«ДИНАМІКА, МІЦНІСТЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ В МАШИНОБУДУВАННІ»

Ревенко Віктор Петрович, д-р. фіз.-мат. наук
ORCID: 0000-0002-2616-8747

ПОБУДОВА НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТОВСТИХ ПЛАСТИН

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 79060, Україна, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,

e-mail: victorrev@ukr.net

05-08 жовтня 2020 р., Харків, Україна

Пластини, до яких прикладені силові і температурні навантаження, широко використовують у будівельних, технологічних та інженерних конструкціях [1, 2]. При вивчені пружної рівноваги елементів конструкцій за умов дії силових та температурних навантажень виникає потреба враховувати пружні та теплофізичні властивості матеріалів, а також використовувати розв'язки рівнянь термопружності у найбільш простому вигляді.

Мета роботи полягає у розробці ефективної математичної моделі зведення тривимірного дослідження пружної рівноваги тіл, які знаходяться під впливом інтенсивних силових та температурних навантажень, до двовимірних рівнянь без накладання додаткових математичних обмежень на компоненти напружень і значення пружних та теплофізичних характеристик матеріалу.

Формулювання задачі і подання розв'язку. Розглянемо тривимірну статичну термопружну задачу для товстої пластини товщини h, серединна поверхня якої займає область S і збігається з площиною Oxy декартової системи координат $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Припустимо, що на обох плоских поверхнях пластини ($z = h_j$, $h_1 = h/2$, $h_2 = -h/2$) відсутні нормальні і дотичні навантаження, а задані тільки температури $\mathrm{T}^- = T^+$, де знаки "+", "–" відповідно описують функції на верхній $z = h_1$, або нижній $z = -h_1$ поверхнях. Вважатимемо, що функція температури $\mathrm{T(x,y,z)}$ відома, а на бічній поверхні з серединною лінією, яка відповідає контуру області S, задані відповідні крайові умови. У праці [3] дано методику розв'язку таких тривимірних задач. Загальну задачу розділимо на дві задачі: симетричний згин і симетричний стиск-розтяг пластини вздовж осі Oz

$$u_i(x,y,-z) = u_i(x,y,z),\ i = \overline{1,2},\ \ u_3(x,y,-z) = -u_3(x,y,z), \tag{1}$$

де u_i – переміщення у напрямку відповідних осей. Із цих умов випливає, що нормальні напруження σ_j, $j = \overline{1,3}$ симетричні відносно серединної поверхні S. Термопружні напруження для задачі (1) виразимо через деформації [2]

$$\sigma_k = 2G[\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T], \quad \tau_{kj} = G\gamma_{kj}, k \neq j, \tag{2}$$

де $e = \dfrac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T$ – об'ємне розширення, $\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Співвідношення (2) підставимо у рівняння рівноваги і запишемо рівняння стаціонарної термопружності в переміщеннях [2]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k=\overline{1,3}, \tag{3}$$

$$\nabla^2 T = 0, \; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{4}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт теплового розширення, а відома температура задовольняє рівняння (4).

Використаємо термопружний потенціал [1, 2] і подамо частковий розв'язок рівняння (3) у такому вигляді

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \tag{5}$$

де функція ψ задовольняє рівняння

$$\nabla^2 \psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T. \tag{6}$$

Частковий розв'язок рівнянь (3), (6), який визначається відомою температурою буде мати вигляд

$$\psi = \beta z \Omega + \Psi, \tag{7}$$

де $\beta = \dfrac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha$; Ω, Ψ – гармонічні функції, $\Omega = \int_0^z \mathrm{T} dz$, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial z} = T$.

Якщо використати подання розв'язку рівнянь Ляме [4, 5], в якому не врахована температура, і добавити до нього співвідношення (5), (7), то загальний розв'язок рівнянь (3) можна подати у такому вигляді:

$$u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \tag{8}$$

де $P = z(\Phi + \beta\Omega) + \Psi$; Φ, Ψ, Q – тривимірні гармонічні функції переміщень, Ω, T – відомі гармонічні функції, $\beta = \dfrac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha$, ν – коефіцієнт Пуассона. Бігармонічна функція P з правою частиною задовольняє рівняння

$$\Delta P + \frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 2\frac{\partial}{\partial z}(\Phi + \beta\Omega), \tag{9}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

З умов (2), (8) випливає, що для цього навантаження функції $P,\ \Psi,\ Q,\ T$ будуть парні відносно змінної z, а функція Φ – непарна. Із умов симетричності введених функцій слідують умови:

$$\frac{\partial P^{+}}{\partial z}=-\frac{\partial P^{-}}{\partial z},\ \frac{\partial \Phi^{+}}{\partial z}=\frac{\partial \Phi^{-}}{\partial z},\ \frac{\partial Q^{+}}{\partial z}=-\frac{\partial Q^{-}}{\partial z};\ \Phi^{-}=-\Phi^{+}, \tag{10}$$

Врахуємо подання переміщень (8) і знайдемо деформації, а згідно формул (2) визначимо загальний вираз нормальних

$$\sigma_j=2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2}-(-1)^j\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_2}-2\nu\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}-2\beta T\right],\ j=\overline{1,2},$$

$$\sigma_3=2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}-2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}-2\beta T\right], \tag{11}$$

та дотичних

$$\tau_{12}=G\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right],$$

$$\tau_{j3}=G\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P}{\partial x_3}-4(1-\nu)\Phi\right]-(-1)^j\frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right],\quad j=\overline{1,2} \tag{12}$$

напружень, де $G=E/2(1+\nu)$, E – модулі зсуву і Юнга. Запишемо об'ємне розширення і суму нормальних напружень Θ

$$e=-2(1-2\nu)\frac{\partial}{\partial z}\Phi+2\beta T,\ \ \Theta=-2E\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi+\frac{\alpha T}{1-\nu}\right).$$

Врахувавши, що нормальні напруження σ_3 є незначними і $\sigma_3=0$, коли $z=\pm h_1$, із рівнянь (11) одержимо

$$\frac{\partial P^{+}}{\partial z}=2(2-\nu)\Phi^{+}+2\beta\Omega^{+}, \tag{13}$$

де $\Omega^{+}=\int_0^{h_1}\mathrm{T}dz$.

Використаємо співвідношення (12) і запишемо умови відсутності дотичних навантажень на бічних поверхнях пластини

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial P^{+}}{\partial x_3}-2(1-\nu)\Phi^{+}\right]-\frac{(-1)^j}{2}\frac{\partial^2 Q^{+}}{\partial x_{3-j}\partial x_3}=0,\quad j=\overline{1,2}. \tag{14}$$

Врахуємо співвідношення (13) і спростимо рівняння (14)

$$4\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi^+ + \beta\Omega^+) = (-1)^j \frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3}, \quad j = \overline{1,2}. \tag{15}$$

Із рівнянь (15) випливають такі умови гармонічності на введені функції:

$$\Delta(\Phi^+ + \beta\Omega^+) = 0, \quad \Delta\frac{\partial Q^+}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

Отже, функції $\Phi^+ + \beta\Omega^+$, $\frac{\partial Q^+}{\partial x_3}$ – гармонічні, якщо знаємо Φ^+, то знаємо $\frac{\partial Q^+}{\partial x_3}$.

Використаємо умови симетричності (10), знайдені співвідношення і побудуємо термопружний плоский напружений стан товстої пластини. Для цього підставимо у відомі вирази нормальних і дотичних зусиль в пластині [5] подання напруження (11), (12) і одержимо:

$$T_1 = 2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x\partial y} - 4\nu\Phi^+ - 4\beta\Omega^+\right], \; T_2 = 2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x\partial y} - 4\nu\Phi^+ - 4\beta\Omega^+\right],$$

$$S_{12} = S_{21} = 2G\left[\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x^2}\right)\right], \tag{17}$$

де $\tilde{P} = \int_{-h_1}^{h_1} P dz$, $\tilde{Q} = \int_{-h_1}^{h_1} Q dz$, $\tilde{T} = \int_{-h_1}^{h_1} \mathrm{T} dz = \int_{-h_1}^{h_1} \frac{\partial\Omega}{\partial z} dz = 2\Omega^+$. Після інтегрування рівняння (9), врахування гармонічності функцій і умови (13) запишемо ключові рівняння теорії пластин на базові функції $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, Φ^+

$$\Delta\tilde{P} = -4(1-\nu)\Phi^+, \quad \Delta\tilde{Q} = -2\frac{\partial}{\partial z}Q^+. \tag{18}$$

Зауважимо, що співвідношення (18) співпадають із побудованими в роботі [3] ключовими рівняннями плоского напруженого стану.

Відзначимо, якщо у відомі рівняння рівноваги пластини в зусиллях [5] підставити співвідношення (17), то одержимо рівняння четвертого порядку

$$\Delta\Delta\tilde{P} = 4\beta(1-\nu)\Delta\Omega^+. \tag{19}$$

Рівняння (19) випливає із знайдених ключових рівнянь теорії пластин (16), (18), які одержані нами із тривимірної теорії пружності без використання гіпотез про геометричний характер деформування пластини.

Знаходження напружень в термопружних пластинах за допомогою введених гармонічних і бігармонічних функцій та визначальних рівнянь (16), (18). Використаємо рівняння (16) і виразимо функцію Φ^+

$$\Phi^+ = -\mathrm{h}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \beta\Omega^+, \tag{20}$$

де φ – невідома гармонічна функція. Використаємо вираз (20), співвідношення (15) між гармонічними функціями та одержимо залежність

$$\frac{\partial Q^{+}}{\partial z} = 4h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{21}$$

Врахуємо подання (20), (21) і запишемо загальний розв’язок рівнянь (18):

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)h[y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\omega_1] + hg_1(x, y),$$

$$\tilde{Q} = -4yh\frac{\partial \varphi}{\partial x} + hg_2(x, y), \tag{22}$$

де ω_1 – частковий розв'язок рівняння

$$h\Delta\omega_1 = 2\Omega^{+},$$

g_j – гармонічні функції, які можна подати:

$$g_1 = (1+\nu)h[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}], \quad g_2 = (1+\nu)h[\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}], \tag{23}$$

де $\phi,\ \psi$ – гармонічні функції.

Підставимо функції (20), (22), (23) у співвідношення (17), виразимо зусилля через введені функції і побачимо, що функція ϕ не входить у подання зусиль (18), так що її можна не враховувати.

Отже функції (22) будуть мати такий вигляд

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)h[y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\omega_1] - (1+\nu)h\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\tilde{Q} = -4hy\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1+\nu)h\frac{\partial \psi}{\partial y},\ \ \Phi^{+} = -\mathrm{h}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta\frac{h}{2}\Delta\omega_1, \tag{24}$$

де функції $\omega_1,\ \Omega^{+}$ описують вплив температури на напружений стан пластини, а гармонічні функції $\varphi,\ \psi$ відповідають плоскому напруженому стану [6].

Виразимо зусилля, які явно виражаються тільки через температуру. Для цього в співвідношення (17) підставимо вирази (24), які залежать тільки від температури. Після перетворень одержимо прості формули

$$T_1 = -Eh\alpha\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2},\ T_2 = -Eh\alpha\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2},$$

$$S_{12} = S_{21} = Eh\alpha\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y}. \tag{25}$$

Використаємо подання плоских напружень [6], співвідношення (25) і запишемо подання загальних напружень, які виражаються через знайдені базові функції $\omega_1,\ \varphi,\ \psi$ у виразах (24)

$$\sigma_x = 2E\{y\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^2\partial x} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2}\},$$

$$\sigma_y = 2E\{y\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}\},$$

$$\tau_{xy} = -2E\{y\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x\partial y}\}.$$

Переміщення і деформації в пластині розрахуємо після усереднення формул (8).

Одержані в доповіді вирази напружень, деформацій і переміщень та розроблений в працях [4, 6] аналітично-числовий метод дозволяють розв’язувати різноманітні крайові задачі для термопружних пластин за дії силових та температурних навантажень.

Висновки

На основі тривимірної теорії пружності побудована, без використання гіпотез про нульові дотичні напруження в середині пластини, двовимірна теорія тонких і товстих термопружних пластин, навантажених тільки на своїх сторонах симетрично і паралельно серединній поверхні. Встановлено: що знайдені напруження і переміщення точно дорівнюють відповідним усередненим тривимірної теорії пружності; із одержаних формул випливають подання напружень плоскої задачі теорії пружності.

Література

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
2. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва*:* ГИФМЛ, 1958. 168 с.
3. Revenko V.P. Reduction of a three-dimensional problem of the theory of bending of thick plates to the solution of two two-dimensional problems. *Materials Science*. 2015. Vol. 51. No. 4. P. 785 – 792. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9903-7
4. Revenko V.P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45. No 7. P. 730-741. https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4
5. . Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. Москва: Наука, 1982. 568 с.

6. Revenko V.P., Revenko A.V. Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity *Materials Science*. – 2017. – Vol. **52**, No 6. – P. 811-818.