ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПУТЁМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

академик НАН Украины, д. т. н. Ю. М. Мацевитый,
к. т. н. В. О. Повгородний, к. ф.-м. н. Н. А. Сафонов

*Институт проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины; Украина*

Математическая модель явления термоупругости

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f=0,\ l_1<x<l_2, \quad (1)$$

$$T(l_1)=T_1; \quad -k\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha_{\text{T}}(T-T_{\text{c}}),\ x=l_2, \quad (2)$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(\lambda+2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \ l_1<x<l_2, \quad (3)$$

$$u(l_1)=0,\ \ \sigma(l_2)=0, \quad (4)$$

где T, T_1, T_{c} – температура стержня, левого конца и среды соответственно,
u – перемещение, f – мощность распределённого источника тепла,
k – коэффициент теплопроводности, x – пространственная координата,
α_{T} – коэффициент теплоотдачи, λ,μ – коэффициенты Ламе,
α – коэффициент линейного температурного расширения, σ – напряжение.

Постановка обратной задачи термоупругости

По измеренному на конце стержня $x=l_2$ перемещению

$$u_{\exp}=u(l_2)(1+\delta), \quad (5)$$

δ – погрешность, найти коэффициент теплоотдачи α_{T}.

Условие теплообмена (2) заменим следующим $-k\frac{\partial T}{\partial x}=Q,\ \ x=l_2,$

где Q – тепловой поток, тогда $\alpha_{\text{T}}=\dfrac{Q}{T(l_2)-T_{\text{c}}}.$

Методологический подход к решению задачи (1)-(5)

Метод функций влияния

Представим T и u в следующем виде: $T = T_0 + \gamma\theta, \quad u = v + \gamma w.$

где γ – параметр.

Задача теплопроводности для температуры T_0

$$k\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + f = 0, \quad l_1 < x < l_2, \quad T_0(l_1) = T_1, \quad -k\frac{\partial T_0}{\partial x} = 0, \ x = l_2.$$

γ

Задача теплопроводности для температуры θ

$$k\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad l_1 < x < l_2, \quad \theta(l_1) = 0, \quad -k\frac{\partial \theta}{\partial x} = q_0, \ x = l_2.$$

q_0 – единичный тепловой поток.

Задача термоупругости для перемещения v

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T_0}{\partial x} = 0, \quad l_1 < x < l_2, \quad v(l_1) = 0, \quad \sigma(l_2) = \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\right]\bigg|_{x = l_2} = 0.$$

Задача термоупругости для перемещения w

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad l_1 < x < l_2, \quad w(l_1) = 0, \quad \sigma(l_2) = \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\right]\bigg|_{x = l_2} = 0.$$

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова

$$J=\left(u-u_{\exp}\right)^2+\xi\left(k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l_2}+Q\right)^2,$$

где ξ – параметр регуляризации, $\left(k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l_2}+Q\right)^2$ – стабилизирующий функционал.

$u,\ u_{\exp}$ – перемещение моделируемое и из эксперимента соответственно.

$$J=\left(v(l_2)+\gamma w(l_2)-u_{\exp}\right)^2+\xi\left(k\left.\frac{\partial T_0}{\partial x}\right|_{x=l_2}+k\gamma\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=l_2}+\gamma q_0\right)^2,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma}=\left(v(l_2)+\gamma w(l_2)-u_{\exp}\right)w(l_2)+\xi\left[k\left.\frac{\partial T_0}{\partial x}\right|_{x=l_2}+\gamma\left(k\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=l_2}+q_0\right)\right]\left(k\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=l_2}+q_0\right)=0.$$

$$\gamma=\frac{\left(u_{\exp}-v(l_2)\right)w(l_2)-\xi k\left.\frac{\partial T_0}{\partial x}\right|_{x=l_2}\left(k\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=l_2}+q_0\right)}{w^2(l_2)+\xi\left(k\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=l_2}+q_0\right)^2}.$$

Тепловой поток на конце стержня $x=l_2$ определится как $Q=\gamma q_0$.

Результаты идентификации

Результаты идентификации теплового потока и коэффициента теплоотдачи при отсутствии мощности источников теплоты (f=0).			
δ	$Q, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	$\alpha_T, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$	$\Delta\alpha_T$
0,01	–749,873	49,976	0,024
0,03	–748,792	49,785	0,215
0,05	–746,631	49,404	0,596
0,07	–743,392	48,841	1,159
0,1	–736,496	47,668	2,332

Результаты идентификации теплового потока и коэффициента теплоотдачи при мощности источников теплоты f=1000,0			
δ	$Q, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	$\alpha_T, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$	$\Delta\alpha_T$
0,01	–437,24	49,975	0,025
0,03	–436,061	49,620	0,438
0,05	–433,332	48,748	1,252
0,07	–429,241	47,558	2,442
0.1	–420,550	45,146	4,854

Представленные результаты получены для следующих исходных данных задачи:

$\lambda = 12.4053 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 8.2669 \cdot 10^4$ МПа, $\alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \dfrac{1}{\text{град}}$, $k = 30.0 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, $T_1 = 10^{\circ}$ С, $T_c = 50^{\circ}$ С.

Значение коэффициента теплоотдачи при решении прямой задачи: $\alpha_т = 50 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$.

Значение теплового потока прямой задачи: при $f = 0$ $Q = -750.0 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$,

а при $f = 1000.0 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ $Q = -437.5 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Заключение

Применение представленного метода дает возможность идентифицировать тепловой поток и коэффициент теплоотдачи на границе тела при определённой погрешности измерения перемещения. Преимущества данного метода: слабая чувствительность к погрешностям измерений; возможность использования экспериментальной информации как от одного, так и от нескольких датчиков; применимость для неоднородных сред; одновременное восстановление теплового потока на разных частях поверхности конструктивного элемента; простота программирования с возможностью распараллеливания вычислительного процесса, что отвечает современным требованиям, предъявляемым к методам и алгоритмам решения прямых и обратных задач. К недостаткам предлагаемого метода можно отнести возрастание погрешности идентификации при увеличении величины.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ