



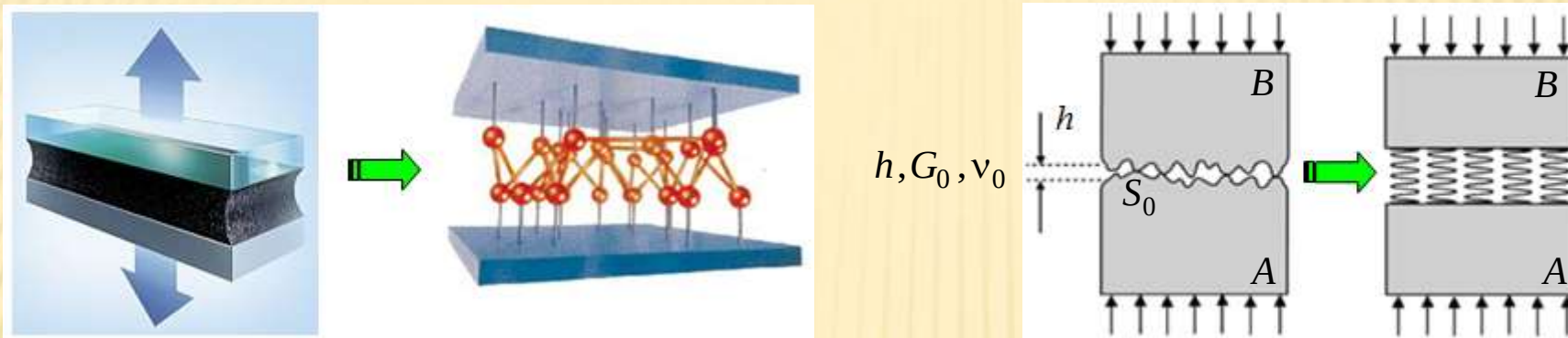
II МІЖНАРОДНА
НАУКОВО-ТЕХНІЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ
«ДИНАМІКА, МІЦНІСТЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ В
МАШИНОБУДУВАННІ» (ДММ-2020)
05-08 жовтня 2020 р.



ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОМПОЗИТУ З ТРІЩИНАМИ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ЙОГО КОМПОНЕНТ

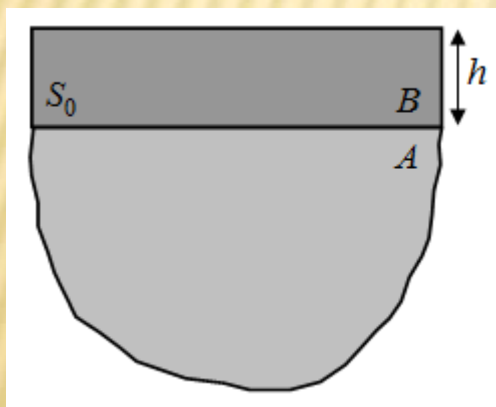
Станкевич В.З.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.
Підстригача НАН України , 2020*



Крайові умови “моделі пружинного контакту” на серединній поверхні прошарку ($\lambda \gg h$)

$$\sigma_{j3}^B(x_0, \omega) = \sigma_{j3}^A(x_0, \omega) = \frac{G_0}{h} \left(1 + \frac{\delta_{j3}}{1 - 2\nu_0} \right) [u_j^B(x_0, \omega) - u_j^A(x_0, \omega)], \quad x_0 \in S_0, \quad j = \overline{1, 3}$$

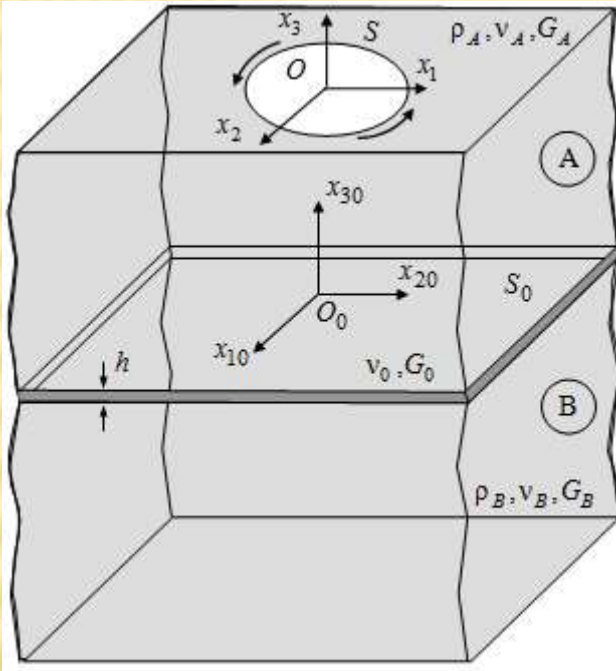


Тонке покриття

**Ефективні крайові умови (ЕКУ) для тонкого покриття
на поверхні півпростору ($\lambda \gg h$)**

$$\sigma_{j3}^A(x) = \rho_B h \left\{ -\omega^2 u_j^A - c_{2B}^2 \left[\frac{\partial^2 u_j^A(x)}{\partial x_2^2} + 4 \left(1 - \frac{c_{2B}^2}{c_{1B}^2} \right) \frac{\partial^2 u_j^A(x)}{\partial x_1^2} + \left(3 - 4 \frac{c_{2B}^2}{c_{1B}^2} \right) \frac{\partial^2 u_{3-j}^A(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\}$$

Біматеріал з пружним прошарком та тріщиною скруту



$$N_j^+(\mathbf{x}, t) = -N_j^-(\mathbf{x}, t) = (-1)^{j+1} N_0 x_{3-j}/a \exp(-i\omega t), \quad j=1, 2$$

3

ПОСТАВА ЗАДАЧІ

$$\Delta_3 u_j^D + k_{2D}^2 u_j^D = 0, \quad j=1, 2, \quad D=A, B \quad (1)$$

$$k_{2D} = \omega/c_{2D}; \quad c_{2D} = \sqrt{G_D/\rho_D}, \quad D=A, B$$

Пружинні крайові умови на серединній поверхні прошарку ($\lambda \gg h$)

$$\sigma_{j3}^B(x_0, \omega) = \sigma_{j3}^A(x_0, \omega) = \frac{G_0}{h} [u_j^B(x_0, \omega) - u_j^A(x_0, \omega)], \quad x_0 \in S_0, \quad j=1, 2 \quad (2)$$

Крайові умови на поверхні тріщини

$$\sigma_{3j}^A(\mathbf{x}, \omega) = (-1)^{j+1} x_{3-j}/a N_0, \quad j=1, 2, \quad \mathbf{x} \in S \quad (3)$$

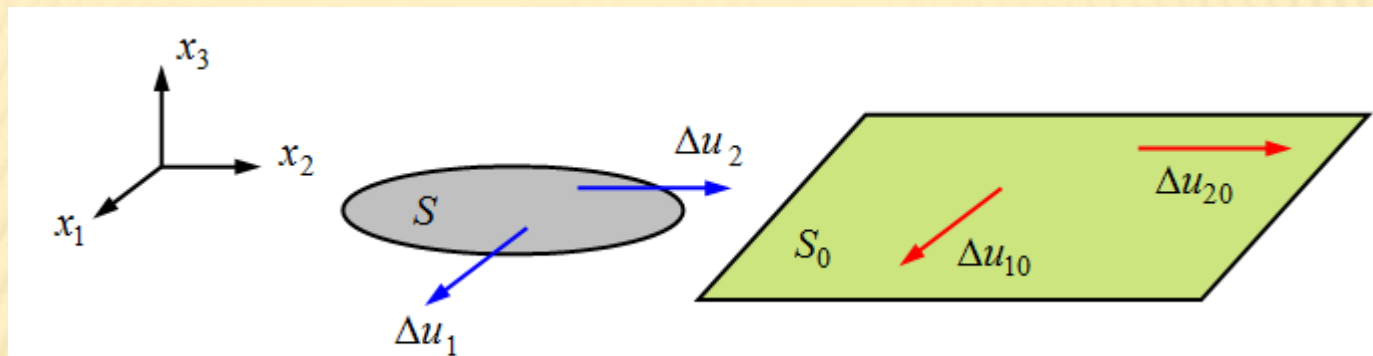
Інтегральні подання для переміщень і напружень

$$u_j^D(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{30}} \left\{ \delta_{DA} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^D(\xi, \omega) \Phi_2^D(x_0, \xi) dS_\xi + \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi \right\}, \quad j=1, 2 \quad (4)$$

$$\sigma_{j3}^D(\mathbf{x}) = -G_D (\Delta_2 + k_{2D}^2) \left\{ \delta_{DA} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^D(\xi, \omega) \Phi_2^D(x_0, \xi) dS_\xi + \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi \right\} \quad (5)$$

$$\Phi_2^D(x, \xi) = \frac{\exp(i k_{2D} |x - \xi|)}{|x - \xi|}$$

Густини потенціалів



Задоволення крайових умов на інтерфейсі

$$G_B \left(\Delta_2 + k_{2B}^2 \right) \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^B(\xi, \omega) \Phi_2^B(x_0, \xi) dS_\xi - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^B(\xi, \omega) \Phi_2^B(x_0, \xi) dS_\xi +$$

$$+ \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^A(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi = H_{1j}(x_0, \omega), \quad (6)$$

$$G_A \left(\Delta_2 + k_{2A}^2 \right) \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^A(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^B(\xi, \omega) \Phi_2^B(x_0, \xi) dS_\xi +$$

$$+ \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \Delta u_{j0}^A(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi = H_{2j}(x_0, \omega), \quad j = 1, 2, \quad x_0 \in S_0$$

СЛАР (крайові умови у Фур'є-зображеннях)

$$\begin{cases} \left(G_B R_{2B}(\rho) + \frac{G_0}{h} \right) \Delta \tilde{u}_{j0}^B + \frac{G_0}{h} \Delta \tilde{u}_{j0}^A = -\frac{1}{2\pi} \tilde{H}_{1j}(\xi, \omega) \\ \frac{G_0}{h} \Delta \tilde{u}_{j0}^B + \left(G_A R_{2A}(\rho) + \frac{G_0}{h} \right) \Delta \tilde{u}_{j0}^A = -\frac{1}{2\pi} \tilde{H}_{2j}(\xi, \omega) \end{cases}$$

$$H_{lj}(x_0, \xi) = -\delta_{l2} G_A (\Delta_2 + k_{2A}^2) \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(x_0, \xi) dS_\xi, \quad l=1,2$$

Подання густин потенціалів по інтерфейсу через функції зміщень поверхонь тріщини

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{j0}^B(\xi, \omega) \\ \Delta u_{j0}^A(\xi, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{\rho}{\Delta(\rho)} \sum_{l=1}^2 b_{jl}(\rho, \omega) H_{lj}(\xi, \omega) J_0(\rho|\xi - \eta|) d\rho dS_\eta.$$

$$b_{\begin{Bmatrix} 11 \\ 22 \end{Bmatrix}}(\rho, \omega) = G_0 + h \begin{Bmatrix} G_A R_{2A}(\rho) \\ G_B R_{2B}(\rho) \end{Bmatrix}, \quad b_{12}(\rho, \omega) = b_{21}(\rho, \omega) = -G_0,$$

$$\Delta(\rho) = G_0 [G_A R_{2A}(\rho) + G_B R_{2B}(\rho)] + h G_A G_B R_{2A}(\rho) R_{2B}(\rho),$$

$$R_{2D}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - k_{2D}^2}, \quad D = A, B$$

Граничні інтегральні рівняння задачі ГІР задачі

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_2 + k_{2A}^2 \right) \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{e^{ik_A|x-\xi|}}{|x-\xi|} dS_\xi + \\ & + \iint_S \Delta u_j(\xi) \int_0^\infty \frac{\rho R_{2A}(\rho) \Omega_2(\rho)}{\Delta_2(\rho)} e^{-2dR_{2A}(\rho)} J_0(\rho r) d\rho dS_\xi = \frac{(-1)^{j+1} N_0 x_{3-j}}{G_A}, \quad x \in S, \quad j=1,2, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \Omega_2(\rho) \\ \Delta_2(\rho) \end{Bmatrix} = G_0 [G_B R_{2B}(\rho) \mp G_A R_{2A}(\rho)] \mp h G_B R_{2B}(\rho) G_A R_{2A}(\rho).$$

Виділені особливості ГІР

$$\left(\Delta_2 + k_{2A}^2 \right) \frac{\exp(i k_{2A} |x-\xi|)}{|x-\xi|} = \frac{1}{|x-\xi|^3} + \frac{1}{2} \frac{k_{2A}^2}{|x-\xi|} + \tilde{K}(x, \xi), \quad |x-\xi| \rightarrow 0$$

$$\Delta u_j(x, \omega) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_j(x, \omega), \quad j=1,2$$

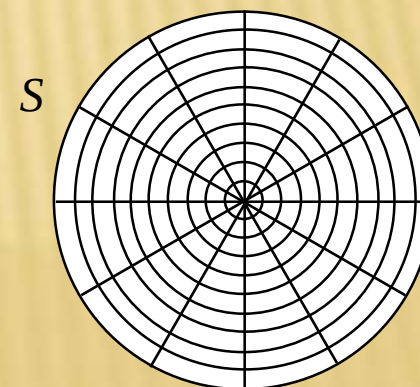
ДКІН поздовжнього зсуву

$$K_{III}^d(\varphi, k_{2A}) = -2G_A \pi \sqrt{\pi a} \left[\beta_1(a, \varphi, k_{2A}) \sin \varphi - \beta_2(a, \varphi, k_{2A}) \cos \varphi \right]$$

$$\bar{K}_{III} = \left| K_{III}^d \right| / K_{III}^{st}, \quad K_{III}^{st} = \frac{4}{3} N_0 \sqrt{a/\pi}$$

Гранично-елементне розбиття області дефекту

$$n_r = 20, \quad n_\varphi = 24$$



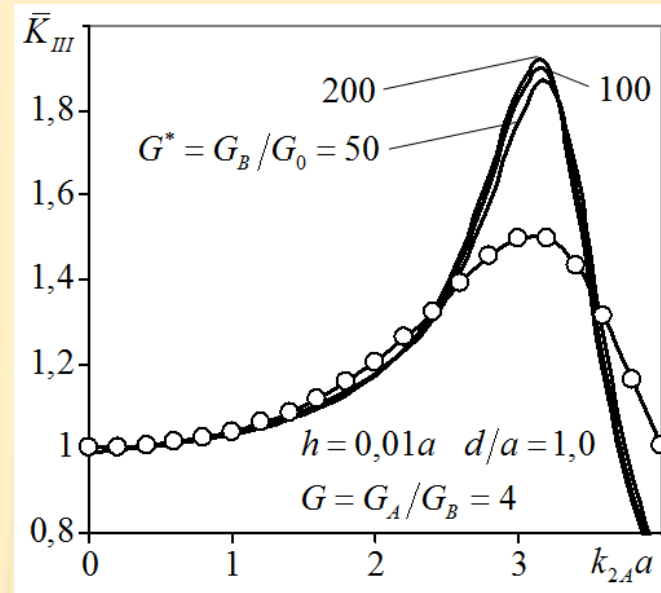
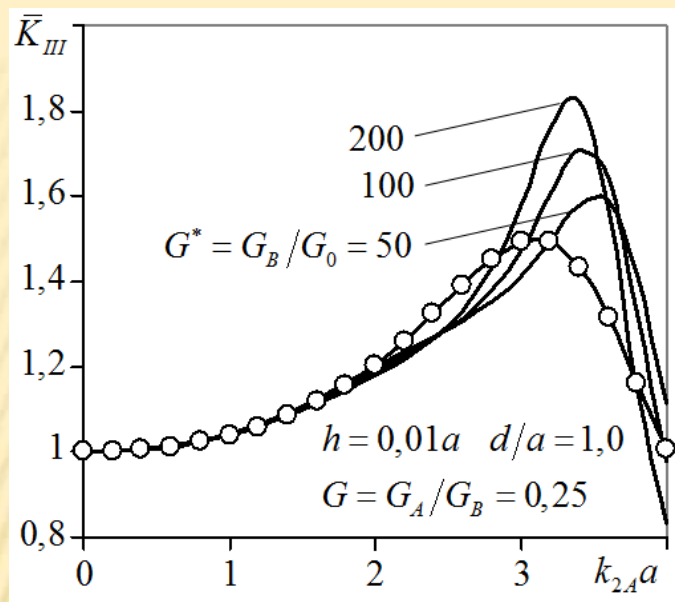


Рис. 1. Частотні залежності нормованих значень ДКІН $\bar{K}_{III}$ від параметрів контрастностей жорсткостей матеріалів тіла

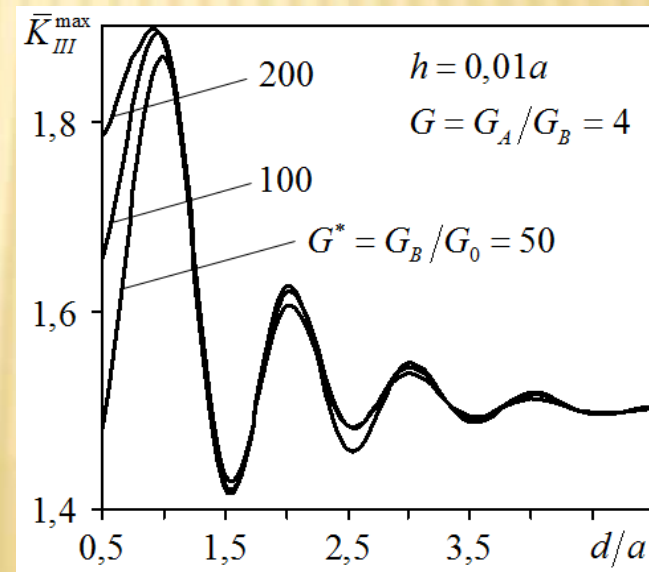
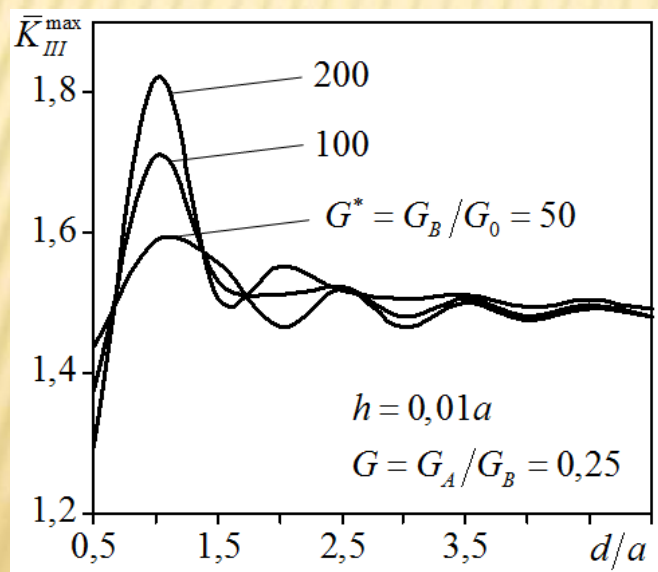
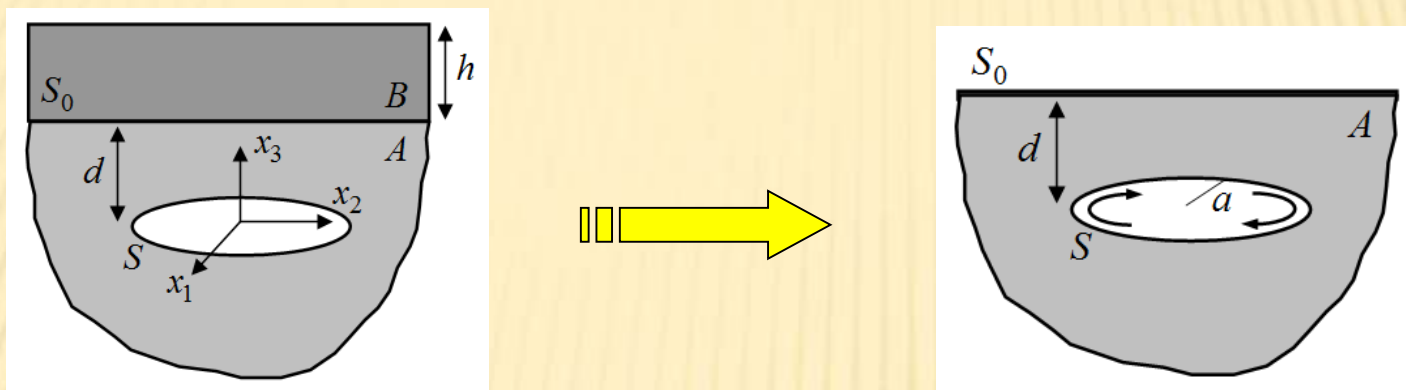


Рис. 2. Залежності максимумів ДКІН $\bar{K}_{III}^{\max}$ від глибини d залягання тріщини

Усталені коливання півпростору з круговою тріщиною скруту за наявності тонкого пружного покриття



**Ефективні крайові умови (ЕКУ) задачі у спрощеній постановці
(довгохвильова асимптотика ($\lambda \gg h$))**

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = h G_B (\Delta_2 + k_{2B}^2) u_j^A(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in S_0 \quad (8)$$

Інтегральні подання розв'язків

$$u_j^A(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_{30}} \left\{ \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi, \omega) \Phi_2^A(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi + \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi \right\}, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = -G_A (\Delta_2 + k_{2A}^2) \left\{ \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi, \omega) \Phi_2^A(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi + \iint_S \Delta u_j(\xi, \omega) \Phi_2^A(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi \right\}$$

ГІР задачі

$$(\Delta_2 + k_{2A}^2) \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{\exp(ik_{2A}|x - \xi|)}{|x - \xi|} dS_\xi +$$

$$+ \iint_S \Delta u_j(\xi) \int_0^\infty \frac{\tau R_{2A} \Omega(\tau)}{\Delta(\tau)} \exp(-2dR_{2A}) J_0(\tau|x - \xi|) d\tau dS_\xi = (-1)^{j+1} \frac{x_{3-j} N_0}{G_A}, \quad j=1,2, \quad x \in S \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Omega(\tau) \\ \Delta(\tau) \end{cases} = G_A R_{2A}(\tau) \pm h G_B R_{2B}^2(\tau), \quad R_{2D}(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_{2D}^2}, \quad D = A, B$$

Числові результати

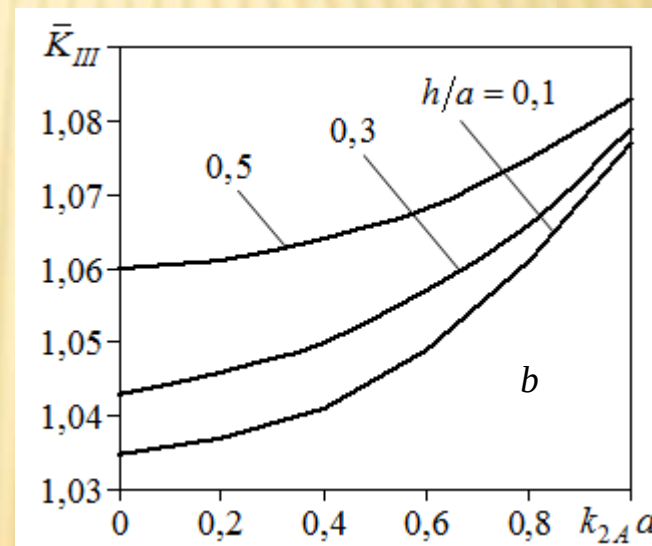
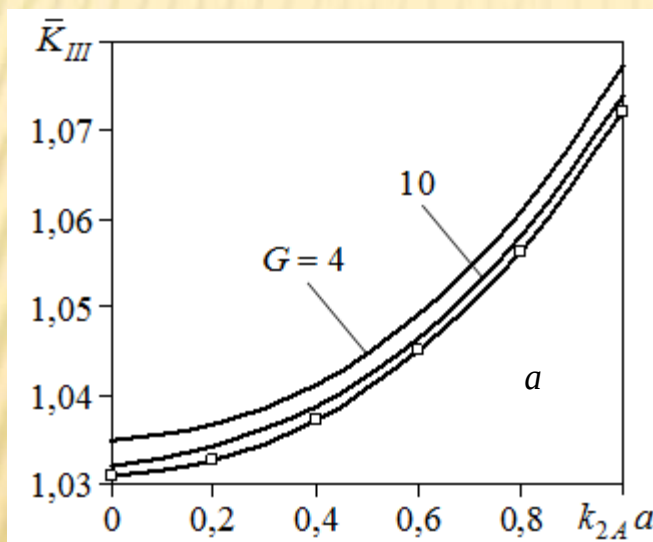


Рис. 3. Частотні залежності нормованих значень ДКІН $\bar{K}_{III}$ від параметру $G = G_A/G_B$ контрастності жорсткостей матеріалів та товщини покриття за фіксованих параметрів $\rho_A = \rho_B$, $d = 0,5a$:
 $a - h = 0,1a$; $b - G = 4$



ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!