II Міжнародна науково-технічна конференція
«Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні»
5-8 жовтня 2020 г.
м. Харків

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН,

ЩО ПОСЛАБЛЕНІ ТРІЩИНАМИ

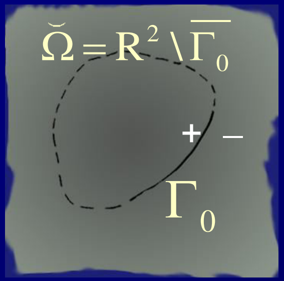
Шувалова Юлія Сергіївна
Харківський національний університет Повітряних сил
м.Харків

Вступ

- В роботе запропоновано варіант метода теорії потенціалів, який дозволяє звести задачу до системи граничних інтегральних рівнянь.
- Метод дослідження базується на схемі, наведеної в [1-2].
- Для нескінченої пластини з тріщиною отримано явний вигляд граничних інтегральних рівнянь для подальшої чисельної реалізації.

1. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems./ Chudinovich I.Yu. // Math. Methods Appl. Sci., -- 1993. -- P. 203--215.
2. Чудинович И.Ю. К решению граничных уравнений в задачах дифракции упругих волн на пространственных трещинах./ Чудинович И.Ю.//Дифференциальные уравнения. 29 (1993), 1648-1651.

Постановка задачі



✓
$$\partial_t^2 u(x,t) + D\Delta^2 u(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in\Omega^{\pm}\times R_+,$$
$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, \qquad x\in\Omega,$$
$$T:\begin{cases} u^+(x,t) = f_1^{\,+}(x,t), \\ \partial_n u^+(x,t) = f_2^{\,+}(x,t), \\ u^-(x,t) = f_1^{\,-}(x,t), \\ \partial_n u^-(x,t) = f_2^{\,-}(x,t), \end{cases} (x,t)\in\Sigma_0^+; \qquad TT:\begin{cases} (Qu)^+(x,t) = g_1^{\,+}(x,t), \\ (-Mu)^+(x,t) = g_2^{\,+}(x,t), \\ (Qu)^-(x,t) = g_1^{\,-}(x,t), \\ (-Mu)^-(x,t) = g_2^{\,-}(x,t), \end{cases} (x,t)\in\Sigma_0^+,$$

де Γ_0 зв`язна частина замкненої кривої Γ класа C^2, $\Sigma_0^+ = \Gamma_0\times R_+$, $\breve{\Omega} = R^2\setminus\overline{\Gamma_0}$, $\breve{G} = \breve{\Omega}\times R_+$.

операція узагальненої сили, що перерізає $Qu = -D\Big(\partial_n\Delta u + (1-\nu)\partial_\tau\big[n_1 n_2(\partial_2^2 u - \partial_1^2 u) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_1\partial_2 u\big]\Big)$,

операція моменту, що згинає $Mu = -D\Big(\Delta u + (1-\nu)\big[2n_1 n_2\partial_1\partial_2 u - n_2^2\partial_1^2 u - n_1^2\partial_2^2 u\big]\Big)$,

$\partial_t = \partial/\partial t$, $D = \dfrac{\hat{D}}{\rho h}$, ρ – поверхнева густина пластини, $\hat{D} = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – її циліндрична жорсткість, ν – коефіцієнт Пуассона матеріала, з якого виготовлена пластина $0<\nu<1/2$.

Фундаментальний розв’язок

$$\partial_t^2 \Phi(x,t) + D\Delta^2 \Phi(x,t) = \delta(x,t),$$
$$\Phi(x,t) = 0, \qquad\qquad t < 0,$$

$\delta(x,t)$ — функція Дірака.

$$\Phi(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}} - \int\limits_{\frac{|x|^2}{4\sqrt{Dt}}}^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu} d\mu,$$

$\theta(t)$ - характеристична функція додатньої напівосі

Потенціали простого та подвійного шарів

$$\vec{\alpha}(x,t)=\left\{\alpha_1(x,t),\alpha_2(x,t)\right\},\ \vec{\beta}(x,t)=\left\{\beta_1(x,t),\beta_2(x,t)\right\},\ (x,t)\in\Sigma=\Gamma\times\mathrm{R},$$

- ✓ $$\left(V\vec{\alpha}\right)\left(x,t\right)=\int_{\Sigma}\left\{\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\alpha_1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\alpha_2(y,\tau)\right\}ds_y d\tau,$$

$$\left(W\vec{\beta}\right)\left(x,t\right)=\int_{\Sigma}\left\{Q_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\beta_1(y,\tau)-M_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\beta_2(y,\tau)\right\}ds_y d\tau$$

- ✓ Формули стрибків (верхній індекс "0" позначає пряме значення відповідного інтеграла)

$$\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=\mp\frac{1}{2}\beta_1\left(x,t\right)+\left(W\vec{\beta}\right)^{0}\left(x,t\right),\qquad \left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=\mp\frac{1}{2}\beta_2\left(x,t\right)+\left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{0}\left(x,t\right),$$

$$\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=\pm\frac{1}{2}\alpha_1\left(x,t\right)+\left(QV\vec{\alpha}\right)^{0}\left(x,t\right),\qquad \left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=\pm\frac{1}{2}\alpha_2\left(x,t\right)+\left(-MV\vec{\alpha}\right)^{0}\left(x,t\right),$$

Граничні системи нестаціонарних рівнянь

$$u(x,t)=\left(W\vec{\beta}\right)\left(x,t\right)+\left(V\vec{\alpha}\right)\left(x,t\right):$$

$$T:\quad \begin{aligned} &\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)+\left(V\vec{\alpha}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=f_1^{\pm}(x,t),\\ &\left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)+\left(\partial_n V\vec{\alpha}\right)\left(x,t\right)=f_2^{\pm}(x,t), \end{aligned} \qquad (x,t)\in\Sigma_0^{+},$$

$$TT:\quad \begin{aligned} &\left(QW\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)+\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=g_1^{\pm}(x,t),\\ &\left(-MW\vec{\beta}\right)^{\pm}\left(x,t\right)+\left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}\left(x,t\right)=g_2^{\pm}(x,t), \end{aligned} \qquad (x,t)\in\Sigma_0^{+}.$$

Однозначну розв'язність поставлених задач було доведено в [3] в однопараметричній шкалі просторів соболевського типу.

3. Гассан Ю.С. Граничні рівняння в задачах динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами/ Гассан Ю.С..// Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки, - 2000. - № 3. - С.105-114 .

Явний вид інтегральних рівнянь

Розглянемо тонку пружну пластину з тріщиною прямокутної форми.

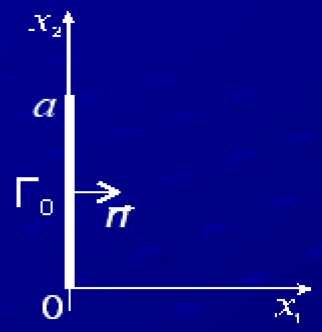


Рис. Нескінченна пластина з тріщиною

Враховуючи формули стрибків, маємо явний вигляд інтегральних граничних рівнянь.

$$\mp\beta_1 + \int\limits_{\Gamma_0} W(x-y,t)\beta_2(y,t) + V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y +$$

$$+\int\limits_0^\infty \int\limits_{\Gamma_0} \tilde{W}(x-y,t-\tau)(\beta_2(y,\tau)-\beta_2(y,t)) + \tilde{V}(x-y,t-\tau)(\alpha_1(y,\tau)-\alpha_1(y,t))dyd\tau = f_1^{\pm}(x,t),$$

$$\mp\beta_2 + \int\limits_{\Gamma_0} \partial_n W(x-y,t)\beta_1(y,t) + \partial_n V(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y +$$

$$+\int\limits_0^\infty \int\limits_{\Gamma_0} \partial_n \tilde{W}(x-y,t-\tau)(\beta_1(y,\tau)-\beta_1(y,t)) + \partial_n \tilde{V}(x-y,t-\tau)(\alpha_2(y,\tau)-\alpha_2(y,t))dyd\tau = f_2^{\pm}(x,t).$$

Враховуючи розташування тріщини, будемо вважати, що $x=(0,x_2)$, $y=(0,s)$.

$$W(x-y,t)=-D\frac{\theta(t)t}{\pi(x_2-s)^2}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}t}\cdot\frac{\nu}{\sqrt{D}}+\int_0^\infty D\frac{\theta(t-\tau)}{\pi\sqrt{D}(x_2-s)^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{2}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}d\tau\approx$$

$$\approx-\frac{\theta(t)t\nu}{\pi(x_2-s)^2}\left(\frac{(x_2-s)^2}{4t}-\frac{(x_2-s)^6}{64Dt^3}\right)+\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{\pi(x_2-s)^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{(x_2-s)^2}{4(t-\tau)}-\frac{(x_2-s)^6}{64D(t-\tau)^3}\right)d\tau=$$

$$=-\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{\nu}{4}+\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{(1+\nu)}{8}\ln t+\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{3+5\nu}{128}\frac{(x_2-s)^4}{Dt^2}$$

$$V\vec{\alpha}(x-y,t)=\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}\left(\int_0^{\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}}\frac{\sin z}{z}dz-\frac{\pi}{2}\right)d\tau\approx\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}\left(\int_0^{\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}}\left(1-\frac{z^2}{6}\right)dz-\frac{\pi}{2}\right)d\tau=$$

$$\approx\left(\frac{\theta(t)}{4\pi D}\left(\frac{(x_2-s)^2}{4}\ln t+\frac{(x_2-s)^6}{384Dt^2}\right)\right)$$

$$\partial_n W\vec{\beta}(x,t)=D\frac{\theta(t)t}{\pi}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}t}\cdot\frac{-3(\nu-1)}{\sqrt{D}(x_2-s)^4}-\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{2-\nu}{2(x_2-s)^2}\cos\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}t}\approx$$

$$\approx\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{-(\nu+1)}{4(x_2-s)^2}+\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{(x_2-s)^2}{64Dt^2}\cdot(2\nu-1)$$

$$\partial_n V\vec{\alpha}(x,t)=\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}\left\{-2\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}\frac{1}{(x_2-s)^2}\right\}d\tau\approx$$

$$\approx\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{2\pi}\left\{-\frac{1}{4D(t-\tau)}+\frac{(x_2-s)^4}{64D^2(t-\tau)^3}\right\}d\tau=\frac{\theta(t)}{2\pi}\left\{-\frac{1}{4D}\ln t-\frac{(x_2-s)^4}{64D^2t^2}\right\}$$

Разіб'ємо Γ_0 на n частин, на кожній з яких вважаємо густини $\alpha_k(y,t)$, $\beta_k(y,t)$ сталими ($k=1,2$). Маємо наближені формули для чисельного розв'язання системи

$$\int_{\Gamma_0} W(x-y,t)\beta_2(y,t)+V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}(-\nu+\frac{(1+\nu)}{2}\ln t+\frac{3+5\nu}{32}\frac{(x_2-s)^4}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(x_2-s)^2}{4D}\ln t+\frac{(x_2-s)^6}{384D^2t^2})\alpha_{1i}(t)ds =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}(-\nu s+\frac{(1+\nu)}{2}s\ln t+\frac{3+5\nu}{160}\frac{(s-x_2)^5}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(s-x_2)^3}{12}\ln t+\frac{(s-x_2)^7}{2688D^2t^2})\alpha_{1i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

$$\int_{\Gamma_0}\partial_n W(x-y,t)\beta_1(y,t)+\partial_n V(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}(\frac{-(\nu+1)}{4(x_2-s)^2}+\frac{(x_2-s)^2}{16Dt^2}\cdot(2\nu-1))\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}\ln t-\frac{(x_2-s)^4}{32D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}(\frac{(\nu+1)}{4(s-x_2)}+\frac{(s-x_2)^3}{48Dt^2}\cdot(2\nu-1))\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}s\ln t-\frac{(s-x_2)^5}{160D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

Висновки

- Побудовано динамічні аналоги потенціалів простого та подвійного шарів для задачі динаміки тонких пружних пластин.
- Отримано подання розв’язку дозволяє визначати зсув будь-який точки пластини, що послаблена тріщиною, в довільний момент час без використання методів типу скінченних різниць або скінченних елементів.
- Отримано явний вигляд граничних рівнянь для подальшої чисельної реалізації.

Дякую за увагу