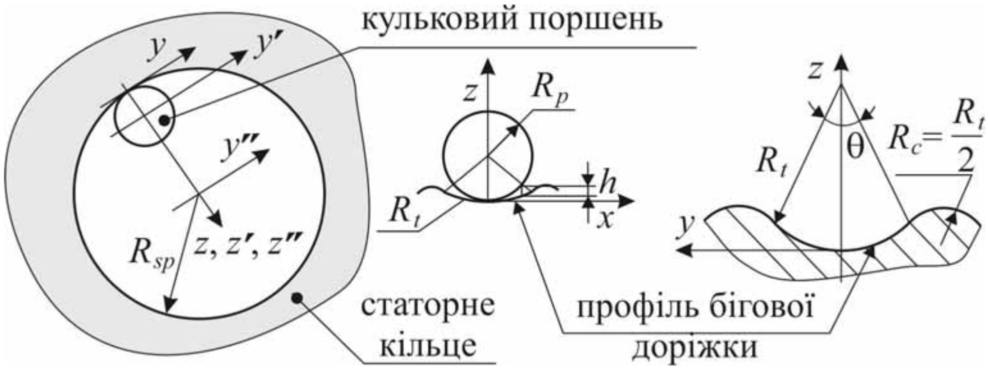


Рисунок 6.50 – До розрахункової схеми контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою статорного кільця радіальної гідрооб'ємної передачі ГОП-900

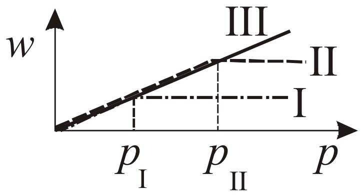
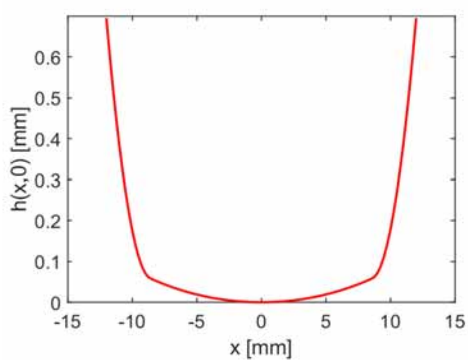
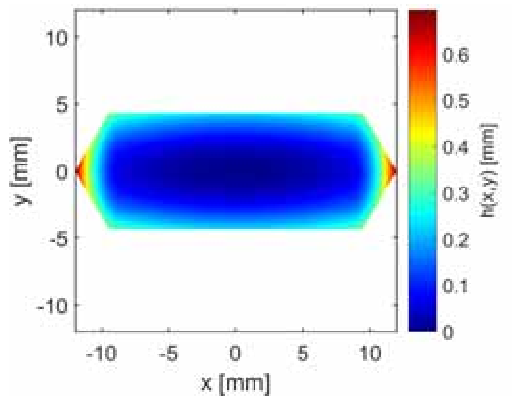


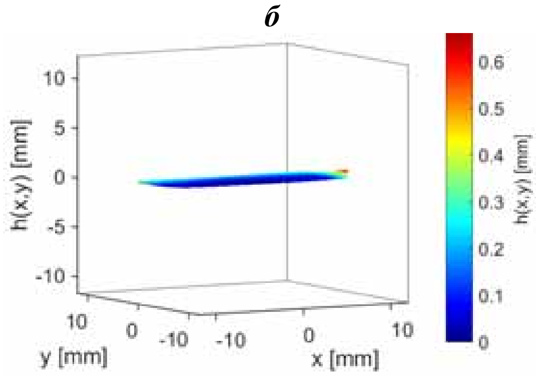
Рисунок 6.51 – До визначення нелінійної характеристики «величина зминання w – контактний тиск p»



а



б



в

Рисунок 6.52 – Розподіл зазору між кульковим поршнем та біговою доріжкою статорного кільця гідропередачі ГОП-900 (варіант розподілу зазору $\gamma = a$): a – уздовж осі x; $б$ – у площині x, y; $в$ – ізометрія

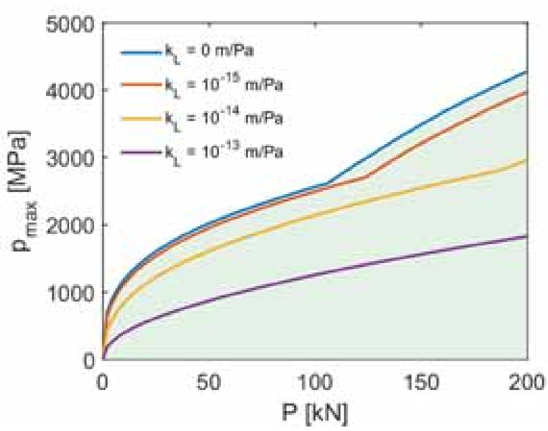


Рисунок 6.53 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) від величини притискного зусилля P (кН) для лінійно пружного проміжного шару ($\alpha = III$) із різними коефіцієнтами податливості (варіант розподілу зазору $\gamma = a$)

$p(x,y)$ за P = 120 кН, а на рис. 6.54 наведені залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) від притискного зусилля P (кН) для $\lambda_4 = 10^{-13}$ м^3/Н. У табл. В.2 та на рис. 6.55 – аналогічна інформація для λ_3, а у табл. В.3 та на рис. 6.56 – те саме для λ_2. Подібний комплект розподілів та залежностей для випадку варіанта розподілу зазору $\gamma = b$ (тобто $R_t^b = 1{,}01 R_p$) наведено на рис. 6.57–6.61 та у табл. В.4–В.6. Комплект розподілів та залежностей для випадку варіанта розподілу зазору $\gamma = c$ (тобто $R_t^c = 0{,}99 R_p$) зібрано на рис. 6.62–6.66 та у табл. В.7–В.9.

Загальна тенденція зміни розподілів p для варіанту $\gamma = a$ (тобто радіус $R_t^a = 1{,}05 R_p$) полягає у тому, що для лінійно пружного шару спостерігається монотонне зростання тиску від притискного зусилля. Для нелінійно пружного шару відбувається злам характеру розподілу p при зростанні його рівнів понад p_I, p_{II} відповідно. Разом із тим зменшення коефіцієнту податливості згладжує різницю між розподілами із різними значеннями p_α, де $\alpha = I, II, III$ (у цьому випадку – при $\lambda = 10^{-15}$ м^3/Н різниця практично зникає). Подібні тенденції – також і для випадку $\gamma = b$ (тобто $R_t^b = 1{,}01 R_p$). Для випадку $\gamma = c$ (тобто $R_t^c = 0{,}99 R_p$) спостерігається така сама за характером тенденція, проте якщо для випадків $R_t > R_p$ відбувається поступове зміщення точкимаксимуму контактного тиску від центру до периферії зі зростанням притискного зусилля, то для випадку $R_t < R_p$ він із самого початку опиняється на периферії області контакту. Також загальною тенденцією для випадків $\gamma = \{a, b, c\}$ є те, що збільшення коефіцієнту податливості призводить до зростання області контакту та зниження рівня контактного тиску.

Принциповою відмінністю між випадками $R_t > R_p$ та $R_t < R_p$ є те, що для першого варіанта для будь-яких $p_\alpha > 0$ ($i = I, II, III$) знайдеться така величина притискного зусилля, що область контакту буде овальною, а в її центрі досягатиметься $p_{\max}$. Для другого ж варіанту за малих P контактна область є двома ізольованими каплевидними підобластями (на периферії області можливого контакту), які зі зростанням P можуть перетворюватися у гантелевидне їх об’єднання.

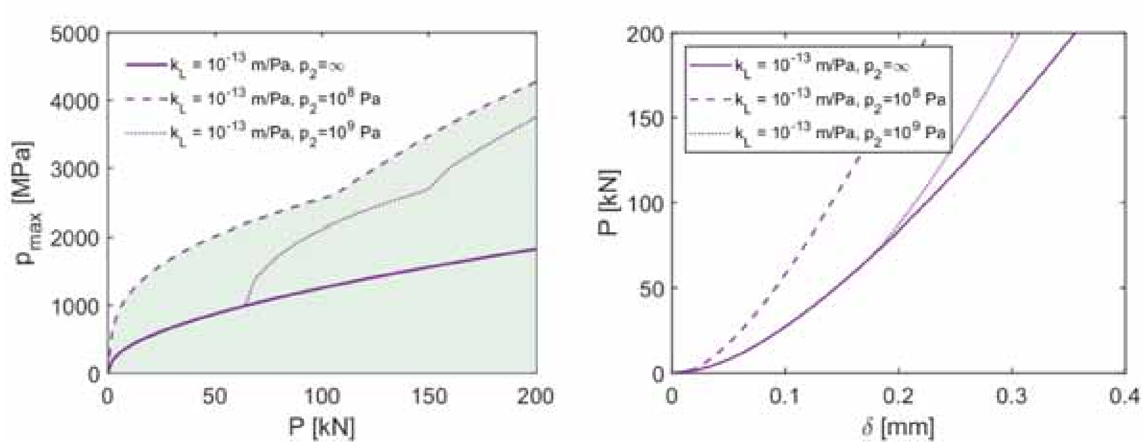


Рисунок 6.54 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (a) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_{α} (для варіанту λ_4, $\gamma = a$)

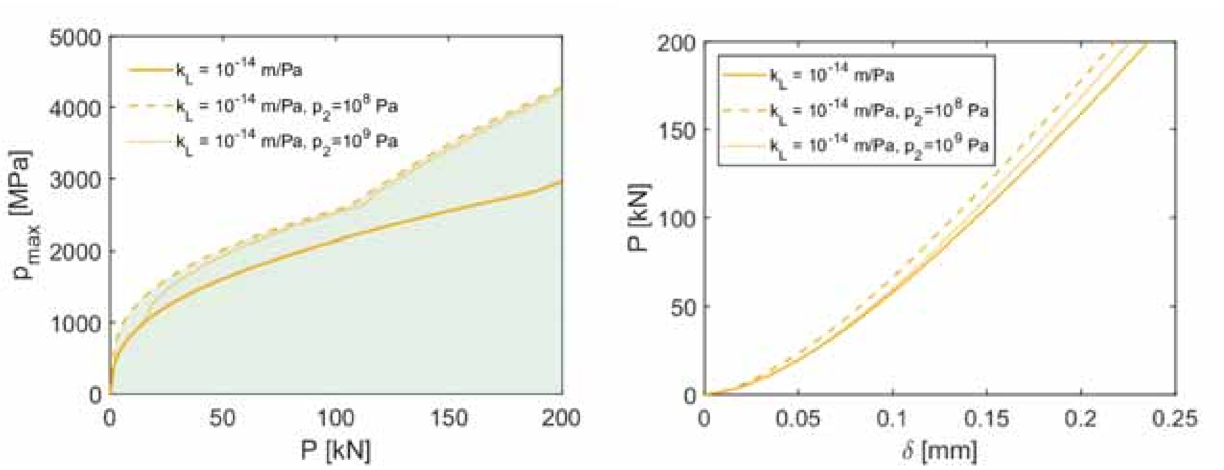


Рисунок 6.55 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (a) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_{α} (для варіанту λ_3, $\gamma = a$)

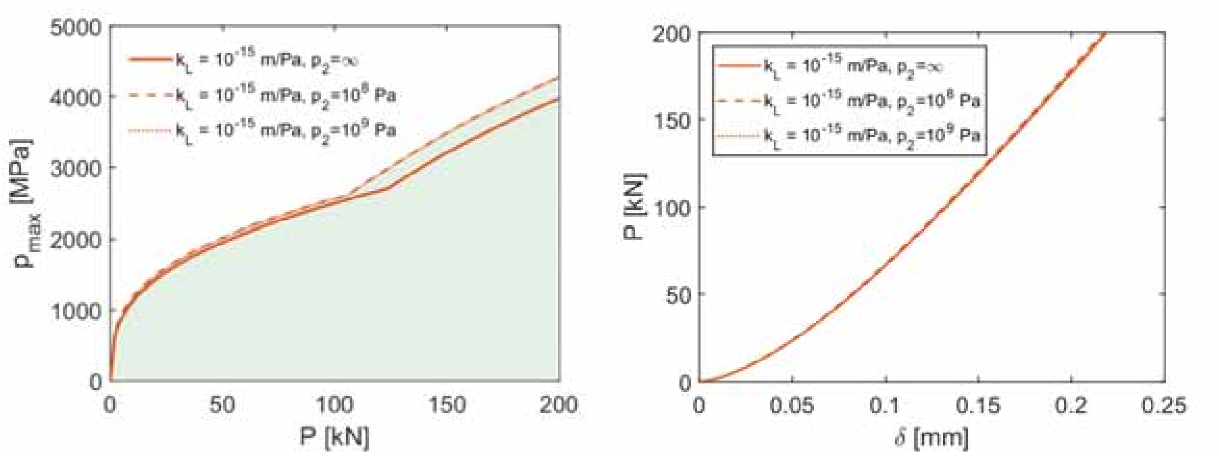
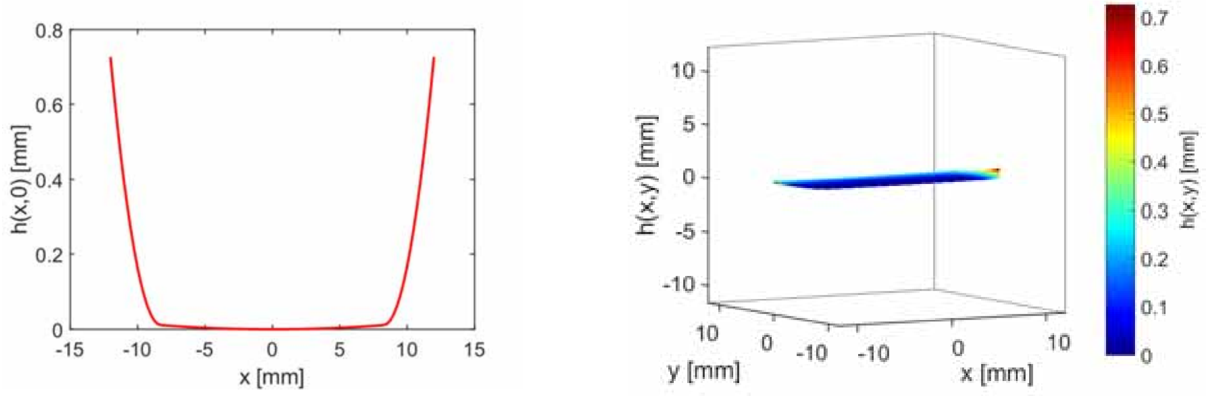


Рисунок 6.56 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (a) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_{α} (для варіанту λ_2, $\gamma = a$)



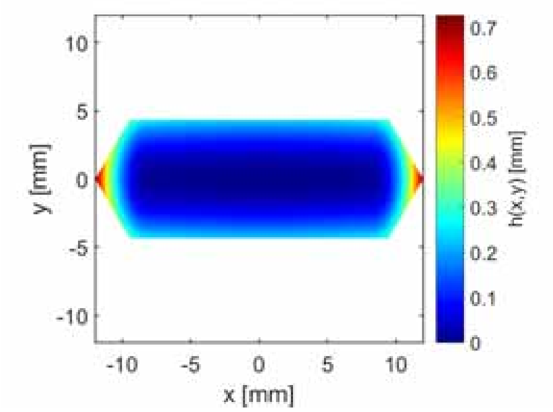


Рисунок 6.57 – Розподіл зазору між кульковим поршнем та біговою доріжкою статорного кільця гідропередачі ГОП-900 (варіант розподілу зазору $\gamma = b$): *а* – уздовж осі *x*, *б* – ізометрія, *в* – у площині *x*, *y*

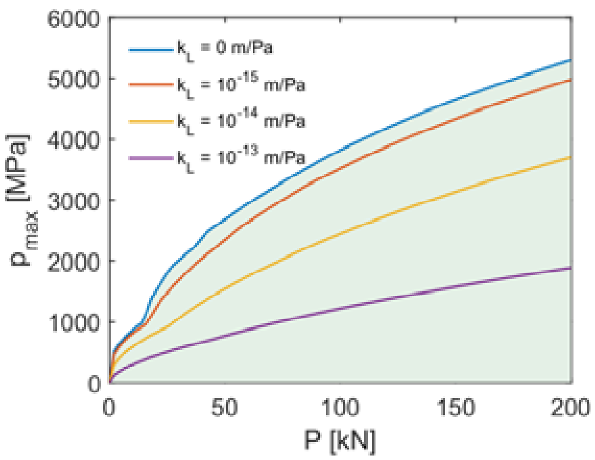


Рисунок 6.58 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) від величини притискного зусилля P (кН) для лінійно пружного проміжного шару ($\alpha = III$) із різними коефіцієнтами податливості (варіант розподілу зазору $\gamma = b$)

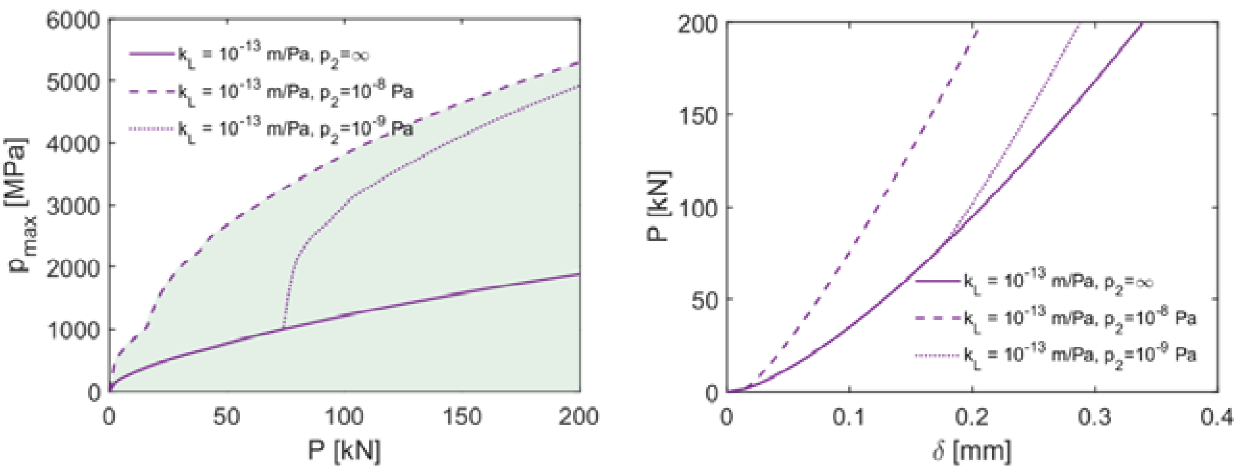


Рисунок 6.59 – Залежності максимального контактного тиску (МПа) (а) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл (мм) для різних варіантів p_α (для варіанту λ_4, $\gamma = b$)

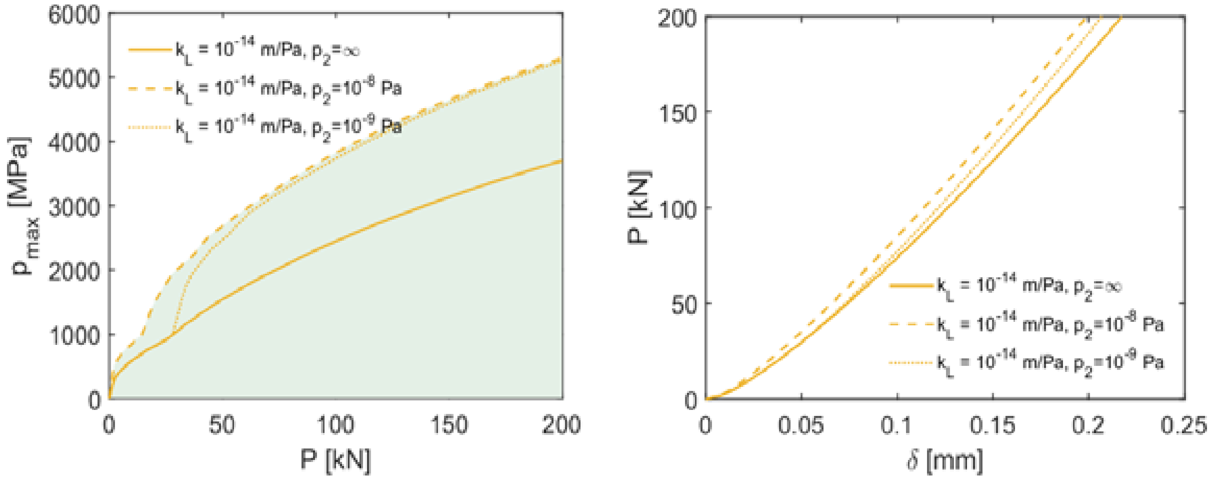


Рисунок 6.60 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (a) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_i (для варіанту λ_3, $\gamma = b$)

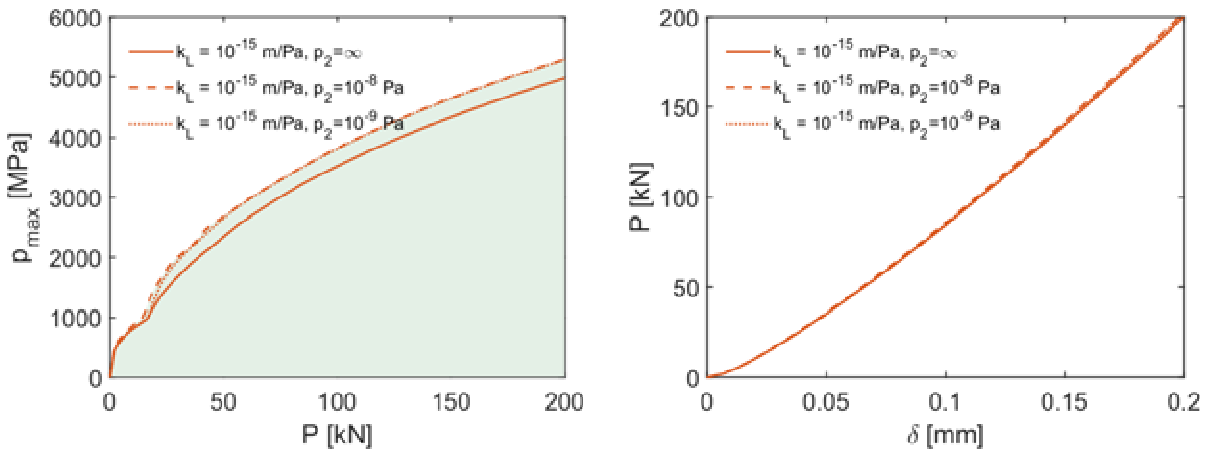
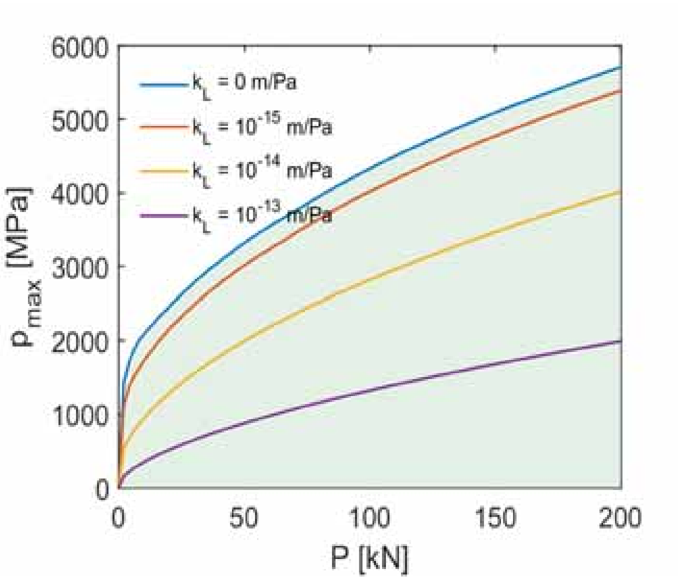
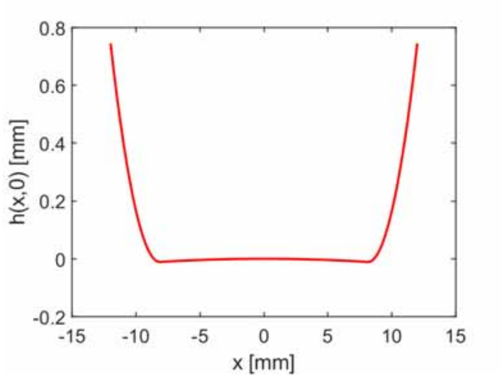


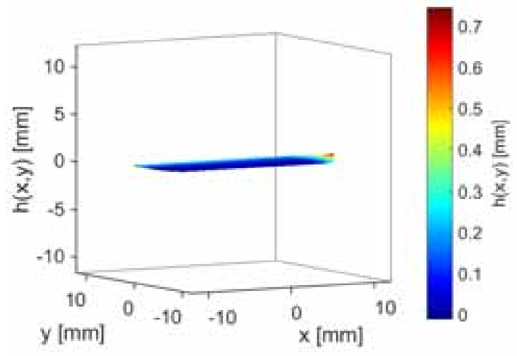
Рисунок 6.61 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (a) від величини притискного зусилля P (кН), а також P (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_α (для варіанту λ_2, $\gamma = b$)

Рисунок 6.62 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) від величини притискного зусилля P (кН) для лінійно пружного проміжного шару ($\alpha = III$) із різними коефіцієнтами податливості (варіант розподілу зазору $\gamma = c$)



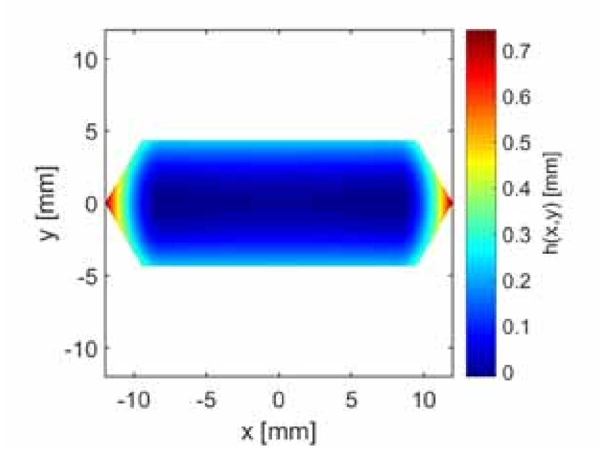


а



б

Рисунок 6.63 – Розподіл зазору між кульковим поршнем та біговою доріжкою статорного кільця гідропередачі ГОП-900 (варіант розподілу зазору $\gamma = c$): *а* – уздовж осі *x*, *б* – ізометрія, *в* – у площині *x*, *y*



в

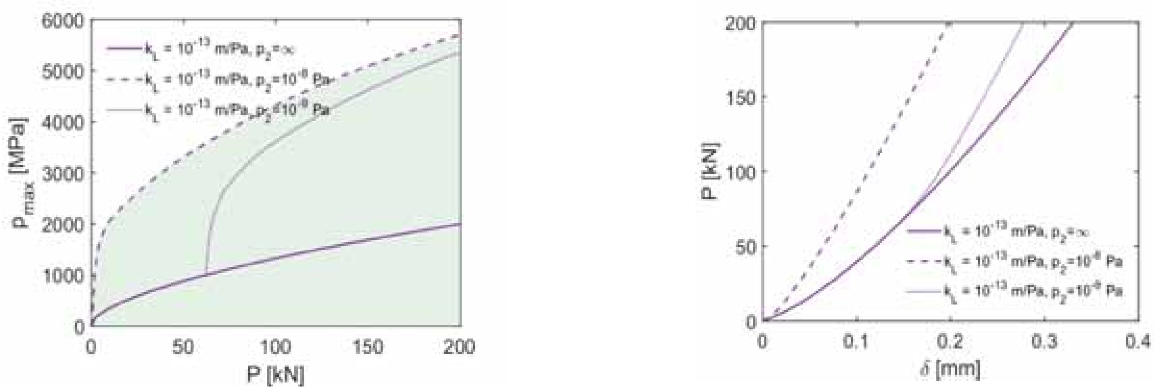


Рисунок 6.64 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (*а*) від величини притискного зусилля *P* (кН), а також *P* (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_α (для варіанту λ_4 , $\gamma = c$)

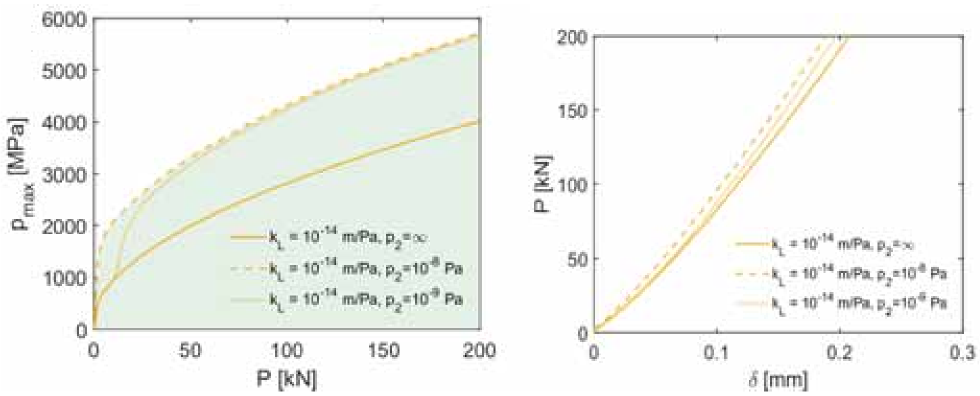


Рисунок 6.65 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (*а*) від величини притискного зусилля *P* (кН), а також *P* (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_α (для варіанту λ_3 , $\gamma = c$)

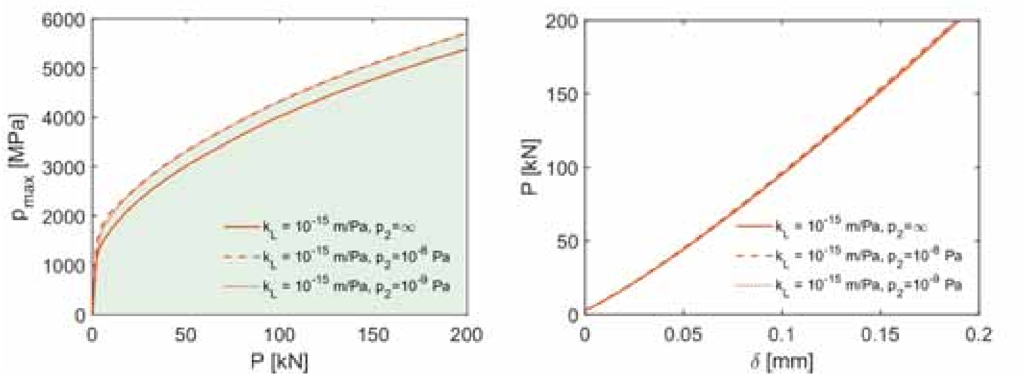


Рисунок 6.66 – Залежності максимального контактного тиску $p_{\max}$ (МПа) (*а*) від величини притискного зусилля *P* (кН), а також *P* (кН) від величини зближення тіл δ (мм) для різних варіантів p_α (для варіанту λ_2, $\gamma = c$)

При цьому характер розподілу $p(x, y)$ сильно залежать від рівня p_α, де $\alpha = I, II, III$. Проте спільними для різних p_α є те, що у центральної частині області контакту досягається локальний мінімум, а два максимуми досягаються на периферії на осі *x* поблизу зони переходу профіля із дуги R_t на дугу R_c (див. рис. 6.50), тобто при кутовому розхилі дуги, що приблизно дорівнює θ.

Розрахунок для більшої сукупності варіантів α, β, γ із застосуванням розроблених моделей, створеного методу та реалізованого засобу досліджень дає можливість одержати більше інформації щодо поведінки розподілів $p_{\max}$ (P, α, β, γ), а, відповідно, більш докладний масив інформації для обґрунтування технічних рішень за критерієм зниження контактного тиску, рівня напружень чи інтенсивності зношування кулькового поршня та статорного кільця радіальної гідрооб'ємної передачі ГОП-900.

Загальним висновком із здійснених досліджень є твердження про необхідність урахування властивостей проміжного шару, у т.ч. – фізичної нелінійності, при дослідженні НДС контактуючих СПТ та проектно-технологічному забезпеченні необхідних ТТХ.

6.6 Дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань

Універсально-збірні пристосування (УЗП) мають у своєму комплекті набір базових (плит) та базуючих (наприклад, призми) елементів. Збирання УЗП – це верстатне пристосування, що оперативно збирається для закріплення та базування у процесі обробки на верстаті тієї чи іншої деталі. Після виготовлення партії деталей воно розбирається, а його елементи можуть бути використані повторно.

Враховуючи, що базові та базуючі елементі збирань УЗП є достатньо жорсткими та міцними, а при цьому у них є багато контактних зон, то, природно, виникає проблема визначення вкладу контактних спряжень у забезпечення їх жорсткості, точності та працездатності. Аналіз поведінки елементів збирань УЗП і складає мету та зміст досліджень, описаних у підрозділі нижче.

Як приклад збирань УЗП розглядалися варіанти І і ІІ конструкції із призматичною та циліндричною шпонками (рис. 6.67, 6.68). При цьому болти призми затягуються крутним моментом M, а між призмами (див. рис. 6.67) діє розпірна сила Q. Ставиться задача визначити розподіл контактних зусиль у спряженнях «призма – базова плита» та вплив контактної жорсткості на неї, а також на зміщення та деформування елементів збирання. Момент M варіювався в інтервалі 0÷150 Н·м, сила – Q 0÷4 кН.

Для визначення властивостей просторових конструкцій із комплекту УЗП було промодельовано найпростіше збирання, яка зображена на рис. 6.69. Між призмами та плитами УЗП задана контактна взаємодія (рис. 6.70), яка промодельована в МСЕ контактною парою (див. рис. 6.70, *а*). Крім того, у скінченно-елементній моделі присутній болт, який попередньо затягується зусиллям 2 кН. Між плитою УЗП та стійкою встановлюється прокладка товщиною 1 мм, у якій варіюється модуль пружності: E, E/10, E/100, E/1000 від номіналу $E = 2{\cdot}10^{11}$ Па. На призму діє горизонтальна сила $F = 4$ кН. На підошві плити задане закріплення. В силу симетрії розглядається 1/2 частина системи.

На рис. 6.71–6.75 наведені картини розподілу контактного тиску при варіюванні модуля пружності проміжного шару та діючої сили, а також розподіли повних переміщень та інтенсивності напружень за Мізесом. Видно, що ключову роль у дослідженій системі відіграє співвідношення сил попереднього затягування болта та горизонтальної зрушувальної сили.

Якщо зовнішня сила порівняно мала, то розкриття стику у болтовому з’єднанні не відбувається. Із зростанням цієї сили зростає нерівномірність розподілу контактного тиску, його максимум зміщується до дальнього ребра призми. За деякого рівня цієї

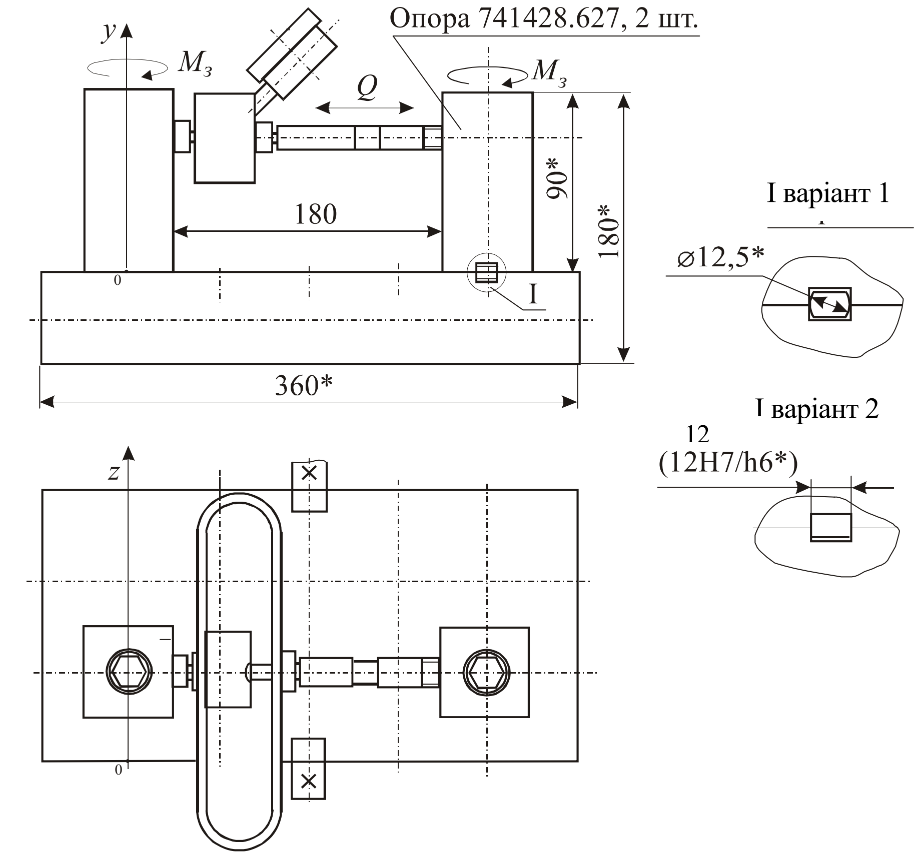


Рисунок 6.67 – Компоновка УЗП (варіант I)

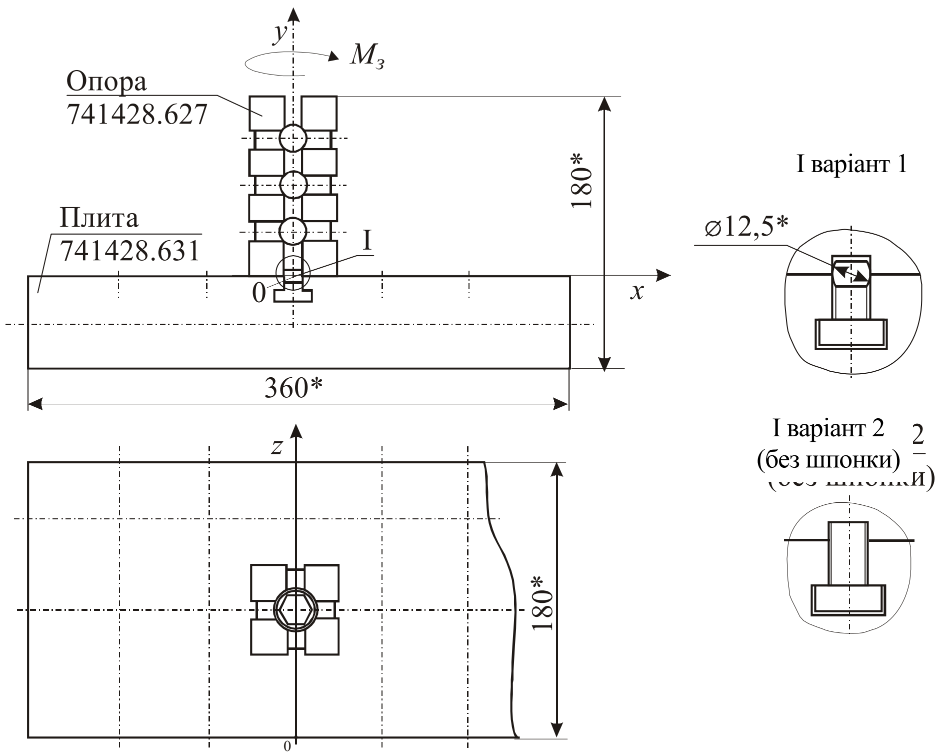


Рисунок 6.68 – Компоновка УЗП (варіант II)

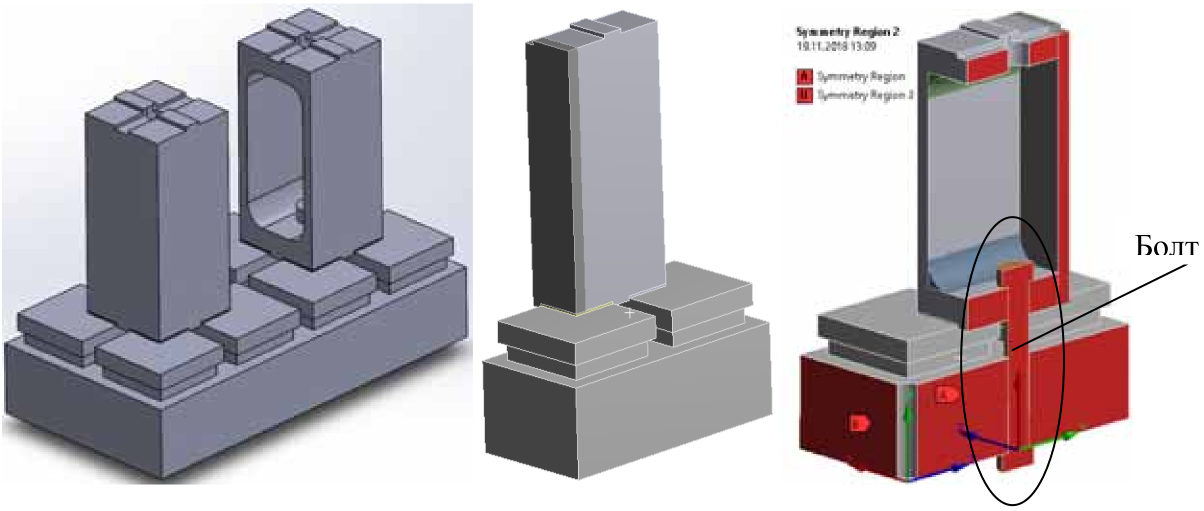


Рисунок 6.69 – Геометрична модель компонентів УЗП

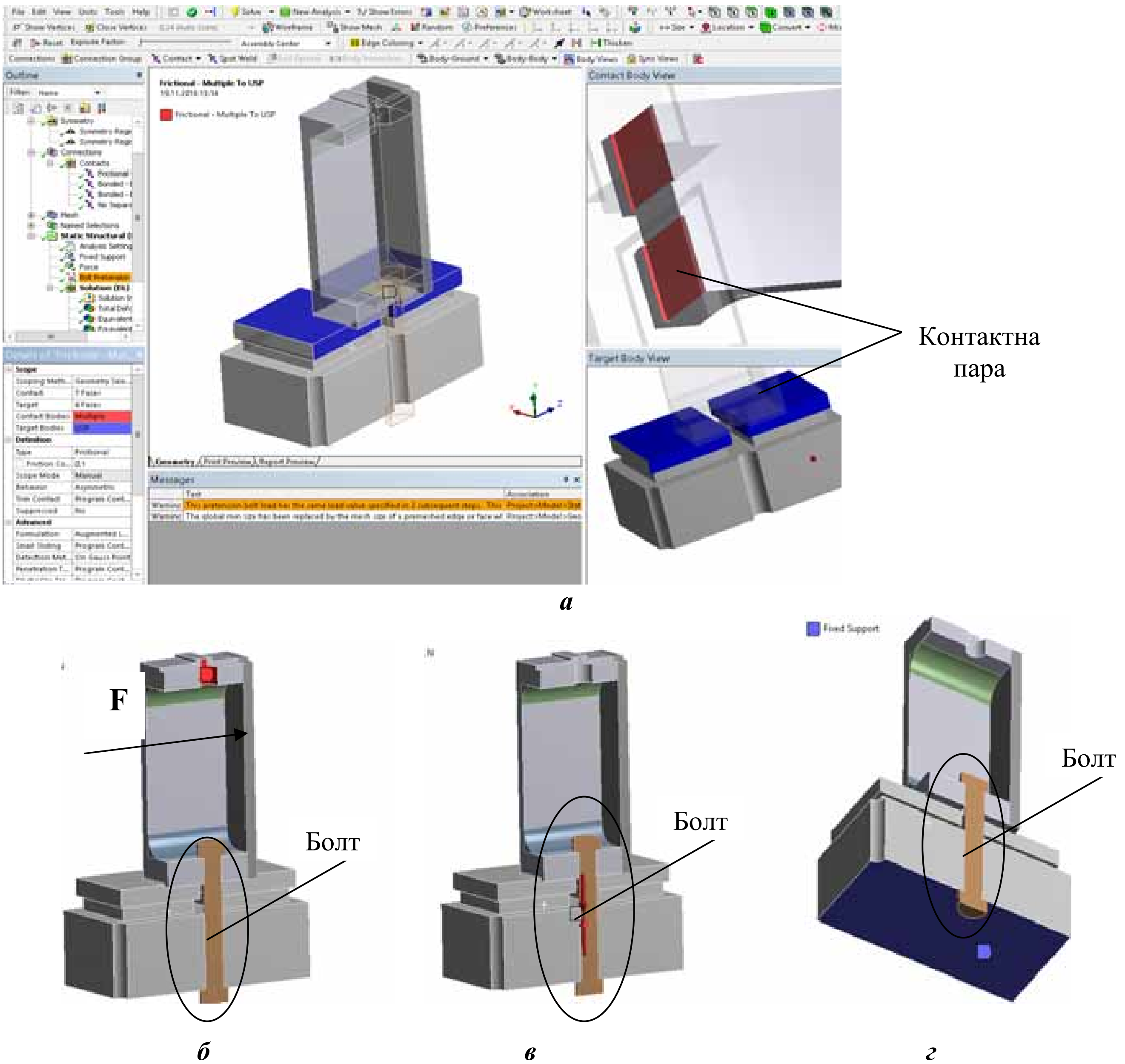


Рисунок 6.70 – Моделювання контактної взаємодії (*а*), навантаження (*б*), дії болтового з’єднання (*в*) та закріплення елементів УЗП у збірку (*г*)

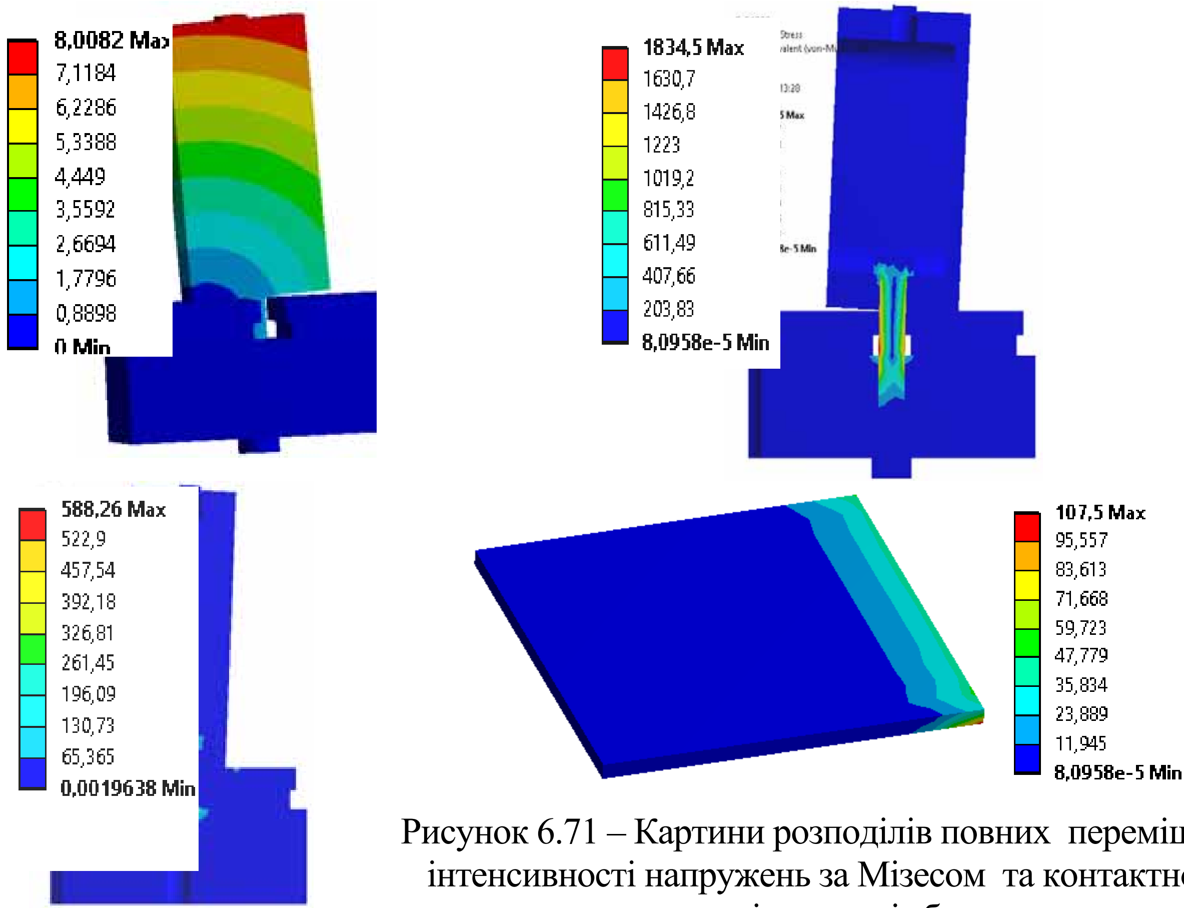


Рисунок 6.71 – Картини розподілів повних переміщень, інтенсивності напружень за Мізесом та контактного тиску у спряженні призми із базовою плитою

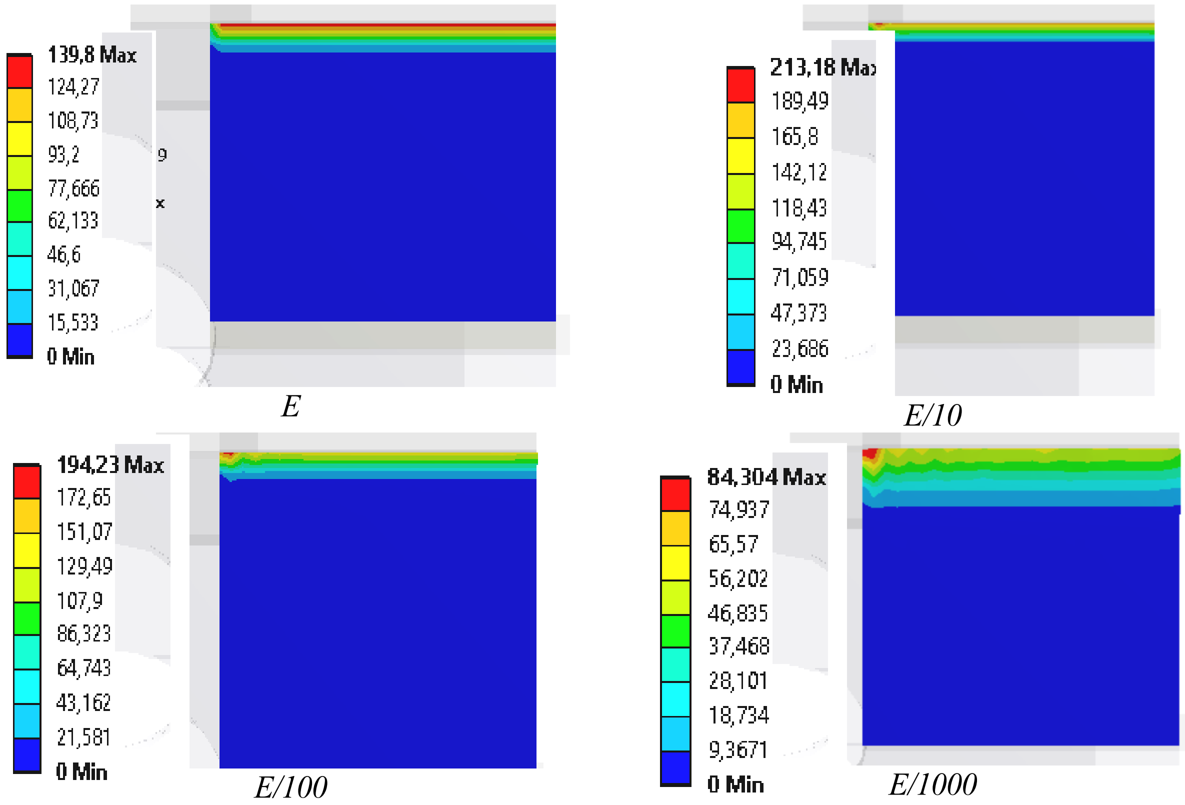


Рисунок 6.72 – Картини розподілу контактного тиску за варіювання модуля пружності від базового значення E до $10^{-3}E$ ($F = 4$ кН)

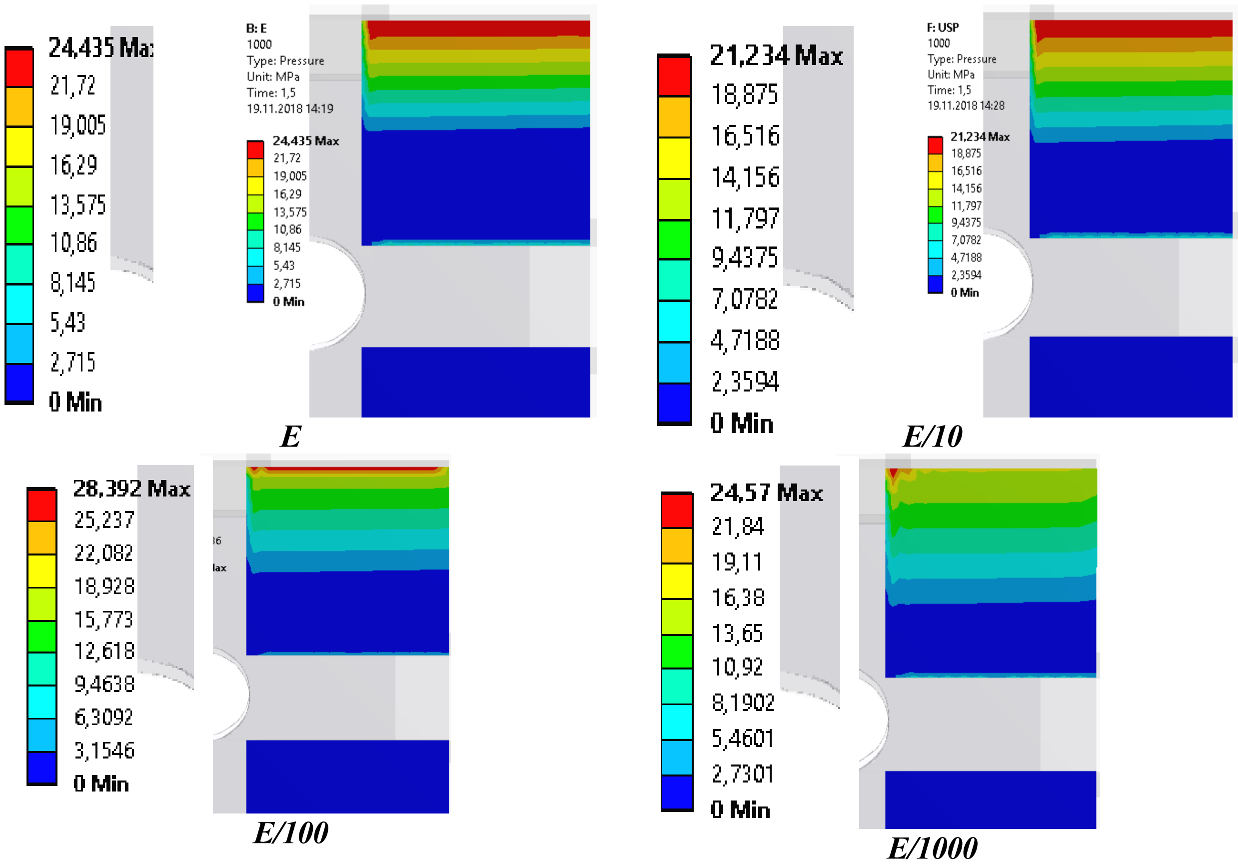


Рисунок 6.73 – Картини розподілу контактного тиску за варіювання модуля пружності від базового значення E до $10^{-3}E$ при $F = 2$ кН

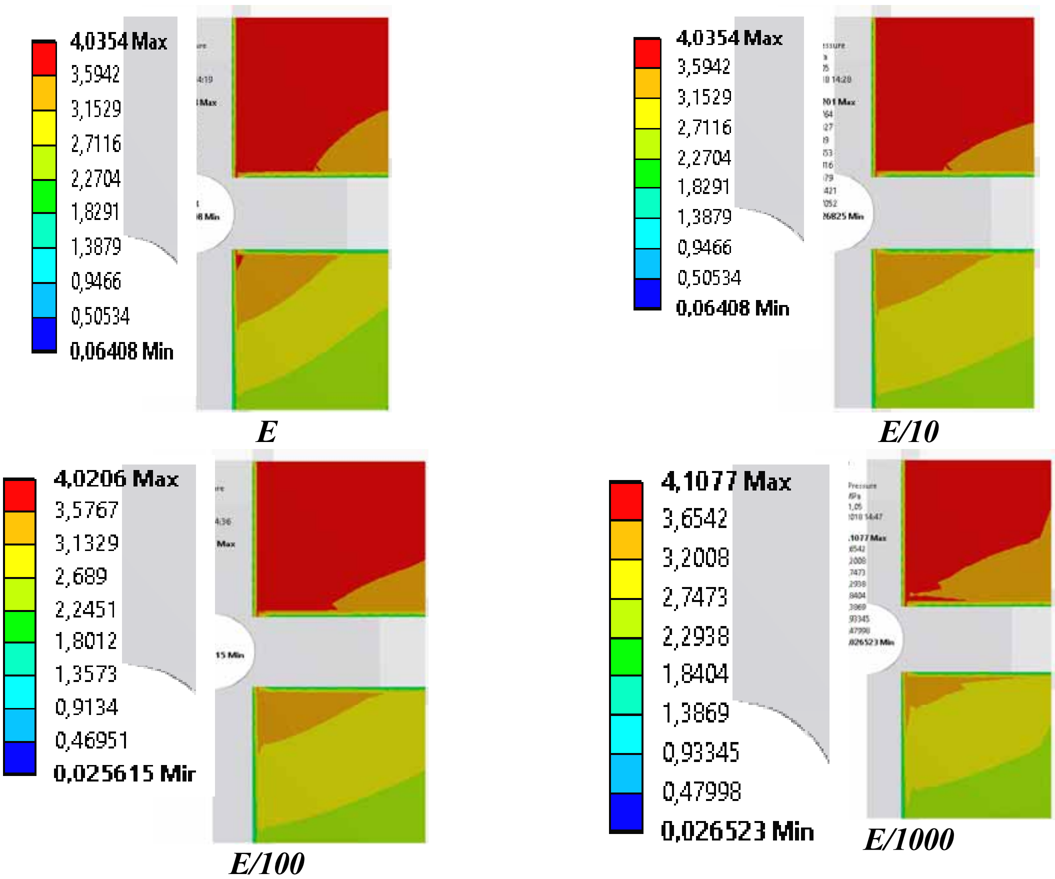


Рисунок 6.74 – Картини розподілу контактного тиску за варіювання модуля пружності від базового значення E до 10^{-3}E ($F = 20$ Н)

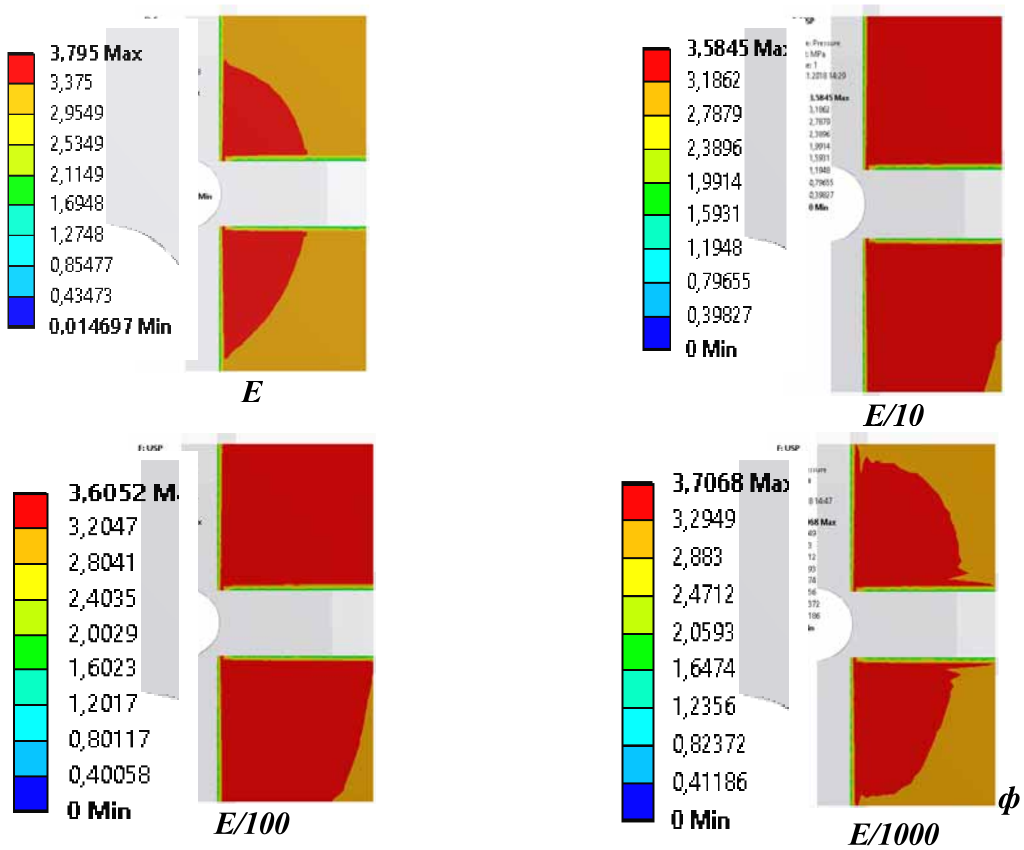


Рисунок 6.75 – Картини розподілу контактного тиску за варіювання модуля пружності від базового значення E до $10^{-3}E$ ($F = 0$ кН)

сили відбувається відрив призми від плити. При цьому контактний тиск на значній частині підошви призми відсутній. Також слід відзначити, що чим менший модуль пружності проміжного шару, тим більш рівномірно розподіляється контактний тиск.

Відмічені особливості зміни контактних областей та контактного тиску відображають природні функціональні призначення: збирання УЗП має забезпечувати базування деталей, які закріплюються та обробляються на металорізальних верстатах. Для надійного закріплення деталей, як видно із наведених результатів, необхідно прикладати таку силу затягування болтів, яка унеможливлює відрив призми від базової плити.

Розроблені моделі передані для впровадження у виробництво (див. Додаток Е). Отримані результати використані для порівняння із даними експериментальних досліджень (див. підрозд. 7.6).

6.7 Контактна взаємодія тіл із близькими за формою поверхнями

У конструкціях елементів машинобудівних конструкцій часто мають застосування пари деталей, контактуючі поверхні яких із функціональних критеріїв мають бути співпадаючими або близькими. Наприклад, для напівматриць прес-форм важливо, щоби при впорскуванні у формотвірну порожнину, яку ці напівматриці утворюють, не відбувалося розкриття стику між ними, яке призводить до утворення облою (тобто – до браку). Для поршнів двигунів внутрішнього згоряння (ДВЗ) важливо, щоби при контакті із циліндром контактні зусилля між ними розподілялися рівномірно. Такий самий критерій – і для контактної взаємодії елементів підшипників кочення та ковзання, зубчастих коліс, опор роторів турбомашин, корінних та шатунних опор колінчастих валів ДВЗ тощо. При цьому із міркувань виконання тих чи інших функцій виробники прагнуть домогтися співпадіння геометричної форми деталей уздовж твірної тіла кочення. Такі ж особливості – і в інших випадках.

Отже, отримуємо два крайніх випадки:

1) зазор між поверхнями є довільною функцією двох координат $z = z^{\sim}(x, y)$;

2) зазор між поверхнями є сумою функцій, одна із яких має домінантну складову, залежну від однієї із координат $z = z^*(x) + z^{\sim}(x, y)$, а інша – така ж за структурою, як і в 1). Тут $z^{\sim}(x, y)$ – заданий або випадковий розподіл зазору, причому у області актуального контакту максимум $z^{\sim}(x, y)$ співмірний із рівнем пружних переміщень та зміщень (зближень) контактуючих тіл. Функція $z^*(x)$ визначає характер зміни профілю зазору між тілами у перерізах $y = const$. Наприклад, для ролика підшипників кочення $z^*(x) = (1/2R)x^2$, де R – зведений радіус кривизни, а x – координата у напрямку, перпендикулярному його твірній. Для цього випадку функцію $z^{\sim}(x, y)$ можна подати у вигляді суми номінальної $z^N(x, y)$ та випадкової $z^S(x, y)$ складових. Перший доданок описує детерміновану (бажану, ту, яку прагнуть досягти) складову, яка задається конструкторською документацією за відсутності відхилень, другий – як правило, випадкове відхилення, зумовлене технологічними чинниками, проте обмежене допусками на відхилення форми та розмірів, які регламентуються технічною документацією на вибір.

Оскільки на НДС пари «ролик – опорна поверхня» чинить вплив кожна із складових $z^*(x)$, $z^N(x, y)$ та $z^S(x, y)$, то розв’язання оберненої задачі, тобто обґрунтування геометричної форми, яка би забезпечувала міцність, довговічність чи зношуваність, потребує розв'язання значного обсягу задач аналізу. Цей обсяг визначається як процедурами оптимізаційного алгоритму, що застосовується для «детермінованого» випадку, так і наявністю стохастичної складової, внесок якої важко прослідкувати та підпорядкувати певним закономірностям. Ще одним із важливих чинників є шорсткість поверхонь взаємодіючих тіл. Її, на відміну від інших компонент стохастичної складової $z^{\sim}(x, y)$, можна (з урахуванням набагато меншої бази коливань профілю та інших особливостей) моделювати фізично нелінійним пружним шаром із податливістю λ (див. розд. 2, 4).

Таким чином, серед варійованих чинників геометричного характеру виокремлюються: домінантна детермінована компонента $z^*(x)$ (для випадку «одновимірного» співпадіння – функція однієї координати, для «двовимірного» – тотожний нуль), детермінована компонента бажаного відхилення від номінальної форми $z^N(x, y)$ (описує, зокрема, модифікацію контактуючих поверхонь), стохастична компонента $z^S(x, y)$, а також макровідхилення $z^M(x, y)$ (може породжуватися, наприклад, залишковими напруженнями від термообробки, складання, монтажних зусиль тощо). При цьому значущими є також фізико-механічні властивості проміжного пружного шару (залежність «прогин – контактний тиск»), кінематичний чинник (зближення тіл δ) або силовий – притискне зусилля P. Усі вони чинять сукупний вплив на розподіл та величини контактного тиску. Відповідно, для практичних потреб потрібно мати у розпорядженні такий засіб досліджень, який би давав можливість визначати і частинні, і загальні залежності параметрів розподілу контактного тиску та напружено-деформованого стану від варійованих чинників.

Для розв'язання цієї задачі застосовані засоби, запропоновані у роботі (див. розд. 4, 5), а також МСЕ. При цьому вони для кожного окремого класу задач можуть адаптуватися, зважаючи на особливості досліджуваних об'єктів.

Розглянемо нижче два характерних види об'єктів.

1. *Контакт напівматриць прес-форми.* Як уже зазначалося, напівматриці прес-форми піддаються дії зусиль змикання та тиску робочої рідини, яка заповнює внутрішню порожнину, утворювану цими напівматрицями. Дзеркало (тобто площина розмикання прес-форми) має бути суцільним, тобто без розривів контакту поверхонь

двох напівматриць у актуальної конфігурації, причому за зростання тиску робочої рідини (розплавленого матеріалу деталі, що виготовляється) від нуля до максимуму. Для конкретизації впливу різних чинників на працездатність прес-форми було здійснене експрес-дослідження її НДС (рис. 6.76). Зусилля змикання – $P = 1$ МН, внутрішній тиск – від 0 МПа до 10 МПа. Варіювалася форма зазору за рахунок макровідхилення поверхні однієї із напівматриць від номінально плоскої. На рис. 6.77 наведена схема макровідхилення форми дзеркала прес-форми від номінально плоскої. У розрахунках покладалося: $2l = 240$ мм, $R = 8$ м. При цьому стріла відступу/впадини $h = \pm 1$ мм. На рис. 6.78 наведені скінченно-елемента модель (див. рис. 6.78, *а*) та крайові умови (див. рис. 6.78, *б*) для прес-форми. На рис. 6.79–6.81 наведені картини розподілу контактного тиску, інтенсивності напружень за Мізесом, повних переміщень та деформований стан напівматриць (1/4 системи у силу симетрії).

Видно, що розподіл контактного тиску сильно залежить від мікровідхилення h (тобто – радіуса R). Для випадку Γ_I («западина») максимум контактного тиску 500 МПа, для Γ_{II} («виступ») – 105 МПа проти 61 МПа для «номіналу». При цьому є небезпека розкриття зазору між напівматрицями прес-форми. Тиск у випадку Γ_I, Γ_{II} на області контакту суттєво коливається: на внутрішній частині зони контакту можливо місцеве розкриття зазору між напівматрицями.

Таким чином, визначено, що макровідхилення від плоскої форми початкового зазору чинить суттєвий вплив на розподіл контактного тиску та розкриття зазору в актуальному стані. Отже, на етапі розробки та виготовлення ПФ потрібно враховувати реальний характер деформування напівматриць у зоні їх спряження у актуальному стані, тобто – під навантаженням.

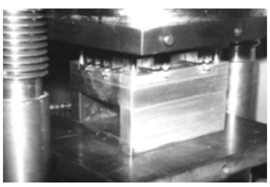


Рисунок 6.76 – Дослідна прес-форма

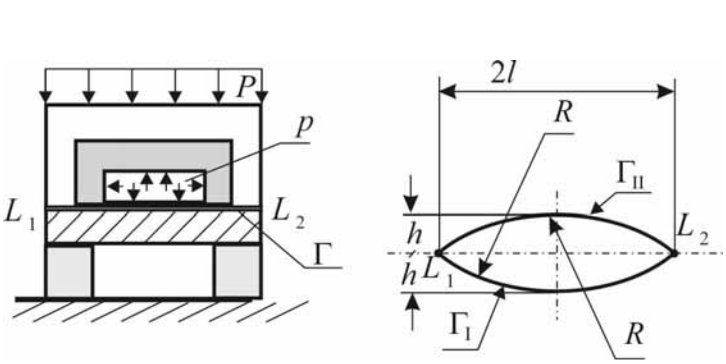


Рисунок 6.77 – Схема макровідхилення форми дзеркала прес-форми від номінально плоскої

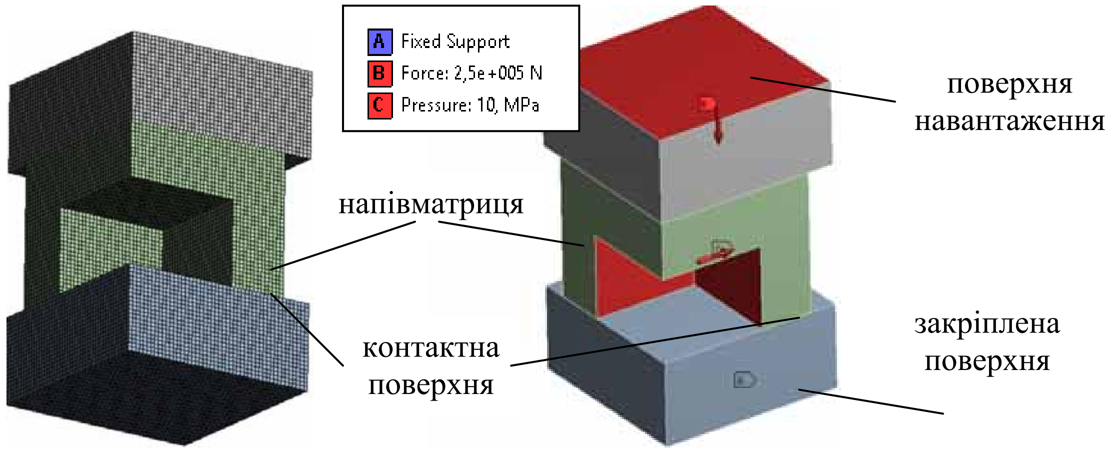


Рисунок 6.78 – Скінченно-елемента модель (*а*) та крайові умови (б) прес-форми

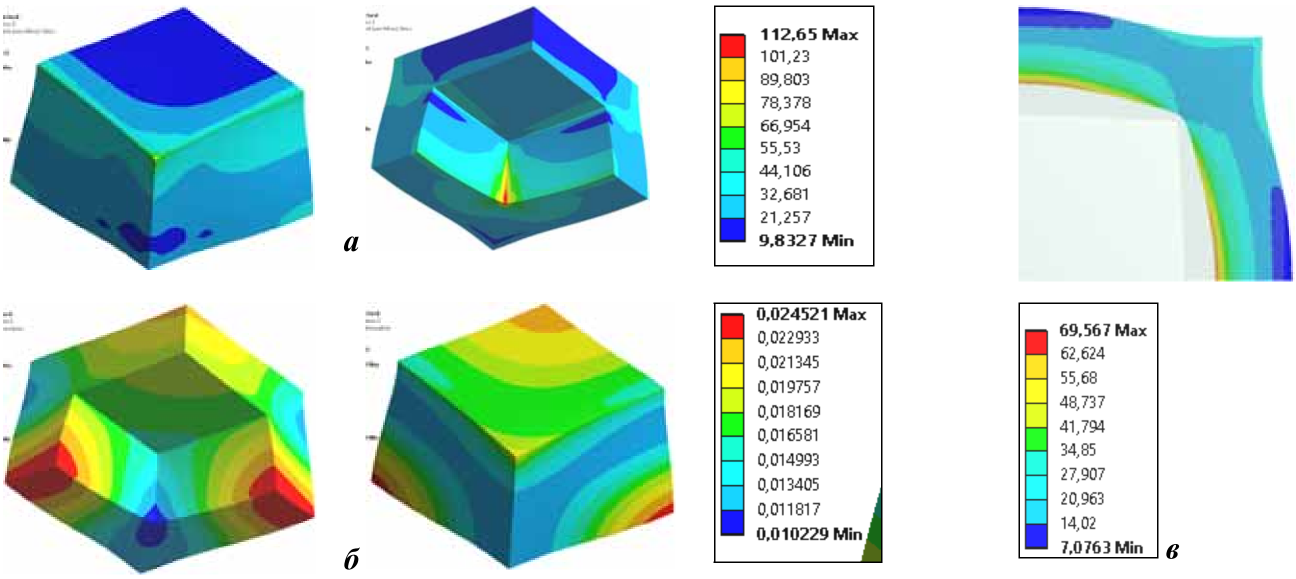


Рисунок 6.79 – Картина напружено-деформованого стану напівматриці прес-форми («номінал», плоска основа напівматриці, $R=\infty$): *а* – інтенсивність напружень за Мізесом, МПа; *б* – повні переміщення, мм; *в* – контактний тиск, МПа

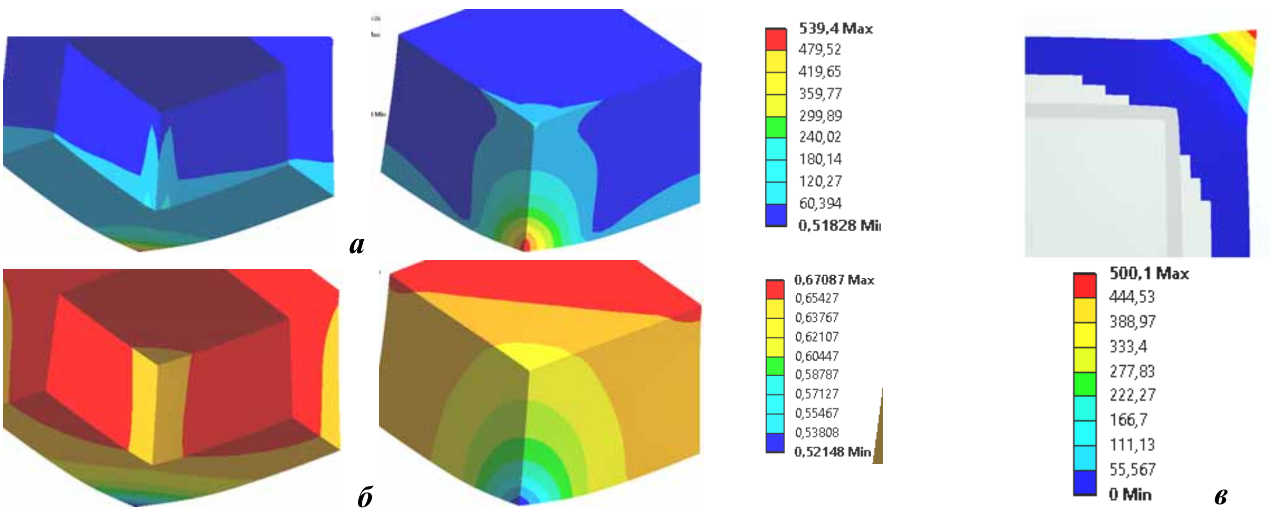
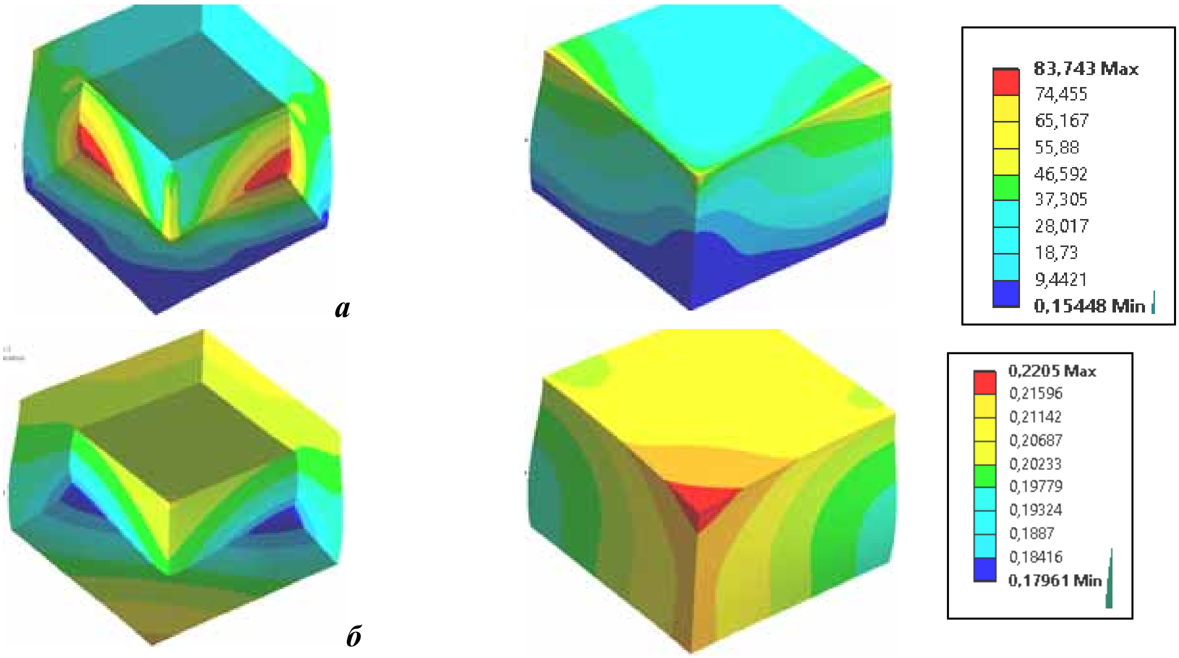


Рисунок 6.80 – Картина напружено-деформованого стану напівматриці досліджуваної прес-форми («западина», R = –8 м): а – інтенсивність напружень за Мізесом, МПа; б – повні переміщення, мм; в – контактний тиск, МПа



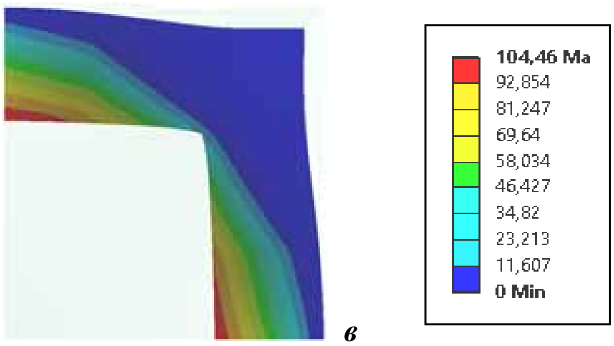


Рисунок 6.81 – Картина напружено-деформованого стану напівматриці досліджуваної прес-форми («западина», R = 8 м):
а – інтенсивність напружень за Мізесом, МПа; б – повні переміщення, мм; в – контактний тиск, МПа

2. *Контакт двох циліндричних роликів.* До контакту циліндричних роликів (рис. 6.82) велике значення має модифікація профілю Γ. Зокрема, при формуванні виступу (Γ_{II}) надається класична «бочка». Виступ/впадина h формується при $2l = 10$ мм, $r = 1$ мм радіусом R, який є варійованим. За рівня притискного зусилля P= 0,1 кН контактний тиск суттєво перерозподіляється: від номінального значення тиск q відрізняється на 10 %, причому максимум мігрує від периферії до центральної частини і навпаки (рис. 6.83 і табл. 6.6).

Крім того, на контактний тиск впливає проміжний пружний шар. На рис. 6.84 наведено геометричну та скінченно-елементну моделі, а також умови навантаження, які враховують наявність проміжного шару між роликами, кути схрещування осей котрих – 3°. У табл. 6.7 – розподіли контактного тиску за відсутності та за наявності проміжного шару. Видно, що із падінням жорсткості проміжного шару контактна зона різко зростає, а тиск – падає.

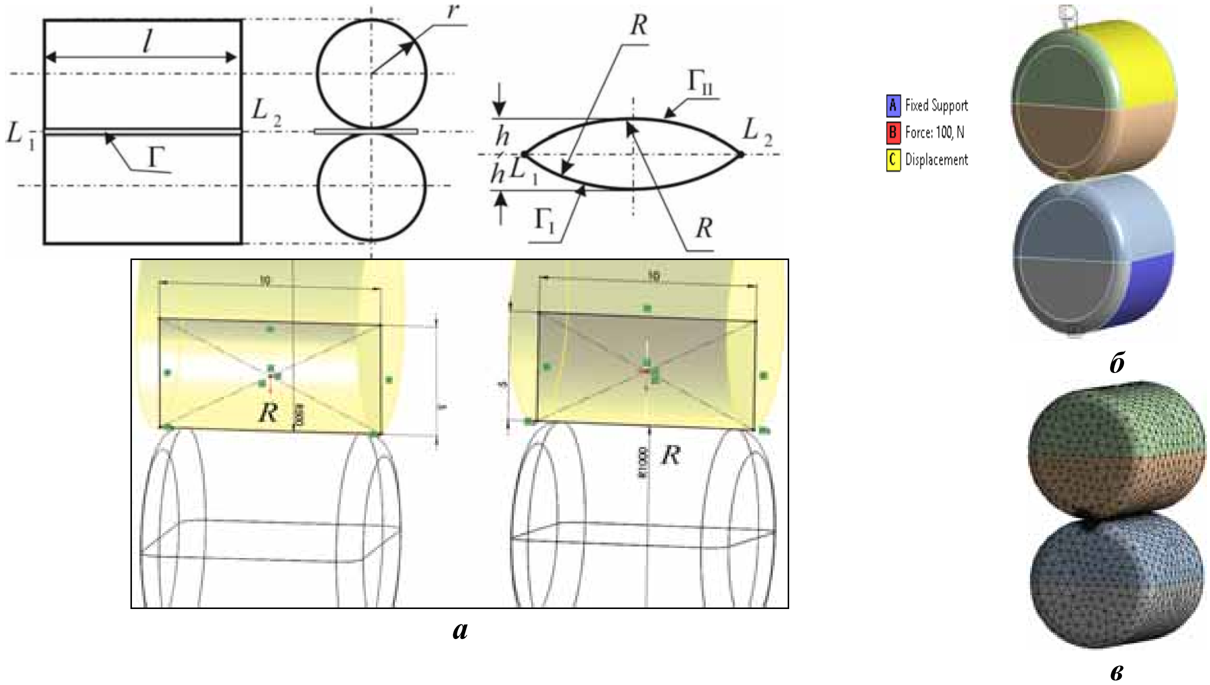


Рисунок 6.82 – Контакт сталевих циліндричних роликів: *а* – конструктивна схема; *б* – геометрична модель та граничні умови; *в* – скінченно-елементна модель

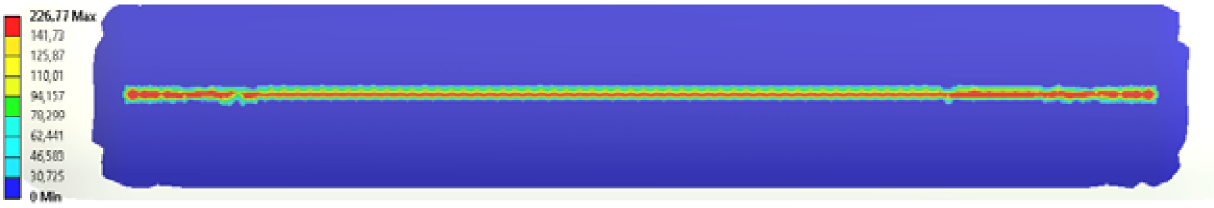
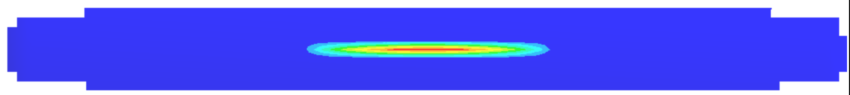
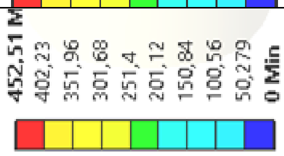
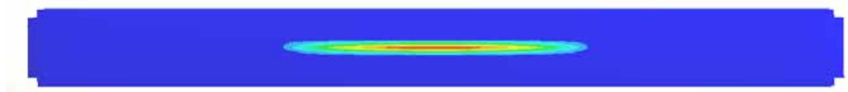
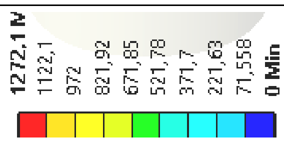
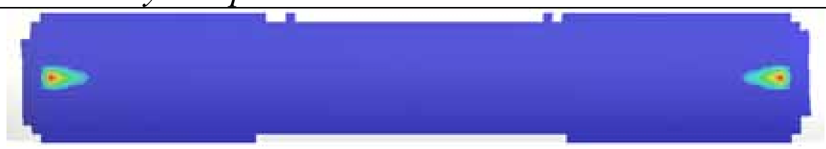
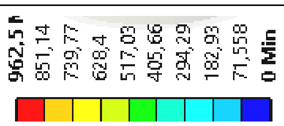
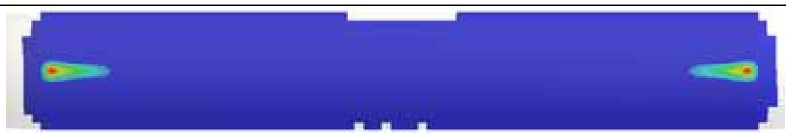
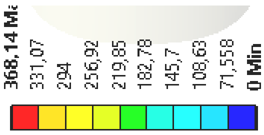
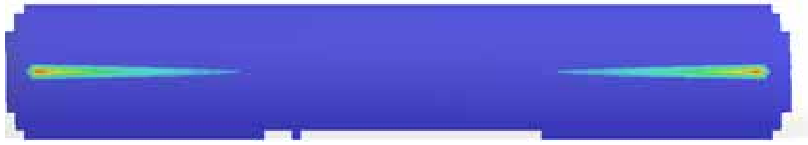
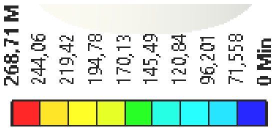
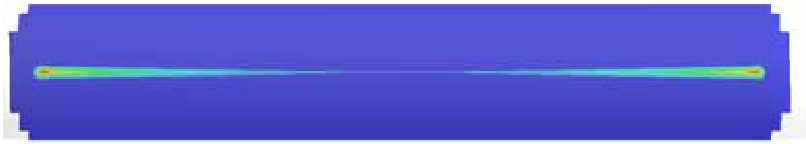


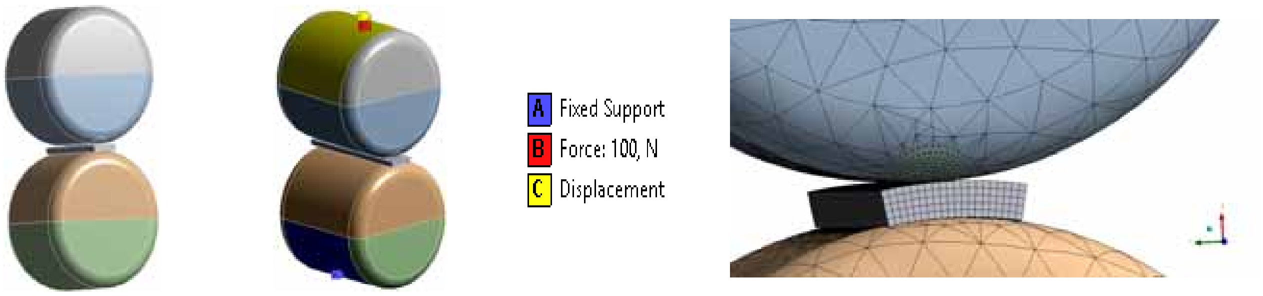
Рисунок 6.83 – Розподіл контактного тиску (МПа) для номінального (ідеального) профіля

Таблиця 6.6 – Зміна картин розподіл контактного тиску з варійованням параметра радіуса випуклості R, мм

R, м	Значення, МПа	Картина розподілу
		Опуклий ролик
0,5		
1,0		
		Увігнутий ролик
0,5		
1,0		

Закінчення табл. 6.6

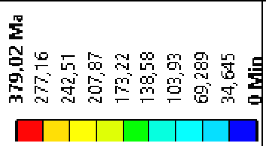
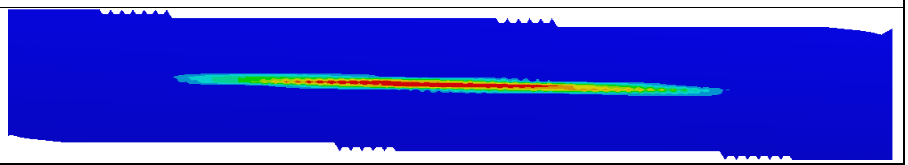
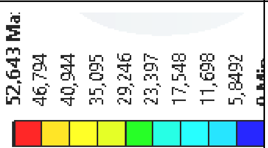
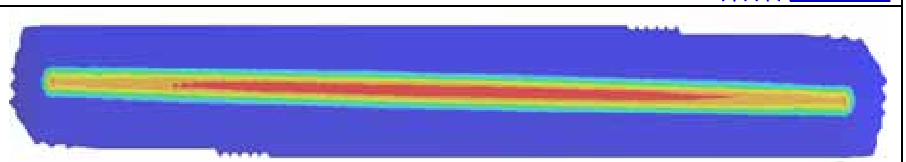
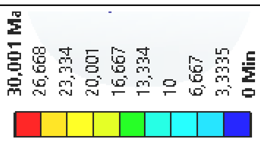
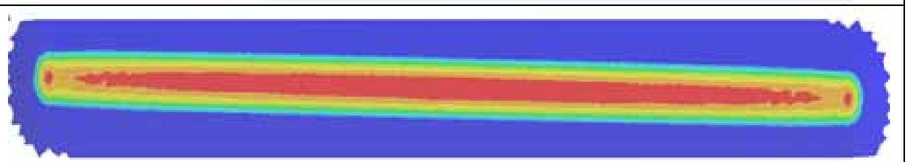
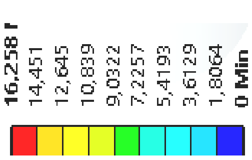
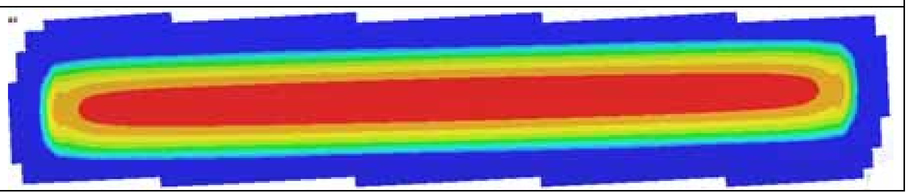
R, м	Значення, МПа	Картина розподілу
Увігнутий ролик		
8,0		
16,0		



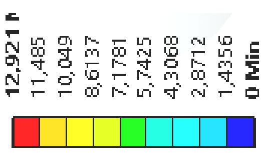
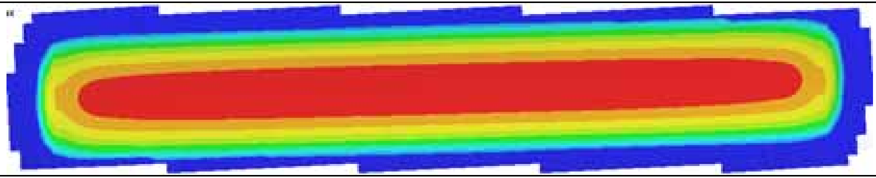
а *б* *в*

Рисунок 6.84 – Контакт сталевих циліндричних роликів з проміжним пружним шаром: *а* – геометрична модель; *б* –умови навантаження; *в* – СЕМ

Таблиця 6.7 – Розподіли контактного тиску (МПа) за варіювання модуля пружності матеріалу проміжного шару $E_{пр.ш}$ між роликами під дією притискного зусилля 0,1 кН (кути схрещування осей – 3°)

$E_{пр.ш}$, Па	Контактний тиск, кН	
	Значення, МПа	Картина розподілу
$2{\cdot}10^{11}$ *		
$2{\cdot}10^{9}$		
$5{\cdot}10^{8}$		
10^{8}		

Закінчення табл. 6.7

$E_{пр.ш}$, Па	Контактний тиск, МПа	
	Значення, МПа	Картина розподілу
$5 \cdot 10^{7}$		

Примітка: * – *без проміжного шару*

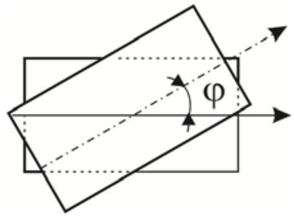
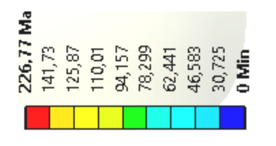
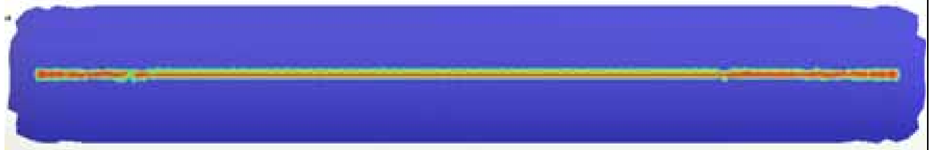
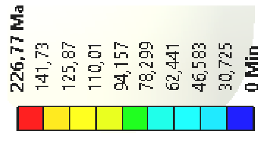
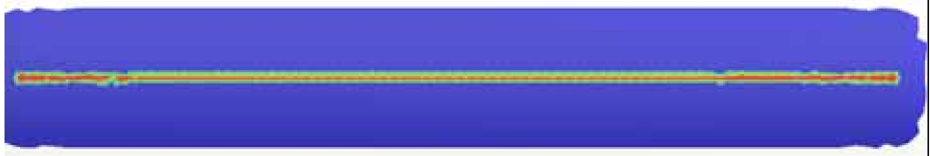
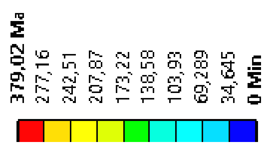
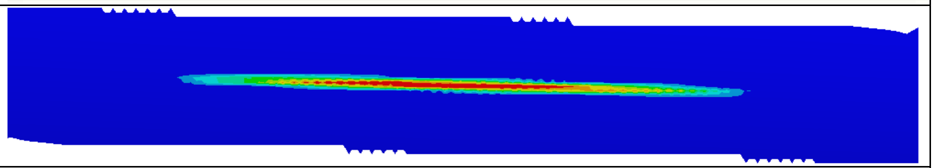
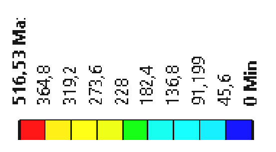
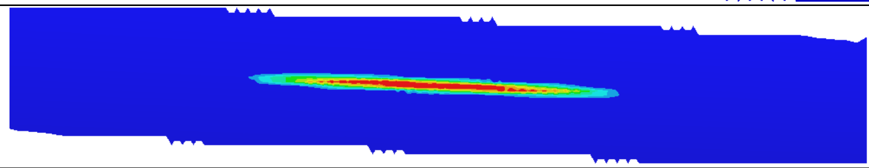
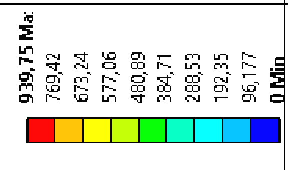
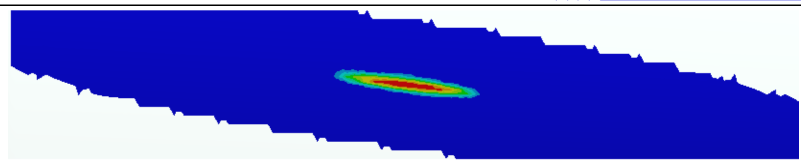
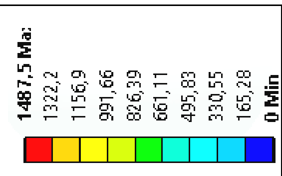
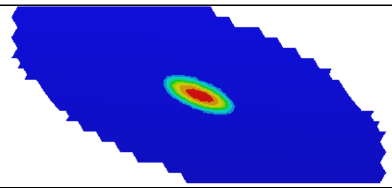
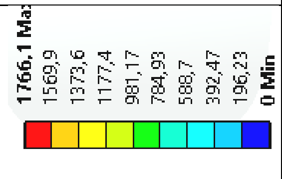
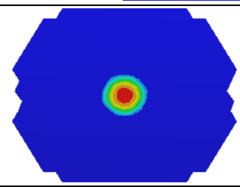


Рисунок 6.85 – Схема розташування роликів та кут схрещування φ між проекціями їхніх осей

Також на розподіл контактного тиску між роликами чинить вплив схрещування осей роликів. На рис. 6.85 наведено схему розташування роликів та кут схрещування φ між проекціями їхніх осей на площину, перпендикулярну площині, яка проходить через їхні осі, а у табл. 6.8 – розподіли контактного тиску для різних значень кута схрещування φ. Із наведених розподілів видно, що кут схрещування чинить суттєвий вплив на розподіл контактних областей та тиску: із його збільшенням область контакту зменшується, а рівень тиску – зростає. Зростання кута схрещування призводить до зміни форми контактної плями: із майже прямокутної та тонкої вона трансформується на обрізаний овал, потім – на овал, а врешті – на круг. Крім того, становить інтерес вплив проміжного шару на контактну взаємодію ролика із циліндричною виїмкою (рис. 6.86), виконаною у тілі значно більших розмірів (основа). На рис. 6.86, 6.87 наведено геометричну та скінченно-елементну моделі, а також умови навантаження, а у табл. 6.9 – картини розподілу контактних зон та контактного тиску гладких тіл за наявності проміжного шару. Видно, що податливий шар у рази збільшує зону контакту, з одного боку, та знижує рівень контактного тиску, – з іншого.

Таким чином, розроблені скінченно-елементні моделі дають можливість здійснювати дослідження впливу різноманітних чинників на НДС та контактну взаємодію елементів конструкцій зі співпадаючими (на поверхні та уздовж лінії) та майже співпадаючими (там же) поверхнями контактуючих тіл. Зокрема, було продемонстровано вплив модифікації форми зазору та властивостей проміжного пружного шару на характер розподілу та величини контактного тиску. При цьому досліджено випадки майже узгоджених поверхонь на частині поверхні та уздовж лінії.

Таблиця 6.8 – Розподіли контактного тиску (МПа) для різних значень кута схрещування φ (°)

φ, °	Контактний тиск, МПа	
	Значення, МПа	Картина розподілу
0		
1		
3		
5		
15		
45		
90		

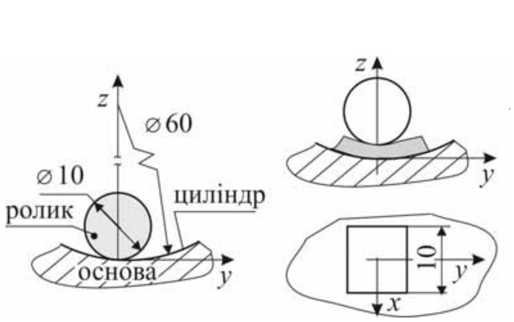
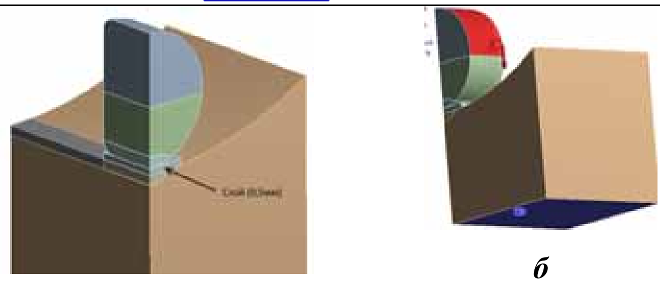
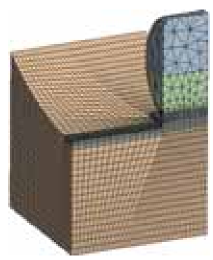


Рисунок 6.86 – Схема контактної взаємодії ролика з основою, у якій виконана виїмка циліндричної форми (без та за наявності проміжного шару)



а

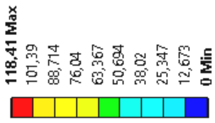
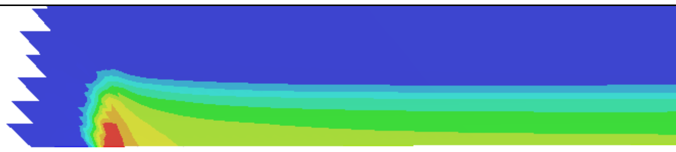
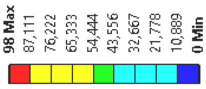
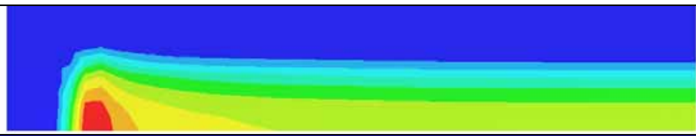
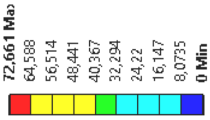
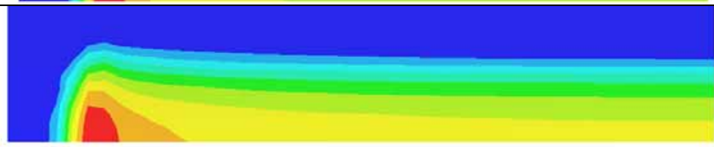
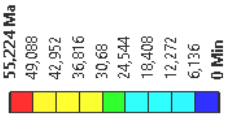
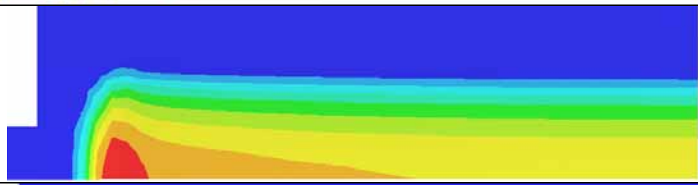
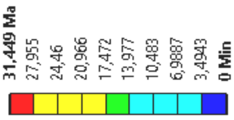
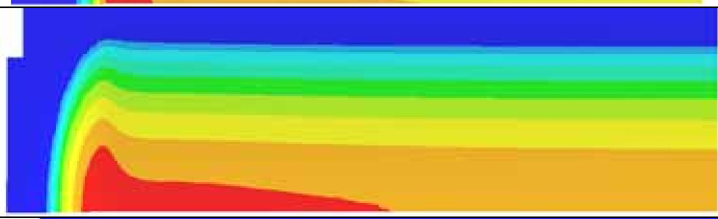
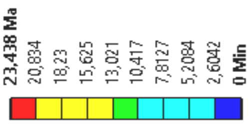
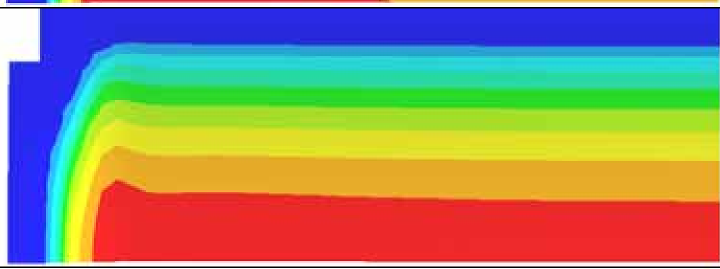
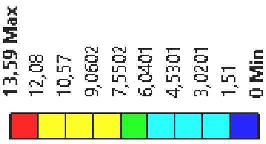
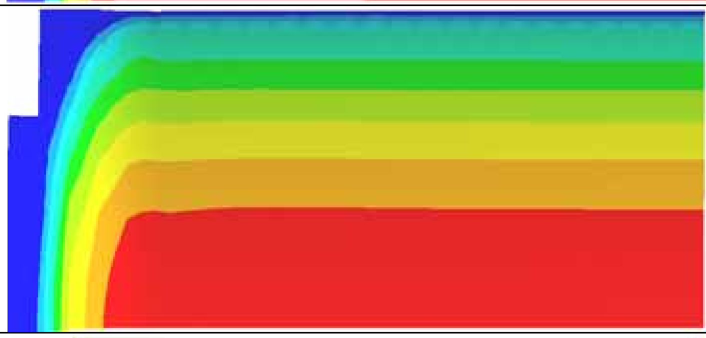
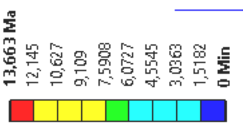
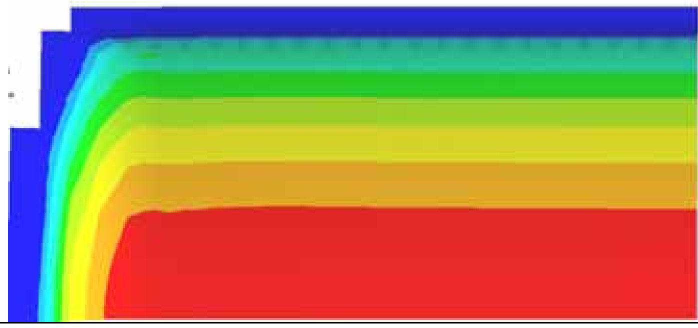
б



в

Рисунок 6.87 – Контакт сталевого циліндричного ролика із біговою доріжкою за наявності проміжного шару:
а – геометрична модель;
б – умови навантаження;
в – скінченно-елементна модель

Таблиця 6.9 – Розподіли контактного тиску за варіювання модуля пружності матеріалу проміжного шару $E_{пр.ш}$ між роликом та біговою доріжкою під дією притиського зусилля 0,1 кН

$E_{пр.ш}$, Па	Контактний тиск, МПа	
	Значення, МПа	Картина розподілу
$2 \cdot 10^{11}$		
$2 \cdot 10^{9}$		
10^{9}		
$5 \cdot 10^{8}$		
10^{8}		
$5 \cdot 10^{7}$		
10^{7}		
10^{6}		

Висновки за розділом 6

Розроблені у розд. 2–5 підходи, моделі, методи та засоби дали можливість, крім розв'язання низки тестових задач, перейти до прикладних досліджень. Зокрема, здійснено та описано аналіз деформування волоконних, нетканих та полімерних матеріалів, а також НДС кулькових поршнів гідрооб'ємних передач, зубчастих коліс та роликів, прес-форм та універсально-збірних верстатних пристосувань. Результати досліджень передані на підприємства, КБ, НДІ для упровадження на етапі проектних досліджень з метою обгрунтування технічних рішень при створенні нових машин, вузлів та конструкцій. Здійснені та описані дослідження деформування матеріалів, а також НДС та контактної взаємодії СПТ для низки прикладних задач є підґрунтям для наступних висновків.

1. При розв'язанні задачі гомогенізації властивостей матеріалів у вигляді просторових мережевих структур із одновимірних елементів виявлено, що запропоновані моделі осереднення при переході від мікро- до макромасштабу володіють більшою мірою адекватності стосовно поведінки реальних матеріалів, ніж традиційні. Таким чином, їх можна застосувати не тільки до аналізу властивостей існуючих матеріалів, але й до синтезу складу та структури нових матеріалів, що тільки розробляються, на основі тих чи інших вимог. Отже, розроблені нові моделі мікромеханіки підтвердили свою працездатність, ефективність та застосовність для розв'язання прикладних задач. Застосування осереднених мережевих моделей до гумоподібних матеріалів демонструє їхню здатність відтворювати нелінійну поведінку за скінченних деформацій. При цьому, завдяки мікромеханічній обгрунтованості кількість параметрів порівняно з феноменологічними моделями співставної точності є меншим, а саме їхнє походження є більш фізичним та пояснюваним. Моделі пружної поведінки, зокрема, точно передбачають зміцнення відгуку еластомерів за одновісного та двовісного розтягнення. Це має особливо велике значення для гнучких матеріалів, що здатні зазнавати деформацій понад 200-300%. Іншим явищем, якісно відтвореним розрахунковими моделями порівняно з експериментальними спостереженнями, є пружність біополімерних гелів, які піддаються зсуву. Обчислені значення дотичних та нормальних напружень виявляються співставними.

2. У ході моделювання в'язкопружних властивостей гуми установлені мікрома-

кроспіввідношення, які визначають їхні фізико-механічні властивості для набагато більш широкого діапазону деформування, ніж традиційні моделі. При дослідженні гелів виявлено, що модель деформування цих матеріалів, розроблена та описана у роботі, задовільно описує фізико-механічні процеси при їх навантаженні. Надзвичайно високою є також точність опису непружної поведінки, а саме в'язкопружної складової відгуку гумоподібних матеріалів. Так, для нітрилбутадієнової гуми за результатами циклічних експериментів одновісного розтягнення-стискання були ідентифіковані параметри, що дають найбільш точне наближення величини напружень та ширини петлі гістерезису за різних швидкостей деформації. Запропонована модель із встановленими параметрами продемонструвала здатність відтворити поведінку також за будь-яких інших навантажень, зокрема циклічного стискання, розтягнення-розвантаження із релаксаційними паузами тощо. При цьому зберігалася точність на ріні 10% за величиною напружень та 20% за шириною гістерезису. Навіть кращою виявилася точність відтворення експерименту неоднорідного зсуву гумової шайби: 5% за обома показниками.

3. Визначені особливості контактної взаємодії м'яких матеріалів із рифленою поверхнею з жорстким обмеженням із урахуванням адгезії. Установлено, що процес навантаження/розвантаження супроводжується поєднанням серії неперервних етапів, які перемежаються перескоками між різними гілками кривої деформування. При цьому навантаження і розвантаження відбувається за різними шляхами, оскільки переходи з гілки на гілку кривої деформування відбуваються при цьому на різних рівнях навантаження. Ця якісна особливість визначена із застосуванням розробленої нової чисельної моделі та відповідає результатам, отриманим іншими дослідниками.

4. Розв'язання задачі про НДС та контактну взаємодію кулькового поршня радіальної ГОП із профільованою біговою доріжкою дало підстави для визначення суттєвого впливу, з одного боку, форми цієї доріжки на розподіл контактного тиску, а, з іншого, – властивостей проміжного шару (у т.ч. – фізично нелінійного). При цьому установлено, що за певних умов раціональним є застосування профіля бігової доріжки, який не передбачає первинного контакту поршня із нею у центральній частині. Також підтверджений позитивний вплив податливості проміжного шару на величину максимального контактного тиску, причому як для фізично лінійного, так і фізично нелінійного матеріалу.

5. Установлено, що властивості проміжного пружного шару, а також їх неоднорідний розподіл на контактній області, здійснює значний вплив на розмір цієї площадки та на розподіл і величини контактного тиску. Так, із зростанням товщини, тобто із збільшенням податливості проміжного шару, контактна пляма розширюється, а тиск – знижується. Усі ці особливості та закономірності виявлені при розв'язанні задачі про контактну взаємодію кулькового поршня статорного кільця ГОП із біговою доріжкою для перспективної танкової трансмісії. Це також продемонстровано при дослідженні НДС УЗП, прес-форм та роликів. Отже, підтверджується можливість та ефективність такого прийому для управління напружено-деформованим станом СПТ.

Визначені особливості та закономірності разом із розробленими моделями та засобами передані на низку підприємств для впровадження у процес розробки та виробництва машинобудівних конструкцій (див. Додаток Е).

Точність отриманих результатів та достовірність здійснених на їхній основі рекомендацій оцінюються у ході співставлення із даними експериментальних досліджень (див. розд. 7).

Матеріали розділу описані у роботах [3–10, 12, 18, 20, 22, 30–32, 36, 38, 39, 43–49, 51, 53–63, 66, 67, 69, 88, 89, 93, 95, 99, 102, 104–108].

РОЗДІЛ 7
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ І ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ У ВИРОБНИЦТВО

7.1 Загальна постановка задач експериментальних досліджень

Наведений і описаний в розд. 2–6 комплекс чисельних досліджень стосовно реальних машинобудівних виробів вимагає обґрунтування адекватності створених математичних і докладності розроблених чисельних методів і моделей, точності отриманих із їх застосуванням результатів та достовірності побудованих на цій основі рекомендацій щодо обґрунтування проектних і технологічних параметрів. При цьому важливо виділити 2 аспекти: *методологічний*, тобто об'єктивне обґрунтування адекватності розроблених у роботі підходів, методів і моделей для аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контактної взаємодії, а також поведінки під навантаженням волоконних матеріалів; *практичний*, тобто створення нових виробів з підвищеними технічними та тактико-технічними характеристиками на основі технічних рішень, які отримані із залученням нових матеріалів, а також із урахуванням властивостей характеристик поверхневих шарів матеріалів і модифікації геометричної форми контактуючих поверхонь у зонах контактної взаємодії.

Для розв'язання цих задач, що виникають, необхідно спиратися на результати експериментальних досліджень. З огляду на масштаб і ресурсомісткість цих досліджень, були залучені як результати власних експериментів, так і даних, отриманих іншими дослідниками. Зокрема, у розділі описані результати розрахунково-експериментальних досліджень: поведінки волоконних матеріалів під навантаженням; контактної взаємодії м'яких матеріалів; поведінки гідрогелів; контактної взаємодії елементів радіальних гідропередач; НДС елементів прес-форм; деформування збірок універсально-збірних пристосувань; контактної взаємодії ролика підшипника з опорною поверхнею; контактної взаємодії тіл із нерівномірно розподіленими на поверхні властивостями податливості проміжного шару; контактна взаємодія СПТ при прикладанні додаткової системи сил, що змінює розподіл зазору в зоні їх контакту.

7.2 Результати експериментальних досліджень нетканих матеріалів

Матеріал, якому надають форму волокон, часто демонструє набагато кращі механічні властивості, ніж ті, що спостерігаються для суцільного тіла. Тонка (від кількох нанометрів до мікрометру) нитка демонструє, наприклад, значно вищу границю міцності на розрив порівняно зі стрижнем з того самого матеріалу. Це пояснюється, зокрема, меншою щільністю дефектів, а також особливою кристалічною структурою, якої набуває матеріал під час екструзії. Саме це мотивує використання таких надзвичайно міцних волокон для створення структурних і функціональних матеріалів із підвищеними фізико-механічними властивостями. Найбільш поширеним продуктом є різноманітні текстилі, серед яких останнім часом значну увагу посіли саме нетканi текстилі. На відміну від тканої мережі, ці матеріали відрізняються випадковою, невпорядкованою мікроструктурою, у якій волокна поєднані між собою декількома можливими способами. Експериментальні дослідження нетканих текстилів зосереджені саме на вивченні цієї мікробудови, визначенні механізмів пружної поведінки матеріалів та їхнього руйнування, вимірюванні механічних властивостей для різноманітних існуючих марок текстилів, а також дослідних зразків.

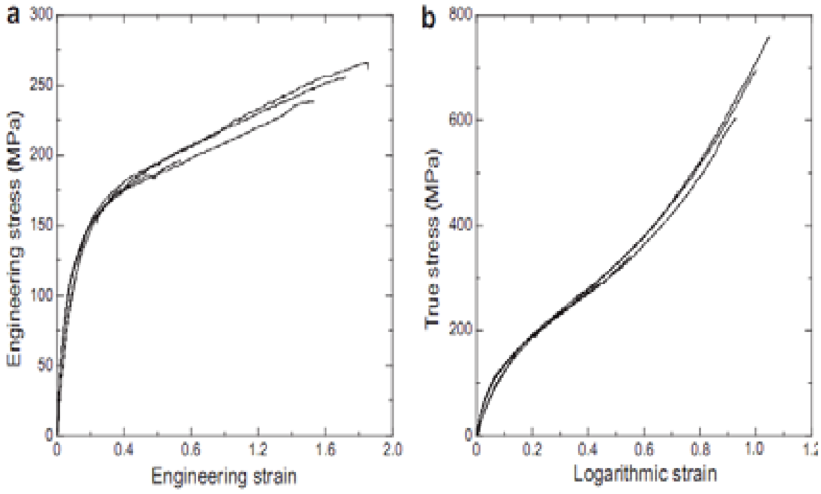
У роботі [127] було досконально досліджено доволі поширений комерційний геотекстиль Typar® SF32 виробництва DuPont™. Ці текстилі використовуються у будівництві дорожнього полотна, гідротехнічних споруд та дренажних систем, облаштувані та укріплені схилів і берегів тощо. Цей матеріал виготовляється з поліпропіленових волокон. Для підвищення ступеня кристалічності вони після екструзії зазнають додаткового розтягування. У результаті їхній діаметр досягає значень 40÷60 мкм. На виході неперервне волокно укладається випадковими витками у декілька шарів у площині полотна, утворюючи ізотропну мережу, яка остаточно скріпляється за рахунок одночасного застосування тиску та нагріву. У місцях перетину частково розплавлених волокон відбувається пайка, у результаті чого утворюється сполучення між окремими відрізками волокон.

Дослідники в першу чергу виміряли механічні властивості самих волокон, для чого вони були, уникаючи пошкодження, відокремлені від суцільного полотна. Зразки волокон були піддані осьовому розтягненню на вимірювальній станції за двох різних значень швидкості деформації 1.5×10^{-3} с$^{-1}$ та 5.0×10^{-2} с$^{-1}$, відповідно. Криві навантаження для першої серії випробувань наведені на рис. 7.1. Як видно, механічні властивості у вибірці збігаються надзвичайно щільно. Загалом матеріал демонструє гіперпружний відгук та здатність розтягуватись до 100÷200%. Руйнування має крихкий характер, пластичні деформації не спостерігаються. Відповідно ключовими властивостями матеріалу є пружний модуль, межа міцності та подовження при руйнуванні, усереднені значення яких представлені в табл. 7.1. Слід зауважити, що порівняно з поліпропіленом у інших формах волокна демонструють майже на порядок вищу несучу здатність, що загалом стосується й інших напівкристалічних полімерів. Саме це дає можливість виготовляти з них легкі та міцні текстилі.

Випробування власне натканих матеріалів було проведено на прямокутних зразках розміром 100×200 мм, вирізаних у напрямку вздовж та поперек рулону. Дві типові криві навантаження, отримані за швидкості деформацій 8.0×10^{-3} $с^{-1}$, наведені на рис. 7.2. Автори дослідження [127] зазначили, що початковому нахилу передує короткий відтинок зміцнення відгуку. Вочевидь, розпрямлення дещо викривлених початково волокон для набуття жорсткості мережі вимагає певного невеликого початкового розтягнення. У подальшому поведінка полотна є практично лінійно пружною. Максимальна несуча здатність досягається за номінальних деформацій порядку 30–40%. Втрата спротиву до розтягнення, відповідно до спостережень, може відбуватися за двома сценаріями. За одним із них після проходження піка напруження знижуються поступово. Інша поведінка характеризується однією або декількома раптовими подіями, за яких напруження зазнають стрибка вниз на скінченну величину. Уявлення про картину руйнування матеріалу для цього випадку можна скласти з наведених на рис. 7.3 зображень деформованого стану зразка у моменти випробування, що відповідають чотирьом точкам, відзначеним на другій кривій. Форма зразка по досягненні деформацій у 25% залишалась без значних відхилень від прямокутної, деформації в перерізі вздовж горизонтальної серединної лінії на відтинку лінійно пружного відгуку полотна відрізнялися помітною однорідністю. Натомість, уже за розтягнення у 15–20% спостерігалось формування зони локалізації деформацій поблизу центра випробуваного зразка. Його розташування продиктоване флуктуаціями щільності волоконної мережі, які є неминучими під час виробництва нетканих матеріалів. Волокна лягають випадковим чином, на відміну від тканого полотна ані відстань між ними, ані порядок не зберігаються. Ріст цієї зони розвинених деформацій призводить до втрати стійкості матеріалу за розтягнення в 47%.

Доповнюють картину поведінки нетканого полотна при розтягнені його випробування за циклічного навантаження, представлені на рис. 7.4. Характер виміряної кривої свідчить про пошкоджуваність матеріалу в результаті приросту деформацій. Кожен наступний цикл розтягнення демонструє менший нахил дотичної, тобто відбувається втрата пружної жорсткості матеріалу. Крім того, спостерігаються залишкові деформації, які так само накопичуються, як і пошкоджуваність. Комбінація незворотних деформацій, а також втрата міцності відрізняє розглянутий матеріал від інших. Пластичність металів або пластиків пов'язана зі зміною локального порядку в мікроструктурі. Гумоподібні матеріали, що демонструють ефект Мулліна, хоч і мають під час розвантаження слабший відгук з меншими напруженнями, тим не менш повертаються до початкової форми після повного зняття натягу. Отже природа поведінки нетканих матеріалів, подібних до Typar®, має зовсім відмінне від них походження та базується на принципово інших мікроскопічних механізмах. Пошкодження мережі відбувається шляхом руйнування з'єднань або розриву самих волокон. Цей висновок підтверджується спостереженнями зміни мікробудови наприкінці проведених циклів навантаження. Відповідно до [127] відрив окремих волокон від мікромережі відбувається вже за незначного номінального розтягу у 2,5%. Це відбивається на механічному відгуку матеріалу: із кожним повторним навантаженням зведений модуль E_k матеріалу є меншим за початкове E_0 та попереднє $E_{k\text{-}1}$ його значення. При цьому найбільшу інтенсивність, як видно на рис. 7.4, б, процес пошкодження має на початкових циклах.

По досягненні остаточного подовження близько 10% жорсткість досліджуваного зразка на розрив зменшується до 0.3 E_0, тобто пошкодження досить швидко досягає значення 0.7. Матеріал тим не менш зберігає несучу здатність, пік напружень долається лише за додаткових деформацій, у результаті яких накопичення в мережі пошкоджуваності переважує інші чинники, які впливають на міцність полотна, в першу чергу витягуванні волокон вздовж напряму розтягу. Втім, навіть при зменшенні пружності текстилю в 10 разів і набутті 50% остаточного подовження, зберігається здатність витримувати до 30% максимального навантаження.



а *б*

Рисунок 7.1 – Результати випробувань зразків виокремлених волокон, отримані в [127], за швидкості деформацій 1.5 × 10^{-3} $с^{-1}$:
а – інженерні напруження до номінальних деформацій; *б* – дійсні напруження до логарифмічних деформацій

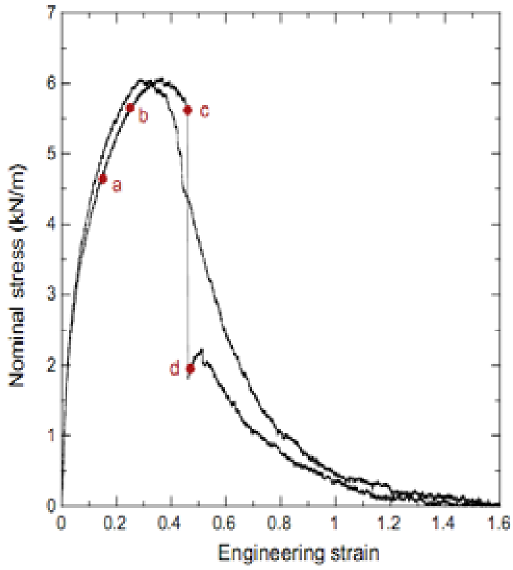


Рисунок 7.2 – Типові криві навантаження зразків із нетканих матеріалів [127]

Таблиця 7.1 – Механічні властивості поліпропіленових волокон, виміряні у роботі [127] тестом на розтягнення за різної швидкості деформацій

Швидкість деформації, $\times 10^{-3}$ $с^{-1}$	Кількість випробувань	E_f, ГПа	σ_f, МПа	ε_f
1,5	15	$1{,}7 \pm 0{,}1$	240 ± 10	$1{,}4 \pm 0{,}1$
5,0	8	$1{,}9 \pm 0{,}8$	280 ± 10	$1{,}24 \pm 0{,}02$

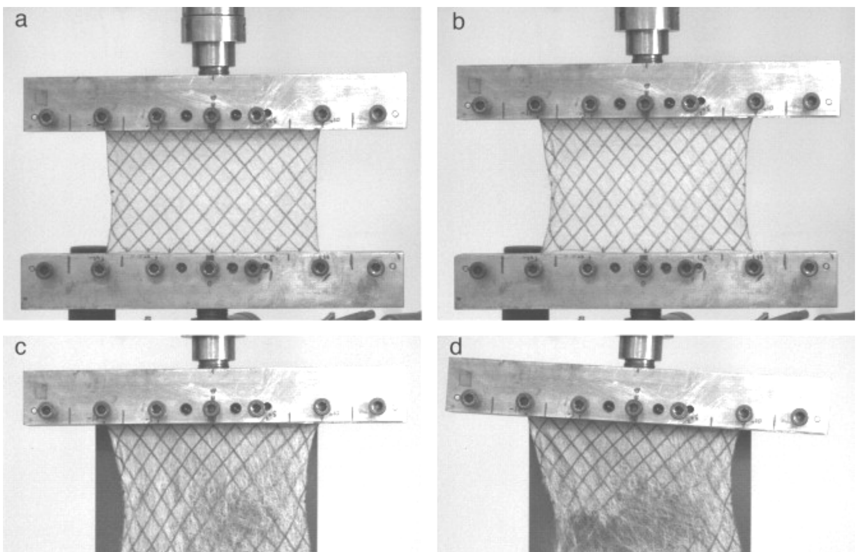


Рисунок 7.3 – Деформований стан зразка у моменти (див. рис. 7.2):
a – 15%, b – 25%, c – 46.5%, d – 47%

Звертає на себе увагу гістерезис під час кожного розвантаження-навантаження. В експериментальній роботі [127] він пояснюється вигином у результаті втрати стійкості волокон через скорочення полотна в напрямку поперек навантаження. Стверджується, що вони взаємодіятимуть за рахунок тертя з рештою деформованої мережі, в результаті чого вона поводиться непружно, не зазнаючи тим не менш ані додатково пошкоджуваності, ані істотних незворотних деформацій. Слід зазначити, що математична модель, запропонована в [465] на базі експериментальних досліджень, цього аспекту не враховує, і лише відтворює поведінку матеріалу під час простого монотонного навантаження.

Для термічно поєднаних нетканих матеріалів також характерна істотна залежність відгуку від швидкості деформації, як видно з рис. 7.5. За швидкоплинного навантаження матеріал витримує більші подовжні напруження, однак руйнується раптово за відносно невеликого подовження у 30–40%, тоді як за поступового повільного розтягування неткане полотно поводиться більш податливо й тягнеться до 70–80%, демонструючи максимальну несучу здатність у досить широкому діапазоні деформацій. При цьому енергія, яку за руйнування поглинає матеріал, виявляється вдвічі більшою за випадку різкого розриву. За повільного навантаження волокна мають час для перерозподілу зусиль у мережі та переорієнтації, у результаті чого мережа пошкоджується більш рівномірно на більшій частині площі зразка, а не локалізується у вузькій смузі. Таким чином, руйнування значно більшої кількості термічних поєднань витрачає більшу механічну роботу.

У роботі [466] було показано, що для обчислення квазістатичного відгуку мікромережі достатньо точною є проста модель когезії волокон у нормальному та дотичному напрямках. Ця модель реалізована в елементах з’єднань для стрижневих систем у стандартних скінченно-елементних пакетах на зразок ABAQUS. Процес відокремлення двох волокон у місці їхнього поєднання подається у вигляді реакції між вузлами, яка спочатку зростає із відстанню, а по досягненні межі міцності похило падає до нуля. Нахил співвідношення сила – переміщення за втрати міцності у з’єднанні в [466] уточнювався за допомогою процедури узгодження результатів моделювання та експерименту. Отримане єдине значення, що відповідає випадку повільного руйнування, що виключає явний вплив часу та швидкості процесу на відгук мережі. Серед наслідків такого мікромеханізму руйнування є незвична поведінка полотен, що мають нарізи на бокових кромках. Експериментальне дослідження [467] показало, що номінальна міцність таких зразків, тобто відношення максимального зусилля на розрив до ширини, що залишається у місті розрізу, зростає відносно суцільного полотна такого ж розміру. Переорієнтація волокон на вістрі тріщини, утворення та розповсюдження зони руйнування термічних з'єднань, а також утворення містків з волокон, що висмикуються під час розкриття тріщини, зумовлюють більший опір матеріалу із істотною дисипацією енергії. Тим не менш, несуча здатність цього типу нетканих матеріалів не є безмежною, адже вказаний спосіб поєднання волокон має чітко визначену межу міцності.

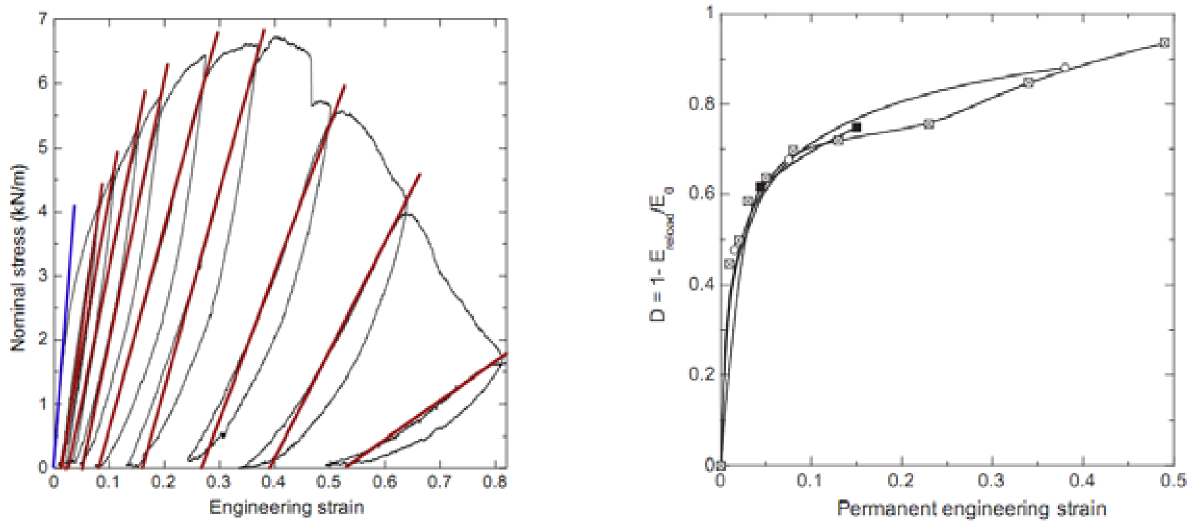
Кращих механічних властивостей можна досягти, якщо замість крихких перманентних поєднань волокон скріпити їх шляхом сплутування. Найчастіше це здійснюється точково, а не по всій площі полотна, за допомогою пробивних голок спеціальної форми або вузького струменю води під високим тиском. У результаті цього утворюються дискретні вузли, що зшивають одразу велику кількість волокон в одному місці по всій товщині нетканого матеріалу. У такому випадку цільність мережі забезпечується силами тертя, що утворюється в цих вузлах. Отримуваний механічний відгук до різних типів навантаження в цьому випадку є істотно відмінним від попередньо розглянутих матеріалів, що зумовлює їхнє широке застосування в різних областях включно із виконанням захисних функцій в техніці та спорядженні військового призначення. У першу чергу цим вони завдячують якісно новим мікроскопічним механізмам пружної та непружної поведінки волокон у нетканій мережі такого типу.

У роботі [125] ці механізми досліджуються експериментально на мікроскопічному та макроскопічному рівні для специфічного типу голкопробивного нетканого матеріалу. Мова іде про комерційний продукт Dyneema®Fraglight NW201. Це неткане полотно виготовляється з волокон надвисокомолекулярного поліетилену. Процес виготовлення передбачає вистилання відносно короткими нитками довжиною в 60 мм різноспрямованих пластів на поверхні, що рухається. Вже в цьому полягає відмінність від багатьох інших нетканих матеріалів, які утворюються з неперервного волокна. Товщина цих коротких волокон складає 11 мкм. Укладене полотно скріплюється шляхом пробивання масивом шипованих голок, яке неодноразово повторюється. Проникаючи в нашарування волокон, голки захоплюють та сплутують їх між собою.

Утворюване полотно має товщину порядка 1.5 мм та поверхневу цільність 190÷220 г/м^2. Випробування у [125] здійснювалися на зразках 100х100 мм^2, які вирізалися у трьох різних напрямах. Перший напрям (MD) співпадає з тим, в якому полотно рухалося під час виготовлення та було скручене в рулон. Інші два спрямовані відносно нього перпендикулярно (TD) та під кутом в 45° (45°D). Подовжнє навантаження відбувалося зі швидкістю 0.1, 1 та 8 мм/с.

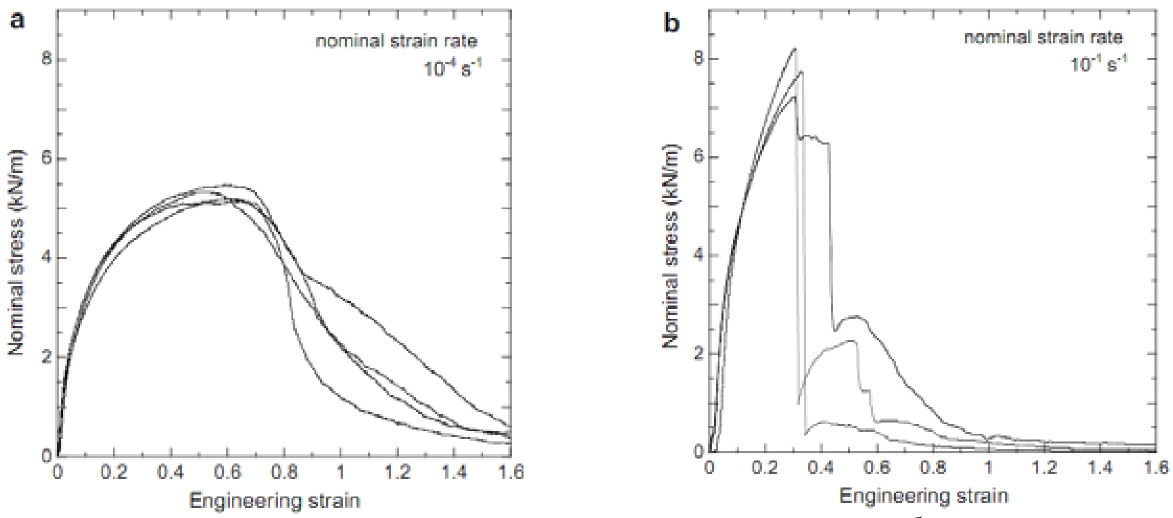
На рис. 7.6, 7.7 представлені криві зміни номінального напруження (діюча сила, віднесена до ширини зразка) відповідно до інженерного подовження (відношення подовження до початкової висоти зразка) за монотонного та циклічного розтягування, отримані для швидкості деформації 0.01 с$^{-1}$. Результати усіх випробувань, здійснених у роботі [125], наведені в табл. 7.2. Поведінка нетканого матеріалу характеризується початково лінійним відгуком, який супроводжується різким зміцненням та досягненням максимальної сили за досить значних розтягнень (від 50 до 120 %) і поступовою втратою тримкості. Значення кількісних показників з табл. 7.2, таких як верхня межа міцності, подовження при максимальному навантаженні та питома робота розтягнення матеріалу, свідчать про істотну анізотропію нетканого текстилю. Так, зокрема, у напрямку рулону (MD) матеріал є більш податливим: може значно більше розтягуватись та вимагає значно менших для цього зусиль. Водночас у поперечному напрямку (TD) полотно має найбільшу міцність, хоча й розтягується не так сильно. Зразки, вирізані під кутом 45°, відповідно, демонструють проміжні властивості відносно попередніх двох випадків.

Відгук зразків, підданих циклічному навантаженню, значно доповнює уявлення про властивості та природу поведінки нетканого матеріалу. Як видно на рис. 7.7, навіть за незначних розтягнень деформації мають незворотний характер. Таку поведінку можна охарактеризувати як пластичну. Вона пов’язана із проковзуванням волокон у мережі полотна відносно одне одного та в першу чергу – повз вузли. Для цього необхідно подолати сили тертя, які утримують волокна у місцях з’єднання. За рахунок того, що окремі порції волокон, які висмикуються через вузли, подовжують найбільш навантажені сегменти, орієнтовані вздовж напряму розтягування тканини, виникає остаточне подовження зразка. Також за рахунок переорієнтації волокон у



а *б*

Рисунок 7.4 – Поведінка зразка за циклічних навантажень [127, 465]



а *б*

Рисунок 7.5 – Залежність відгуку матеріалу від швидкості деформації: $a - 10^{-4}$ с$^{-1}$, $б - 10^{-1}$ с$^{-1}$

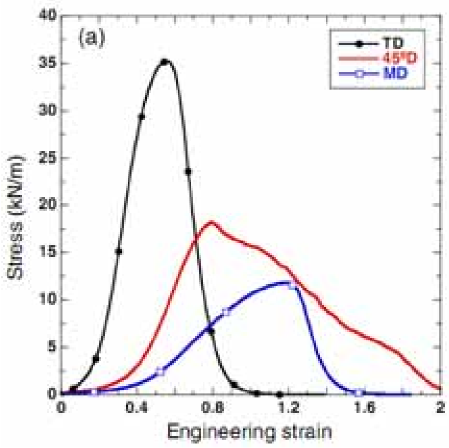


Рисунок 7.6 – Характерні криві номінальних напружень для трьох зразків нетканого матеріалу в напрямку рулону (MD), перпендикулярному напрямку (TD) та під кутом в 45° (45°D), отримані при розтягненні [125]

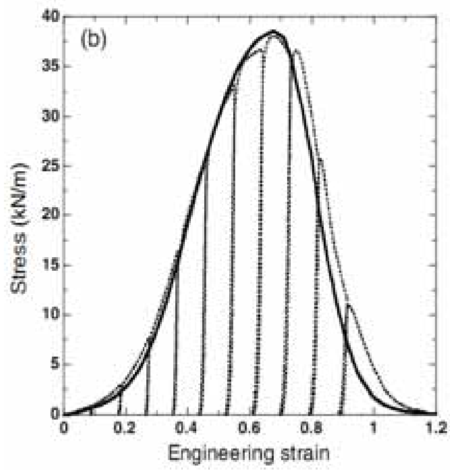


Рисунок 7.7 – Крива номінальних напружень при монотонному (суцільна лінія) та циклічному (пунктир) розтягненні вздовж напрямку TD [125]

мережі пружне розвантаження на кожному циклі відзначається доволі крутим нахилом кривої напруження. Процес подовжнього ковзання зрештою призводить до повного висмикування кінців волокон та остаточного розплутування вузлів. Таким чином, пластична течія матеріалу супроводжується також пошкоджуваністю, яка розпочинається раніше, ніж матеріал досягає межі тримкості, та продовжується до повного його руйнування. Завдяки такому механізму деформації цей тип нетканих матеріалів має надзвичайно високу здатність поглинати енергію удару, що обумовлює його застосування для балістичного захисту. На відміну від термічно скріплених нетканих текстилей, дисипація енергії відбувається впродовж усього процесу висмикування окремих волокон з численних вузлів, а не під час одноразового руйнування місця перманентного з’єднання. До того ж зона пошкодження за пластичних деформацій займає значну площу зразка, що розтягується. Це, зокрема, видно з наведених на рис. 7.8 результатів цифрової обробки зображень деформованих зразків, які дають змогу визначити розподіл деформацій. Звертає на себе увагу форма, яку приймають від самого початку прямокутні зразки, а саме її вузька «талія». Поперечне скорочення при розтягненні в напрямку рулону складає понад 70%. При цьому переважна частина волокон виявляється орієнтованою в напрямку розтягнення, що значною мірою позначається на тримкості матеріалу. У місцях локалізації пошкодження на заключних етапах розтягнення, що передували руйнуванню зразка, добре видно, що мережа стає набагато менш щільною через те, що волокна висмикуються по обидві сторони від розриву.

Вочевидь, незвичайним властивостям та поведінці, що спостерігаються, матеріал Dyneema ® Fraglight завдячує внутрішній будові та мікроскопічним механізмам деформації волоконної мережі. Обидві ці складові також були детально досліджені в роботі [125]. По-перше, було встановлено, що у первинному стані орієнтація волокон є однорідною у всіх напрямках. Місця пробиття голками мають невпорядкований розподіл, як можна судити з рис. 7.9, а їхню щільність було оцінено як 13–14 г на см^2. Тим не менш, анізотропія цього матеріалу має бути пов’язана з певним структурним фактором. Головні напрями, в яких спостерігається неоднорідність поведінки полотна, пов’язані з процесом його виготовлення. Пробивний інструмент розташовується поперек протягування полотна вздовж виробничої лінії, отже, насправді розподіл точок з’єднання в площині є не повністю випадковим, а зберігає деякий

Таблиця 7.2 – Механічні властивості нетканого матеріалу при поздовжньому розтягненні залежно від орієнтації та швидкості деформації [125], кН/м

Швидкість деформації, $с^{-1}$	Орієнтація	S_{max}, кН/м	ε_{max}	Питома робота розтягнення матеріалу, кН/м
0, 01	MD	12,9±0,8	1,22±0,07	8,7±1,8
0, 01	TM	37,1±4,4	0,59±0,04	16,6±2,6
0, 01	45°D	21,8±0,5	0,84±0,01	15,7±4,6
0, 08	MD	14,5±0,7	1,25±0,07	9,9±1,5
0, 08	TD	35,7±0,7	0,55±0,01	16,1±2,8

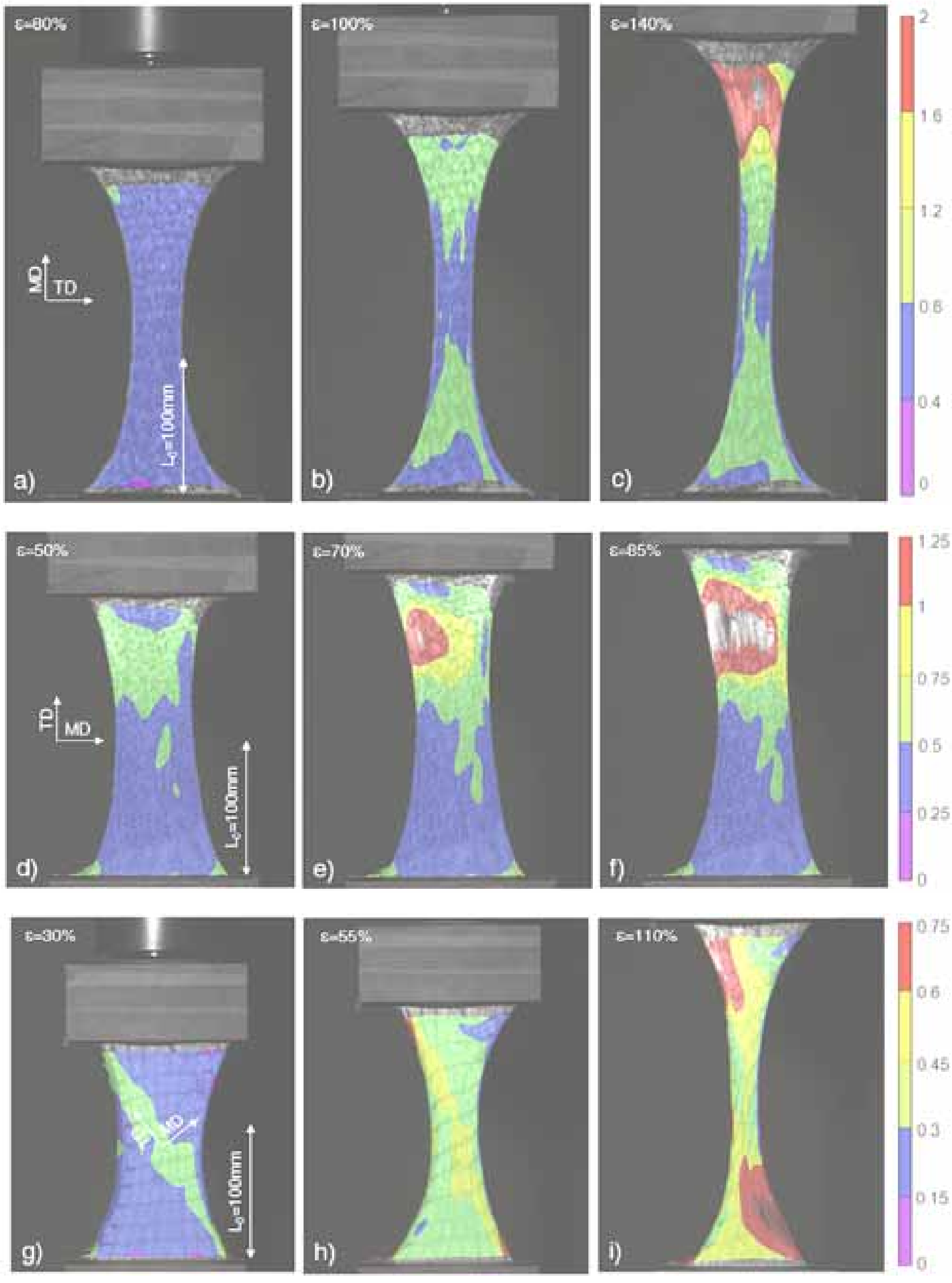


Рисунок 7.8 – Розподіли логарифмічних деформацій в напрямку розтягнення за різних величин відносного подовження зразків залежно від їхньої орієнтації:
a – MD, 80%; b – MD, 100%; c – MD, 140%; d – TD, 50%; e – TD, 70%;
f – TD, 85%; g – 45D, 30%; h – 45D, 55%; i – 45D, 110%.

порядок. Експериментально, тим не менше, цю особливість будови матеріалу важко відслідкувати.

Другий аспект, який було досліджено, полягає в фізичних властивостях волокон та їх з’єднань. Виокремлені з нетканої мережі волокна марки SK75 Dyneema продемонстрували лінійно пружну поведінку безпосередньо до крихкого руйнування, яка характеризується наступними параметрами матеріалу: пружний модуль E_f = 39.7 ± 8.9 ГПа, міцність при одноосному розтягненні σ_f = 2.45 ± 0.75 ГПа, подовження при розриві ε_f = 4.80 ± 1.05%. Можна помітити, що здатність до розтягнення самих волокон є значно меншою, ніж ті деформації, яких може зазнавати виготовлений з них нетканий текстиль. Як уже зазначалося вище, таке можливо виключно через наявність відносного проковзування волокон, яке не супроводжується їхнім пошкодженням. Для оцінки сил тертя та міцності з’єднань, які утворюються шляхом сплутування волокон у вузли під час пробиття голками повсті, експериментальне дослідження [125] включало в себе також випробування текстилю на висмикування волокон. Було встановлено три різновиди відгуку волокна на відокремлення його з мережі, представлені характерними діаграмами сила-відстань на рис. 7.10. Деяким із волокон вистачає доволі незначного зусилля порядку 10 мН для того, щоб подолати сили тертя, що їх утримують. Подальше висмикування вимагає все менших зусиль, адже у подальшому частина волокна, що залишається в полотні та контактує з іншими волокнами, постійно зменшується. Легкість, з якою ці волокна залишають мережу, пояснюється тим, що вони уникли значного сплутування у вузлах практично по всій своїй довжині. Ті ж з волокон, які були захоплені голками та сплутані принаймні в декількох місцях, демонструють зовсім іншу поведінку. Їхнє витягання супроводжується проковзуванням повз вузли, яке вимагає значно більших зусиль в діапазоні 30–60 мН. Більш того, всякий раз, коли один з кінчиків повністю проходить через вузол, відбувається різке розвантаження волокна, адже на звільненій ділянці волокна зникає сила, яка до того витягувала його. Ці стрибки зусилля висмикування добре видно на середній кривій на рис. 7.10. Наприкінець, значна частина волокон виявляється надто істотно вбудованими в мережу. Таке можливе, наприклад, якщо в процесі виготовлення текстилю вони багаторазово закручуються навколо вузлів та інших волокон. Це призводить до того, що зростання зусилля вздовж волокна не здатне подолати сили тертя, тож з'єднання виявляються надзвичайно міцними та не дозволяють жодних проковзувань.

У середньому енергія, яка дисипується на одиницю довжини висмикнутого волокна, оцінена в межах від 9.7 мДж/м за швидкості 0.01 мм/с до 18.1 мДж/м за швидкості 1.0 мм/с. Слід зауважити, що в осередненій моделі [468], побудованій на базі цих спостережень, параметри міцності з'єднання волокон та дисипації енергії були задані не постійними, а змінюваними, відповідно до чинників поточного НДС.

Результати чисельного моделювання наведено на рис. 7.11–7.17. Як видно, спостерігається повна якісна та задовільна кількісна відповідність результатам експериментальних досліджень, наведеним вище.

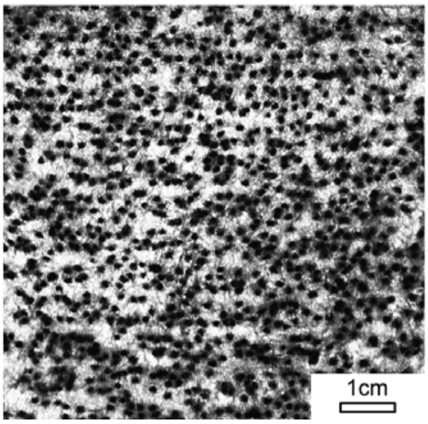


Рисунок 7.9 – Оптична мікрографія точок пробиття голками [125]

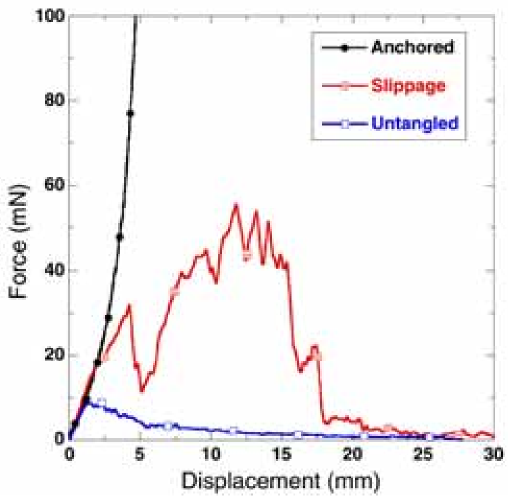
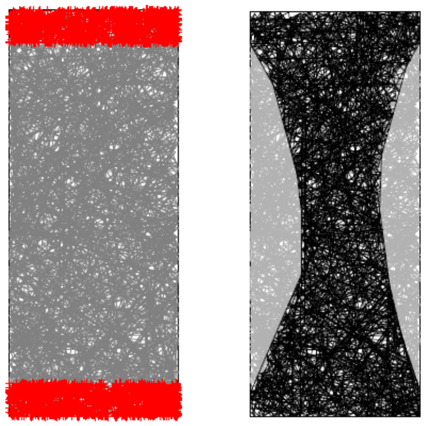


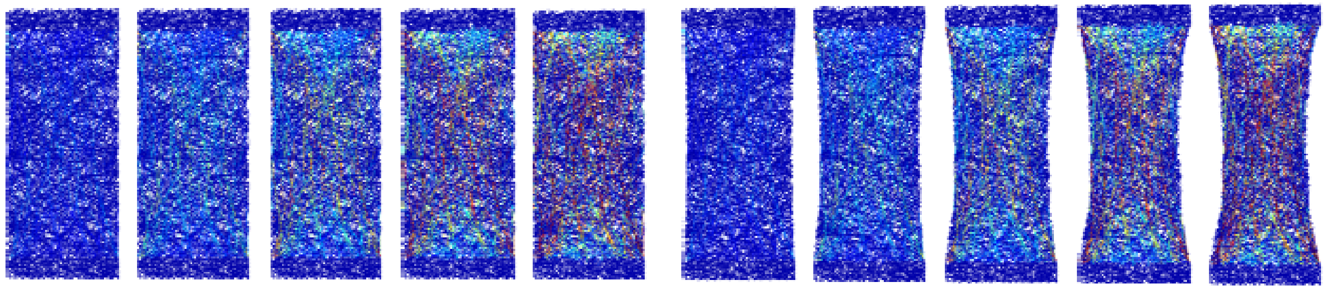
Рисунок 7.10 – Три типові картини залежності відстані відокремлення від величини сили під час випробування текстилю на висмикування окремих волокон

Параметри	*Значення*
ширина *a*, м	$5 \cdot 10^{-2}$
ширина *b,* м	$10 \cdot 10^{-2}$
довжина волокон l_f, м	$5 \cdot 10^{-2}$
частота сшивки *p*	0.25
кількість вузлів	29649
відносна щільність волокон n_f, м	400
кількість відтинків волокон	57504

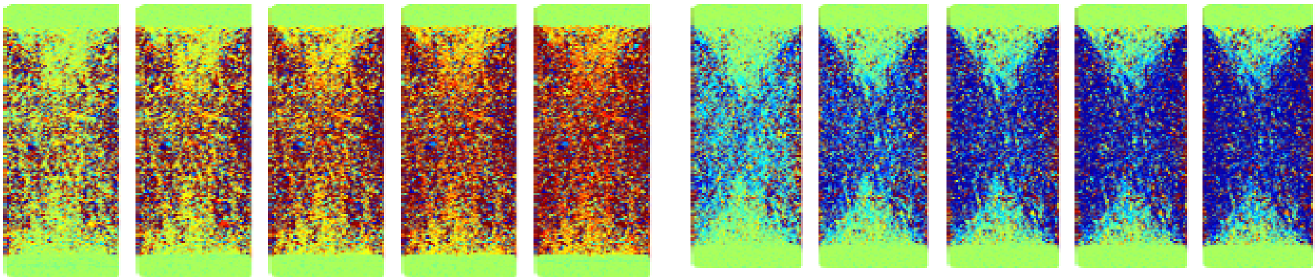


а ***б***

Рисунок 7.11 – Сгенерована мікроструктура:
а – зразка типу Мікадо; *б* – визначена частина мережі, в якій відсутнє навантаження в початковому стані



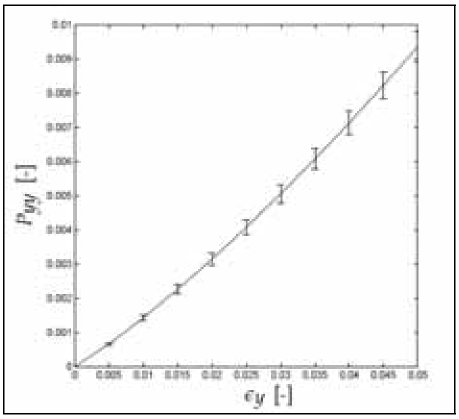
а *б*

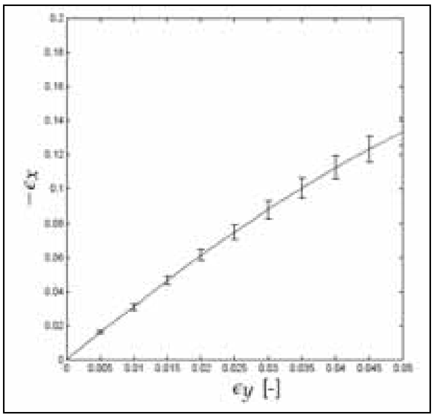


в *г*

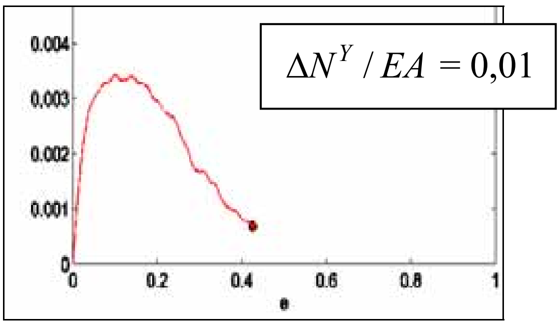
Рисунок 7.12 – Розтягнення нетканої мережі:
а – зусилля в волокнах у початковій конфігурації; б – зусилля в волокнах у деформованій конфігурації; в – компоненти ε_{xx} деформацій початкової тріангуляції вузлів; г – компоненти ε_{yy} деформацій початкової тріангуляції вузлів

Рисунок 7.13 – Інженерні напруження (*а*) та поперечне звуження (*б*) прямокутного зразка при пружному розтягуванні





а *б*



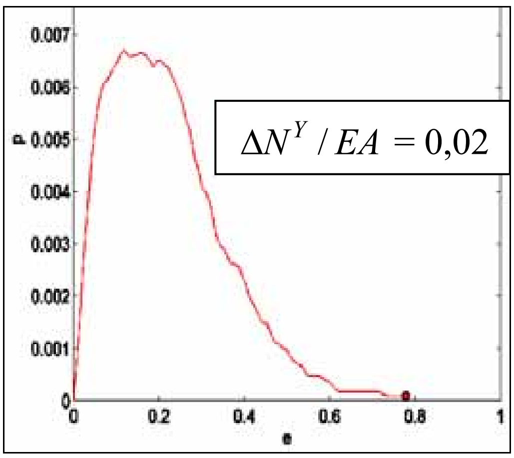
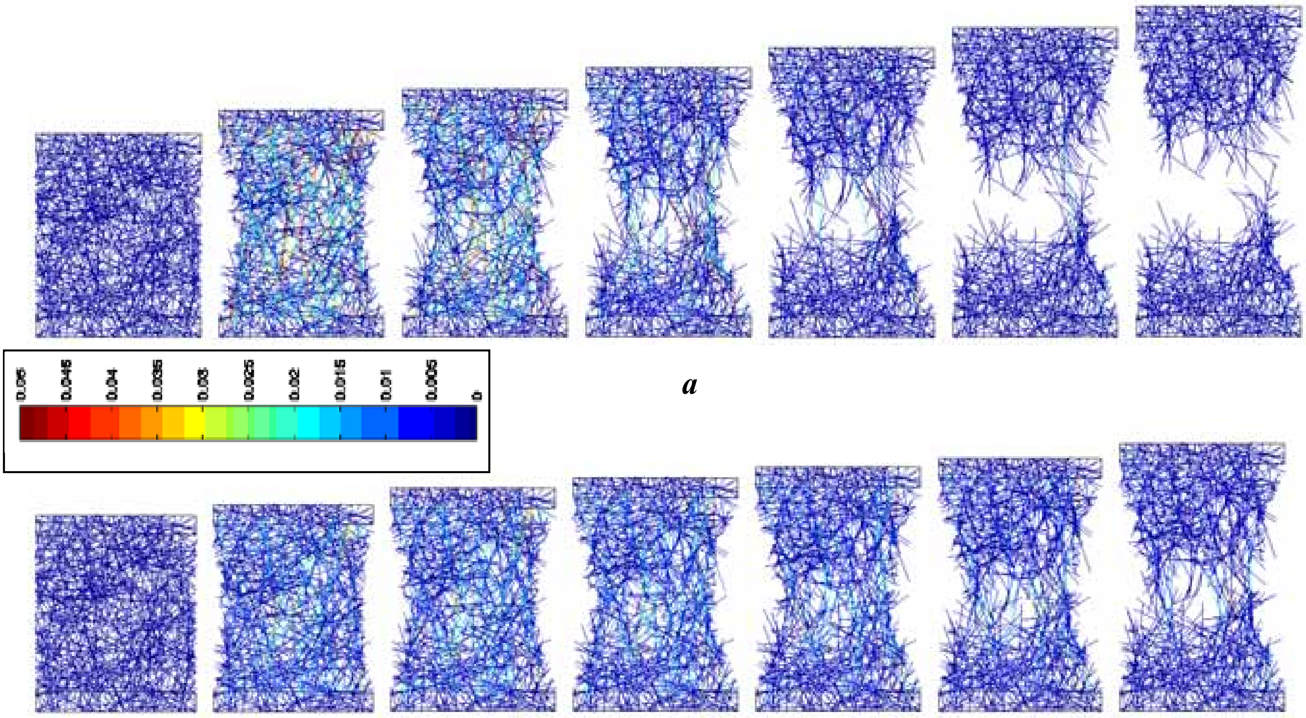


Рисунок 7.14 – Крива навантаження при розтягненні прямокутного зразка нетканого матеріалу з параметрами $L_f = 50$ мм,

$a = 100$ мм, $b = 100$ мм, $(L/\Omega)\cdot(L_f)^2 = 100$,

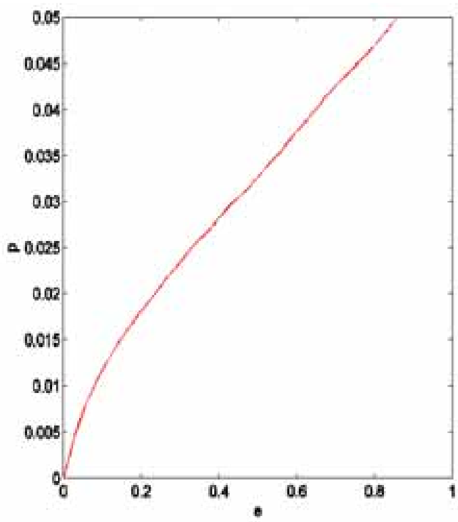
$d_{knots} = 5$ мм за різної межі сил тертя у вузлах



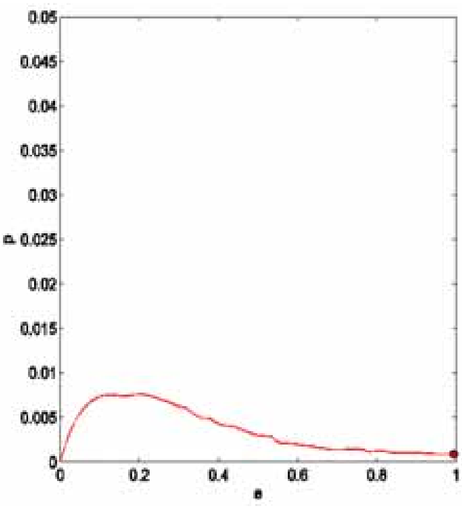
а

б

Рисунок 7.15 – Деформації нетканої мережі при розтягненні прямокутного зразка нетканого матеріалу з параметрами $L_f = 50$ мм, $a = 100$ мм, $b = 100$ мм, $(L/\Omega)\cdot(L_f)^2 = 100$, $d_{knots} = 5$ мм за різної межі сил тертя у вузлах: $a - \Delta N^Y / EA = 0{,}02$, , б: $\Delta N^Y / EA = 0{,}01$

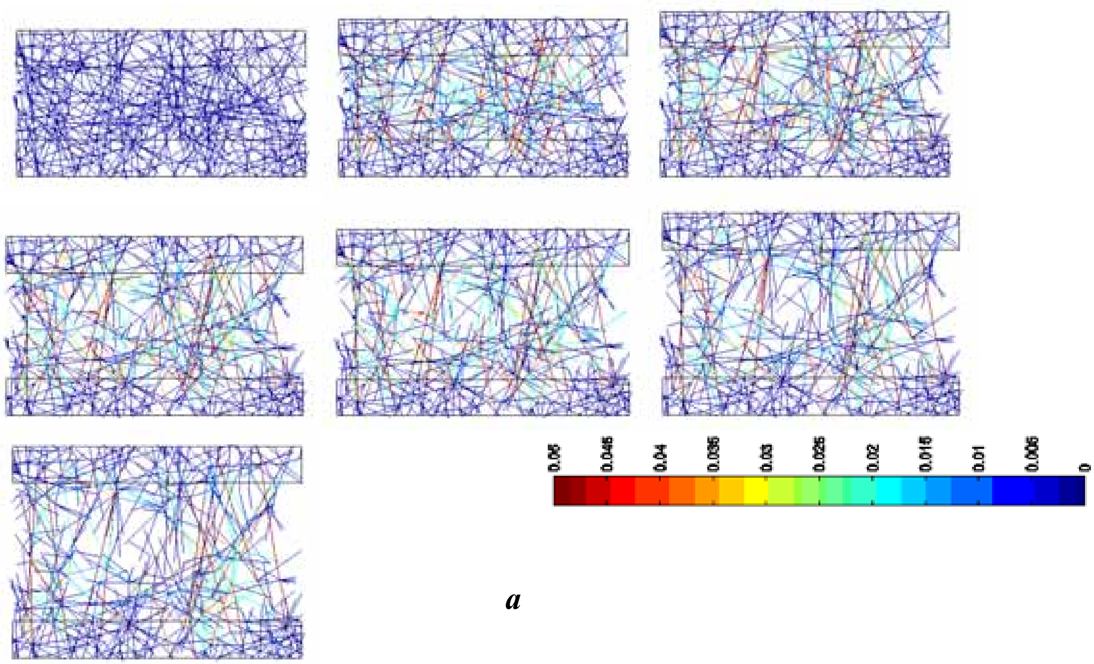


а

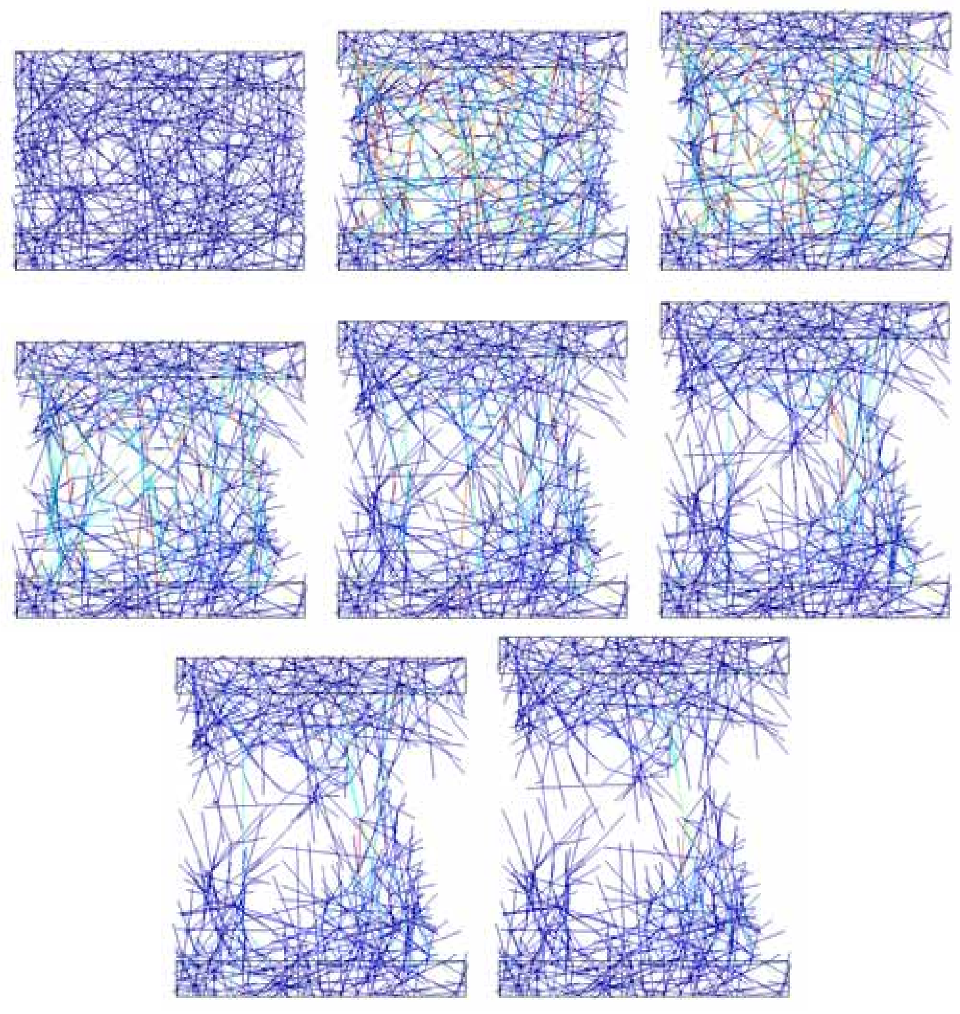


б

Рисунок 7.16 – Крива навантаження нетканої мережі при розтягненні прямокутних зразків нетканого матеріалу з параметрами $L_f = 50$ мм, $a = 100$ мм, $(L/\Omega)\cdot(L_f)^2 = 100$, $d_{knots} = 5$ мм, $\Delta N^Y / EA = 0{,}02$, що розрізняються між собою висотою: $a - b = 25$ мм; $б - b = 50$ мм



а



б

Рисунок 7.17 – Деформації нетканої мережі при розтягненні прямокутних зразків нетканого матеріалу з параметрами $L_f = 50$ мм, $a = 100$ мм, $(L/\Omega)\cdot(L_f)^2 = 100$, $d_{knots} = 5$ мм, $\Delta N^Y / EA = 0{,}02$, що розрізняються між собою висотою: *а* – $b = 25$ мм *б* – $b = 50$ мм

7.3 М’які матеріали з неоднорідним складом мережі

Коли мова йде про сучасні матеріали з високими механічними властивостями, то набуває значення радше сукупність властивостей, ніж один–єдиний фізичний параметр. Для інженерного застосування, як правило, потрібна комбінація часто суперечливих характеристик в одному матеріалі. Цієї мети може бути досягнуто шляхом упровадження композиційної структури матеріалу. Вочевидь, такий підхід буде виправданим лише за умов, якщо отримані властивості композиційного матеріалу є «кращими», аніж у його окремих складових. Для м’яких матеріалів вступають у протиріччя між собою дві характеристики: жорсткість і пластичність. З одного боку, тверді полімери є крихкими і легко ламаються. З іншого боку, більш еластичні матеріали мають надзвичайно малий пружний модуль та не здатні витримувати дійсно високі навантаження. Останнім часом було докладено значних зусиль, щоб поєднати їхні позитивні риси та отримати матеріал, який одночасно здатний розтягуватися, однак є достатньо жорстким та стійким до руйнування. Пропонується розглянути три різних типи таких матеріалів, які було синтезовано та експериментально досліджено. Вони представлені еластомерами з бімодальним розподілом довжини полімерних ланцюжків [469], подвійними гелевими мережами, які утворені перехресними ковалентними зв’язками [470], та надзвичайно тягучими та міцними гідрогелями з ковалентними та іонними зв’язками [135]. Узагальнені дані про ці матеріали наведені у табл. 7.3.

Усі ці матеріали відрізняються в першу чергу своїм особливим складом. Бімодальні мережі [469] утворюються двома видами хімічно ідентичних, наприклад, полідиметилсилоксанових (ПДМС) полімерних ланцюгів. Однак молекулярна вага кожного з компонентів є відмінною. Довгі та короткі ланцюги змішуються, після чого вони випадковим чином поєднуються на кінцях за допомогою спільного вулканізуючого реагенту (рис. 7.18). На відміну від перехресної зшивки, такий спосіб зберігає початковий чіткий поділ у довжині ланцюжків та відповідно дає змогу його контролювати. У роботі [469] було використано багатофункціональний реагент триізоціанат, який здатен утворювати з’єднання кінцевих гідроксильних групп ПДМС, для створення модельних мереж з відомою полідисперсністю.

Мета цього дослідження полягала у визначенні механізмів розриву еластомерів, зокрема перевірці теорії «слабкої ланки». Неочікуваним відкриттям, здійсненим його авторами, було чудове поліпшення міцності та своєрідна форма пружного відгуку отриманих еластомерних мереж. Остаточні властивості синтезованого таким чином матеріалу визначаються співвідношенням часток окремих складових та молярною вагою коротких та довгих ланцюжків.

Подвійні мережеві гідрогелі, розроблені Гонгом та його колегами [470], належать до іншого класу матеріалів, які тут розглядаються. Вони містять до 90% води та складаються з двох загалом незалежних мереж, як показано на рис. 7.18. Перша утворюється за рахунок агрегації поліелектроліту (такого як поліАМПС) у стан гелю, тоді як інша утворюється гнучкими нейтральними полімерними ланцюгами, наприклад, ПАА, які необов'язково зазнають хімічної зшивки. Ця розробка була покликана конкретною практичною потребою збільшення механічної міцністі гідрогелів для майбутніх інженерних застосувань. Експериментальні дослідження показали, що з точки зору оптимальної будови перша мережа має бути щільно з'єднаною, тоді як друга має залишатися вільною.

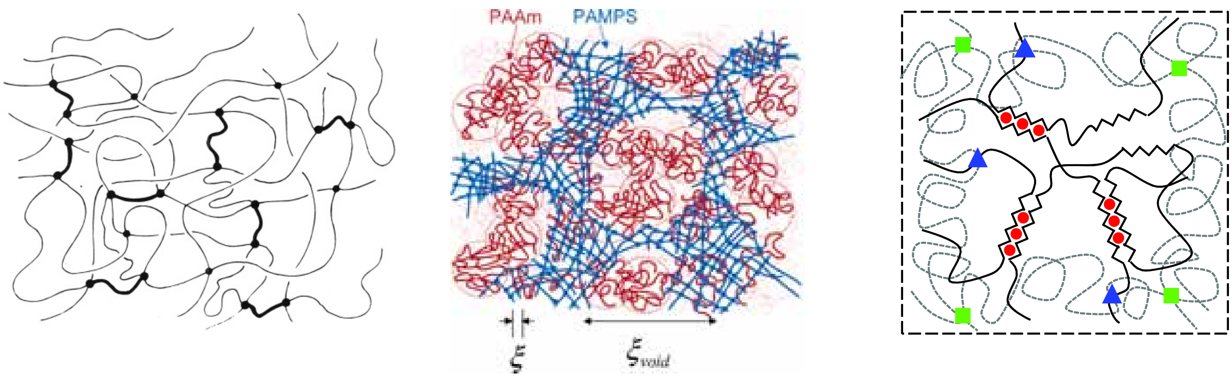
Нещодавно групою дослідників [135] було запропоновано принципово новий тип надзвичайно еластичних і міцних гідрогелів. Вони запропонували змішувати два типи полімерів із різними механізмами зшивки у єдиній мережі. Ковалентні перехресні зв'язки поєднують поліакриламідні ланцюжки один з одним і одночасно з ланцюгами альгінату, тоді як останні додатково пов'язуються іонно (див. рис. 7.18). Як і попередній із наведених типів гідрогелів, у цьому випадку також є характерним високий (до 86 %) вміст води.

Механічні властивості та механізми зміцнення. Як видно із даних табл. 7.3, розглянуті м'які матеріали демонструють підвищені механічні властивості. Якщо порівнювати ці характеристики з характеристиками окремих компонентів, то можна зауважити, що їх комбінація призвела до різкого поліпшення здатності розтягуватися та до підвищення рівня міцності (на декілька порядків). Це явище пояснюється механізмами зміцнення, пов'язаними з конкретними особливостями структури матеріалів, які реалізуються насамперед на мікроскопічному рівні. Відгук матеріалу створюється силами, утвореними окремими полімерними молекулами, та їхню взає-

Таблиця 7.3 – Інформація про різновиди композиційних полімерних матеріалів та їхні властивості

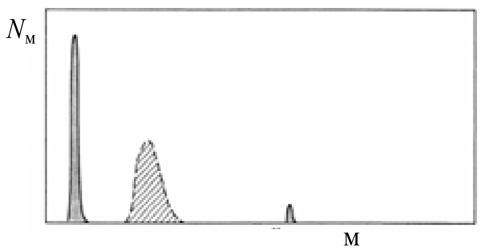
Тип	Складові		Модуль Юнга, МПа	Межа міцності, МПа	Подовження при розриві, %	Енергія руйнування, Дж/м^2
	1	2				
Бімодальні мережі [469]	ПДМС*		0.2-0.8	1.5-12	10-150	~10^2
Подвійні гелеві мережі [470]	полі-АМПС**	ПАА***	0.3	20 (стис.)	80 (стис.)	~10^3
Гібридні гідрогелі [135]	Іонично зшитий альгінат	Ковалентно зшитий ПАА	0.029	0.16	2200	~10^4

Примітка: *ПДМС – полідиметилсилоксан, **поліАМПС – полі (2-акріламідо-2-метил-1-пропансульфонова) кислота, ***ПАА – поліакриламід

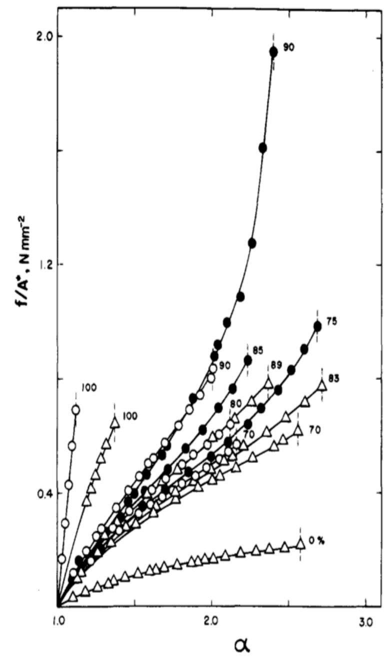


а *б* *в*

Рисунок 7.18 – Композиційна мережева структура розглянутих м'яких матеріалів: *а* – бімодальні мережі з коротких і довгих ланцюжків, що з'єднані на кінцях [469]; *б* – подвійні мережі, окремо утворені жорсткими електролітами та гнучкими ланцюгами [470]; *в* – еластичні та міцні двокомпонентні гідрогелі з ковалентними та іонними зв'язками [135]



а



б

Рисунок 7.19 – Розподіл довжини ланцюгів та ізотерми напруження-деформації [469]: *а* – розподіл довжини ланцюгів у бімодальній мережі (суцільно заповнена область) порівняно з унімодальним розподілом (пунктирно окреслена область); *б* – ізотерми напруження-деформації за одноосного розтягнення для мереж із різним вмістом коротких ланцюгів (відсоток молярної частки позначений для кожної кривої) різної довжини (найдовші позначені порожніми трикутниками, найкоротші – заповнені кола) модією в межах нерегулярної тривимірної мережі. Розглянуті три матеріали демонструють суттєву різницю у всіх цих аспектах: природі макромолекул (жорсткі або гнучкі, нейтральні або гідрофільні полімери), різновидах внутрішньомолекулярної взаємодії (ковалентні або іонні зв'язки, заплутування) та структурі мережі (суцільна або подвійна, однорідна або кластеризована).

Особливістю бімодальних мереж, досліджених Марком та колегами [469, 471], є високий вміст коротких ланцюгів у молярному співвідношенні до довгих ланцюгів. Типовий розподіл довжин ланцюжків представлено на рис. 7.19. Такий склад був мотивований спостереженням, раніше здійсненими для мереж із помірним (10–20 %) вмістом коротких ланцюгів, що їхнє додавання не призводить до значного зниження механічних властивостей матеріалу. Автори прийшли до висновку, що теорія слабкої ланки є недійсною. Якщо би всі ланцюги слідували однаковій афінній деформації, найкоротші з них розривалися б уже при зовсім незначному подовженні матеріалу, адже вони мають найменшу межу розтягуваності. Це б відповідно викликало пошкоджуваність матеріалу, чого насправді не спостерігається. Отже, цей випадок є наочним підтвердженням висновків цієї роботи щодо неафінності деформацій у мережі. Подовження зазнає перерозподілу енергетично вигідним шляхом, за якого використовується здатність довгих ланцюгів до значного розтягнення. При цьому короткі ланцюги уникають розриву, всупереч тому, що прогнозували ранні теорії міцності таких матеріалів. Одночасно з тим, завдяки своїй великій кількості в одиниці об'єму, вони створюють значний внесок у пружний відгук матеріалу. За рахунок цього досягається істотний виграш у механічних властивостях матеріалу.

У першу чергу молекулярні мережі такої будови демонструють істотне посилення пружного відгуку зі збільшенням розтягування. Оскільки полідиметилсилоксан не кристалізується за звичайних температур, близьких до 25°C, явище деформаційно індукованої кристалізації може бути виключеним. Отже єдиним чинником, який пояснює зміцнення мережі та зростання пружного модуля, є негаусова поведінка полімерних ланцюжків, близьких до межі розтягнення. Як видно із ізотерм напруження-деформації, наведених на рис. 7.19, кінцеві властивості бімодальної мережі залежать від молярної частки коротких ланцюжків. Із її збільшенням матеріал набуває жорсткості та утворює вищі напруження у відповідь до розтягування. Однак разом із тим, руйнування відбувається значно раніше, адже короткі ланцюжки досягають своєї межі розтягнення вже за доволі невеликої загальної деформації матеріалу. Навпаки, за більшого вмісту саме довгих ланцюжків відгук матеріалу є набагато м'якшим, а сам він демонструє дивовижну здатність розтягуватись. Із точки зору такої важливої характеристики як кількість пружної енергії, яку запасає матеріал до того, як зазнає руйнації, існує певний оптимум композиції цих двох складових. Випробування зразків на розрив, з іншого боку, свідчать про те, за більшого вмісту коротких ланцюжків енергія руйнування є вищою. Це пояснюється тим, що утворення тріщини вимагає розриву більшої кількості ланцюжків та зв'язків на одиницю площі її поверхні.

Подвійні гелеві мережі (див. вище), синтезовані Гонгом та групою його співробітників [470], також складаються з «жорстких» і «м'яких» компонент. Як жорсткі елементи виступає щільно зшитий поліелектроліт поліАМПС, що утворює суцільну матрицю, яка розповсюджується всім об'ємом гелю та складає його основу (див. рис. 7.18). М'яку частину матеріалу складає поліакриламід, який є слабо зшитим або присутній у лінійному стані. Те, яким чином ПАА виявляється включеним у структуру композитного гелю, залежить від молекулярної ваги цього полімеру. Цукешиба та інші [472] стверджують, що за достатньої довжини макромолекул поліакриламіду у гелі утворюються неоднорідні включення. ПАА не просто змішується зі щільно зшитою матрицею, а й заповнює порожнечі у базовій мережі, як показано на рис. 7.18. У цих включеннях поліакриламід існує у вигляді в'язкої сплутаної мережі за умов, якщо розміри прогалин перевищують радіус гнучких ланцюжків. Вважається, що ці м'які кластери виконують роль уповільнювачів розповсюдження тріщин, зменшуючи концентрацію напружень у пружній матриці та дисипуючи енергію. Така синергія призводить до того, що композитний гель має властивості, які істотно перевищують властивості кожного із його компонентів.

Ефект від комбінованої структури є навіть більш значущим для *гібридних гідрогелів*, які були розроблені у співпраці між вченими з США та Південної Кореї [135]. У них поєднані альгінат та поліакриламід. Алгінатні ланцюги утворюють іонні перехресні зв'язки у присутності катіонів Ca^{2+} у розчиннику. Одночасно із цим поліакриламід піддається ковалентній зшивці. Також між амінними групами на поліакриламіді та карбоксильними групами на ланцюгах альгінату забезпечується утворення додаткових ковалентних перехресних зв'язків, завдяки чому обидві компоненти виявляються включеними у спільну поєднану мережу. Отриманий гібридний гель має модуль пружності 29 кПа, близький до суперпозиції модулів його компонентів (17 кПа для альгінату та 8 кПа для акриламідних гелів відповідних концентрацій). Одночасно із цим новий матеріал відрізняється від своїх складових неймовірно поліпшеними значеннями напруження та подовження при розриві. Гібридний гель може бути розтягнутий у 23 рази від початкової довжини та витримувати напруження у 156 кПа, тоді як ці числа дорівнюють 3,7 кПа та 1,2 рази для альгінатного гелю і 11кПа та 6,6 разів для поліакриламідного гелю, як показано на рис. 7.20.

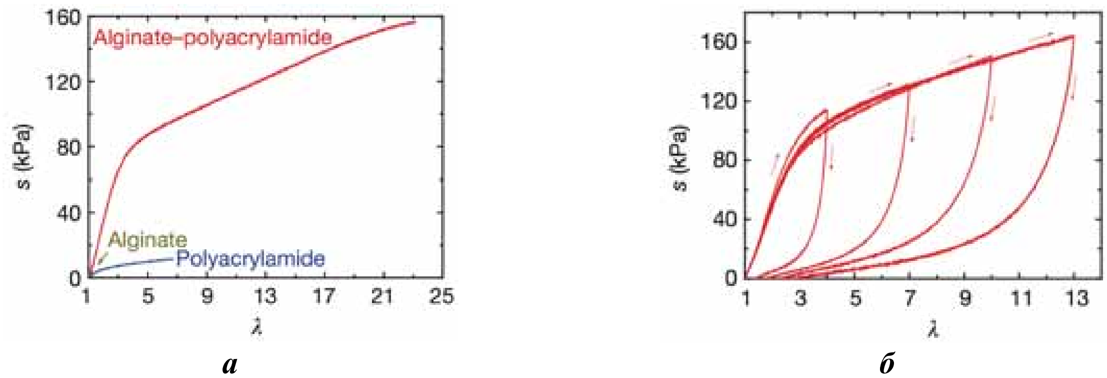


Рисунок 7.20 – Механічні властивості гібридного гелю з іонними поперечними зв'язками [135]:
а – криві «напруженя – деформації» для гібридного гелю та його окремих компонентів при подовжені до розриву; *б* – гістерезис напружень при одному циклі навантаження та розвантаження зі змінною амплітудою деформацій

Така поведінка може бути пов'язана з істотною дисипацією енергії, яка забезпечується іонними зв'язками. Це підтверджується яскраво вираженим гістерезисом при простому навантаженні та розвантаженні, який представлено на рис. 7.20. Зі збільшенням деформації іонні зв'язки розриваються, чим досягається ефект застібки-блискавки вздовж ланцюгів альгінату. Незважаючи на такі пошкодження мікробудови, матеріал не зазнає істотної залишкової деформації та зберігає здатність відновлювати початкову форму. Цим він завдячує тому, що поліакриламідна мережа залишається неушкодженою. Для того, щоб утворилася тріщина та матеріал зазнав необерненого руйнування, необхідно, щоби були розірвані ковалентно зшиті ланцюжки. Це відбувається вже за дуже істотного подовження матеріалу, якому передує значна дисипація енергії у великій зоні навколо вершини тріщини. Будь-яке інше пошкодження матеріалу, що не супроводжується утворенням тріщин, може бути відновлене, адже розірвані іонні зв'язки є відновлюваними. Отже, від цього матеріалу можна також очікувати і вкрай задовільних втомнісних характеристик.

Моделювання комбінованих полімерних мереж. Наведені вище матеріали відрізняються надзвичайними в'язкопружними та міцнісними характеристиками. Їх походження криється в особливостях мережевої мікроструктури, в якій поєднуються різнотипні складові. Структура цих мереж дає можливість урівноважувати зусилля всередині матеріалу та розподіляти мікроскопічні деформації між окремими елементами. За вдало підібраного складу такої мережі окремі компоненти можуть виконувати чітко визначену функціональну роль: наприклад, частина мережі може забезпечувати пружність, а інша – міцність. Однак передбачити наперед ефект від впровадження комбінованої будови з тими чи іншими параметрами є надзвичайно складно. На додачу до експериментальних досліджень створюваних матеріалів, може виявитись надзвичайно корисним чисельне моделювання. І мова йде саме про мікромеханічно обґрунтовані моделі. Запропоновані підходи можуть бути застосовані і для означеного класу комбінованих полімерних матеріалів. Статистичні методи репрентативних напрямків [170] і, зокрема, представлена у роботі модель шляхів максимального просування придатні для визначення мікродеформацій та осереднення відгуку постійно поєднаних мереж. Разом із тим формалізм динаміки Смолуховського, застосований до мобільних ланцюжків, дає можливість враховувати і в'язкий внесок від мінливої частини мережі.

Складність у застосуванні цих методів полягає у неоднорідності будови комбінованих полімерних матеріалів. Тим не менш, для бімодальних мереж можна запропонувати поширення оригінальної моделі МАРС, наведене у підрозд. 6.3. Слід зауважити, що модельні полідисперсні еластомери, досліджені у роботах [469, 471, 473], демонструють поведінку, яка істотно відрізняється від традиційних гумоподібних матеріалів. Автори оригінальних робіт припускали, що цим вони завдячують синергетичному ефекту. Він має полягати у тому, що окремі складові мікробудови проявляють відмінний відгук до розтягнення. У поєднанні їхні внески переважатимуть той результат, який можна було б отримати простим додаванням пружних властивостей. Вочевидь, попередньо розглянута модель, що призводить до однорідних мікродеформацій, не погоджується з цими міркуваннями жодною мірою. Недолік моделі ланцюжків вільного обертання полягає в тому, що вона перестає бути точною для коротких ланцюжків. А саме такі ланцюжки, що складаються лише з декількох мономерів, і входять до складу тих бімодальних мереж, які показали найбільш відмінні властивості.

З огляду на це більш придатною можна вважати іншу модель напівгнучкого ланцюжка, запропоновану Бланделом і Терентьєвим [432]. Згідно із нею ланцюг подано скоріше не як дискретно сполучений набір ланок певної довжини, а радше як суцільну стрічку, що вигинається довільним чином у просторі. Відповідні до статистики усіх можливих форм, вільна енергія розтягнення такого ланцюжка визначається виключно ентропійною складовою

$$\Psi_S(R) = k_B T\left\{\left[(l_p \pi^2)/2L\right]\left(1 - R^2/L^2\right) + 2L/\left[l_p \pi\left(1 - R^2/L^2\right)\right]\right\}, \qquad (7.1)$$

де k_B, T – звичайні константа Больцмана та температура, L – контурна довжина ланцюжка, а l_p – персистентна довжина, що характеризує, наскільки гнучкою є та чи інша макромолекула.

Термодинамічна осьова сила, що діє на кінці такого хробакоподібного ланцюжка, обчислюється за похідною

$$F_S(R) = \frac{\partial \Psi_S(R)}{\partial R} = k_B T\left(R/L^2\right)\left\{4L/\left[l_p \pi\left(1 - R^2/L^2\right) - (l_p \pi^2)/L\right]\right\}. \qquad (7.2)$$

Для довгих або надзвичайно гнучких ланцюжків, для яких $l_p / L << 1$, ця модель добре збігається з моделлю негаусового ланцюжка вільного обертання. Однак для коротких чи надто жорстких ланцюжків відгук на розтягнення є принципово відмінним. Це позначається вже на початковому етапі мережі. Як і раніше, початкове подовження ланцюжків визначається умовами (6.17). Однак, розв’язок цього рівняння у випадку, коли сила визначається виразом (7.2), істотно вирізняється від простого співвідношення (6.23), отриманого раніше. У цьому випадку, для отримання рівноважних початкових значень подовжень R_0^p та R_0^q доводиться використовувати чисельну процедуру розв'язання методом Ньютона. Приклад її застосування наведено на рис. 7.21, де представлені криві сил $F_S^p(R^p)$ та $F_S^q(R^q)$, а також точки перетину лінією спільної ординати.

Використання моделі напівгнучких ланцюжків для визначення відгуку бімодальної мережі далі продемонструємо на прикладі декількох реальних зразків, які були експериментально досліджені у роботах [469, 471, 472]. Параметри використаних матеріалів та відповідні їм параметри чисельної моделі зведені у табл. 6.1. Звертає на себе увагу надзвичайно мала довжина коротких ланцюжків, що складає за молярної маси 660 г/моль лише 6 мономерів, тобі які за молярної маси 220 г/моль – лише 2 мономерів. З іншого боку, молекула полідіметилсілоксану є надзвичайно гнучкою завдяки одиничним зв'язкам між атомами кремнію, відповідно до чого було обрано відносно мале значення персистентної довжини. Утім, усе одно короткі ланцюжки мають дуже обмежену здатність до розтягнення. Тим не менш, завдяки перерозділу мікродеформацій у мережі невелика частка довгих макромолекул, що міститься у ній, дає можливість уникнути передчасного досягнення межі розтягнення коротких ланцюжків. У результаті цього істотно підвищується гнучкість еластомеру. У той самий час завдяки великій кількості активних коротких ланцюжків матеріал досягає високих значень модуля пружності. Тим самим, повною мірою розв'язується протиріччя між цими двома механічними властивостями матеріалу. Цей ефект наочно демонструють результати, представлені на рис. 7.22, 7.23.

Подвійні мережі, синтезовані Гонгом та його колегами [470], у свою чергу, становлять значно складніший об'єкт для запропонованої схеми моделювання. По-перше, два типи ланцюгів не пов'язані між собою в єдину мережу, між ланцюгами різних видів відсутні хімічні перехресні зв'язки. Це означає, що взаємодія між мережами здійснюється за допомогою механічного контакту. Контактні ділянки та їх щільність не є наперед визначеними, як у випадку постійних сполучень, розглянутих в моделі МАРС. По-друге, як зазначають експериментальні дослідження [472], ці гелі мають неоднорідну структуру (див. рис. 7.18). Хоча гнучкі ланцюги можуть взаємно проникати з жорсткий поліелектролітовий скелет, вони також утворюють кластери в існуючих порожнинах. Таким чином, подвійні мережі мають чітко виражену мезоструктуру, масштаби довжини якої є більшими за розмір сітки.

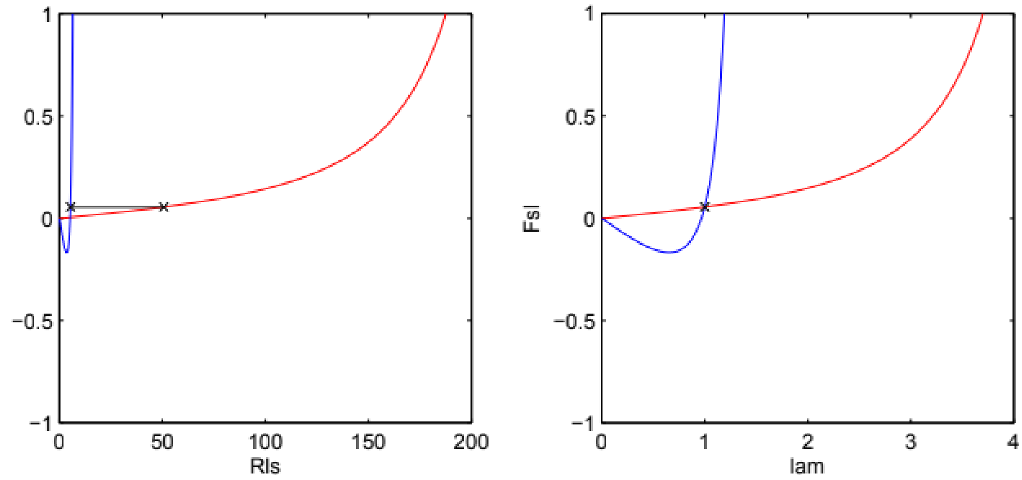


Рисунок 7.21 – Визначення рівноважних початкових подовжень R_s, R_l коротких та довгих ланцюжків у окремих компонентах бімодальних мереж за умовами рівності сил $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_l$

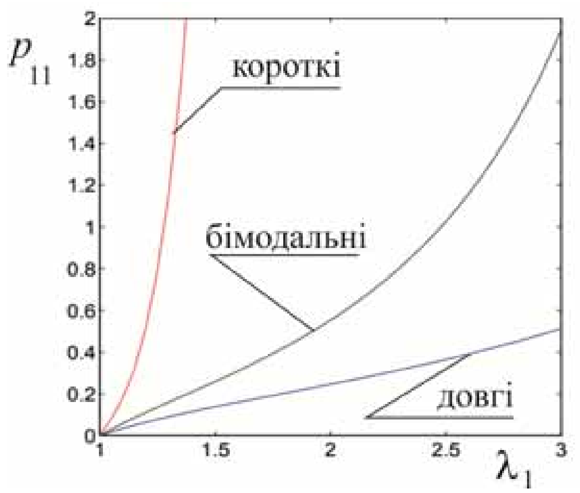


Рисунок 7.22 – Осереднені напруження у бімодальній мережі порівняно із унімодальними мережами з коротких та довгих волокон однакової щільності

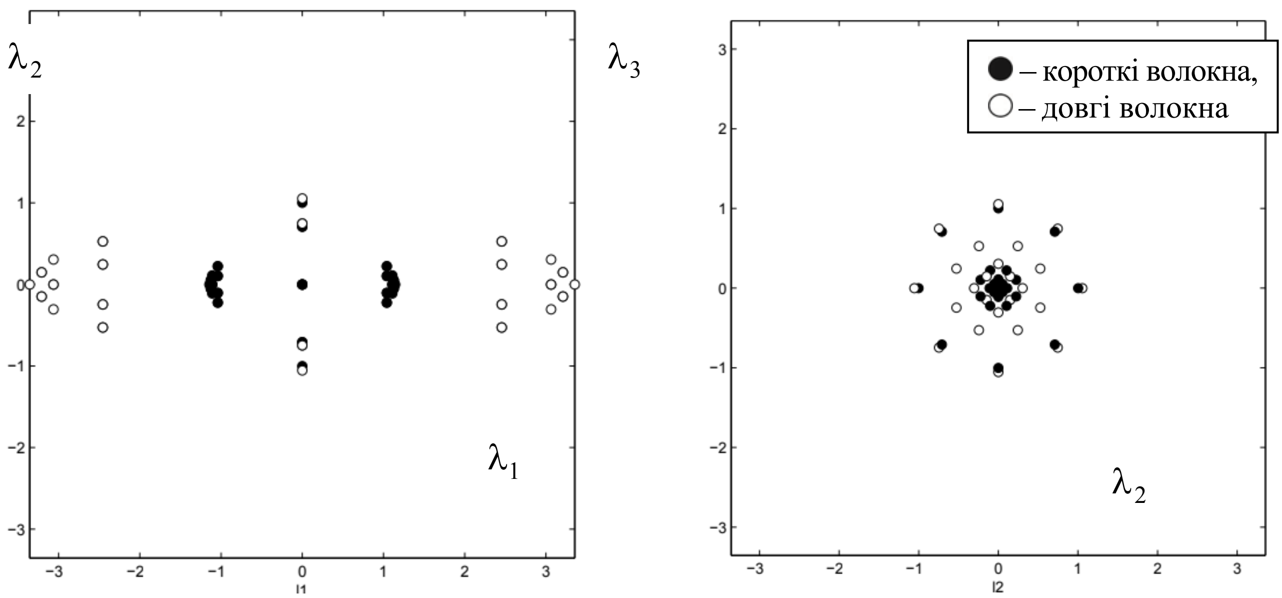


Рисунок 7.23 – Мікродеформації у бімодальній мережі за одновісного розтягнення в проекціях: а – $\lambda_1 - \lambda_2$; б – $\lambda_2 - \lambda_3$

Поточне формулювання моделі МАРС сильно залежить від припущень, що мережа є суцільною та однорідною. Це суттєво для розповсюдження розглянутих шляхів максимального просування через усі компоненти мікроструктури. Крім того, визначення приналежності ланок у шляхах до жорсткого скелету або в’язкої порожнечі не передбачено у поточній моделі мережі. Принаймні перше питання може бути вирішене в межах запропонованої теорії гомогенізації. Це вимагає певного переформулювання щодо несталого характеру переплетень. Зрештою саме завдяки механічному контакту обидві компоненти подвійної мережі деформуються не окремо. У кожен окремий момент є активні контакти, які утворюють тимчасову структуру з’єднань. Перехідні теорії мережі, подібні до [420], добре підходять для опису в’язких ефектів, пов’язаних із динамікою механічно сплутаних ланцюгів, і навіть здатні пояснити ефекти Мулліна зміною кількості пружно активних ланцюжків у незшитій частині мережі [474, 475]. Згідно із таким уявленням, запропонована теорія має бути здатною описувати тимчасові шляхи, їхню кінематику та перебудову

Гібридні гідрогелі з іонними зв’язками мають однорідну структуру. Поліелектроліт і нейтральні ланцюги рівномірно розподілені у просторі. Крім того, завдяки наявності ковалентних зв’язків між двома різновидами ланцюгів (див. рис. 7.18) вони утворюють суцільну мережу. Само по собі те, що в цій мікроструктурі об’єднані гнучкі та жорсткі ланцюги, обумовлює незвичайний характер поведінки матеріалу. Зокрема, як зазначено, жорсткі ланки не можуть зазнавати стискаючого зусилля за стійкого відгуку мережі. Філаменти з різнорідним відгуком до подовження неминуче деформуватимуться у неафінний спосіб. Як і у випадку напівгнучких полімерних гелів, можливо очікувати своєрідну реологію пружних напружень, зокрема під час чистого зсуву [436]. Однак допоки цьому не існує експериментальних підтверджень.

Окремої уваги заслуговують відновлювані іонні зв’язки між ланцюгами альгінату, які, на відміну від решти з’єднань у мережі, можуть порушуватись. Коли таки вони руйнуються, а швидше дисоціюються, кількість активних ланцюгів у мережі зменшується. Цей процес характеризується певною енергією активації [476], тож кількість активних іонних зв’язків можна визначити за допомогою рівняння термодинамічного балансу.

Інші аспекти моделювання. Незалежно від складу да будови еластомерної мережі, існує кілька загальних аспектів, які потребують окремої уваги під час моделювання. Хоча вони і залишилися поза межами розгляду цієї роботи, вони заслуговують принаймні короткої згадки.

По перше, це питання *руйнування мережі*. За певного рівня деформації ланцюжки в мережі наблизяться до межі їхньої здатності та почнуть розриватися. Вочевидь, ланцюги, орієнтовані ближче до напрямку першої головної деформації, досягнуть цього стану раніше. Це зумовлює використання орієнтаційного підходу до врахування механізмів пошкоджуваності, схожих до запропонованих у роботі [477]. Можливості запропонованого у роботі статистичного підходу передбачають урахування відгуку мережі на розрив частини її ланцюжків. Тільки-но зникає зусилля від розірваних ланцюжків, відбуватиметься миттєвий перерозподіл деформацій у мережі, в результаті якого решта ланок дещо розвантажуються.

Другим фактором є *деформаційно-індукована кристалізація.* Багато гнучких макромолекул можуть приймати впорядковані конформації, що є принципово відмінними від випадкових коливань у гумоподібному стані. Ця зміна стану може відбуватися, як і для звичайних речовин, у результаті зниження температури. Однак, відмінною рисою еластомерів є те, що вони здатні кристалізуватися також при розтягненні. Зменшення ентропії подовженого ланцюга робить кристалізацію теромодинамічно вигідною. Знову ж таки, орієнтація полімерних молекул відіграє важливу роль, оскільки саме ланцюги, які зазнають максимального подовження у напрямку навантаження матеріалу, утворюють орієнтовані кристаліти у першу чергу. Мікромеханічні моделі з урахуванням цього явища можна знайти у роботах [170, 197]. Остання з них базується на запропонованому у розд. 3 кінематичному мікро-макроспіввідношенні та відповідній постановці задачі мінімізації.

Деформаційно-індукована кристалізація має велике значення для механіки руйнування полімерних матеріалів. Деформації у вершині тріщини є надзвичайно високими. Процес її розповсюдження, вочевидь, супроводжуватиметься кристалізацію матеріалу у певній зоні навколо. Утворювані кристаліти при цьому виступають як додаткові елементи, які додатково пов’язують ланцюги у мережі, що в свою чергу зміцнює її та збільшує пружну енергію деформованого тіла. Знову ж таки, руйнування кристалітичної фази відбувається відмінно від аморфної частини полімеру.

Нарешті, важливе питання складає *об'ємний відгук та взаємодія з розчинником*. Механізми зміни об'єму принципово відрізняються від природи зміни форми для полімерних матеріалів, яка, як неодноразово відзначалося, пов'язана з деформацією волокон у мережі. Натомість, об'ємний відгук визначається стеричними взаємодіями ланцюгів та їхню взаємодією з молекулами розчиннику, якщо мова йде про гелі. Зазвичай він представлений гідростатичною компонентою тензора напружень у вигляді реакції на обмеження стисливості матеріалу порівняно із здатністю до зсуву. Для гелів це справедливо за умов, якщо вміст розчинника залишається сталим. Однак, насправді у більшості випадків відбувається дифузія молекул розчинника, наприклад води, у відповідь на застосовані до тіла деформації. Його спричиняє різниця хімічного потенціалу внаслідок неоднорідності напружень у гелі. У роботі [197] запропоновано варіаційну постановку та її скінченно-елементну реалізацію для моделювання цього механізму незворотних деформацій полімерних гелів.

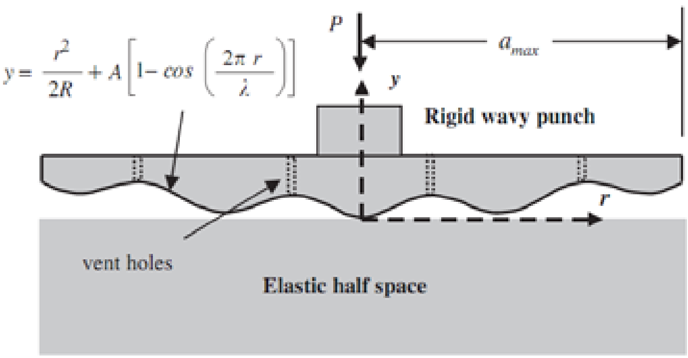
Описані у роботі моделі деформування м'яких матеріалів із неоднорідним складом мережі (див. розд. 6) мають повну якісну збіжність із результатами експериментальних досліджень, описаними у підрозділі.

7.4 Експериментальні дослідження впливу мікроскопічних нерівностей поверхонь на контакту взаємодію

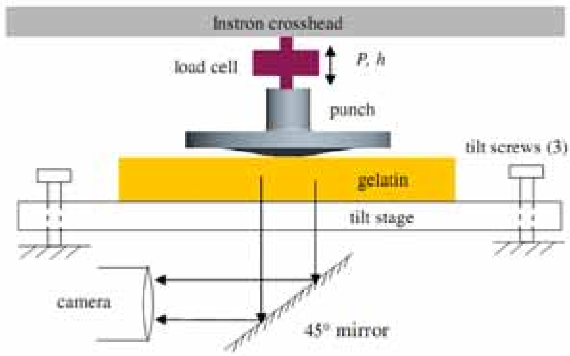
Нерівність поверхонь є одним із найістотніших факторів, які впливають на характер контактної взаємодії. З одного боку, мова йде про шорсткість, що природно притаманна різного роду матеріалам (наприклад, каміння, цегла або асфальтове покриття, що використовуються у будівництві), або таку, що утворюється під час вироблення та механічної обробки (наприклад, у результаті фрезерування та шліфування металевих деталей у машинобудуванні). З іншого боку, хвилястість або інші види мікроскопічної модифікації поверхонь можуть надаватися навмисно з метою отримати нові або поліпшені функціональні властивості. Зокрема шорсткість має істотний вплив на адгезійну взаємодію тіл. Загалом, вважається, що нерівності перешкоджають утворенню повного контакту включно з вершинами та западинами, а, отже, зменшують адгезію. Між собою змагаються поверхнева енергія, що вивільняється у результаті злипання, а також пружна енергія деформації у поверхневому шарі. Така точка зору підтверджується численними експериментальними дослідженнями, які вказують на те, що із збільшенням середньоквадратичної висоти мікроскопічних нерівностей міцність та енергія адгезії зменшуються [477–480]. Більш того, для твердих матеріалів, таких як метали, кераміка, оксидної плівки найменшої шорсткості з амплітудою в 10 нм вже достатньо для того, щоб адгезія між макроскопічними тілами повністю зникла [477]. Зберігають здатність прилипати до нерівних поверхонь лише мікроскопічні частки, розміри яких можна порівняти із радіусом кривизни вершин нерівностей [480]. Якщо ж одне із тіл, що контактують, виявляється м'яким, то діапазон величин шорсткості, в якому спостерігається ефект від її зміни, є значно ширшим. Більш того, було виявлено, що в деяких випадках нерівність поверхні одного з тіл може істотно сприяти прилипанню тіл [459].

В роботі Гудуру та Булла [481] здійснено експериментальне дослідження цього явища. Для цього розглянуто випадок осесиметричного контакту твердого параболічного штампа з хвилястою поверхнею та м'якої пружної основи із гладкою плоскою границею, зображених на рис. 7.24, *а*. Ця контактна задача була досліджена теоретично в роботі [482], а її чисельне моделювання із використанням модифікованого методу граничних елементів міститься у розділі 6. Цінність наведених в експериментальних результатів [481] зокрема полягає в тому, що дає можливість перевірити основні положення фізичної моделі, яка пояснює вплив шорсткості на адгезію м'яких тіл, а також встановити точність обраного наближеного методу, запропонованого у цій роботі.

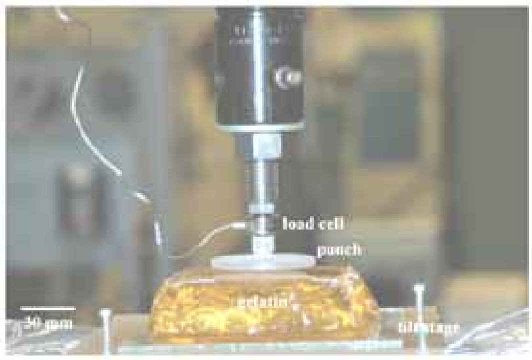
Як пружну основу Гудуру та Булл використали желатиновий блок розмірами приблизно 10x10x5 см. Модуль пружності цього надзвичайно м'якого матеріалу E^* було оцінено як 17.0÷0.5 кПа. Шорсткість власне поверхні самого желатину було визначено в межах 6÷9 нм, тобто вона є незначною. Параболічні індентори були виготовлені із полікарбонату у 18 різних варіантах. Радіус кривизни параболічного профілю та поперечний радіус для них усіх були однаковими та дорівнювали, відповідно, R = 0.229 м та $a_{\max}$ = 29.95 мм. Відмінність окремих зразків один від одного полягала у значенні хвильового числа λ, що складало величину 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2 відносно до радіусу R, а також в амплітуді хвилястості А, яка складала від 0.025λ до 0.05λ. У западинах хвилястих нерівностей були додатково створені вентиляційні отвори, задля усунення ефектів присмоктуваня та повітряної бульбашки під час притискання. Опосередкована оцінка для поверхневої енергії для пари матеріалів желатиновий гель-полікарбонат склала $\gamma =$ 0.22 Н/м. Для вимірювання відстані та зусиль притискання-відриву застосовувалась вимірювальна станція Instron, яка забезпечує точність у визначенні сили в межах 10 мН та контроль переміщень до 1мкм. Разом із тим під прозорою платформою було встановлено нахилене під кутом в 45° дзеркало задля можливості запису зображення плями контакту камерою та обчислення за ним радіусу контакту a. Схема дослідної установки та її фотографія представлені на рис. 7.24, *б, в*.



а



б



в

Рисунок 7.24 – Схема проведення експерименту в роботі Гудуру та Булла [481]: *а* – геометрія твердого параболічного індентора з осесиметричною хвилястою поверхнею; *б* – інструменти та спосіб вимірювання сили контактної взаємодії та розміру контактної плями; *в* – фотографія проведення експерименту

Механіка відокремлення твердої речовини від пружної хвилеподібної поверхні була проаналізована в останній статті, в якій розглянуто осесиметричний випадок сфери та корпус плоского деформації циліндра. Через якісні подібності обговорення обмежувалося тільки осесиметричною задачею. Показано, що поверхнева хвиля зумовлює процес відшарування у змінних стабільних та нестійких сегментах, а кожен нестабільний стрибок розсіює механічну енергію. Як наслідок, зовнішня робота та пікова сила, необхідні для відокремлення хвилеподібного інтерфейсу, вищі, ніж відповідні значення плоского інтерфейсу, тобто хвилястість викликає зміцнення інтерфейсу, а також зміцнення. У роботі представлено систематичне експериментальне дослідження, яке розглядає вищевказаний теоретичний аналіз, вимірюючи адгезію між «жорстким» хвилястим індентором та м'яким пружним матеріалом, що є тут блоком желатину. Отримане збільшення адгезії внаслідок хвилястості тісно узгоджується з теоретичними передбаченнями в межах невизначеності експериментальних та матеріальних параметрів. Експерименти не тільки підтверджують теорію, але також демонструють, що адгезія м'якого матеріалу може бути суттєво поліпшена топографічною оптимізацією самостійно, без зміни хімії поверхні.

Наведені в роботі [481] експериментальні дані узгоджуються з результатами чисельного моделювання, наведеними в розділі 6. Процес роз'єднання штампа з м'яким блоком вочевидь не є сталим. Експериментальні криві криві, наведені на рис. 7.25, показують, що за контрольованого переміщення штампа виникають стрибки, під час яких різко змінюється сила взаємодії між тілами. Автори експериментального дослідження також свідчать про відповідне скорочення площі плями контакту під час кожної з таких подій. Аналітична теорія [482], яка описує саме цей експеримент, пояснює це явище тим, що неперервна крива рівноважних станів не є монотонною. Відповідно, в місцях перегину система буде перестрибувати до наступного стійкого стану. З точністю до похибки наближеного методу результати моделювання відтворюють вказану поведінку, як показано на рис. 7.25.

На відміну від гладкої сфери, для якої справедлива теорія Джонсона-Кендалла-Робертса, адгезійна система замість одномоментного відриву при досягненні критичної відстані зазнає серій часткових роз'єднань. Кожне з них пов'язане із проходженням границі суцільної плями контакту через черговий гребінь осесиметричного хвилястого профілю. При цьому рівноважна крива зазнає перегину та змінює знак зміни сили, а потім й переміщення на протилежний. На експериментальній кривій натомість спостерігається сходинка. Її скінченний нахил можна пояснити в'язкопружними властивостями желатинового гелю та поступовою замість раптової релаксації напружень та деформацій. Добре видно, що розрахункова модель достатньо добре збігається з експериментом у визначенні моментів втрати стійкої поведінки. Між тим є помітною розбіжність у визначенні значення сил адгезій та нахилу стійких відтинків кривої відокремлення.

Автори оригінального дослідження вказують на вентиляційні отвори, як потенціальне джерело такої похибки. Кожне з них виступає як початкова кругла тріщина, що безумовно послаблює адгезію на границі двох тіл. Через це пікове значення сили, за якої відбувається черговий частковий відрив, виявляється істотно меншим, ніж передбачений розрахунковою моделлю. Серед інших факторів треба зазначити скінченні розміри желатинового блоку, що не відповідає припущенню щодо наближення пружного тіла напівпростором, а також істотну величину контактного тиску, що передбачає деформації порядку 10%, за яких більш точним було б застосовувати геометрично та фізично нелінійну теорію пружності. Із урахуванням цих зауважень тим не менш чисельна модель дає можливість отримувати якісно адекватні результати.

Результати для серії штампів, представлені на рис. 7.25, свідчать про значний вплив нерівностей на адгезійну міцність. Із одночасним збільшенням амплітуди та довжини хвиль спостерігається поступове підвищення пікової величини відриву штампа від м'якої підстави. Зокрема, за відношення $A/\lambda = 0.025$ міцність прилипання порівняно з випадком гладкого параболічного штампу відповідно до теорії Джонсона-Кендалла-Робертса досягає шестикратного підвищення. За іншої форми хвилястості з $A/\lambda = 0.05$, як показано на рис. 7.26, теорія передбачає ще більш значуще підсилення адгезії в 17 раз.

Слід зазначити, що на практиці досягнення такої агдезійної міцності вимагатиме попереднього притискання тіл, необхідне для встановлення повного контакту, що є не завжди досяжним. Тим не менш, експериментально встановлені результати Гудуру та Булла [481], підтверджені результатами чисельного моделювання, свідчать про те, що за рахунок поєднання спеціально підібраної геометрії тіл та пружних властивостей матеріалів можливо досягати надзвичайно поліпшених адгезійних з'єднань.

Таким чином, можна зробити висновок про повну якісну та задовільну кількісну відповідність із чисельними результатами, описаними у підрозд. 6.4.

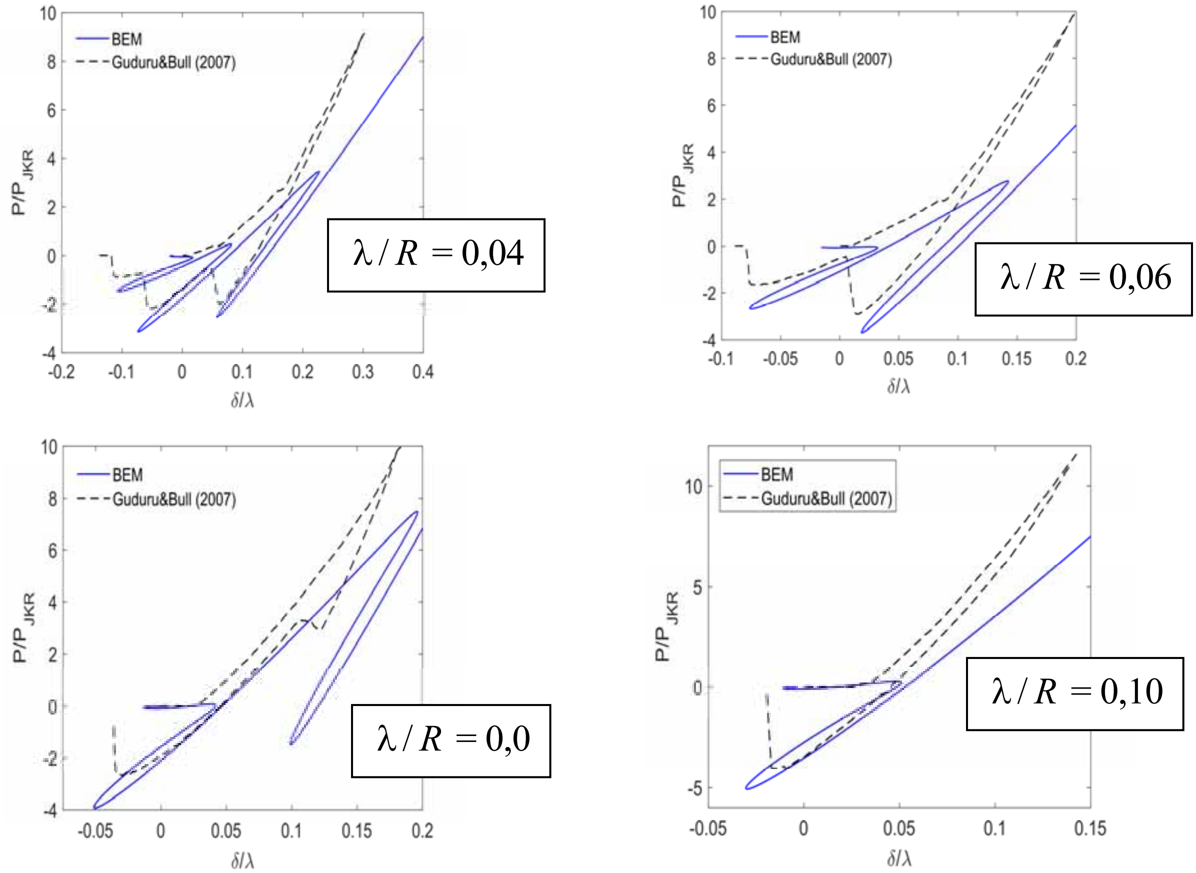
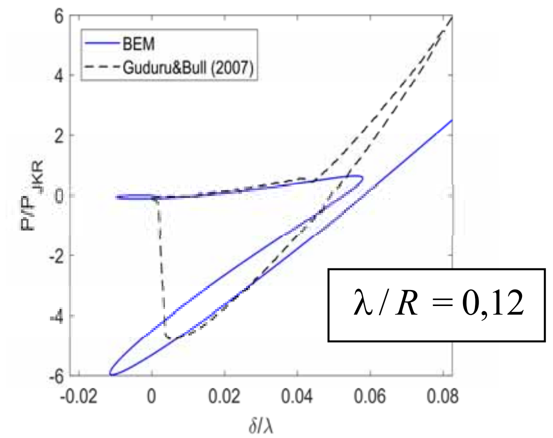


Рисунок 7.25 – Порівняння експериментальних кривих притискання-відриву параболічного штампа до пружної основи, отриманих в роботі [481], з наближено обчисленими за допомогою методу граничних елементів за амплітуди хвиль А = 0.025λ та значень хвильового числа



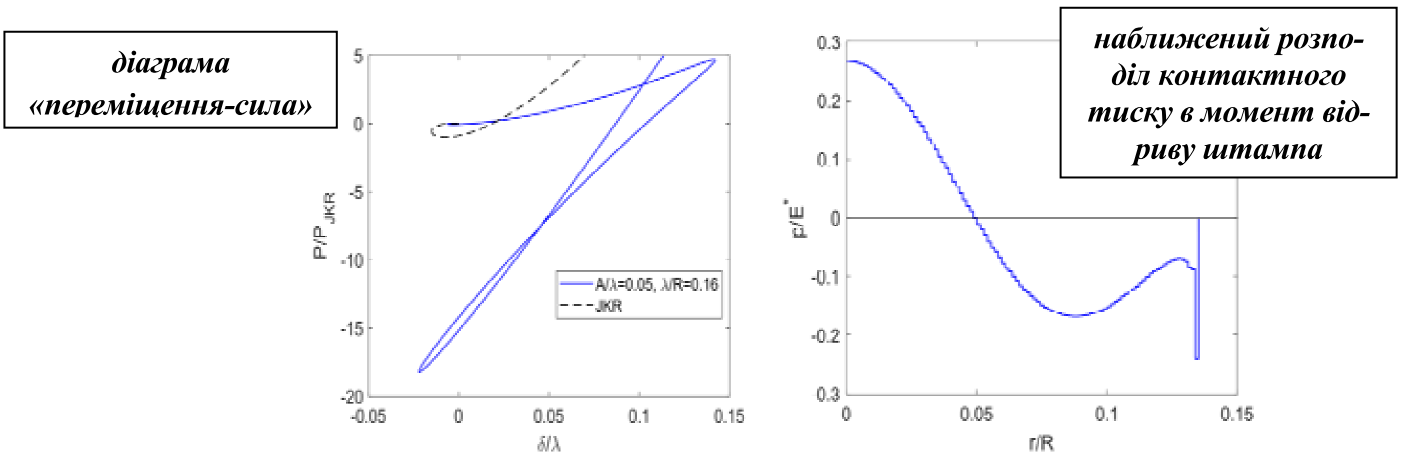


Рисунок 7.26 – Підвищення сили відриву осесиметричного параболічного штампу у випадку нерівності з хвильовим числом $A/\lambda = 0.16$ і амплітудою $A/\lambda = 0.05$ порівняно з теорією Джонсона-Кендалла-Робертса для гладкого штампа

7.5 Експериментальне дослідження контактної взаємодії кулькового поршня радіальної гідропередачі з профільованою біговою доріжкою

При створенні нової гідропередачі для перспективних важких бойових машин виникає ряд проблемних ситуацій. Вони зумовлені, з одного боку, обмеженнями на габаритні розміри гідропередачі унаслідок оригінальних компонувальних рішень моторно-трансмісійного відділення вітчизняних танків, а з іншого, – через високий рівень потужності, який необхідно передавати від двигуна до рушія. Відповідно, в зонах контактної взаємодії елементів гідропередачі діють високі контактні навантаження. Саме вони є основним стримуючим чинником для забезпечення високих технічних характеристик проектованих гідропередач.

Це зумовлює необхідність визначити вплив форми поверхонь контактуючих тіл і властивостей поверхневих шарів на величину і характер розподілів контактного тиску у сполученні найбільш навантаженої пари деталей – кулькового поршня та складнопрофільної бігової доріжки гідропередачі.

Гідропередача ГОП-900, створена в ДП «Харківське конструкторське бюро з машинобудування ім. О.О. Морозова» [www.morozov.com.ua], є ключовою ланкою при створенні перспективних важких бойових броньованих машин з високим рівнем рухливості, маневреності та керованості (див. рис. 6.38, рис. 7.27), а у табл. 7.4 наведені її технічні характеристики.

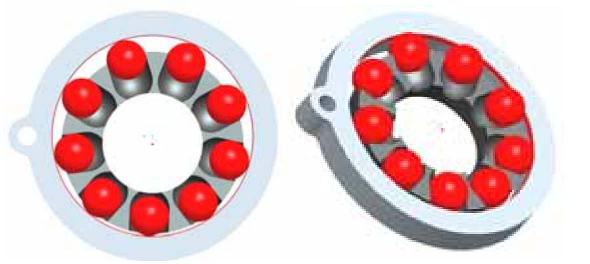


Рисунок 7.27 – Гідропередача ГОП-900 із кульковими поршнями [[www.morozov.com.ua]

Основним найбільш навантаженим і відповідальним елементом гідропередачі є пара «кульковий поршень – бігова доріжка». У зоні їх контактної взаємодії виникає контактний тиск, на який істотний вплив чинять два фактори: форма поверхонь контактуючих тіл і фізико-механічні властивості поверхневих шарів. З огляду на те, що форма і розміри кульового поршня радіальної гідропередачі визначаються її проектними характеристики, то варіативність геометричної форми забезпечується тільки формою профілю осьового перерізу бігової доріжки (рис. 7.28). Що стосується властивостей поверхневих шарів контактуючих деталей, то вони визначаються механічною обробкою, термообробкою і властивостями матеріалу kулькового поршня та бігової доріжки. При цьому раніше останній чинник не отримував експериментального дослідження свого впливу на контактну взаємодію цих СПТ, а був досліджений у обмеженій постановці без урахування впливу іншого.

З огляду на перелічені обставини, з досліджуваного об'єкта був вичленений базовий елемент – кульковий поршень і фрагмент бігової доріжки. Цей фрагмент матеріалізований у вигляді фізичного макету (рис. 7.29). У зборі об'єкт досліджень наведений на рис. 7.30. Кульковий поршень був узятий оригінальним (із дослідного зразка ГОП-900), а фрагмент бігової доріжки виготовлений із блоку плексигласу. З точки зору варіативності форми у блоці плексигласу виконані вирізи різного профілю (рис. 7.31).

Для реалізації ж варіативності фізико-механічних характеристик поверхневих шарів між контактуючими тілами розміщувався багатошаровий набір з гумової смуги. Властивості і товщина цієї смуги відповідають наведеним у роботі [457] (рис. 7.32), однак максимальну кількість шарів збільшено з трьох до п'яти. Це відчутно розширило діапазон варіювання фізико-механічних властивостей модельованого таким чином проміжного шару. Таким чином, потрібне проведення додаткових експериментальних досліджень у лабораторних умовах.

Для реалізації навантаження досліджуваного об'єкта був зібраний спеціальний стенд (рис. 7.33). Він складається з основи *1*, на якій змонтована збірка універсально-збірного пристосування *2*. Вона призначена для розміщення і базування блоку плексигласу *3* з фігурними вирізами. Кульковий поршень *4* розміщається у відповідному фігурному вирізі та навантажується за допомогою гвинта *5*, вмонтованого в силову рамку *6*. Як реєструюча апаратура застосовувалися: прилад тензометричний набору ІСД-3, приєднаний до тензодатчиків типу КФ-5 на силовому гвинті (на рис. 7.33 – № 5) (рис. 7.34); чутлива до контактного тиску плівка фірми Fuji, яка розміщена між притискуваною кулею та профільним вирізом у блоці (рис. 7.35).

Цим забезпечується вимірювання притисного зусилля кулі P і контактного тиску p між цією кулею та профільним вирізом у блоці плексигласу. Система «гвинт – тензодатчики – ІСД-3» протарована за допомогою динамометра зразкового стиснення ДОСМ-3. Чутлива до тиску плівка різних типів працює у різних діапазонах чут-

Таблиця 7.4 – Базові параметри елементів ГОП-900

Позначення		Параметри	Значення
Геометричні параметри	R_p	радіус поршня, м	0.03175
	R_{sp}	радіус кругової траєкторії центра поршня, м	0.128
	R_{st}	радіус статорного кільця, м	0.15975
	R_{rot}	радіус корпуса ротора, м	0.145
	δ	максимальний ексцентриситет, м	0.012
Пружні константи матеріалу поршня і статора			
E		модуль пружності, ГПа	200
ν		коефіцієнт Пуасона	0.3
Параметри навантаженості передачі			
P		притискне зусилля у спряженні поршня зі статором, кН	$15 \div 120$

Рисунок 7.28 – Характер профілю бігової доріжки початкового контакту з кульовим поршнем при значеннях радіуса її центральної частини: *а* – менших радіуса поршня, *б* – більших радіуса поршня

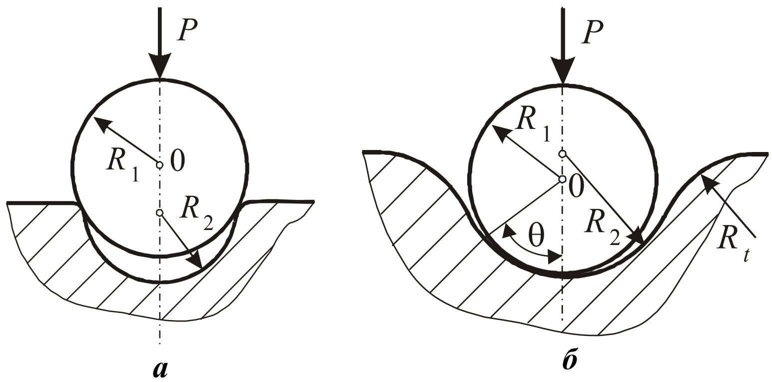


Рисунок 7.29 – Фізичний макет об’єкта у розборі

Рисунок 7.30 – Об’єкт досліджень у зборі

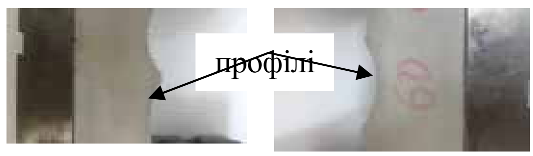


Рисунок 7.31 – Профілі бігової доріжки

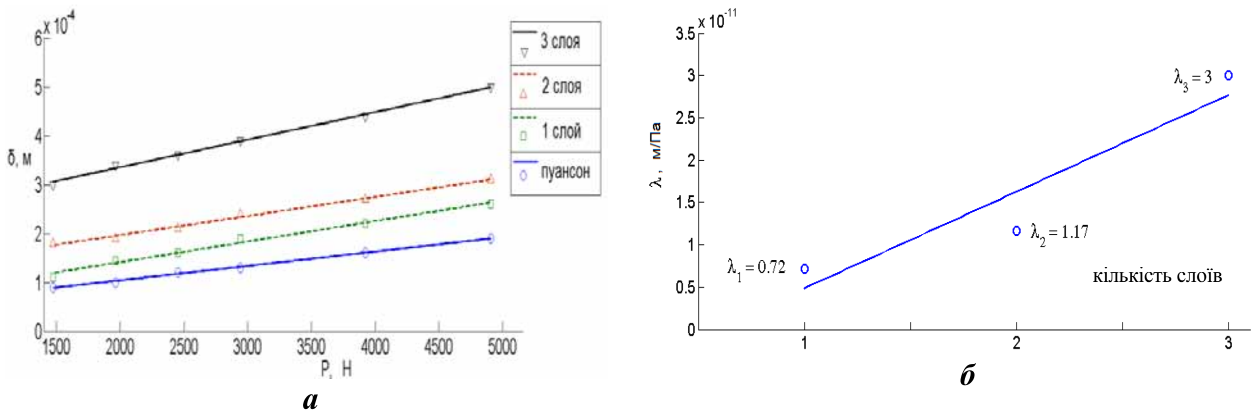


Рисунок 7.32 – Фізико-механічні властивості гумової смуги під дією притискного зусилля [457]: *а* – залежність переміщень пуансона при варіюванні прикладеним навантаженням для різної кількості шарів гуми; *б* – крива для варіювання податливості гуми, використовуваної для проведення експериментів

ливості. Використовувані у роботі типи плівок із зазначенням діапазону вимірюваних тисків, МПа: *складені* – Ultra Super Low Pressure (LLLW), діапазон вимірюваноготиску – 0,2–0,6 МПа; Super Low Pressure (LLW), 0.5–2.5 МПа; Low Pressure (LW), 2.5–10 МПа; Medium Pressure (MW), 10–50 МПа; *одинарні* – Medium Pressure (MS), 10–50 МПа; High Pressure (HS), 50–130; Super High Pressure (HHS), 130–300 МПа.

Кожен забезпечений калібрувальною таблицею кольорів, що ставить у відповідність інтенсивності контактного відбитка відповідний контактний тиск. Крім того, для розшифровки картини розподілу контактного тиску була залучена розроблена раніше [458] і вдосконалена (для проведення поточних випробувань) програма Pressure Mapping Tool (PMT) (рис. 7.36). Зокрема, вона доповнена можливостями визначення площі контакту, дво- та одновимірних розподілів тиску (вздовж площадок та ліній), а також можливістю роботи не з одним, а з декількома пакетами плівок, зібраними в єдиний фіксуючий шар.

У ході досліджень варіювався діаметр профілю бігової доріжки і податливість проміжного шару між нею та кульковим поршнем. У табл. 7.5 зібрані варіанти характеристик досліджуваного збирання. Крім того, у деяких випадках здійснювалися вимірювання з п’ятьма шарами з гумової смуги. Навантаження здійснювалося або за допомогою ударника, або на стенді (див. рис. 7.33). Вимірювання проводилися по 3÷5 разів із застосуванням як вимірювача або чутливої плівки MS, або HS, або їх набору. Відповідно, наведені у табл. 7.5 варіанти забезпечуються відповідно індексами «М», «Н» і «НМ». На рис. 7.37 представлені стенд і робочі моменти випробувань, на рис. 7.38, а також у Додатку Е (рис. Е.2–Е.24) наведені результати експериментів при варіюванні радіусів профіля бігової дорожки та кількості шарів гумової смуги (див. табл. 7.5) для плівок «Н», «М» і «НМ» відповідно.

На рис. 7.39–7.41 та рис. Е.26–Е.30 Додатку Е наведені результати окремої серії експериментів для радіусу профілю бігової доріжки 68,5 мм, у яких притискання здійснювалося поступово за допомогою гвинтового важеля. Отримані контактні відбитки були проаналізовані із більш точно обчисленими значеннями притискної сили, площі контакту та максимального контактного тиску, які наведені в табл. 7.6.

Як видно з представлених картин розподілів контактних плям і тиску, спостерігається повна якісна і задовільна кількісна відповідність отриманих експеримента-

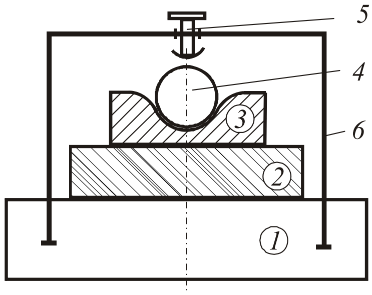


Рисунок 7.33 – Схема спеціального стенда

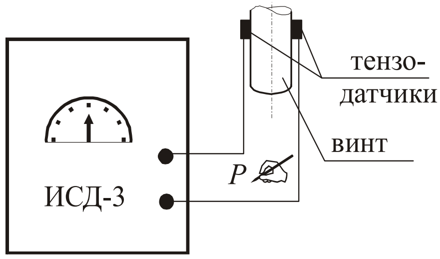


Рисунок 7.34 – Схема вимірювання притискного зусилля

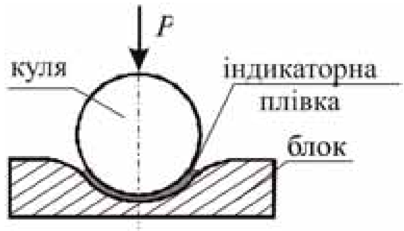
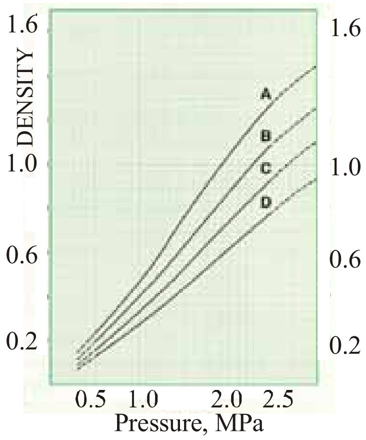
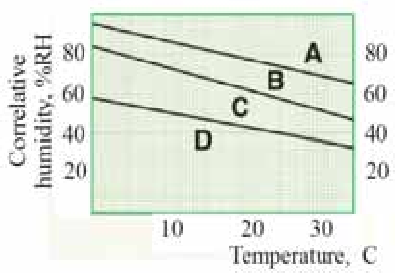


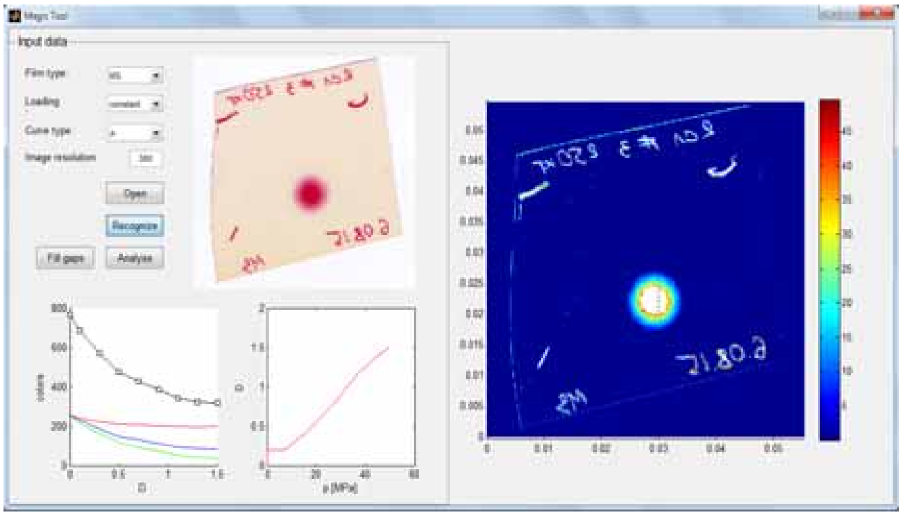
Рисунок 7.35 – Схема вимірювання розподілу контактного тиску



а



б



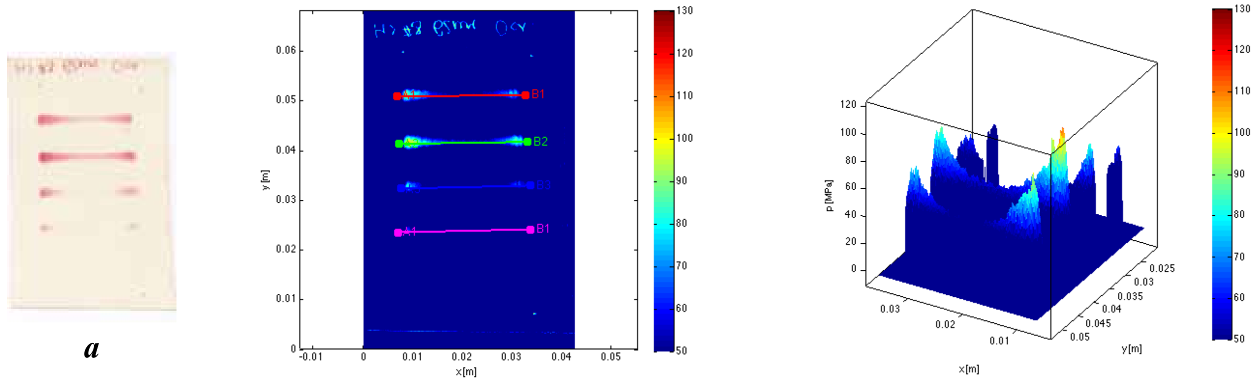
в

Рисунок 7.36 – Програма розшифровки картини розподілу контактного тиску:
а – криві залежності «тиск – інтенсивність кольору відбитка» для плівки LLW, *б* – залежність кривих від умов проведення вимірювань, *в* – робоче вікно програми Pressure Mapping Tool (PMT)

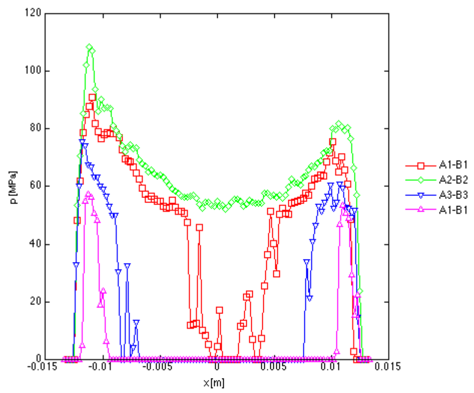
Таблиця 7.5 – Варіанти поєднання характеристик досліджуваного макета складання «кульковий поршень – проміжний шар – бігова доріжка гідропередачі»

№ п/п	№ експ.	Радіус профілю бігової доріжки, мм	Кількість шарів гумової полоси	Типи плівки
1	8	62	0	«М», «Н» і «НМ»
2	9		1	
3	10		4	«М», «Н»
4	0	68,5	0	«М», «Н» і «НМ»
5	4		1	
6	6		4	
7	12	73	0	«М», «Н» і «НМ»
8	14		2	

Рисунок 7.37 – Стенд і робочі моменти випробувань контактної взаємодії кулькового поршня з макетом бігової доріжки гідропередачі ГОП-900

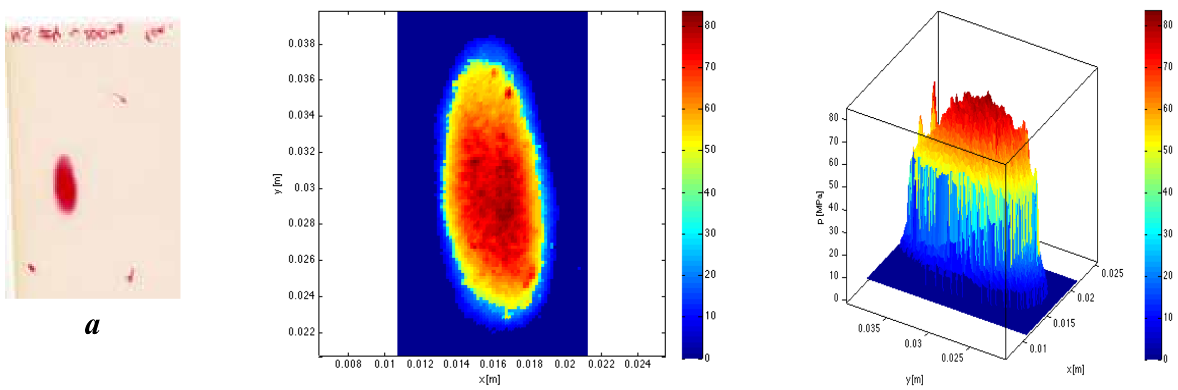


а *б* *в*



г

Рисунок 7.38 – Експеримент 8/62 (№ 1) (див. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

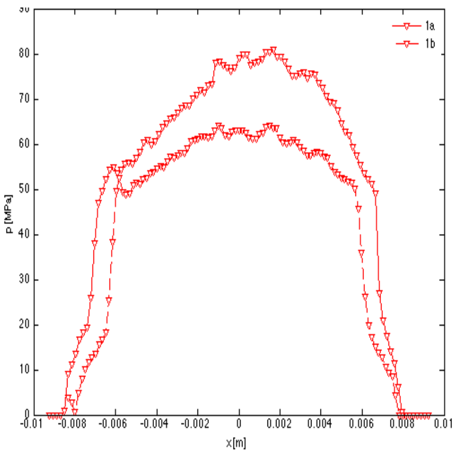


а *б* *в*

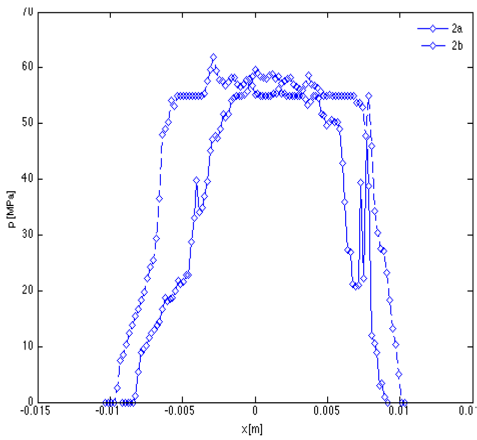
Рисунок 7.39 – Експеримент 4 (№ 1) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія) льно (див. рис. Додатку Е) і чисельно (див. розд. 6) даних. Зокрема, спостерігається (для випадку, див. рис. 7.28, а) відповідно, варіанти 0/62, 9/62, 4/68,5 і 6/68,5 (див. табл. 7.6) гантелевидний вигляд контактних майданчиків і розподілів контактного тиску. Також при цьому простежується згладжувальний ефект від наявності пружного проміжного шару: зі зростанням кількості шарів контактна площадка збільшується, максимальний контактний тиск зменшується, а їхній розподіл набуває більш рівномірного характеру.

Таблиця 7.6 – Значення притискної сили (P), площі контакту (A) та максимального контактного тиску (p_{max}), отримані у серії експериментів для радіусу профіля бігової доріжки 68,5 мм

№ п/п	nr	Число шарів	Плівки	P, Н	A, мм^2	p_{max}, МПа
1	4	1	HS+MS	4202,27	88,2	83,44
2	5	1	HS+MS	3235,89	80,97	68,47
3	6	2	HS+MS	3657,25	119,37	57,65
4	7	2	HS+MS	5730,74	158,22	65,56
5	8	4	MS	1300,5	108,73	22,375
6	9	4	HS+MS	6983,37	230,14	60,47

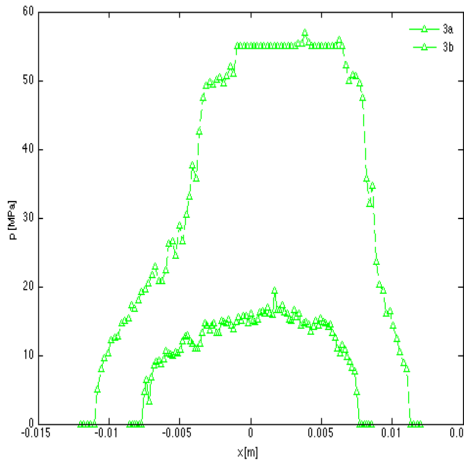


а

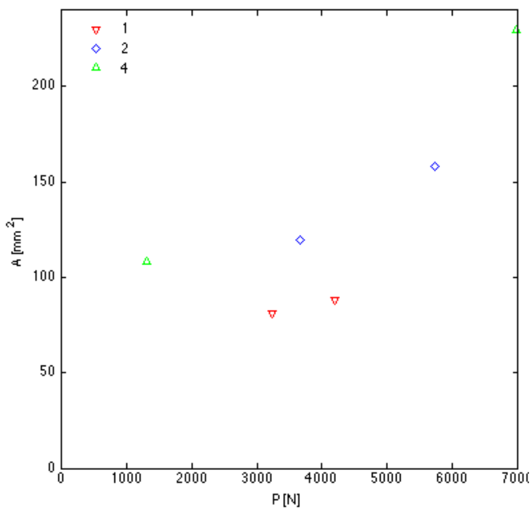


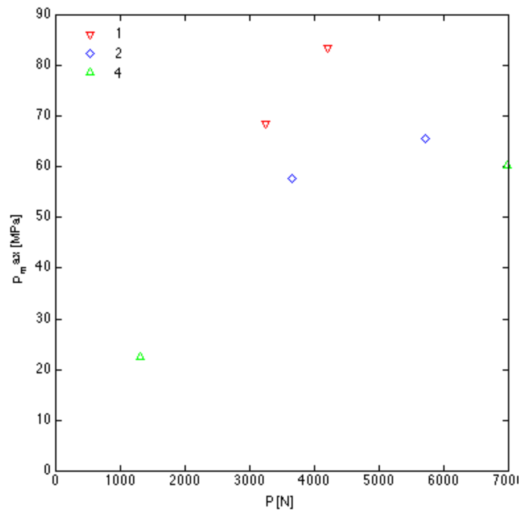
б

Рисунок 7.40 – Осьові розподіли контактного тиску, МПа (див. табл. 7.6) для експериментів: *а* –4 та 5; *б* – 6 та 7; *в* – 8 та 9



в





а ***б***

Рисунок 7.41 – Залежність площі контакту (*а*) та максимальних значень контактного тиску (*б*) від притискної сили в експериментах 4–9 з різною кількістю шарів (1, 2 та 4)

Такий самий згладжувальний ефект спостерігається і для випадку (див. рис. 7.28, б). Крім того, встановлена істотно нелінійна залежність між притискною силою, з одного боку, і площею контакту і тиском, – з іншого (рис. 7.41). Так, для випадку з одним проміжним шаром при збільшенні притискної сили з 3,24 кН до 4,2 кН (тобто на третину) контактна пляма зростає лише на 10%, а максимальний контактний тиск – менше, ніж на 25%. Для варіанту двох проміжних шарів зростання сили з 3,66 кН до 5,73 кН (тобто майже на 60%) призводить до зростання контактних плям лише на третину, а тиску – менш ніж на 15%.

Таким чином, отримали підтвердження адекватності розробленої математичної та точності чисельних моделей (див. розд. 2, 4, 5), а також точності і достовірності отриманих результатів розв’язання тестових і прикладних задач (див. розд. 4–6), а також обґрунтованості розроблюваних на їх основі рекомендацій.

7.6 Експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між тілами з контактуючими поверхнями близької форми

У багатьох випадках між контактуючими тілами навмисно або випадково виявляється проміжний пружний шар із нерівномірно розподіленою податливістю і/або товщиною. Окремий випадок подібного типу - на рис. 7.42. У цьому випадку на стенді (див. попередній підрозділ) ця ситуація була промодельована розміщенням сталевої смуги шириною $a = 5$ мм і товщиною 1 мм поверх двох шарів гуми (див. попередній підрозділ). На рис. 7.43 наведені робочі моменти випробувань взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою з вузьким жорстким проміжним шаром, а на рис. 7.44–7.46 – результати вимірювання. Видно, що наявність жорсткої смуги різко змінює характер розподілу контактного тиску: вони різко зростають на області, займаній цією смугою, порівняно із іншою частиною області контакту, де розміщений тільки податливий шар. Таким чином, можна зробити висновок, що шляхом впливу та товщину і податливість проміжного шару можна відчутно впливати на розподіл контактного тиску у сполученні СПТ.

Також додатково здійснено чисельне та експериментальне дослідження розподілів контактного тиску при створенні попередньо деформованого стану. Зокрема, здійснено чисельний аналіз НДС макета системи «кульковий поршень – бігова доріжка» при кінематичному навантаженні (рис. 7.47). У табл. 7.7 наведені розподіли контактного тиску для випадків без та із попереднім деформуванням (вигин блока). Видно, що додаткове навантаження призводить до деформування тіл, що контактують. При цьому різко знижується рівень контактного тиску, оскільки у актуальному стані відбувається розкриття лунки у макеті бігової доріжки. Тим самим штучно збільшується радіус цієї лунки, а, відповідно, настають більш сприятливі умови контактування із шаром. Оскільки на розподіл контактного тиску впливає форма та розміри початкового зазору, то паралельно розрахункам можна поставити задачу про експериментальне дослідження впливу на них попереднього деформування одного з тіл. На стенді, використовуваному раніше (див. підрозд. 7.4 вище), було створено зміну зазору між тілами за рахунок попереднього деформування одного з них: між цим тілом і основою розміщується в середній частині тонкий циліндр ø1,5 мм, а край прижатий силами **P**. У результаті початковий зазор (діаметр виїмки – ø 60 мм, діаметр кулі – ø 63,5 мм) змінився: розподіл величини t викликаний дією попередніх керуючих зусиль (рис. 7.48). На рис. 7.49–7.51 – результати вимірювань. Як випливає з їх аналізу, для випадку близьких профілів (тобто таких, що мало змінюються на області контакту) додат-

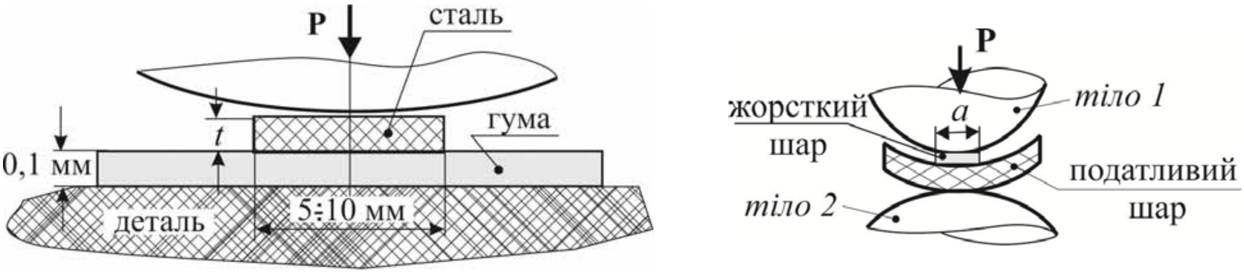
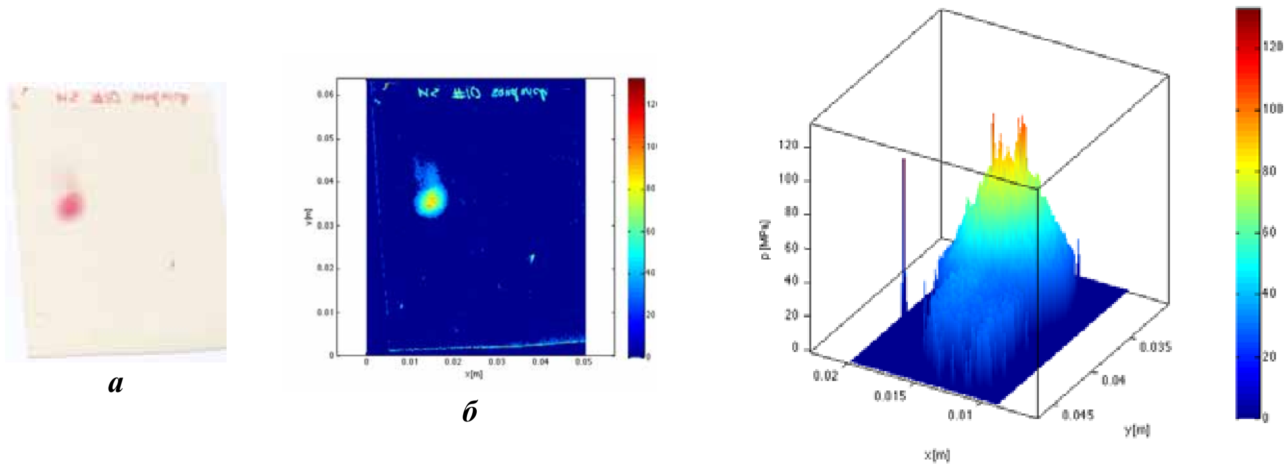
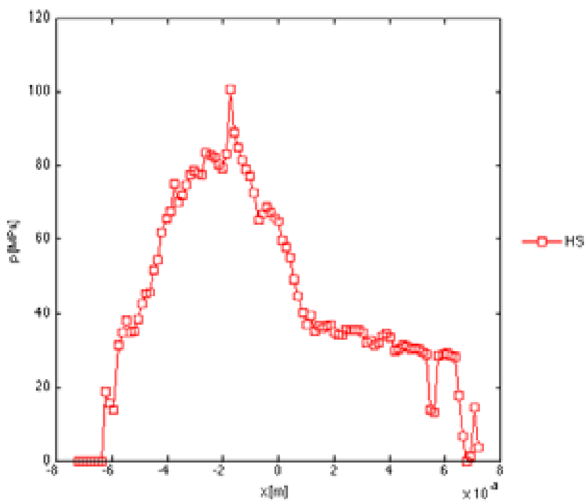


Рисунок 7.42 – Схема розміщення жорсткішого і податливого проміжних шарів між складнопрофільними тілами *1* і *2*

Рисунок 7.43 – Робочі моменти випробувань взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою з вузькою жорсткою вставкою в проміжному шарі



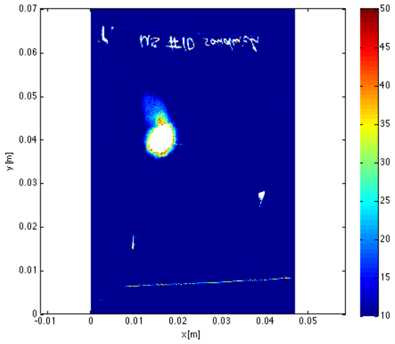
а *б* *в*



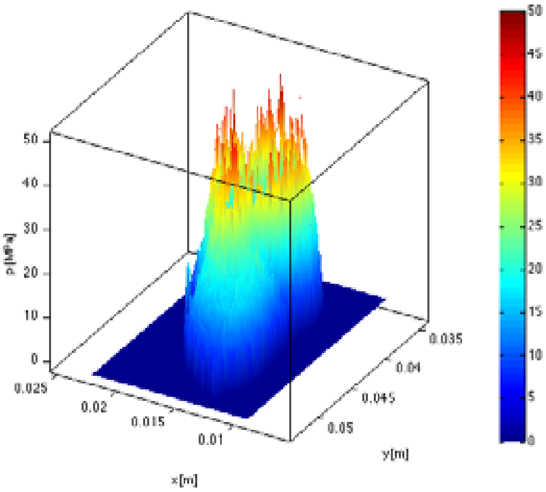
г

Рисунок 7.44 – Розподіл контактних майданчиків і тиску для випадку подвійного гумового шару і жорсткої сталевої смуги (плівка «Н»):
а – контактний відбиток;
б-г – розподіл контактного тиску, МПа

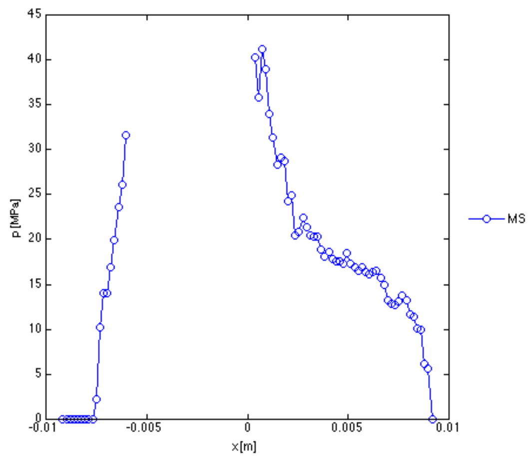
а



б



в



г

Рисунок 7.45 – Розподіл контактних майданчиків і тиску для випадку подвійного гумового шару і жорсткої сталевої смуги (плівка «М»):
а – контактний відбиток;
б–г – розподіл контактного тиску, МПа

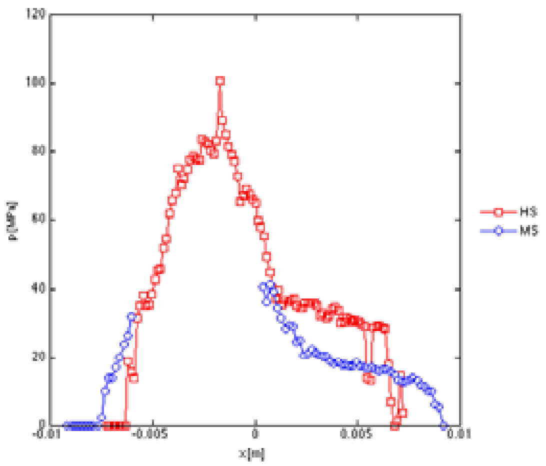
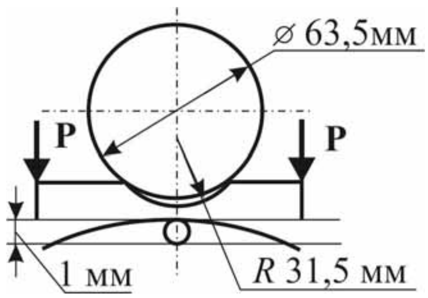
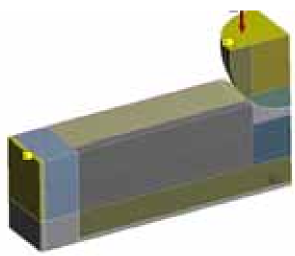


Рисунок 7.46 – Розподіл контактних майданчиків і тиску для випадку подвійного гумового шару і жорсткої сталевої смуги (плівка «HM»): суміщена картина розподілів контактного тиску



а



б

Рисунок 7.47 – Схема навантаження системи «поршень – бігова доріжка» (*а*) та відповідна СЕМ (*б*)

Таблиця 7.7 – Розподіл контактного тиску, МПа, за величини попереднього вигину блоку 0.5, 1, 1.5, 3, 5, 7, 10мм та притисного зусилля в кульковому поршні 2500Н

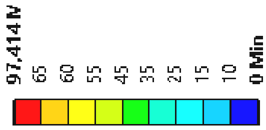
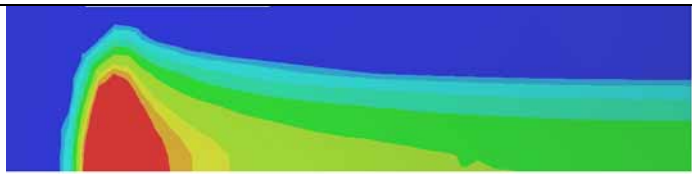
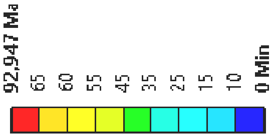
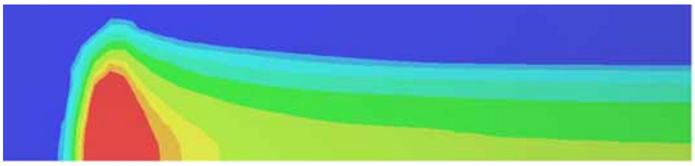
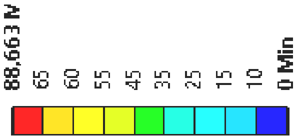
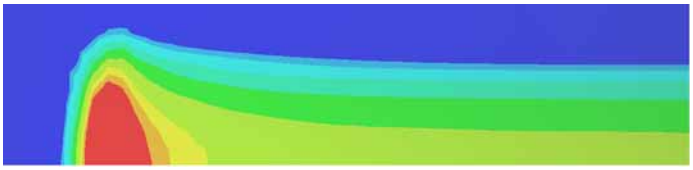
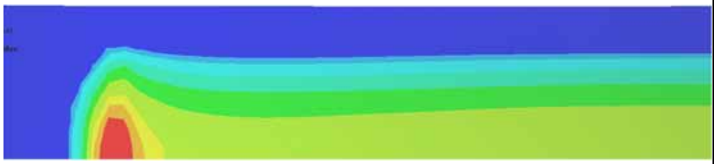
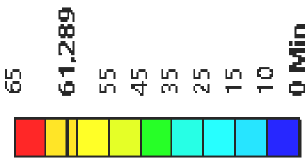
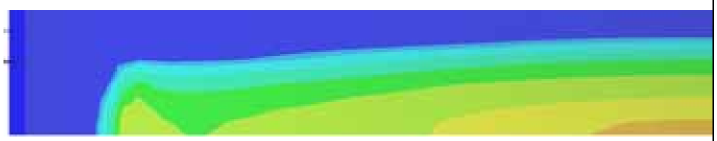
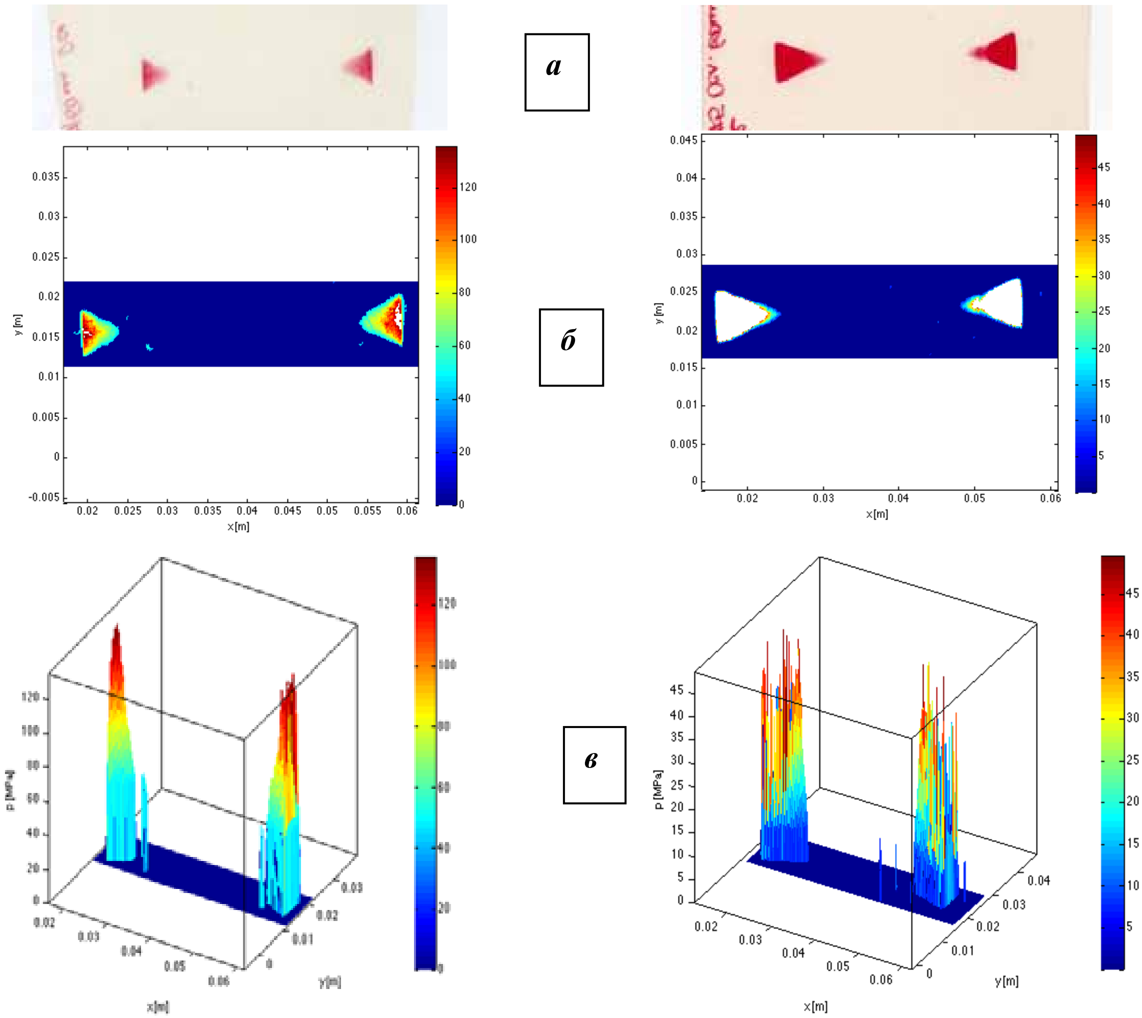
Задані переміщення, мм	Шкала	Розподіл контактного тиску, МПа
0.5		
1		
1.5		
3		
4		
5		
7		
10		

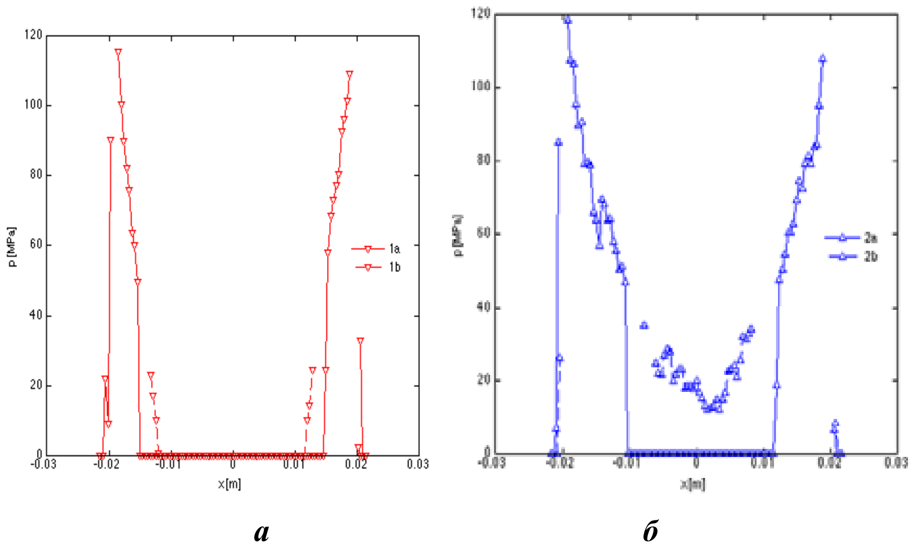
Рисунок 7.48 – Схема деформування одного із контактуючих тіл

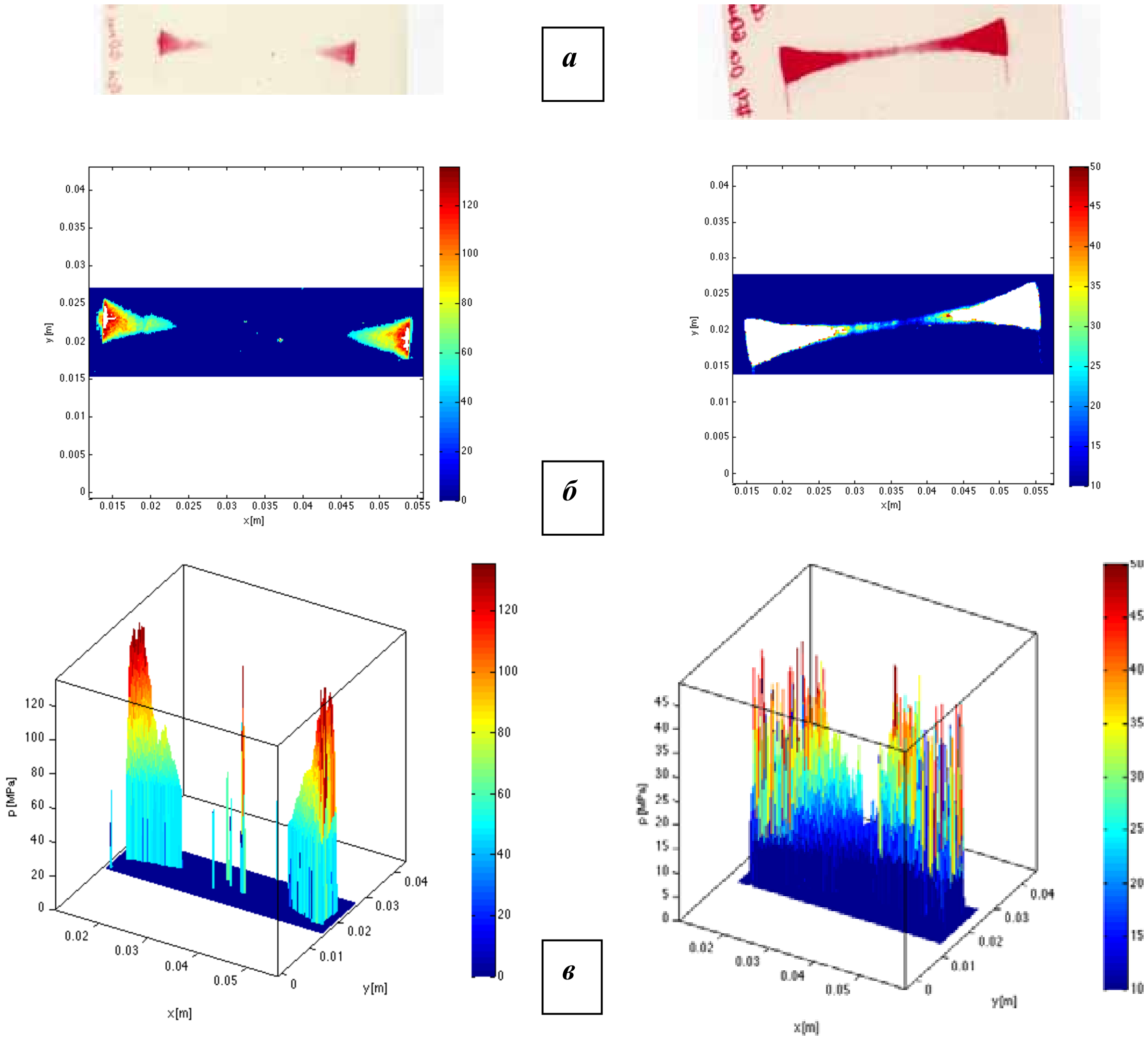


«Н» плівка *«М» плівка*

Рисунок 7.49 – Розподіл контактного тиску для виїмки ø 60 мм без дії попередніх зусиль деформування: *а* –відбиток; *б–в* – розподіл контактного тиску

Рисунок 7.50 – Картина розподілу контактного тиску без (а) і з попередньою деформацією одного із контактуючих тіл (б):
а – без попереднього деформування;
б – з попереднім деформуванням





«Н» плівка *«М» плівка*

Рисунок 7.51 – Розподіл контактного тиску для виїмки ø 60мм за умов дії попередніх зусиль деформування та із ними: *а* – відбиток; *б–в* – розподіл контактного тиску

кове попереднє деформування може досить сильно вплинути на розподіл контактного тиску. Зокрема (див. рис. 7.51), зникає область нульового контактного тиску у центральній частині, а із двозв'язної область контакту перетворюється в однозв'язну. Таким чином, отриманий ефект може бути використаний для управління контактною взаємодією СПТ.

7.7 Експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань, прес-форм та роликів

Для аналізу контактної взаємодії елементів СПТ були обрані об'єкти, що частково відповідають тим, які досліджені у розд. 6: універсальні збірні пристосування, прес-форми та ролики. Усі ці об'єкті мають або складну форму поверхонь сполучених елементів, або збурення цієї форми чинить суттєвий вплив на контактну взаємодію, а, відповідно, – й на працездатність виробів.

У процесі дослідження контактної взаємодії елементів УЗП (рис. 7.52) визначався розподіл контактного тиску між призмою та базовою плитою. Як і у ході чисельних досліджень (див. розд. 6), призми притягувалися до базової плити відповідними болтами. Між призмою та плитою у варіанті 1 (див. рис. 7.52) не було ніякого проміжного шару, а у варіанті 2 – гумовий шар товщиною 1 мм (див. рис. 7.52). На площині з'єднання «призма–плита» визначався розподіл контактного тиску за допомогою чутливих до тиску плівок (аналогічно, як і у підрозд. 7.4 та 7.5). На рис. 7.53 наведені контактні відбитки та розподіли контактного тиску, одержані у ході розшифровок. Видно, що наявність пружного проміжного шару згладжує розподіл контактного тиску, знижуючи його рівень. Це відповідає одержаним чисельним результатам (див. розд. 6).

Також визначено розподіл контактного тиску під дією розпираючого зусилля на збірку УЗП (ті ж варіанти 1 та 2 – без та із гумовим проміжним шаром). На рис. 7.54 – результати досліджень. Як видно, для цих розподілів властиві ті ж тенденції, що і для випадку дії тільки зусиль закріплення від болтів.

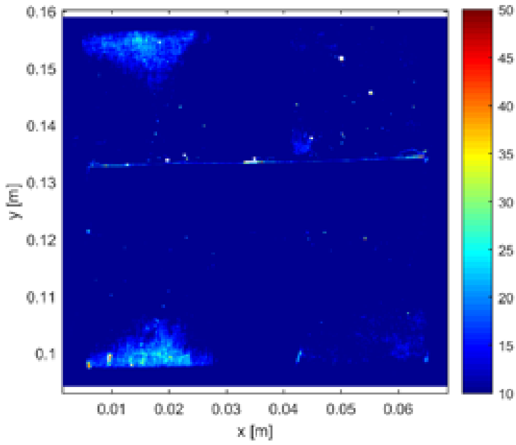
Крім того, було здійснено голографічне дослідження двох вказаних варіантів при перепаді моментів затягування $\Delta M_з$ =100Нм÷10 Нм. На рис. 7.54–7.57 представлені голографічні інтерферограми, що характеризують геометричні зміни, які сталися з компонуваннями у процесі затягування. Голографування здійснювалося при освітленні об'єкту гелій-неоновим лазером. Друге компонування складається з базової плити і двох опорних елементів, закріплених за допомогою болтового з'єднання моментом затягування 150 Н·м. Досліджуваний опорний елемент фіксується в одному варіанті циліндричною шпонкою (рис. 7.58, *а*), в іншому – звичайною призматичною (рис. 7.58, *б*). Зовнішнім навантаженням служить розпираюча сила Q. Голографічні дослідження цих двох варіантів були проведені при перепаді розпираючих зусиль ΔP = (7,5кН÷6,3кН) = =1,2 кН (рис. 7.59).

У результаті виконання спекл-голографичних досліджень компонувань УЗП продемонстровано, що діапазон величин вимірюваних переміщень будь-яких точок, що лежать на поверхні конструкції, складає 0,5÷100 мкм; домінуючі переміщення точок призм викликані зміщенням їх як жорсткого тіла, це видно за характером

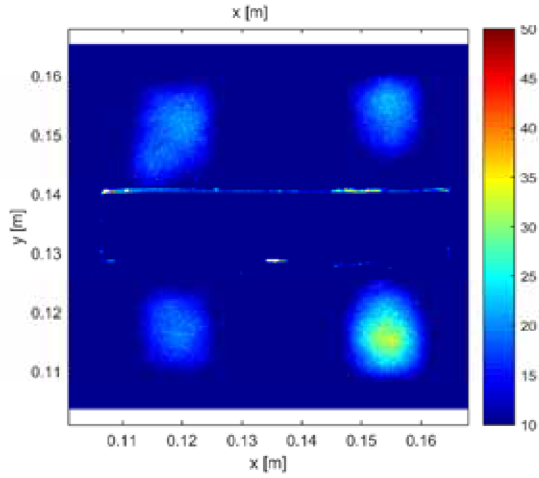
Рисунок 7.52 – Експериментальні дослідження елементів УЗП: робочі моменти випробувань контактної взаємодії призм УЗП із базовою плитою

Відбиток

Розподіл контактного тиску



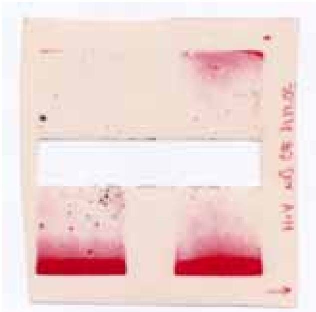
а

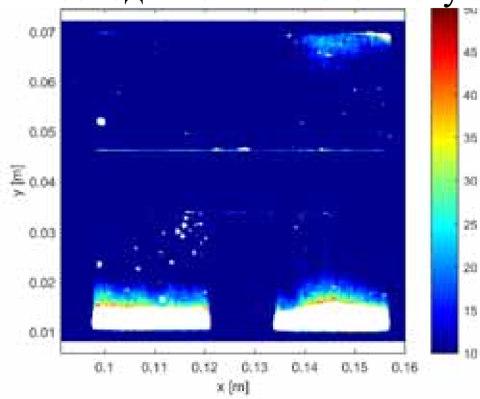


б

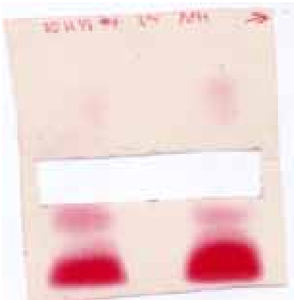
Рисунок 7.53 – Контактні відбитки та розподіли контактного тиску між призмою та базовою плитою УЗП під дією тільки зусилля закріплення болтів:
а – варіант 1; *б* – варіант 2

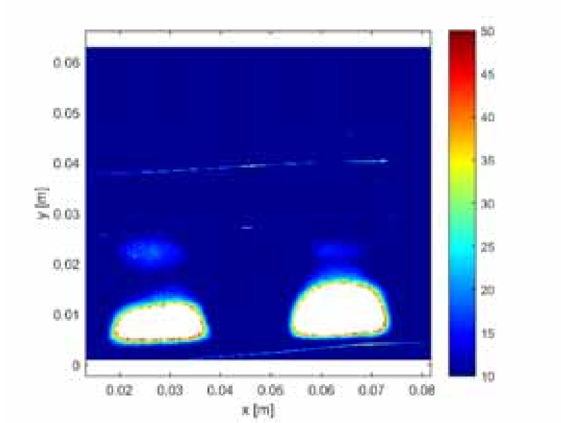
Відбиток — Розподіл контактного тиску





а





б

Рисунок 7.54 – Контактні відбитки та розподіли контактного тиску між призмою та базовою плитою УЗП під дією тільки зусилля закріплення болтів та сил розпирання: *а* – варіант 1; *б* – варіант 2

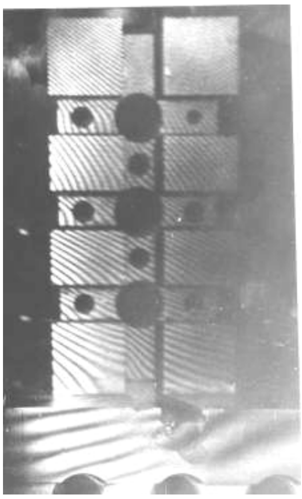


Рисунок 7.54 – Голографічна інтерферограма компонування з фіксацією опори циліндричною шпонкою (вигляд збоку)

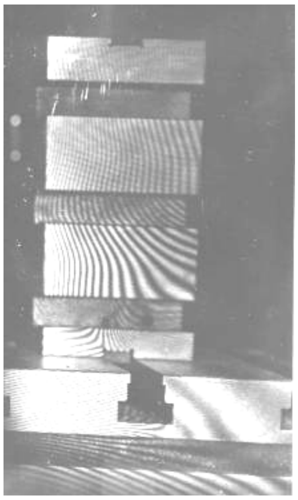


Рисунок 7.55 – Голографічна інтерферограма компонування з фіксацією опори звичайною призматичною шпонкою (вигляд збоку)

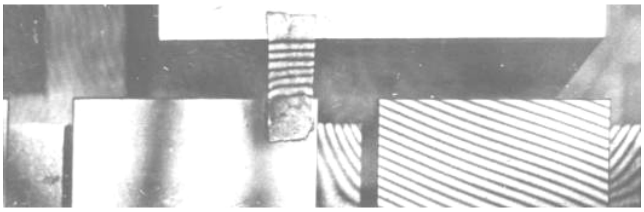


Рисунок 7.56 – Голографічна інтерферограма базової плити при перепаді моментів затягування $\Delta M_з$=100 Нм÷10 Нм з фіксацією опори звичайною призматичною шпонкою

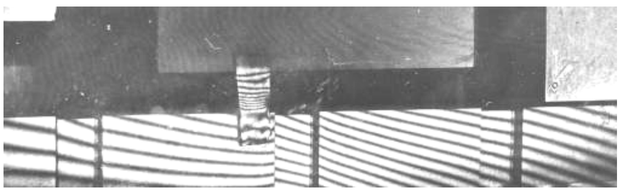
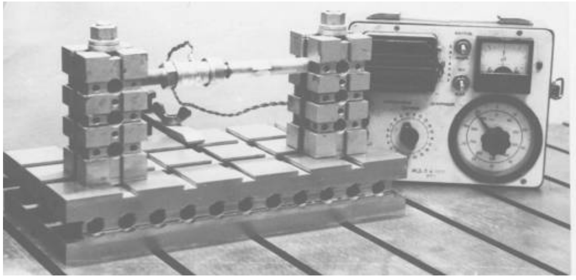
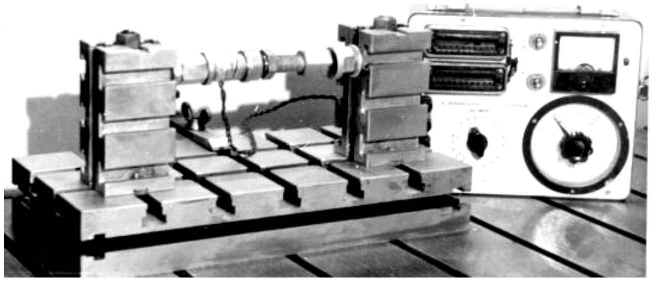


Рисунок 7.57 – Голографічна інтерферограма базової плити при перепаді моментів затягування $\Delta M_з$=100 Нм÷10 Нм з фіксацією опори циліндричною шпонкою

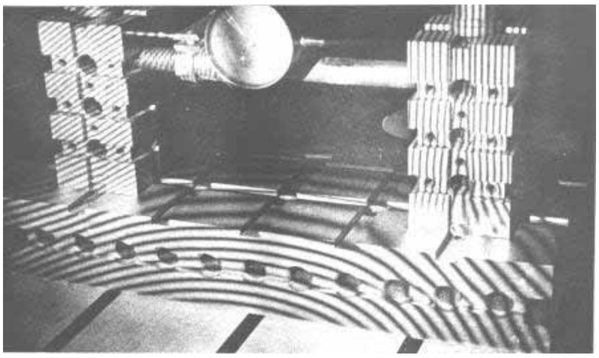


а

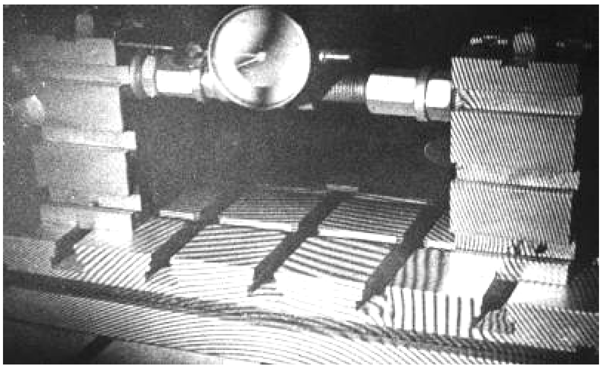


б

Рисунок 7.58 – Компонування, що складається з базової плити і двох опорних елементів з фіксацією опор: а –циліндричними шпонками, б – призматичними шпонками



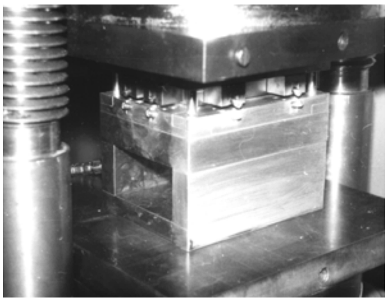
а



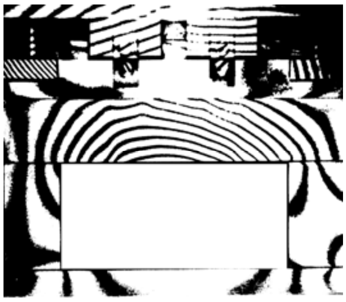
б

Рисунок 7.59 – Голографічна інтерферограма компонування при перепаді зусилля 1,2 кН з фіксацією опор: а – циліндричними шпонками, б – призматичними шпонками

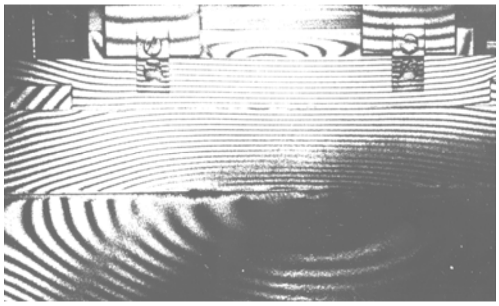
Рисунок 7.61 – Робочі моменти випробувань контактної взаємодії роликопідшипника із бігової доріжкою



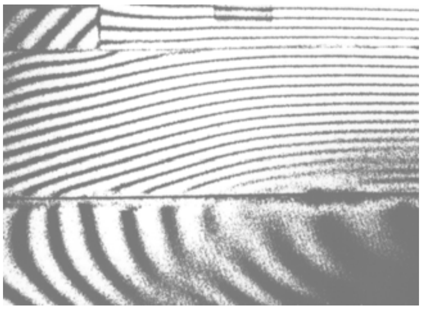
а



б



в



г

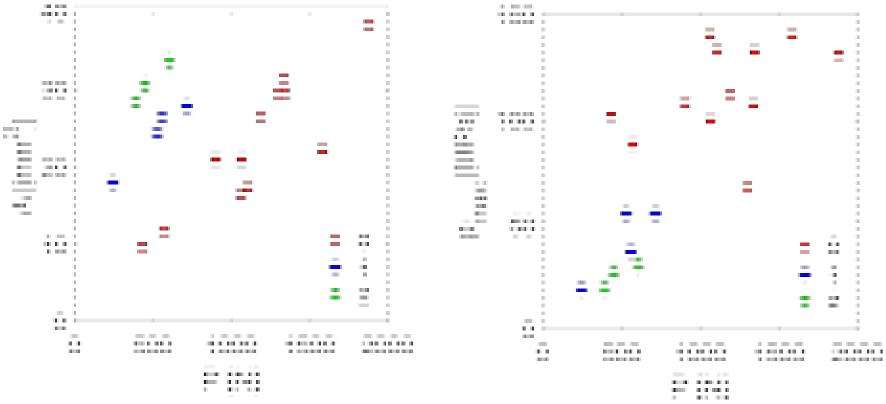
Рисунок 7.60 – Дослідна прес-форма на столі пресу (*а*) і фрагменти інтерферограм у зонах сполучення її елементів (*б*–*г*) інтерференційної картини смуг на голограмі; максимальні переміщення верхньої частини опори при перепаді моменту затягування від 0÷100 Нм складають 24 мкм для опори з фіксацією призматичними шпонками і 16 мкм для опори з фіксацією циліндричними шпонками; максимальні прогини базових плит при перепаді розпираючого зусилля ΔP =1,20 кН складають 32 мкм для опори з фіксацією призматичними шпонками і 10 мкм для опори з фіксацією циліндричними шпонками; проведені експериментальні дослідження дають змогу зробити висновок, що при фіксації опор циліндричними шпонками жорсткість компонувань у 2–3 рази більша, ніж при фіксації компонувань звичайними призматичними шпонками. Обидва види розглянутих компонувань працездатні у широкому діапазоні навантажень, що прикладаються, забезпечуючи при цьому необхідну жорсткість зібраних конструкцій; здійснені дослідження уможливлюють обчислювати жорсткість складань як функцію того чи іншого конструктивного рішення і виду організації сполучення; окремим питанням при цьому є характер умов сполучення на границях призма-плита і плита-основа; неспівпадіння картин смуг у цих сполученнях свідчить про їхнє відносне зміщення, а наклейка гумових «містків» дає змогу кількісно оцінити ці зміщення.

Подібні дослідження були здійснені також і для дослідного зразка прес-форми. Якісна картина деформування елементів досліджуваної прес-форми (рис. 7.60, *а*) підтверджується шляхом співставлення чисельних даних із даними її експериментальних досліджень методом голографічної інтерферометрії (рис. 7.60, *б-г*). Видно, що відбувається розрив розподілів переміщень внаслідок неузгодженого деформування різних елементів прес-форми.

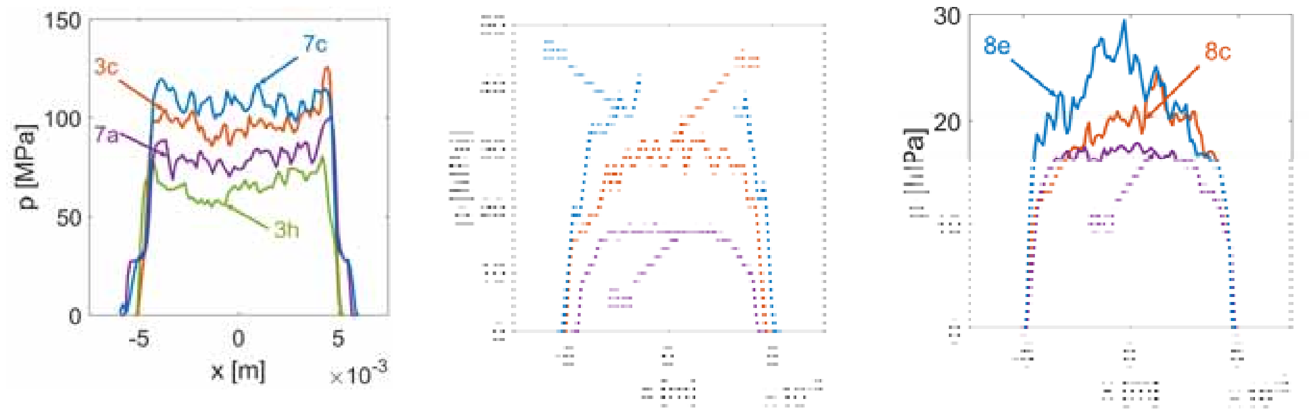
Контактна взаємодія тіл кочення роликопідшипника із біговою доріжкою моделювалася на макеті (рис. 7.61) плексигласового блока (варіант 1 – без гумового проміжного шару та варіант 2 – із гумовим проміжним шаром товщиною 1 мм). На рис. 7.62–7.64 та у Додатку Ж – результати досліджень для цих варіантів.

Аналіз одержаних розподілів свідчить про згладжувальну дію проміжного шару на розподіл контактного тиску. Спостерігається повна відповідність характерів розподілів контактного тиску та тенденцій зміни НДС досліджених тіл при варіюванні проектно-технологічних параметрів та навантаження.

Рисунок 7.62 – Залежність у сполученні між роликом та лункою: *а* – площі плями контакту А; *б* – максимального значення контактного тиску p_{max} від величини притискного зусилля *P* за різної кількості податливих шарів (0, 1, 2)



а *б*



а *б* *в*

Рисунок 7.63 – Розподіл контактного тиску $p(x,0)$ у спряженні роликопідшипника із біговою доріжкою на вісі O*x*: *а* – 0 шарів; *б* – 1 шар; *в* – 2 шари

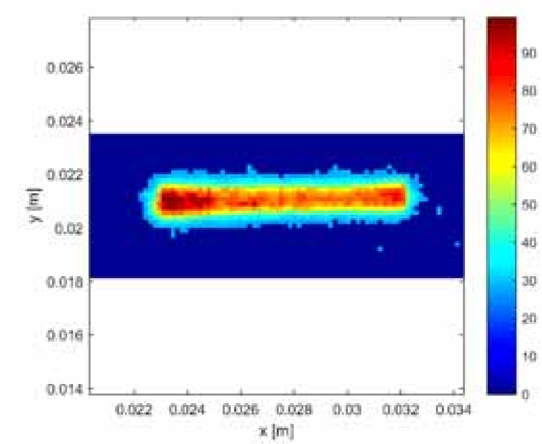
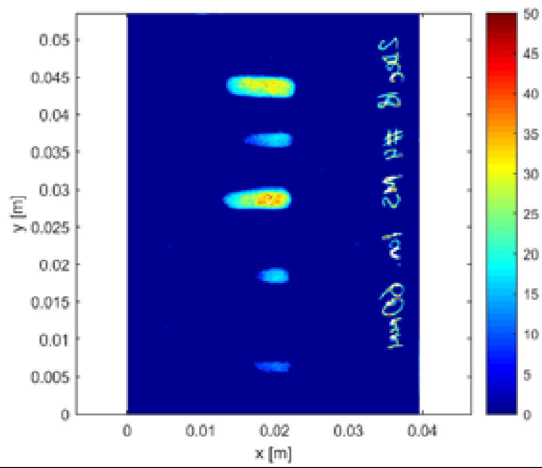
Відбиток		
Розподіл контактного тиску		
	варіант 1	***варіант 2***

Рисунок 7.64 – Результати досліджень контактної взаємодії ролика із макетом бігової доріжки

7.8 Упровадження результатів дисертаційних досліджень у виробництво

Розробки, здійснені при використанні дисертаційних досліджень, упроваджені при виконанні держбюджетних тем, господарчих договорів та договорів про співробітництво із підприємствами України. Це, зокрема, теми: «Удар» (№ ДР 0100У001086т); НДР «Розвиток теоретичного основ синтезу геометрії та моделювання втомної міцності нових зубчастих зачеплень» (№ ДР 0110U001233); «Розробка спеціалізованих програмно-модельного комплексів для комп'ютерного моделювання контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл» (№ ДР 0113U000420); «Розробка методів та моделей механіки контактної взаємодії складнопрофільних тіл методом граничних елементів» (№ ДР 01150U000521); «Забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей» (№ ДР 0117U004880); «Підвищення характеристик виробів військового призначення шляхом аналізу та синтезу властивостей матеріалів на основі мікроструктурних моделей» (№ ДР 0117U004970); ДЗ-55/2015 «Розроблення технології дискретного зміцнення для збільшення ресурсів елементів конструкцій військової та цивільної мобільної техніки» (№ ДР 0115U006518); № 12141 «Розробка математичних і числових моделей динаміки і напружено-деформованого стану елементів віброкмашин та паливозаправників» (м. Маріуполь); № 12673 «Аналіз технічних характеристик елементів двигунів типу 6ТД і технологічних систем для виготовлення військових гусеничних і колісних машин».

Рисунок 7.65 – Гідропередача ГОП-900 (ХКБМ) [www.morozov.com.ua]

У цих роботах здобувач був науковим керівником тем, відповідальним виконавцем та керівником групи дослідників. Зокрема, здійснено: обґрунтування складу та функціональних матеріалів нетрадиційної мережевої структури для виробів у складі машин військового та цивільного призначення; обґрунтування способів обробки та форми профілів бігових доріжок ГОП для перспективних трансмісій важких транспортних засобів спеціального призначення за критеріями міцності та інтенсифікації експлуатаційних режимів навантаження (рис. 7.65); визначення властивостей елементів технологічних систем (верстатних пристосувань, штампів, прес-форм) та обґрунтування їхньої раціональної структури і проектно-технологічних параметрів за критеріями точності і жорсткості, міцності та продуктивності при виготовленні відповідальних деталей машинобудівних конструкцій (рис.7.66–7.68); розробка рекомендацій із обґрунтування геометричної форми робочих поверхонь підшипників кочення, зубчастих коліс, опорних поверхонь, технологічного обладнання з метою підвищення їх міцності (рис. 7.69).

Досягнено економічний ефект за рахунок зниження вартості та термінів проектних досліджень нових виробів із підвищеними технічними і тактико-технічними характеристиками у сумі 2,2 млн. грн. Він підтверджений відповідними актами та довідковим матеріалом, прикладеним до роботи.

Запропоновані нові підходи і основи теоретичних досліджень, створені мікро-макромеханічні моделі нетрадиційних мережевих структур та матеріалів, а також шарів шорсткості у контакті складнопрофільних тіл, розроблені методи розв’язання системи рівнянь та нерівностей, а також побудовані засоби досліджень у вигляді чисельних моделей і програмних модулів мають пряме застосування при вирішенні прикладних проблем механіки деформівного твердого тіла, а також на підприємствах загального, транспортного та енергетичного машинобудування та бронетанкобудівної галузі України.

Висновки до розділу 7

Розрахунково-експериментальні дослідження деформування нетрадиційних мережевих матеріалів та напружено-деформованого стану і контактної взаємодії складнопрофільних тіл із проміжним пружним шаром, здійснені та описані у розділі, дають значний обсяг матеріалу для співставлення відповідних результатів та формування наступних висновків.

1. Результати експериментальних досліджень поведінки волоконних матеріалів, що мають просторову мережеву структуру, перебувають у повній якісній та задовільній кількісній відповідності. Аналіз результатів експериментальних досліджень нетка-

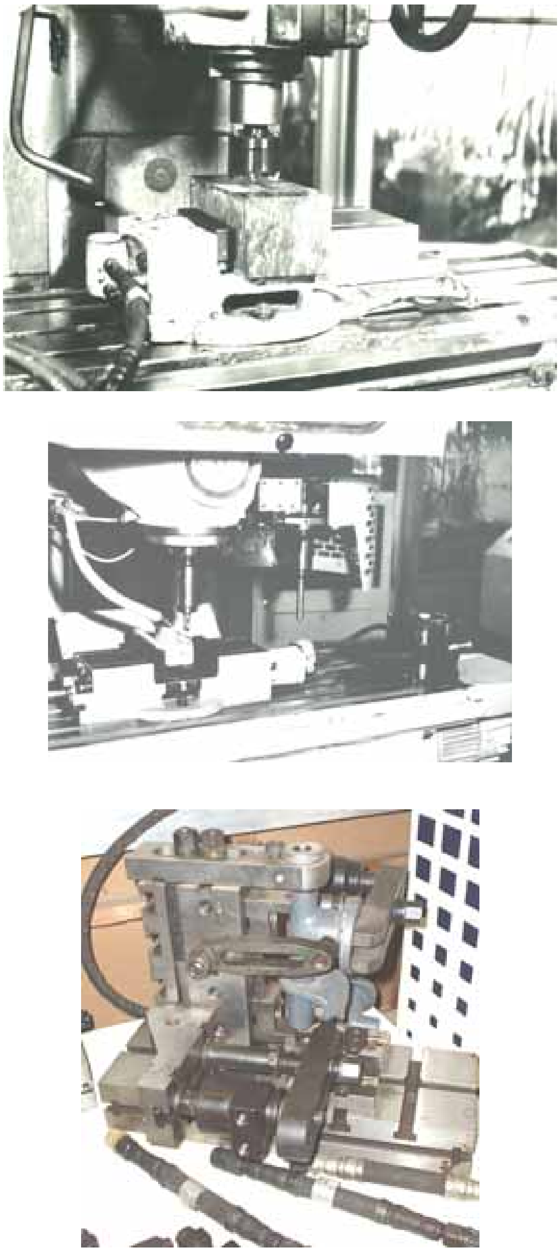


Рисунок 7.66 – Верстатні пристосування: агрегатовані та лещатного типу

Рисунок 7.67– Універсально-збірні пристосування

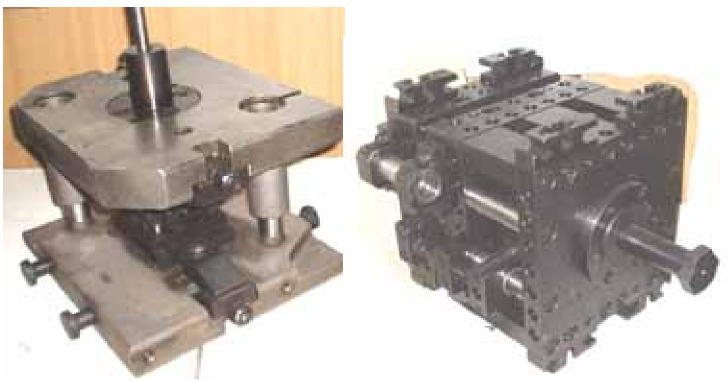


Рисунок 7.68 – Штампи та прес-форми для виготовлення деталей машинобудівних конструкцій

Рисунок 7.69 – Двопараметрична передача

них матеріалів та їхнє порівняння з дискретними моделями випадкових двовимірних мереж свідчать про те, що запропоновані механізми деформування якісно пояснюють особливості відгуку цих матеріалів. Зокрема, підтверджується висновок про істотну неоднорідність розподілу деформацій волокон, частина з яких залишається ненавантаженою, допоки мережа не випрямиться достатнім чином. Форма розтягуваних прямокутних зразків у першу чергу пояснюється конфігурацією шляхів розповсюдження осьових сил, що вміщує в себе вигнуті арки, утворювані уздовж вільних країв прямокутника. Незворотні деформації при цьому повністю пояснюються відносним проковзуванням волокон та їхнім висмикуванням із вузлів. При цьому міцність матеріалу пов'язується не з міцністю окремих волокон на розрив, а саме із межею супротиву сил тертя їхньому проковзуванню у місцях сплетіння. З іншого боку, точна кількісна оцінка властивостей нетканих матеріалів вимагає залучення дискретних моделей із десятками тисяч ступенів свободи.

2. Демонстрацією саме здатності передбачати поведінку нових матеріалів, а не відтворювати виміряний відгук вже існуючих, служить модель композиційних полімерних мереж. На прикладі бімодальних модельних еластомерів, що складаються з коротких і довгих макромолекул, показано, як запропонований підхід до гомогенізації може бути розповсюджений на випадок декількох відмінних складових мікробудови. Це дає змогу оцінити вплив вмісту окремих фракцій полімерів, а також їхньої молекулярної ваги на пружні властивості та міцність модельного еластомеру. Звертає на себе увагу, що це співвідношення є неочевидним та не підкорюється правилу сумішей. Наприклад, за поєднання 10% довгих ланцюжків та 90% надзвичайно коротких ланцюжків можна отримати матеріал, модуль пружності якого в 10 разів вищий за модуль монодисперсного полімеру, що на 100% складається з першої фракції, проте при цьому, як і той, здатний розтягуватися на 300%.

3. Експериментальне дослідження контакту м'якого матеріалу із хвилястою поверхнею обертання повністю підтверджує справедливість, точність та достовірність розроблених та описаних у роботі моделей та отриманих за їх допомогою результатів. Обчислені рівноважні криві підтверджують несталий характер адгезійної взаємодії. Отримані точки перегину цих кривих в точності збігаються із стрибками площі контакту та зусилля між тілами, виміряними експериментально.

4. Комплексне експериментальне дослідження контактної взаємодії кулькового поршня радіальної гідрооб'ємної передачі із її статорним кільцем (із біговою доріжкою складного поперечного профілю) однозначно свідчить про справедливість чисельно визначених тенденцій зміни картини розподілу контактного тиску при варіюванні форми бігової доріжки та властивостей проміжного шару. При цьому прослідковується збіжність як форми областей контакту та розподілів контактного тиску, так і характеру їх збурення при зміні тих чи інших чинників. Так, при зміні радіуса поперечного перерізу бігової доріжки від значення, меншого за радіус поршня, до – більшого, відбувається поступовий перехід від двох краплевидних контактних плям до однієї гантелевидної, а надалі – до еліпсовидної. Контактний тиск при цьому змінює свій розподіл, знижуючи максимум на периферії та поступово змінюючи розташування максимуму на центральне. При цьому у геометричному центрі можливого контакту спочатку (зі зростанням критичної сили) контактний тиск – нульовий, потім – зростає, набуваючи локального мінімуму, а врешті – глобального максимуму (за певних параметрів геометричної форми та рівня навантаження).

5. У процесі експериментального дослідження контактної взаємодії кулькового поршня радіальної гідрооб'ємної передачі із її статорним кільцем варіювалася податливість проміжного шару у різних зонах контактної плями, а також керуюче навантаження, яке призводить до зміни геометричної форми поверхні бігової доріжки. Обидва чинники продемонстрували значний вплив на розподіл контактного тиску та форму контактних плям, що корелює із результатами здійснених паралельно чисельних досліджень (див. розд. 6). Зокрема, спостерігається видозміна контактних зон при варіюванні розподілу податливості проміжного пружного шару на області контакту: у зонах із меншою податливістю контактний тиск більший, ніж був би у випадку номінального його рівня. Крім того, додаткове керуюче навантаження може призводити за рахунок пружних деформацій контактуючих тіл до зміни початкового розподілу зазору (за відсутності експлуатаційних попередніх навантажень). У свою чергу, це може тягнути за собою різку зміну конфігурації контактної площадки та розподілу контактного тиску. Зокрема, для випадку контакту кулькового поршня більшого радіуса, ніж радіус центральної частини бігової доріжки, цілеспрямоване деформування останньої призводить до різкої зміни форми контактної плями: із двох

незв'язаних овалів вона перетворюється на гантелевидну область, а потім (зі зростанням рівня прикладеного керуючого зусилля) – на єдиний овал. При цьому максимум контактного тиску може сильно знижуватися, а зони його досягнення – зміщуватися від периферії до центру. Отже, шляхом зміни розподілу податливості проміжного пружного шару (або розподілу його товщини) на області контакту, а також прикладанням спеціально підібраного додаткового керуючого навантаження можна впливати і на контактну область (змінюється форма і розміри), і на величину та розподіл контактного тиску.

6. У випадку контактування системи тіл із номінально співпадаючими ділянками спряжених поверхонь (на прикладі збірок УЗП) виявлено сильний вплив властивостей проміжного пружного шару на розподіл контактного тиску. Зокрема, чим вища його податливість, тим більш згладженим є цей розподіл.

7. Експериментальне дослідження контактної взаємодії моделей напівматриць прес-форм та циліндричних роликів демонструє, що макровідхилення від номінально узгодженої форми може принципово змінити форму та розміри контактних областей та контактний тиск. Згладжуючий вплив у цьому випадку може чинити проміжний пружний шар. Отже, можливий негативний вплив першого чинника можливо компенсувати за рахунок другого. Разом із тим перший чинник (наприклад, модифікація форми контактуючих поверхонь) сам може виступати як позитивний захід, цілеспрямовано виконаний задля створення сприятливих умов контактної взаємодії СПТ. При цьому для випадку повністю чи майже співпадаючих поверхонь важлива модифікація у двох координатних напрямках, а для випадку співпадіння уздовж однієї лінії – саме модифікація у цьому напрямку.

Усі зазначені вище особливості та закономірності свідчать про узгодженість результатів здійснених та описаних чисельних (див. розд. 6) та (див. розд. 7 вище) – експериментальних досліджень. Тут потрібно відзначити три наступні аспекти:

1) вкрай важливим є повна якісна відповідність результатів чисельних та експериментальних досліджень, зокрема, за формами контактних зон у спряженні складнопрофільних тіл та макровластивостями волоконних та мережевих матеріалів тощо. Також важливо, що чисельно відтворюються ті ж ефекти, що спостерігаються експериментально, проте іншими моделями – не відтворюються, як от «парадоксальний»

НДС гелів при зсувних деформаціях або згладження характерних форм контактних областей із переходом від двозв'язаної до однозв'язної тощо;

2) що стосується кількісної відповідності результатів чисельних та експериментальних досліджень, то, зважаючи на новизну об'єктів аналізу, вона задовільна; наприклад, властивості нетканих матеріалів, отримані, з одного боку, чисельно, а, з іншого, – експериментально, відрізняються на 10÷12 %; властивості «бімодальних» матеріалів, відповідно, 12÷15 %; контактний тиск у спряженні кулькового поршня радіальної гідрооб'ємної передачі із біговою доріжкою – 7÷9 %; у спряженні циліндричних роликів – на 6÷8 % тощо;

3) також важливим аспектом є повна відповідність реакції досліджуваних матеріалів та конструкцій на варіювання тих чи інших чинників; для прикладу, це стосується випадку зміни пружних властивостей «бімодальних» матеріалів при варіюванні співвідношення фракцій довгих та коротких ланцюгів у змішаній мережевій структурі або розподілів контактного тиску при збуренні податливості проміжного пружного шару тощо.

Таким чином, підтверджується адекватність математичних мікромакромеханічних моделей деформування мережевих матеріалів та контактної взаємодії СПТ фізичній реальності; коректність чисельних моделей та збіжність розроблених методів розв'язання систем розв'язувальних співвідношень; точність отриманих результатів чисельного моделювання та обґрунтованість розроблених на їх основі результатів.

Розробки, здійснені при використанні дисертаційних досліджень, упроваджені у виробництво при здійсненні держбюджетних тем, господарчих договорів та договорів про співробітництво у підприємствах різних галузей України, а також у ході грантових досліджень в університетах Штуттгарта (Німеччина), Барі (Італія) і Стенфордському (США). Одержано економічний ефект у сумі 1,2 млн. грн, відповідно документально підтверджений.

Описані у розд. 7 дослідження та впровадження замикають увесь цикл дисертаційних досліджень, підтверджуючи достовірність теоретичних розробок та прикладну їх спрямованість.

Матеріали розділу описані у роботах [3–5, 11, 37, 40, 45–48, 51, 52, 55–63, 66, 69, 88, 99].

ВИСНОВКИ

У роботі міститься вирішення актуальної наукової проблеми механіки деформівного твердого тіла, яка полягає у створенні теоретичних основ мікромеханіки деформування нових матеріалів мережевої просторово-волоконної структури та механіки контактної взаємодії пружних тіл із урахуванням мікромеханічних моделей шорсткості та інших проміжних або поверхневих шарів.

Аналіз розроблених підходів, моделей, методів та установлених за їх допомогою закономірностей дає можливість зробити такі висновки.

1. Аналіз існуючих моделей механіки нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою одновимірних елементів (волоконні, полімерні, неткані тощо) дає підстави для висновку про неповну відповідність результатів моделювання, отриманих за їх допомогою, із реальними властивостями цих матеріалів. Також відсутні універсальні методи та моделі контактної взаємодії складнопрофільних тіл із адекватним урахуванням чинників, які набули натепер визначального впливу на їх напружено-деформований стан, зокрема, – фізично нелінійні властивості шорсткості та проміжних шарів між контактуючими поверхнями цих тіл. Разом із тим широке розповсюдження, з одного боку, нетрадиційних полімерних і нетканих матеріалів, а, з іншого, – складнопрофільних тіл, що на практиці знаходяться у контакті у складі машинобудівних конструкцій, потребує таких розробок. Для вирішення протиріччя, що склалося, необхідне створення теоретичних основ та засобів моделювання деформування нових мережевих матеріалів, а також аналізу контактної взаємодії та напружено-деформованого стану елементів машинобудівних конструкцій із урахуванням фізично нелінійних проміжних або поверхневих шарів. Означені проблемні напрямки склали мету та зміст дисертаційної роботи.

2. Для вирішення сформульованих проблем розроблено загальний підхід, який базується на поєднанні мікро-макромасштабних моделей деформування нетрадиційних матеріалів мережевої структури в об'ємі та напружено-деформованого стану контактуючих елементів машинобудівних конструкцій із шорсткою поверхнею та проміжним шаром на поверхні. У математичному плані розроблені варіаційні формулювання поставлених задач, які зводяться до проблеми пошуку екстремумів нелінійних функціоналів.

3. На основі розроблених удосконалених підходів мікромеханіки просторових мережевих систем одновимірних елементів розроблені моделі деформування нових нетрадиційних матеріалів, а також методи розв'язання системи розв'язувальних співвідношень. Зокрема, для осереднення суцільних мереж створено новий мікромеханічний підхід. Він спирається на нове статистичне подання будови мережі та її деформування, яке базується на урахуванні початкової орієнтації та векторній змінній розтягнення волокон. Цим він відрізняється від більшості аналогічних теорій, які спираються на спрощене подання мережі. Запропоновано концепцію шляхів максимального просування, за допомогою якої було здійснено обґрунтоване поєднання мікро- та макрокінематики. Отримане співвідношення, що пов’язує розтягнення та повороти волокон з макроскопічним градієнтом деформації, є новим результатом у механіці мережевих матеріалів. Із його допомогою сформульовано варіаційний принцип мінімуму осередненої енергії для визначення рівноваги мікромереж та відгуку матеріалу. Для підтвердження основних положень цієї теорії застосовано дискретне моделювання мереж у репрезентативних комірках. Розроблена нова модель в'язкопружності еластомерів, яка спирається на теорію броунівського руху, застосовану до гнучких ланцюжків. Ця модель розширює мікромеханічний підхід на непружну поведінку матеріалів. У дискретних моделях нетканих матеріалів було враховано принципово новий механізм незворотних деформацій та руйнування, пов'язаний із проковзуванням та висмикуванням волокон. За рахунок таких розробок створена методологічна основа досліджень нетрадиційних матеріалів, причому з більш високим рівнем фізичної адекватності, математичної строгості та чисельної ефективності. Це створює основу для більш адекватного та достовірного аналізу деформування такого типу матеріалів порівняно із традиційними моделями та методами.

4. Розроблені методи і моделі для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів, які визначають їхню локальну контактну нелінійну жорсткість. У результаті одержано структурно-фізично нелінійні співвідношення. Для них розроблена слабка постановка, що зводиться до пошуку екстремуму модифікованого функціоналу додаткової енергії, визначеного на розподілах контактного тиску. Із застосуванням методу граничних елементів отримано дискретну форму розв'язувальних рівнянь та не-

рівностей. Для їх задоволення розроблено методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості. Вони зводять структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності структурно нелінійних, проте фізично лінійних задач, а для розв'язання таких задач можна застосувати уже розроблені раніше методи. Також розроблено метод поетапного розширення множини чинників, які можуть бути враховані при розв’язанні контактних задач шляхом почергового додавання відповідних додаткових чинників у нелінійний функціонал додаткової енергії. У кінцевому підсумку розроблений комплекс підходів, методів та моделей дає можливість, на відміну від традиційних, більш ефективно, адекватно і точно моделювати контактну взаємодію складнопрофільних тіл. При цьому установлені якісно нові закономірності впливу на розподіл контактного тиску профілю контактуючих тіл та властивостей проміжного шару. Зокрема, для нелінійно пружно-жорсткого шару спостерігається комбінація еліпсоїдальновидного та параболоїдальновидного розподілів із перехідною поверхнею між ними. Також проміжний шар згладжує розподіл контактного тиску та розширює область контакту. У ході розв'язання низки тестових задач продемонстровано точність та збіжність розроблених методів досліджень типу методів додаткових зазорів та змінних параметрів податливості.

5. Розроблено єдину систему розв'язувальних співвідношень для аналізу, з одного боку, напружено-деформованого стану та контактного тиску у спряженнях складнопрофільних тіл, а з іншого – для обґрунтування геометричної форми їх поверхонь та властивостей проміжних шарів. Це дає можливість розв'язувати обернені задачі синтезу геометричної форми складнопрофільних тіл із умов реалізації заданого розподілу контактного тиску. Виходячи із цього, запропоновано метод коригування геометричної форми поверхонь контактуючих тіл за рахунок пружного деформування від спеціально підібраного додаткового навантаження.

6. Із застосуванням створених методів, моделей та засобів досліджень розв’язано низку модельних та прикладних задач. Зокрема, визначено характер деформування нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою одновимірних елементів. Установлено макровластивості цих матеріалів на основі розроблених мікромеханічних моделей та методів осереднення. Так, при моделюванні структури нетканого матеріалу на основі дискретно-елементного підходу, заснованого на поданні сегментів волокон між вузла-

ми як окремих елементів, показано вплив величини тертя у вузлах на межу міцності матеріалу і його податливість; продемонстровано наявність ефекту розмірності, яка полягає в тому, що менші за розміром зразки мають меншу податливість і руйнуються внаслідок розриву волокон, а не їхнього висмикування. На основі феноменологічного підходу, що поділяє структуру полімерного матеріалу на статично пружну частину і змінну в часі в'язку частину, запропонована мікроструктурна модель для опису його відгуку на навантаження. Продемонстрована здатність розробленої моделі відтворити реальну поведінку синтетичного каучуку за різних видів навантаження, відповідно до отриманої за експериментальних досліджень; визначені параметри моделі, що дають найкраще наближення. Також визначені особливості розподілу контактного тиску у спряженні контактуючих складнопрофільних тіл. Установлені закономірності впливу різних чинників на контактний тиск і контактні області. Обґрунтовані рекомендації щодо технічних рішень для елементів машинобудівних конструкцій, що забезпечують їх міцність. Усі розроблені моделі та засоби досліджень передані у практику розробок нових виробів. За рахунок їх впровадження досягнуто підвищення технічних характеристик низки захисних, функціональних та силових елементів транспортних засобів спеціального призначення, зубчастих передач, технологічного оснащення, гідропередач трансмісій тощо. Зокрема, для кулькових поршнів гідрооб'ємних передач здійснено аналіз їхньої взаємодії з біговими доріжками на статорному кільці. Установлено виникнення концентрації напружень із поширенням контактної плями на перехідну частину профілю. Досліджено здатність перерозподілу контактних зусиль завдяки податливості поверхневого шару. Запропоноване білінійне наближення пружної поведінки шару, що відображає обмеженість величини зминання. Ураховано влив деформування статорного кільця від навантажень у вигляді додаткового вигину, що зводиться до еквівалентної зміни зазору. Досліджено вплив поверхневого шару на загальну жорсткість та точність позиціонування універсально-збірних пристосувань. На прикладі прес-форм та роликів досліджено чутливість контактної взаємодії до похибки форми тіл та їхнього відносного розташування з урахуванням поверхневого шару.

7. Здійснені розрахунково-експериментальні дослідження продемонстрували повну відповідність реальної поведінки матеріалів із мережевою структурою та контактуючих складнопрофільних тіл із проміжним шаром тій, що прогнозована на основі

чисельних досліджень. Зокрема, при порівнянні результатів досліджень нетканих матеріалів, гелів, гуми, контакту м'яких тіл із мікропрофілем на поверхні, кулькового поршня гідропередачі із біговою доріжкою, універсально-збірних пристосувань, роликів та прес-форм установлена повна відповідність тенденцій зміни контрольованих величин при варіюванні певних параметрів досліджуваних об'єктів. Так, фізико-механічні характеристики досліджених нетрадиційних матеріалів визначаються із похибкою на рівні до 10÷12 %. Контактний тиск у спряженні складнопрофільних тіл визначається із похибкою до 12÷15 %. Це є підтвердженням адекватності розроблених методів та моделей досліджень, а також обґрунтованості рекомендацій, здійснених на основі одержаних результатів.

8. Одержані результати дисертаційних досліджень упроваджені на низці підприємств (ДП «ЗіМ», ДП «ХКБМ», ДП «ХКБД», ПАТ «Азовмаш», ПрАТ «АзовЕлектоСталь», науково-інженерному центрі керуючої компанії «Рейлтрансхолдінг») та у практиці наукових досліджень за тематичним планом НТУ «ХПІ». У ході досліджень установлено залежності технічних характеристик елементів машин, а також технологічних систем для їх виготовлення від складу та мікроструктури матеріалу в об’ємі та на поверхні. Здійснено:

1) обґрунтування складу та мікроструктури матеріалів функціональних, силових та захисних елементів машин нетрадиційної мережевої структури для виробів у складі машин військового та цивільного призначення;

2) визначення властивостей елементів технологічних систем та обґрунтування їхньої раціональної структури і проектно-технологічних параметрів за критеріями точності і жорсткості, міцності та продуктивності;

3) розробку рекомендацій із обґрунтування геометричної форми робочих поверхонь підшипників кочення, зубчастих коліс, опорних поверхонь технологічного обладнання з метою підвищення їх міцності; 4) обґрунтування способів обробки та форми профілів бігових доріжок гідрооб’ємних передач для перспективних трансмісій важких транспортних засобів спеціального призначення за критеріями міцності та інтенсифікації експлуатаційних режимів навантаження;

5) визначення шляхів підвищення міцності елементів підвіски багатовісних транспортних засобів спеціального призначення.

Досягнуто:

- підвищення на 10–15% міцності, довговічності та захисних властивостей елементів бойових машин за рахунок застосування нових нетрадиційних матеріалів, а також форми контактуючих деталей;
- зростання на 15–20% робочих режимів та потужності системи двигун – трансмісія – рушій транспортних засобів спеціального призначення;
- підвищення на 30–45% продуктивності роботи технологічного обладнання, точності та якості технологічних операцій при виготовленні деталей із важкооброблюваних матеріалів.

Економічний ефект у сумі 2,2 млн. грн. досягнуто за рахунок зниження вартості та термінів проектних досліджень елементів машинобудівних конструкцій, що підтверджено відповідними актами та довідковим матеріалом.

Результати досліджень можуть бути застосовані та розвинені у мікромеханіці матеріалів мережевої структури та у мікромеханіці контактної взаємодії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.

2. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.

3. Linder C., Miehe C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 10. P.2134–2156 (Scopus).

4. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*. 2012. Vol. 92. P. 2779–2808 (Scopus).

5. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 3/7(93). P. 34–41 (Scopus).

6. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 5/7(95). P. 22–31 (Scopus).

7. Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saverska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No. 1/7 (97). P. 15–25 (Scopus).

8. Tkachuk M. M. , Grabovskiy A., Tkachuk M. A. , Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15 (Scopus).

9. Marchenko A., Kravchenko S., Tkachuk M., Tkachuk M., Saverska M. Discrete-Continual Strengthening Of Contacting Structural Elements: Mathematical And Numerical Modeling. *Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów Proceedings of the Institute of Vehicles*. 2018. No 1(115). P. 143–153.

10. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2012. № 10. С. 11–17.

11. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 2. С. 3–9.

12. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 1. Постановка задачи. 2. Кинематическая модель контакта гладких тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 3. С. 3–10.

13. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 3. Прямой и вариационный методы решения задачи негерцевского нормального контакта гладких тел. 4. Модель контакта шероховатых тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 4. С. 3–8

14. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 6. С.10–16.

15. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 7. С. 11–20.

16. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (окончание). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 8. С. 6–8.

17. Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н. К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 19. С. 135–143.

18. Ткачук. М.А., Устиненко О. В., Протасов Р. В., Ткачук М. М. До 125–річчя НТУ «ХПІ». Розвиток теоретичних основ синтезу геометрії та моделювання втомної

міцності нових зубчастих зачеплень в університеті. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. .№ 26. С. 3–8.

19. Ткачук М.М., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы. *Вісник СевНТУ. Вип. 110. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь: СевНТУ, 2010. С. 55–60.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 22. С. 123–140.

21. Грабовський А., Ткачук М., Артьомов І., Барчан Є. Підхід до ідентифікації моделі для визначення ударної сили у віброударній системі. *Машинознавство.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД. 2011. № 5–6. С. 21–26.

22. Ткачук М.М., Негробова Н.Б., Ткачук М.А. Контактна взаємодія деталей машин з витягнутими контактними областями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 29. С. 129–134.

23. Ткачук Н.А., Грабовський А.В., Костенко Ю.В., Артемов И.В., Ткачук Н.Н. Численное моделирование динамических процессов в виброударных системах. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 42. С.179–187.

24. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. Механіка та машинобудування. Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 2. С. 75–86.

25. Ткачук Н.А., Кохановская О.В., Негробова Н.Б., Зарубина А.А., Ткачук Н.Н. Связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза для контактирующих сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 22. С. 121–147.

26. Ткачук Н.Н., Негробова Н.Б., Ткачук Н.А. Особенности распределения контактных зон и давлений при контакте тел конечных размеров по поверхностям близкой формы. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 36. С. 166–171.

27. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численный анализ влияния модели для определения силы ударного взаимодействия на характер

динамических процессов в виброударных системах. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 2. С. 34–48.

28. Ткачук Н.Н., Костенко Ю.В., Ткачук А.В., Грабовский А.В. Изменение массы одного из компонентов и его влияние на характер динамических процессов в виброударных системах: модели и численные результаты. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* – Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 1(975). С. 71–85.

29. Костенко Ю.В., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Виброударные системы: определение периодических режимов движения *Вісник СевНТУ. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія*. Севастополь, СевНТУ. 2013. С.81–85.

1. 30. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А., Мухин Д.С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 41. С. 133–142.

31. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. №14 (1057). С. 155–169

32. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Литвиненко А.В., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством. *Проблемы машиностроения*. 2014. Том 17. № 4. С. 17–22.

2. 33. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Головченко В.И. Модели и разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 29 (1072). С.160–173.

34. Бусяк Ю.М., Ткачук Н.Н., Васильев А.Ю., Литвиненко А.В., Мазур И.В., Даньшин Ю.А., Шаталов О.Е. Общие подходы к оценке и обеспечению защищенности бронекорпусов легких по массе машин. *Інтегровані технології та енергозбереження.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 3. С. 154–163.

35. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С. Оценка влияния шероховатости на контактные давления в сопряжении сложнопрофильных тел. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 1. С. 29–35.

36. Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Ткачук Н.Н., Касай Е.И., Крылюк

Б.И. Влияние формы беговой дорожки на контактное взаимодействие с шаровыми поршнями радиальной гидропередачи. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 31 (1140). С. 81–100.

37. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А., Ткачук Н.А. Экспериментальное исследование контактного взаимодействия сложнопрофильных шероховатых тел с учетом податливости. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 34 (1143). С. 124–129.

3. 38. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Неделько К. Д. Влияние податливости шероховатого слоя на распределение контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 43(1152). С. 132–139.

39. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении. *Механіка та машинобудування.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 1. С. 113–117.

40. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А. Расчетно-экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №12 (1184). С. 84–88.

41. Грабовський А.В., Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. та інш. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №18 (1190). С. 22–29.

42. Скрипченко Н.Б., Ткачук М.М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І. Контактна взаємодія складнопрофільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №39 (1211). С. 93–101.

43. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. № 1. С. 3–14.

44. Ищенко О. А., Демина Н. А.,. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовський А.В. и др. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки. *Вісник Національного технічного університету «Харківський*

політехнічний інститут». Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 5(1227). С. 108–134.

45. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Саверська М.С. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами. *Механіка та машинобудування*. 2019. №1. С. 36–50.

46. Ткачук М.М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12 (1234). С. 86–95.

47. Ткачук Н.А., Ищенко О. А., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов штамповой оснастки. *Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии.* Краматорск, 2017. № 3 (24Е). С. 11–19.

48. Іщенко О.А., Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мерецька К.О. Контактна взаємодія елементів розділових штампів: моделі, закономірності, критерії проектних рішень. *Механіка та машинобудування.* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 1. С. 48–59.

49. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 7 (1283). С. 132–141.

50. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Бондаренко М. О., Саверська М. С., Ткачук М. А., Тесля Д. О. Розрахунково-експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 1. С. 81–92

51. Ткачук Н.Н. Анализ реакции волоконных материалов на действие нагрузок на основе микромеханических моделей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 25 (1301). С. 149–155.

52. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовский А. В., Саверская М. С., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Сериков В. И., Мерецкая К. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов механических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 29 (1305). С. 129–156.

53. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное

взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 33 (1309). С. 43–63.

54. Ткачук М. А., Іщенко О. А., Дьоміна Н. А., Ткачук М. М., Грабовський А. В., Шеманська В. В., Васильченко Д. Р. Контактна взаємодія елементів штампового оснащення. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 41 (1317). С. 67–76.

55. Ткачук М.М. Метод пружної гомогенізації бімодальних мереж. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 7 (1332). С. 107–113.

56. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically based model for viscoelasticity of rubbery polymers. *10th GAMM Seminar on Microstructures.* TU Darmstadt, Germany. 2011. P. 46.

57. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven Computational Modeling of Polymers. *SimTech 2011. International Conference on Simulation Technology. Book of abstarcts: Advanced Mechanics of Multi-Scale and Multi-Field Problems. 14-17 June 2011.* University of Stuttgart . P. 26.

58. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven computational modeling of polymers. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* 2011. Vol. 11. P. 557–558.

59. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *COMPLAS XI. International conference on computational plasticity. 7-9 September 2011.* Barcelona, Spain.

4. 60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *11th GAMM seminar on microstructures. 20-21 January 2012.* University of Duisburg-Essen, Germany. P. 46.

61. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *GAMM 2012. 83nd annual meeting of the international association of applied mathematics and mechanics. 26-30 March 2012.* TU Darmstadt, Germany. P. 198–199.

62. Tkachuk M., Linder C. Homogenization of random elastic networks with nonaffine kinematics. *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. 2012. Vol. 12. P. 417–418.

63. Tkachuk M., Linder C. Dynamic relaxation with local artificial modes for the analysis of floppy fiber networks. *PACAM XIII-6172. The pan american congress of applied mechanics. 22-24 May 2013. Houston, USA. Section 8-4. Biomembranes and tissues.*

64. Kostenko Yu., Tkachuk M., Grabovsky A., Tkachuk M.A. Subharmonic modes in vibroimpact systems. *The Fourth International Conference «Nonlinear Dynamics–2013». Proceedings. June, 19–22, 2013*. Sevastopol (Ukraine). Pp. 83–86.

65. Kostenko Y.V., Artemov I.V., Tkachuk N.N. Sybharmonical modes in vibroimpact systems. *Международный научно-исследовательский журнал: Сборник по результатам XXV заочной научной конференции Research Journal of International Studies.* Екатеринбург: МНИЖ. 2014. № 3, часть 2. С. 27–30.

66. Tkachuk M., M. Ganser, Linder C. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers. *WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics. 20-25 July 2014, Barcelona*, Spain.

67. Tkachuk M.A., Skripchenko N., Grabovskiy A., Tkachuk M.M. Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact. *Зб. «Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015)».* P. 393–398.

68. Tkachuk M.M., Kostenko Yu., Grabovsky A., Tkachuk M. A. Parameter analysis of vibro-impact machines dynamics with variable mass and stiffness. *Nonlinear Dynamics–2016: Proceedings of 5th International Conference*. Kharkov, NTU «KhPI», 2016. P. 238–244.

69. Tkachuk M. Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 11-13 October 2017*. P. 190–193.

70. Головченко В., Ткачук М., Шеремет В. Числове моделювання контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей 2-й міжнародної науково-практичної конференції.* Львів, 2010. С. 41–42.

71. Ткачук М.М., Сердюк Ю.Б., Ткачук А.М. Контактна взаємодія плоского штампа з обмеженням з урахуванням жорсткості поверхневого шару. *10-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Праці.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2011. С. 176–177.

72. Ткачук А.М., Ткачук М.М. Взаємодія плоского штампу з напівпростором: моделі та результати. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XIX міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1 / за ред. проф. Товажнянського Л. Л.* Харків, НТУ «ХПІ», 2011. С. 200.

73. Ткачук М.М., Ткачук М.А., Ткачук А.М. Зв'язана задача геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контакту. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XX міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1 / за ред. проф.*

Товажнянського Л. Л. Харків, НТУ «ХПІ», 2012. С. 220.

74. Скріпченко Н., Ткачук М. Варіант методу граничних елементів для аналізу контактної взаємодії гладких і шорстких тіл. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2013. С. 84–85.

75. Бондаренко М.А., Бондаренко О.А., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Кохановский В.И. Контакт сложнопрофильных тел: теория, методы и алгоритмы. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXI міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1 / за ред. проф. Товажнянського Л. Л.* Харків, НТУ «ХПІ», 2013. С. 182.

76. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численное определение влияния вида силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Международной научной конференции. в 10 т. Т. 9. Секции 3, 5, 7, 10 / под общ. ред. А.А. Большакова.* Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т; Харьков, НТУ «ХПИ», 2012. С. 94–98.

77. Литвиненко О., Ткачук М., Грабовський А. Проектно-технологічне забезпечення захищеності бронекорпусів легкоброньованих машин від дії динамічних навантажень. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2012. С. 122-123.

78. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Кохановська О.В., Веретельник О.В. Контактна взаємодія індентора з перешкодою. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ. Тези доповідей міжнародної науково-технічній конференції.* Львів, Друкарня АСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, 2014. С. 53–54.

79. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Бондаренко Л.Н. Влияние свойств шероховатого слоя на контакт сложнопрофильных упругих тел. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXII міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2014. С. 235.

80. Ткачук М., Литвиненко О., Грабовський А. Обґрунтування проектно-технологічних рішень для забезпечення тактико-технічних характеристик легкоброньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей 4-й міжнародної науково-технічній конференції.* Львів, 2014. С. 7–8.

81. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Васильєв А.Ю., Мартинен-

ко О.В. Проектно-технологічне забезпечення міцності бронекорпусів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнародної науково-технічній конференції.* Львів, АСВ, 2015. С. 41–42.

82. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Середа А.В., Дзюба Ю.С., Іщенко О.А. Контакт складнопрофільних тіл: підходи, моделі, методи. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIII міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1 / за ред. проф. Сокола Є. І.* Харків, НТУ «ХПІ», 2015. С. 229.

83. Ткачук М.М. Мікромеханіка нетканих матеріалів. *12-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Тез. доп.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2015. С. 25–26.

84. Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід*. Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2015. С. 234–238.

85. Ищенко О.А., Ткачук А.В., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н., Демина Н.А. Расчет базовых плит разделительных штампов. *Ресурсосбережение и энергоэффективность процессов и оборудования обработки давлением в машиностроении и металлургии: Тези доповідей VII міжнародної науково-технічній конференції.* Харків, 2015. С. 25–28.

86. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.Ю., Мазур І.В. Проблеми забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин: теорія, методи та моделі. *Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки. Тези доповідей VI науково-технічній конференції.* Київ, Видавничий дім Дмитра Бураго, 2015. С. 186–187.

87. Васильєв А.Ю., Шаталов О.Є., Ткачук М.М., Дудар Є.Є., Литвиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Наукове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: Тези доповідей VII науково-практичної конференції. Секція № 2.* Харків, Національна академія Національної гвардії України, 2016. С. 27–29.

88. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Бондаренко Л.Н., Неделько Е.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В.Исследование контактного взаимодействия в модифицированном зубчатом зацеплении: модели. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія,*

освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIV міжнародної науково-практичної конференції, Ч. 1 / за ред. проф. Сокола Є. І. Харків, НТУ «ХПІ»., 2016. С. 226.

89. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Бусяк Ю.М., Вакуленко В.В., Магерамов Л.К.-А. Моделювання контактної взаємодії індентора з перешкодою методами скінченних і граничних елементів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції.* Львів, НАСВ, 2016. С. 59.

90. Васильєв А. Ю., Танченко А. Ю., Ткачук М. М., Скріпченко Н. Б., Лісовол Я. М. Обґрунтування структури та параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин за критеріями захищеності. *Наука: безпека країни та розвиток військово-промислового комплексу: Інформаційно-комунікативний захід / відп. ред. В.С.Шовкалюк.* Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2016. С. 32–36.

91. Ткачук М.А., Грабовський А., Ткачук М.М., Васильєв А. Комп'ютерне моделювання як основа проектно-технологічних рішень для елементів бойових броньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали конференції.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2016. С. 12–14.

92 Ищенко О.А., Ткачук Н.Н., Кротенко Г.А., Ткачук Н.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали VIII міжнародної науково-технічної конференції.* Харків, НТУ «ХПІ», 2016. С. 27–30.

93. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н. Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машин: модели, методы, закономерности. *Механіка машин – основна складова прикладної механіки: Матеріали Всеукраїнської науково-технічної конференції.* Дніпро, НМетАУ, 2017. С. 228–231.

94. Скрипченко Н. Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А., Ляшенко А. С., Хузяхметова М. Р., Погребняк Д. А., Головин А. М. Расчетно-экспериментальные исследования контакта сложнопрофильных тел: методология. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXV міжнародної науково-практичної конференції у 4 ч. Ч. І. / за ред. проф. Сокола Є.І.* Харків, НТУ «ХПІ», 2017. С. 222.

95. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В., Луньов Є.О. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних та колісних машин на основі комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів і ста-

нів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції.* Львів, НАСВ, 2017. С. 26–27.

96. Ткачук М., Скріпченко Н., Бондаренко М., Набоков А. Контактна взаємодія складнопрофільних тіл: моделі, методи, закономірності. *13–й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2017. С. 52–54.

97. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Веретельник О.В., Набоков А.В. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей V міжнародної науково-практичної конференції.* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2017. С. 201.

98. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Саверська М. С., Бондаренко М. О., Зарубіна А. О., Кохановська О. В., Храмцова І. Я., Бондаренко Л. М. Формування єдиної розв’язувальної системи співвідношень для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності між ними нелінійно пружного шару. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: Тези доповідей XXVI міжнародної науково-практичної конференції у 4 ч. Ч. І. / за ред. проф. Сокола Є.І.* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 201.

99. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Грабовський А. В., Головін А. М., Ляшенко А. С. Теоретичні моделі для аналізу властивостей волоконних матеріалів у складі елементів озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції.* Львів, НАСВ, 2018. С. 67–68.

100. Ткачук М., Танченко А., Грабовський А., Ткачук-мол. М. Методи визначення усталених режимів руху віброударних систем. *Вібрації в техніці та технологіях: Тези доповідей XVII міжнародної науково-технічної конференції.* Львів, НУ «Львівська політехніка», 2018. С. 25–26.

101. Ткачук М.А., Брагіна Л. Л., Ткачук М.М., Воронов Г.К.Обґрунтування конструктивних і технологічних параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей VI міжнародної науково-практичної конференції.* Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2018. С. 149–150.

102. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Спеціалізовані програмно-модельні комплекси для аналізу деформування волоконних матеріалів та контактної

взаємодії складнопрофільних тіл на основі мікро-макромеханічних моделей. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї міжнародної науково-технічної конференції.* Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2018. С. 19–21.

103. Ткачук Н.А., Ищенко О.А., Демина Н.А., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Шеманская В.В., Васильченко Д.Р. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали X міжнародної науково-технічної конференції.* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 109–110.

104. Мартиняк Р., Ткачук М. А., Слободян Б., Ткачук М.М., Маланчук Н. Локальне зношування тіл з регулярним рельєфом. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра* [Електронний ресурс]. Львів**,** Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 2. С. 59–60.

105. Ткачук М.М., Хлань О.В., Заворотній А.В., Малакей А.М., Шуть О.Ю., Набоков А.В., Рікунов О.М. Проектно-технологічне забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин. *Збірник тез доповідей науково-практичної конференції «Службово-бойова діяльність Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Секція 2 Технічне та тилове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Національна академія Національної гвардії України.* Харків, 2019. С. 170.

106. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мухін Д.С., Ткачук М.А., Саверська М.С. Методи аналізу напружено-деформованого стану, контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл на основі фізично і структурно нелінійних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2019, 15-17 травня 2019р.: у 4 ч. Ч. IV. / за ред. проф. Сокола Є.І.* Харків: НТУ «ХПІ». С. 330.

107. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.В., Хлань О.В. Забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин на проектно-технологічних етапах. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Збірник тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції (Львів, 16-17 травня 2019 року).* Львів: НАСВ, 2019. С. 9.

108. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Мікромакромеханічні моделі

для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій. *14-й Міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові (м. Львів, 23- 24 травня 2019 р.): Матеріали симпозіуму.* Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2019. С. 17–18.

109. Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity. 3rd edition. Oxford: Clarendon Press, 1975. 322 p.

110. Lodish H. Molecular Cell Biology. Cambridge: W.H. Freeman & Company, 2000. 973 p.

111. Boal D.H. Mechanics of the cell. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 406 p.

112. Holzapfel G.A., Ogden R.W. Mechanics of biological tissue. New York: Springer Science & Business Media, 2006. 135 p.

113. Schmoller K.M., Lieleg O., Bausch A.R. Internal stress in kinetically trapped actin bundle networks. *Soft Matter*, 2008. No. 4(12). P. 2365–2367.

114. Schmoller K. M., Fernandez P., Arevalo R. C., Blair D. L., Bausch A. R. Cyclic hardening in bundled actin networks. *Nature communications*, 2010. No. 1. P. 134.

115. Lang N. R., Münster S., Metzner C., Krauss P., Schürmann S., Lange J., Fabry, B. Estimating the 3D pore size distribution of biopolymer networks from directionally biased data. *Biophysical journal*, 2013. No. 105(9). P. 1967–1975.

116. Wen Q., Basu A., Winer J. P., Yodh A., Janmey P. A. Local and global deformations in a strain-stiffening fibrin gel. *New Journal of Physics,* 2007. No. 9(11). P. 428.

117. Basu A., Wen Q., Mao X., Lubensky T. C., Janmey P. A., Yodh A. G. Nonaffine displacements in flexible polymer networks. *Macromolecules*, 2011. No. 44(6). P. 1671–1679.

118. Stein A. M., Vader D. A., Jawerth L. M., Weitz D. A., Sander L. M. An algorithm for extracting the network geometry of three-dimensional collagen gels. *Journal of microscopy*. 2008. No. 232(3). P. 463–475.

119. Ponti A., Machacek M., Gupton S.L., Waterman-Storer C.M., Danuser G. Two distinct actin networks drive the protrusion of migrating cells. *Science,* 2004. No. 305(5691). P. 1782–1786.

120. Hearle J.W.S., J.J. Thwaites, J. Amirbayat Mechanics of flexible fibre assemblies. *NATO advanced study institutes series. Applied sciences*. ijthoff & Noordhoff, 1980. P. 293–310.

121. Picu R.C. Mechanics of random fiber networks-a review. *Soft Matter*. 2011. No. 7. P. 6768–6785.

122. Gibson L.J., M.F. Ashby, B.A. Harley. Cellular Materials in Nature and Medicine. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 309 p.

123. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*, 2011. No. 52(26). P. 6126–6133.

124. Yu B., Zhao X., Zeng Y., Qi D. The influence of process parameters on needle punched nonwovens investigated using image analysis. *RSC Advances*, 2017. No. 7(9). P. 5183–5188.

125. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*. 2015. No. 64. P. 120–131.

126. Hou X., Acar M., Silberschmidt V.V. 2D finite element analysis of thermally bonded nonwoven materials: Continuous and discontinuous models. *Computational Materials Science*, 2009. Vol. 46(3). P. 700–707.

127. Ridruejo A., González C., LLorca J. Micromechanisms of deformation and fracture of polypropylene nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2011. Vol. 48(1). P.153–162.

128. Tyan Y.C., Liao J.D., Klauser R., Wu I.D., Weng C.C. Assessment and characterization of degradation effect for the varied degrees of ultra-violet radiation onto the collagen-bonded polypropylene non-woven fabric surfaces. *Biomaterials*, 2002. Vol. 23(1). P. 65–76.

129. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2010. Vol. 295(5). P. 425–430.

130. Li H., Zhu C., Xue J., Ke Q., Xia Y. Enhancing the Mechanical Properties of Electrospun Nanofiber Mats through Controllable Welding at the Cross Points. *Macromolecular Rapid Communications*, 2017. Vol. 38(9).

131. Gandhi A., Asija N., Gaur K.K., Rizvi S.J.A., Tiwari V., Bhatnagar N. Ultrasound assisted cyclic solid-state foaming for fabricating ultra-low density porous acrylonitrile–butadiene–styrene foams. *Materials Letters*, 2013. Vol. 94. P. 76–78.

132. Murr L.E., Gaytan S.M., Medina F., Lopez H., Martinez E., Machado B.I., Hernandez D.H., Martinez L., Lopez M.I., Wicker R.B., Bracke J. Next-generation biomedical implants using additive manufacturing of complex, cellular and functional mesh arrays. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010. Vol. 368(1917). P. 1999–2032.

133. Martínez-Hergueta F., Ridruej, A., Gonzále, C., Llorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures,* 2017. Vol. 106. P. 56–67.

134. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018. Vol. 111. P. 55–65.

135. Sun J.Y., Zhao X., Illeperuma W.R., Chaudhuri O., Oh K.H., Mooney D.J., Vlassak J.J., Suo Z. Highly stretchable and tough hydrogels. *Nature.* 2012. No. 489(7414). P. 133–136.

136. Ethiraj G., Miehe C. Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science.* 2016. Vol. 102. P. 93–119.

137. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. Киев: Наук. думка, 1993. 132 с.

138. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 3. Киев: Наук. думка, 1993. 389 с.

139. Хорошун, Л. П., Назаренко, Л. В. Нелинейные деформативные свойства композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами. *Прикладная механика.* 2014. Т. 50, № 3. С. 31–41.

140. Nazarenko L. V. (2013). Effective Properties of Composite Materials Strengthened by Orthotropic Fibers with Regard for the Physical Nonlinearity of the Components. *Journal of Mathematical Sciences*, 194(3), 309–321.

141. Шикула Е. Н., Хорошун Л. П. Нелинейное деформирование волокнистых материалов. *Водний транспорт*, 2016. № 2. С. 29–36.

142. Грищак В. З., Гребенюк, С. Н. (). Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда. *Вестник Херсонского национального технического университета*, 2013. № 2. С. 110–114.

143. Гребенюк С. М. Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу з армуванням двома сортами односпрямованих волокон. Вісник Запорізького національного університету. *Фізико-математичні науки*, 2016. № 1. С. 48–56.

144. Grebenyuk, S. N. (2014). The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 78(2), 187-191.

145. Гребенюк С. М., Гребенюк С. Н. (2016). Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів (Doctoral dissertation, Запорізький національний технічний університет).

146. Синюк О. М., Скиба, М. Є. Моделювання зміни надмолекулярної стру-

ктури полімерних матеріалів під час орієнтаційної витяжки. *Вісник Хмельницького національного університету*, № 6, 2016 (243). С. 45–50

147. Zaytsev, B. F., Asayenok, A. V., Protasova, T. V., Klimenko, D. V., Akimov, D. V., & Sirenko, V. N. (2018). Dynamic Processes During the Through-plastic-damper Shock Interaction of Rocket Fairing Separation System Components. *Journal of Mechanical Engineering*, 21(3), 19–30.

148. Зайцев Б., Асаенок А., Протасова Т., Клименко Д., Фкимов Д., Сиренко В. Динамическое напряженно-деформированное состояние композитного обтекателя при отделении от ракеты. *Вісник двигунобудування*, 2018. № 2. С. 129–135.

149. Угримов, С. В. Расчет трехслойных пластин с композитными обшивками. *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*, 2014. № 3. С. 47–56.

150. Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic state of a sliding short fiber inclusion in a three-dimensional matrix. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51, No. 6. P. 640–647.

151. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation. *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 452–455.

152. Larin O., Petrova Y., Mateichyk V. Two-scale approach to modelling of pneumatic tyres. Rzeszow: Politechnika Pzeszowska Im. Ignacego Lukasiewicza, 2013. P. 123–128.

153. Lvov G. I., Kostromitskaya O. A. (2018). Two-Level Computation of the Elastic Characteristics of Woven Composites. *Mechanics of Composite Materials*, 54(5), 577-590.

154. Winkler R. Deformation of semiflexible chains / Winkler R. // Journal of Chemical Physics. 2003. Vol. 118. P. 2919–2928.

155. Huisman E., C. Storm, G. Barkema Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Physical Review E Staff*, 2008. Vol. 78. P. 051801(11).

156. Van Dillen T., Onck P.R., van der Giessen E. Models for stiffening in cross-linked biopolymer networks: A comparative study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56(6). P. 2240–2264.

157. Onck P., T. Koeman, T. van Dillen, E. van der Giessen Alternative explanation of stiffening in cross-linked semiflexible networks. *Physical Review Letters.* 2005. Vol. 95. P. 178102(4).

158. Huisman E., T. Lubensky Internal stresses, normal modes, and nonaffinity in

threedimensional biopolymer networks. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106(8). 088301(4).

159. Blundell J., E. Terentjev The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. *Proceedings of the* Royal Society A*: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011. Vol. 467. P. 2330–2349.

160. Kuhn W., F. Grün Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Colloid. Polym. Sci*. 1942. Vol. 101(3). P. 248–271.

161. Cox HL The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*. 1952. Vol. 3(3). 72 p.

162. Storm C., J.J. Pastore, F.C. MacKintosh, T.C. Lubensky, Janmey P.A. Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature.* 2005. Vol. 435(7039). P. 191–194.

163. Blundell J., E. Terentjev Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*. 2008. Vol. 0808.4088. P. 1–11.

164. Arruda E.M., M.C. Boyce A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1993. Vol. 41. P. 389–412.

165. Kuhl E., K. Garikipati E.M. Arruda K. Grosh Remodeling of biological tissue: Mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2005. Vol. 53(7). P. 1552–1573.

166. Kuhl E., A. Menzel, Garikipati K. On the convexity of transversely isotropic chain network models. *Philosophical Magazine*. 2006. Vol. 86(21–22). P. 3241–3258.

167. Palmer J.S., M.C. Boyce Constitutive modeling of the stressstrain behavior of F-actin filament networks. *Acta Biomater*. 2008. Vol. 4(3). P. 597–612

168. Head D., A. Levine, F. MacKintosh Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 91. P. 108102(4).

169. Kroon M. A constitutive model for strain-crystallising Rubber-like materials. *Mechanics of Materials*. 2010. Vol. 42(9). P. 873–885.

170. Miehe C., S. Göktepe, F. Lulei A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004. Vol. 52. P. 2617–2660.

171. Băzant Z. P., B.H. Oh Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1986. No l. 66. P. 37–49.

172. Marckmann G., E. Verron Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry & Technology Journal*. 2006. Vol. 79. P. 835–858.

173. Treloar LRG Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of de-

formation. *Trans. Faraday Soc*. 1944. Vol. 40. P. 59–70.

174. Heussinger C., Schaefer B., Frey E. Nonaffine rubber elasticity for stiff polymer networks. *Physical Review E Staff.* 2007. 76. P. 031906(12).

175. James Hubert M., Eugene Guth Theory of the elastic properties of rubber. *The Journal of Chemical Physics.* 1943. Vol. 11(10). P. 455–481.

176. Wang Ming Chen, Eugene Guth Statistical theory of networks of non-Gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics*. 1952. Vol. 20(7). P. 1144–1157.

177. Ehret AE, M. Itskov, H. Schmid Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*. 2010. Vol. 81(2). P. 189–206.

178. Verron Erwan Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*. 2015. Vol. 89. P. 216–228.

179. Deam R.T., Sam F. Edwards The theory of rubber elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1976. Vol. 280(1296). P. 317–353.

180. Heinrich G., M. Kaliske Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. *Computational and Theoretical Polymer Science*. 1997. Vol. 7(3). P. 227–241.

181. Miehe C., Göktepe S. A micro–macro approach to rubber-like materials. Part II: the micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53(10). P. 2231–2258.

182. Göktepe S., C. Miehe. A micro–macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2005. – Vol. 53(10). – P. 2259–2283.

183. Miehe C., Joel Méndez Diez, Göktepe S., Lisa-Marie Schänzel Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48(13). P. 1799–1817.

184. Miehe C., S. Göktepe, J. Méndez Diez Finite viscoplasticity of amorphous glassy polymers in the logarithmic strain space. *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46(1). P. 181–202.

185. Govindjee, S., Zoller, M. J., Hackl, K. A fully-relaxed variationally-consistent framework for inelastic micro-sphere models: Finite viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019. Vol. 127. P. 1–19.

186. Alastrué V., M.A. Martinez, M. Doblaré, A. Menzel Anisotropic microsphere-based finite elasticity applied to blood vessel modelling. *Journal of the Mechanics and*

Physics of Solids. 2009. Vol. 57(1). P. 178–203.

187. Menzel A., T. Waffenschmidt A microsphere-based remodelling formulation for anisotropic biological tissues. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2009. Vol. 367(1902). P. 3499–3523.

188. Waffenschmidt T. Modelling and simulation of adaptation and degradation in anisotropic biological tissues. Ph.D. Thesis. – 2013.

189. Таран, Є. Ю., Каліон, В. А., Кондрат, Р. Я. Реологічна модель розведеного розчину недеформівних вільнопротічних ланцюгових макромолекул. *Доповіді НАН України*. 2014. С. 85-91

190. Клепко, В. В., Жигір, О. М., Козак, Н. В., Міненко, М. М. Дослідження особливостей молекулярної рухливості зшитих поліуретанів наноструктурованих комплексними сполуками металів. *Фізика і хімія твердого тіла,* 2012. Т. 13, № 1. С. 201 –204.

191. Holzapfel G.A., M. J. Unterberger, R. W. Ogden An affine continuum mechanical model for cross-linked F-actin networks with compliant linker proteins. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* . 2014. Vol. 38. P. 78–90.

192. Van Oosterwyck H., José F. Rodríguez, M. Doblaré, José M. García Aznar An affine micro-sphere-based constitutive model, accounting for junctional sliding, can capture F-actin network mechanics. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*. 2013. Vol. 16(9). P. 1002–1012.

193. Guilie Joachim, Thien-Nga Lê, Patrick Le Tallec Microsphere model for strain-induced crystallization in rubber. *In Proceedings of the 8th conference on constitutive models in rubbers*, Taylor & Francis. 2013. P. 467–472.

194. Guilie Joachim, Thien-Nga Le, Patrick Le Tallec Micro-sphere model for strain-induced crystallisation and three-dimensional applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. Vol. 81. P. 58–74.

195. Le Tallec P. Polymer modelling: from macroscopic hyperelasticity to strain induced crystallisation. *11th. World Congress on Computational Mechanics (WC CM XI) 5th. European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th. European Conference on Computational Fluid Dyn amics (ECFD VI) July 20–25, 2014*, Barcelona, Spain

196. Mistry Sunny J., Sanjay Govindjee A micro-mechanically based continuum model for strain-induced crystallization in natural rubber. *International Journal of Solids and Structures.* 2014. Vol. 51(2). P. 530–539.

197. Rastak R., Linder C. A non-affine micro-macro approach to strain-crystallizing rubber-like materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018. Vol. 111.

P. 67–99.

198. Thylander S., A. Menzel, M. Ristinmaa A non-affine electroviscoelastic microsphere model for dielectric elastomers: Application to VHB 4910 based actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. P. 1045389X16651157.

199. Behnke, R., Berger, T., Kaliske, M. (2018). Numerical modeling of time-and temperature-dependent strain-induced crystallization in rubber. *International Journal of Solids and Structures*, 141, 15–34.

200. Gros, A., Huneau, B., Verron, E., Tosaka, M. (2019). A physically-based model for strain-induced crystallization in natural rubber. Part I: Life cycle of a crystallite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 125, 164–177.

201. Gros, A., Verron, E., Huneau, B. (2019). A physically-based model for strain-induced crystallization in natural rubber. Part II: Derivation of the mechanical model. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 125, 255–275.

202. Rey T., G. Chagnon, D. Favier, J.-B. Le Cam Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials. *Computational Materials Science*. 2014. Vol. 90. P. 89–98.

203. Bergström J.S., M.C. Boyce Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998. Vol. 46(5). P. 931–954.

204. Dal Hüsnü, Michael Kaliske Bergström–Boyce model for nonlinear finite rubber viscoelasticity: theoretical aspects and algorithmic treatment for the FE method. *Computational Mechanics*. 2009. Vol. 44(6). P. 809–823.

205. Anisotropic microsphere-based approach to damage in soft fibered tissue. / Sáez P., Alastrué V., Peña E., Doblaré M., Martínez M.A. // Biomechanics and modeling in mechanobiology, 2012. Vol. 11(5). P. 595–608.

206. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018. Vol. 111. P. 55–65.

207. Negi V., Picu C. (2019). Mechanical behavior of nonwoven non-crosslinked fibrous mats with adhesion and friction. *Soft Matter*. Vol. 15, Iss. 29, 5951–5964

208. Deogekar, S., Yan, Z., Picu, R. C. (2019). Random Fiber Networks With Superior Properties Through Network Topology Control. *Journal of Applied Mechanics*, 86(8), 081010.

209. Deogekar, S., Picu, R. C. (2018). On the strength of random fiber networks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116, 1–16.

210. Chen, N., Silberstein, M. N. (2019). A micromechanics-based damage model for non-woven fiber networks. *International Journal of Solids and Structures*, 160, 18–31.

211. Chen, N. (2018). Experimental and computational study of non-woven damage mechanics (Doctoral dissertation, Cornell University).

212. Diani, J., Le Tallec, P. (2019). A fully equilibrated microsphere model with damage for rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 124, 702–713.

213. Bergström, P., Hossain, S., Uesaka, T. (2019). Scaling behaviour of strength of 3D-, semi-flexible-, cross-linked fibre network. *International Journal of Solids and Structures*, 166, 68–74.

214. Gao, X., Sozumert, E., Silberschmidt, V. (2018). Discontinuous Finite Element Model of Hydrogels: Predicting Stiffness of Nanofibers. *In Numerical Methods and Advanced Simulation in Biomechanics and Biological Processes* (pp. 3–16). Academic Press.

215. Zündel, M., Ehret, A. E., Mazza, E. (2019). The multiscale stiffness of electrospun substrates and aspects of their mechanical biocompatibility. *Acta biomaterialia*, 84, 146–158.

216. Bosco, E., Peerlings, R. H. J., Geers, M. G. D. (2018). Scale effects in the hygro-thermo-mechanical response of fibrous networks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 71, 113–121.

217. Berkache, K., Deogekar, S., Goda, I., Picu, R. C., Ganghoffer, J. F. (2019). Identification of equivalent couple-stress continuum models for planar random fibrous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(4), 1035–1050.

218. Dirrenberger, J., Forest, S., Jeulin, D. (2019). Computational Homogenization of Architectured Materials. *In Architectured Materials in Nature and Engineering*. Springer, Cham. pp. 89–139

219. G. Chen, R. Rastak, Y. Wang, H. Yan, V. Feig, Y. Liu, Y. Jiang, Sh. Chen, F. Lian, F. Molina-Lopez, L. Jin, K. Cui, J. W. Chung, E. Pop, C. Linder, Z. Bao, Strain- and Strain-Rate-Invariant Conductance in a Stretchable and Compressible 3D Conducting Polymer Foam, *Matter*, Vol. 1, Iss. 1, 2019, pp 205–218

220. Johnson, K. L. Contact Mechanics. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.

221. Горячева И. Г. Контакт упругих тел в условиях трения качения при наличии промежуточного слоя. *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет пу-*

тей сообщения. 2016. № 4 (64). С. 24–28

222. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals] 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.

223. Стренг Э., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Москва: Мир, 1977. 349 с.

224. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. Москва: Мир, 1981. 304 с.

225. Крауч С., Старфилд А.Методы граничных элементов в механике твердого тела. Москва: Мир, 1987. 328 с.

226. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzat e semilineariz–zata. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*. 1959. Т. 18. № 1–2. P. 95–139.

227. Дюво Г., Ж.–Л. Лионс Неравенства в механике и физике. Москва: Наука, 1980. 383 с.

228. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. Москва: Мир, 1974. 159 с.

229. Киндерлерер Д., Г. Стампаккъя Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.

230. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. Москва: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. 339 с.

231. Баничук Н.В., Ф.Л. Черноусько Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. Москва: Наука, 1973. 238 с.

232. Kikuchi N., J.T. Oden Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia*. 1986. Vol. 8. P. 156–161.

233. Panagiotopoulos P.D. Inequality problems in mechanics, convex and nonconvex energy functions. Boston, Basel: Birkhäuser Verlag, 1985. P. 196–201.

234. Hlavacek I., J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. Solution of Variational Inequalities in Mechanics. Berlin, New York: Springer–Verlag, 1988. 327 p.

235. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно– и нелинейно–упругих тел конечных размеров. *Прикладная математика и механика*. 1977. Том 41. С. 329–337.

236. Львов Г.И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно упругих и физически нелинейных пологих оболочек. *Прикладная математика и механика*. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 841–846.

237. Curnier A., Q.C. He, J.J. Telega Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformation. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1992. Vol. 314. P. 1–6.

238. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977. Vol. 20. P. 199–221.

239. Martins J.A.C., J.T. Oden Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear analysis, theory, methods and applications*. 1987. Vol. 11. P.407–428.

240. Laursen T.A., V. Chawla Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997. Vol. 40. P. 863–886.

241. Pfeiffer F., C. Glocker Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. New York: Wiley, 1996. 469 p.

242. Oden J.T., Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1986. Vol. 52. P. 527–634.

243. Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упруго-пластических тел. *Прикладная математика и механика*. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.

244. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer–Verlag, 2006. 518 p.

245. Bertsekas D.P. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. New York: Academic Press, 1984. 372 p.

246. Hüeber S., B. Wohlmuth A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. P. 3147–3166.

247. Oden J.T. Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. Berlin: Springer, 1981. 219 p.

248. Pietrzak G., A. Curnier Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangean treatment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 177. P. 351–381.

249. Francavilla A., O.C. Zienkiewicz A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1975. Vol. 9. P.913–924.

250. Stadter J.T., R.O. Weiss Analysis of contact through finite element gaps. *Computers and Structures*. 1979. Vol. 10. P. 867–873.

251. Simo J.C., P. Wriggers, R.L. Taylor A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1985. Vol. 50. P.163–180.

252. McDevitt T.W., T.A. Laursen A mortar–finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 48. P.1525–1547.

253. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*. 2000. Vol. 38. P. 989–1012.

254. Nitsche J. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen in der Mathematik an der Universität Hamburg*. 1970. V. 36. P. 9–15.

255. Zavarise G., P. Wriggers A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by nitsche. *Computational Mechanics*. 2006. P. 759–767.

256. Hallquist J.O., G.L. Goudreau, D.J. Benson Sliding interfaces with contact–impact in large–scale lagrange computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 51. P. 107–137.

257. Wriggers P., T.V. Van, E. Stein Finite-element-formulation of large deformation impact–contact–problems with friction. *Computers and Structures*. 1990. Vol. 37. P. 319–333.

258. Hallquist J.O., K. Schweizerhof, D. Stillman Efficiency refinements of contact strategies and algorithms in explicit fe programming. *Proceedings of COMPLAS III, Pineridge Press*. 1992. P. 359–384.

259. Puso M.A., T.A. Laursen A mortar segment–to–segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. Vol. 193. P. 601–629.

260. Fischer K.A., P. Wriggers Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006. P. 641–656.

261. Мартыняк Р.М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1985. Вып. 22. С. 89–92.

262. Мартиняк Р.М. Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2000. Т. 43. № 1. С. 102–110.

263. J.J. Kalker, Dekking F.M., E.A.H. Vollebregt Simulation of rough, elastic contacts. *Journal of applied mechanics. American Society of Mechanical Engineers*. 1997.

Vol. 64. P. 361–368.

264. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT". *Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*. China. 2012. Vol. 96. P. 201–209.

265. Vollebregt E.A.H. Refinement of Kalker's rolling contact model ollebregt. In: Bracciali editor. *Proceedings of the 8th international conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems*. 2009. P. 149–156.

266. Прокопишин І.І. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл : автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 / І.І. Прокопишин // Ін-т приклад. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2010. 20 с.

267. Прокопишин І. Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2012. Вип. 15. С. 75–87.

268. Прокопишин І.І., І.І. Дияк, Р.М. Мартиняк Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2013. Т. 49. № 1. С. 46–55.

269. Павлов А. И. Современная теория зубчатых зацеплений. Харків: ХНАДУ, 2005. 100 с.

270. Устиненко А.В. Математическое моделирование процессов усталостного разрушения зубьев. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* – Харків: НТУ "ХПІ". 2012. № 22. С. 170–175

271. Протасов Р.В., А.В. Устиненко, Г.А. Кротенко Моделирование геометрии эволютных зацеплений, исследование их некоторых качественных показателей и контактных напряжений. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків: НТУ «ХПІ». 2012. № 22. С. 106–116.

272. Шишов В.П., П.Л. Носко, П.В. Филь Теоретические основы синтеза передач зацеплением. Луганськ: Вид–во СНУ ім. В Даля, 2006. 408 с.

273. Шишов В.П., Носко П.Л., Ткач П.М., Філь П.В. Високонавантажені циліндричні передачі з двоопукло-ввігнутими зубцями: Монографія. Луганськ: Вид–во СНУ ім. В. Даля, 2005. 216 с.

274. Устиненко А. В. Особенности расчета активных поверхностей зубьев двухпараметрических передач на контактную выносливость. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків: НТУ «ХПІ». 2013. №23 (996). С. 152–158.

275. Марченко А.П., І. В. Парсаданов, Л. Л. Товажнянський, А. Ф. Шеховцов Двигуни внутрішнього згоряння: серія підручників у 6 т. Харків: НТУ «ХПІ». 2014.

276. Гавриш О. А., Ю. Ю. Віцюк, Т. А. Роїк, А. П. Гавриш, Войтко С. В. Новітні технології виробництва стандартизованих виробів (підшипників). Київ: НТУУ «КПІ», 2012. 204 с.

277. Аргатов И.И., Н.Н. Дмитриев Основі теории упругого дискретного контакта. Санкт-Петербург: Политехника, 2003. 233 с.

278. Штаерман И.Я. К теории Герца местных деформаций при сжатиии упругих тел. *Докл. АН СССР*. 1939. Т. 25. № 5. С. 360–362

279. Фел Л.Г. К контактной задаче теории упругости. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1992. № 4. С. 78–81

280. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2015. Vol. 104. P. 104–111.

281. Ciavarella M., A. Papangelo A modified form of Pastewka–Robbins criterion for adhesion. *The Journal of Adhesion*. 2018. Vol. 94(2). P. 155–165.

282. Papangelo A., N. Hoffmann, M. Ciavarella Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific reports*. 2017. Vol. 7 (1). P. 6900.

283. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2015. Vol. 104. P. 104–111

284. Ciavarella M., JA Greenwood, M. Paggi Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear.* 2008. Vol. 265(5). P. 729–734.

285. Paggi M., M. Ciavarella The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*. 2010. Vol. 268(7). P. 1020–1029.

286. Ciavarella M., G. Murolo, G. Demelio, JR Barber Elastic contact stiffness and contact resistance for the weierstrass profile. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2004. Vol. 52(6). P. 1247–1265.

287. Ciavarella M., S. Dibello, G. Demelio Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45(3). P. 879–893.

288. Ciavarella M., C. Murolo, G. Demelio On the elastic contact of rough surfaces: Numerical experiments and comparisons with recent theories. *Wear*. 2006. Vol. 261. P. 1102–1113.

289. Ростовцев Н.А. К решению плоской контактной задачи. *Прикладная математика и механика*. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 99–106.

290. Кравчук А.С. Метод вариационных неравенств в контактных задачах. *Механика контактных взаемодействий.* 2001. С. 93–115.

291. Подгорный А.Н., П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / отв. ред. В.Л. Рвачев АН УССР. Харків, Ин-т проблем машиностроения. Киев, 1989.

292. Archard JF. Elastic deformation and the laws of friction. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 1957. Vol. 243. P. 190–205.

293. Greenwood JA, JH Tripp The elastic contact of rough spheres. *Journal of Applied Mechanics*. 1967. Vol. 34. P. 153–159.

294. Гаркунов Д.Н. Триботехника (износ и безизносость): учеб. Москва: Изд-во «МСХА», 2001. 606 с.

295. Буше Н.А., В.В. Копытко Совместимость трущихся поверхностей. Москва: Наука, 1981. 127с.

296. Белый В.А., А.И. Свериденок, Н.И. Петраковец и др. Трение и износ материалов на основе полимеров. Минск: Наука и техника, 1976. 431с.

297. Трение, износ и смазка (трибология и триботехника); под общ. ред. А.В. Чичинадзе. Москва: Машиностроение, 2003. 575 с.

298. Демкин Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей. Москва: Наука, 1970. 228 с.

299. Бородич, Ф. М., А. Б. Мосолов Фрактальный контакт твердых тел. *Журнал технической физики*. 1991. Т. 61, № 9. С. 50–54.

300. Попов Г. Я., В.В. Савчук Контактная задача теории упругости при наличие круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. *Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела*. 1971. № 3. С. 80–87.

301. Мартиняк Р.М. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 43–56.

302. Yang C., BNJ Persson Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008. Vol. 20(21). P. 215214.

303. Ragnar Holm. Electric contacts: theory and application. Springer Science & Business Media, 2013.

304. Pohrt R., V. L. Popov Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. Advances in Tribology, 2013.

305. Pastewka L., M. O Robbins, Bo NJ Persson Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E Staff*. 2013. Vol. 87(6). P. 062809.

306. Pohrt R., V. L. Popov Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013. Vol. 3.

307. Persson BNJ. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. *Physical review letters*. 2007. Vol. 99(12). P. 125502.

308. B.S. Slobodyan, [...], R.M. Martynyak Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences.* 2016. Vol. 215(1). P. 110–112

309. Popov V. L., R. Pohrt, Q. Li Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction.* 2017. Vol.5(3). P. 308–325.

310. Li Q., V.L. Popov Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering.* 2018. Vol. 16 (1). P. 1–8.

311. Pastewka L., Mark O Robbins. Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws. *Applied Physics Letters*. 2016. Vol. 108(22). P. 221601.

312. Zhao J., E. Vollebregt, C. Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016. Vol. 21 (1). P. 119–141.

313. Vollebregt G. Segal. Solving conformal wheel-rail rolling contact problems. *Vehicle System Dynamics*. 2014. Vol 52. P. 455–468.

314. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*. 1971. – Vol. 93(3). – P.398–407.

315. Greenwood JA, JB Pl Williamson Contact of nominally flat surfaces. In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical. *Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1966. Vol. 295. P. 300–319.

316. Bush AW, RD Gibson, TR Thomas The elastic contact of a rough surface. *Wear*. 1975. Vol. 35(1). P. 87–111.

317. Greenwood JA. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*. 2006. Vol. 261(2). P. 191–200.

318. McCool John I. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1992. Vol. 32(1–2). P. 115–123.

319. Mikić BB. Thermal contact conductance; theoretical considerations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1974. Vol. 17(2). P. 205–214.

320. Cooper MG., B.B. Mikic, M.M. Yovanovich Thermal contact conductance. *International Journal of heat and mass transfer*. 1969. Vol. 12(3). P. 279–300.

321. Ciavarella M., G Demelio, JR Barber, Yong Hoon Jang Linear elastic contact of the weierstrass profile. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical,*

Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 2000. Vol. 456, P. 387–405

322. Persson BNJ. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87(11). P. 116101.

323. Persson BNJ Theory of rubber friction and contact mec hanics. *The Journal of Chemical Physics*. 2001. Vol. 115(8). P. 3840–3861.

324. Persson BNJ, F. Bucher, Bernardino Chiaia Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B.* 2002. Vol. 65(18). P. 184106.

325. Zavarise G., M. Borri-Brunetto, M.Paggi On the reliability of microscopical contact models. *Wear.* 2004. Vol. 257(3). P. 229–245.

326. Zavarise G., M. Borri-Brunetto, M.Paggi On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear.* 2007. Vol. 262(1). P. 42–54.

327. Barber JR. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 2003. Vol. 459. P. 53–66.

328. Paggi M., JR Barber Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54(21). P. 4664–4672.

329. Pastewka L., N. Prodanov, B. Lorenz, M. H Müser, M. O Robbins, BNJ Persson Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E.* 2013. Vol. 87(6). P. 062809

330. Крагельский И.В., М.Н. Добычин, В.С. Комбалов Основы расчета на трение и износ. М. : Машиностроение, 1977. 526 с.

331. Крагельский И.В. Трение и износ. Москва: Машиностроение, 1968. 480 с.

332. Комбалов В.С. Влияние шероховатости твердых тел на трение и износ. Москва: Наука, 1974. 112 с.

333. Демкин Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей. Москва: Наука, 1970. 227 с.

334. Тимошенко С. История науки о сопротивлении материалов. Москва: Книга по требованию, 1957. 535 с.

335. Решетов Д.Н., Портман В.Т. Точность металлорежущих станков. Москва: Машиностроение, 1986. 336 с.

336. Валетов В.А. Возможные критерии оценки шероховатости обработанных поверхностей. *Труды ЛКИ.* 1977. № 108. С. 135–140.

337. Коротков В. А. Износостойкость машин. Москва: DirectMEDIA, 2014. 67 с.

338. Кирилюк, В. С., Левчук, О. І. (2016). Моделирование контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства и упругой изотропной основы с приповерхностной выемкой кругового сечения. *System Research & Information Technologies*, 2016, № 3, pp.118-125

339 Рудаков, К. М., Дифучин, Ю. М. (2018). О расчетах болтового соединения на смятие отверстий в пластине из слоистого полимерного композиционного материала. *Mechanics and Advanced Technologies*, 83(2).

340. Atroshenko O., M. Tkachuk, O. Ustinenko, O. Bondarenko, N. Diomina. A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. Харків, 2016. 1/7(79). С. 24–29.

341. Cinat, P., Paggi, M., Gnecco, G. (2019). Identification of roughness with optimal contact response with respect to real contact area and normal stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.

342 Li, S., Yao, Q., Li, Q., Feng, X. Q., Gao, H. (2018). Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 111, 277–289.

343. Ciavarella, M., Joe, J., Papangelo, A., Barber, J. R. (2019). The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of the Royal Society Interface*, 16(151), 20180738.

344. Greenwood, J. A. (2017). Reflections on and extensions of the Fuller and Tabor theory of rough surface adhesion. *Tribology Letters*, 65(4), 159.

345. Papangelo, A., Scheibert, J., Sahli, R., Pallares, G., Ciavarella, M. (2019). Shear-induced contact area anisotropy explained by a fracture mechanics model. *Physical Review E*, 99(5), 053005.

346. Li, Q., Popov, V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, 1–7.

347. Joe, J., Thouless, M. D., Barber, J. R. (2018). Effect of roughness on the adhesive tractions between contacting bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 118, 365–373.

348. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 1350650119854250.

349. A.I. Vakis, V.A. Yastrebov, J. Scheibert, L. Nicola, D. Dini, C. Minfray, A.

Almqvist, M. Paggi, S. Lee, G. Limbert, J.F. Molinari, G. Anciaux, R. Aghababaei, S. Echeverri Restrepo, A. Papangelo, A. Cammarata, P. Nicolini, C. Putignano, G. Carbone, S. Stupkiewicz, J. Lengiewicz, G. Costagliola, F. Bosia, R. Guarino, N.M. Pugno, M.H. Müser, M. Ciavarella, Modeling and simulation in tribology across scales: An overview, *Tribology International*, Vol. 125, 2018, P. 169–199.

350. Ткачук А.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* М.: ООО «Тисо Принт», 2009. № 12. С. 25–32; 2010. № 1. С. 19–28.

351. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах / Под общей ред. И А. Биргера и Я. Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968.

352. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: Физматлит, 2004. 304 с.

353. Бабешко В.А., Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах. *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 257. № 2. С. 289–294.

354. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1988. 712 с.

355. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542с.

356. Li J., E.J. Berger A semi–analytical approach to tree–dimensional normal contact problems with friction. *Computational Mechanics*. 2003. Vol. 30. P. 310–322.

357. Гловински Р., Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер Численное исследование вариационных неравенств. Москва: Мир, 1979 574 с.

358. Galin L.A., G.M.L. Gladwell Contact Problems: The legacy of L.A. Galin. *Springer – Solid mechanics and its applications*. 2008. Vol. 155. 318 p.

359. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. (2019). Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 16(1).

360. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. (2015). Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory.Composite Structures, 125, 575–585.

361. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. (2011). Investigation of the stress ‑ strain state of the laminated shallow shells by R ‑ functions method combined with

spline‐approximation. *ZAMM‐Journal of Applied Mathematics and Mechanics/ Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(6), 458–467.

362. Avramov K. V. (2018). Nonlinear vibrations characteristics of single-walled carbon nanotubes by nonlocal elastic shell model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 107, 149–160.

363. Avramov K., Kabylbekova B. (2019). Bifurcation behavior and chaotic self-sustained vibrations of cantilevered nanotube conveying fluid. *Acta Mechanica*, 1–24.

364. Воробьев Ю.С., Н.Ю. Овчарова Скоростное деформирование многослойных элементов при контактном воздействии. *Техническая механика*. 2016. № 3. С. 17–23.

365. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Ярыжко А. В. Скоростное упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки при локальном ударе. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин*, 2008. №1(36). С. 40–48.

366. Гринев В. Б., Филиппов, А. П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. Киев: Наук. думка, 1979. 211 с.

367. Gnitko V. V., Degtyariov K. G., Karaiev A. A., Strelnikova E. A. (2019). Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 122, 13–25.

368. Караєв А. О., Стрельнікова О. О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 1. С. 10–18.

369. Дегтярьов К. Г., В. І. Гнітько, О. О. Стрельнікова, А. М. Тонконоженко Розрахункові моделі для аналізу механічних властивостей тривимірних нанокомпозитів на основі методів скінчених та граничних елементів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 2. С. 43–54.

370. Bokov I. P., Strelnikova E. A. (2015). Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. *International Journal of Innovative Research in Engineering & Management,* 2(6), 56-62.

371. Rodichev, Y. M., Smetankina, N. V., Shupikov, O. M., Ugrimov, S. V. (2018). Stress-Strain Assessment for Laminated Aircraft Cockpit Windows at Static and Dynamic Loads. *Strength of Materials*, 50(6), 868-873.

372. Шульженко, Н. Г., Зайцев, Б. Ф., Викман, Н. Е., Асаенок, А. В. (2012). Расчет колебаний ротора с дышащей трещиной по трехмерной модели. *Проблемы прочности*, (6), 137–145.

373. Гринёв, В. Б., Янютин, Е. Г., Гришакин, В. Т. Идентификация подвижного нагружения, воздействующего на вязко-упругую пластину на упругом основании. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2011. №13. С. 69 –74.

374. Sklepus, S. N. (2018). Creep and Damage of Shallow Shells. *International Applied Mechanics*, 54(2), 180 –187.

375. Sethian J.A., A. Wiegmann Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of computational physics*. 2000. Vol. 163(2). P. 489–528.

376. Osher S.J., F. Santosa Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*. 2001. Vol. 171(1). P. 272–288.

377. Allaire G., F. Jouve, A.M. Toader Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*. 2004. Vol. 194(1). P. 363–393

378. Allaire G., C. Dapogny, P. Frey Shape optimization with a level set based mesh evolution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 282. P. 22–53.

379. Cai S., W. Zhang, J. Zhu, T. Gao Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: a B-spline finite cell method combined with level set function. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 278. P. 361–387.

380. Wang Y., Z. Luo, N. Zhang, Z. Kang Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method. *Computational Materials Science*. 2014. Vol. 87. P. 178–186.

381. Makhija D., K. Maute Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 49(2). P. 185–197.

382. Maute K., Tkachuk A., Wu J., Qi H. J., Ding Z., Dunn M. L. Level set topology optimization of printed active composites. *Journal of Mechanical Design.* 2015. Vol. 137(11). P. 111402.

383. Myśliński A. Level set method for optimization of contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008. Vol. 32(11). P. 986–994.

384. Myśliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. *Advances in Engineering Software*. 2015. Vol. 80. P. 25–32.

385. Bendsøe M.P., N. Kikuchi Generating Optimal Topologies in Optimal Design Using a Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1988. Vol. 71. P. 197.

386. Bendsøe M.P., Sigmund O. Topology Optimization – Theory, Methods and Ap-

plications. Springer, Dordrecht, 2003.

387. Rao J.S. Optimization. In History of rotating machinery dynamics. Springer, Dordrecht, 2011. P. 341-351.

388. Pedersen N.L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*. 2000. Vol. 20(1). P. 2–11.

389. Bruns T.E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid–void topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2005. Vol. 30(6). P. 428–436.

390. Le C., Norato J., Bruns T., Ha C., Tortorelli D. Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010. Vol. 41(4). P. 605–620.

391. Kang Z., Y. Wang Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2011. Vol. 200(49). P. 3515–3525.

392. Lambe A.B., A. Czekanski Topology optimization using a continuous density field and adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol 113. Iss. 3. P 357–373.

393. Lazarov B.S., F. Wang Maximum length scale in density based topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 318. P. 826–844.

394. Strömberg N., A. Klarbring Topology optimization of structures in unilateral contact. *Structural and multidisciplinary optimization*. 2010. Vol. 41(1). P. 57–64.

395. Пригоровский Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений. Москва: Машиностроение, 1983. 248 с.

396. Заярненко Е.И. Разработка математических моделей и расчеты на прочность разделительных переналаживаемых штампов: дисс… доктора. техн. наук: спец. 01.02.06 и 05.03.05 / Заярненко Евгений Иванович. Харьков, 1992. 280 с.

397. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1982. 504 с.

398. Lekue J., F. Dörner, C. Schindler On the source of the systematic error of the pressure measurement film applied to wheel–rail normal contact measurements. *Journal of Tribology*. 2018. Vol. 140(2). P. 024501.

399. Kim S., M. C. Miller Validation of a finite element humeroradial joint model of contact pressure using Fuji pressure sensitive film. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2016. Vol. 138(1). P. 014501.

400. Demba S., S. Elsholz, C. Ammon, S. Rose-Meierhöfer The usability of a pres-

sure-indicating film to measure the teat load caused by a collapsing liner. *Sensors*. 2016. Vol. 16(10). P. 1597.

401. Основи міцності, деформації та механіки руйнування [Текст]: навч. посібник / Г. М. Зражевський [и др.] ; Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. К. : Фітосоціоцентр, 2002. 107 с.

402. Васьо Н. Метод фотопружних покривів та його застосування для визначення напружено-деформованого стану твердих тіл. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання –2015»,26–28 травня 2015р*., Львів

403. Олійник О.О., Циганок Б. А. Реєстрація модуляційно-поляризаційним методом механічних напружень в поверхневих плівках на твердотільній підкладці. *Електроніка та зв'язок*. № 4(87). 2016. С. 9–14.

404. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочное пособие / Касаткин Б.С., Кудрин А.Б., Лобанов Л.М. и др. Под ред. Касаткина Б.С. Киев: Наукова думка, 1981. 412 с.

405. Экспериментальная механика. Книга I / С. Атлури, А. Кобаяси, Д. Дэлли, У. Райли и др. Под ред. А.Кобаяси. Москва: Мир, 1990. 616 с.

406. Miehe C. A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 3859–3897.

407. Ethiraj G., C. Miehe Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science.* 2016. Vol. 102. P. 93–119.

408. Трение, изнашивание и смазка: справочник в 2-х кн. Кн. 1. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. Москва: Машиностроение, 1978. 400 с.

409. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. Москва: Мир, 1973. 244 с.

410. Химмельблау Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Москва: Мир. Редакция литературы по новой технике, 1975. 534 с.

411. Нікольський Ю. В., В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. Дискретна математика. Київ: Видавнича група BHV, 2007. 368 с.

412. Wu P.D., E. van der Giessen On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41(3). P. 427–456.

413. Alastrué V., P. Sáez, M.A. Martínez, M. Doblaré On the use of the Bingham statistical distribution in microsphere-based constitutive models for arterial tissue. *Mechanics Research Communications*. 2010. Vol. 37(8). P. 700–706.

414 Glatting G., R. G. Winkler, P. Reineker Analytical model for the microscopic nonaffine deformation of polymer networks. *Journal of Chemical Physics*. 1994. Vol. 101(3). P. 2532–2538.

415. Treloar LRG, Riding G. A non-Gaussian theory for rubber in biaxial strain. I. Mechanical properties. London: Proc. R. Soc. 1979. Ser. A. Vol. 369. P. 261–280.

416. Flory P.J. Statistical mechanics of chain molecules. Munich: Hanser Publishers, 1988.

417. Coleman B.D., W. Noll Foundations of Linear Viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*. 1961. Vol. 33. P. 239–249.

418 Doi M., S.F. Edwards The Theory of Polymer Dynamics. Oxford: Clarendon Press, 1986.

419. Bird R., O. Hassager, R. Armstrong, C. Curtiss. Dynamics of Polymeric Liquids, Kinetic Theory. New York: Wiley, 1977.

420. Green M., A. Tobolsky A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *Journal of Chemical Physics*. 1946. № 14. P. 80–92.

421. Lubliner J. A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*. 1985. № 12. P. 93–99.

422. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. Москва: Мир, 1985. 264 с.

423. Ткачук А.Н. Методы анализа конструкционной прочности элементов машин при термомеханическом контакте: дисс… канд. техн. наук: спец. 05.02.09 – динамика и прочность машин / Ткачук Антон Николаевич. Харьков, 2010. 180 с.

424. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. Москва: Наука, 1968. 584 с.

425. Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавиль В.В., Истратов А.В. и др. Объемная гидропередача с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень. *Механіка та машинобудування*. 2004. №1. С.14–21.

426. Ткачук Н.А. Н.Н. Ткачук, Т.В. Полищук Контактное взаимодействие элементов конструкций с кинематически генерируемыми поверхностями / Н.А. Ткачук, // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип.: «Транспортне машинобудування». 2007. №33. С. 176–183.

427. Kratky O., G. Porod Röntgenuntersuchung gelöster Fadenmoleküle. *Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas*. 1949. Vol. 68(12). P. 1106–1122.

428. MacKintosh F.., J. Käs, P. Janmey Elasticity of semiflexible biopolymer networks. *Physical Review Letters*. 1995. Vol. 75.

429. Wilhelm J., E. Frey Radial distribution function of semiflexible polymers. *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77. P. 2581–2584.

430. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *Journal of Chemical Physics*. 2003. Vol. 118. P. 2919–2928.

431. Kuhn W., F Grün Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Colloid and Polymer Science*. 1942. Vol. 101(3). P. 248–271.

432. Blundell J., E. Terentjev Forces and extensions in semiflexible and rigid polymer chains and filaments. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. Vol. 40. P. 10951–10964.

433. Kuhl E., K. Garikipati, E. Arruda, K. Grosh Remodeling of biological tissue: Mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53(7). P. 1552–1573.

434. Otto M., J. Eckert, T. Vilgis Persistence lengths of semiflexible chains – methods and approximations. *Macromolecular Theory and Simulations*. 1994. Vol. 3. P. 543–555.

435. Head D., A. Levine, F. MacKintosh Distinct regimes of elastic response and deformation modes of cross-linked cytoskeletal and semiflexible polymer networks. *Physical Review E*. 2003. Vol. 68. P. 061907(15).

436. Janmey P.A., M.E. McCormick, S. Rammensee, J.L. Leight, P.C. Georges, F.C. MacKintosh Negative normal stress in semiflexible biopolymer gels. *Nature Materials*. 2007. Vol. 6(1). P. 48–51.

437. Conti E., F. MacKintosh Cross-Linked Networks of Stiff Filaments Exhibit Negative Normal Stress. *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. P. 088102.

438. Flory P. J. Network topology and the theory of rubber elasticity. *British Polymer Journal.* 1985. Vol. 17(2). P.96–102.

439. James H.M., E. Guth Theory of the increase in rigidity of rubber during cure. *Journal of Chemical Physics*. 1947. Vol. 15(9). P. 669–683.

440. Wilhelm J., E. Frey Elasticity of stiff polymer networks. *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 91. P. 108103(4).

441. Heinrich G., E. Straube On the strength and deformation dependence of the tube-like topological constraints of polymer networks, melts and concentrated solutions, I. The polymer network case. *Acta Polymerica*. 1983. Vol. 34(9). P. 589–594.

442. Edwards S.F., T. Vilgis The tube model theory of rubber elasticity. *Reports on Progress in Physics*. 1988. Vol. 51. P. 243–297.

443. Johnson K.L., K. Kendall, A.D. Roberts Surface energy and the contact of elastic Solids. *In Proceedings of the Royal Society of London A: a thematical, Physical and Engineering Sciences.* London : The Royal Society, 1971. Vol. 324. No. 1558. P. 301–313

444. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2007. No. 55(3). P. 445–472.

445 Derjaguin B.V., V.M. Muller, Y.P. Toporov Effect of contact deformation on the adhesion of particles. *Journal Colloid Interface Sci*. 1975. No. 55. P. 314–326.

446. Sauer R.A., S. Li An atomic interaction-based continuum model for adhesive contact mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2007. No. 43(5). P. 384–396.

447. Sauer R.A. A survey of computational models for adhesion. *The Journal of Adhesion*. 2016. No. 92(2). P. 81–120.

448. Feng J.Q. Contact behavior of spherical elastic particles: a computational study of particle adhesion and deformations. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2000. No. 172(1). P. 175–198.

449. Greenwood, J.A. Adhesion of small spheres. *Philosophical Magazine*. 2009. No. 89(11). – P. 945–965.

450. Medina S., D. Dini A numerical model for the deterministic analysis of adhesive rough contacts down to the nano-scale. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. No. 51(14). P. 2620–2632.

451. Pohrt R., V.L. Popov Adhesive contact simulation of elastic solids using local mesh-dependent detachment criterion in boundary elements method. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2015. No. 13(1). P. 3–10.

452. Popov V.L., R. Pohrt, Q. Li Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients [Text]. *Friction.* 2017. No. 5(3). P. 308–325.

453. Papangelo A., N. Hoffmann, M. Ciavarella Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. Scientific reports. 2017. No. 7(1). P. 6900.

454. Ciavarella M., A. Papangelo A random process asperity model for adhesion between rough surfaces. *Journal of Adhesion Science and Technology*. 2017. P. 1–23.

455. Prokopovich P., V. Starov Adhesion models: From single to multiple asperity contacts. *Advances in colloid and interface science*. 2011. No. 168(1). P. 210–222.

456. Kalker J.J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies. *Wear*. 1987. No. 119(1). P. 63–76.

457. Kesari H., A.J. Lew Adhesive frictionless contact between an elastic isotropic half-space and a rigid axi-symmetric punch. *Journal of Elasticity*. 2012. No. 106(2). P. 203–224.

458. Fuller K.N.G., D.F.R.S. Tabor The effect of surface roughness on the adhesion of elastic Solids. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. London: The Royal Society, 1975. No. 345. P. 1642.

459. Briggs G.A.D., B.J. Briscoe The effect of surface topography on the adhesion of

elastic Solids. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1977. No. 10(18). P. 2453.

460. Kim H.C., T.P. Russell Contact of elastic solids with rough surfaces. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*. 2001. No. 39(16). P. 1848–1854.

461. Fuller K.N.G., A.D. Roberts Rubber rolling on rough surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1981. No. 14(2). P. 221.

462. Graveleau M., N. Chevaugeon, N. Moës The inequality level-set approach to handle contact: membrane case. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 2015. No. 2(1). P. 16.

463. Martynyak R.M., B.S. Slobodyan Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid. *Materials Science*. 2009. No. 45(1). P. 66–71.

464. Kozachok O. P., B.S. Slobodian, R.M. Martynyak Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Periodically Located Gaps Filled with a Real Gas. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. No. 222(2). P. 131–142.

465. Chen N., M. N. Silberstein Determination of Bond Strengths in Non-woven Fabrics: a Combined Experimental and Computational Approach. *Experimental Mechanics*. 2018. Vol. 58(2). P. 343–355.

466. Ridruejo A., C. González, J. LLorca A constitutive model for the in-plane mechanical behavior of nonwoven fabrics. International. *Journal of Solids and Structures*. 2012. No. 49(17). P. 2215–2229.

467. Ridruejo A., R. Jubera, C. González, J. LLorca Inverse notch sensitivity: Cracks can make nonwoven fabrics stronger. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. No. 77. P. 61–69.

468. Martínez-Hergueta F., A. Ridruejo, C. González, J. LLorca A multiscale micromechanical model of needlepunched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. No. 96. P. 81–91.

469. Mark J.E. Elastomeric Networks with Bimodal Chain-Length Distributions. *Accounts of Chemical Research*. 1994. No. 27(9). P. 271–278.

470. Gong J.P., Y. Katsuyama, T. Kurokawa, Osada Y. Double-Network Hydrogels with Extremely High Mechanical Strength. *Advanced Materials*. 2003. No. 15(14). P. 1155–1158.

471. Erman B., J. E. Mark Calculations on Trimodal Elastomeric Networks. Effects of Chain Length and Composition on Ultimate Properties. *Macromolecules*, 1998. No. 31(9). P. 3099–3103.

472. Tsukeshiba H., M. Huang, Y.-H. Na, T. Kurokawa, R. Kuwabara, Y. Tanaka, H. Furukawa, Y. Osada, J.P. Gong Effect of Polymer Entanglement on the Toughening of Dou-

ble Network Hydrogels. *The Journal of Physical Chemistry B*. 2005. No 109(34). P. 16304–16309. PMID: 16853073.

473. Llorente M.A., A.L. Andrady, J.E. Mark Model networks of end-linked polydimethylsiloxane chins. XI. Use of very short chains to improve ultimate properties. *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*. 1981. No. 19(4). P. 621–630.

474. Yamamoto M. The Visco-elastic Properties of Network Structure I. General Formalism. *Journal of the Physical Society of Japan.* 1956. No. 11. P. 413.

475. Tanaka F., S. F. Edwards Viscoelastic properties of physically crosslinked networks. 1. Transient network theory. *Macromolecules.* 1992. No. 25(5). P. 1516–1523.

476. Jongschaap R.J.J., R.H.W. Wientjes, M.H.G. Duits, J. Mellema A generalized transient network model for associative polymer networks. *Macromolecules*. 2001. No. 34(4). P. 1031–1038.

477. Dal H., M. Kaliske A micro-continuum-mechanical material model for failure of rubberlike materials: Application to ageing-induced fracturing. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2009. No. 57(8). P. 1340–1356.

478. Rabinovich Y.I., J. J. Adler, A. Ata, R. K. Singh, B.M. Moudgil Adhesion between nanoscale rough surfaces: II. Measurement and comparison with theory. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2000. No. 232(1). P. 17–24.

479. Quon R., R. F. Knarr, T. K. Vanderlick A. Measurement of the deformation and adhesion of rough solids in contact. *The Journal of Physical Chemistry B.* 1999. No. 103(25). P. 5320–5327.

480. Kato T., T. Inoue, N. Tani, H. Amemiya, H. Kobayashi, M. Hasegawa, Y. Omata Effect of roughness on surface force distributions measured by newly developed surface force apparatus with ultra-high accuracy. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2016. No. 230(11). P. 1336–1344.

481. Guduru P. R., C. Bull Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2007. No. 55(3). P. 473–488.

482. Guduru P. R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2007. No. 55(3). P. 445–472.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА,

в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.

2. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Монография. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.

3. Linder C., Miehe C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 10. P.2134–2156 (Scopus).

4. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*. 2012. Vol. 92. P. 2779–2808 (Scopus).

5. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 3/7(93). P. 34–41 (Scopus).

6. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 5/7(95). P. 22–31 (Scopus).

7. Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saverska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No. 1/7 (97). P. 15–25 (Scopus).

8. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15 (Scopus).

9. Marchenko A., Kravchenko S., Tkachuk M., Tkachuk M., Saverska M. Discrete-Continual Strengthening Of Contacting Structural Elements: Mathematical And Numerical Modeling. *Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów Proceedings of the Institute of Vehicles*. 2018. No 1(115). P. 143–153.

10. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2012. № 10. С. 11–17.

11. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 2. С. 3–9.

12. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 1. Постановка задачи. 2. Кинематическая модель контакта гладких тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 3. С. 3–10.

13. Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 3. Прямой и вариационный методы решения задачи негерцевского нормального контакта гладких тел. 4. Модель контакта шероховатых тел. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 4. С. 3–8

14. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 6. С.10–16.

15. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* Москва,

ООО «Тисо Принт». 2014. № 7. С. 11–20.

16. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (окончание). *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением.* Москва, ООО «Тисо Принт». 2014. № 8. С. 6–8.

17. Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н. К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2010. № 19. С. 135–143.

18. Ткачук. М.А., Устиненко О. В., Протасов Р. В., Ткачук М. М. До 125–річчя НТУ «ХПІ». Розвиток теоретичних основ синтезу геометрії та моделювання втомної міцності нових зубчастих зачеплень в університеті. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2010. .№ 26. С. 3–8.

19. Ткачук М.М., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы. *Вісник СевНТУ. Вип. 110. Серія: Механіка, енергетика, екологія.* Севастополь: СевНТУ, 2010. С. 55–60.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 22. С. 123–140.

21. Грабовський А., Ткачук М., Артьомов І., Барчан Є. Підхід до ідентифікації моделі для визначення ударної сили у віброударній системі. *Машинознавство*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД. 2011. № 5–6. С. 21–26.

22. Ткачук М.М., Негробова Н.Б., Ткачук М.А. Контактна взаємодія деталей машин з витягнутими контактними областями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 29. С. 129–134.

23. Ткачук Н.А., Грабовський А.В., Костенко Ю.В., Артемов И.В., Ткачук Н.Н. Численное моделирование динамических процессов в виброударных системах. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 42. С.179–187.

24. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная зада-

ча анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. Механіка та машинобудування. Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 2. С. 75–86.

25. Ткачук Н.А., Кохановская О.В., Негробова Н.Б., Зарубина А.А., Ткачук Н.Н. Связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза для контактирующих сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 22. С. 121–147.

26. Ткачук Н.Н., Негробова Н.Б., Ткачук Н.А. Особенности распределения контактных зон и давлений при контакте тел конечных размеров по поверхностям близкой формы. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 36. С. 166–171.

27. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численный анализ влияния модели для определения силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2012. № 2. С. 34–48.

28. Ткачук Н.Н., Костенко Ю.В., Ткачук А.В., Грабовский А.В. Изменение массы одного из компонентов и его влияние на характер динамических процессов в виброударных системах: модели и численные результаты. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 1(975). С. 71–85.

29. Костенко Ю.В., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Ткачук Н.А. Виброударные системы: определение периодических режимов движения *Вісник СевНТУ. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія*. Севастополь, СевНТУ. 2013. С.81–85.

30. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А., Мухин Д.С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2013. № 41. С. 133–142.

31. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. №14 (1057). С. 155–169

32. Ткачук Н.Н., Чепурной А.Д., Литвиненко А.В., Скрипченко Н.Б., Ткачук

Н.А. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством. *Проблемы машиностроения*. 2014. Том 17. № 4. С. 17–22.

33. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Головченко В.И. Модели и разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 29 (1072). С.160–173.

34. Бусяк Ю.М., Ткачук Н.Н., Васильев А.Ю., Литвиненко А.В., Мазур И.В., Даньшин Ю.А., Шаталов О.Е. Общие подходы к оценке и обеспечению защищенности бронекорпусов легких по массе машин. *Інтегровані технології та енергозбереження.* Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 3. С. 154–163.

35. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С. Оценка влияния шероховатости на контактные давления в сопряжении сложнопрофильных тел. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2014. № 1. С. 29–35.

36. Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Ткачук Н.Н., Касай Е.И., Крылюк Б.И. Влияние формы беговой дорожки на контактное взаимодействие с шаровыми поршнями радиальной гидропередачи. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 31 (1140). С. 81–100.

37. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А., Ткачук Н.А. Экспериментальное исследование контактного взаимодействия сложнопрофильных шероховатых тел с учетом податливости. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 34 (1143). С. 124–129.

38. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Неделько К. Д. Влияние податливости шероховатого слоя на распределение контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 43(1152). С. 132–139.

39. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении. *Механіка та машинобудування.* Харків, НТУ «ХПІ». 2015. № 1. С. 113–117.

40. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А.А. Расчетно-

экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №12 (1184). С. 84–88.

41. Грабовський А.В., Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. та інш. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №18 (1190). С. 22–29.

42. Скрипченко Н.Б., Ткачук М.М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І. Контактна взаємодія складнопрофільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №39 (1211). С. 93–101.

43. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування.* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. № 1. С. 3–14.

44. Ищенко О. А., Демина Н. А.,. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовський А.В. и др. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 5(1227). С. 108–134.

45. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Саверська М.С. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами. *Механіка та машинобудування*. 2019. №1. С. 36–50.

46. Ткачук М.М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківсь-кий політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12(1234). С. 86–95.

47. Ткачук Н.А., Ищенко О. А., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов штамповой оснастки. *Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии.* Краматорск, 2017. № 3 (24Е). С. 11–19.

48. Іщенко О.А., Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мерецька К.О. Контактна взаємодія елементів розділових штампів: моделі, закономірності, критерії проектних рішень. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 1. С. 48–59.

49. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 7 (1283). С. 132–141.

50. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Бондаренко М. О., Саверська М. С., Ткачук М. А., Тесля Д. О. Розрахунково-експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів універсально-збірних пристосувань. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 1. С. 81–92

51. Ткачук Н.Н. Анализ реакции волоконных материалов на действие нагрузок на основе микромеханических моделей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 25 (1301). С. 149–155.

52. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовский А. В., Саверская М. С., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Сериков В. И., Мерецкая К. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов механических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 29 (1305). С. 129–156.

53. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 33 (1309). С. 43–63.

54. Ткачук М. А., Іщенко О. А., Дьоміна Н. А., Ткачук М. М., Грабовський А. В., Шеманська В. В., Васильченко Д. Р. Контактна взаємодія елементів штампового оснащення. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 41 (1317). С. 67–76.

55. Ткачук М.М. Метод пружної гомогенізації бімодальних мереж. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 7 (1332). С. 107–113.

апробація результатів дисертаційної роботи на міжнародних конференціях

56. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically based model for viscoelasticity of rubbery polymers. *10th GAMM Seminar on Microstructures.* TU Darmstadt, Germany. 2011. P. 46.

57. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven Computational Modeling of Polymers. *SimTech 2011. International Conference on Simulation Technology. Book of abstarcts: Advanced Mechanics of Multi-Scale and Multi-Field Problems. 2011.* University of Stuttgart . P. 26.

58. Tkachuk M., Linder C. Microstructural driven computational modeling of polymers. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* 2011. Vol. 11. P. 557–558.

59. Tkachuk M., Linder C. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *COMPLAS XI. International conference on computational plasticity. 2011.* Barcelona, Spain.

60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *11th GAMM seminar on microstructures. 2012.* University of Duisburg-Essen, Germany. P. 46.

61. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructures. *GAMM 2012. 83nd annual meeting of the international association of applied mathematics and mechanics. 2012.* TU Darmstadt, Germany. P. 198–199.

62. Tkachuk M., Linder C. Homogenization of random elastic networks with non-affine kinematics. *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. 2012. Vol. 12. P. 417–418.

63. Tkachuk M., Linder C. Dynamic relaxation with local artificial modes for the analysis of floppy fiber networks. *PACAM XIII-6172. The pan american congress of applied mechanics. 2013. Houston, USA. Section 8-4. Biomembranes and tissues.*

64. Kostenko Yu., Tkachuk M., Grabovsky A., Tkachuk M.A. Subharmonic modes in vibroimpact systems. *The Fourth International Conference «Nonlinear Dynamics–2013». Proceedings. 2013.* Sevastopol (Ukraine). Pp. 83–86.

65. Kostenko Y.V., Artemov I.V., Tkachuk N.N. Sybharmonical modes in vibroimpact systems. *Международный научно-исследовательский журнал: Сборник по результатам XXV заочной научн. конф. Research Journal of International Studies.* Екатеринбург: МНИЖ. 2014. № 3, часть 2. С. 27–30.

66. Tkachuk M., M. Ganser, Linder C. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers. *WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics. 2014, Barcelona*, Spain.

67. Tkachuk M.A., Skripchenko N., Grabovskiy A., Tkachuk M.M. Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact. *Зб. «Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015)».* P. 393–398.

68. Tkachuk M.M., Kostenko Yu., Grabovsky A., Tkachuk M. A. Parameter analysis of vibro-impact machines dynamics with variable mass and stiffness. *Nonlinear Dynamics–2016: Proceedings of 5th International Conference*. Kharkov, NTU «KhPI», 2016. P. 238–244.

69. Tkachuk M. Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 2017*. P. 190–193.

70. Головченко В., Ткачук М., Шеремет В. Числове моделювання контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доповідей 2-й міжнар. наук.-практ. конф..* Львів, 2010. С. 41–42.

71. Ткачук М.М., Сердюк Ю.Б., Ткачук А.М. Контактна взаємодія плоского штампа з обмеженням з урахуванням жорсткості поверхневого шару. *10-й міжнар. симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Праці*. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2011. С. 176–177.

72. Ткачук А.М., Ткачук М.М. Взаємодія плоского штампу з напівпростором: моделі та результати. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XIX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1* Харків, НТУ «ХПІ», 2011. С. 200.

73. Ткачук М.М., Ткачук М.А., Ткачук А.М. Зв'язана задача геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контакту. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XX міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2012. С. 220.

74. Скріпченко Н., Ткачук М. Варіант методу граничних елементів для аналізу контактної взаємодії гладких і шорстких тіл. *11-й міжнародний симпозіум українських*

інженерів механіків у Львові: Тези доповідей. Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2013. С. 84–85.

75. Бондаренко М.А., Бондаренко О.А., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Кохановский В.И. Контакт сложнопрофильных тел: теория, методы и алгоритмы. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXI міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2013. С. 182.

76. Костенко Ю.В., Ткачук Н.А., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н. Численное определение влияния вида силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах. *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. научн. конф. в 10 т. Т. 9. Секции 3, 5, 7, 10 / под общ. ред. А.А. Большакова*. Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т; Харьков, НТУ «ХПИ», 2012. С. 94–98.

77. Литвиненко О., Ткачук М., Грабовський А. Проектно-технологічне забезпечення захищеності бронекорпусів легкоброньованих машин від дії динамічних навантажень. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2012. С. 122–123.

78. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Кохановська О.В., Веретельник О.В. Контактна взаємодія індентора з перешкодою. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ. Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф.*. Львів, Друкарня АСВ ім. гетьмана П. Сагайдачного, 2014. С. 53–54.

79. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Бондаренко Л.Н. Влияние свойств шероховатого слоя на контакт сложнопрофильных упругих тел. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2014. С. 235.

80. Ткачук М., Литвиненко О., Грабовський А. Обґрунтування проектно-технологічних рішень для забезпечення тактико-технічних характеристик легкоброньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей 4-й міжнар. наук.-техн. конф.*. Львів, 2014. С. 7–8.

81. Литвиненко О.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Васильєв А.Ю., Мартиненко О.В. Проектно-технологічне забезпечення міцності бронекорпусів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар.наук.-техн.конф.*. Львів, АСВ, 2015. С. 41–42.

82. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Середа А.В., Дзюба Ю.С., Іщенко О.А. Контакт складнопрофільних тіл: підходи, моделі, методи. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ», 2015. С. 229.

83. Ткачук М.М. Мікромеханіка нетканих матеріалів. *12-й міжнар.симпозіум україн. інженерів механіків у Львові: Тез. доп.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2015. С. 25–26.

84. Васильєв А.Ю., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід*. Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2015. С. 234–238.

85. Ищенко О.А., Ткачук А.В., Грабовский А.В., Ткачук Н.Н., Демина Н.А. Расчет базовых плит разделительных штампов. *Ресурсосбережение и энергоэффективность процессов и оборудования обработки давлением в машиностроении и металлургии: Тези доповідей VII міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, 2015. С. 25–28.

86. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.Ю., Мазур І.В. Проблеми забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин: теорія, методи та моделі. *Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки. Тези доповідей VI наук.-техн.конф...* Київ, Видавничий дім Дмитра Бураго, 2015. С. 186–187.

87. Васильєв А.Ю., Шаталов О.Є., Ткачук М.М., Дудар Є.Є., Литвиненко О.В. Методи забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних і колісних машин на етапі проектних досліджень. *Наукове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: Тези доповідей VII наук.-практ. конф.. Секція № 2.* Харків, Національна академія Національної гвардії України, 2016. С. 27–29.

88. Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Бондаренко Л.Н., Неделько Е.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В.Исследование контактного взаимодействия в модифицированном зубчатом зацеплении: модели. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXIV міжнар. наук.-практ. конф., Ч. 1.* Харків, НТУ «ХПІ»., 2016. С. 226.

89. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Бусяк Ю.М., Вакуленко В.В., Магерамов Л.К.-А. Моделювання контактної взаємодії індентора з перешкодою методами скінченних і граничних елементів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф..* Львів, НАСВ, 2016.

С. 59.

90. Васильєв А. Ю., Танченко А. Ю., Ткачук М. М., Скріпченко Н. Б., Лісовол Я. М. Обґрунтування структури та параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин за критеріями захищеності. *Наука: безпека країни та розвиток військово-промислового комплексу: Інформаційно-комунікативний захід / відп. ред. В.С.Шовкалюк.* Київ, ТОВ «Міжнародний виставковий центр», 2016. С. 32–36.

91. Ткачук М.А., Грабовський А., Ткачук М.М., Васильєв А. Комп'ютерне моделювання як основа проектно-технологічних рішень для елементів бойових броньованих машин. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали конференції.* Львів, КІНПАТРІ ЛТД, 2016. С. 12–14.

92. Ищенко О.А., Ткачук Н.Н., Кротенко Г.А., Ткачук Н.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали міжнар. наук.-техн. конф..* Харків, НТУ «ХПІ», 2016. С. 27–30.

93. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н. Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машин: модели, методы, закономерности. *Механіка машин – основна складова прикладної механіки: Матеріали Всеукраїнської наук.-техн. конф..* Дніпро, НМетАУ, 2017. С. 228–231.

94. Скрипченко Н. Б., Ткачук Н.Н., Атрошенко А. А., Ляшенко А. С., Хузяхметова М. Р., Погребняк Д. А., Головин А. М. Расчетно-экспериментальные исследования контакта сложнопрофильных тел: методология. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXV міжнар. наук.-практ. конф.. у 4 ч. Ч. I.* Харків, НТУ «ХПІ», 2017. С. 222.

95. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Танченко А.Ю., Мартиненко О.В., Луньов Є.О. Забезпечення тактико-технічних характеристик військових гусеничних та колісних машин на основі комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів і станів. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф...* Львів, НАСВ, 2017. С. 26–27.

96. Ткачук М., Скріпченко Н., Бондаренко М., Набоков А. Контактна взаємодія складнопрофільних тіл: моделі, методи, закономірності. *13–й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму*. Львів, КІНПАТРІ

ЛТД, 2017. С. 52–54.

97. Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Саверська М.С., Веретельник О.В., Набоков А.В. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей V міжнар. наук.-практ. конф.*. Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2017. С. 201.

98. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Саверська М. С., Бондаренко М. О., Зарубіна А. О., Кохановська О. В., Храмцова І. Я., Бондаренко Л. М. Формування єдиної розв'язувальної системи співвідношень для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності між ними нелінійно пружного шару. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXVI міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. І.* Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 201.

99. Ткачук М.М., Скріпченко Н. Б., Грабовський А. В., Головін А. М., Ляшенко А.С. Теоретичні моделі для аналізу властивостей волоконних матеріалів у складі елементів озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Тези доповідей міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НАСВ. 2018. С. 67–68.

100. Ткачук М., Танченко А., Грабовський А., Ткачук-мол. М. Методи визначення усталених режимів руху віброударних систем. *Вібрації в техніці та технологіях: Тези доповідей XVII міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, НУ «Львівська політехніка», 2018. С. 25–26.

101. Ткачук М.А., Брагіна Л. Л., Ткачук М.М., Воронов Г.К. Обґрунтування конструктивних і технологічних параметрів бронекорпусів легкоброньованих машин. *Проблеми координації воєнно-технічної та оборонно-промислової політики в Україні. Перспективи розвитку озброєння та військової техніки: Тези доповідей VI міжнар. наук.-практ. конф.*. Київ, ДНУ УкрІНТЕІ, 2018. С. 149–150.

102. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Спеціалізовані програмно-модельні комплекси для аналізу деформування волоконних матеріалів та контактної взаємодії складнопрофільних тіл на основі мікро-макромеханічних моделей. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї міжнар. наук.-техн. конф.* Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2018. С. 19–21.

103. Ткачук Н.А., Ищенко О.А., Демина Н.А., Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Шеманская В.В., Васильченко Д.Р. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсозбереження та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали X міжнар. наук.-техн. конф.*. Харків, НТУ «ХПІ», 2018. С. 109–110.

104. Мартиняк Р., Ткачук М. А., Слободян Б., Ткачук М.М., Маланчук Н. Локальне зношування тіл з регулярним рельєфом. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра* [Електронний ресурс]. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 2. С. 59–60.

105. Ткачук М.М., Хлань О.В., Заворотній А.В., Малакей А.М., Шуть О.Ю., Набоков А.В., Рікунов О.М. Проектно-технологічне забезпечення міцності елементів бойових броньованих машин. *Збірник тез доповідей наук.-практ. конф. «Службово-бойова діяльність Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Секція 2 Технічне та тилове забезпечення службово-бойової діяльності Національної гвардії України: сучасний стан, проблеми та перспективи. Національна академія Національної гвардії України.* Харків, 2019. С. 170.

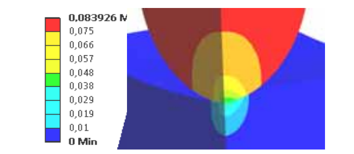
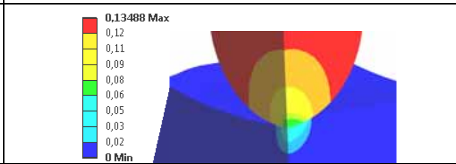
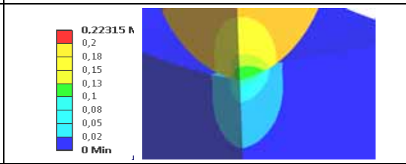
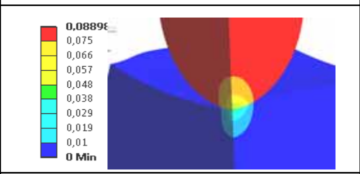
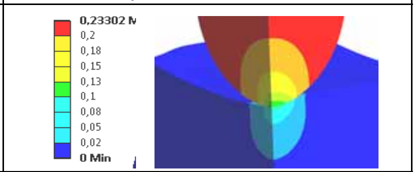
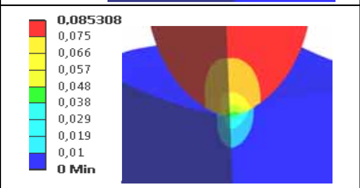
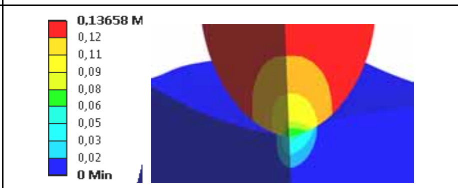
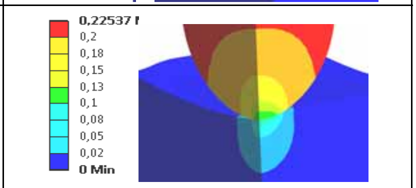
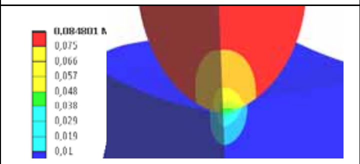
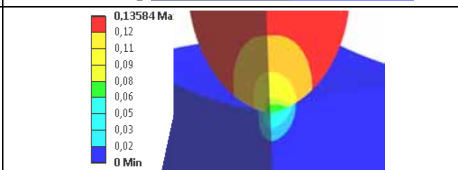
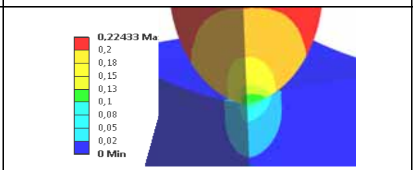
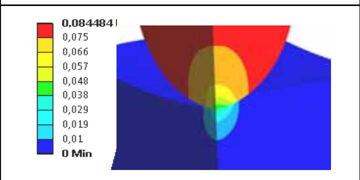
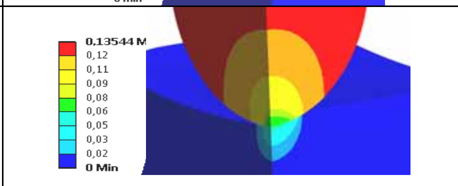
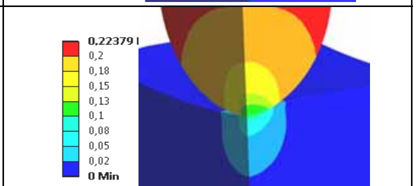
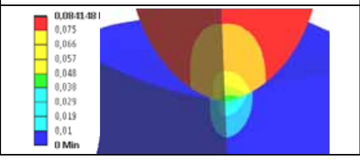
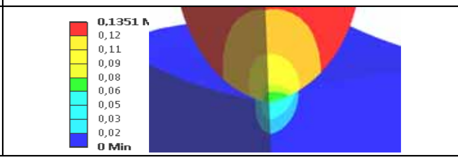
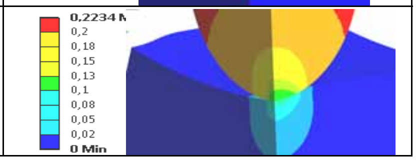
106. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Скріпченко Н.Б., Мухін Д.С., Ткачук М.А., Саверська М.С. Методи аналізу напружено-деформованого стану, контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл на основі фізично і структурно нелінійних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXVII міжнар. наук.-практ. конф. у 4 ч. Ч. IV.* Харків: НТУ «ХПІ». 2019. С. 330.

107. Ткачук М.А., Грабовський А.В., Ткачук М.М., Васильєв А.В., Хлань О.В. Забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин на проектно-технологічних етапах. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ: Зб. тез доповідей міжнар. наук.-техн.конф.*. Львів: НАСВ, 2019. С. 9.

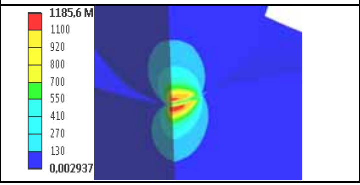
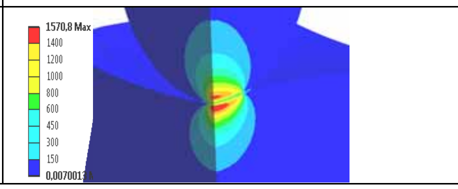
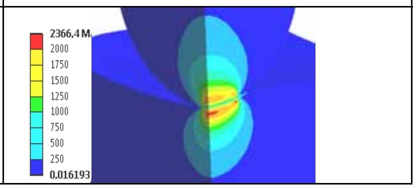
108. Ткачук-мол. М., Грабовський А., Ткачук М. Мікромакромеханічні моделі для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій. *14-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму*. Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2019. С. 17–18.

ДОДАТОК Б
РОЗПОДІЛИ КОМПОНЕНТ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ У КУЛЬКОВОМУ ПОРШНІ ТА БІГОВІЙ ДОРОЖЦІ ГОП-900 ПРИ РІЗНИХ ЗНАЧЕННЯХ ПРИТИСКНОЇ СИЛИ

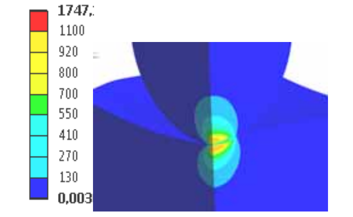
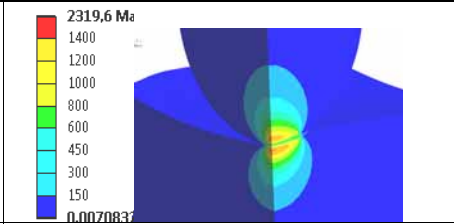
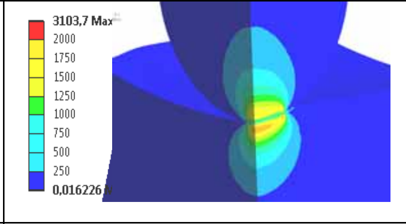
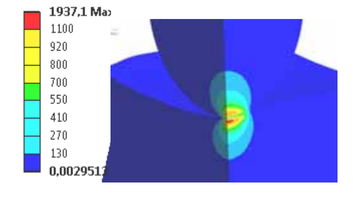
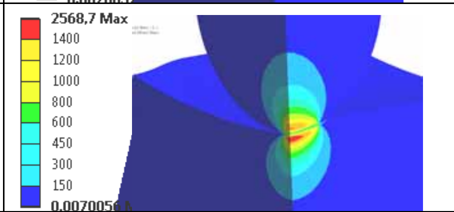
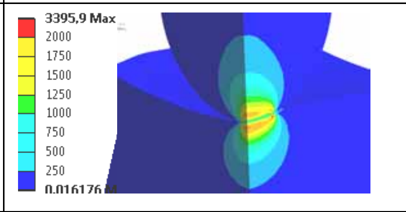
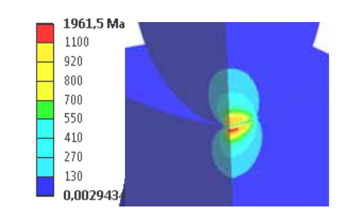
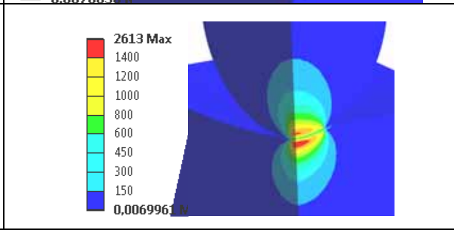
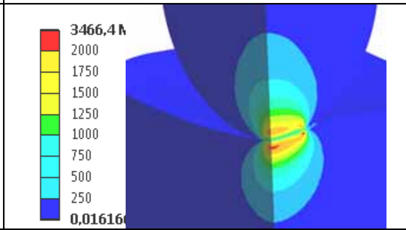
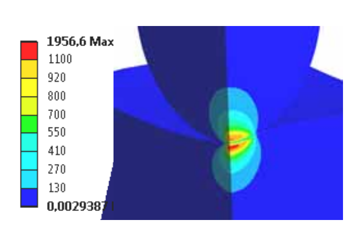
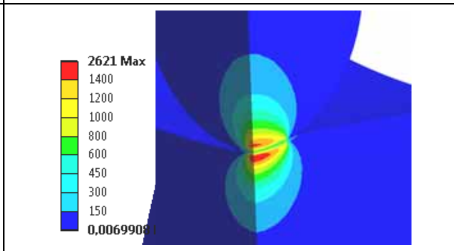
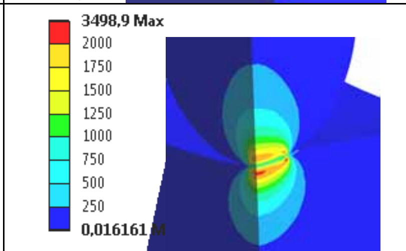
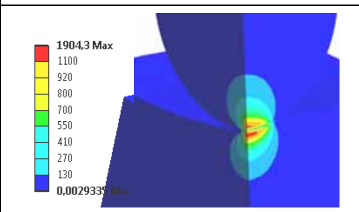
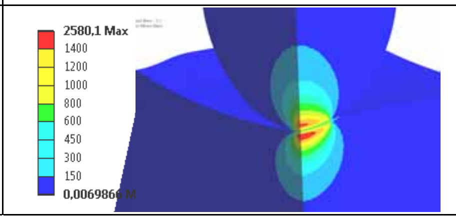
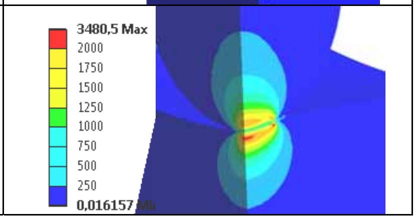
Таблиця Б.1 – Розподіли повних переміщень (мм) у гідрооб'ємної передачі ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при варіюванні контактної жорсткості шарів жорсткісті, при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

Варі-ант		Притискна сила, кН		
		50	100	200
базовий				
шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у	100 разів			
	20 разів			
	10 разів			
	5 разів			
	2 рази			

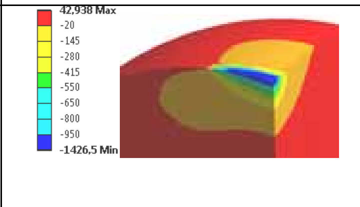
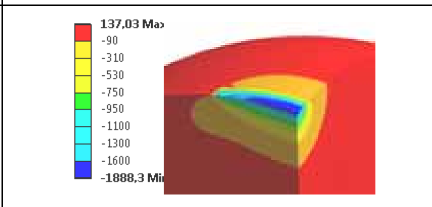
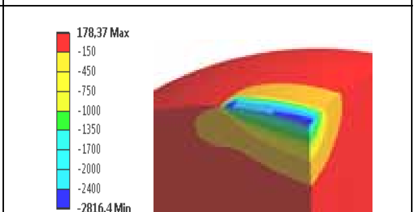
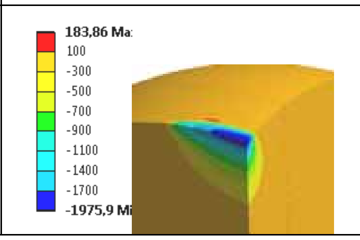
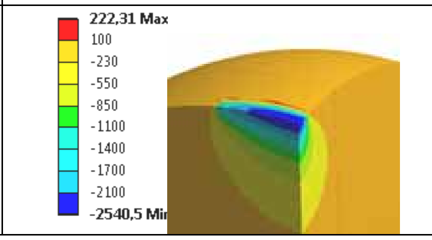
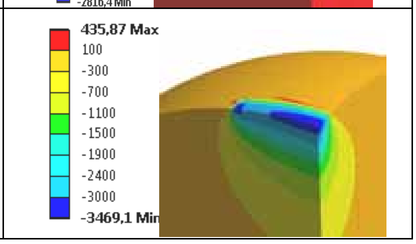
Таблиця Б.2 – Розподіли еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) у елементах гідрооб'ємної передачі ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при варіюванні товщини шарів жорсткісті, при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

Варі-ант	Притискна сила, кН		
	50	100	200
базовий			

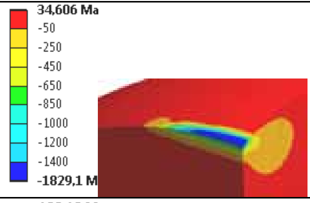
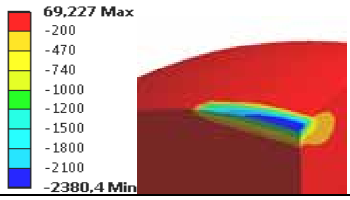
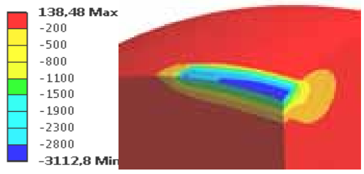
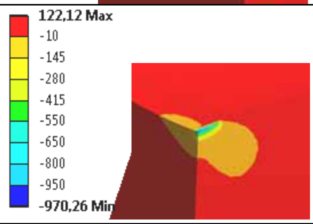
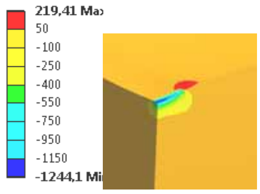
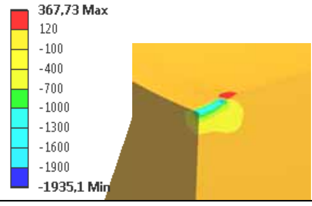
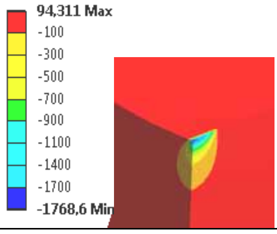
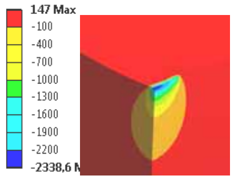
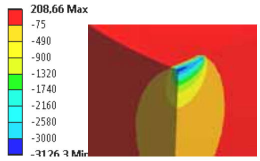
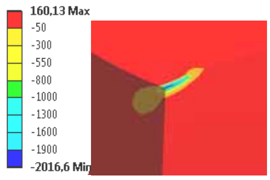
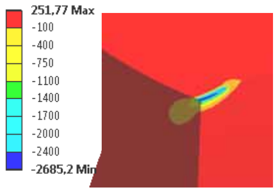
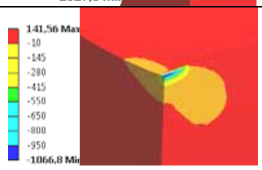
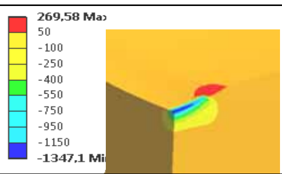
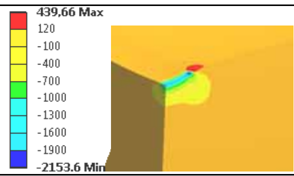
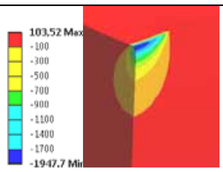
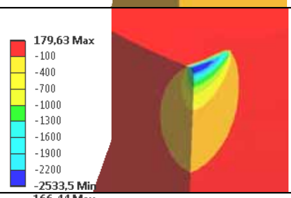
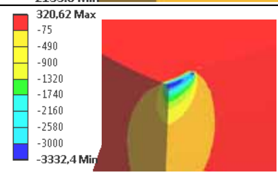
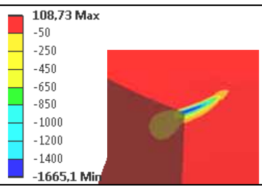
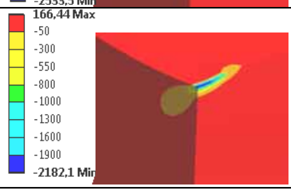
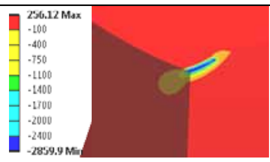
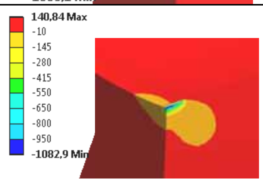
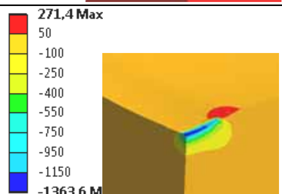
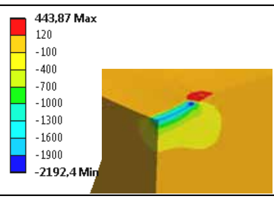
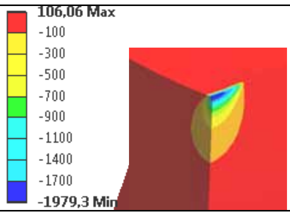
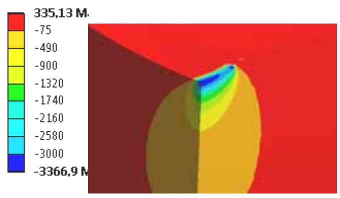
Закінчення табл. Б.2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="5">шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у</td><td>100 разів</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>20 разів</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10 разів</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5 разів</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2 рази</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

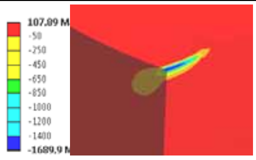
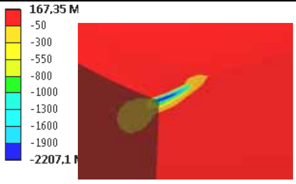
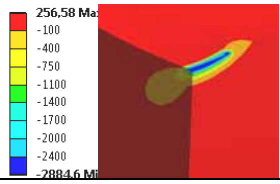
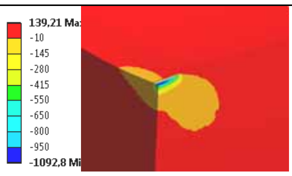
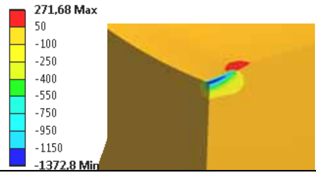
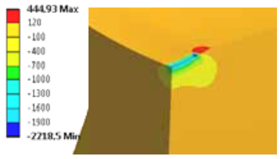
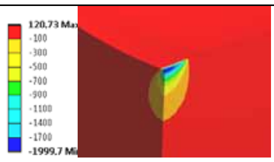
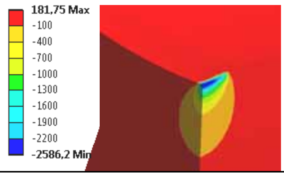
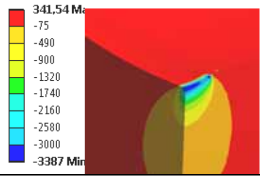
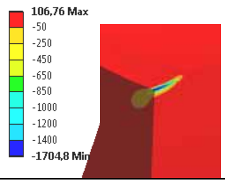
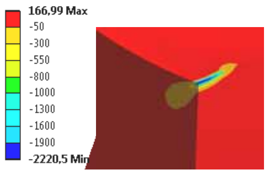
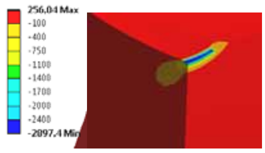
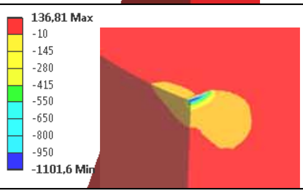
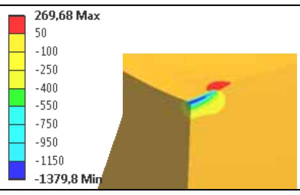
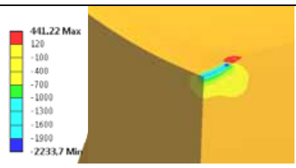
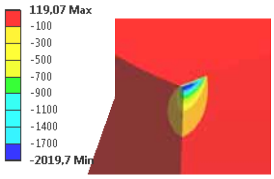
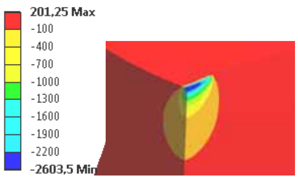
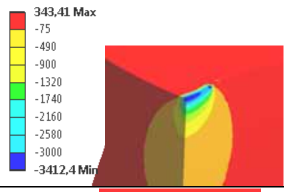
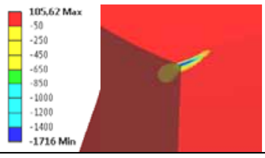
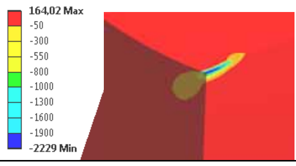
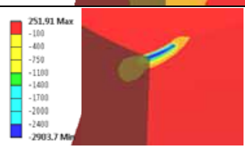
Таблиця Б.3 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у біговій дорожці ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="2">базовий</td><td>σ_x</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_y</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

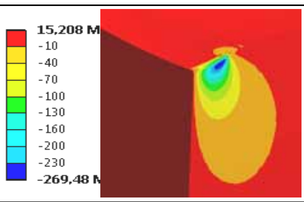
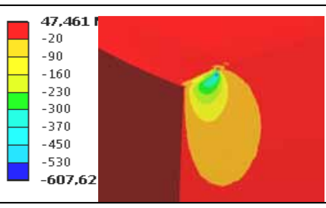
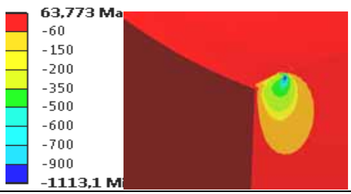
Продовження табл. Б.3

Варі-ант		Притискна сила, кН		
		50	100	200
базовий				
базовий	σ_z			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 100 разів	σ_x			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 100 разів	σ_y			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 100 разів	σ_z			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 20 разів	σ_x			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 20 разів	σ_y			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 20 разів	σ_z			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 10 разів	σ_x			
шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у 10 разів	σ_y			

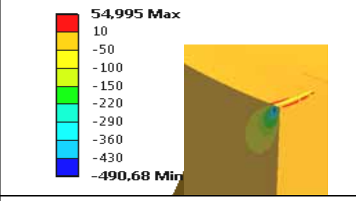
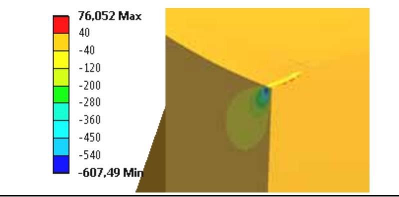
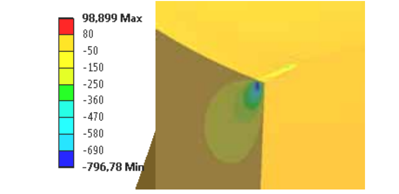
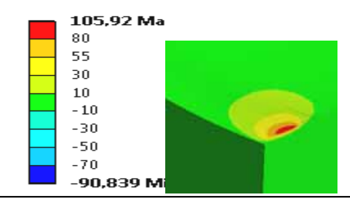
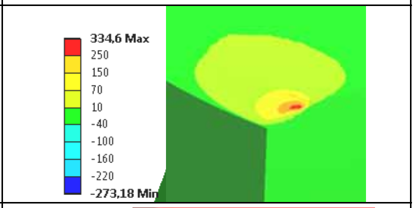
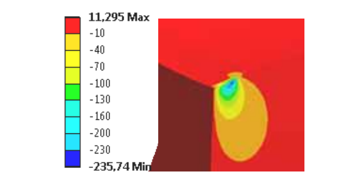
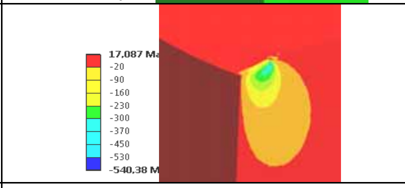
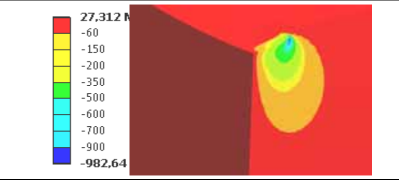
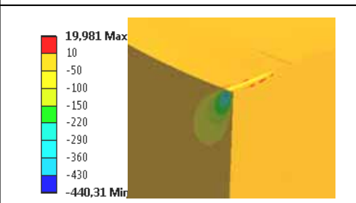
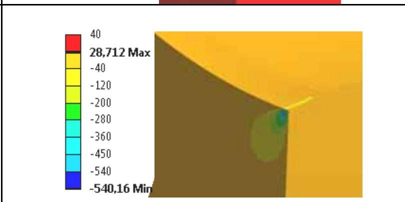
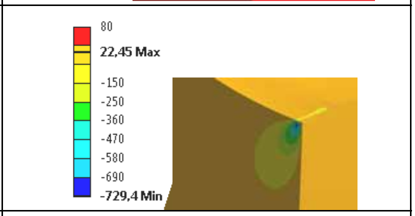
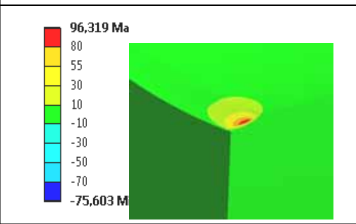
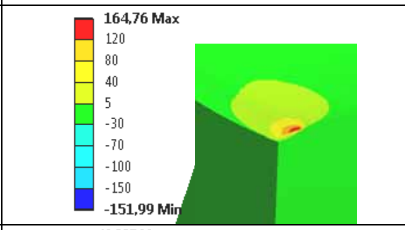
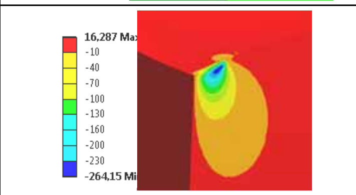
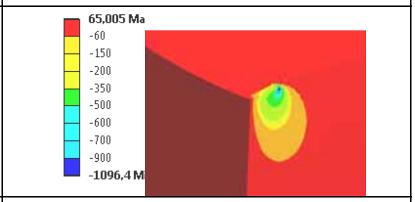
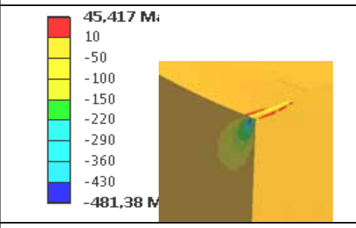
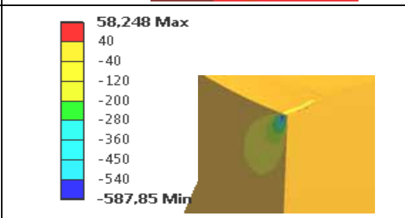
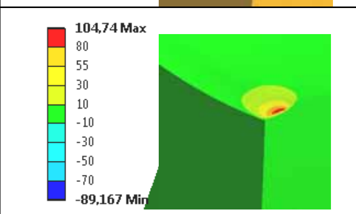
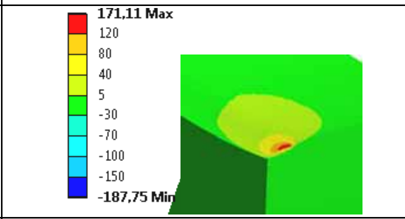
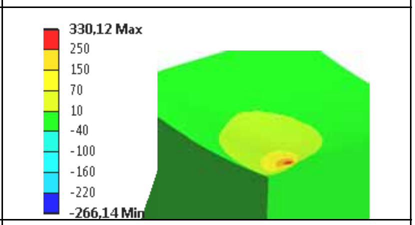
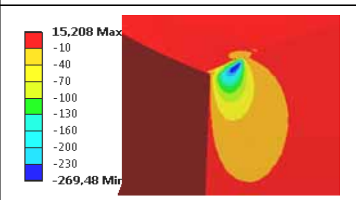
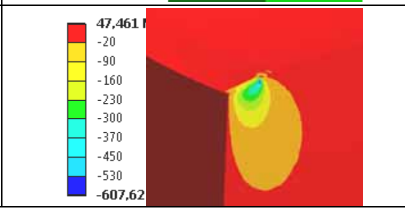
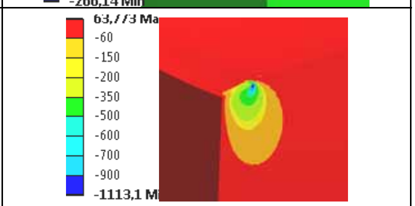
Закінчення табл. Б.3

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="7">шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у</td><td>10 разів</td><td>σ_z</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5 разів</td><td>σ_x</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_y</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_z</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 рази</td><td>σ_x</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_y</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_z</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
</table>

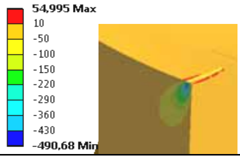
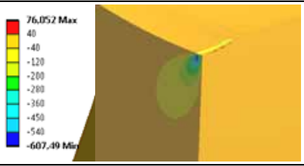
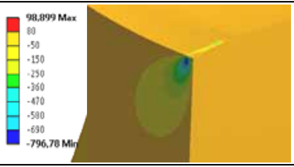
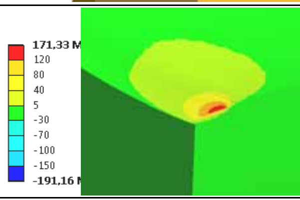
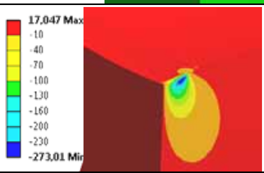
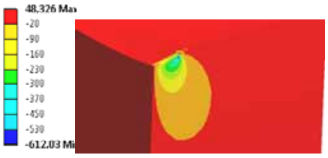
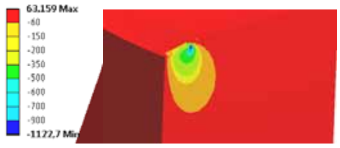
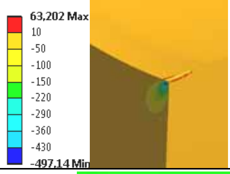
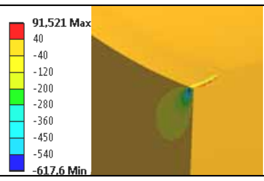
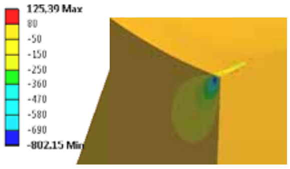
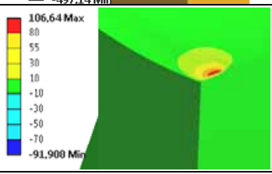
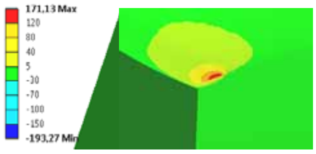
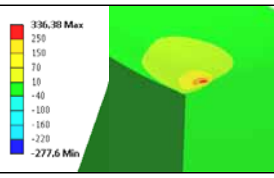
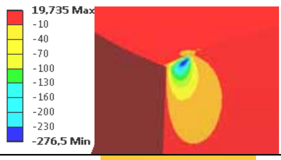
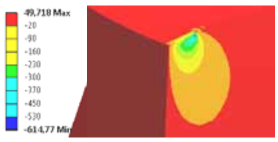
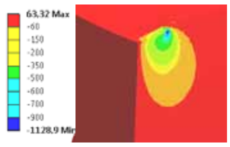
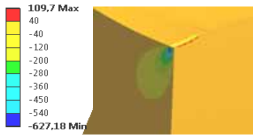
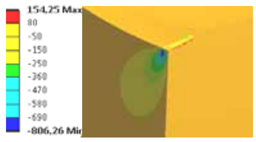
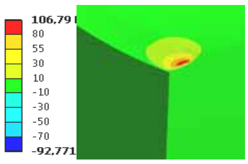
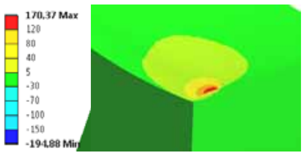
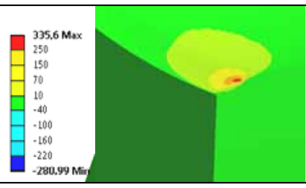
Таблиця Б.4 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у біговій дорожці ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td>базовий</td><td>τ_{xy}</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
</table>

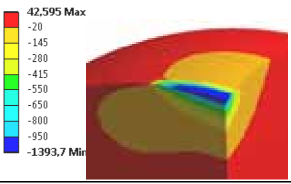
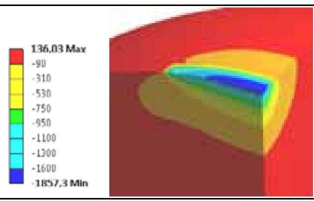
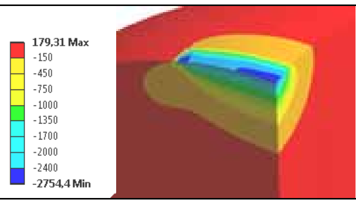
Продовження табл. Б.4

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="3">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">базовий</td><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{zx}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="7">шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="3">100 разів</td><td>τ_{xy}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">20 разів</td><td>τ_{xy}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>10 разів</td><td>τ_{xy}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

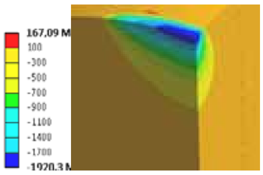
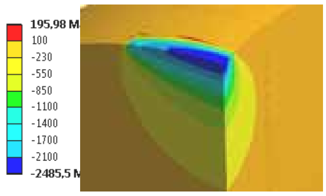
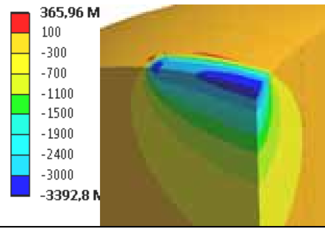
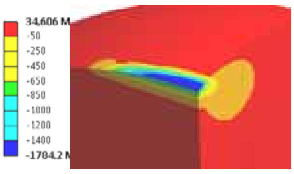
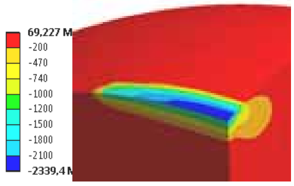
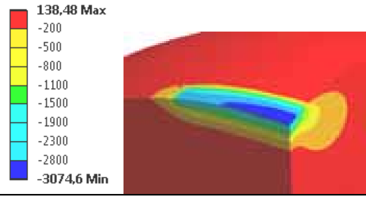
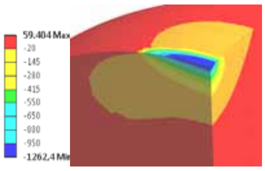
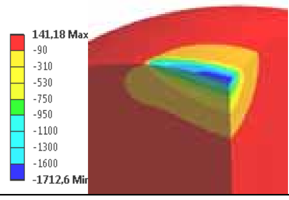
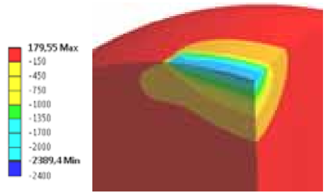
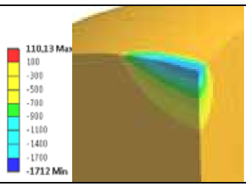
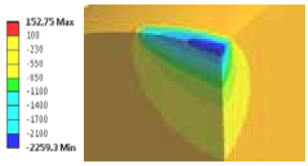
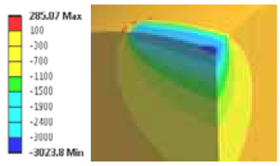
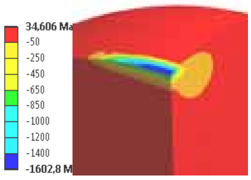
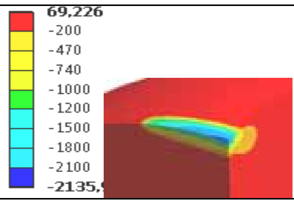
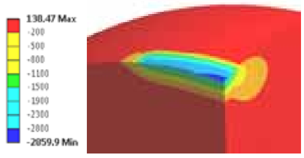
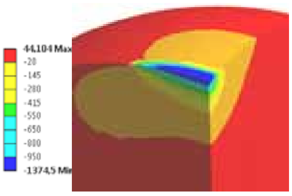
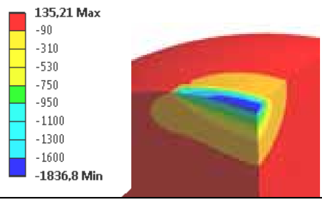
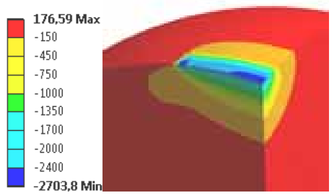
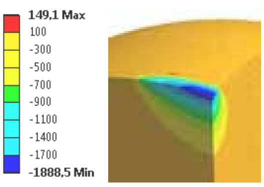
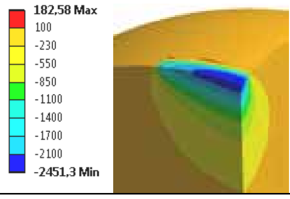
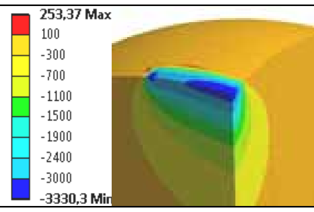
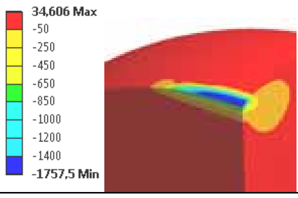
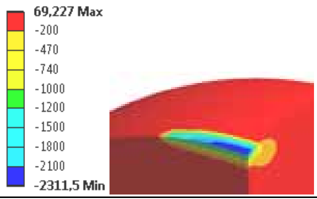
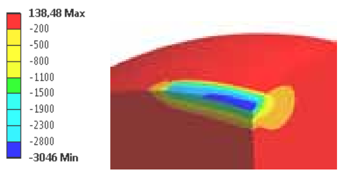
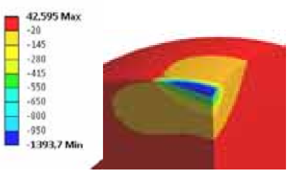
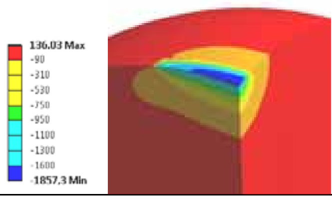
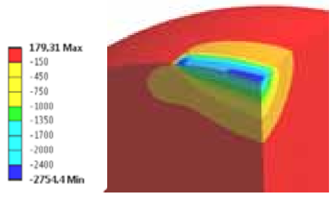
Закінчення табл. Б.4

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Варі-ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="8">шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="2">10 разів</td><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5 разів</td><td>τ_{xy}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 рази</td><td>τ_{xy}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

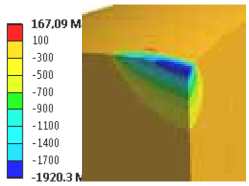
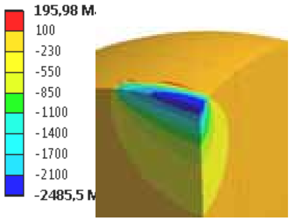
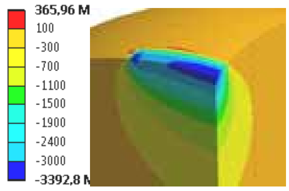
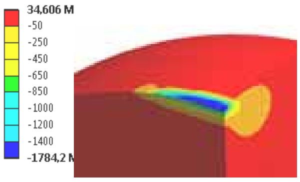
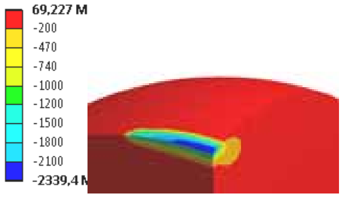
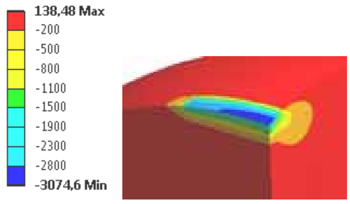
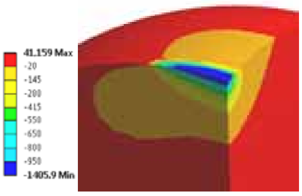
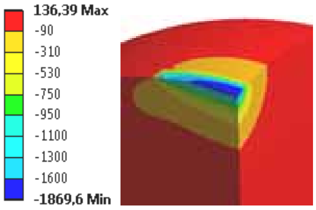
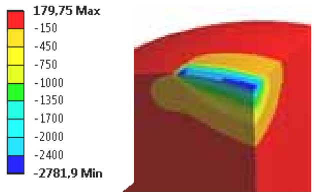
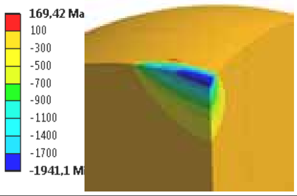
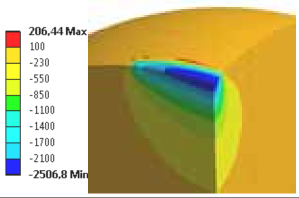
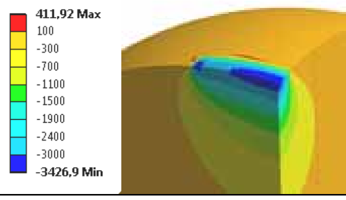
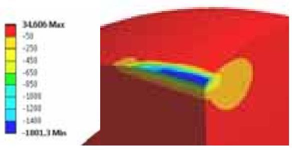
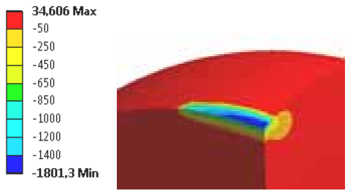
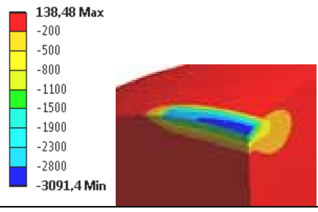
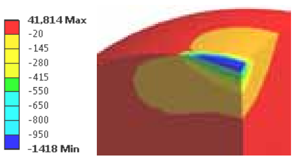
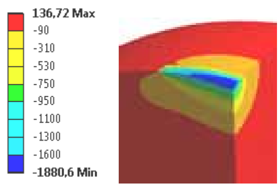
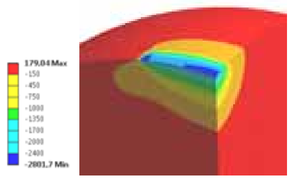
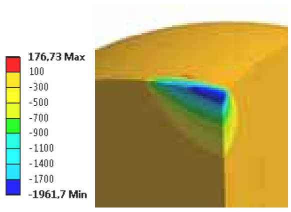
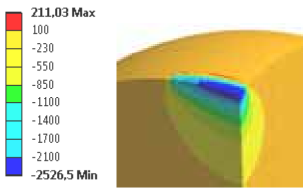
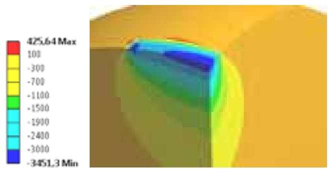
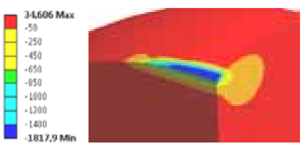
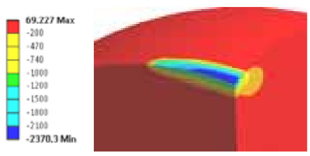
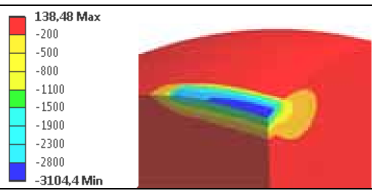
Таблиця Б.5 – Розподіли нормальних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Варі-ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td>базовий</td><td>σ_x</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

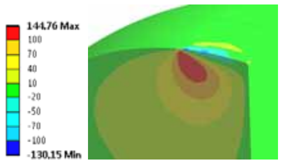
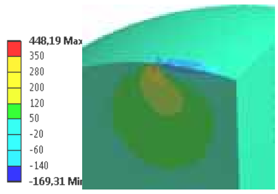
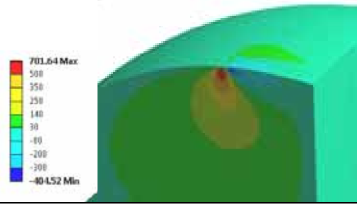
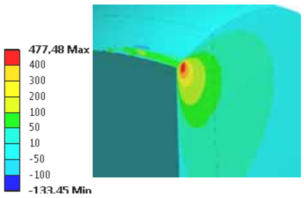
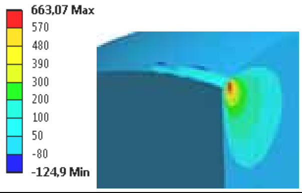
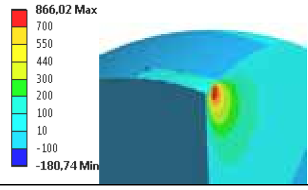
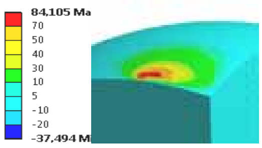
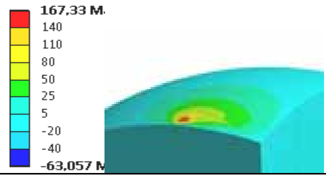
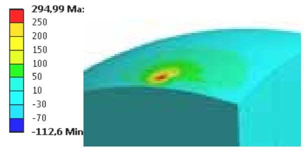
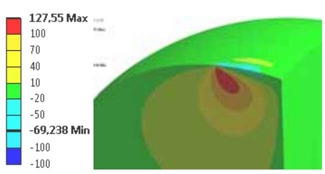
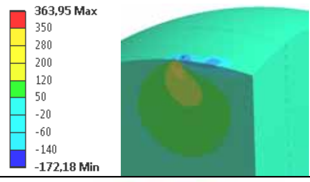
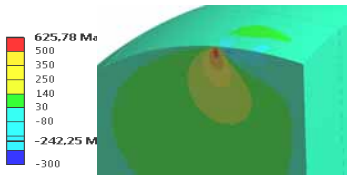
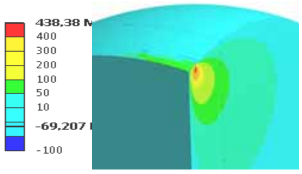
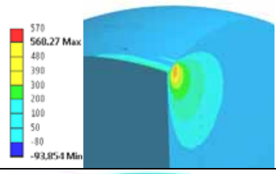
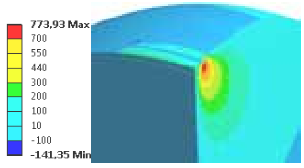
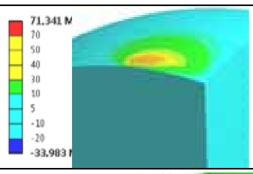
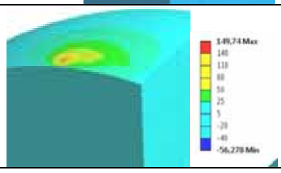
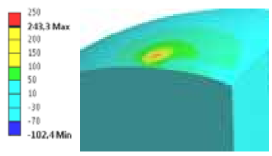
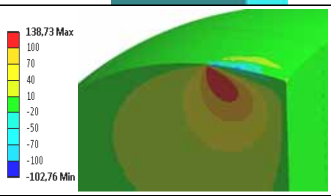
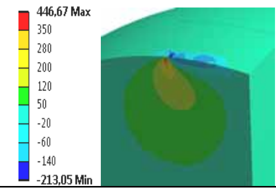
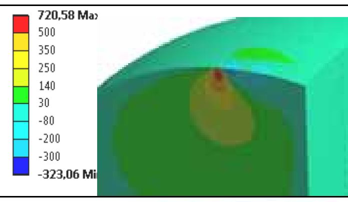
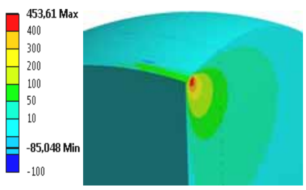
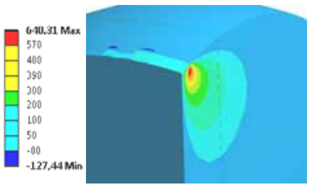
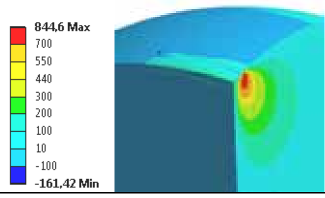
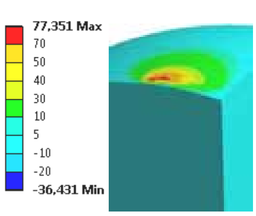
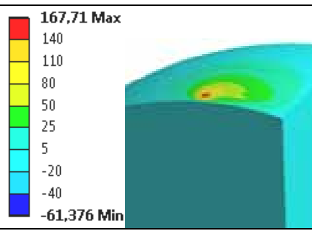
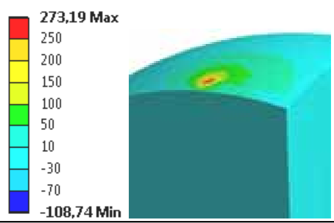
Продовження табл. Б.5

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">базовий</td><td>σ_y</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_z</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="6">шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="3">100 разів</td><td>σ_x</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_y</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_z</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">20 разів</td><td>σ_x</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_y</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>σ_z</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>10 разів</td><td>σ_x</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

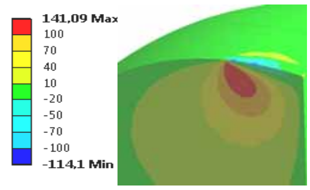
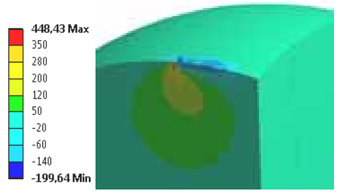
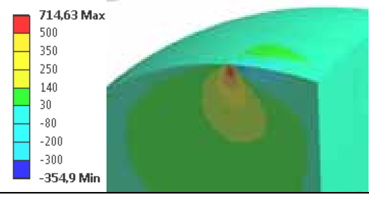
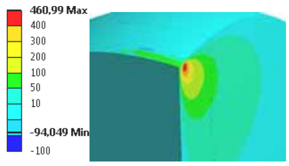
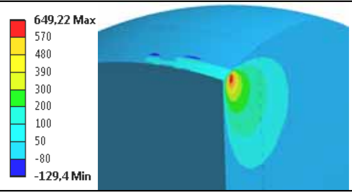
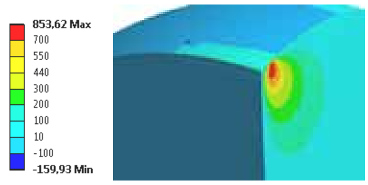
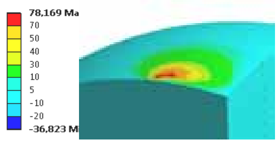
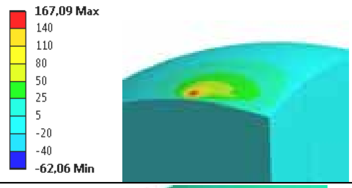
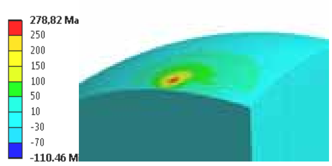
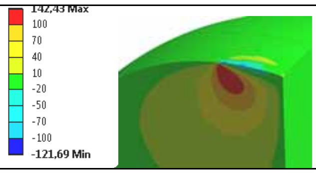
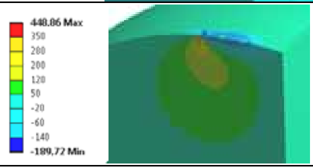
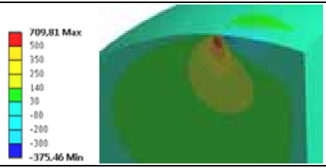
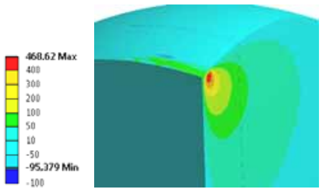
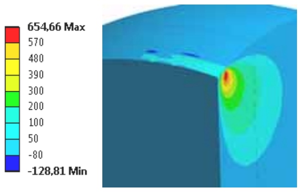
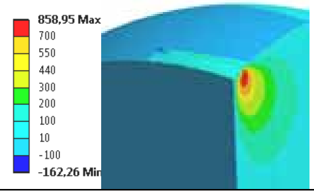
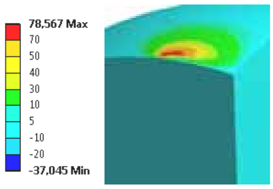
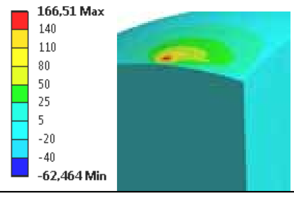
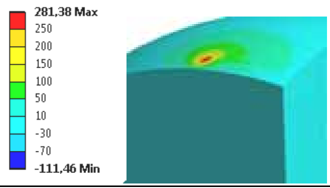
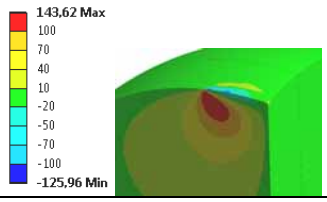
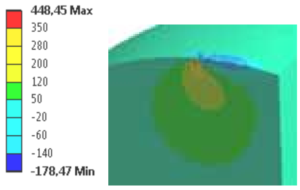
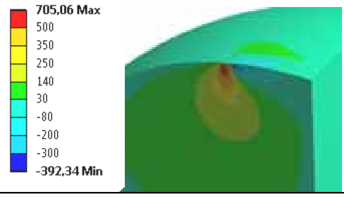
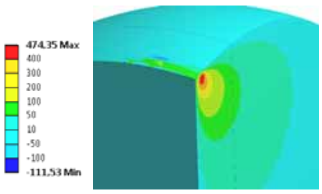
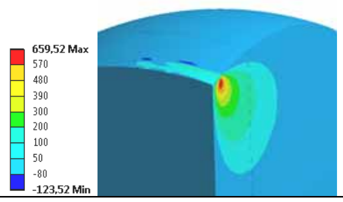
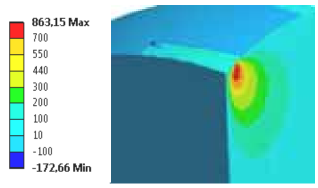
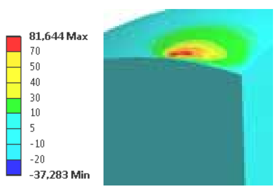
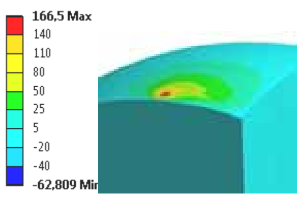
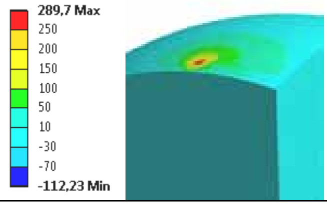
Закінчення табл. Б.5

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="8">шар жорсткості, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="2">10 разів</td><td>σ_y</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>σ_z</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5 разів</td><td>σ_x</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>σ_y</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>σ_z</td>
<td></td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 рази</td><td>σ_x</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_y</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td></td></tr>
<tr><td>σ_z</td>
<td></td>
<td></td>
<td>
</td></tr>
</table>

Таблиця Б.6 – Розподіли дотичних компонент тензора напружень (МПа) у кульковому поршні ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискної сили (1/4 частина)

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Варі-ант</th><th colspan="3">Притискна сила, кН</th></tr>
<tr><th>50</th><th>100</th><th>200</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">базовий</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="3">100 разів</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">20 разів</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

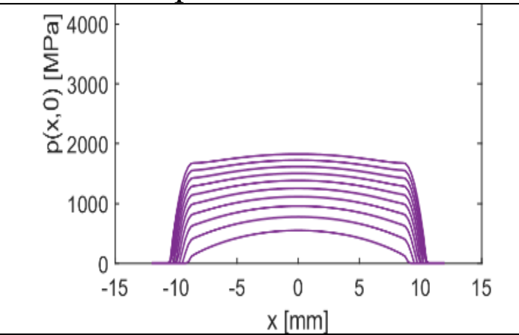
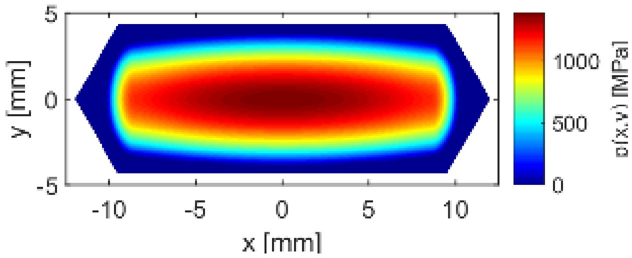
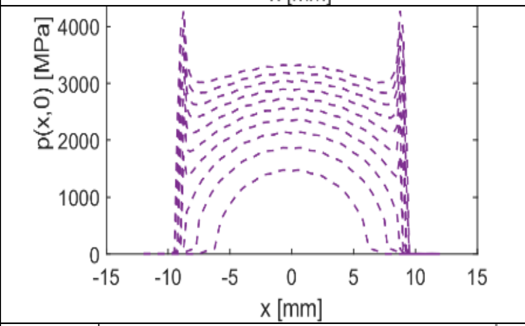
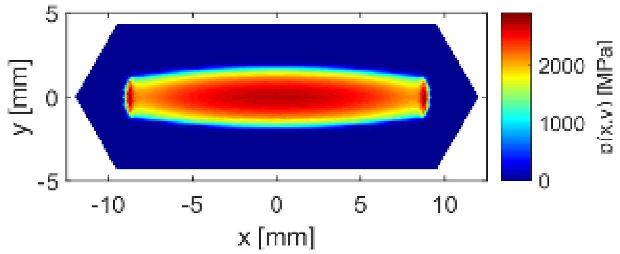
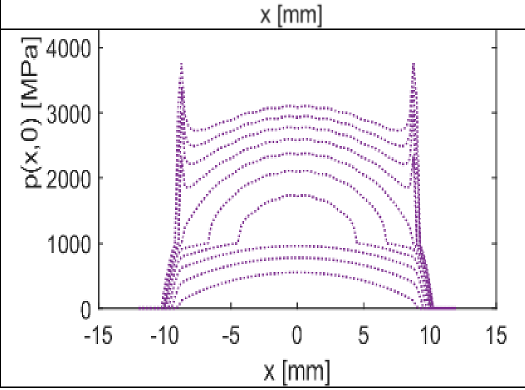
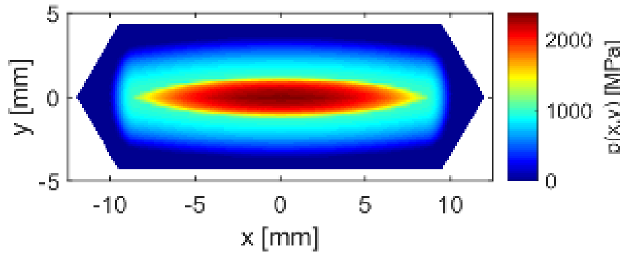
Закінчення табл. Б.6

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Варі-
ант</td><td colspan="3">Притискна сила, кН</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td><td>200</td></tr>
<tr><td rowspan="9">шар жорсткісті, нижчий, ніж базовий, у</td><td rowspan="3">10 разів</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">5 разів</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 рази</td><td>τ_{xy}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{yz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>τ_{xz}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

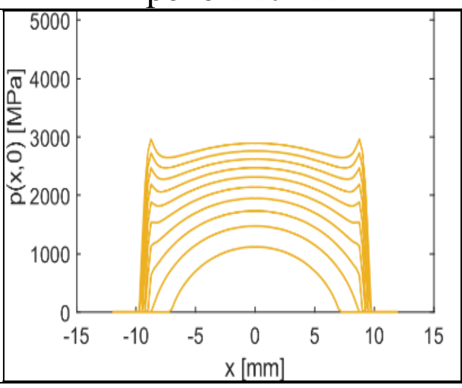
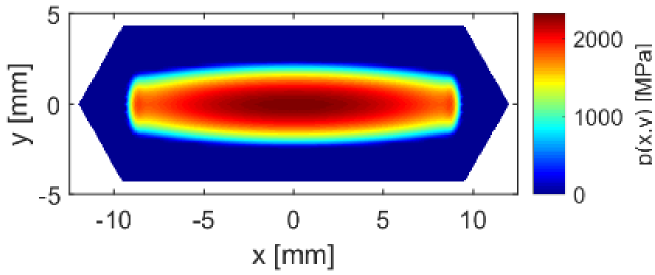
ДОДАТОК В

РОЗПОДІЛИ КОНТАКТНОГО ТИСКУ ДЛЯ РІЗНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ПРОМІЖНОГО ШАРУ

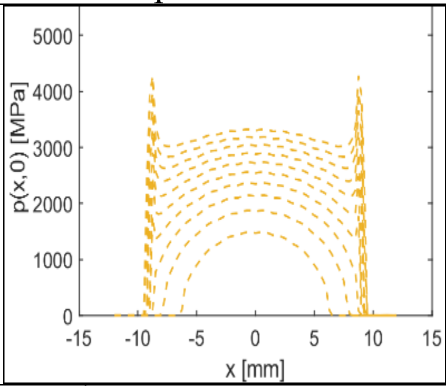
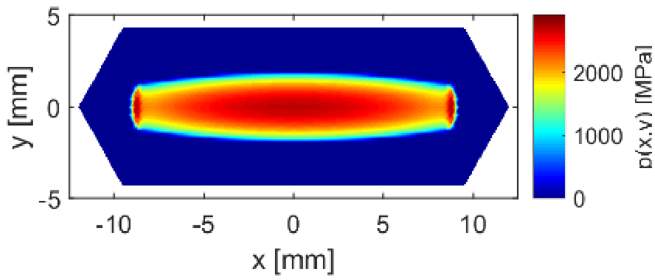
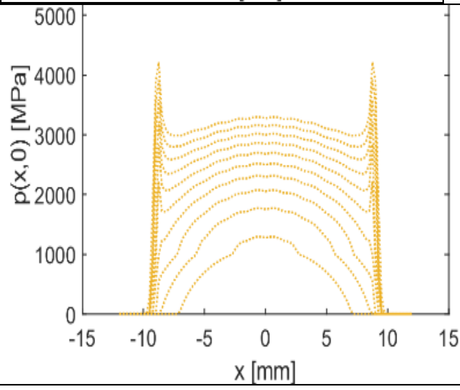
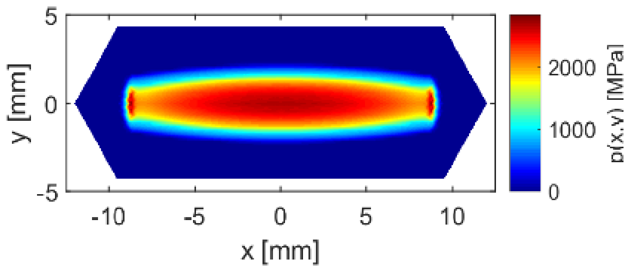
Таблиця В.1 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_4, $\gamma = a$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискно-го зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{\text{III}}=\infty$)		
$p_{\text{I}} = 100$ МПа		
$p_{\text{II}} = 1000$ МПа		

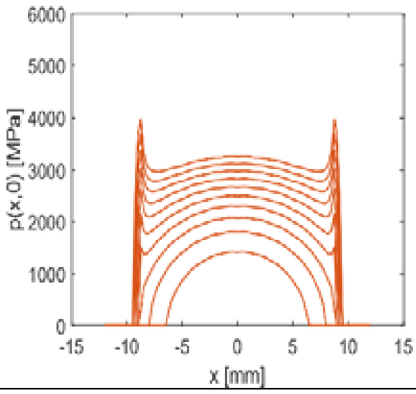
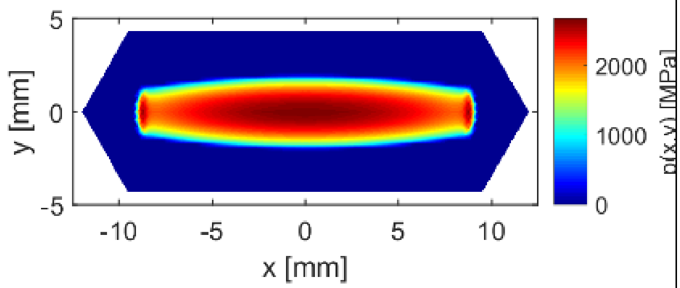
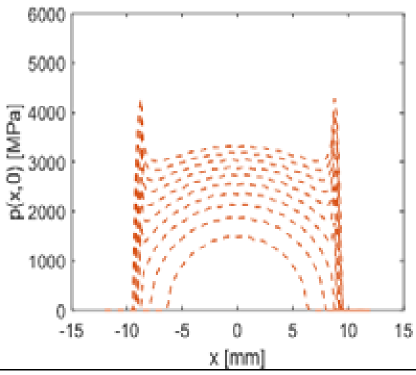
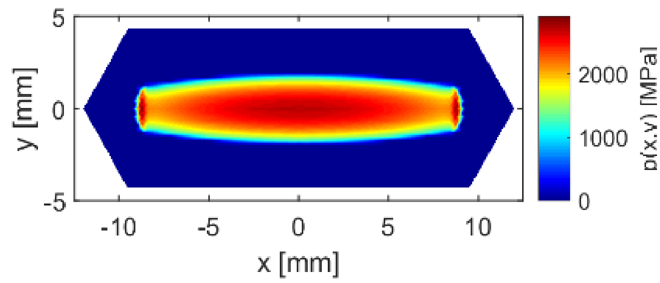
Таблиця В.2 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_3, $\gamma = a$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{\text{III}}=\infty$)		

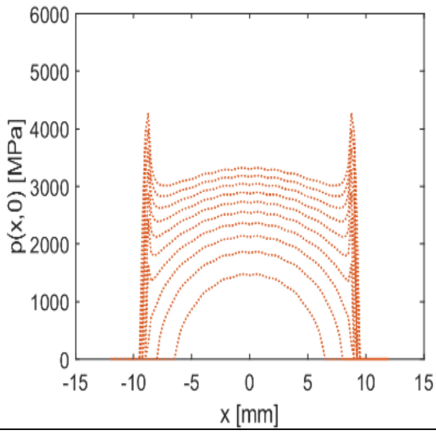
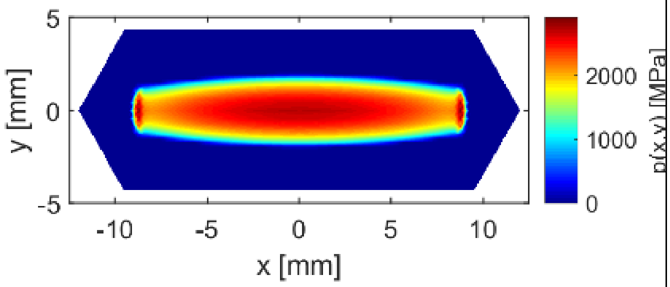
Закінчення табл. В.2

<table>
<tr><td rowspan="2">Варі-анти</td><td colspan="2">Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа</td></tr>
<tr><td>уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН</td><td>у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН</td></tr>
<tr><td>$p_{\text{I}} = 100$ МПа</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$p_{\text{II}} = 1000$ МПа</td><td></td><td></td></tr>
</table>

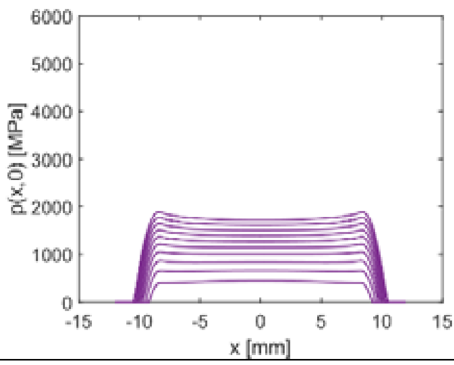
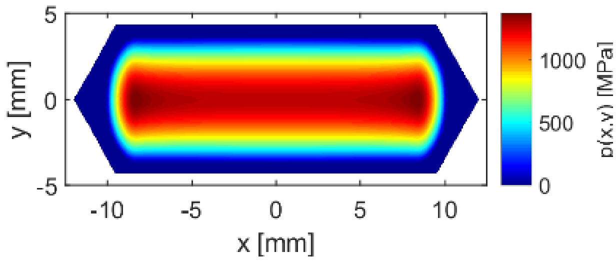
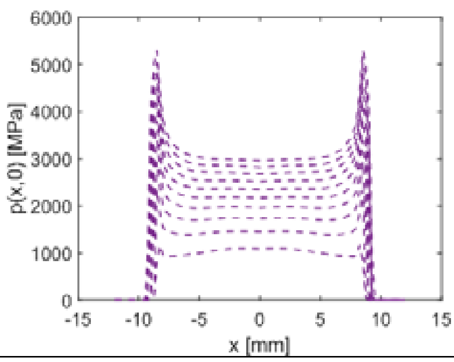
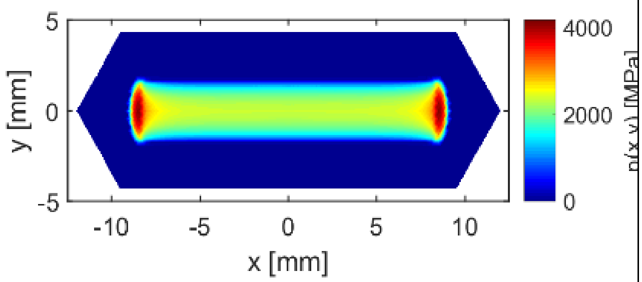
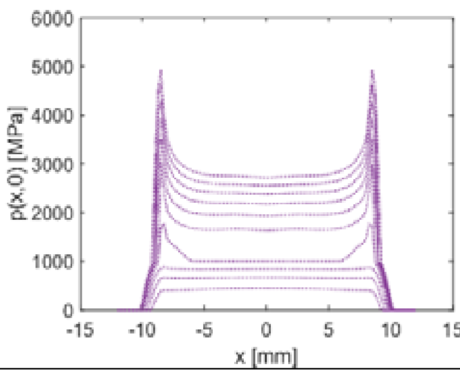
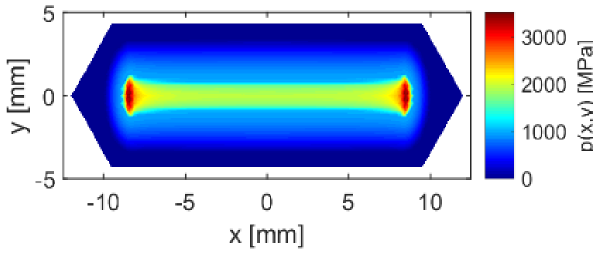
Таблиця В.3 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_2, $\gamma = a$

<table>
<tr><td rowspan="2">Ва-рі-ан-ти</td><td colspan="2">Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа</td></tr>
<tr><td>уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН</td><td>у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН</td></tr>
<tr><td>Лінійний Шар ($p_{\text{III}} = \infty$)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$p_{\text{I}} = 100$ МПа</td><td></td><td></td></tr>
</table>

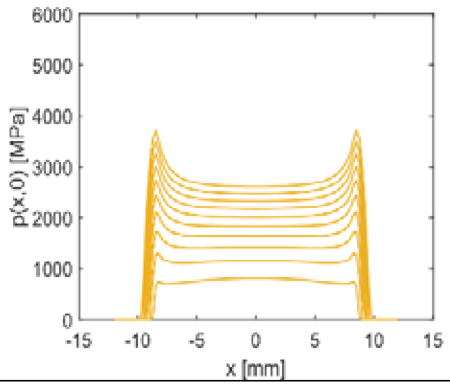
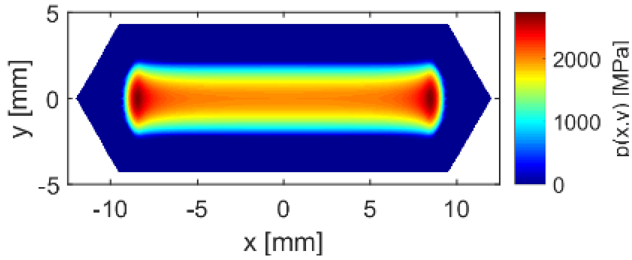
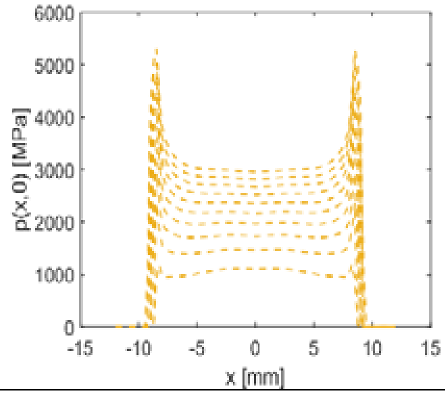
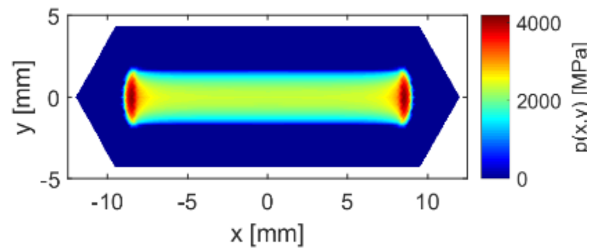
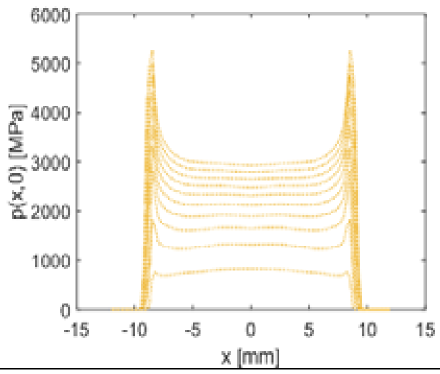
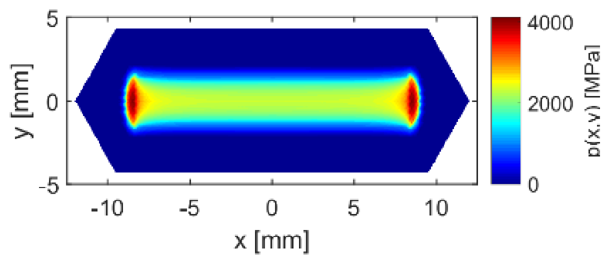
Закінчення табл.В.3

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
p_{II}= 1000 МПа		

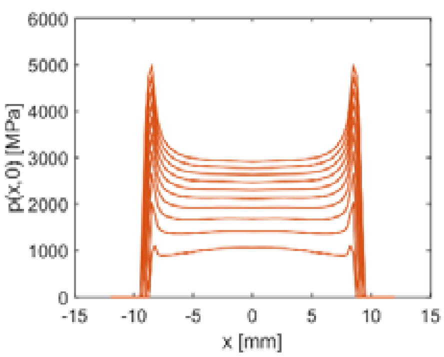
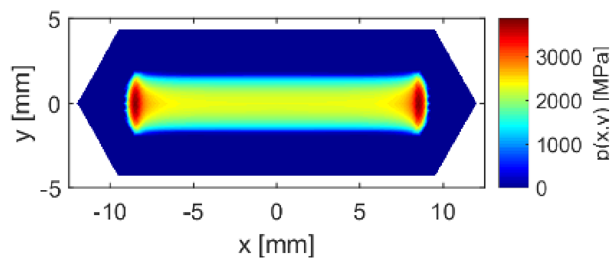
Таблиця В.4 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_4, $\gamma = b$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискно-го зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{III}=\infty$)		
$p_I = 100$ МПа		
p_{II}= 1000 МПа		

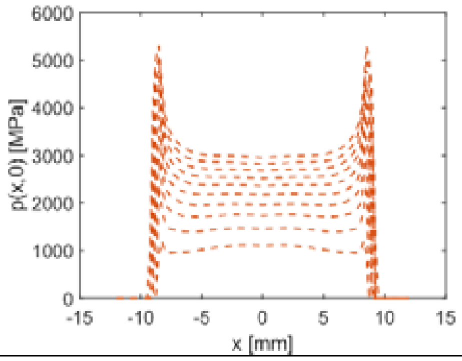
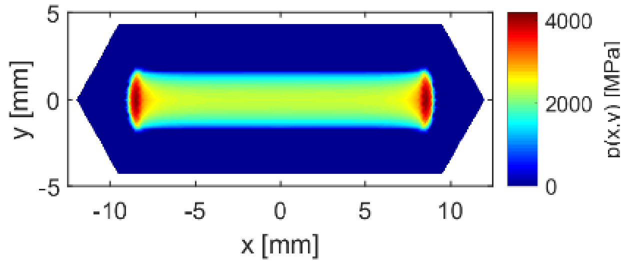
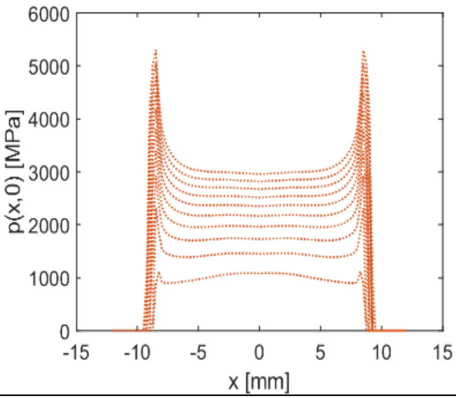
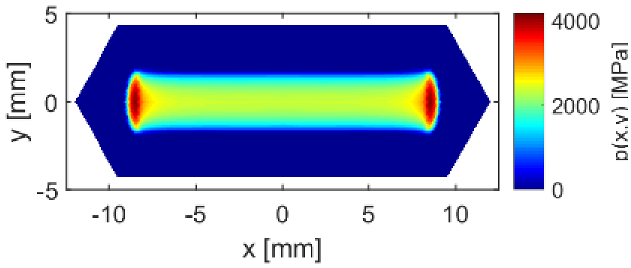
Таблиця В.5 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_3, $\gamma = b$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{\mathrm{III}} = \infty$)		
$p_{\mathrm{I}} = 100$ МПа		
$p_{\mathrm{II}} = 1000$ МПа		

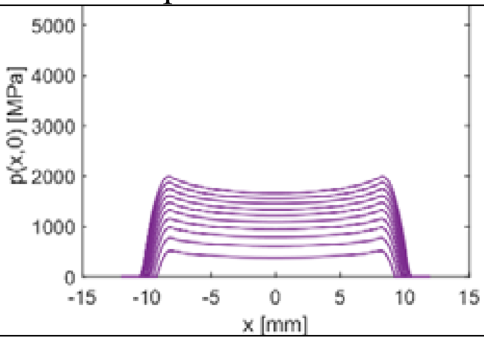
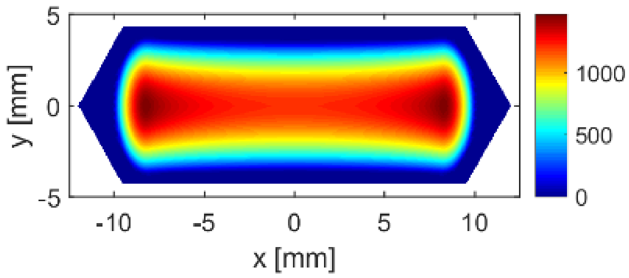
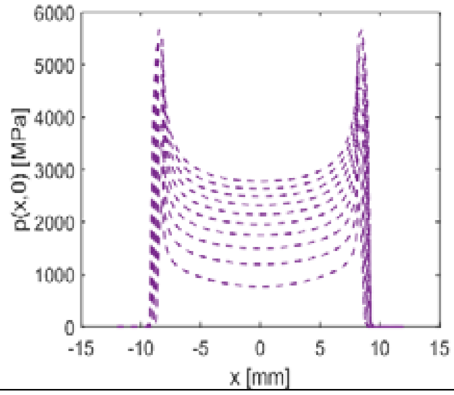
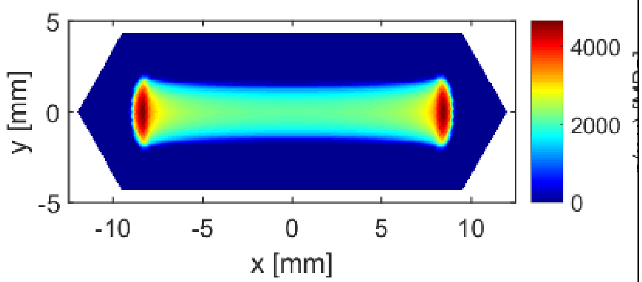
Таблиця В.6 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_2, $\gamma = b$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
Лінійний шар ($p_{\mathrm{III}} = \infty$)		

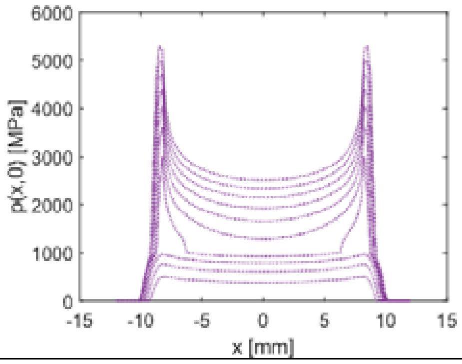
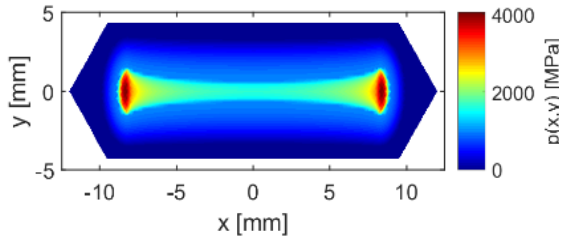
Закінчення табл. В.6

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
$p_{\mathrm{I}} = 100$ МПа		
$p_{\mathrm{II}} = 1000$ МПа		

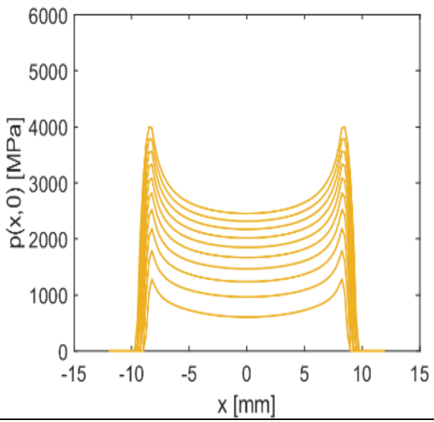
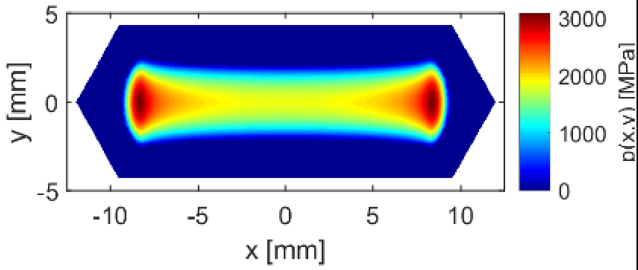
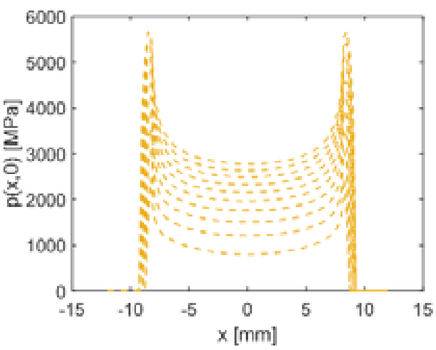
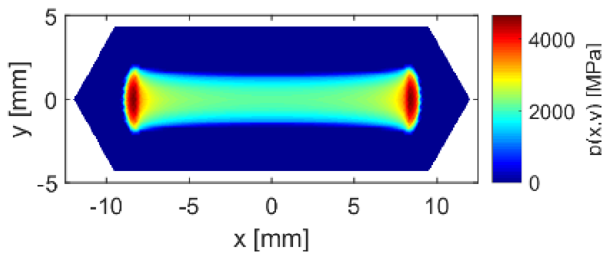
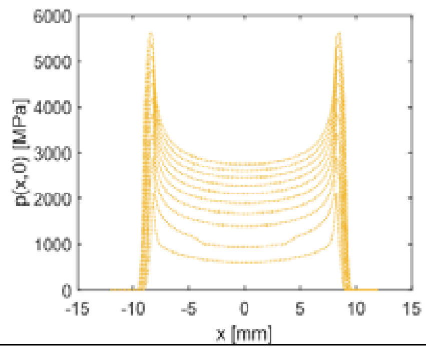
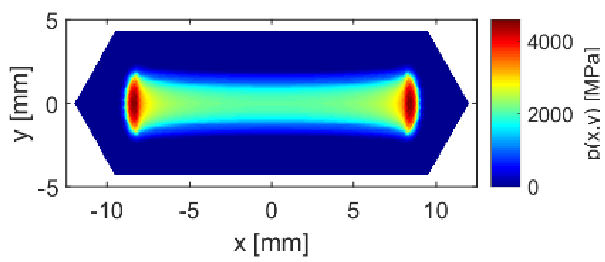
Таблиця В.7 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_4, $\gamma = c$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20;200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{\mathrm{III}} = \infty$)		
$p_{\mathrm{I}} = 100$ МПа		

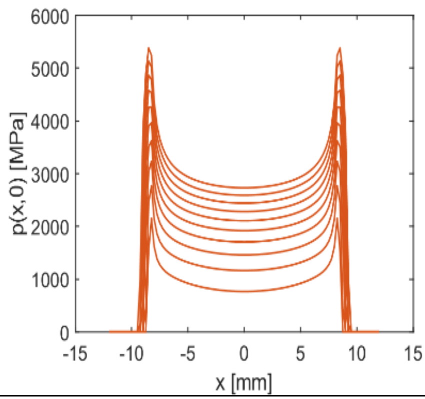
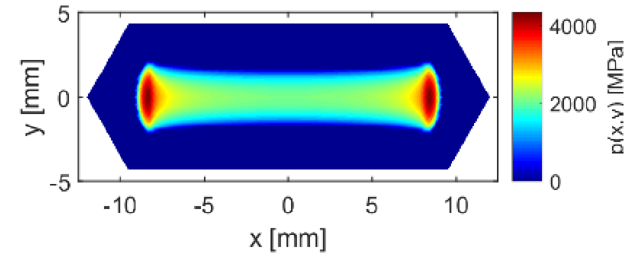
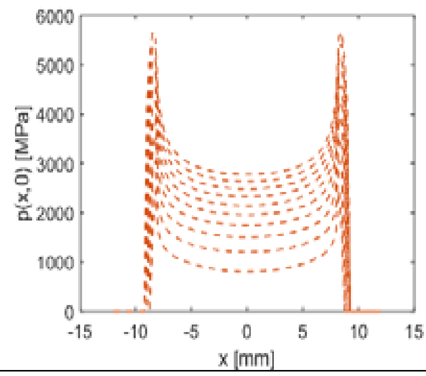
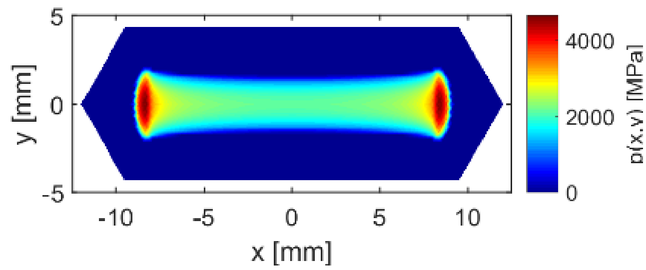
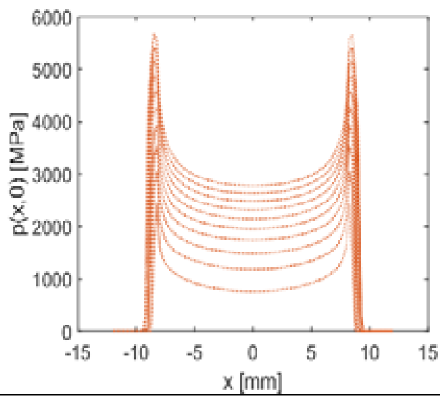
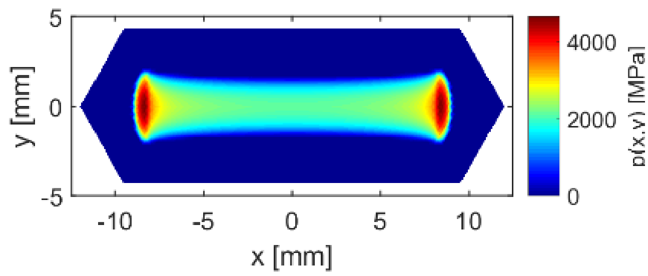
Закінчення табл. В.7

Варіанти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
p_{II} = =1000 МПа		

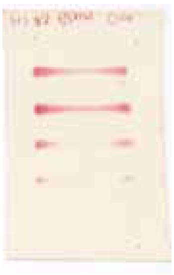
Таблиця В.8 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_3, $\gamma = c$

Варі-анти	Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа	
	уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН	у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН
Лінійний Шар ($p_{III}=\infty$)		
p_I = 100 МПа		
p_{II}= 1000 МПа		

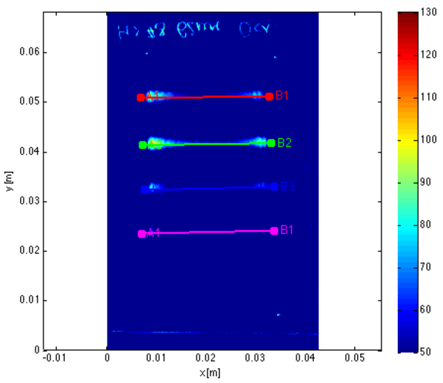
Таблиця В.9 – Розподіли контактного тиску для варіанту λ_2, $\gamma = c$

<table>
<tr><td rowspan="2">Варі-анти</td><td colspan="2">Розподіли контактного тиску $p(x, 0)$, МПа</td></tr>
<tr><td>уздовж осі x за $P \in [20; 200]$ з кроком 20 кН</td><td>у площині x, y для величини притискного зусилля $P = 120$ кН</td></tr>
<tr><td>Лінійний Шар ($p_{III} = \infty$)</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$p_{I} = 100$ МПа</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$p_{II} = 1000$ МПа</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

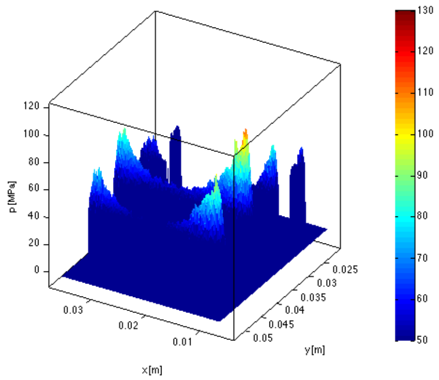
ДОДАТОК Г
РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОРШНЯ ГОП-900



а

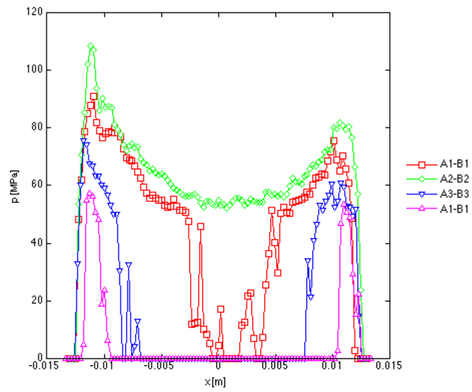


б

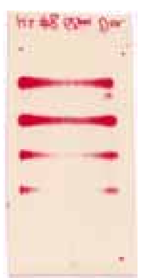


в

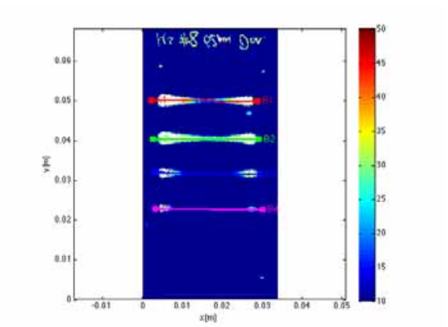
Рисунок Г.1 – Експеримент 8/62 (№ 1) (див. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



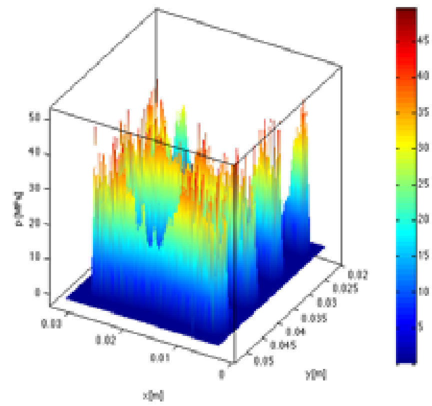
г



а

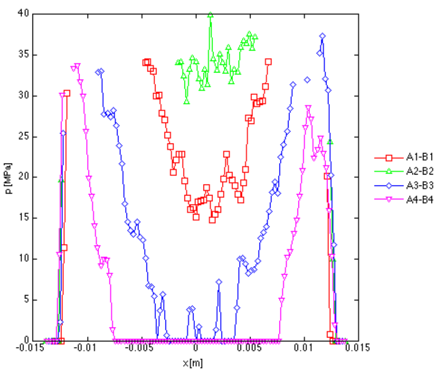


б



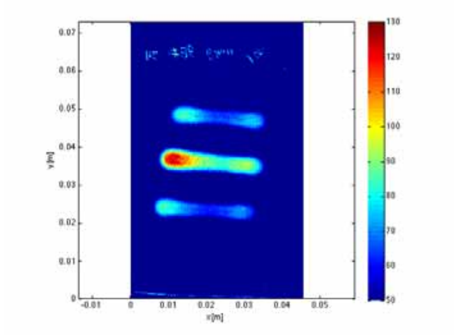
в

Рисунок Г.2 – Експеримент 8/62 (№ 1) (див. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

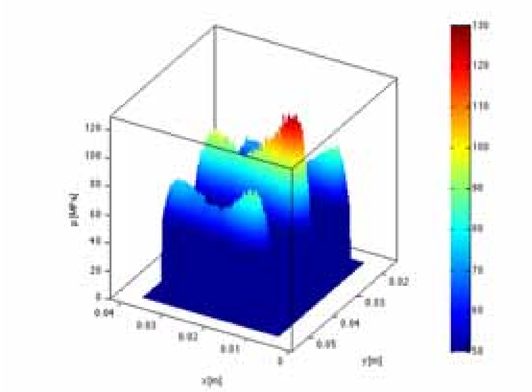


г

а

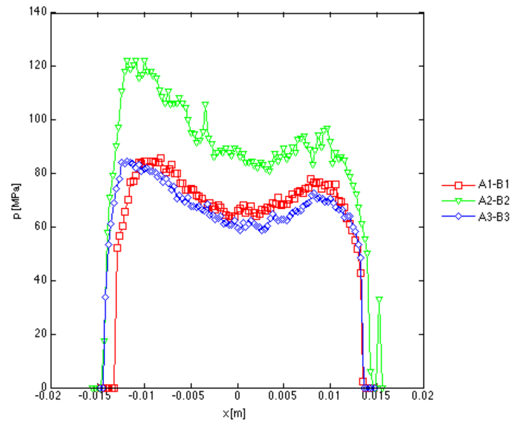


б

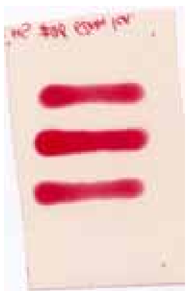


в

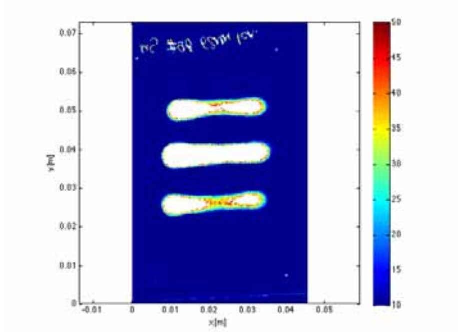
Рисунок Г.3 – Експеримент 9/62 (№ 2) (див. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



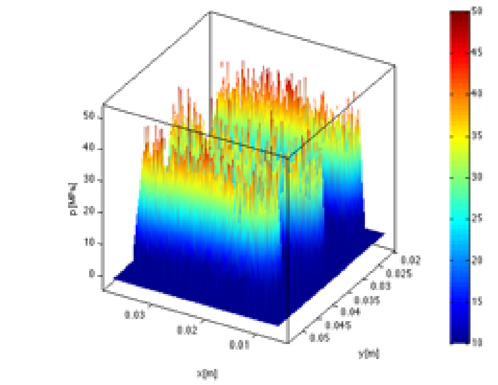
г



а

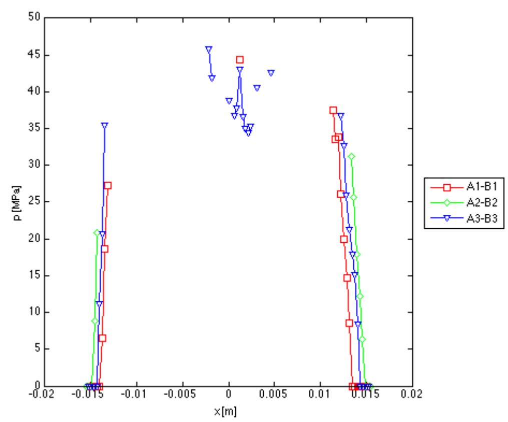


б



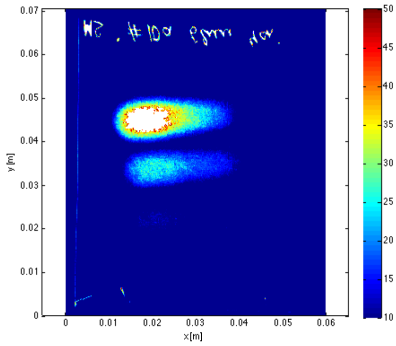
в

Рисунок Г.4 – Експеримент 9/62 (№ 2) (див. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

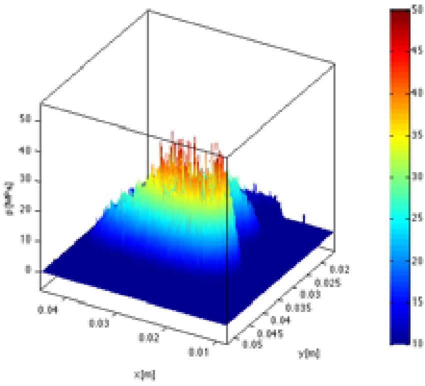


г

а

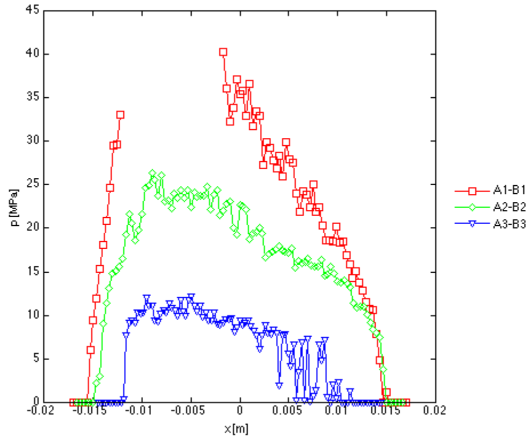


б



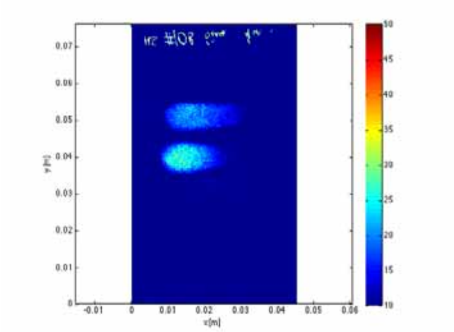
в

Рисунок Г.5 – Експеримент 10/62 (№ 3) (див. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

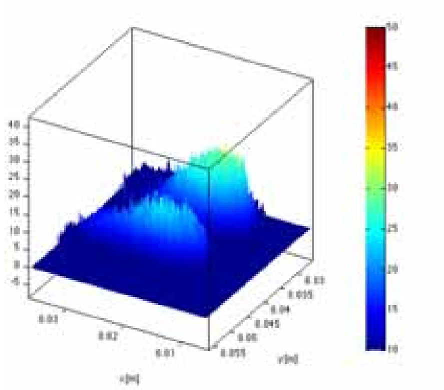


г

а

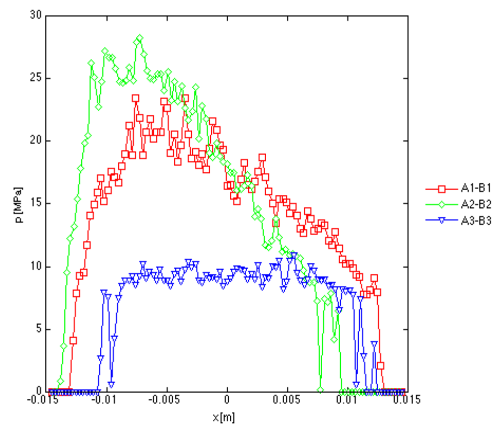


б



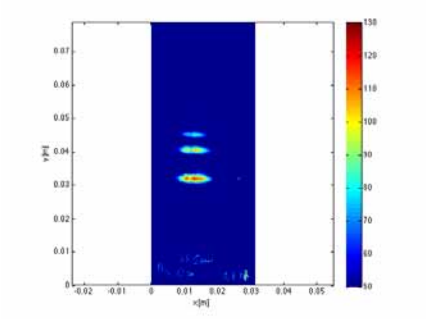
в

Рисунок Г.6 – Експеримент 10/62 (№ 3) (див. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

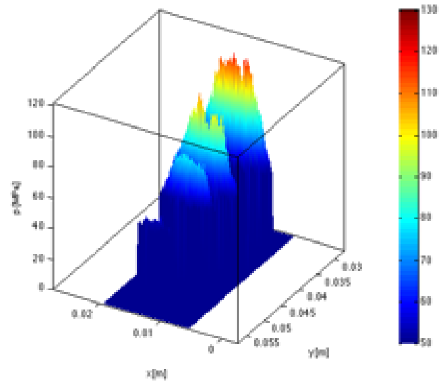


г

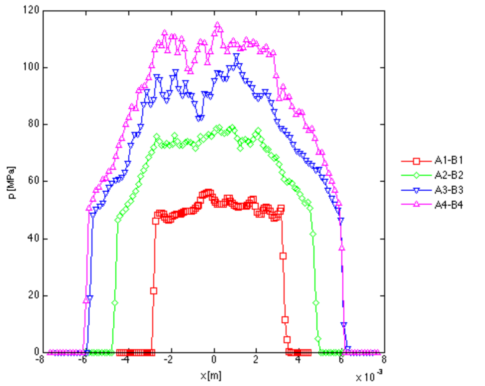
а



б



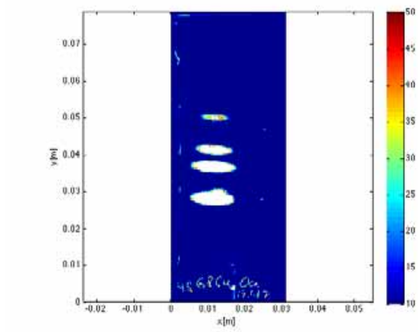
в



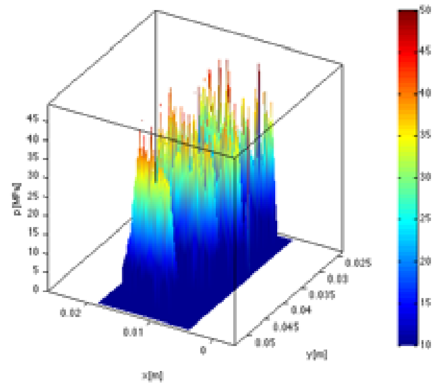
г

Рисунок Г.7 – Експеримент 0/68,5 (№ 4) (см. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

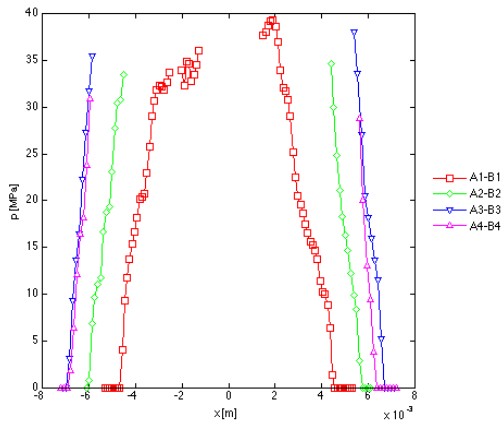
а



б

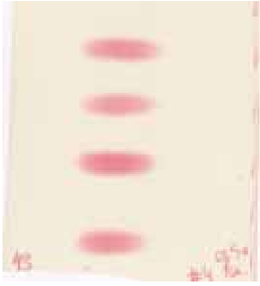


в

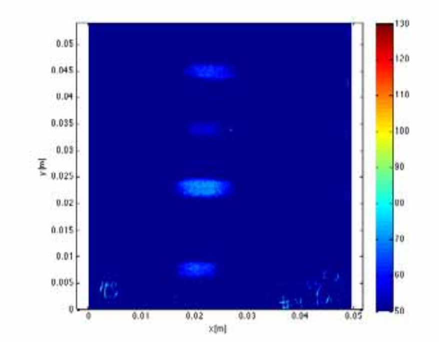


г

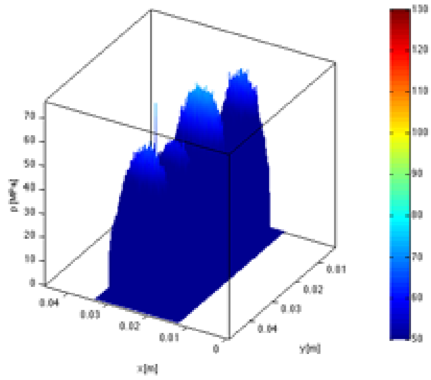
Рисунок Г.8 – Експеримент 0/68,5 (№ 4) (см. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



а

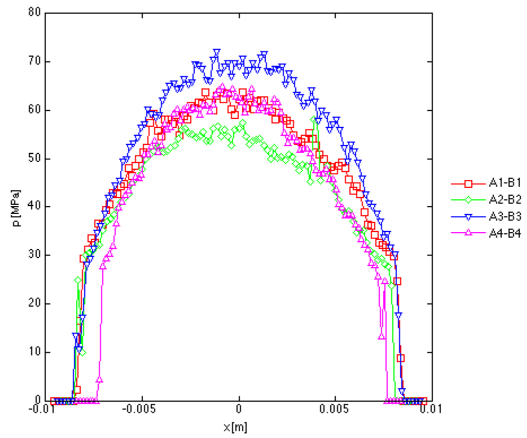


б

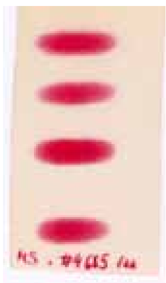


в

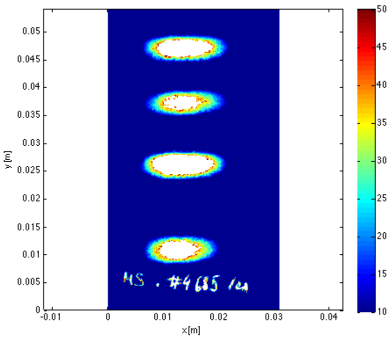
Рисунок Г.9 – Експеримент 4/68,5 (№ 5) (см. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



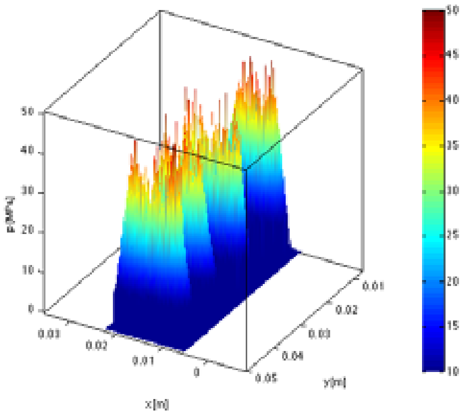
д



а

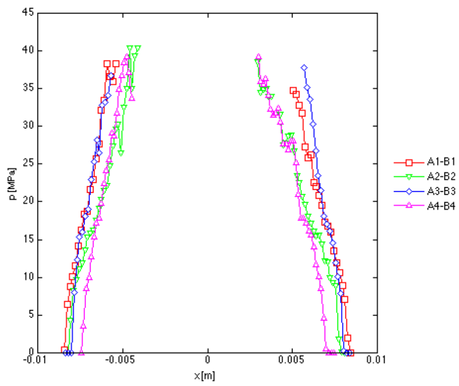


б



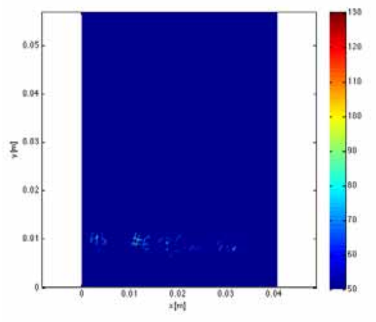
в

Рисунок Г.10 – Експеримент 4/68,5 (№ 5) (см. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

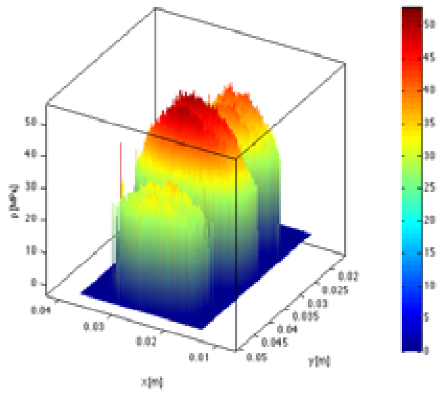


г

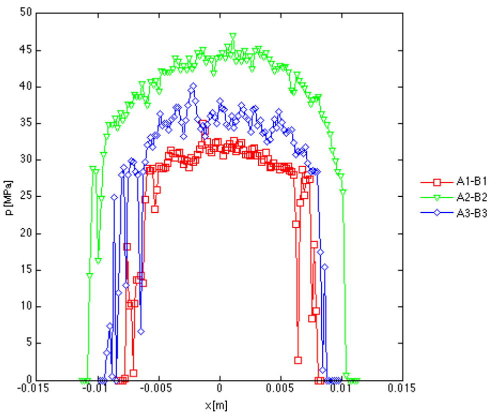
а



б



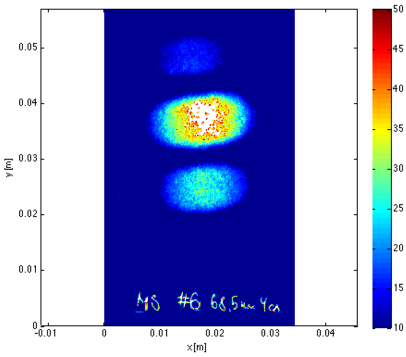
в



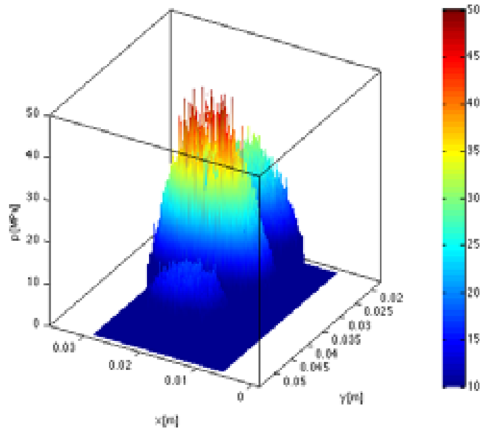
г

Рисунок Г.11 – Експеримент 6/68,5 (№ 6) (см. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

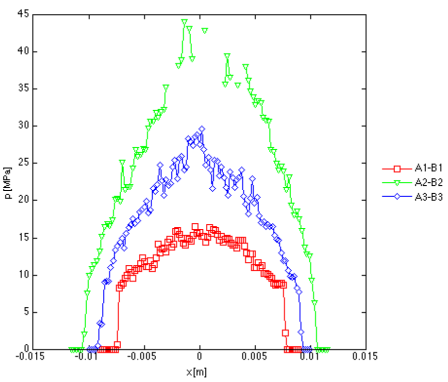
а



б



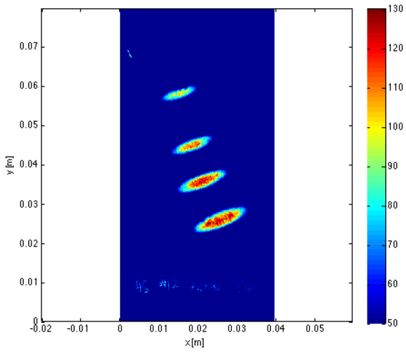
в



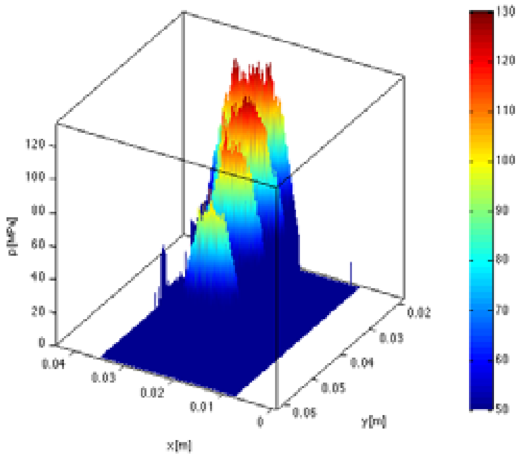
г

Рисунок Г.12 – Експеримент 6/68,5 (№ 6) (см. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

а

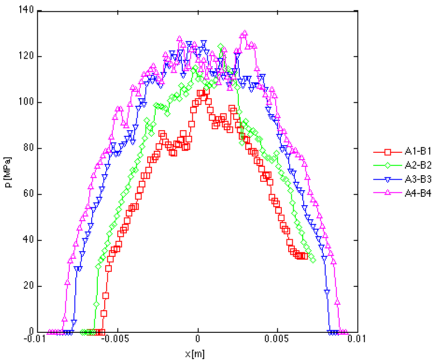


б



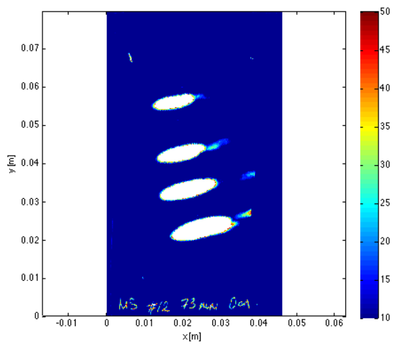
в

Рисунок Г.13 – Експеримент 12/73 (№ 7) (см. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

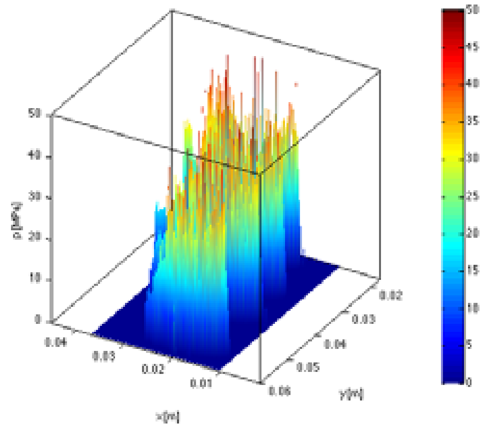


г

а

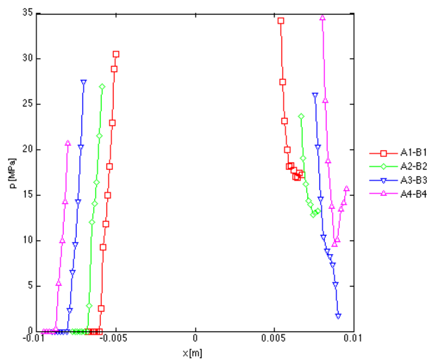


б

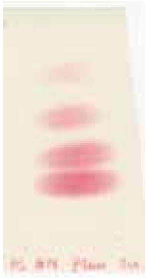


в

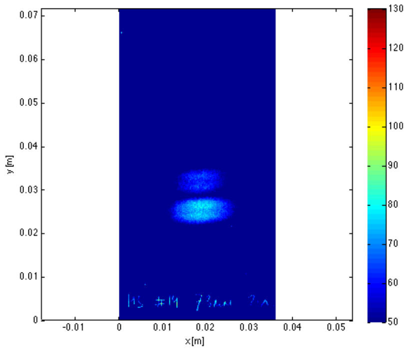
Рисунок Г.14 – Експеримент 12/73 (№ 7) (см. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



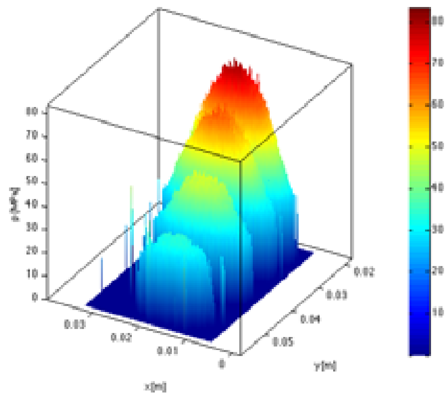
д



а

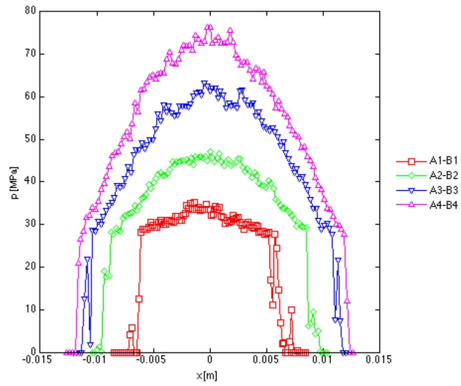


б



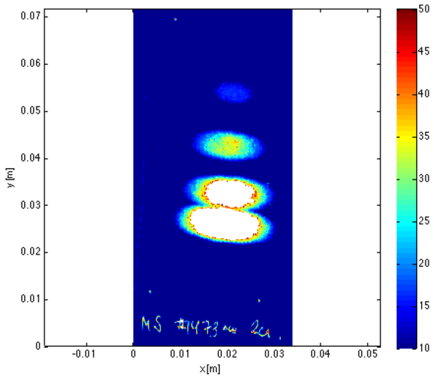
в

Рисунок Г.15 – Експеримент 14/73 (№ 8) (см. табл. 7.5), плівка «Н»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

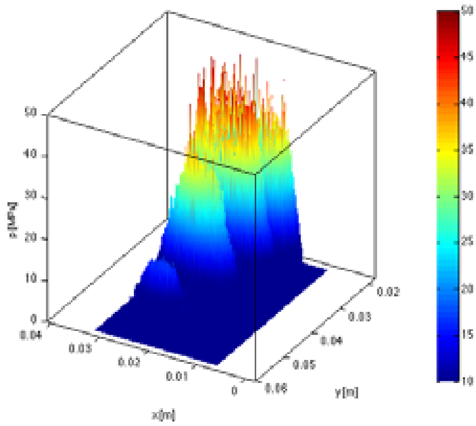


г

а

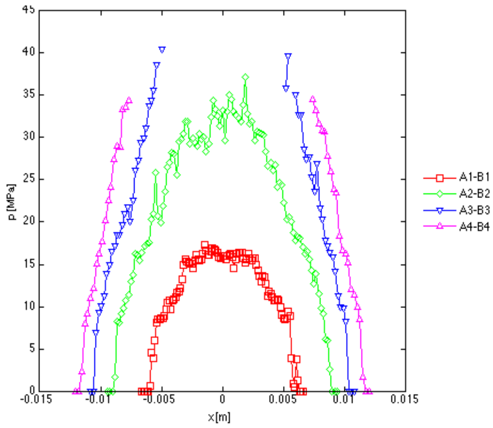


б



в

Рисунок Г.16 – Експеримент 14/73 (№ 8) (см. табл. 7.5), плівка «М»: *а* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В



г

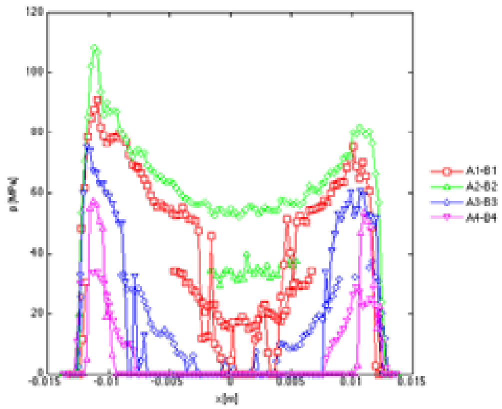


Рисунок Г.17 – Експеримент 8/62 (№ 1) (див. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску вздовж перерізів А–В

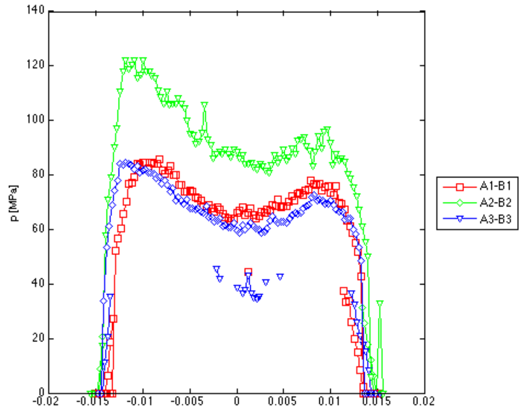


Рисунок Г.18 – Експеримент 9/62 (№ 2) (див. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску вздовж перерізів А–В

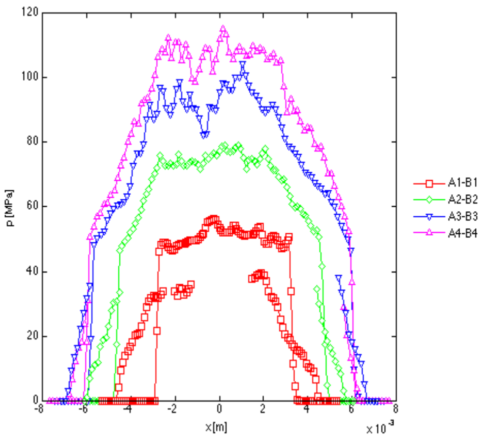


Рисунок Г.19 – Експеримент 0/68,5 (№ 4) (см. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску вздовж перерізів А–В

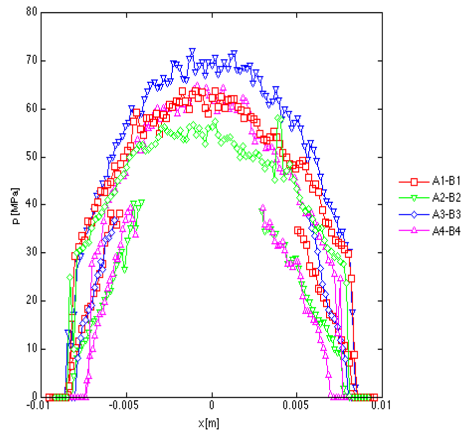


Рисунок Г.20 – Експеримент 4/68,5 (№ 5) (см. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску вздовж перерізів А–В

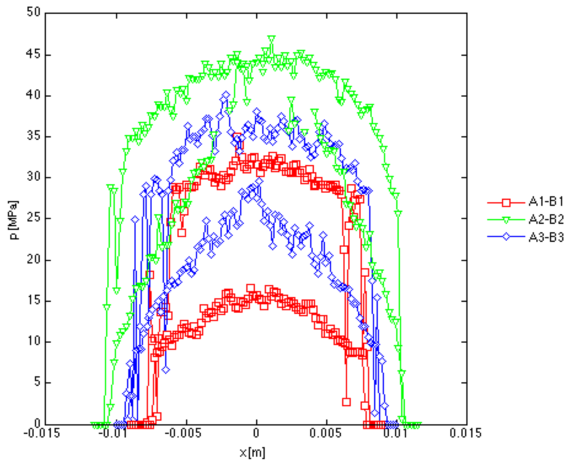


Рисунок Г.21 – Експеримент 6/68,5 (№ 6) (см. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску на виділених траєкторіях

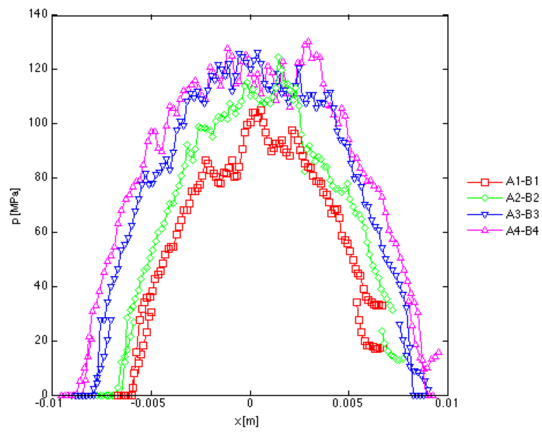
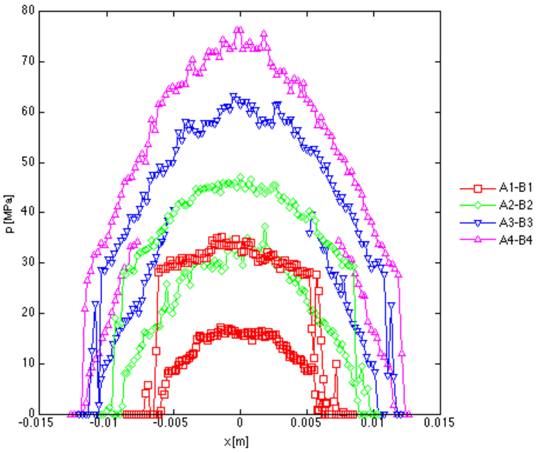
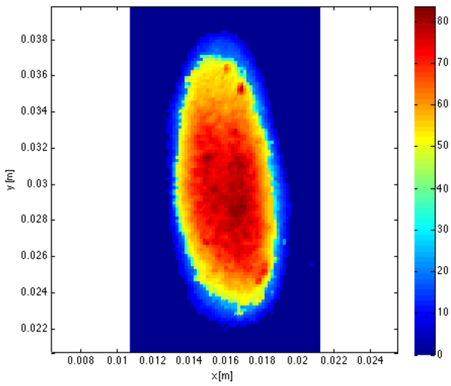


Рисунок Г.22 – Експеримент 12/73 (№ 7) (см. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску на виділених траєкторіях

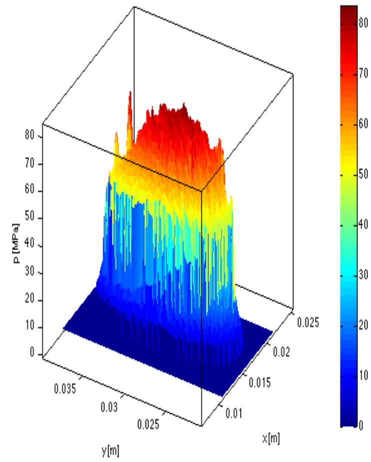
Рисунок Г.23 – Експеримент 14/73 (№ 8) (см. табл. 7.5), плівка «НМ»: розподіл тиску вздовж перерізів А–В



а

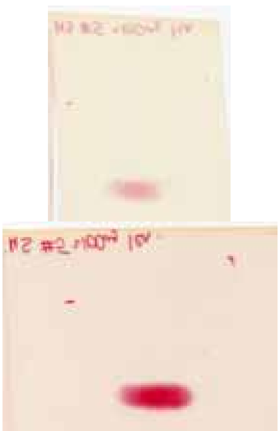


б

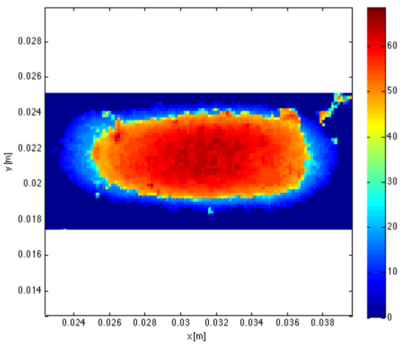


в

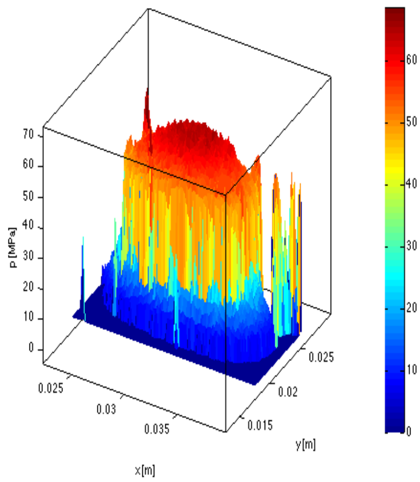
Рисунок Г.24 – Експеримент 4 (№ 1) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)



а



б



в

Рисунок Г.25 – Експеримент 5 (№ 2) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)

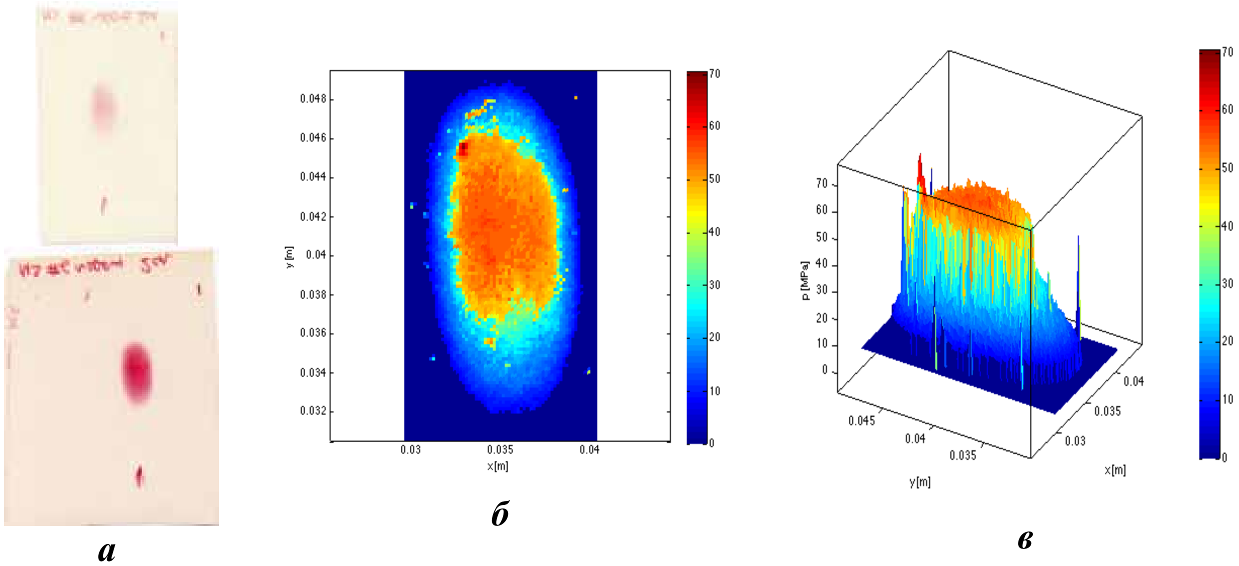


Рисунок Г.26 – Експеримент 6 (№ 3) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)

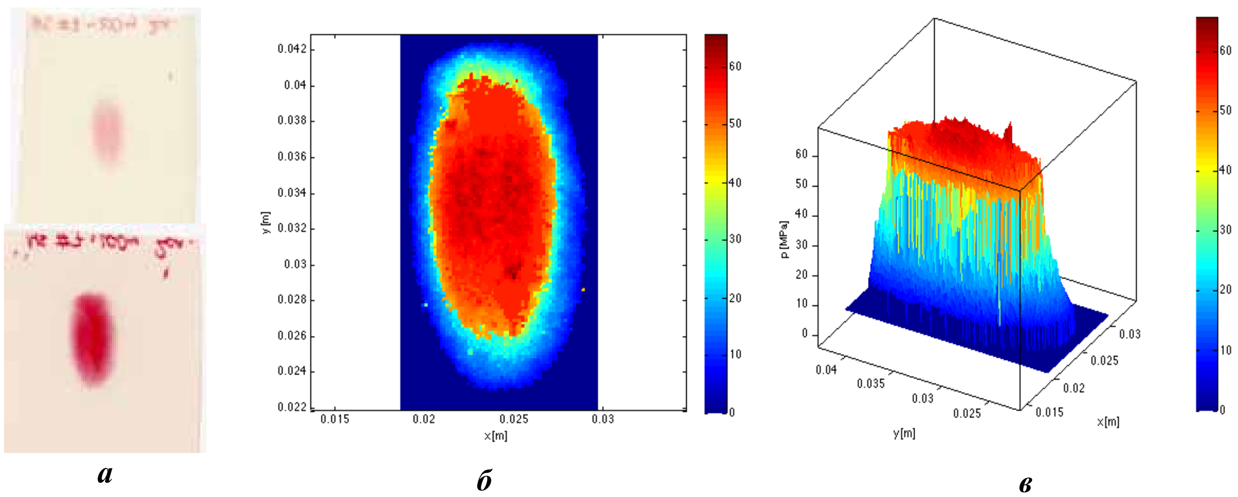


Рисунок Г.27 – Експеримент 7 (№ 4) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)

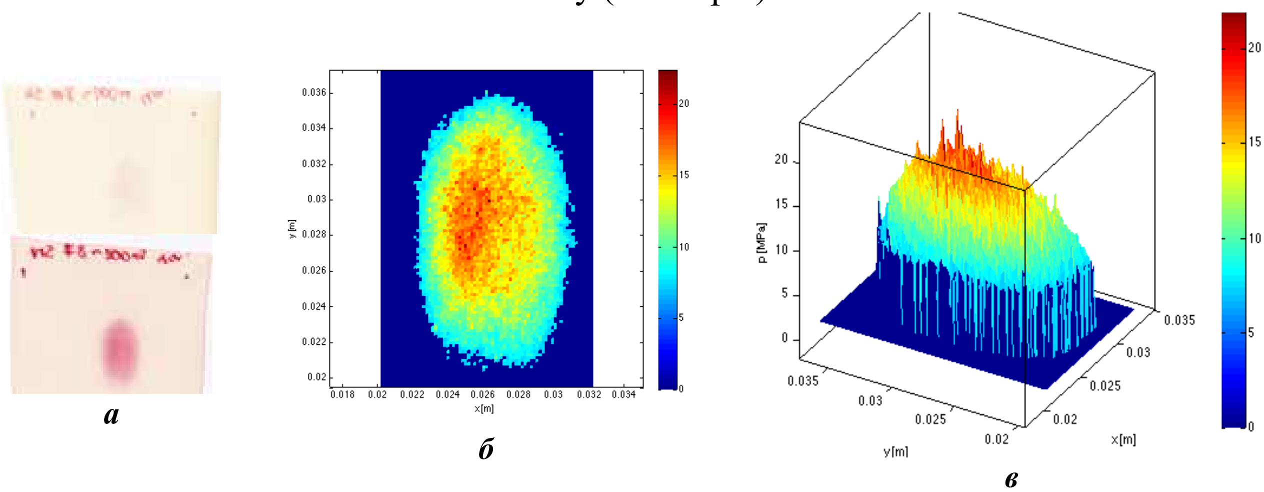
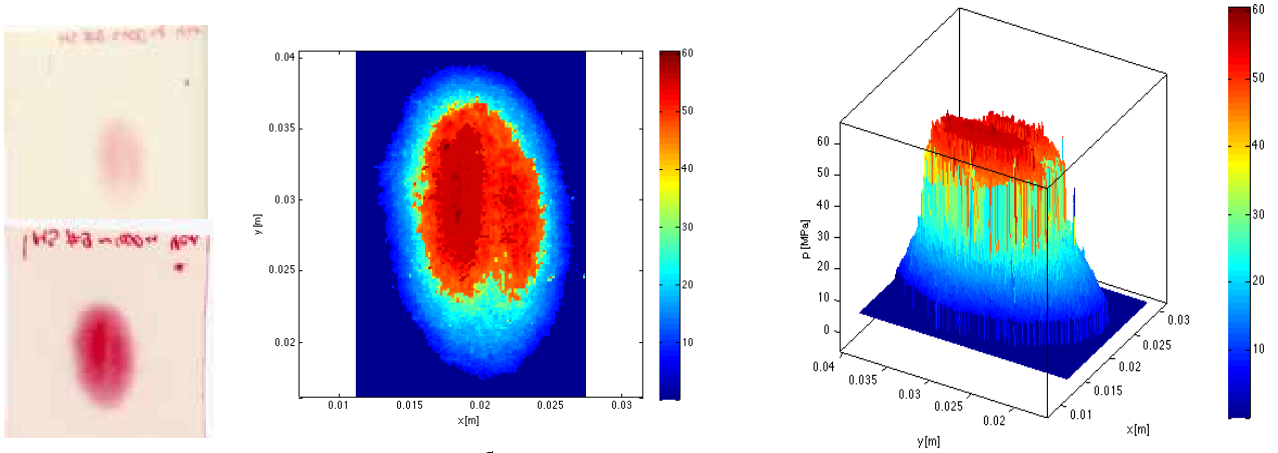


Рисунок Г.28 – Експеримент 8 (№ 5) (см. табл. 7.6), плівка «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)



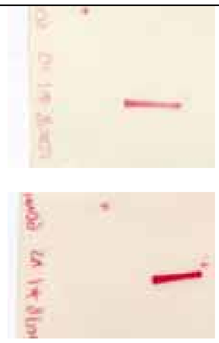
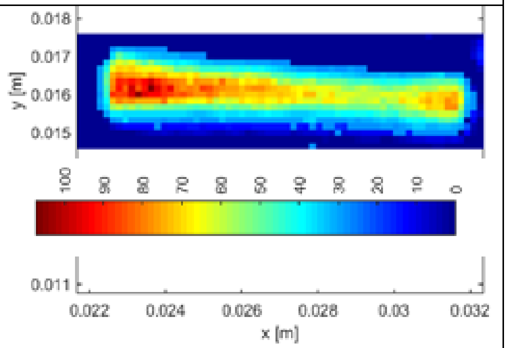
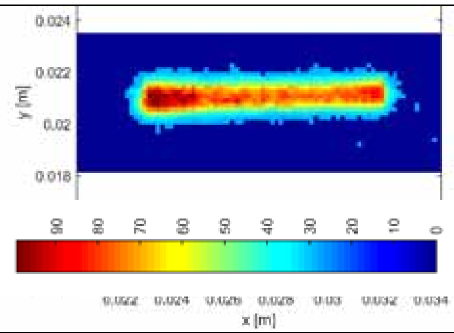
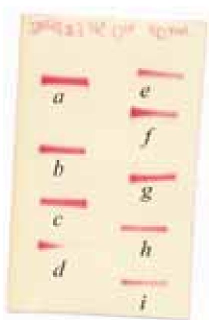
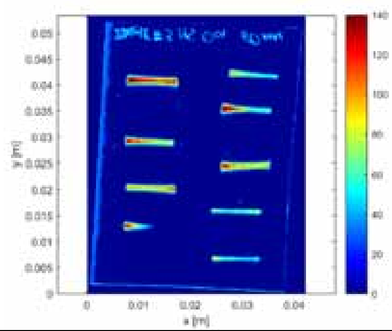
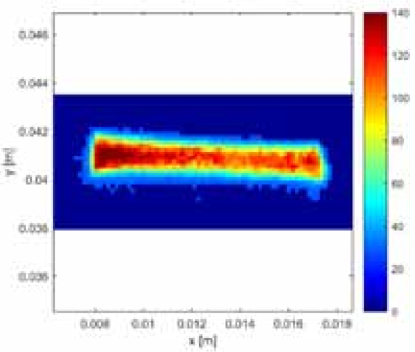
а *б* *в*

Рисунок Г.29 – Експеримент 9 (№ 6) (див. табл. 7.6), плівки «Н» і «М»: *а* –відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа; *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія)

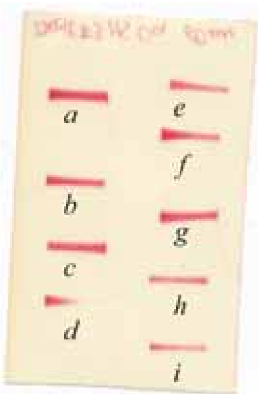
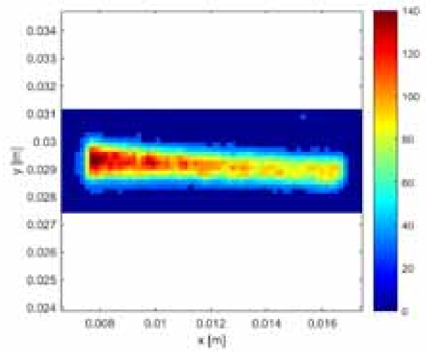
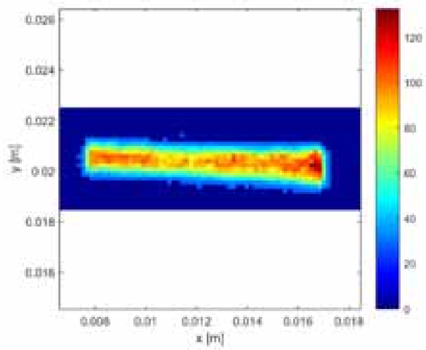
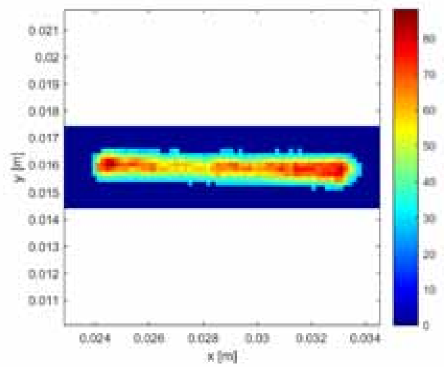
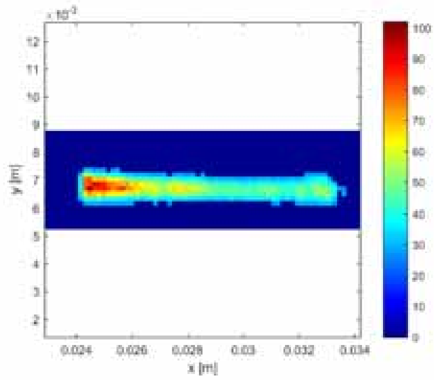
ДОДАТОК Д

РОЗШИФРОВКА ВІДБИТКІВ, ОТРИМАНИХ В КОНТАКТІ РОЛИКА ПІДШИПНИКА ІЗ БІГОВОЮ ДОРІЖКОЮ ЗА РІЗНОЇ КІЛЬКОСТІ ПРОМІЖНИХ ШАРІВ

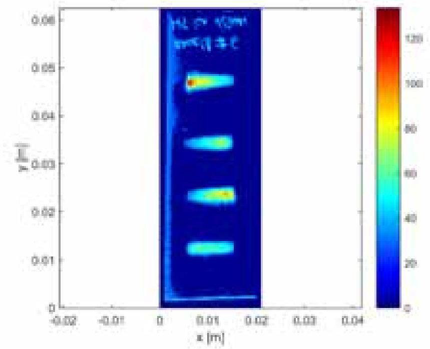
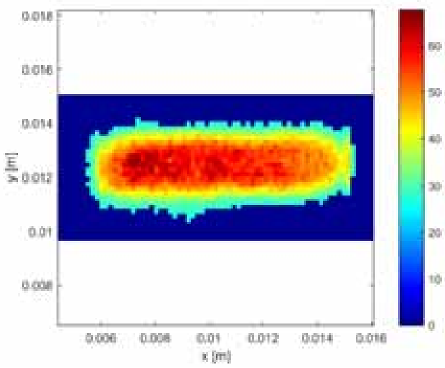
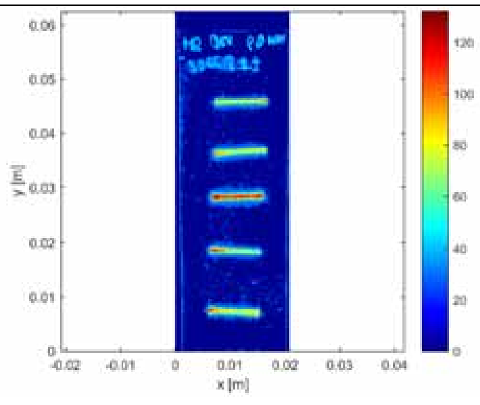
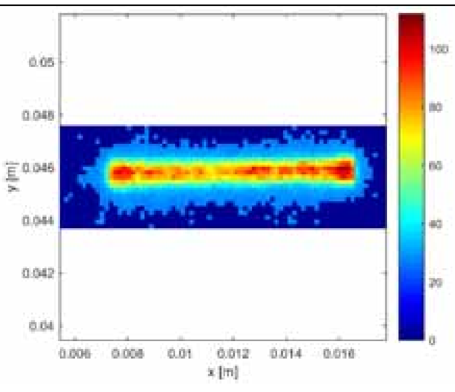
Таблиця Д.1 – Розшифровка відбитків, отриманих в контакті ролика підшипника із біговою доріжкою за різної кількості проміжних шарів

№ п п	Тип плівки	A, мм^2	P, Н	p_{max}, МПа	Контактні плівки	Розподіл контактного тиску
			без проміжного шару			
1	HS+ MS	20.85	900.8	107.3		
2	HS+ MS	20.79	1064.7	99.3		
3	HS					
3, *a*		22.08	1583.6	140		

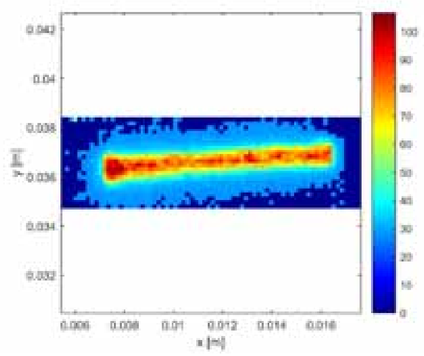
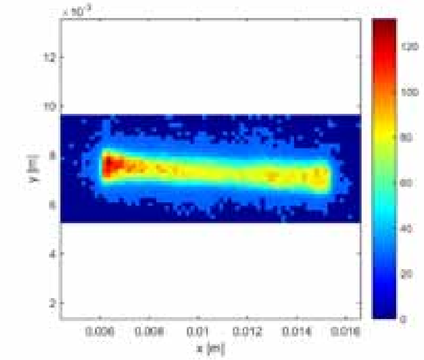
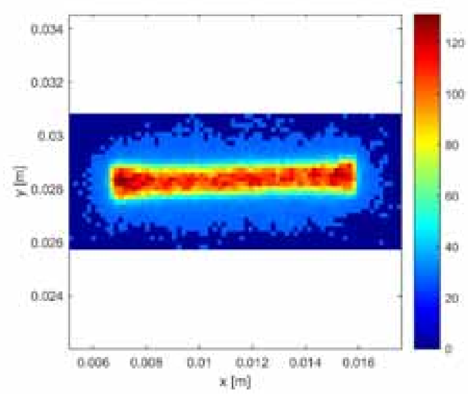
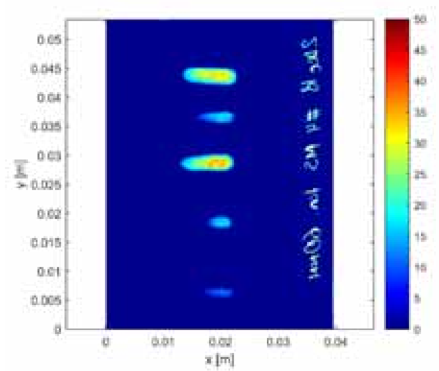
Продовження табл. Д.1

<table>
<tr><th>№ п п</th><th>Тип плів-ки</th><th>A, мм^2</th><th>P, Н</th><th>p_{max}, МПа</th><th>Контактні плівки</th><th>Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td colspan="7">без проміжного шару</td></tr>
<tr><td>3, b</td><td rowspan="4">HS</td><td>16.34</td><td>1060.1</td><td>140</td><td rowspan="4">
</td><td></td></tr>
<tr><td>3, c</td><td>17.23</td><td>1104.4</td><td>132.7</td><td></td></tr>
<tr><td>3, h</td><td>11.7</td><td>569.6</td><td>88.1</td><td></td></tr>
<tr><td>3, i</td><td>9.69</td><td>432.0</td><td>102.0</td><td></td></tr>
</table>

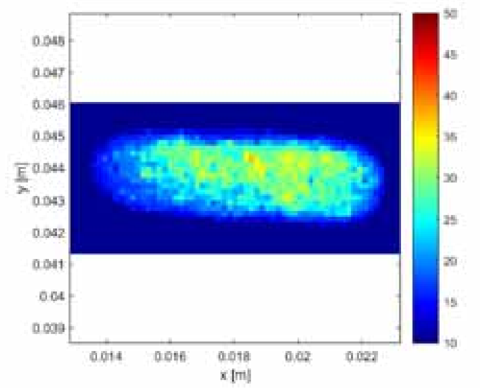
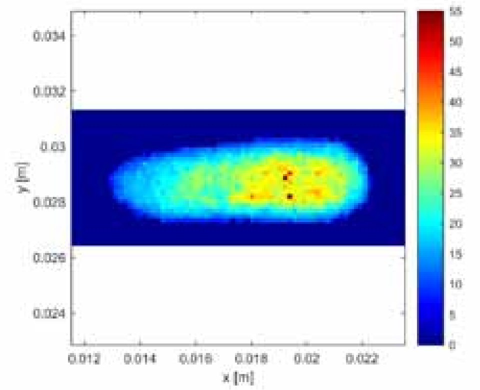
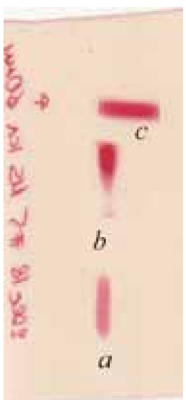
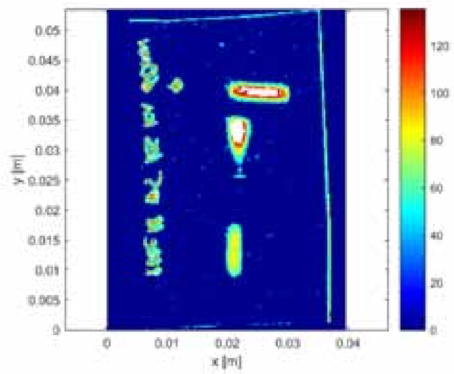
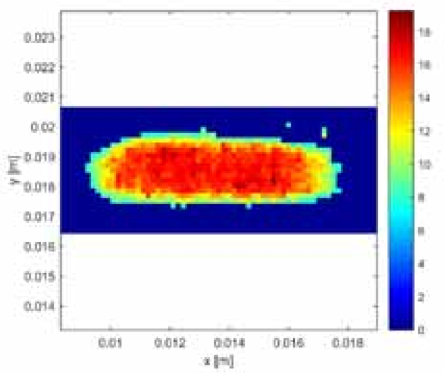
Продовження табл. Д.1

<table>
<tr><th>№ п п</th><th>Тип плів-ки</th><th>A, $мм^2$</th><th>P, Н</th><th>p_{max}, МПа</th><th>Контактні плівки</th><th>Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td colspan="7">без проміжного шару</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="2">HS</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">
</td><td></td></tr>
<tr><td>6, d</td><td>29.3</td><td>1299.9</td><td>67.71</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="2">HS</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">
</td><td></td></tr>
<tr><td>7, a</td><td>26.32</td><td>1188.5</td><td>112</td><td></td></tr>
</table>

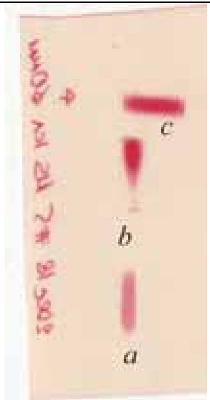
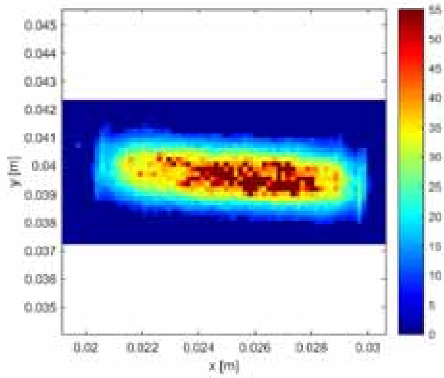
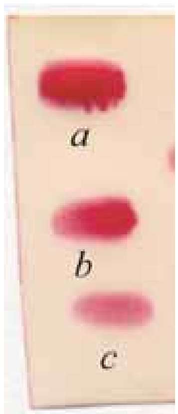
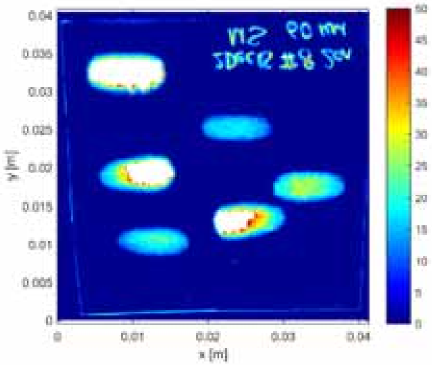
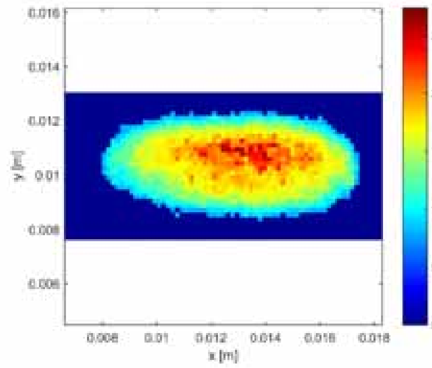
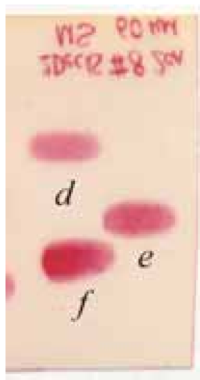
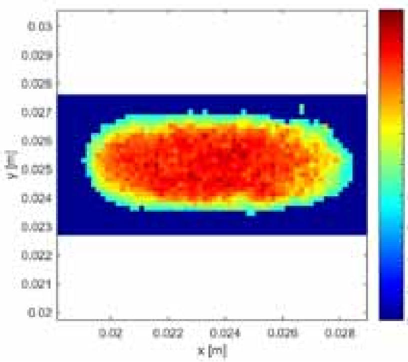
Продовження табл. Д.1

<table>
<tr><th>№ п п</th><th>Тип плів-ки</th><th>A, мм^2</th><th>P, Н</th><th>p_{max}, МПа</th><th>Контактні плівки</th><th>Розподіл контактного тиску</th></tr>
<tr><td colspan="7">без проміжного шару</td></tr>
<tr><td>7,b</td><td rowspan="3">HS</td><td>31.28</td><td>1336.0</td><td>106.75</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7,c</td><td>38.08</td><td>1878.8</td><td>131.2</td><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>7,e</td><td>29.33</td><td>1343.7</td><td>132.2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">з проміжним шаром (1 шар)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>MS</td><td>26.29</td><td>557.3</td><td>37.18</td><td></td><td></td></tr>
</table>

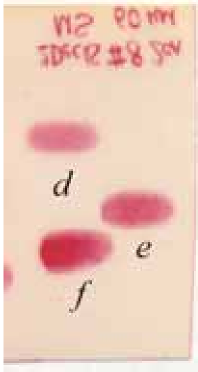
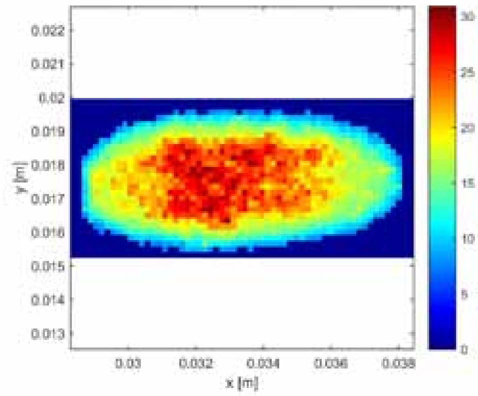
Продовження табл. Д.1

№ пп	Тип плів-ки	A, мм^2	P, Н	p_{max}, МПа	Контактні плівки	Розподіл контактного тиску
з проміжним шаром (1 шар)						
4,*a*		26.29	557.3	37.18		
4,*c*	MS	24.2	527.4	55		
5	MS	17.86	243.7	19.25		
5,*a*						

Продовження табл. Д.1

№ пп	Тип плівки	A, мм^2	P, Н	p_{max}, МПа	Контактні плівки	Розподіл контактного тиску
з проміжним шаром (1 шар)						
5,*c*		27.61	714.9	55		
з проміжним шаром (2 шари)						
8	MS					
8,*c*		30.28	448.85	27.4		
8,*d*		28.24	390.0	19.98		

Закінчення табл. Д.1

№ пп	Тип плів-ки	A, $мм^2$	P, Н	p_{max}, МПа	Контактні плівки	Розподіл контактного тиску
з проміжним шаром (2 шари)						
8, *e*		33.34	605.1	30.9		

ДОДАТОК Е
АКТИ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Затверджую
Головний інженер
ДП "Завод імені В.О. Малишева"
О.І. Шейко
"__" __________ 2015 р.

Акт
про впровадження результатів дисертаційних досліджень
Ткачука Миколи Миколайовича

Комісія у складі:
1. Малакей А. М. – заступник головного інженера з якості ДП "Завод імені В.О. Малишева",
2. Фрід А. Ю. – заступник головного інженера з нової техніки ДП "Завод імені В.О. Малишева",

що працювала у період з 06.01.2015р. по 14.01.2015р. на Державному підприємстві "Завод імені В.О. Малишева " (ДП "ЗіМ"), встановила, що протягом 2011-2014 років ДП "ЗіМ" проводились спільні з Національним технічним університетом "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ") науково-дослідні та проектно-конструкторські роботи по розробці, дослідженню, технологічній підготовці виробництва та виготовленню нових зразків транспортних засобів спеціального призначення. Ці роботи здійснювалися за безпосередньою участю к.т.н. Ткачука Миколи Миколайовича.

У ході робіт використовувалися методи, алгоритми та програмне забезпечення для дослідження динаміки, напружено-деформованого стану, руйнування та контактної взаємодії елементів складних машинобудівних конструкцій, а також для структурного та параметричного синтезу. Ці розробки створені на методичній базі, що побудована при роботі над докторською дисертацією докторанта НТУ "ХПІ" Ткачука М.М. Розроблені на основі одержаних результатів методики застосовані у ході робіт за договорами про співробітництво та низкою господарчих договорів для визначення раціональних конструктивних параметрів елементів конструкцій бойових броньованих машин, що дало змогу отримати економічний ефект у розмірі 750,0 тис. грн. (сімсот п'ятдесят тисяч гривень).

Впровадження авторських розробок орієнтоване на широке застосування сучасних методів математичного моделювання, автоматизованих систем проектування, дослідження та виготовлення, дає змогу підвищити тактико-технічні характеристики машин, що проектуються, виробляються та модернізуються на підприємствах вітчизняного бронетанкобудування.

Даний акт не є підставою для виплати винагороди.

Члени комісії:

Заступник головного інженера А. М. Малакей

Заступник головного інженера А. Ю. Фрід

УТВЕРЖДАЮ
Главный инженер
ГП „Завод имени В.А.Малышева",
_________ А.И. Шейко
06 ноября 2015 г.

Акт
о внедрении результатов диссертационных работ
сотрудников Национального технического университета
"Харьковский политехнический институт" (НТУ "ХПИ")

Комиссия ГП „Завод имени В.А.Малышева" в составе: Литвина Бориса Яковлевича, зам. главного инженера; Яцива Степана Степановича, зам. главного инженера; Шаповалова Игоря Ивановича, главного конструктора, работавшая в ГП „Завод имени В.А.Малышева" в период со 2 ноября по 6 ноября 2015 г., установила, что в ходе выполнения договоров о содружестве между НТУ "ХПИ" и ГП „Завод имени В.А.Малышева" были использованы теоретические разработки, полученные сотрудниками Национального технического университета "Харьковский политехнический институт" Ткачуком Николаем Николаевичем, Кравченко Сергеем Александровичем, Грабовским Андреем Владимировичем, Танченко Андреем Юрьевичем, Васильевым Антоном Юрьевичем при работе над диссертациями на соискание научной степени доктора технических наук. Ими предложены новые подходы и модели к описанию и исследованию процессов и состояния элементов механических систем, представляющих собой тела сложной формы; получены важные научные и практические результаты, использованные при проектировании и изготовлении изделий военного и гражданского назначения. Получен экономический эффект за счет сокращения сроков проектирования, снижения металлоемкости и повышения характеристик изделий в сумме 950,0 тыс. грн. (в равных долях).

Данный акт не служит основанием для материального вознаграждения.

Члены комиссии

Б.Я. Литвин
С.С. Яцив
И.И. Шаповалов

УТВЕРЖДАЮ
Директор
КТЦ ПАО „Азовобщемаш"
________ **Я.М. Демченко**
"_24_" ________ 2016 г.

Акт

о внедрении результатов диссертационной работы
докторанта кафедры теории и систем автоматизированного
проектирования механизмов и машин
Национального технического университета
"Харьковский политехнический институт"
Ткачука Николая Николаевича

Комиссия КТЦ „Азовобщемаш" в составе: зам.директора по металлургическому оборудованию и информационным технологиям Пеклича Михаила Михайловича,гл. сварщика Хоровца Евгения Тарасовича;гл. конструктора,к.т.н. Барчана Евгения Николаевича, в период с 16 по 24 февраля 2016 г., установила, что в ходе выполнения ряда хозяйственных договоров, а также договора о сотрудничестве между НТУ „ХПИ" и ОАО „Азовмаш" за период 2010 – 2015 г.г., были использованы теоретические разработки, полученные докторантом кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин Национального технического университета "Харьковский политехнический институт" Ткачуком Николем Николаевичем при работе над диссертацией на соискание научной степени доктора наук.

Ткачук Н. Н. предложил новые подходы к описанию динамики механических виброударных систем. Получены важные научные и практические результаты, использованные при проектировании и при изготовлении изделий на предприятиях «Азовмаш». В частности, продемонстрированы возможности применения предложенной технологии численного моделирования при многовариантных исследованиях напряженно-деформированного состояния контактирующих сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций. Комплекс разработанных моделей передан для использования при решении прикладных задач обоснования конструктивно-технологических решений и параметров конструкций ряда технологических машин для операций перемещения, перегрузки и транспортировки.

Научные и практические результаты, полученные Ткачуком Н. Н. в ходе работы над диссертацией, представляют несомненную научную и практическую ценность и могут быть рекомендованы для внедрения на других предприятиях в КБ и НИИ промышленности Украины.

Члены комиссии

Зам.директора по МО и ИТ **М.М. Пеклич**

Главный сварщик **Е.Г. Хоровец**

Главный конструктор **Е.Н. Барчан**

УТВЕРЖДАЮ

Директор, генеральный конструктор

НИЦ УК «РТХ»

В.С. Маринюк

«19» декабря 2017 г.

Акт

о внедрении диссертационной работы

старшего научного сотрудника кафедры информационных

технологий и систем колесных и гусеничных машин имени А. А. Морозова

Национального технического университета

«Харьковский политехнический институт»

Ткачука Николая Николаевича

Комиссия ООО «Научно-инженерный центр Управляющей компании «РэйлТрансХолдинг» (НИЦ УК «РТХ») в составе: генерального конструктора КБ тяжёлого машиностроения к.т.н. Гусева Ю.Б., учёного секретаря к.т.н. Бердник И.В., главного экономиста Светличной В.А., начальника группы технических расчётов Граборова Р.В., работавшая в период с 12 по 15 декабря 2017 г., установила, что в ходе разработки и освоении полувагона в НИЦ УК «РТХ» были использованы теоретические разработки, полученные старшим научным сотрудником кафедры информационных технологий и систем колесных и гусеничных машин имени А. А. Морозова Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» Ткачуком Николаем Николаевичем при работе над диссертацией на соискание научной степени доктора технических наук.

Ткачуком Н. Н. предложены новые подходы к описанию элементов машиностроительных конструкций при статическом и динамическом нагружении и к исследованию их напряженно-деформированного состояния, устойчивости и собственных колебаний; получены важные научные и практические результаты, использованные при проектировании, подготовке производства и изготовлении изделий на предприятиях УК «РТХ». В частности, продемонстрированы возможности применения предложенной технологии численного моделирования при многовариантных исследованиях напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем. Комплекс разработанных моделей передан для использования при решении прикладных задач обоснования конструктивно-технологических решений и параметров конструкций изделий подвижного состава железных дорог и подъемно-транспортного оборудования.

Получен экономический эффект за счет сокращения сроков проектирования, снижения металлоемкости и повышения характеристик изделий в сумме 275,4 тыс. грн.

Научные и практические результаты, полученные Ткачуком Н. Н. в ходе работы над диссертацией, представляют несомненную практическую ценность и могут быть рекомендованы для внедрения на других предприятиях, в КБ и НИИ промышленности Украины.

Члены комиссии

( ) Гусев Ю.Б.
( ) Бердник И.В.
( ) Светличная В.А.
( ) Граборов Р.В.

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор НТУ "ХПІ"
_______ Р.П. Мигущенко
«__» 06 _____ 2019 р.

Акт
про впровадження результатів дисертаційної роботи
Ткачука Миколи Миколайовича
у навчальний процес
Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»

Комісія у складі:

1. Єпіфанов В.В. - директор ННІ Механічної інженерії і транспорту НТУ «ХПІ»,
2. Волонцевич Д.О. - завідувач кафедри інформаційних технологій і систем колісних та гусеничних машин імені О.О. Морозова (ІТС КГМ),
3. Зарубіна А.О. - професор кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів машин",

що працювала у період з 03.06.2019р. по 11.06.2019р. на кафедрах ТММіСАПР та ІТС КГМ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ»), установила, що у навчальний процес цих кафедр (навчальні дисципліни «Прикладна теорія пружності», «Чисельні методи», «Сучасні методи математичного та комп'ютерного моделювання», «Механіка суцільного середовища», «Проектування складних систем») упроваджені математичні моделі та спеціальне програмне забезпечення для дослідження деформування матеріалів та напружено-деформованого стану елементів транспортних, енергетичних і технологічних машин, запропоновані у дисертаційній роботі здобувача Ткачука Миколи Миколайовича.

Зазначені розробки Ткачука М.М. дають можливість істотно підвищити рівень викладання із зазначених дисциплін, допомагають студентам освоїти сучасні чисельні методи, програмне забезпечення та апаратні засоби для дослідження та оцінки технічних характеристик машин, а також застосовувати розроблені моделі, методи і підходи при виконанні курсових і дипломних робіт.

Члени комісії:

_______ В.В. Єпіфанов

_______ Д.О. Волонцевич

_______ А.О. Зарубіна

Довідка

про впровадження результатів дисертаційних досліджень здобувача

Ткачука Миколи Миколайовича

Ткачук М.М. приймав участь як виконавець, керівник дослідницьких груп та науковий керівник у виконанні наступних науково-дослідницьких та науково-технічних робіт за тематичним планом Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ»):

1. Прикладна держбюджетна робота «Розробка спеціалізованих програмно-модельних комплексів для комп'ютерного моделювання контактної взаємодії та синтезу форми складнопрофільних тіл» (№ д.р. 0113U000420).
2. Прикладна держбюджетна робота «Розробка методів та моделей механіки контактної взаємодії складнопрофільних тіл методом граничних елементів» (№ д.р. 0115U000521).
3. Прикладна держбюджетна робота «Забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей» (№ д.р. 0117U004880).
4. Договір №ДЗ/55–2015 «Розроблення технології дискретного зміцнення для збільшення ресурсу елементів конструкцій військової та цивільної мобільної техніки» (№ ДР 0115U006518).
5. Договір № 12673 «Аналіз технічних характеристик елементів двигунів типу 6ТД і технологічних систем для виготовлення військових гусеничних і колісних машин». Замовник – ДП «Завод ім. В.О. Малишева».
6. Договір про співробітництво із ДП «Завод ім. В.О. Малишева», м. Харків.
7. Договір про співробітництво із ПАТ «Азовмаш», м. Маріуполь.
8. Договір про співробітництво із ДП «Харківське конструкторське бюро з машинобудування О.О. Морозова», м. Харків.
9. Договір про співробітництво із ДП «Харківське конструкторське бюро з двигунобудування», м. Харків.

За цими договорами і темами були виконані роботи із розробки методів та моделей для дослідження деформування волоконних матеріалів і контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій та технологічних систем для їх виготовлення. Розроблені рекомендації, передані та упроваджені у виробництво.

Результати досліджень за дисертацією Ткачука М.М. упроваджені за переліченими роботами, що дало можливість досягнути економічного ефекту у дольовому розмірі, що складає 985,0 тис. грн. Розмір ефекту визначено згідно актів упровадження з урахуванням особистого вкладу здобувача Ткачука М.М.

Проректор НТУ «ХПІ» — А.П. Марченко

Завідувач кафедри інформаційних технологій і систем колісних та гусеничних машин імені О.О. Морозова — Д.О. Волонцевич

Відповідальний виконавець та науковий керівник тем і договорів — А.В. Грабовський

11.06.2019 р.