

**ТОПОЛОГІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ 2D-МОДЕЛЕЙ**  
**НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ**  
**НЕРІВНОМІРНОСТІ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

**І. В. Янчевський, В. Ф. Кришталь**  
КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

## Вступ

Дві задачі при проектуванні топологічно оптимальних конструкцій:

- задача зменшення пружної піддатливості елемента при заданому об'ємі матеріалу,
- задача мінімізації об'єму (матеріалу) конструктивного елемента при одночасному обмеженні виникаючих механічних напружень.

Розв'язання першої задачі

SIMP-метод (Solid Isotropic Material with Penalization):

- розбиття області проектування на СЕ з введенням змінної відносної густини  $\rho_i$  матеріалу ( $0 \leq \rho_i \leq 1$ ):

$\rho_i = 0$  - відсутність СЕ,  $\rho_i = 1$  - повністю «твердий» СЕ.

- модуль Юнга  $E = E(\rho^p)$ .

- "штрафування" елементів з густиною  $\rho'_i > 1$  або  $\rho'_i \sim 0$ .

## Розв'язання другої задачі

### Метод ESO (Evolutionary Structural Optimization):

- визначення розподілу напружень в конструкції на підставі СЕ-аналізу,
- видалення недовантажених на заданий відсоток СЕ за «критерієм видалення» (порівняння значення напружень за Мізесом для усієї конструкції і для окремого елемента),
- збільшення значення «критерія видалення» та повторення циклу СЕ-аналізу з видаленням елементів до досягнення стійкого результату.

Недолік методу – видалений на попередніх ітераціях матеріал не може бути використаний в подальшому.

### Метод BESO (Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization Method):

- екстраполяція переміщень видалених елементів на підставі СЕ-аналізу і визначення їх індексу чутливості (зміна піддатливості елемента внаслідок видалення або додавання елемента);
- ранжування СЕ за числами чутливості,
- видалення «заповнених» матеріалом елементів конструкції з мінімальним числом чутливості,
- повернення в структуру «пустих» елементів з максимальним індексом чутливості.

Аналіз напружень в задачах топологічної оптимізації:

- Інженерний підхід при проектуванні.
- Отримання рівноміцних конструкцій

Проблеми оптимізації топології з обмеженням напружень:

- нелінійність напруження
- сингулярність: невизначенність напруження в областях, де густина наближається до нуля (поява ділянок з площею поперечного перерізу, що наближається до нуля - фермні конструкції).

Шляхи обмеження напружень в задачах оптимізації структурної топології:

- підхід локальних обмежень, як обмеження напружень в визначених точках;
- використання функції агрегації ( $p$ -норма або функція Крейссельмейера-Штайнхаузера).

## **Мета роботи**

Запропонувати альтернативний критерій формування структури конструктивного елемента з використанням інтегрального параметру нерівномірності розподілу напружено-деформованого стану і показати його ефективність на конкретних чисельних прикладах.

Основа розробленого алгоритму - метод пропорційної топологічної оптимізації з обмеженням напружень.

## Класична постановка задачі топологічної оптимізації

Задача топологічної оптимізації конструктивного елемента з обмеженнями рівня напруженого стану:

- мінімізація умовної маси розрахункової геометричної області елемента
- виконання умови міцності

$$\begin{cases} \sum_i \rho_i V_i \rightarrow \min & (i=\overline{1, N}); \\ \tilde{\sigma}_i \leq [\sigma]. \end{cases} \quad (1)$$

$N$  - кількість СЕ,

$\tilde{\sigma}_i$  - механічне напруження СЕ

$\rho_i$  - «відносна» густина СЕ

$V_i$  - об'єм (площа у випадку 2D моделей) СЕ

Розрахункова змінна – «відносна» густина  $\rho$  СЕ:

a)  $0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1$ ;  $\rho_{\min}$  – мінімальне значення густини,

b)  $m_i = \rho_i V_i$  - маса,

c)  $E(\rho) = E_{\min} + \rho^p \cdot (E_0 - E_{\min})$ , (2)

де  $E_{\min} = \min(E)$  – характеристика «пустих» елементів з  $0 \leq \rho \leq \rho_{\min}$ ;

$E_0 = 1$ ;

$p$  – коефіцієнт «штрафу» ( $E_{\min} = 10^{-9}$ ,  $p = 3$ ).

Механічне напруження  $\tilde{\sigma}_i$  - напруження за Мізесом, обчислене в геометричному центрі СЕ.

Для 2D моделі  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\}^T$  для відповідного СЕ:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}. \quad (3)$$

Визначення тензору  $\boldsymbol{\sigma}$  за МСЕ (плоский напружений стан, лінійні функції форми, білінійний квадратний СЕ):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \{u_{2x} \quad u_{2y} \quad u_{4x} \quad u_{4y} \quad u_{3x} \quad u_{3y} \quad u_{1x} \quad u_{1y}\}^T.$$

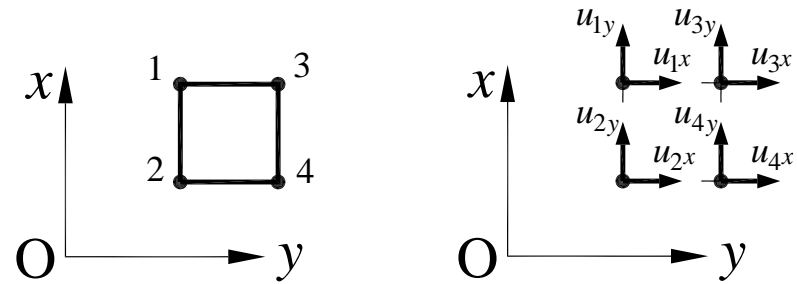
$\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу СЕ

$\mathbf{u}$  - вектора вузлових переміщень СЕ

$\mathbf{D} = \mathbf{D}(E, \nu)$  – матриця пружних постійних);

$\mathbf{B}$  – матриця похідної функції форми.

Нумерація вузлів СЕ:



Компоненти вектора  $\mathbf{u}$  визначаються з системи рівнянь

$$\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{F}, \quad (5)$$

- $\mathbf{K}$  – глобальна матриця жорсткості,
- $\mathbf{U}$  – глобальний вектор переміщень ( $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}$ );
- $\mathbf{F}$  – вектор граничних умов.



Обчислення  $\rho'_i$  за результатами СЕ-аналізу (4) і (5):

$$\rho'_i = \alpha \cdot \rho_i^{\text{prev}} + (1 - \alpha) \cdot \rho_i^{\text{opt}}, \quad \rho_i^{\text{opt}} = R \frac{\tilde{\sigma}_i^q}{\sum_i \tilde{\sigma}_i^q}. \quad (6)$$

$\rho_i^{\text{prev}}$  - густина на попередній ітерації;

$\rho_i^{\text{opt}}$  - «оптимальна» густина;

$\alpha$  – «коефіцієнт історії»: ( $\alpha = 0.5$  -  $\rho'_i$  є середнє арифметичнє  $\rho_i^{\text{prev}}$  і  $\rho_i^{\text{opt}}$ ,

$\alpha = 0$  -  $\rho_i^{\text{prev}}$  не враховується);

$R$  – залишкова кількість матеріалу (осереднена густина моделі);

$q$  – показник степеня.

$\alpha$  і  $q$  - визначають ефективність/збіжність розв'язання задачі топологічної оптимізації (1).

$q=2$  – кількість матеріалу розподіляється серед СЕ пропорційно  $\tilde{\sigma}_i^2$ .

Фільтрація попереднього значення густини  $\rho'_i$  - заключний етап ітерації:

- локальне осереднення густини в околі конкретного СЕ,
- збереження значення осередненої густини усієї розрахункової області  $\sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$ .

Мета фільтрації - уникнути особливостей результату топологічної оптимізації:

- явища «шахової дошки»,
- зубчасті краї,
- вузькі елементи,
- гострі границі.

Алгоритм фільтрації

$$\rho_i = \sum_j w_{ij} \rho'_j / \sum_j w_{ij}; \quad 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1. \quad (7)$$

$\rho_i$  - «відфільтрована» густина СЕ;

$w_{ij}$  - вагова функція:

$$w_{ij} = \begin{cases} (r_0 - r_{ij}) / r_0 & \text{при } r_{ij} < r_0; \\ 0 & \text{при } r_{ij} \geq r_0; \end{cases}$$

$r_{ij}$  - відстань між  $i$  та  $j$  елементами;

$r_0$  - радіус «фільтра».

## Алгоритм топологічної оптимізації

- ◆ Налаштування векторів  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  і матриць  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{K}$  для СЕ-аналізу і фільтрації
- ◆ Запуск основного циклу топологічної оптимізації
  - виконання СЕ-аналізу: визначення поля деформацій (5) і механічних напружень (4)
  - обчислення еквівалентних напружень  $\tilde{\sigma}_i$  (3) СЕ
  - перевірка критеріїв зупинення  $\tilde{\sigma}_i \leq \max(\tilde{\sigma}_i) = [\sigma]$  (переривання, якщо їх задоволено)
  - запуск алгоритму визначення «умовної» густини елементів:
    - Визначити цільову кількість матеріалу  $R = \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$
    - При невиконанні умови міцності  $\max(\tilde{\sigma}_i) > [\sigma]$  збільшення кількості матеріалу  $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i + \Delta$
    - При виконанні умови міцності зменшення кількості матеріалу  $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i - \Delta$
    - Обнулити дані про густину ( $\rho_i = 0$ )
    - Доки  $R = \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$  не буде досить малим
      - Визначити  $\rho_i^{\text{opt}}$  і розподілити  $\rho'_i$
      - Застосувати фільтр (7) для обчислення густини  $\rho_i$
      - Оновити поле розподілу густини  $\rho_i$

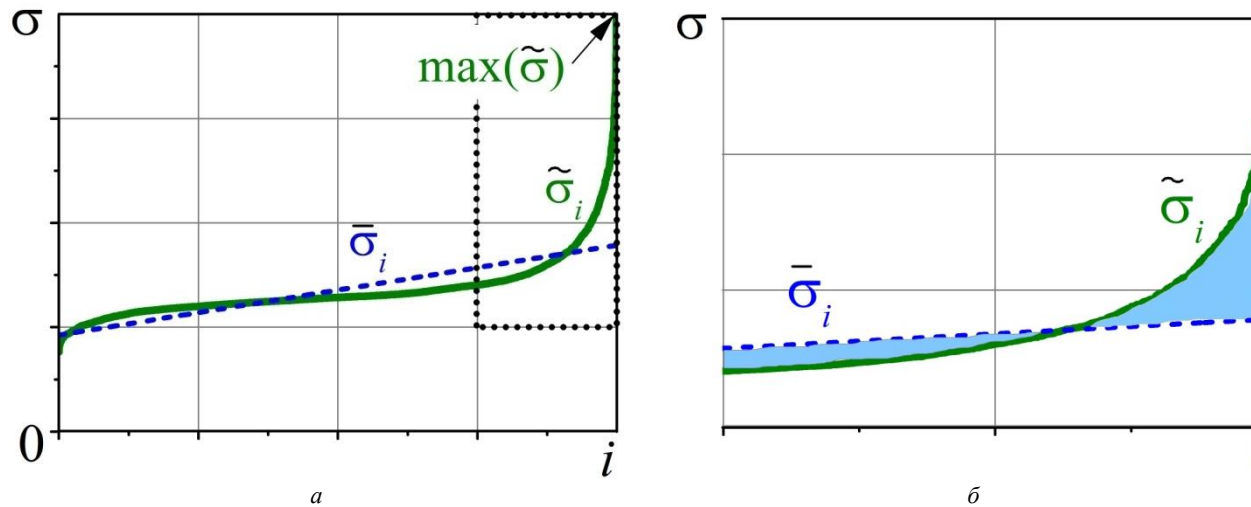
Алгоритм реалізовано в роботі:

Biyikli E., To A.C. Proportional Topology Optimization: A new non-gradient method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB. PLoS ONE. 2014. N. 10. P. 1–18.

### Недоліки алгоритму

- а) необхідність мати у вхідних даних наперед невідоме значення  $[\sigma]$  (узгоджують з полем механічного напруження деталі) при дії одиничного навантаження.  
Визначення і коригування  $[\sigma]$  необхідно проводити в ручному режимі.
- б) використання  $\max(\tilde{\sigma}_i)=[\sigma]$  - відображення напруженого стану в околі певного концентратора напружень .

Нерівномірність розподілу механічних напружень  $\tilde{\sigma}_i$  елементів СЕ-моделі з ненульовою густиною ( $\rho_i > \rho_{\min}$ ):



$\max(\tilde{\sigma}_i)=[\sigma]$  має суттєве перевищення над  $\bar{\sigma}_i$  (осереднене значення напружень)  
 $\bar{\sigma}_i$  – лінійна апроксимація (метод найменших квадратів) значень  $\tilde{\sigma}_i$ .

У даній роботі запропоновано:

альтернативну умову для системи

$$\begin{cases} \sum_i \rho_i V_i \rightarrow \min \quad (i=\overline{1, N}); \\ \tilde{\sigma}_i \leq [\sigma] = \max(\tilde{\sigma}_i). \end{cases} \quad (1)$$

у вигляді оптимізаційної задачі

$$\begin{cases} \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i \rightarrow \min; \\ \sum_i |\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| / \sum_i |\bar{\sigma}_i| \rightarrow \min. \end{cases} \quad (8)$$

$R = \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i \rightarrow \min, i=\overline{1, N}$  - мінімізація осередненого значення густини  $R$ ;

$\sum_i |\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| / \sum_i |\bar{\sigma}_i| \rightarrow \min$  - мінімізація відношення площі області  $\|\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}\|_1$  до площі трапеції  $\|\bar{\sigma}\|_1$  під  $\bar{\sigma}_i$ .

$$\begin{cases} R \rightarrow \min; \\ X \rightarrow \min. \end{cases} \quad (9)$$

де  $X = \|\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}\|_1 / \|\bar{\sigma}\|_1$ .

## Чисельні результати

### Умови розрахунків

- плоскі розрахункові схеми,
- одиничне навантаження ( $P=1$ ),
- СЕ є квадрат з одиничною довжиною сторін ( $V_i=1$ ),
- габарити :  $s=40$ ,
- максимальні значення механічного напруження:

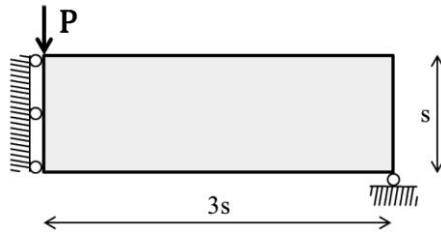
mbb-балка –  $[\sigma]=1,08$ ,

консоль (cantilever beam) –  $[\sigma]=0,57$ ,

L-балка –  $[\sigma]=1,05$ .

## Топологічна оптимізація 2D-моделей

Схема



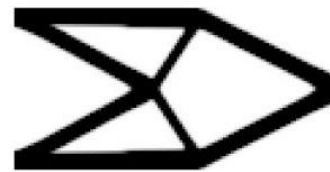
Критерії (1)



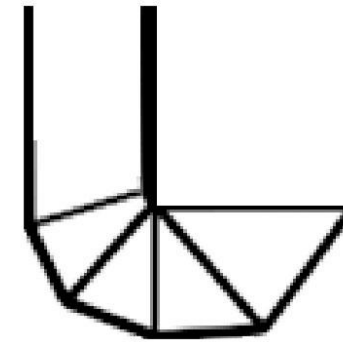
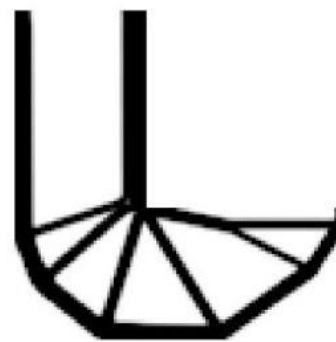
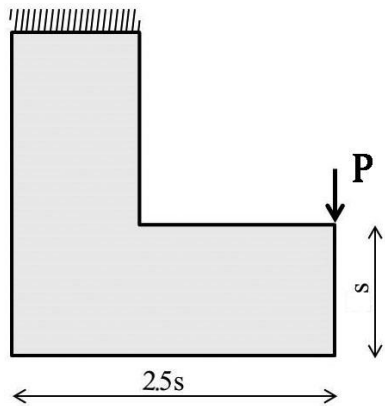
Критерії (9)



а) mbb-балка



б) консоль (cantilever beam)



в) L-балка

## Осереднена густина R оптимізованих конструктивних елементів і їх індекс контрастності C

Схема	Густина R		Індекс c	
	Критерії (1)	Критерії (9)	Критерії (1)	Критерії (9)
mbb-балка	0.31	0.20	0.83	0.812
консоль	0.34	0.16	0.88	0.856
L-балка	0.33	0.21	0.85	0.848

- осереднена густина R моделі за критерієм (9) має «більш легкий» результат у порівнянні з (1) ( $\approx 40\%$ ),
- індекси контрастності C для обох критеріїв відрізняються несуттєво:

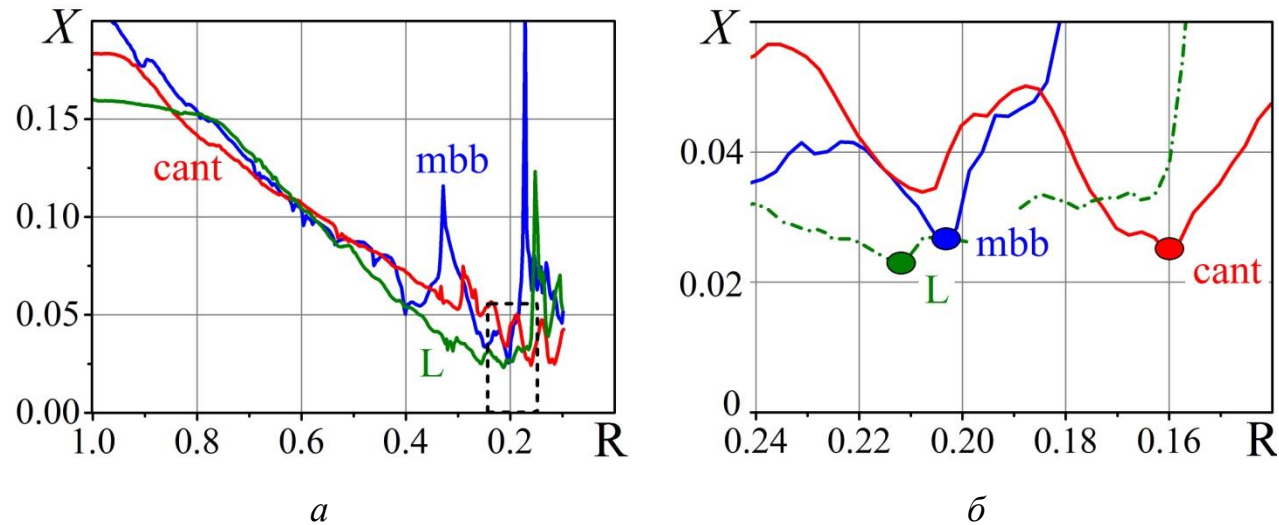
$$C = 1 - \frac{N_p}{N},$$

C - частка «скінченних елементів» з граничними значеннями густини ( $\rho \sim \rho_{\min}$  і  $\rho \sim \rho_{\max}$ ),

$N_p$  – кількість скінченних елементів з «густиною»  $\rho_{\min} < \rho < 1 - \rho_{\min}$  ( $\rho_{\min} = 0.01$ ).



Графік  $X = X(R)$  для трьох розрахункових схем (а) та його фрагмент (б).



Недоліки критерію (9):

- необхідність розв'язання задачі на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини  $R$ ,
- збільшення часу розв'язання задачі топологічної оптимізації (9) у порівнянні з постановкою (1).

Переваги критерію (9):

- мінімальна кількість вхідних даних,
- відсутність потреби попереднього визначення  $[\sigma]$ ,
- критерій  $X(R) \rightarrow \min$  є інтегральний критерій, тому розв'язок є більш стійким до похибок вхідних даних та неточностей у обчисленнях.

## Висновки

В роботі представлено новий критерій для топологічної оптимізації конструктивного елемента, який орієнтований на мінімізацію нерівномірності розподілу напруженого його стану.

На відміну від класичних алгоритмів топологічної оптимізації на основі умови міцності, запропонований алгоритм використовує інтегральну оцінку напруженого стану, що дозволяє зменшити вплив локальних пікових значень напружень і забезпечити кращу рівномірність проектної деталі.

Зазначений інтегральний критерій може бути інтерпретований як відношення відхилення впорядкованих значень еквівалентних напружень від лінійної їх апроксимації до середнього значення.

До недоліків методу слід віднести потребу у пошуку оптимального результату на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини розрахункової області.

Принципові переваги представленого методу - зменшена кількість вхідних даних, забезпечення кращої рівномірності оптимізованої топології, наявність єдиного результату оптимізації, нечутливість до похибок у обчисленнях.

Ефективність критерію підтверджена на чисельних прикладах з традиційними розрахунковими схемами.