

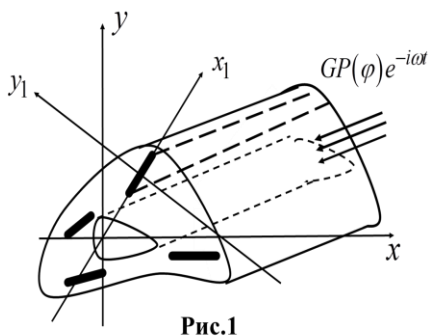
# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРА З СИСТЕМОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ЗА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Попов В. Г., Кирилова О. І

Національний університет «Одеська морська академія»  
[olga.i.kyrylova@gmail.com](mailto:olga.i.kyrylova@gmail.com), [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

Деталі сучасних машин та будівельних конструкцій досить часто містять технологічні дефекти і підкріплюючі елементи, які можуть розглядатися як тонкі жорсткі включення. Але подібні включення є джерелом локальної концентрації напружень, яка може викликати утворення тріщин і руйнування. Математичне моделювання напруженого стану в пружних тілах, що містять тонкі жорсткі включення, особливо актуально в умовах динамічного, зокрема, гармонічного навантаження. Це пов'язано з тим, що в стані резонансу концентрація напружень в околі дефекту значно посилюється. Для розв'язання таких задач за традиційною схемою методом граничних інтегральних рівнянь отримуємо систему зв'язаних інтегральних рівнянь і на поверхнях дефектів, і на межі тіла, що значно ускладнює числову реалізацію цього методу, особливо у випадку великої кількості дефектів і неоднотіпних областей. В подальшій роботі для визначення напруженого стану в порожнинному циліндрі довільного поперечного перерізу з системою тонких жорстких включень пропонується підхід, розглянутий в [1] для аналогічного циліндра з системою тріщин.

## Постановка задачі.



Розглядається порожнинний циліндр з твірними, паралельними осі  $Oz$ , переріз якого площиною  $xOy$  являє собою двозв'язну плоску область, що обмежена довільними замкненими гладкими кривими (Рис.1). Ці криві в полярній системі координат з полюсом у точці  $O$  і віссю  $Oz$ , визначаються рівняннями:  $r = r_0 \psi_0(\varphi)$  – зовнішня,  $r = r_1 \psi_1(\varphi)$  – внутрішня границі,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . У

циліндрі міститься  $N$  наскрізних тонких жорстких включень у вигляді пластин малої товщини  $h$ , що у площині  $xOy$  не виходять за межі перерізу і займають відрізки  $2a_i, i = \overline{1, N}$ . Зовнішня поверхня циліндра знаходиться під дією зсувного вздовж осі  $Oz$  навантаження  $P(\varphi)e^{-i\omega t}$ , внаслідок чого в ньому відбуваються коливання повздовжнього зсуву. Множник  $e^{-i\omega t}$  всюди далі опущений. При таких умовах відмінною від нуля є тільки  $z$ -компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівнянню Гельмгольца:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1)$$

де  $\kappa_2 = \frac{\omega}{c_2}$ ;  $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ;  $\rho$  – густина матеріалу циліндра.

Зовнішня поверхня циліндра вважається завантаженою:

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0 \psi_0(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2)$$

внутрішня – нерухомою:

$$w(r_1 \psi_1(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (3)$$

Для формулювання граничних умов на включеннях з кожним з них пов'язується локальна система координат  $x_k O_k y_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  (Рис.1), що зв'язані з глобальною системою та між собою так:

$$\begin{cases} x = c_k + x_k \cos \alpha_k - y_k \sin \alpha_k, \\ y = d_k + x_k \sin \alpha_k + y_k \cos \alpha_k. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_l = (c_k - c_l) \cos \alpha_l + (d_k - d_l) \sin \alpha_l + x_k \cos(\alpha_k - \alpha_l) - y_k \sin(\alpha_k - \alpha_l), \\ y_l = -(c_k - c_l) \sin \alpha_l + (d_k - d_l) \cos \alpha_l + x_k \sin(\alpha_k - \alpha_l) + y_k \cos(\alpha_k - \alpha_l), \end{cases} \quad (5)$$

$k, l = 1, 2, \dots, N.$

Локальні та полярна система координат пов'язані наступно:

$$\begin{cases} x_l = (r \cos \varphi - c_l) \cos \alpha_l + (r \sin \varphi - d_l) \sin \alpha_l, \\ y_l = (r \sin \varphi - d_l) \cos \alpha_l - (r \cos \varphi - c_l) \sin \alpha_l. \end{cases} \quad (6)$$

Між циліндром та включеннями відбуваються умови повного зчеплення:

$$w_k(x_k, \pm 0) = d_k, \quad |x_k| < a_k. \quad (7)$$

Також на поверхнях включень розривні дотичні напруження зі стрибками

$$\langle \tau_{zy_k}^k \rangle = G(\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0)) = \chi_k(x_k). \quad (8)$$

У рівності (7)  $d_k$  – амплітуди поздовжніх коливань включень, що визначаються з рівняння руху включення як жорсткого тіла:

$$-m_k d_k \omega^2 = F_k + \int_{-a_k}^{a_k} \chi_k(\eta) d\eta, \quad m_k = 2a_k h_k \rho_k,$$

де  $\rho_k$  – густини включень,  $F_k$  – зовнішні сили, що діють на включення. За їх відсутності  $F_k = 0$ .

За цих умов слід дослідити напружений стан поблизу включень.

**Розв'язання задачі.** Для кожного включення в  $x_k O_k y_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  будується розривний розв'язок [2]:

$$w_k^{(d)}(x_k, y_k) = \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\chi_k(\eta)}{G} r_2(\eta - x_k, y_k) d\eta \quad (9)$$

де  $r_2(\eta - x_k, y_k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_k)^2 + y_k^2}\right)$ ,  $H_0^{(1)}$ —функція Ханкеля.

Далі, таким же чином, як і в [1], переміщення подається у вигляді:

$$w^{(g)}(r, \varphi) = \sum_{k=1}^N w_k^{(g)}(r, \varphi) + w_0^{(g)}(r, \varphi), \quad (10)$$

В (10)  $w_0^{(g)}(r, \varphi)$ —невідома функція, яка є розв'язком рівняння Гельмгольца (1) і за рахунок якої будуть задовольнятися умови (2), (3) на поверхні циліндра;  $w_l^{(g)}(r, \varphi)$ —розривні розв'язки (9) після переходу до полярних координат.

Невідома функція розшукується у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівняння Гельмгольца (1)

$$w_0^{(g)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{s=1}^M (A_s g_s(r, \varphi) + B_s h_s(r, \varphi)), \quad (11)$$

$$h_{2m-1}(r, \varphi) = H_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad h_{2m}(r, \varphi) = H_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi;$$

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi.$$

Функції  $g_s(r, \varphi), h_s(r, \varphi)$  лінійно незалежні і утворюють повну замкнену систему в області перерізу.

Далі переміщення подаються аналогічно (11) у вигляді

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^N w_k^l(x_k, y_k), \quad (12)$$

де  $w_k^0(x_k, y_k)$  отримано з  $w_0^{(g)}(r, \varphi)$  після перетворень координат за (6), а  $w_k^l(x_k, y_k)$  в результаті підстановки в  $w_l^{(g)}(r, \varphi)$   $x_l, y_l$  за (5). Для задовільнення умов на включеннях слід в (7) підставити подання (12):

$$w_k^0(x_k, \pm 0) + \sum_{l=1}^N w_k^l(x_k, \pm 0) = d_k. \quad (13)$$

З (13) отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно стрибків напружень:

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{4} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\chi_k(\eta)}{G} H_0^{(1)}(\kappa_2 |\eta - x_k|) d\eta - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-a_l}^{a_l} \frac{\chi_l(\eta)}{G} H_0^{(1)}(\kappa_2 R_{kl}) d\eta = \\ & = d_k - r_0 \sum_{s=1}^M (A_s g_s(x_k, \pm 0) + B_s h_s(x_k, \pm 0)), \quad k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (14)$$

До (14) слід додати також рівності для визначення невідомих амплітуд включень  $d_k$ , що отримуються з рівняння руху:

$$d_k^0 = -\frac{1}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \bar{h}_k \gamma_k} \int_{-1}^1 \frac{\chi_k(a_k \tau)}{G} d\tau;$$

в приводить до системи інтегральних рівнянь, яка після відокремлення сингулярних складових набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_k(a_k \tau)}{G} \left[ \gamma_k \ln|\tau - \varsigma| + \gamma_k Q_k(\tau - \varsigma) + \frac{\pi}{\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \bar{h}_k \gamma_k} \right] d\tau + \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_l(a_l \tau)}{G} F_{kl}(\tau, \varsigma) d\tau = \sum_{s=1}^M \left( A_s f_{sk}^{(1)}(\varsigma) + B_s f_{sk}^{(2)}(\varsigma) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Внаслідок лінійності (15) невідомі функції подаються у вигляді

$$\frac{\chi_k(a_k \tau)}{G} = \sum_{s=1}^M \left( A_s \varphi_{sk}^{(1)}(\tau) + B_s \varphi_{sk}^{(2)}(\tau) \right), \quad (16)$$

після чого їх підстановка в (15) трансформує останню в сукупність  $2M$  систем інтегральних рівнянь відносно невідомих  $\varphi_{sk}^{(i)}(\tau)$ ,  $i=1,2$ ;  $s=\overline{1,M}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(i)}(\tau) \left[ \gamma_k \ln|\tau - \varsigma| + \gamma_k Q_k(\tau - \varsigma) + \frac{\pi}{\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \bar{h}_k \gamma_k} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 \varphi_{sl}^{(i)}(\tau) F_{kl}(\tau, \varsigma) d\tau = f_{sk}^{(i)}(\varsigma), \quad i=1,2; s=\overline{1,M}. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язання інтегральних рівнянь (17) ґрунтується на поданні похідних невідомих функцій у вигляді [3]

$$\varphi_{sk}^{(i)}(\tau) = \frac{\psi_{sk}^{(i)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (18)$$

і наближенні функцій  $\psi_{sk}^{(i)}(\tau)$  таким інтерполяційним багаточленом:

$$\psi_{sk}^{(i)}(\tau) = \sum_{m=1}^n \left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)}, \quad (19)$$

де  $T_n(\tau)$  – багаточлен Чебишева;  $\tau_m$  – його корені,  $\left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m = \psi_{sk}^{(i)}(\tau_m)$ .

Формули (18), (19) дають можливість скористатися для розв'язання рівнянь методом механічних квадратур з використанням як точки колокації коренів багаточлена Чебишева  $U_{n-1}(\varsigma)$ . Інтеграл з логарифмічною особливістю обчислений за формулою [4]:

$$\int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(i)}(\tau_m) \ln|\tau_m - \varsigma_j| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m \left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m C_{jm}, \quad (20)$$

$$C_{jm} = \ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\cos(p\beta_m) \cos p\sigma_j}{p}, \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}; \sigma_j = \frac{j\pi}{n+1}; a_m = \frac{\pi}{n}.$$

В результаті отримано сукупність добре обумовлених систем лінійних рівнянь відносно вузлових значень  $\left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m \left[ \gamma_k C_{jm} + \gamma_k Q_k \left( \tau_m - \zeta_j \right) + \frac{\pi}{\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \bar{h}_k \gamma_k} \right] +$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N a_m \left( \psi_{sk}^{(i)} \right)_m F_{kl} \left( \tau_m, \zeta_j \right) = f_{sk}^{(i)} \left( \zeta_j \right), \quad j=1, n; \quad k=1, N; \quad s=1, M, \quad i=1, 2. \quad (21)$$

Залишилось визначити невідомі коефіцієнти  $A_s$ ,  $B_s$  у (11). Для цього слід задовольнити умови на границях циліндра (2), (3). Для реалізації (2) знаходиться напруження

$$\tau_{\bar{n}z} \left( r_0 \psi_0(\varphi), \varphi \right) = \tau_{xz} \left( r_0 \psi_0(\varphi), \varphi \right) c_x + \tau_{yz} \left( r_0 \psi_0(\varphi), \varphi \right) c_y. \quad (22)$$

У формулі (22)  $c_x$ ,  $c_y$  – напрямні косинуси вектора нормалі.

Після підстановки у (22) знайдених виразів для напружень, представлення невідомих функцій (16) задовольняються умови на зовнішній

$$\sum_{s=1}^M A_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(1)}(\tau) G_k(\tau, \varphi) d\tau + F_s^{(1)}(\varphi) \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^M B_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(2)}(\tau) G_k(\tau, \varphi) d\tau + F_s^{(2)}(\varphi) \right) = P(\varphi) \quad (23)$$

та на внутрішній поверхнях циліндра:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(1)}(\tau) U_k(\tau, \varphi) d\tau + g_s \left( r_1 \psi_1(\varphi), \varphi \right) \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^M B_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_{sk}^{(2)}(\tau) U_k(\tau, \varphi) d\tau + h_s \left( r_1 \psi_1(\varphi), \varphi \right) \right) = 0. \quad (24)$$

Наближення (18) дає можливість замінити інтеграли в (23), (24) інтегральними сумами з використанням квадратурної формулою Гаусса-Чебишева, після чого, застосувавши метод колокації у вузлах  $\sigma_r = \frac{2\pi r}{M}$ ,  $r=1, \dots, M$  з (23), (24) отримано систему  $2M$  лінійних рівнянь для визначення  $A_s$  та  $B_s$ .

Концентрація напружень поблизу тонких жорстких включень характеризується КІН [5], що вводяться таким чином:

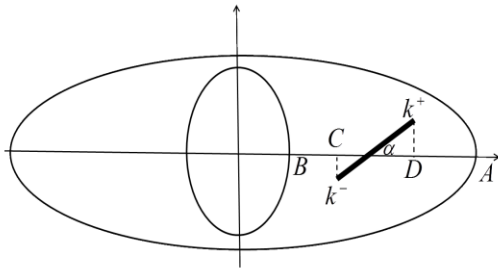
$$\begin{bmatrix} \tau_{zy_1} \\ \tau_{zy_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^\pm}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + O(1), \quad r > 0.$$

Після розв'язання (21) та системи, отриманої після задовольнення умов на границях, для них знайдено безрозмірні наближені значення:

$$k_l^\pm = \frac{K_l^\pm}{G\sqrt{2a_l}} = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \left( \sum_{s=1}^M A_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^{(1l)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\pm 1} + \sum_{s=1}^M B_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^{(2l)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\pm 1} \right),$$

де  $\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ .

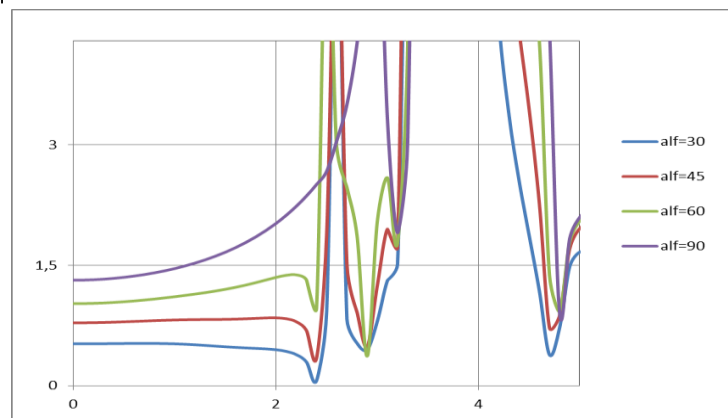
**Результати числових досліджень.** Як приклад розглядався циліндр з перерізом, обмеженим двома еліпсами (рис. 2).



Вважалося, що зовнішня межа знаходиться під навантаженням  $P(\varphi) = \sin 2\varphi$ , ексцентриситети внутрішнього і зовнішнього еліпсів однакові  $\varepsilon = 0,5$ , відношення півосей еліпсів  $r_1/r_0 = 0,5$ .

**Рис.2. Переріз циліндра з включенням**

Досліджувалась залежність абсолютних значень КІН від безрозмірного хвильового числа  $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$  для різних кутів нахилу включення стосовно меж перерізу. Рис. 3 відповідає випадку нахиленого включення фіксованої довжини, з центром включення на рівній відстані від меж перерізу. Довжина включення дорівнює одній третій відстані між вершинами еліпсів  $AB$ , та. Як показав аналіз розрахунків, поведінка КІН ідентична для обох вершин включення, але  $|k^-| < |k^+|$ . Тому результати числових досліджень поведінки абсолютних значень КІН у частотній області, зокрема їхнього виходу на резонансний режим, наведено для  $|k^+|$  (рис. 3):



**Рис. 3. Залежність поведінки КІН від частоти за зміни кута нахилу включення**

Аналіз графіків показує, що зміна кута нахилу включення суттєво впливає на кількість та значення резонансних частот. Для  $\alpha = 90^\circ$  відсутній резонанс при  $\kappa_0 \approx 2,6$ , який спостерігається для інших значень кута нахилу. Однак всі розглянуті випадки характеризуються резонансною поведінкою КІН, коли  $\kappa_0 \approx 3,8$ . Слід зазначити, що тип дефекту при такому розташуванні не впливає на резонансні частоти, як можна бачити в [1], де проводились аналогічні дослідження для випадку тріщини. Проте, якщо до досягнення першої частоти резонансу за збільшення кута нахилу включення КІН збільшуються, то у випадку тріщини навпаки, зменшуються.

**Висновки.** Задачу розв'язано аналітично-числовим методом визначення динамічних напружень у порожнистому циліндричному тілі довільного

перерізу з тонкими жорсткими включеннями за антиплоскої деформації, що дозволяє розв'язувати окремо інтегральні рівняння на включеннях та задовольняти умови на межі тіла.

Запропонований метод дозволяє наближено обчислювати КІН та досліджувати вплив на їхні значення геометричних параметрів включень і циліндра в досить широкому частотному діапазоні. Також його можна використовувати у випадку стану плоскої деформації. Це підтверджують результати робіт [6], [7], де подібні задачі розв'язано для циліндричного тіла, перерізом якого є однозв'язна область. Певні труднощі під час застосування цього методу виникають при наближенні дефекту до межі і негладкої межі циліндра.

Показано, що присутність включень у пружному порожнистому циліндрі за гармонічного навантаження супроводжується як інтенсивністю динамічних напружень в околі дефектів, так і резонансним характером їхньої зміни внаслідок генерації хвильового процесу в обмеженій області.

У розглянутому частотному діапазоні виявлено можливості досягнення одного або двох резонансів залежно від кута нахилу включення стосовно межі тіла. Зміна кута нахилу суттєво впливають на значення КІН та стрімкість їхнього виходу на резонансний режим з низькочастотної області.

## Література

1. Кирилова О.І., Попов В.Г. Напружений стан порожнинного циліндра з системою тріщин за гармонічних коливань повздовжнього зсуву. *Проблеми машинобудування*. Т.22. №1. 2019, С. 16-24.
2. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение. *Динам. системы*. 1993. Вып.12. С. 35–41.
3. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
4. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ, 1948. 296 с.
5. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. - Львів, 2007. – 716 с.
6. Кирилова О. І., Михаськів В. В. Плоска динамічна задача для циліндричного тіла довільного перерізу з тонким жорстким включенням. *Вісн.Київ. нац.ун-ту. Сер. Фіз.-мат.науки*. 2015. №5. С.167–173.
7. Кирилова О. І., Попов В. Г. Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з тунельною тріщиною при коливаннях в умовах плоскої деформації. *Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз-мат. науки*. 2017. №3. С.71–74.