УДК 62-50:519.7

В.Ф. Щербак, д.ф.-м.н., с.н.с.
Н.В. Жоголева, к.ф.-м.н.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Славянск, Украина, *scherbakvf@ukr.net*, *zhogoleva.nadia@gmail.com*

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

А. Пуанкаре. Новые методы небесной механики. – Избр. тр.: В 3 т. 1971. – Т.1. с. 44-45

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = \overline{1,n}$$

«Но нам остается коснуться некоторых уравнений, которые связаны с этой системой и о которых можно сказать, что они занимают промежуточное положение между решениями и интегралами. **Я теперь определю эти уравнения и назову их инвариантными соотношениями.**

Пусть φ – произвольная функция x_1, $x_2, \ldots, x_n$; тогда $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} X_i = 0.$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\varphi_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, p \tag{0.1}$$

и предположим, что эти уравнения влекут, как следствия соотношения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} X_i = 0$; откуда вытекает, что $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial t} = 0.$

Следовательно, если уравнения (0.1) удовлетворяются для некоторого значения t, они будут удовлетворяться для всех значений t; вот почему мы назовем систему (1) системой инвариантных соотношений; и легко понять, какое значение может иметь знание подобной системы»

Метод инвариантных соотношений в Донецкой школе механики

П.В. Харламов (1974), А.М. Ковалев (1980), А.М. Ковалев, В.Ф.Щербак (1993, 1995)

2. ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В РОЛИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

$$\dot{x} = f(x), \;\; x(0) = x_0 \in D \subseteq R^n, \tag{0.1}$$

$$y(t) = h(x(t, x_0)) \in R^k. \tag{0.2}$$

Рассмотрим задачу определения фазового вектора системы (1) в следующей постановке

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{p} = u(h(x), p), \end{cases} \tag{0.3}$$

Выбор управления – функции *u(h(x),p)*. Пусть управление $u(h(x),p)$ можно подобрать таким образом, что существует инвариантные соотношения для расширенной системы $\Psi(x, p) \in R^{n-k}$

$$\Psi(x, p) = 0. \tag{0.5}$$

Б) Выбор вида инвариантных соотношений – функции *Ψ(x,p)*. Если функция $\Psi(x,p)$ такова, что все решения расширенной системы (1.4) обладают свойством

$$\forall x_0, p_0 \in D: \lim_{t\to\infty} \left\| \Psi\bigl(x(t, x_0), p(t, p_0)\bigr) \right\| = 0, \tag{0.6}$$

то в силу непрерывности $\Psi(x,p)$ решение алгебраических уравнений (0.5) определяют асимптотическую оценку $x(t)$.

Основная идея: Синтез управлений во вспомогательной системе с целью сделать заданное соотношение инвариантным.

Такие соотношения рассматриваются в качестве дополнительных алгебраических (функциональных) уравнений, связывающих неизвестные компоненты математической модели (фазовый вектор, параметры) с известными величинами (измерения, проводимые на траекториях системы, вспомогательные системы дифференциальных уравнений).

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим модель свободного твердого тела, вращающегося вокруг своего центра масс. Требуется определить главные центральные моменты инерции I_1, I_2, I_3 по результатам измерения вектора угловой скорости $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$.

$$a_1=\frac{I_2-I_3}{I_1},\ a_2=\frac{I_3-I_1}{I_2},\ a_3=\frac{I_1-I_2}{I_3}.$$

Уравнения Эйлера, записанные в главных осях, имеют вид

$$\begin{cases}\dot{\omega}_1=a_1\omega_2\omega_3,\\ \dot{\omega}_2=a_2\omega_3\omega_1,\\ \dot{\omega}_3=a_3\omega_1\omega_3.\end{cases} \tag{1}$$

Задача. *Найти асимптотически точные оценки вектора параметров* $a=(a_1,a_2,a_3)$ *системы* (1) *по результатам измерения вектора угловой скорости* $\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t))$.

Достаточное условие локальной идентифицируемости системы (1) определяются неравенством $\det\dfrac{\partial(\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2,\dot{\omega}_3)}{\partial(a_1,a_2,a_3)}=\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\neq 0$, т.е. требуется неравенство нулю всех компонент угловой скорости.

$$\forall\, t\in T,\ \left|\omega_1(t)\cdot\omega_2(t)\cdot\omega_3(t)\right|\geq w_{\min}>0. \tag{У}$$

Дополним систему (1) некоторой, пока неопределенной, системой дифферениальных уравнений

$$\dot{A}_i=u_i(A_1,A_2,A_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3),\ i=1,2,3. \tag{2}$$

Синтез инвариантных соотношений. В соответствии с методом синтеза инвариантных соотношкний отклонения фазового вектора $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ от значений неизвестных модели a_1,a_2,a_3 выразим в виде некоторых функций от известных величин $\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

$$a_i-A_i=\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\ \ i=1,2,3. \tag{3}$$

Последние равенства не могут выполняться во всем пространстве переменных a,ω. Введем переменные невязки δ_i, i=1,2,3 и в результате получаем равенства, связывающие a_1,a_2,a_3, неопределенные пока функции $A_i(t)$, $\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ и δ_i

$$a_i-A_i=\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)+\delta_i,\ \ i=1,2,3. \tag{4}$$

Дифференцируя равенства (4), получаем дифференциальные уравнения для отклонений δ_i,

$$\dot{\delta}_i = u_i - \Phi^{/}_{i\omega_1}(A_1 - \Phi_1 - \delta_1)\omega_2\omega_3 - \Phi^{/}_{i\omega_2}(A_2 - \Phi_2 - \delta_2)\omega_1\omega_3 -$$
$$- \Phi^{/}_{i\omega_3}(A_3 - \Phi_3 - \delta_3)\omega_1\omega_2, \text{ где } \Phi^{/}_{i\omega_j} = \frac{\partial \Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_j}, \; i,j = 1,2,3.$$

Выберем управления u_i таким образом, чтобы дифференциальные уравнения для отклонений стали однородными и допускали, тем самым, тривиальное решение $\delta_i(t) \equiv 0$, i=1,2,3.

Пусть правые части (2) равны

$$u_i = \Phi^{/}_{i\omega_1}(A_1 - \Phi_1)\omega_2\omega_3 + \Phi^{/}_{i\omega_2}(A_2 - \Phi_2)\omega_1\omega_3 + \Phi^{/}_{i\omega_3}(A_3 - \Phi_3)\omega_1\omega_2. \quad (5)$$

Тогда уравнения для невязок δ_i принимают вид

$$\dot{\delta}_i = \Phi^{/}_{i\omega_1}\omega_2\omega_3\delta_1 - \Phi^{/}_{i\omega_2}\omega_1\omega_3\delta_2 - \Phi^{/}_{i\omega_3}\omega_1\omega_2\delta_3, \; i=1,2,3. \quad (6)$$

Тем самым показано, что при управлениях, определяемых формулами (5), тривиальное решение $\delta_i(t) \equiv 0$, i=1,2,3 существует, а значит при любых дифференцируемых по своим аргументам функций $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, i=1,2,3 соотношения (3) являются инвариантными соотношениями для системы (1), (2) т.е. выполняются тождественно на некоторых решениях этой системы.

Асимптотическое оценивание.

$$a_i - A_i = \Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \delta_i, \;\; i = 1,2,3. \quad (4)$$

Чтобы соотношения (4) можно было использовать для оценки параметров a_1,a_2,a_3, необходимо обеспечить выполнение следующего условия: тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (6) должно обладать свойством глобальной асимптотической устойчивости.

Для выполнения этого требования в нашем распоряжении остаются свободные функции $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, i=1,2,3.

Выберем их в виде

$$\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{2}s(a_{i1}\omega_1^2 + a_{i2}\omega_2^2 + a_{i3}\omega_3^2), \; i=1,2,3, \quad (7)$$

где $s = sign(\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3)$, постоянные величины a_{ij} являются компонентами некоторой матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,2,3$, у которой все корни λ_1, λ_2, λ_3, характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ имеют отрицательные действительные части.

$$\dot{\delta}_i = |\omega_1\omega_2\omega_3|(a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + a_{i3}\delta_3), i = 1,2,3. \quad (8)$$

Поскольку величина $|\omega_1\omega_2\omega_3|$ является скалярным множителем при правых частях системы дифференциальных уравнений (8), то траектории этой системы при $|\omega_1\omega_2\omega_3| \neq 0 \cdot$ совпадают с траекториями линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_{\min} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ – корень характеристического уравнения с минимальной по модулю действительной частью. Тогда решения (9) экспоненциально стремятся к нулю с показателем затухания $\lambda_{\min}$, т.е.

$$\sqrt{\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) + \varepsilon_3^2(t)} = O\left(e^{\lambda_{min} t}\right).$$

С учетом предположения (У) такой же характер имеют и траектории системы (8). Учитывая множитель $|\omega_1\omega_2\omega_3| \cdot$ и его оценку снизу величиной $w_{\min}$, можем заключить, что

$$\sqrt{\delta_1^2(t) + \delta_2^2(t) + \delta_3^2(t)} = O\left(e^{\lambda_{min} w_{min} t}\right).$$

В итоге получаем, что невязка $\delta_i(t)$ i=1,2,3 в соотношениях (4) с ростом t асимптотически стремится к нулю.

Нелинейный идентификатор. Итогом проведенных построений является конструкция идентификатора искомых параметров, состоящая из вспомогательной системы дифференциальных уравнений и формул связи между известными и неизвестными величинами.

Запишем его окончательный вид. В качестве матрицы A возьмем диагональную матрицу: A = diag($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отрицательные действительные числа. Тогда, с учетом (7),

$$\Phi_i = -\frac{1}{2} s\lambda_i\omega_i^2, \ \ \Phi^{/}_{i\omega_i} = -s\lambda_i\omega_i, \ \ \Phi^{/}_{i\omega_j} = 0, i \neq j, \ i,j=1,2,3.$$

Вспомогательная система дифференциальных уравнений (6) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = -s\lambda_1\omega_1\left(A_1 + \frac{1}{2}s\lambda_1\omega_1^2\right)\omega_2\omega_3, \\ \dot{A}_2 = -s\lambda_2\omega_2\left(A_2 + \frac{1}{2}s\lambda_2\omega_2^2\right)\omega_1\omega_3, \\ \dot{A}_3 = -s\lambda_3\omega_3\left(A_3 + \frac{1}{2}s\lambda_3\omega_3^2\right)\omega_1\omega_2. \end{cases} \tag{10}$$

Выбирая произвольным образом некоторые начальные условия $A_1(0)$, $A_2(0)$, $A_3(0)$ и решая соответствующую задачу Коши для системы (10), подставляем полученное решение в формулы

$$\begin{cases} \widehat{a_1}(t) = A_1(t) - \frac{1}{2}s\lambda_1\omega_1^2(t), \\ \widehat{a_2}(t) = A_2(t) - \frac{1}{2}s\lambda_2\omega_2^2(t), \\ \widehat{a_3}(t) = A_3(t) - \frac{1}{2}s\lambda_3\omega_3^2(t). \end{cases} \tag{11}$$

Оценки $\widehat{a_i}(t)$ отличаются от искомых параметров a_i на величину невязки $\delta_i(t)$, которая, как показано ранее, асимптотически стремится к нулю с ростом t, i=1,2,3. Тем самым формулы (11) формируют асимптотические оценки a_1, a_2, a_3.

Идентификация параметра, характеризующего распределение масс в осесимметричном твердом теле

Запишем уравнения Эйлера для осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг своего центра масс. I_1 ,I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции тела, и пусть $I_1 = I_2$, $a=(I_2-I_3)/I_1$.

Тогда уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \ \ a\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 = -a\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 = \ \ 0, \end{cases} \tag{12}$$

Динамическое расширение

$$\dot{A} = u(A, \omega). \tag{13}$$

Выбираем управление, чтобы выполнить

$$A(t) - a = \Phi(\omega(t)) + \eta(t), \tag{14}$$

Уравнение $\dot{\eta} = \lambda\eta$ с учетом (12) – (13) принимает вид

$$u(A,\omega) - \frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}(A - \Phi - \eta)\omega_2\omega_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\omega_2}(A - \Phi - \eta)\omega_1\omega_3 - \lambda\eta = 0.$$

Равенство будет выполнено, если

$$1)\ \ u(A,\omega) = (A - \Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}\omega_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial\omega_2}\omega_1\right)\omega_3, \quad 2)\ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}\omega_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial\omega_2}\omega_1 = \frac{\lambda}{\omega_3}.$$

Первое равенство определяет вид управления $u(A,\omega)$ в зависимости от функции $\Phi(\omega)$, а второе является дифференциальным уравнением в частных производных для этой функции. Его частным решением является

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{\lambda}{\omega_3}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{15}$$

Зная аналитический вид функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, уравнение идентификатора (12)

$$\dot{A}(t) = \lambda\left(A - \frac{\lambda}{\omega_3(t)}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\right). \tag{16}$$

Окончательно равенство (14) принимает вид

$$a = A(t) - \frac{\lambda}{\omega_3(t)}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} - \eta_0 e^{\lambda t}, \tag{17}$$