

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ ПУТЁМ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

академик НАН Украины, д. т. н. Ю. М. Мацевитый,
к. ф.-м. н. Н. А. Сафонов, аспирант Гроза И. В.

*Институт проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины; Украина*

Постановка обратной задачи теплопроводности

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_0 (T - T_0), \quad x = 0, \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_l (T - T_l), \quad x = l, \quad (3)$$

$$T(x_k) = T_k^{\text{экс}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где T – температура стержня, x – пространственная координата,

$F(x)$ – мощность распределённого источника тепла,

λ – коэффициент теплопроводности,

$\alpha_0, \alpha_l, T_0, T_l$ – коэффициенты теплоотдачи и температуры сред при $x = 0$ и $x = l$ соответственно.

$T_k^{\text{экс}}, k = \overline{1, n}$ – температуры полученные в результате теплофизического эксперимента или при решении прямой задачи (1)-(3).

По данным (4) необходимо найти мощность источника тепла $F(x)$.

Метод функций влияния для задачи (1)-(4)

$$F(x) = \sum_{k=0}^n F_k \varphi_k(x) \quad \text{– мощность источника тепла,}$$

где $\varphi_k(x)$ – линейные сплайны Шёнберга, $F_k, k = \overline{0, n}$ – параметры.

$$T(x) = \theta(x) + \sum_{k=0}^n F_k W_k(x) \quad \text{– температура,}$$

где θ – решение задачи теплопроводности:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha_0 (\theta - T_0), \quad x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha_l (\theta - T_l), \quad x = l,$$

а функции влияния $W_k(x), k = \overline{0, n}$ определяются из решения

следующих задач:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial W_k}{\partial x} \right) + \varphi_k(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad \lambda \frac{\partial W_k}{\partial x} = \alpha_0 W_k, \quad x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial W_k}{\partial x} = \alpha_l W_k, \quad x = l.$$

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова

$$J = \int_0^l [T(x) - T^{\text{эк}}(x)]^2 dx + \xi \Omega[F(x)] + \alpha \Delta[F(0), F(l)],$$

где $T(x)$ – расчётная температура, $T^{\text{эк}}(x)$ – температура из эксперимента или из решения прямой задачи (1)-(3), ξ – параметр регуляризации,

$$\Omega[F(x)] = \int_0^l \left[F^2(x) + \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad \text{– стабилизирующий функционал,}$$

$\Delta[F(0), F(l)]$ – квадратичный функционал, представляющий отклонение расчётных от эталонных значений мощности.

$$\Delta[F(x)] = V_0 [F(0) - f_0]^2 + V_l [F(l) - f_l]^2, \quad \text{где } V_0, V_l \text{ – весовые множители.}$$

Функционал J после
подстановки
температуры и
мощности:

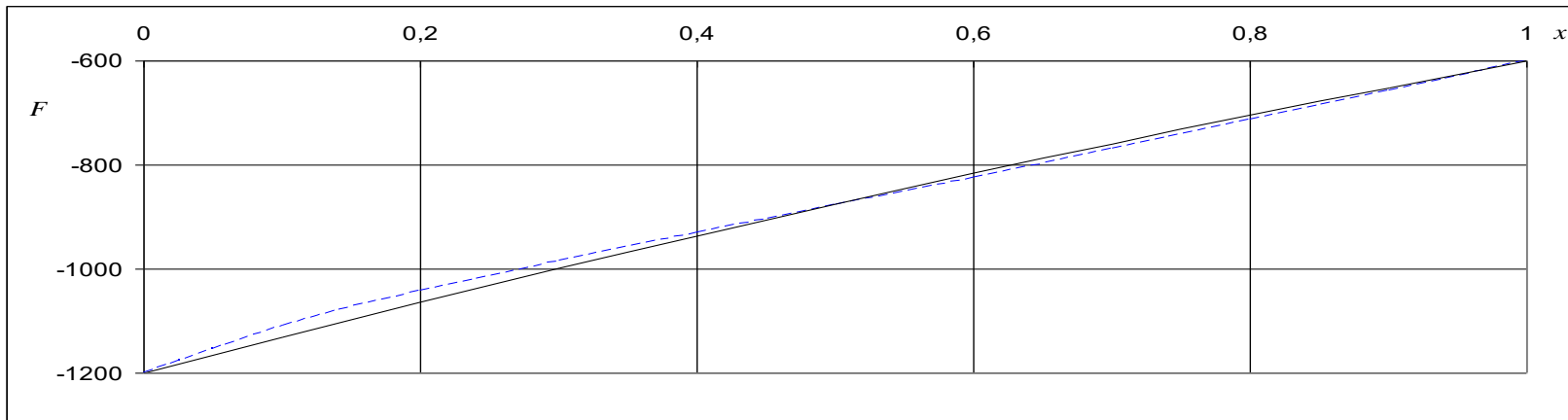
$$J(F_0, F_1, \dots, F_n) = \int_0^l \left[\theta(x) + \sum_{k=0}^n F_k W_k(x) - T^{\text{эк}}(x) \right]^2 dx + \\ + \xi \int_0^l \left\{ \left[\sum_{k=0}^n F_k \varphi_k(x) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^n F_k \varphi'_k(x) \right]^2 \right\} dx + \xi V_0 [F_0 - f_0]^2 + \xi V_l [F_l - f_l]^2.$$

Система уравнений
относительно
неизвестного
вектора $F_k, k = \overline{1, n}$:

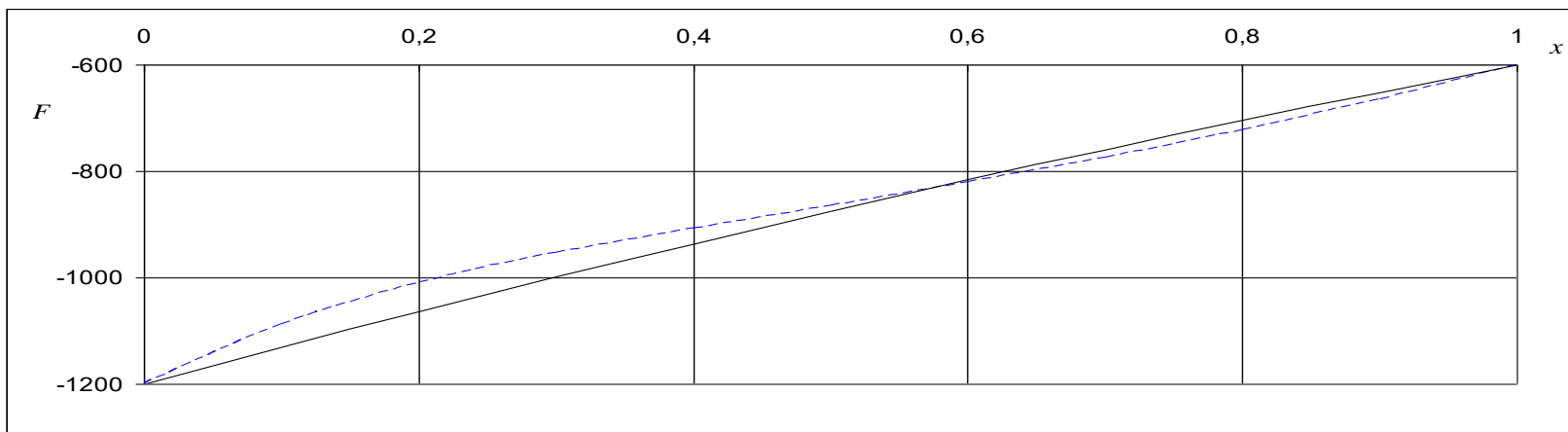
$$\sum_{k=0}^n F_k \left[\int_0^l W_k W_s dx + \xi \int_0^l \varphi_k \varphi_s dx + \xi \int_0^l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} dx \right] + \xi F_0 V + \xi F_l V_l = \\ = \int_0^l [T^{\text{эк}} - \theta] W_s dx + \xi f_0 V + \xi f_l V, \quad s = \overline{0, n}.$$

Результаты идентификации

а)



б)



Мощность источника энергии: сплошная линия – при решении прямой задачи, пунктирная – полученная при решении

ОЗТ при погрешности измерения температуры:

а) $\delta = 0.01$

б) $\delta = 0.02$

Исходные данные: $\lambda = 50.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, $\alpha_0 = 75.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$, $T_0 = 10.0^\circ \text{C}$, $\alpha_l = 50.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$, $T_l = 25.0^\circ \text{C}$.

$F(x) = (-100.0x^2 + 700.0x - 1200.0) \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ – мощность источника тепла в прямой задаче.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ