



II міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні»

ЕФЕКТИВНІ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕХРЕСНО-АРМОВАНИХ КОМПОЗИТІВ НА ПОЛІМЕРНІЙ ОСНОВІ

М.В. Марчук¹, д-р фіз.-мат. наук, проф.

М.М. Хом'як², канд. фіз.-мат. наук, доц.

В.М. Харченко³

В.С. Пакош¹, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.

¹*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України*

(Львів, Україна, mv_marchuk@ukr.net);

²*Львівський національний університет імені Івана Франка*

(Львів, Україна, khomnick98@gmail.com);

³*Державне підприємство «Конструкторське бюро*

«Південне» ім. М. К. Янгеля» (Дніпро, Україна, volod.kharchenko@meta.ua)

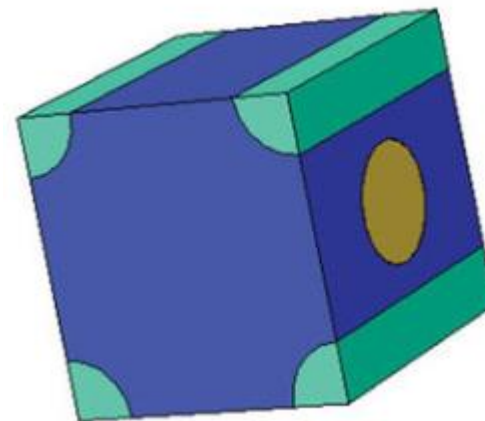
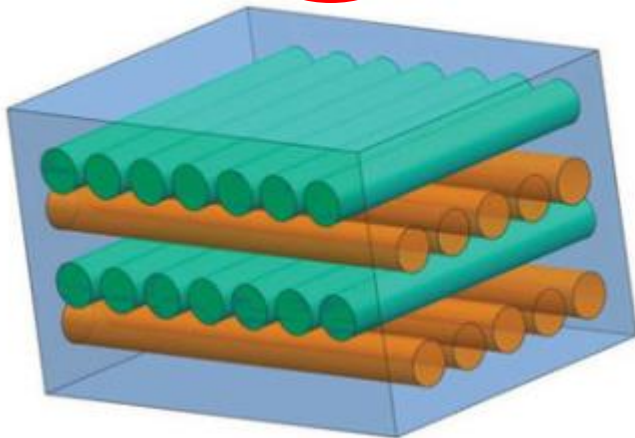
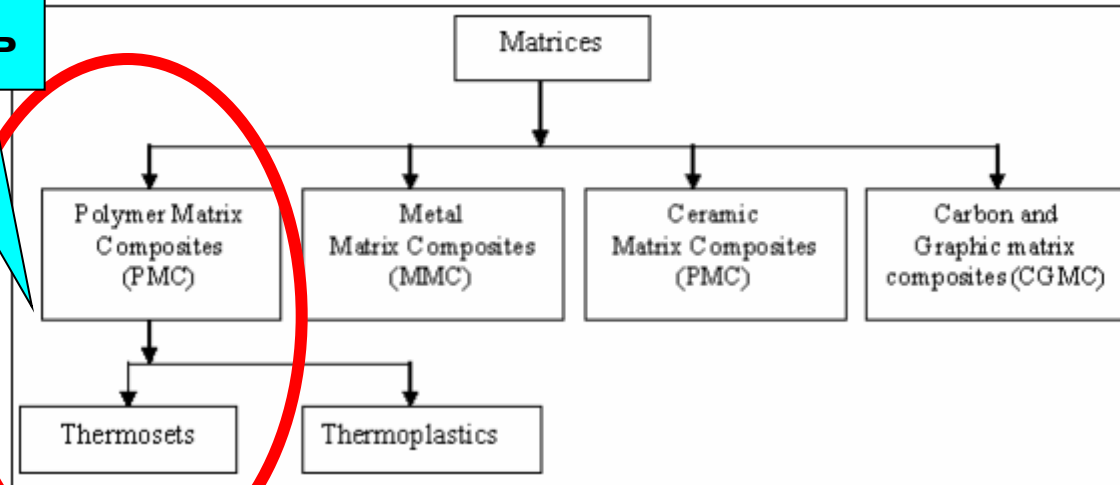
Мета – побудувати 3D-модель для визначення ефективних фізико-механічних характеристик (ФМХ) перехресно армованого полімерного композитного матеріалу (ПКМ) з урахуванням просторового напружено-деформованого стану (НДС), акцентуючи увагу на отриманні аналітичних залежностей для трансверсального модуля пружності E_3 та пов'язаних з ним характеристик жорсткості й податливості, які в класичній теорії композитних пластин і оболонок ігнорують згідно з гіпотезою про недеформованість нормалі $E_3 \rightarrow \infty$.

Завдання:

- використовуючи співвідношення Дюамеля-Неймана у матричному вигляді, проаналізувати структуру співвідношень і залежність модулів Юнга, коефіцієнтів Пуассона й термічного розширення шару з ПКМ від трансверсального модуля пружності E_3 ;
- узагальнити відомі формули повороту для коефіцієнтів матриць жорсткості та податливості за косокутного армування шару з урахуванням поперечних деформацій;
- отримати просторову модель визначення ФМХ для ортотропного шару у випадку симетричного армування ;
- розробити програмне забезпечення (ПЗ) для обчислення властивостей перехресно армованого ПКМ для змінних кутів армування, зокрема, в інтеграції зі стандартними пакетами скінченно-елементного аналізу, такими як ANSYS.

Класифікація матриць ПКМ

Об'єкт
досліджень



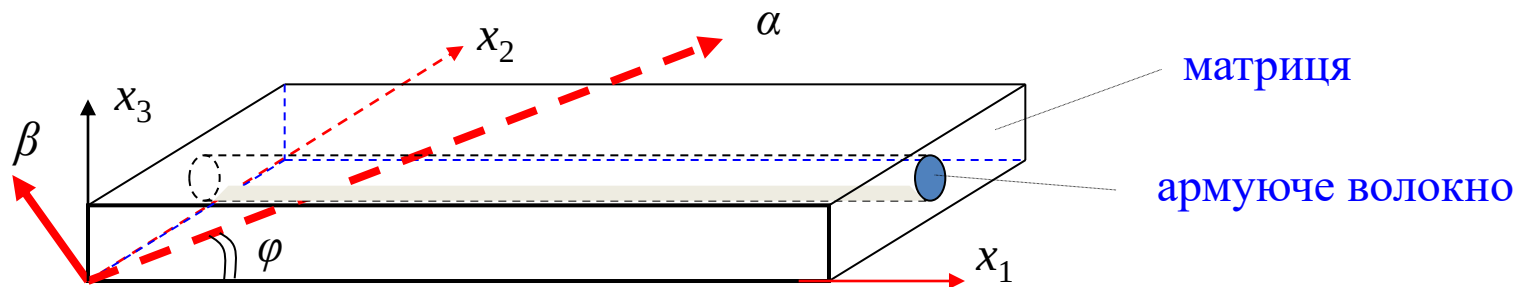


Рис. 1. Однонаправлено армований композит

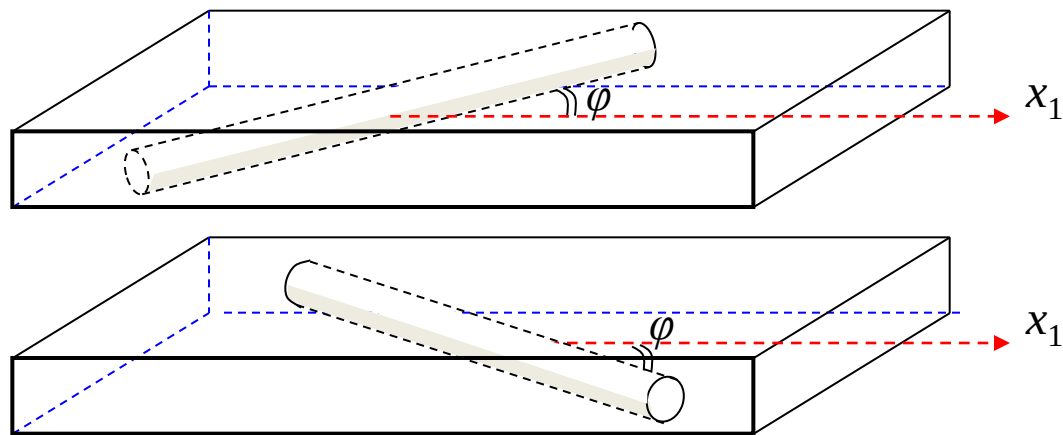


Рис. 2. Симетрично косокутно армований композит

Вимоги ANSYS щодо вводу повного набору ФМХ для 3D-елементів з ПКМ

Linear Orthotropic Properties for Material Number 1

Linear Orthotropic Material Properties for Material Number 1

Choose Poisson's Ratio

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Temperatures	20	75	100	150	200	250
EX	1.6E+011	1.5E+011	1.4E+011	1.25E+011	1E+011	8E+010
EY	6.8E+009	4.5E+009	3.9E+009	6E+008	3E+008	1E+008
EZ	6.8E+009	4.5E+009	3.9E+009	6E+008	3E+008	1E+008
PRXY	0.32	0.32	0.33	0.35	0.38	0.39
PRYZ	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
PRXZ	0.32	0.32	0.33	0.35	0.38	0.39
GXY	4E+009	2E+008	2E+008	2E+008	1E+008	1E+008
GYZ	8E+011	7E+011	4E+011	4E+011	3E+011	3E+011
GXZ	4E+009	2E+008	2E+008	2E+008	2E+008	2E+008

Material Edit Favorite Help

Material Models Defined

-  Material Model Number 1
 -  Density
 -  Friction Coefficient
 -  Linear Orthotropic
-  Material Model Number 2
-  Material Model Number 3
-  Material Model Number 4
-  Material Model Number 5
-  Material Model Number 6

Побудова теоретичної 3D-моделі: співвідношення Дюамеля - Неймана

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & C^{1313} & 0 \\ & & & & & C^{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T \quad (1)$$

$[C] = \{C^{ijkl}\}$ – матриця податливості ($i, j, k, l = 1, 2, 3$),

$$C^{iiii} = 1/E_i, \quad C^{ijij} = C^{jiji} = -\mu_{ij}/E_i = -\mu_{ji}/E_j, \quad C^{ijij} = 1/G_{ij},$$

де E_i – модулі Юнга; μ_{ij} – коефіцієнти Пуассона; G_{ij} – модулі зсуву

Умова на фізичну допустимість для моделі ортотропного матеріалу:

$$\det[C] = \Delta_3 / ((E_1 E_2 E_3)(G_{12} G_{13} G_{23})) \neq 0 \Rightarrow \Delta_3 \neq 0,$$

де

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{21} & -\mu_{31} \\ -\mu_{12} & 1 & -\mu_{32} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \mu_{12}\mu_{21} - \mu_{13}\mu_{31} - \mu_{23}\mu_{32} - 2\mu_{21}\mu_{13}\mu_{32}.$$

Розглядаючи перші два рівняння (1) як систему для визначення σ_{11} і σ_{22} , отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E_1(\varepsilon_{11} + \mu_{21}\varepsilon_{22}) + \lambda_1\sigma_{33} - \beta_{11}\Delta T, \\ \sigma_{22} &= E_2(\varepsilon_{22} + \mu_{12}\varepsilon_{11}) + \lambda_2\sigma_{33} - \beta_{22}\Delta T.\end{aligned}$$

Підставляючи у третє рівняння (1), знайдемо нормальні напруження

$$\sigma_{33} = E_3(\varepsilon_{33} + \lambda_1\varepsilon_{11} + \lambda_2\varepsilon_{22}) - \beta_{33}\Delta T,$$

$$\text{де } \bar{E}_i = E_i / \Delta_2, \quad i=1,2; \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{21} \\ -\mu_{12} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \mu_{12}\mu_{21}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu_{12}\mu_{23} + \mu_{13}}{\Delta_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_{21}\mu_{13} + \mu_{23}}{\Delta_2},$$

$$\bar{E}_3 = (\Delta_2 / \Delta_3)E_3, \quad \beta_{11} = \bar{E}_1(\alpha_{11} + \mu_{21}\alpha_{22}), \quad \beta_{22} = \bar{E}_2(\alpha_{22} + \mu_{12}\alpha_{11}), \quad \beta_{33} = \bar{E}_3(\alpha_{33} + \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{22}).$$

Обернені до (1) співвідношення матимуть вигляд

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & A^{2222} & A^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & A^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & A^{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & A^{1313} & 0 \\ & & & & & A^{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11}^* \\ \beta_{22}^* \\ \beta_{33}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T$$

де для коефіцієнтів матриці жорсткості $[D] = \{A^{ijkl}\}$, $[D] = [C]^{-1}$ отримано формули:

$$A^{iiii} = E_i^* = \bar{E}_i + \lambda_i^2 \bar{E}_3, \quad A^{ii33} = A^{33ii} = \lambda_i \bar{E}_3, \quad i = 1, 2, \quad A^{3333} = \bar{E}_3,$$

$$A^{1122} = A^{2211} = E_{12}^* = \bar{E}_1 \mu_{21} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{E}_3, \quad A^{ijij} = G_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ненульові компоненти вектора термічної жорсткості $\{\beta_{ii}^*\} = [D]\{\alpha_{ii}\}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\beta_{11}^* = A^{1111} \alpha_{11} + A^{1122} \alpha_{22} + A^{1133} \alpha_{33} = \beta_{11} + \lambda_1 \beta_{33}, \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

$$\beta_{33}^* = A^{1133} \alpha_{11} + A^{2233} \alpha_{22} + A^{3333} \alpha_{33} = \bar{E}_3 (\alpha_{33} + \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{22}) = \beta_{33}.$$

Умова невиродженості матриці жорсткості $\det[D] \neq 0$

$$\det[D] = \hat{\Delta}_3 (\bar{E}_1 / E_1) (\bar{E}_2 / E_2) (\bar{E}_3 / E_3) (E_1 E_2 E_3) (G_{12} G_{13} G_{23}) \neq 0,$$

де

$$\hat{\Delta}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 (E_3 / E_1) & \mu_{21} + \lambda_1 \lambda_2 E_3 / E_2 & \lambda_1 \\ \mu_{12} + \lambda_1 \lambda_2 (E_3 / E_1) & 1 + \lambda_2^2 (E_3 / E_2) & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_1 / E_1 = \bar{E}_2 / E_2 = 1 / \Delta_2, \quad \bar{E}_3 / E_3 = \Delta_2 / \Delta_3.$$

Оскільки $\det[D] = 1 / \det[C]$, то, $\hat{\Delta}_3 / (\Delta_2 \Delta_3) = 1 / \Delta_3$ або $\hat{\Delta}_3 = \Delta_2$.

Формули повороту

Рівняння Дюамеля - Неймана в повернутій системі координат:

$$\{\varepsilon_\alpha\} = [C_\varphi] \{\sigma_\alpha\} + \{\bar{\alpha}_\varphi\} \Delta T \quad \text{або} \quad \{\sigma_\alpha\} = [D_\varphi] \{\varepsilon_\alpha\} - \{\bar{\beta}_\varphi\} \Delta T, \quad (2)$$

де вектори компонент напружень і деформацій відповідно позначено як

$$\{\sigma_\alpha\} = [\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{33}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, \sigma_{\beta 3}]^T, \quad \{\varepsilon_\alpha\} = [\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{\alpha\beta}, 2\varepsilon_{\alpha 3}, 2\varepsilon_{\beta 3}]^T,$$

вектори коефіцієнтів температурного розширення і термічної жорсткості –

$$\{\bar{\alpha}_\varphi\} = [\alpha_{11}^\varphi, \alpha_{22}^\varphi, \alpha_{33}^\varphi, \alpha_{12}^\varphi, \alpha_{13}^\varphi, \alpha_{23}^\varphi]^T, \quad \{\bar{\beta}_\varphi\} = [\beta_{11}^\varphi, \beta_{22}^\varphi, \beta_{33}^\varphi, \beta_{12}^\varphi, \beta_{13}^\varphi, \beta_{23}^\varphi]^T$$

Матриці жорсткості $[D_\varphi]$ і податливості $[C_\varphi] = [D_\varphi]^{-1}$ мають блочну структуру:

$$[D_\varphi] = \begin{bmatrix} [D_\varphi]_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & [D_\varphi]_{5,6} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi] = \begin{bmatrix} [C_\varphi]_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & [C_\varphi]_{5,6} \end{bmatrix},$$

$$[D_\varphi]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_\varphi^{1111} & A_\varphi^{1122} & A_\varphi^{1133} & A_\varphi^{1112} \\ A_\varphi^{2211} & A_\varphi^{2222} & A_\varphi^{2233} & A_\varphi^{2212} \\ A_\varphi^{3311} & A_\varphi^{3322} & A_\varphi^{3333} & A_\varphi^{3312} \\ A_\varphi^{1211} & A_\varphi^{1222} & A_\varphi^{1233} & A_\varphi^{1212} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} C_\varphi^{1111} & C_\varphi^{1122} & C_\varphi^{1133} & C_\varphi^{1112} \\ C_\varphi^{2211} & C_\varphi^{2222} & C_\varphi^{2233} & C_\varphi^{2212} \\ C_\varphi^{3311} & C_\varphi^{3322} & C_\varphi^{3333} & C_\varphi^{3312} \\ C_\varphi^{1211} & C_\varphi^{1222} & C_\varphi^{1233} & C_\varphi^{1212} \end{bmatrix},$$

$$[D_\varphi]_{5,6} = \begin{bmatrix} A_\varphi^{1313} & A_\varphi^{1323} \\ A_\varphi^{2313} & A_\varphi^{2323} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi]_{5,6} = \begin{bmatrix} C_\varphi^{1313} & C_\varphi^{1323} \\ C_\varphi^{2313} & C_\varphi^{2323} \end{bmatrix}.$$

Напруження та деформації в системі відліку шару (1-2-3) та новій системі координат (α - β -3) пов'язані співвідношеннями ***

$$\{\sigma_\alpha\} = [T_1]\{\sigma\}, \{\varepsilon_\alpha\} = [T_2]\{\varepsilon\} \text{ або } \{\sigma\} = [T_1]^{-1}\{\sigma_\alpha\}, \{\varepsilon\} = [T_2]^{-1}\{\varepsilon_\alpha\}.$$

Тут $[T_1]$ і $[T_2]$ – матриці, що описують “пряме” перетворення повороту для напружень чи деформацій відповідно:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} cc & ss & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ ss & cc & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2cs & -2cs & 0 & cc - ss & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}, [T_2] = \begin{bmatrix} cc & ss & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ ss & cc & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & cc - ss & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad c = \cos(\varphi), \quad s = \sin(\varphi)$$

Вони мають такі ж властивості, як і для 2D-випадку:

$$[T_1]^{-1} = [T_2]^T, [T_2]^{-1} = [T_1]^T, [T_1(\varphi)]^{-1} = [T_1(-\varphi)], [T_2(\varphi)]^{-1} = [T_2(-\varphi)].$$

Як і без урахування 3D-ефектів [5], отримуємо:

$$[D_\varphi] = [T_1][D][T_1]^T, [C_\varphi] = [T_2][C][T_2]^T, \{\bar{\beta}_\varphi\} = [T_1]\{\bar{\beta}\}, \{\bar{\alpha}_\varphi\} = [T_2]\{\bar{\alpha}\},$$

причому $\{\bar{\beta}_\varphi\} = [D_\varphi]\{\bar{\alpha}_\varphi\}$. Матриці $[D_\varphi]$ і $[C_\varphi]$ симетричні, але містять ненульові недіагональні елементи в четвертому стовпці й рядку, а вектори $\{\bar{\alpha}_\varphi\}$ та $\{\bar{\beta}_\varphi\}$ – ненульові компоненти для змішаних індексів. Як відомо, це означає загальнішу анізотропію властивостей, ніж для моделі ортотропного матеріалу.

*** Композиционные материалы: Справ. / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

Явні формули для коефіцієнтів матриці жорсткості $[D_\phi] = \{A_{\phi}^{ijkl}\}$ повторюють відомі вирази для повороту без урахування 3D-ефекту, однак, коефіцієнти матриці $[D]$ містять поправки виду $A^{iiii} = E^* = \bar{E}_i + \lambda^2 \bar{E}_i$. Специфічними для 3D-моделі є ненульові коефіцієнти третього, п'ятого й шостого рядків і стовпців:

$$\begin{aligned} A_{\phi}^{1133} &= A_{\phi}^{3311} = A^{1133} c^2 + A^{2233} s^2, \quad A_{\phi}^{2233} = A_{\phi}^{3322} = A^{1133} s^2 + A^{2233} c^2, \\ A_{\phi}^{1233} &= A_{\phi}^{3312} = cs(A^{1133} - A^{2233}), \quad A_{\phi}^{1323} = A_{\phi}^{2313} = cs(A^{1313} - A^{2323}), \quad (15) \\ A_{\phi}^{1313} &= A^{1313} c^2 + A^{2323} s^2, \quad A_{\phi}^{2323} = A^{1313} s^2 + A^{2323} c^2, \quad A_{\phi}^{3333} = A^{3333}. \end{aligned}$$

Для вектора термічної жорсткості $\{\bar{\beta}_\phi\}$ матимемо такі ненульові компоненти:

$$\beta_{11}^\phi = \beta_{11}^* c^2 + \beta_{22}^* s^2, \quad \beta_{22}^\phi = \beta_{11}^* s^2 + \beta_{33}^* c^2, \quad \beta_{33}^\phi = \beta_{33}^*, \quad \beta_{12}^\phi = (\beta_{11}^* - \beta_{22}^*) cs. \quad (16)$$

Аналогічно, як і для матриці жорсткості $[D_\phi]_{4 \times 4}$, для під-матриці податливості $[C_\phi]_{4 \times 4}$, а також для вектора КТР $\{\bar{\alpha}_\phi\} = [T_2] \{\bar{\alpha}\}$ маємо компоненти, тотожні до класичної 2D-моделі, крім коефіцієнтів третього рядка і стовпця $C_{\phi}^{ij33} = C_{\phi}^{33ij}$:

$$\begin{aligned} C_{\phi}^{1133} &= C_{\phi}^{3311} = \frac{-\mu_{\alpha 3}}{E_{\alpha}} = \frac{-\mu_{3\alpha}}{E_3} = -\left(\frac{\mu_{31}}{E_3} c^2 + \frac{\mu_{32}}{E_3} s^2 \right) = -\left(\frac{\mu_{13}}{E_1} c^2 + \frac{\mu_{23}}{E_2} s^2 \right), \\ C_{\phi}^{2233} &= C_{\phi}^{3322} = \frac{-\mu_{\beta 3}}{E_{\beta}} = \frac{-\mu_{3\beta}}{E_3} = -\left(\frac{\mu_{31}}{E_3} s^2 + \frac{\mu_{32}}{E_3} c^2 \right) = -\left(\frac{\mu_{13}}{E_1} s^2 + \frac{\mu_{23}}{E_2} c^2 \right), \\ C_{\phi}^{3312} &= C_{\phi}^{1233} = \frac{\eta_{3,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{\eta_{\alpha\beta,3}}{E_3} = -2cs \left(\frac{\mu_{13}}{E_1} - \frac{\mu_{23}}{E_2} \right) = -2cs \left(\frac{\mu_{31}}{E_3} - \frac{\mu_{32}}{E_3} \right), \quad C_{\phi}^{3333} = \frac{1}{E_3}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти підматриці $[C_\phi]_{5,6}$ такі:

$$C_{\phi}^{1313} = \frac{1}{G_{\alpha 3}} = \frac{c^2}{G_{13}} + \frac{s^2}{G_{23}}, \quad C_{\phi}^{2323} = \frac{1}{G_{\beta 3}} = \frac{s^2}{G_{13}} + \frac{c^2}{G_{23}}, \quad C_{\phi}^{1323} = C_{\phi}^{2313} = \frac{\lambda_{\alpha 3, \beta 3}}{G_{\beta 3}} = \frac{\lambda_{\beta 3, \alpha 3}}{G_{\alpha 3}} = \left(\frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}} \right) cs.$$

Симетричне укладання волокон армування

Прийmemo такі гіпотези: ***

шари працюють сумісно (рівність деформацій у площині армування):

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^+ = \varepsilon_{\alpha\alpha}^- = \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \varepsilon_{\beta\beta}^+ = \varepsilon_{\beta\beta}^- = \varepsilon_{\beta\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^+ = \varepsilon_{\alpha\beta}^- = \varepsilon_{\alpha\beta};$$

між шарами ідеальний (повний) силовий контакт:

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \sigma_{33}, \quad \sigma_{\alpha 3}^+ = \sigma_{\alpha 3}^- = \sigma_{\alpha 3}, \quad \sigma_{\beta 3}^+ = \sigma_{\beta 3}^- = \sigma_{\beta 3};$$

мають зміст усереднені напруження:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\alpha}^-)/2, \quad \sigma_{\beta\beta} = (\sigma_{\beta\beta}^+ + \sigma_{\beta\beta}^-)/2, \quad \sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{\alpha\beta}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^-)/2;$$

механічні властивості ортотропних шарів у системах відліку, зв'язаних із волокнами армування, однакові (модулі Юнга, зсуву, коефіцієнти Пуассона, КТР α_{11} і α_{22} , а отже, й термічні жорсткості β_{11}^* , β_{22}^*)

Для усереднення використовуємо матричне рівняння (2), записане для кожного з шарів (індекс " $\pm$ " вказує на кут армування):

$$[\sigma_{\alpha}^{\pm}] = [D_{\pm\varphi}] [\varepsilon_{\alpha}^{\pm}] - [\beta_{\pm\varphi}] \Delta T$$

*** Немировский Ю. В., Янковский А. Н. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – 13, № 1. – С. 3–32.

Результатом усереднення (з урахуванням парності функції $\cos$ та непарності функції $\sin$) буде матриця жорсткості та вектор температурних жорсткостей для симетрично перехресно армованого композиту:

$$[D_X] = \begin{bmatrix} [D_X]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [G_X]_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \{\beta_X\} = [\beta_{11}^X \quad \beta_{22}^X \quad \beta_{33}^X \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$[D_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_X^{1111} & A_X^{1122} & A_X^{1133} \\ A_X^{2211} & A_X^{2222} & A_X^{2233} \\ A_X^{3311} & A_X^{3322} & A_X^{3333} \end{bmatrix}, \quad [G_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_X^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & A_X^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & A_X^{2323} \end{bmatrix},$$

де $A_X^{ijkl} = A_\varphi^{ijkl}$ і $\beta_{ii}^X = \beta_{ii}^\varphi$.

Для отримання технічних характеристик (модулів Юнга тощо) обчислимо матрицю податливості $[C_X] = \{C_X^{ijkl}\}$, причому $C_X^{ijkl} \neq C_\varphi^{ijkl}$:

$$[C_X] = [D_X]^{-1} = \begin{bmatrix} [C_X]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [G_X^{-1}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad [C_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} C_X^{1111} & C_X^{1122} & C_X^{1133} \\ C_X^{2211} & C_X^{2222} & C_X^{2233} \\ C_X^{3311} & C_X^{3322} & C_X^{3333} \end{bmatrix}$$

$$[G_X^{-1}]_{3 \times 3} = ([G_X]_{3 \times 3})^{-1}, \quad \{\alpha_X\} = [\alpha_{11}^X, \alpha_{22}^X, \alpha_{33}^X, 0, 0, 0]^T, \quad \{\alpha_X\} = [C_X] \{\beta_X\}.$$

Матриці жорсткості й податливості блочної структури, а тому

$$([D_\varphi]_{4 \times 4})^{-1} = [C_\varphi]_{4 \times 4}, ([D_X]_{3 \times 3})^{-1} = [C_X]_{3 \times 3},$$

причому блок $[D_X]_{3 \times 3} = [D_\varphi]_{3 \times 3}$ є головним мінором блока $[D_\varphi]_{4 \times 4}$. Можна обмежитися знаходженням обернених матриць, однак чи пов'язані шукані коефіцієнти $[C_X]_{3 \times 3}$ з відомими $[C_\varphi]_{4 \times 4}$, зокрема, з головним 3×3 -мінором $[C_\varphi]_{3 \times 3}$.

З матричного рівняння

$$[D_\varphi]_{4 \times 4} [C_\varphi]_{4 \times 4} = I_4 \text{ або } \begin{bmatrix} [D_\varphi]_{3 \times 3} & [D_\varphi]_{3 \times 1} \\ [D_\varphi]_{1 \times 3} & A_\varphi^{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_\varphi]_{3 \times 3} & [C_\varphi]_{3 \times 1} \\ [C_\varphi]_{1 \times 3} & C_\varphi^{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де $[D_\varphi]_{1 \times 3} = [A_\varphi^{1211}, A_\varphi^{1222}, A_\varphi^{1233}]$, $[C_\varphi]_{1 \times 3} = [C_\varphi^{1211}, C_\varphi^{1222}, C_\varphi^{1233}]$,

отримуємо:

$$\begin{aligned} [D_\varphi]_{3 \times 3} [C_\varphi]_{3 \times 3} + [D_\varphi]_{3 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 3} &= I_3, [D_\varphi]_{3 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 1} + [D_\varphi]_{3 \times 1} C_\varphi^{1212} = 0_3, \\ [D_\varphi]_{1 \times 3} [C_\varphi]_{3 \times 3} + A_\varphi^{1212} [C_\varphi]_{1 \times 3} &= 0_3^T, [D_\varphi]_{1 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 1} + A_\varphi^{1212} C_\varphi^{1212} = 1. \end{aligned}$$

Тут I_3 , I_4 – одиничні матриці розмірності 3 і 4 відповідно; 0_3 – нульовий вектор-стовпець розмірності 3. Зауважимо, що останнє рівняння є скалярним.

Помножимо перше рівняння спереду на обернену до $[D_\varphi]_{3 \times 3}$ матрицю:

$$[C_\varphi]_{3 \times 3} + ([D_\varphi]_{3 \times 3})^{-1} [D_\varphi]_{3 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 3} = ([D_\varphi]_{3 \times 3})^{-1} = ([D_X]_{3 \times 3})^{-1} = [C_X]_{3 \times 3},$$

звідки $[C_X]_{3 \times 3} = [C_\varphi]_{3 \times 3} + ([D_\varphi]_{3 \times 3})^{-1} [D_\varphi]_{3 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 3} = [C_\varphi]_{3 \times 3} (I_3 - [D_\varphi]_{3 \times 1} [C_\varphi]_{1 \times 3})^{-1}$.

Отриманий зв'язок між підматрицями податливості для однонаправленого і симетрично перехресно армованого матеріалу, де необхідно обертати матрицю розмірності 3×3 , має теоретичне значення, однак, на практиці перевагу надають безпосередньому знаходженню матриці $([D_\varphi]_{3 \times 3})^{-1}$.

ліворуч - вхідні дані; праворуч - розрахункові величини для різних кутів
симетричного армування

3D - модель

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
		РАСЧЕТ и СРАВНЕНИЕ свойств АУХЕТС-ПКМ в рамках 2D и 3D МОДЕЛИ при симметричной укладке армирующих волокон под заданным углом																						
1																								
2																								
3		Объемное содержание волокон	ω(-φ)=ω(+φ)																					
4			3D	ед.измер	Угол армирования, [0,90]																			
5		Угол укладки волокон	φ	0	°, гра- дусы	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
6	1	Модулі пружності	E11	160	ГПа	160	157	148	129	100	70,12	46,1	30,02	20,3	14,6	11,33	9,447	8,361	7,735	7,378	7,177	7,069	7,016	7
7	2		E22	7	ГПа	7	7,02	7,07	7,18	7,38	7,735	8,36	9,447	11,3	14,6	20,28	30,02	46,06	70,12	100,2	128,8	148,2	157,5	160
8	3		E33	7	ГПа	7	7,01	7,05	7,12	7,22	7,351	7,5	7,651	7,77	7,812	7,768	7,651	7,5	7,351	7,222	7,123	7,054	7,013	7
9	4	Коефіцієнти Пуассона (мінорні)	NU12	0,01	безрозмірні	0,01	0,17	0,62	1,21	1,68	1,821	1,67	1,389	1,09	0,825	0,609	0,437	0,303	0,201	0,124	0,068	0,03	0,008	4E-04
10	5		NU13	0,01		0,01	-0	-0,2	-0,34	-0,4	-0,43	-0,3	-0,2	-0,07	0,03	0,111	0,174	0,223	0,259	0,287	0,306	0,32	0,327	0,33
11	6		NU23	0,33		0,33	0,32	0,31	0,29	0,259	0,22	0,174	0,11	0,03	-0,073	-0,196	-0,327	-0,428	-0,442	-0,341	-0,177	-0,041	0,01	
12	7	Коефіцієнти Пуассона (мажорні)	PR21	ЛОЖЬ		0	0,01	0,03	0,07	0,12	0,201	0,3	0,437	0,61	0,825	1,089	1,389	1,672	1,821	1,68	1,215	0,622	0,172	0,01
13	8		PR31		0	-0	-0	-0,02	-0	-0,04	-0,1	-0,05	-0,03	0,016	0,076	0,141	0,2	0,247	0,281	0,304	0,319	0,327	0,33	
14	9		PR32		0,33	0,33	0,32	0,3	0,28	0,247	0,2	0,141	0,08	0,016	-0,028	-0,05	-0,053	-0,045	-0,032	-0,019	-0,008	-0,002	4E-04	
15	10	Модулі зсуву	G12	4	ГПа	4	5,14	8,43	13,5	19,7	26,25	32,4	37,48	40,8	41,91	40,77	37,48	32,43	26,25	19,66	13,48	8,435	5,143	4
16	11		G13	4	ГПа	4	3,99	3,96	3,9	3,83	3,746	3,64	3,531	3,41	3,288	3,164	3,044	2,932	2,83	2,742	2,671	2,619	2,587	2,576
17	12		G23	2,575757	ГПа	2,58	2,59	2,62	2,67	2,74	2,83	2,93	3,044	3,16	3,288	3,412	3,531	3,644	3,746	3,833	3,905	3,957	3,989	4
18	13	Коефіцієнти лінійного температурного розширення	α11	0,000001	°C-1	0	0	0	0	0	5E-07	0	4E-07	0	1E-06	2E-06	3E-06	3E-06	4E-06	4E-06	5E-06	5E-06	5E-06	5E-06
19	14		α22	0,000005	°C-1	0	0	0	0	0	4E-06	0	3E-06	0	1E-06	7E-07	4E-07	4E-07	5E-07	6E-07	8E-07	9E-07	1E-06	1E-06
20	15		α33	0,000005	°C-1	0	0	0	0	0	6E-06	0	6E-06	0	6E-06	6E-06	6E-06	6E-06	6E-06	5E-06	5E-06	5E-06	5E-06	5E-06
21						[1]																		
22		Проверка на положительную определенность		0,891		0,891	0,892	0,881	0,832	0,728	0,594	0,471	0,383	0,333	0,317	0,333	0,383	0,471	0,594	0,728	0,832	0,881	0,892	0,891

Програмна реалізація і розрахунок ФМХ ПКМ в електронних таблицях: ліворуч - вхідні дані; праворуч - розрахункові величини для різних кутів симетричного армування

2D - модель

	2D		Угол армирования, [0,90]																				
		ед. измер																					
Угол укладки волокон	φ	0	°, градусы	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	
Модули упругости	E ₁₁	160	ГПа	160	157	148	129	100	70,12	46,1	30,02	20,3	14,6	11,33	9,447	8,361	7,735	7,378	7,177	7,069	7,016	7	
	E ₂₂	7	ГПа	7	7,02	7,07	7,18	7,38	7,735	8,36	9,447	11,3	14,6	20,28	30,02	46,06	70,12	100,2	128,8	148,2	157,5	160	
	E ₃₃	7	ГПа	####	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Коефф. Пуассона	NU12	0,01	NU12	0,01	0,17	0,62	1,21	1,68	1,821	1,67	1,389	1,09	0,825	0,609	0,437	0,303	0,201	0,124	0,068	0,03	0,008	4E-04	
	NU13	0,01	NU13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	NU23	0,33	NU23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	PR21	ЛОЖЬ	PR21	0	0,01	0,03	0,07	0,12	0,201	0,3	0,437	0,61	0,825	1,089	1,389	1,672	1,821	1,68	1,215	0,622	0,172	0,01	
	PR31		PR31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	PR32		PR32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Модули сдвига	G ₁₂	4	ГПа	4	5,14	8,41	13,4	19,6	26,13	32,3	37,3	40,6	41,72	40,58	37,3	32,29	26,13	19,58	13,43	8,412	5,137	4	
	G ₁₃	4	ГПа	4	3,99	3,96	3,9	3,83	3,746	3,64	3,531	3,41	3,288	3,164	3,044	2,932	2,83	2,742	2,671	2,619	2,587	2,576	
	G ₂₃	2,575757	ГПа	2,58	2,59	2,62	2,67	2,74	2,83	2,93	3,044	3,16	3,288	3,412	3,531	3,644	3,746	3,833	3,905	3,957	3,989	4	
Коефф. линейного температурного расширения	α ₁₁	0,000001	°C ⁻¹	0	0	0	0	0	5E-07	0	4E-07	0	1E-06	2E-06	3E-06	3E-06	4E-06	4E-06	5E-06	5E-06	5E-06	5E-06	
	α ₂₂	0,000005	°C ⁻¹	0	0	0	0	0	4E-06	0	3E-06	0	1E-06	7E-07	4E-07	4E-07	5E-07	6E-07	8E-07	9E-07	1E-06	1E-06	
	α ₃₃	0,000005	°C ⁻¹	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
				0																			
Проверка на положительную определенность		1,000	2D	1,000	0,999	0,982	0,918	0,792	0,634	0,493	0,393	0,337	0,319	0,337	0,393	0,493	0,634	0,792	0,918	0,982	0,999	1,000	

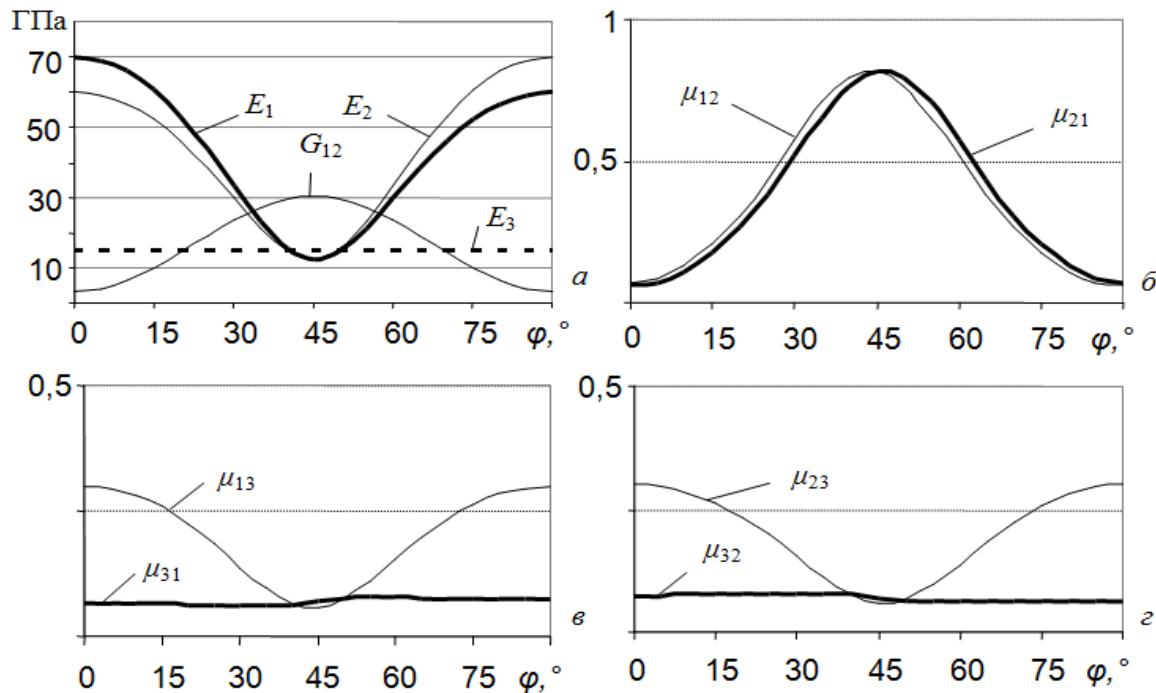
Залежність ФХМ від кута симетричного армування (1)

Матеріал № 1:

$E_1 = 70$; $E_2 = 60$; $E_3 = 15$; $G_{12} = 3,5$; $G_{13} = G_{23} = 3$; $\mu_{12} = 0,07$; $\mu_{13} = \mu_{23} = 0,3$.

Модулі Юнга в площині армування є близькі, а коефіцієнт Пуассона малий.

Тобто доля волокон є суттєвою або матриця має подібні властивості.



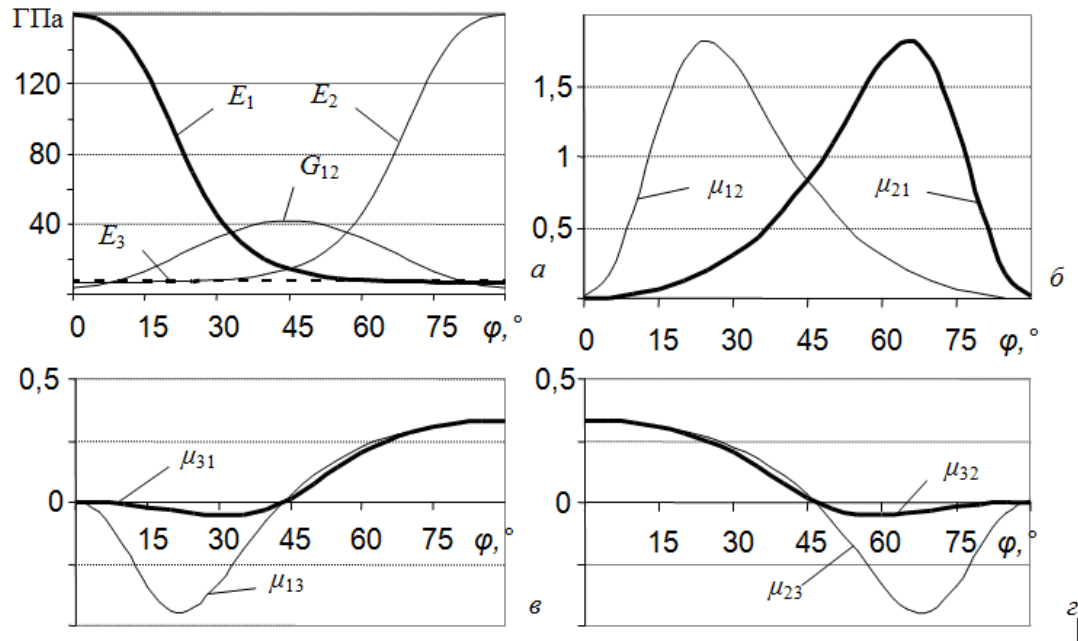
Поведінка модулів E_1 , E_2 і G_{12} кількісно та якісно однаково відображена для обох 3D- і 2D-моделей (рис. а), однак, для кутів армування $40^\circ \dots 50^\circ$ модулі E_1 , E_2 співмірні й менші за E_3 , чого 2D-модель, очевидно, не враховує. Відмітимо, що коефіцієнт Пуассона композиційного матеріалу в діапазоні кутів армування $30^\circ \dots 65^\circ$ перевищує значення 0,5 (рис. 1 б), що є пороговим для ізотропних матеріалів. Специфічні для 3D-моделі ненульові коефіцієнти Пуассона μ_{13} і μ_{23} за альтернативної гіпотези $\varepsilon_{33} \neq 0$ при $E_3(\varphi) = \text{const}$ повторюють поведінку модулів E_1 і E_2 , як і передбачають формули симетрії $\mu_{13} = \mu_{31}E_1/E_3$, $\mu_{23} = \mu_{32}E_2/E_3$ завдяки тому, що коефіцієнти Пуассона μ_{31} і μ_{32} змінюються несуттєво (рис. в, г).

Залежність ФХМ від кута симетричного армування (2)

Матеріал № 2:

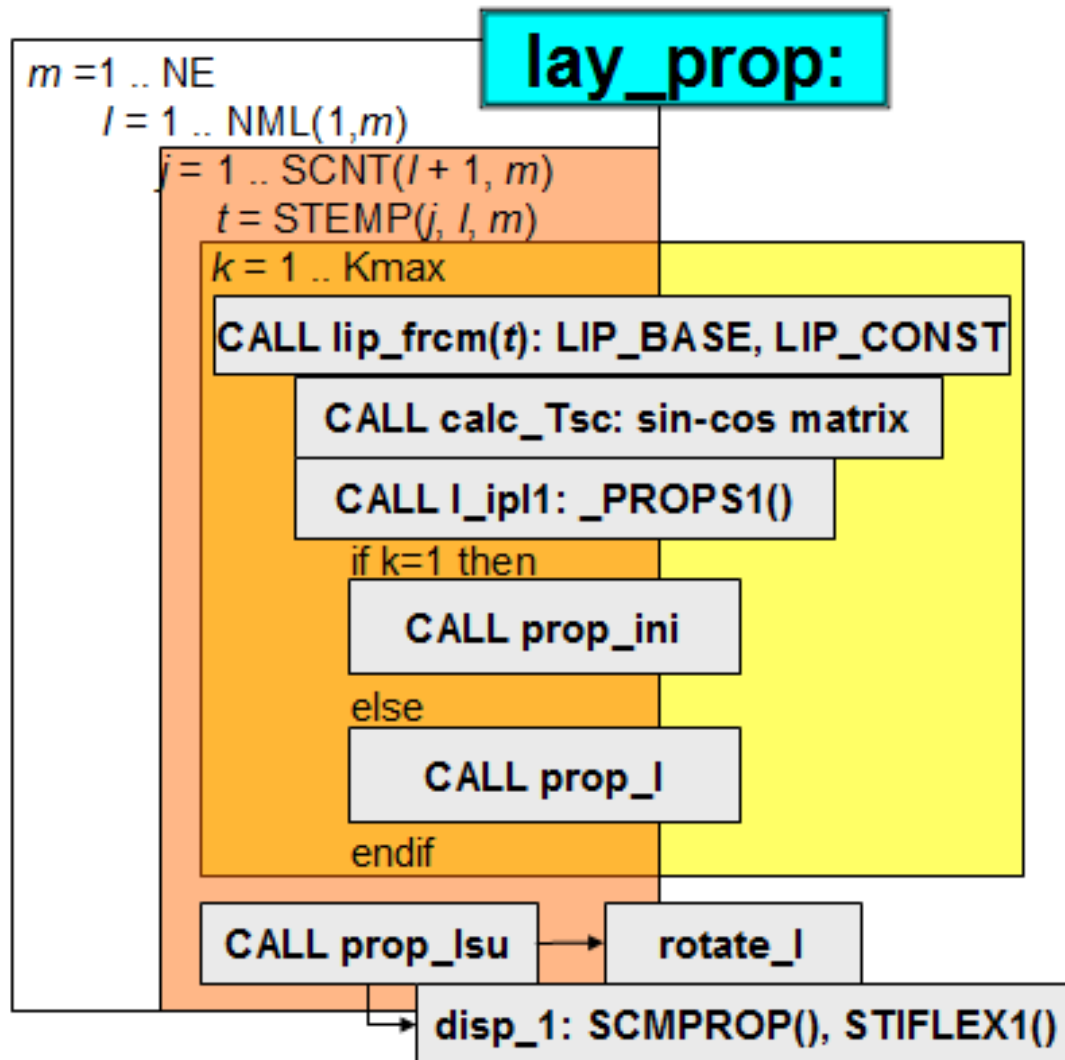
$E_1 = 160$; $E_2 = 7$; $E_3 = 7$; $G_{12} = G_{13} = 4$; $G_{23} = 2,57$; $\mu_{12} = \mu_{13} = 0,01$; $\mu_{23} = 0,33$.

Модуль Юнга вздовж напрямку армування волокон значно вищий, ніж матриці. Коефіцієнти Пуассона в площинах поперек армування малі. У поперечному до напрямку армування волокон перерізі однонаправлено армований матеріал є трансверсально ізотропним.



Внаслідок суттєвої різниці властивостей матриці та волокон є значна асиметрія графіків для E_1 і E_2 , які між собою дзеркально відображені відносно 45° , $E_1(\varphi) = E_2(90^\circ - \varphi)$ (рис. а). Як і для матеріалу № 1, 3D- і 2D-моделі однаково відтворюють поведінку модулів E_1 , E_2 і G_{12} та коефіцієнтів Пуассона μ_{12} , μ_{21} (рис. б), враховуючи ефект високих значень (більших за 0,5) для обох моделей. Коефіцієнти Пуассона μ_{13} , μ_{31} набувають від'ємних значень (як для ауксетичних матеріалів) для кутів армування, менших 45° , а μ_{23} , μ_{32} – для кутів, більших 45° (рис. 2 в, г). Тільки для кутів, близьких до 45° , однак, неодноразово, ці коефіцієнти нульові або близькі до нуля. Тобто ауксетичні властивості [10] перехресно армований композит має проявляти для усього діапазону кутів армування від 0° до 90° , крім цих крайніх значень, що можна вважати для властивостей ортотропного матеріалу тривіальним випадком формул повороту, який полягає в перенумерації осей. Навпаки, у межах 2D-моделі ефект ауксетичного матеріалу не відображається.

Блок-схема розрахунку усереднених ФМХ шару:



ВИСНОВКИ

Якщо гіпотеза $\varepsilon_{33} = 0$ для композитного шару відкидається, або ми використовуємо просторову модель для симетрично перехресно армованого ПКМ, то для розрахунків потрібно знати повний набір ФМХ. Визначальні співвідношення для еквівалентного ортотропного матеріалу, де виділено вклад напруження σ_{33} , використано для побудови теоретичних залежностей пружних модулів від кута повороту волокон для однонаправлено армованого композиту, а в разі симетричної укладки – для практично важливого випадку перехресного армування. Запропонована 3D-модель порівнювалася з класичним 2D-підходом ($\varepsilon_{33} = 0$). Очікуване уточнення має

порядок $\mu_{13}^2 E_3$, що для багатьох матеріалів є незначним, як видно з прикладів розрахунку. З іншого боку, це підтверджує коректність 3D-моделі, а обґрунтованість її застосування для розрахунків просторового напруженого стану є вищою, ніж для 2D-моделі. Для деяких варіантів властивостей сучасних композитів виявлено якісні особливості, що враховує 3D-модель: високі (більше 0,5) та від'ємні значення коефіцієнтів Пуассона.

Співвідношення 3D-моделі армованого композиту отримані достатньо просто (без мікроструктурних гіпотез, наприклад, щодо взаємодії волокон з матрицею ПКМ) і є свого роду надбудовою над класичним 2D-підходом. Їхня програмна реалізація може бути включена в інженерні розрахунки, зокрема, методом скінченних елементів. Якщо кут армування змінний, то використання автоматизованого процесу перерахунку властивостей ПКМ особливо важливе. Також 3D-модель може буде використана для побудови моделі пакету ортотропних шарів з урахуванням шарів різної товщини тощо.

Дякуємо за увагу!