СИНТЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Щербак Владимир Федорович
Баранюкова Ирина Сергеевна

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

«Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні»
(ДММ-2020)

Введение

Во многих прикладных приложениях физики, биологии и других наук построение приближенной модели сложных процессов основано на использовании модели одного или нескольких связаных осцилляторов ван дер Поля. Применение модельного подхода делает актуальными задачи определения параметров базовых систем по результатам измерения выходных сигналов. Метод инвариантных соотношений был разработан в аналитической механике для поиска частных решений задач динамики твердого тела. Его модификация в теории управления позволяет получать дополнительные уравнения относительно неизвестных компонент математической модели.

Задача определения характеристик осциллятора ван дер Поля.

Уравнение ван дер Поля, описывающее процесс релаксационных колебаний, запишем в форме

$$\ddot{x} = (\lambda - x^2)\dot{x} - \omega^2 x. \tag{1}$$

Обозначив $x_1 = x$, $x_2 = dx/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (\lambda - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1, \\ y_1 = x_1, \ y_2 = x_2. \end{cases} \tag{2}$$

В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для любой системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\zeta} = U(\zeta, x_1(t), x_2(t)), \ \zeta(0) = \zeta_0 \in R^p, \ p \geq 1, \tag{3}$$

в которой функции $U(\zeta, x_1(t), x_2(t))$ удовлетворяют достаточным условиям теорем существования и единственности решений для $t \in [0, \infty)$.

Задача определения характеристик осциллятора ван дер Поля.

Задача.

Найти асимптотически точные оценки параметров λ и ω системы (2) по известным значениям выхода $y(t) = (x_1(t),\ x_2(t))$.

Основная идея используемого подхода состоит в получении дополнительных уравнений для λ и ω. Для этого система дифференциальных уравнений (2) дополняется дифференциальными уравнениями (3), где p равно числу неизвестных. При этом правые части вспомогательной системы $U(\zeta, x_1, x_2)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы полученная расширенная система (2), (3) допускала на своих решениях инвариантные соотношения

$$F_i(x_1, x_2, \zeta, \lambda, \omega) = 0,\ i = 1, 2 \tag{4}$$

Существование инвариантных соотношений.

Покажем, что для рассматриваемой задачи существуют соотношения вида

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \lambda - \zeta_1(t) - \Phi(x_1(t), x_2(t)) = 0, \\
F_2 &= \omega^2 - \zeta_2(t) - \Psi(x_1(t), x_2(t)) = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Утверждение 1.

Для любых дифференцируемых по своим аргументам функций $\Phi(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2)$ можно подобрать правую часть $U(\zeta, x_1, x_2)$ в системе дифференциальных уравнений (3) так, что равенства (5) выполняются тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2), (3).

Существование инвариантных соотношений.

Доказательство.

Введем переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ которые характеризуют невязку в формулах (4) на решениях системы (2)

$$\begin{aligned} \lambda - \zeta_1(t) - \Phi(x_1(t), x_2(t)) &= \varepsilon_1, \\ \omega^2 - \zeta_2(t) - \Psi(x_1(t), x_2(t)) &= \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Дифференцируя (6) в силу системы (2), получаем дифференциальные уравнения для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -\dot{\zeta_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}[(\varepsilon_1 + \zeta_1 + \Phi - x_1^2)x_2 - (\varepsilon_2 + \zeta_2 + \Psi)x_1], \\ \dot{\varepsilon_2} &= -\dot{\zeta_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}[(\varepsilon_1 + \zeta_1 + \Phi - x_1^2)x_2 - (\varepsilon_2 + \zeta_2 + \Psi)x_1]. \end{aligned} \tag{7}$$

Существование инвариантных соотношений.

для любых $\Phi(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2)$ положим

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 &= U_1(x_1, x_2, \zeta) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}[(\zeta_1 + \Phi - x_1^2)x_2 - (\zeta_2 + \Psi)x_1], \\
\dot{\zeta}_2 &= U_2(x_1, x_2, \zeta) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}[(\zeta_1 + \Phi - x_1^2)x_2 - (\zeta_2 + \Psi)x_1].
\end{aligned} \tag{8}$$

В результате уравнения (7) становятся однородными относительно отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \varepsilon_1 x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \varepsilon_2 x_1, \\
\dot{\varepsilon}_2 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \varepsilon_1 x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \varepsilon_2 x_1,
\end{aligned} \tag{9}$$

допускает тривиальное решение $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$. Утверждение доказано.

Стабилизация отклонений.

Рассмотрим задачу синтеза функций $\Phi(x_1, x_2)$ и $\Psi(x_1, x_2)$, остающихся пока свободными, с целью стабилизации отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. В качестве функции Ляпунова возьмем положительно-определенную функцию $V = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/2$ и вычислим ее производную

$$\dot{V} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} x_2 \varepsilon_1^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} x_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} x_1 \varepsilon_2^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} x_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Положим функции $\Phi(x_1, x_2)$ и $\Psi(x_1, x_2)$ равными:

$$\Phi(x_1, x_2) = -k\frac{x_2^2}{2}, \quad \Psi(x_1, x_2) = kx_1, x_2, \tag{10}$$

Уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -kx_2(\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1), \\ \dot{\varepsilon_2} &= kx_1(\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1), \end{aligned} \tag{11}$$

а производная от функции Ляпунова становится отрицательно полуопределенной

$$\dot{V} = -k(x_1\varepsilon_2 - x_2\varepsilon_1)^2 \le 0. \tag{12}$$

Асимптотическя устойчивость

Лемма Барбалата. Если $f(t)$ имеет конечный предел $t \to \infty$ и если $\dot{f}(t)$ является одномерно непрерывной, тогда $\dot{f}(t) \to 0$ as $t \to \infty$.
Обозначим $d(t) = \varepsilon_1(t)x_2(t) - \varepsilon_2(t)x_1(t)$. Легко установить, что

1. функция $V(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем,а следовательно существует $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = V^* < \infty$;
2. функция $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ ограничена: $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) \leq \varepsilon_1^2(0) + \varepsilon_0^2(0)$;
3. наблюдаемое решение $x_1(t), x_2(t)$ представляет собой постоянные ограниченные колебания, поэтому (13) равномерно непрерывны;
4. для $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$ и нетривиальные решения (2) равенство $d(t) = 0$ не является инвариантным соотношением для системы дифференциальных уравнений (2),(13).

Если $d(t) \equiv 0$, тогда $\varepsilon_i(t) - const, i = 1, 2$, и существует линейная связь $\alpha x_1(t) + x_2(t) \equiv 0$ где α - постоянная. Дифференцируя в силу системы (2), получаем, что $x_2(t)$ является корнем кубического уравнения с постоянными коэффициентами, что противоречит 3. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} d^2(t) = 0$, или эквивалентно $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0,\ i = 1, 2$.

Нелинейный идентификатор.

Выбор функций $\Phi(x_1, x_2)$, $\Psi(x_1, x_2)$ в виде (10) окончательно формирует вектор-функцию $U(\zeta, x_1, x_2)$ – правые части вспомогательной системы дифференциальных уравнений (8), которая в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -kx_2\left[\left(\zeta_1 + \frac{x_2^2}{2} - x_1^2\right)x_2 - (\zeta_2 - kx_1x_2)x_1\right], \\ \dot{\zeta}_2 &= kx_2^2 + kx_1\left[\left(\zeta_1 + \frac{x_2^2}{2} - x_1^2\right)x_2 - (\zeta_2 - kx_1x_2)x_1\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

В итоге получаем, что следствием проведенных построений является

Утверждение 2.

Для любого нетривиального решения $x_1(t), x_2(t)$ системы (2), положительной константы k и любого начального значения $\zeta(0) \in R^2$ в задаче Коши для системы дифференциальных уравнений (13) формулы

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \zeta_1(t) + k\frac{x_2^2(t)}{2}, \\ \hat{\omega^2} &= \zeta_2(t) - kx_1(t)x_2(t) \end{aligned} \tag{14}$$

Асимптотическая оценка параметров

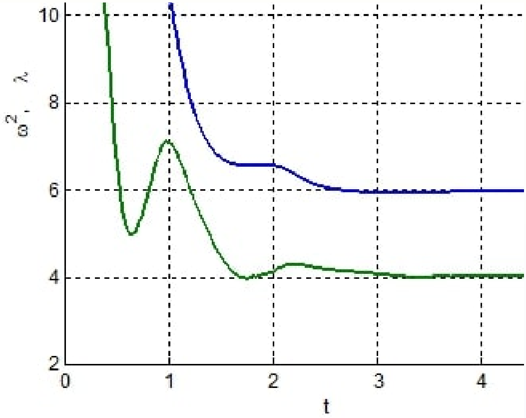

Рис. 1. Асимптотическая оценка параметров $\lambda = 4.0$, $\omega^2 = 6.0$.

Выводы

Рассмотрена задача идентификации постоянных параметров в дифференциальном уравнении, описывающем колебания осциллятора ван дер Поля. Предложен метод построения нелинейного идентификатора, который позволяет получать асимптотические оценки неизвестных по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений, который в задачах управления на траекториях движения рассматриваемых систем позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами. Работоспособность предложенной схемы решения задачи идентификации подтверждается результатами численного моделирования. Разработанный подход асимптотического оценивания неизвестных параметров в дальнейшем будет использован в задачах адаптивного управления характером колебаний осцилляторных сетей.

Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов, // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42.

Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.

Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела. – 2004. – Вып. 41. – С. 197 -216.

Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69-76.

Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Тюрюкина Л.В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связаных осцилляторов ван дер Поля // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – Т. 19, № 5. – С. 76-90.

Спасибо за внимание!