НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ІМ. А. М. ПІДГОРНОГО

КОБИЛЬСЬКА ОЛЕНА БОРИСІВНА

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ З РУХОМИМИ ТА НЕРУХОМИМИ ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків–2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Кременчуцькому національному університеті імені Михайла Остроградського

Науковий консультант: доктор технічних наук, професор
Ляшенко Віктор Павлович,
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського,
завідувач кафедри інформатики і вищої математики

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Угрюмов Михайло Леонідович,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, професор кафедри теоретичної та прикладної системотехніки

доктор технічних наук, професор
Бомба Андрій Ярославович,
Національний університет водного господарства та природокористування,
професор кафедри комп’ютерних наук та прикладної математики

доктор технічних наук, професор
Суворова Ірина Георгіївна,
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник відділу нетрадиційних енерготехнологій

Захист відбудеться «04» березня 2021 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 при Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий «   »   2020 р.

Учений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 64.180.01
доктор технічних наук, професор   О.О. Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У промисловості існує багато технологічних процесів, у яких важливу роль відіграє теплообмін у складних системах. Такими системами у металургії є прокатні стани, обладнання для 3-D друку та термічної обробки металів, у електромеханіці – електричні машини, у яких під дією струму виділяється тепло та відбувається теплообмін між обмотками.

Процес побудови адекватних моделей теплових процесів, які відбуваються в складних системах, надає широкі можливості для вивчення властивостей систем і принципів теплообміну з навколишнім середовищем. У більшості випадків вимірювання та контроль температури у складній системі, з різних причин, проводити складно або взагалі неможливо. Керування процесами теплообміну тут відбувається або на основі експерименту, або на основі розв’язання обернених задач для рівняння теплопровідності, що розглядаються в рамках математичних моделей теплових процесів у складних системах. У зв’язку з цим важливе значення має побудова адекватних математичних моделей та знаходження розв’язків обернених задач, які дозволяють визначати параметри керування процесом теплообміну в системі. Обернені задачі дозволяють ефективно визначати необхідні параметри керування температурними розподілами.

Існуючі наукові досягнення в області математичного моделювання процесів теплообміну у складних системах здебільшого базуються на крайових задачах для рівняння теплопровідності, які описують теплообмін між нерухомими елементами складної системи. Зовсім мало розглядаються моделі теплообміну у складних системах з рухомими елементами та моделі, в яких використовуються нелокальні умови. На основі крайових задач і засобів комп’ютерного моделювання створено та активно використовується чимало методів керування параметрами температурних розподілів. За допомогою крайових та нелокальних задач, інших додаткових умов відбувається ідентифікація того чи іншого температурного розподілу. Слід відзначити, що математичні моделі на основі крайових задач досить правдиво відображають температурні розподіли усередині області нагрівання і не зовсім вірно відображають їх на границях. Це пов’язано з особливістю побудови математичної моделі. Підвищення ефективності контролю температурних розподілів вимагає побудови удосконалених математичних моделей та ефективних методів розв’язання задач, пов’язаних із цими моделями.

Побудова математичних моделей температурних розподілів з різними умовами теплообміну та їх аналіз розглядалися в роботах багатьох учених, серед них слід відзначити таких як Митропольський Ю. О., Самойленко А. М., Мацевитий Ю. М., Макаров В. Л., Ликов О. В., Тихонов А. М., Самарський А. А., Ільїн М. Й, Березовський А. А., Коляно Ю. М., Марчук Г. І., Пташник Б. Й., Ляшенко В. П. та багато інших. Нелокальні інтегральні умови виникають при вивченні різних фізичних явищ в разі, коли границя області протікання процесу недоступна для безпосереднього вимірювання температури. Проте можливості застосування нелокальних задач, інтеґральних умов та більш складних умов імпедансного типу у математичних моделях теплообміну у рухомих елементах та системах досліджені недостатньо. Формулювання нелокальних умов на основі уявлення про фізичний процес є досить складною процедурою.

Незважаючи на значну кількість досліджень, на сьогодні відкритою залишається проблема визначення параметрів керування температурними процесами на основі математичних моделей, які з достатньою точністю відображають температурні розподіли та дозволяють керувати ними.

Виникає необхідність у модифікації та узагальненні існуючих математичних моделей температурних розподілів у рухомих елементах та системах з різними умовами теплообміну поверхні з навколишнім середовищем, складних з геометричної точки зору багатошарових областях, а також у розробці нових методів розв'язання нелінійних крайових та нелокальних задач, що пов'язані з такими моделями, ефективних алгоритмів розв'язання прямих та обернених задач та визначенні параметрів керування процесами теплообміну.

В роботі набувають подальшого розвитку математичні моделі процесів теплообміну на основі початково-крайових та нелокальних задач для рівняння теплопровідності за рахунок залучення інтегральних і складних граничних умов спряження імпедансного типу у багатошарових областях та складних системах. Обґрунтовується необхідність застосування методів теорії інтегральних та диференціальних рівнянь до розв'язання крайових та нелокальних задач в областях, що мають складну геометричну форму.

Тому можна зробити висновок про те, що тема дисертаційної роботи є актуальною та має важливе наукове і практичне значення. В дисертації розвивається новий науковий напрям у математичному моделюванні процесів теплообміну у складних системах на основі нелінійних крайових та нелокальних задач зі складними умовами теплообміну на граничних поверхнях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано в період з 2011 р. по 2020 р. на кафедрі інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. Вона є частиною досліджень, які проводяться відповідно до планів науково-дослідних робіт за держбюджетною темою: «Наукові основи створення конструкційних елементів літальних та космічних апаратів із композиційних матеріалів» (№ ДР 0102U001480).

Також робота виконувалась згідно з грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених на 2014 рік «Нелокальні задачі у математичних моделях» (GP/F56/044), госпрозрахунковими договорами між фірмою NEUTRONIC (Франція) і Кременчуцьким національним університетом № 241/12 – IBM – Neutronic «Розробка програмного забезпечення та проекту приладів ДАД і концентратора для систем пожежогасіння та виявлення технічних неполадків»; № 260/12 – IBM – Neutronic 2 «Розробка програмного забезпечення та удосконалення приладів концентратора та блоку живлення для систем пожежогасіння та виявлення технічних неполадків»; № 280/13 – IBM – Neutronic 3 «Виготовлення пристрою збору інформації щодо виникнення пожежної ситуації та програмного забезпечення для передачі її віддаленій інформаційній системі»; № 292/13 – IBM – Neutronic 4 «Розробка графічного людино-машинного інтерфейсу для системи пожежогасіння з елементами керування».

Дослідження, подані у роботі, відповідають чинному Закону України «Про пріоритетні напрями розвитку науки та техніки» від 11.07.2001, а саме, п.п. 3 і 6 статті 3 «Пріоритетні напрями розвитку науки і техніки на період до 2020 року».

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови теплообміну між багатошаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв’язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями.

Це дозволяє підвищити точність визначення температурних розподілів у складних системах.

Для досягнення вказаної мети і вирішення існуючої науково-практичної проблеми в цілому у дисертації були сформульовані і розв’язані такі завдання:

– проведено аналіз математичних моделей і методів, що використовуються під час дослідження процесів теплообміну у складних технічних системах, таких, як прокатні стани, обладнання для термічної обробки виробів, електричні машини;

–побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну у багатошарових рухомих та нерухомих осесиметричних елементах, що нагріваються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують різні умови теплообміну поверхні елементів систем з навколишнім середовищем;

– побудовано нові та вдосконалено існуючі математичні моделі процесів теплообміну, що відбуваються під час електроімпульсної термічної обробки і враховують особливості кусково-монотонних функцій джерел тепла у нелокальних та крайових задачах для рівняння теплопровідності;

– побудовано та розв’язано обернені задачі для рівняння теплопровідності, що містять інтегральні умови, які дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами у рухомих та нерухомих елементах складних систем з внутрішніми та зовнішніми, періодично та постійно діючими джерелами тепла;

– проведено порівняльний аналіз числових розв’язків нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий тепловий процес у складній системі;

– запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у багатошаровому циліндрі при щільному та нещільному контакті шарів, де в одних шарах діють внутрішні джерела тепла, а в інших – зовнішні, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами;

– проведено аналіз та порівняння результатів числових розрахунків зі значеннями температурних розподілів, отриманих шляхом вимірювання за допомогою приладів;

– запропоновано методи побудови умов імпедансного типу для багатошарової циліндричної області з умовами спряження 4-го роду на межі розділу шарів з різними теплофізичними характеристиками.

Об'єктом дослідження є процеси теплообміну у складних системах, зокрема в металургії та електромеханіці, які включають у себе рухомі та нерухомі, одно- та багатошарові елементи, у яких постійно або періодично діють джерела тепла.

Предметом дослідження є математичні моделі у вигляді крайових, нелокальних та обернених задач для рівняння теплопровідності, що описують процеси теплообміну у складних системах, числові та аналітичні методи розв'язання.

Методи дослідження. У дисертації використовуються методи математичного моделювання; аналітичні, числові та аналітичні методи розв'язання прямих та обернених задач математичної фізики, методи розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. На основі виконаних теоретичних і експериментальних досліджень отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, що полягає у розробці та узагальненні математичних та комп'ютерних моделей процесів теплообміну у складних системах.

У межах запропонованого напряму на основі сформульованих принципів побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей та методів розв'язання задач одержано такі наукові результати, що дозволяють підвищити точність числових розрахунків та ефективність контролю температури у складних системах.

Вперше:

– сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем;

– запропоновано метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усереднені температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведенні крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Удосконалено:

– математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багатошарових областях при щільному та нещільному контакті шарів які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів;

– методи розв'язання обернених крайових задач теплопровідності які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв'язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв'язання обернених задач;

– математичні моделі процесів теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами;

– математичні моделі теплообміну між елементами складних систем, де, на відміну від існуючих математичних моделей у вигляді нелокальних задач, як нелокальна умова запропонована умова балансу тепла.

Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній роботі, базуються на використанні методів математичного моделювання та апарату математичної фізики, забезпечуються числовими експериментами, відповідністю моделей технологічним і фізичним процесам, результатами досліджень інших авторів та результатами натурних експериментів, актами впровадження.

Практичне значення отриманих результатів полягає у створенні ряду математичних моделей та програмних модулів, що мають можливість адаптації до дослідження різних складних систем та можливість використання в системах керування процесами виготовлення дроту. Розроблені методи і засоби розв'язання задач були використані під час розробки технологічного обладнання процесів спікання, гарячого пресування та високотемпературної деформації виробів канонічної та неканонічної форми із порошкових матеріалів (Акт впровадження фірма "Карма" Додаток Б), для прогнозування перебігу пожежі і розрахунків температур в складних системах (Акт впровадження фірма "Neutronic" Додаток Б).

Крім того, математичні моделі, методи, алгоритми, відповідне програмне забезпечення, що запропоновано в дисертаційній роботі, використані в наукових дослідженнях, які проводяться відповідно до планів науково-дослідних робіт в Кременчуцькому національному університеті імені Михайла Остроградського під час виконання держбюджетних та госпрозрахункових тем.

Розроблені моделі відрізняються від існуючих більш високим ступенем адекватності, що дало змогу підвищити точність визначення температурних розподілів під час технологічних операцій у металургії, адитивному виробництві та під час роботи електричних машин різного типу.

Отримані результати (математичні моделі, методи розв'язання задач) використані у викладанні курсів «Обчислювальні методи», «Рівняння з частинними похідними», «Рівняння математичної фізики», «Моделювання природничих та технологічних процесів» та інших у Кременчуцькому національному університеті імені Михайла Остроградського (Додаток Б).

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано особисто або за участі автора. Роботи [10–11, 15–16, 54] написані без співавторів. У працях, виконаних у співавторстві, авторові належить таке: запропоновано підхід, що дозволив побудувати нові та вдосконалити існуючі математичні моделі теплообміну у складних системах, які включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи осесиметричної форми при щільному та нещільному контакті шарів, що нагріваються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують залежність температурного поля від кута обертання їх навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем.

У роботах [1–3] побудовано математичні моделі, запропоновано метод розв'язання задач з кусково-монотонними граничними умовами, неявну скінченно-різницеву схему, проведено числові розрахунки.

В роботі [4] побудовано математичну модель теплового процесу у двошаровій циліндричній області з різними теплофізичними властивостями шарів. У роботі [5] запропоновано метод дослідження температурних розподілів у складній системі – багатошаровому виробі, одна частина шарів якого нерухома, а інші обертаються навколо своєї осі зі сталою швидкістю, метод розв'язання крайової задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності у складній циліндричній області.

В роботах [6–7, 43–44] дано теоретичне обґрунтування методів розв'язання задач.

У роботах [8, 9, 13, 23, 27–28, 33, 40–41, 47–50, 55] у відповідних математичних моделях запропоновано формулювання обернених задач для рівняння теплопровідності та методи їх розв'язання.

В роботі [12] побудовано математичну модель теплового процесу, що відбувається у рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з періодично діючим джерелом тепла, запропоновано метод розв'язання оберненої задачі теплопровідності.

В роботі [14] запропоновано математичну модель високотемпературного процесу. В роботах [17–19] побудовано математичну модель та проведено числовий експеримент.

У роботі [20] отримано розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності зі змінним у часі джерелом тепла.

В роботі [21] побудовано фізичну модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двовалковому прокатному стані, запропоновано математичну модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю.

В роботах [22, 25, 30, 31, 32, 34, 59] побудовано математичну модель температурного поля в електричній машині, проведено числові експерименти. У [24] запропонований метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв’язання задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами.

В роботі [26] запропонований метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні.

У роботі [29] запропоновані нелокальні інтегральні умови, що побудовані на основі умови балансу енергії в області нагрівання. Досліджується зв’язок нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий фізичний процес нагрівання.

В роботі [35] побудовано математичну модель теплообміну з умовами імпедансного типу. У роботі [36] побудовано математичну модель температурного поля двошарового циліндра. У роботах [37–38] побудовано математичні моделі для рівняння теплопровідності. У роботах[39, 42] запропоновано метод числового розв’язання задачі теплопровідності зі складними умовами теплообміну. У роботах [43–44] розв’язано крайові задачі, що описують поширення повздовжніх хвиль, проведено аналіз числових експериментів. В [45] побудовано математичну модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у двошаровому контейнері циліндричної форми. Для визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі отримано граничну умову імпедансного типу.

У роботі [46] побудовано енергетичні умови у математичних моделях для рівняння теплопровідності. У роботах [51, 53, 56] побудовано математичні моделі теплових процесів під час імпульсної обробки виробів.

У роботі [52] здійснено постановку задачі теплообміну, що відбувається в складній системі під час адитивного виробництва. У роботі [57] розв’язано задачу теплопровідності для рухомого осесиметричного середовища, проведено числові розрахунки. У роботі [58] запропоновано метод розв’язання нелокальних задач.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних, всеукраїнських та регіональних конференціях: міжнародній науково-технічній конференції «Комп’ютерне моделювання в наукоємних технологіях» КМНТ (м. Харків, 2014, 2016, 2018); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (Рівне, 2018); всеукраїнській науковій конференції «Математичне моделювання та математична фізика» (м. Кременчук, 2013, 2015, 2017); міжнародних симпозіумах «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (Харків–Херсон, 2011, 2013, 2017); всеукраїнській науково-технічній конференції з міжнародною участю «Комп’ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (Дніпро, 2016); міжнародних наукових конференціях International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (Albena (Bulgaria), 2014–2019; San Diego, 2020); міжнародній науковій конференції “37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics, MIPRO 2014” (Opatija (Croatia), 2014); XIV, XV міжнародних наукових конференціях “International PHD WorkShop OWD”, (Wisla (Poland) 2012, 2013); міжнародних наукових конференціях

Proceedings of the International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (Кременчук, 2017, 2019); міжнародній науковій конференції «Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах», (Туапсе, 2012); конференції «Обчислювальна та прикладна математика», (Київ, 2012); 51-й міжнародній науковій конференції «Актуальные проблемы прочности», (Харьков, 2011).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 59 наукових праць: з них 3 закордонні колективні монографії [1–3], 11 включені до міжнародних наукометричних баз SCOPUS та Web of Science [13, 19, 23, 25–32], 21 стаття у фахових виданнях України, 35 публікацій у збірниках матеріалів конференцій [25–59], одноосібних публікацій 5.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (300 найменувань на 31 сторінці) та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 316 сторінок, в тому числі 265 сторінок основного тексту, включаючи 9 таблиць та 58 рисунків; обсяг додатків 12 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи, актуальність проблеми, мету та завдання дослідження, відомості про зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, відзначені наукова новизна й практична цінність отриманих результатів, особистий внесок здобувача в роботах у співавторстві, відомості про апробацію результатів роботи.

У першому розділі розглянуто існуючі фізичні та математичні моделі теплових процесів у складних системах, які включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла і враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Наведено стислий огляд публікацій за темою дисертації, зроблено аналіз існуючих числових та аналітичних методів розв'язання нелінійних крайових та нелокальних задач, сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

Дослідження теплових процесів зі складними умовами теплообміну у металургії, розробка методів розв'язання задач, що описують такі процеси, розглядалося у роботах таких вчених, як Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, В. С. Дейнека, Г. І. Марчук, А. А. Березовський, Ю. М. Мацевитий, А. П. Слесаренко, В. П. Ляшенко, А. Я. Бомба, Я. Г. Савула та ін.

Що стосується математичних моделей у таких складних системах, як валкові кристалізатори, то слід відзначити роботи Тришевського О.І., де на основі теоретичного аналізу розроблено напівемпіричні математичні моделі теплового стану смуги і валків під час гарячої прокатки листового матеріалу, що дозволяють розрахувати тепловий стан об’єктів з розподіленими параметрами на всіх ділянках технологічного процесу.

В результаті дослідження з’ясовано, що в науковій літературі відсутні математичні моделі теплових процесів у складних системах, які включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються зовнішніми або внутрішніми джерелами тепла і враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем.

В результаті дослідження відомих математичних моделей, побудованих на основі початково-крайових, крайових та нелокальних задач для диференціального рівняння теплопровідності, окреслюється проблема щодо необхідності побудови математичних моделей теплових процесів у складних системах, що мають складну геометричну форму, наприклад у прокатних станах, багатошарових виробах складної геометричної форми, в електричних машинах. Обґрунтовується доцільність розробки нових математичних моделей для розрахунків температурних розподілів у таких системах та їх конструктивних елементах. Крім того, виявлено недоліки методів числових розрахунків температурних розподілів у раніше запропонованих математичних моделях. Зокрема, зазначено, що раніше запропоновані математичні моделі теплових процесів, які побудовано на основі не пов’язаних між собою лінійних крайових задач для рівнянь теплопровідності, не враховують тепловий контакт на межі різних частин складної системи; теплообмін між складною системою і зовнішнім або охолоджуючим середовищем; геометрію частин складної області, кускову-монотонність функцій коефіцієнтів рівняння. Ці моделі, здебільшого призначені для дослідження теплового процесу в окремих частинах складної області, що значно ускладнює аналіз теплового процесу в складному багатошаровому виробі, такому як, наприклад, електрична машина. Пропонуються концептуально нові та уточнюються існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах – елементах електричних машин, валкових кристалізаторах та в елементах складних систем під час таких технологічних операцій як термоциклічна обробка (ТЦО) та електропластичне волочіння (ЕПВ) у вигляді крайових, початково-крайових та нелокальних задач для рівняння теплопровідності.

В розділі обґрунтовано необхідність побудови математичних моделей теплових процесів у стрічці та дроті під час електропластичної та термоциклічної обробки виробів внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, а також постановки обернених задач на основі математичних моделей, що дозволяють визначати параметри керування температурними полями.

Значна увага приділяється нелокальним задачам теплопровідності. Такі задачі, що називаються нелокальними, для різних класів рівнянь вивчали А.В. Біцадзе, А. А. Самарський, А. А. Дезні, В.А. Ільїн, Є.І. Моїсеєв, А.М. Нахушев, В.І. Жегалов, Т.Ш. Кальменов, Н.І. Іонкін та інші. Дослідження показали, що наявність нелокальної умови викликає труднощі під час використання відомих методів розв’язання і дослідження нелокальних задач. В результаті дослідження з’ясовано, що у багатьох роботах розглядаються питання існування та єдиності розв’язків нелокальних задач для рівняння теплопровідності, аналітичні методи розв’язання нелокальних задач з різними типами інтегральних умов. Прикладне застосування нелокальних задач теплопровідності з інтегральною умовою досліджено недостатньо.

Зазначено, що введення нелокальної інтегральної умови, яка визначає баланс тепла області нагрівання або охолодження, у крайову задачу для рівняння теплопровідності дозволяє більш точно формулювати математичні моделі теплових процесів, зокрема, керуючи параметрами теплового процесу, підтримувати необхідну температуру в усіх точках області, що нагрівається.

У **другому розділі** розглянуто математичні моделі теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, запропоновано метод розв’язання задачі керування тепловим процесом, що відбувається у осесиметричних елементах складних систем. Це дає змогу підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

На відміну від крайових задач, застосування нелокальних задач у математичних моделях теплообміну досліджено недостатньо. У багатьох випадках нелокальні задачі набагато краще описують теплові процеси. Формулюються нелокальні умови, що мають прозорий фізичний зміст. Такою нелокальною умовою в роботі є умова балансу енергії, виділеної в усій області нагрівання або в її частині

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, \tag{1}$$

де Q_1, Q_3, Q_2 – відповідно кількість тепла, виділеного в області нагрівання, кількість тепла, що пішло на підвищення температури області та кількість тепла, втраченого через її границі.

Під час формулювання нелокальної задачі ця умова є найбільш повною. Долучивши до рівняння теплопровідності нелокальну умову та відповідну кількість локальних умов, отримаємо нелокальну задачу. На відміну від натурних вимірювань температури у скінченній кількості точок, ці моделі допомагають аналізувати температурне поле у всій області нагрівання. Для практичного використання та застосування математичної моделі при проектуванні технологічного обладнання важливим є визначення параметрів керування температурним розподілом. Ці параметри визначають температурний розподіл як усередині області нагрівання, так і на її границях. Так, коли температурне поле відоме у всіх точках області, то крайова задача ідеально описує температурне поле. Якщо температурний розподіл відомий лише у початковий момент часу та/або на частині границі, то для визначення температурного розподілу у всій області нагрівання необхідно задавати додаткові умови, що пов’язані з балансом енергії, виділеної у зоні нагрівання.

Як відомо, тепло у зону нагрівання можна підводити як із зовні, так і генерувати усередині області, що нагрівається.

Враховуючи вищезазначене, математична модель температурного поля з діючими внутрішніми джерелами тепла щільністю $W(P,t)$ в області Ω, у дивергентній формі має вигляд

$$\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) - c\,\rho_n \frac{\partial}{\partial t} T - c\,\rho_n\,(\vec{v}\operatorname{grad} T) + W\left(P,t\right) = 0, \qquad (2)$$

$$T\left(P,0\right) = \varphi\left(P\right), \qquad (3)$$

де T –температура; t – час; $P\left(r,z,\varphi\right)$ – координати; λ, c, ρ_n – теплофізичні параметри середовища; $\vec{v}$ – швидкість руху середовища в області нагрівання.

Долучивши до рівняння (2) початкову умову (3), нелокальну умову (1) та граничні умови, отримаємо нелокальну задачу. Кількість граничних умов визначає однозначність розв’язку задачі.

Математична модель температурного поля області Ω, у якій діють зовнішні джерела тепла, описується однорідним рівнянням, яке у дивергентній формі має вигляд

$$\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) - c\,\rho_n \frac{\partial}{\partial t} T - c\,\rho_n\,(\vec{v}\operatorname{grad} T) = 0, \qquad (4)$$

до якого долучаємо початкову умову (3), нелокальну умову (1) та одну із граничних умов

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \alpha_k \left(T - T_c\right), \qquad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \varepsilon\sigma \left(T^4 - T_c^4\right),$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \pm \left[\alpha_k \left(T - T_c\right) + \varepsilon\sigma \left(T^4 - T_c^4\right)\right].$$

Якщо на поверхні розділу двох шарів виробу різні коефіцієнти теплопровідності λ_1 і λ_2, то згідно із законом Фур’є має місце рівність теплових потоків

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{n=n_0-0} = \lambda_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{n=n_0+0} \qquad x,y,z \in S, \quad t > 0.$$

В нелокальній задачі (1), (3)–(5) для рівняння теплопровідності із зовнішніми джерелами тепла, на відміну від (1)–(3), (5), функція джерела тепла розташована не в рівнянні, а в граничних умовах.

Досліджено зв’язок нелокальної та крайової задач, що описують один і той самий фізичний процес нагрівання, та обґрунтовуються переваги застосування однієї з них по відношенню до іншої для опису того чи іншого класу теплового процесу. Такі задачі виникають при дослідженні температурних розподілів під час відпалу рухомого дроту та стрічки постійними або періодично діючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Проведено числові експерименти та побудовано температурні розподіли в умовах дії внутрішніх та зовнішніх джерел тепла, які підтверджують ефективність залучення нелокальних умов для опису теплових процесів. Це дозволяє визначати параметри керування процесом тепло- і масопереносу, зокрема джерела тепла та концентрації речовини.

Визначення основних параметрів керування температурним полем рухомого дроту або нерухомих прутків перед пластичною деформацією є однією з проблем, що виникає під час створення сучасних систем автоматичного керування технологічними процесами термічної обробки металів. Ці параметри можуть бути отримані як експериментально, так і за допомогою математичних моделей, що враховують умови взаємодії поверхні з навколишнім середовищем. У ряді випадків визначення оптимальних параметрів керування термічною обробкою металів пов'язано з великими фінансовими затратами, набагато більшими, ніж дослідження математичних моделей.

Визначення нестаціонарного температурного розподілу рухомого зі швидкістю $v(t)$ осесиметричного елемента (пруток, дріт), що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, у обмеженій циліндричній області Ω_t, приводить до розв'язання такої крайової задачі для рівняння теплопровідності $\Omega_t : \left\{ (z,r,t) \middle| 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \le t_0 \right\}$:

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} - v(t) c\rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T), \tag{6}$$

$$T(r,z,0) = T_0, \tag{7}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha\left(T - T_c\right) - \sigma\varepsilon\left(T^4 - T_c{}^4\right), \tag{8}$$

$$T(r,0,t) = T_0, \qquad T(r,l,t) = T_l\ , \tag{9}$$

де

$$w(T) = \frac{I^2(t)\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0{}^4}. \tag{10}$$

Якщо до задачі (6)–(9) додати нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії області нагрівання, то крайова задача перетвориться у нелокальну.

Параметром керування тут може виступати будь-який параметр, що відображений у рівнянні або в крайовій умові, зокрема, це може бути щільність внутрішнього джерела тепла.

Контроль температури здійснюється у кожній точці рухомої області і в кожен момент часу. Рівняння теплового балансу (1) в інтегральній формі має вигляд

$$\int_{\varepsilon+}^{t_0}\int_{0+}^{r_0}\int_{0}^{l} f_{12}(t)\frac{I^2(t)\rho_0 l + \beta I^2(t)\rho_0 l T(r,z,t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dzdrdt = c\rho_n \int_{\varepsilon+}^{t}\iint_{G} (T(r,z,t) - T_0) dgdt +$$

$$+\frac{\alpha l}{r_0}\int_{\varepsilon+}^{t_0}\int_{0}^{r_0}\int_{0}^{l} \frac{T(r,z,t) - T_c}{v(t)} dzdrdt. \tag{11}$$

Із розв'язку задачі (6)–(9) отримали температуру $T(r,z,t)$ і функцію $I(t)$.

Параметр керування $I(t)$ підбирався таким чином, щоб протягом часу $0 \le t \le t_0$ утримувати задане значення температури. Це викликано однією з вимог технологічного процесу виробництва дроту, де різке підвищення або зниження температури внаслідок недотримання технологічної температури може призвести до його обриву.

Запропоновано метод розв'язання оберненої нелокальної задачі, що описує температурне поле у зоні нагрівання рухомого середовища внутрішніми джерелами тепла. Шляхом введення до математичної моделі теплового процесу (6)–(9), який протікає у рухомому осесиметричному елементі, інтегральної умови (11) визначено параметри керування температурним полем. Інтегральну умову побудовано виходячи із закону збереження енергії для процесу теплообміну, що дозволило підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Для розв'язання оберненої задачі теплопровідності використовувався метод, що базується на пошуку температурної функції, яка задовольняє рівнянню (6), граничним умовам (8)–(9) і початковій умові (7). Умова (11) задовольняється в усіх точках області $\Omega_t : \left\{ (z,r,t) \middle| 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \le t_0 \right\}$. Керування $I(t)$ проводилось згідно з вимогою мінімізації відхилень в рівності (11) після підстановки в неї отриманої модельної температурної функції, що задовольняє (6)–(9). Розв'язання оберненої задачі теплопровідності як задачі оптимізації пов'язано із введенням деяких параметрів системи $a_j \, (j = 1, 2 ... J)$, керування якими проводилось згідно з вимогою мінімізації відхилень модельної (розрахованої) температурної функції від (11). Для того щоб виразити шукану функцію $I(t)$ через параметри керування системи, її розкладено в ряд Тейлора $I(t) = I_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ...$.

Розглянуто постановки задач керування джерелом тепла та граничним режимом. Серед них:

– нестаціонарна задача керування тепловим процесом в області із внутрішніми джерелами тепла;

– задача керування тепловим процесом із зовнішніми джерелами тепла в стаціонарних умовах;

– задача керування нестаціонарним тепловим процесом із зовнішніми джерелами тепла.

Здійснено постановки задач і запропоновано відповідні інтегральні умови.

Проведені дослідження свідчать про те, що температурний розподіл, отриманий із розв'язання нелокальної задачі, співпадає із температурним розподілом, одержаним шляхом замірювання температури під час технологічного процесу відпалу мідного дроту. В розділі зроблено висновок про те, що як математичну модель теплового процесу в осесиметричних елементах складних систем доцільно використовувати нелокальну задачу з інтегральною умовою теплового балансу.

У **третьому розділі** розглядаються математичні моделі теплових процесів, що відбуваються в рухомих осесиметричних елементах складних систем, таких, як пристрої для термічної обробки, де діють імпульсні джерела тепла.

Зокрема, розглядаються теплові процеси під час термічної обробки металів і сплавів, в якій використовується циклічна багаторазова зміна температури.

Так, в останні роки інтенсивно розробляються і знаходяться на стадії впровадження принципово нові методи термообробки – термоциклічна обробка (ТЦО) та електропластичне волочіння (ЕПВ), режими яких характеризуються (на відміну від відомого методу термічної обробки) багаторазовим нагріванням та охолодженням з оптимальними швидкостями і відсутністю витягів за максимальних температур нагрівання.

Для з’ясування впливу термічної складової імпульсного струму на електропластичну деформацію було побудовано математичну модель температурного поля в зоні підведення струму. З математичної точки зору температурне поле рухомого осесиметричного елемента – дроту під час процесу ЕПВ можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою $I(t)$ в зоні нагрівання.

На основі цих моделей запропоновано формулювання обернених задач для однорідних та неоднорідних рівнянь теплопровідності. Обернені задачі спрямовані на знаходження параметрів керування температурним полем елементів складних систем за допомогою математичної моделі. Ці параметри дозволяють підтримувати необхідний температурний розподіл у всій системі чи в її окремих елементах. Досліджуються особливості дії джерел тепла на температурний розподіл. Запропоновано методи розв’язання обернених задач теплопровідності з імпульсними періодично діючими джерелами тепла.

З математичної точки зору температурне поле рухомих елементів складних систем – дроту та стрічки – під час процесу імпульсної обробки можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою $I(t)$ в зоні нагрівання.

Визначення нестаціонарного температурного розподілу під час імпульсної обробки приводить до такої математичної моделі теплового процесу в області $\Omega_t : \left\{ (r,z,t) \middle| 0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < t \le t_0 \right\}$:

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t)c\rho_n\frac{\partial T}{\partial z} - c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t} = -W(z,t,T), \qquad (r,z,t)\in\Omega_t, \tag{12}$$

$$T(r,z,0) = T_0, \tag{13}$$

$$T(r,0,t) = T_0, \quad T(r,l,t) = T_l, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \qquad \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = f_{12}(t)\left[-\alpha(T - T_c) - \varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4)\right], \tag{15}$$

де T_c – температура навколишнього середовища; швидкість руху середовища $v(t)$ змінюється в межах $0 \le v(t) < v = const$; $\alpha, \varepsilon, \sigma$ – відповідно: коефіцієнт конвективної тепловіддачі з поверхні, ступінь чорноти та стала Стефана-Больцмана.

Функція джерел тепла $W(z,t,T)$, у випадку залежності від координати та часу запишемо так:

$$W(z,t,T) = f_{11}(z)\, f_2(T), \qquad 0 < t \le t_0,$$
$$W(z,t,T) = f_{12}(t)\, f_2(T), \qquad t > t_0, \tag{16}$$

де $f_2(T) = \dfrac{I^2(t)\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, $I(t), \rho_0, \beta$ – сила струму, питомий опір і температурний коефіцієнт опору дроту.

Функції $f_{11}(z)$, $f_{12}(t)$ залежно від технологічних особливостей процесу електроімпульсної обробки (ТЦО та ЕПО) мають вигляд

$$f_{11}(t) = 0{,}5\left(1 - \cos\frac{t}{t_0}\right), \qquad f_{12}(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\right|,$$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \dfrac{2kt}{t_0} - 2kn, \ nt_0 \le t \le (n + \dfrac{1}{2mk})t_0 \\ \dfrac{1}{m}, (n + \dfrac{1}{2mk})t_0 < t \le (n + \dfrac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\dfrac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), \ (n + \dfrac{2m-1}{2mk})t_0 < t \le (n + \dfrac{1}{k})t_0 \\ 0, (n + \dfrac{1}{k})t_0 < t < (n+1)t_0 \end{cases},$$

$$f_{14}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t_0} - 2n, \qquad 2nt_0 \le t \le (2n+1)t_0 \\ -\dfrac{t}{t_0} + 2(n+1), \qquad (2n+1)t_0 < t \le (2n+2)t_0 \end{cases},$$

де параметри m, n визначають циклічність дії джерел тепла, функції $f_{11}(z)$ – $f_{14}(t)$ є кусково-монотонними.

Нехай необхідно знайти просторово-часовий розподіл теплового потоку в осесиметричному середовищі, причому функція $f(z,t)$ може бути результатом сумарної дії виділеного усередині і втраченого поверхнею середовища тепла

$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=f_{1i}(t)\left[-\alpha(T-T_c)-\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\right]$, а можливо, являє собою внутрішнє джерело тепла і є функцією, що відображена у правій частині рівняння теплопровідності.

Нехай теплофізичні характеристики середовища – сталі. Після застосування усереднення та подальших перетворень задача (12) – (15) трансформується у

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial^2 z}+f(z,t),(z,t)\in Q_T, \tag{17}$$

$$U(z,0)=T(z),\quad 0\le z\le l, \tag{18}$$

$$U(0,t)=T_1(z),\ U(l,t)=T_2(z).\ \ 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{t}_0. \tag{19}$$

При $\sigma=0$

$$f(z,t)=f_{1i}(t)\left(\frac{I^2(t)\rho_0-2\alpha T_c r_0^3\pi^2}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n}\right)e^{-\mu(t)z-\eta(t)t},$$

$$\mu(t)=\frac{v(t)c\rho_n}{2\lambda},\ \eta(t)=\frac{-v^2(t)c\rho_n}{4\lambda}+f_{1i}(t)\frac{I^2(t)\rho_0\beta+2\alpha r_0^3\pi^2}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n}.$$

При $\sigma\neq 0$

$$f(z,t)=f_{1i}(t)\left(\frac{I^2(t)\rho_0-2\alpha T_c r_0^3\pi^2+2\varepsilon\sigma r_0^3\pi^2(T_0+T_c)(T_0^2+T_c^2)}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n}\right)e^{-\mu(t)z-\eta(t)t},$$

$$\mu(t)=\frac{v(t)c\rho_n}{2\lambda},$$

$$\eta(t)=\frac{-v^2(t)c\rho_n}{4\lambda}+f_{1i}(t)\frac{I^2(t)\rho_0\beta+2\alpha r_0^3\pi^2+2\varepsilon\sigma r_0^3\pi^2(T_0+T_c)(T_0^2+T_c^2)}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n},$$

де функція $f(z,t)$ може бути визначена повністю лише тоді, коли відомий температурний розподіл в усій області нагрівання.

Тому при заданні внутрішніх джерел тепла вважається відомою сума енергій, що пішла на нагрівання виробу і втрати тепла з його поверхні

$$\int_{\varepsilon+}^{t_0}\int_{0+}^{r_0}\int_0^l f_{12}(t)\frac{I^2(t)\rho_0 l+\beta I^2(t)\rho_0 lT(r,z,t)}{v(t)r_0^4\pi^2}dzdrdt=c\rho_n\int_{\varepsilon+}^{t}\iint_G(T(r,z,t)-T_0)dgdt+ \tag{20}$$

$$+\frac{\alpha l}{r_0}\int_{\varepsilon+}^{t_0}\int_0^{r_0}\int_0^l f_{1i}(t)\frac{T(r,z,t)-T_c}{v(t)}dzdrdt.$$

На основі (20), після усереднення за радіусом, вважаючи, що температурне поле не залежить від кутової координати, та заміни $u(z,t)=U(z,t)e^{\mu(t)z+\eta(t)t}$ отримаємо функціонал квадратичної нев’язки

$$J(f)=\int_{\varepsilon+}^{t_0}\int_0^l\left[W_1(U,f)-W_2(U)\right]^2dzdt,$$

$$W_1(U,f)=f_{1i}(t)\frac{I^2(t)\rho_0 l+\beta I^2(t)\rho_0 U(z,t)e^{\mu(t)z+\eta(t)t}l}{r_0^4\pi^2 v(t)},$$

$$W_2(U)=c\rho_n(U(z,t)e^{\mu(t)z+\eta(t)t}-T_0)+\frac{\alpha l}{2\pi r_0}f_{1i}(t)(\frac{U(z,t)e^{\mu(t)z+\eta(t)t}-T_c}{v(t)}).$$

Функцію знайдено $f(z,t)$ із умови мінімуму квадратичного функціонала нев'язки при обмеженні $J(f)\ge\delta^2$. При цьому як δ^2 береться величина $\delta^2=\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_0^l\sigma^2 dzdt$, де σ^2 – дисперсія функції $W_2(v)$.

Ітераційний процесс побудовано у просторі $L_2(Q)$, $Q=\Omega\times[0,\tau_m]$ за методом спряжених градієнтів

$$f^{k+1}=f^k-\beta_k S^k,\, k=0,1,...,\bar{k}, \tag{21}$$

де $S^k=J'^k_f+\gamma_k S^{k-1},\gamma_0=0,\quad \gamma_k=\left\|J'^k_f\right\|^2/\left\|J'^{k-1}_f\right\|^2,$

$$\beta_k=\frac{(U^k-f,V^k)}{\left\|V^k\right\|^2}.$$

Для організації ітераційного процесу (21) необхідно розрахувати температуру на кожному кроці, приріст температури і спряжену змінну, які отримані під час розв'язання відповідних різницевих задач за допомогою шеститочкової різницевої схеми.

Розглянуто математичну модель термоциклічної обробки виробів зовнішніми джерелами тепла в області $\Omega_t:\{(z,r,t)|0<z<l,0<r<r_0,0<t\le t_0\}$. Зовнішні джерела тепла виникають в результаті теплообміну з навколишнім середовищем за законами Ньютона і Стефана-Больцмана. З математичної точки зору дослідження температурних полів процесів термоциклічної обробки приводить до розв'язання однорідного рівняння теплопровідності з крайовими умовами

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-vc\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=0,\qquad (r,z)\in\Omega_t, \tag{22}$$

$$T(r,z,0)=T_0, \tag{23}$$

$$T(r,0,t)=T_0,\quad T(r,l,t)=T_0, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\qquad \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=f_{1i}(t)\left[-\alpha(T)(T-T_c)-\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\right]. \tag{25}$$

Після усереднення за радіусом і спрощень маємо обернену задачу в області $\bar{Q}_T=\{(z,t)|z\in[0,l],t\in[0,t_0]\}$ у вигляді (17)–(19), де

$$f(z,t)=f_{1i}(t)\left(\frac{-2\alpha T_c\pi^2}{\pi^2 r_0 c\rho_n}\right)e^{-\mu z-\eta(t)t},\ \mu=\frac{vc\rho_n}{2\lambda},\qquad \eta(t)=\frac{-v^2c\rho_n}{4\lambda}+f_{1i}(t)\frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}.$$

Умова теплового балансу у випадку зовнішніх джерел і підстановки $u(z,t)=U(z,t)e^{\mu z+\eta(t)t}$ набуває вигляду

$$\int_{0+}^{t}\int_{0}^{l}\alpha(T)\frac{U(z,t)e^{\mu z+\eta(t)t}-T_c}{v}dzdt=c\rho_n\int_{0+}^{t_0}\int_{0}^{l}f_{1i}(t)(U(z,t)e^{\mu z+\eta(t)t}-T_0)dzdt, \tag{26}$$

$$W_1(U,f)=\alpha(T)\frac{U(z,t)e^{\mu z+\eta(t)t}-T_c}{v},\qquad W_2(U)=f_{1i}(t)(U(z,t)e^{\mu z+\eta(t)t}-T_0).$$

Подальше розв’язання задачі із зовнішніми джерелами тепла аналогічне розв’язанню задачі із внутрішніми джерелами тепла.

Розглянута математична модель теплового процесу в області $\Omega_t:\{(z,r,t)|0<z<l,0<r<r_0,0<t\le t_0\}$ у випадку, коли ми маємо *комбінацію внутрішніх і зовнішніх періодично діючих джерел тепла*, тобто вони відображені як у рівнянні, так і в крайових умовах

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-vc\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=-W(z,t,T),\qquad (r,z,t)\in\Omega_t \tag{27}$$

$$T(r,z,0)=T_0, \tag{28}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0}=f_{1i}(t)\left[\alpha\left(T-T_c\right)+\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\right],\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=L}=f_{1i}(t)\left[\alpha\left(T-T_c\right)+\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\right], \tag{29}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\qquad \lambda\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=f_{1i}(t)\left[-\alpha(T-T_c)-\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\right], \tag{30}$$

де $W(z,t,T)$ у випадку залежності джерел тепла від координати і часу має вигляд (10).

Після усереднення за радіусом маємо задачу в області $Q:\{(z,t)|,0<z<l,0<t\le t_0\}$

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}-vc\rho_n\frac{\partial u}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial u}{\partial t}=F(T,t), \tag{31}$$

$$u(z,0)=T_0, \tag{32}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=\pm f_{1i}(t)\left[\alpha\left(T_c-u\right)+\varepsilon\sigma\alpha_T(T_c^4-u^4)\right],\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=L}=\pm f_{1i}(t)\left[\alpha\left(u-T_c\right)+\varepsilon\sigma\alpha_T(u^4-T_c^4)\right], \tag{33}$$

$$u(0,t)=T_0(t), \tag{34}$$

$$F(T,t)=\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}\left(T_c^4-u^4\right)-f_{1i}(t)\frac{\rho_0 I^2(u)}{\pi^2 r_0^4}\left(1+\beta u\right)-f_{1i}(t)\frac{2}{r_0}\alpha+f_{1i}(t)\frac{2}{r_0}\alpha T_c.$$

Процес пошуку $I(u)$, яка є функцією температури, починається з апріорного задання величини $I(u)$.

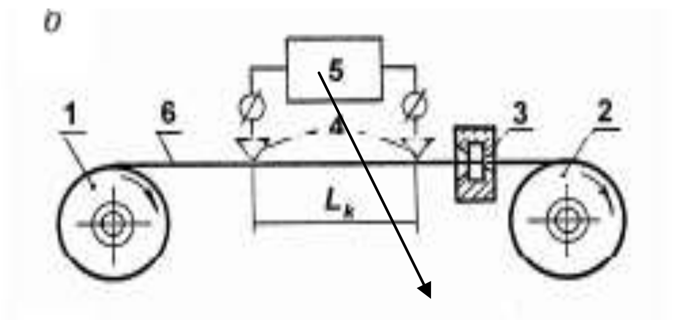
Знайдено розв’язок задачі (31) – (34). Ця задача є коректно поставленою прямою задачею теплопровідності, і її можна розв’язати за допомогою різницевої схеми. Відхилення знайденої у наближенні β модельної функції $u_\beta(z,t)$ заданою умовою (20) використовується як сигнал розузгодження для подальшого уточнення $I(u)$. Для визначення варіації функції $I(u)$, які зменшують нев’язку згідно з методом суміщення, $I(u)$ розкладено в ряд Тейлора за степенями u, обмежуючись скінченною кількістю членів

$$I(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + ... a_J u^J . \qquad (35)$$

Даний поліном містить $J+1$ варіюючих параметри a_J. Пошук оптимальних значень параметрів a_j, що забезпечують для нев'язки ξ_j задоволення умови $|\xi_j| \le \delta$ проводився на основі методу послідовної мінімізації нев'язок. Кожному параметру a_j ставилась у відповідність певна нев'язка ξ_j ($j = 0,1,2...J$). Розрахунок припинявся тоді, коли всі компоненти $\xi_j (j = 1,2...., s, s < J)$ вектора нев'язки задовольняли умові $|\xi_j| \le \delta$.

Для перевірки адекватності запропонованої моделі були проведені порівняння числових розрахунків з результатами експериментальних замірів температури в контрольних точках на поверхні заготовок. Відносна похибка розрахунків склала близько 5%.

Використовувалась схема підведення електричного струму до дроту, зображена на рис. 1, де 1 – розмотувальний вузол; 2 – змотуючий і намотуючий барабани для волочіння дроту; 3 – вузол деформації з утримувачем філь'єри; 4 – зона нагрівання; 5 – пульт керування з приладом контролю сили струму в зоні нагрівання; 6 – рухомий дріт, що нагрівається з приладами для вимірювання зусилля деформації; 7 – радіаційний пірометр.



7

Рис. 1. Схема підведення струму

В розрахунках розглянуто такий режим підведення імпульсного струму: амплітуда струму $I_m = 10 \dfrac{A}{мм^2}$; частота проходження імпульсів $f = 600...700 Гц$ і тривалість імпульсів $\tau = 100 мкс$.

На рис. 2 подано графіки розрахованих значень температури і виміряних експериментально за допомогою пірометра в трьох точках зони нагрівання.

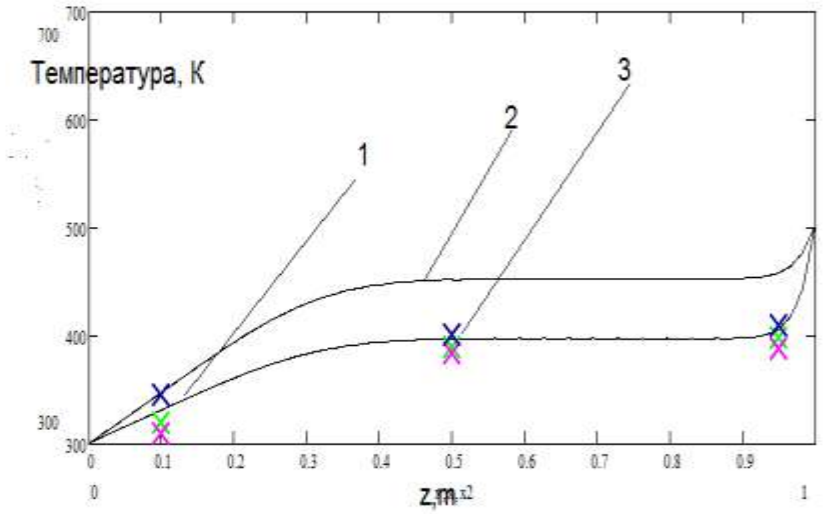


Рис. 2. Температурні розподіли, отримані для мідного дроту крива 1 – під дією імпульсного струму із (31)–(34); крива 2 – під дією постійного ($f_{1i}(t)=1$) струму із (31)–(34), точки 3 – дані, що отримані експериментально

Також у розділі розглядається математична модель температурного та напруженого стану рухомого ізотропного осесиметричного середовища з періодично діючим імпульсним джерелом тепла. Математична модель у вигляді системи крайових задач для диференціальних рівнянь теплопровідності і термопружності описує процеси, що відбуваються у тонкому рухомому дроті під час електропластичної деформації. Вивчаються особливості впливу імпульсних джерел тепла на температурний розподіл та розподіл напружень і переміщень. Досліджуються особливості температурних розподілів в зразках під час пропускання імпульсів струму. Отримано числові розрахунки для цинку, міді та неметалевих сплавів, побудовано графіки температурних розподілів та розподілів напружень і переміщень під час електропластичної деформації.

У четвертому розділі розглянуто математичні та фізичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми. Побудовано умови імпедансного типу на границі шарів складної системи – валкового кристалізатора. У математичній моделі враховані різні умови теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхонь валка зі стрічкою та навколишнім середовищем. Запропоновано метод розв’язання задач, що описують побудовані моделі.

Побудовано фізичну модель теплового процесу у валковому калібрі під час прокатки стрічки на двовалковому прокатному стані. Запропоновано математичну модель температурного поля рухомого порожнистого валка прокатного стану циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю. Уточнення математичної моделі полягає у врахуванні того, що зовнішня поверхня, залежно від кута φ повороту валка прокатного стану навколо своєї осі, сприймає тепло від стрічки, що деформується, а потім втрачає його за межами зони деформації за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. Внутрішня його поверхня втрачає тепло конвективним або кондуктивним способом, у окремих випадках – ще і випромінюванням. У зоні контакту валка зі стрічкою тепло від поверхні передається до його осі теплопровідністю. В іншій частині валка тепло втрачається випромінюванням, конвективним або кондуктивним способом. Теплову взаємодію валка зі стрічкою, що оброблюється, дозволяє враховувати умова спряження (гранична умова четвертого роду), вважається, що температури поверхні валка і стрічки у зоні деформації однакові, і якщо основи циліндричного валка теплоізольовані, а його температура не суттєво залежить від осьової координати, то можна покласти $\frac{\partial T}{\partial z}=0$. Задачу визначення температурного розподілу на поверхні і у тілі валка зведено до задачі визначення температурного розподілу осьового перерізу порожнистого циліндра $T=T\left(r,\varphi,t\right)$, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Оскільки тепловий потік ортогональний осі обертання, маємо початково-крайову задачу в області $\Omega\times t=\left\{\left(r,\varphi\right)\middle|\ R_1<r<R,\ 0<\varphi<2\pi,t>0\right\}$

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=0,$$
$$T\left(r,\varphi,0\right)=T_0,\qquad T\left(r,\varphi+2\pi,t\right)=T\left(r,\varphi,t\right),$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1}=-h_2\left(T_{c2}-T\right),\ 0<\varphi<2\pi,\qquad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}=\bar{F}\left(\varphi,t,T\right),\tag{36}$$
$$\bar{F}\left(\varphi,t,T\right)=\begin{cases} h_2T_M, & \omega t<\varphi<\varphi_0+\omega t\\ h_1\left(T_c-T\right)+\kappa\left(T_c^4-T^4\right), & \omega t+\varphi_0<\varphi<\omega t+2\pi\end{cases},$$

де $a^2=\frac{\lambda}{c\rho}$, $h_i=\frac{\alpha_i}{\lambda}$, α_i – коефіцієнт теплообміну; $T_M=T_m+T_d$, T_m – температура металу, що потрапляє у зону деформації; T_d – середнє збільшення значення температури у зоні деформації (викликане деформацією металу); T_c – температура середовища зовні кільця; T_{c2} – температура всередині кільця.

За великого числа обертів валків навколо своєї осі встановлюється квазістаціонарний розподіл температури, який не залежить від часу. Задача (36) спрощується до задачі для рівняння теплопровідності у кільці $\Omega=\left\{\left(r,\varphi\right)\middle|,\ R_1<r<R,\ 0<\varphi<2\pi\right\}$ з неоднорідними граничними умовами та умовами теплообміну за межами кільця, що залежать від кутової координати φ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=0,\tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}=\bar{F}_1\left(\varphi,T\right),\quad \bar{F}_1\left(\varphi,T\right)=\begin{cases} h_2T_M & 0<\varphi<\varphi_0,\\ h_1\left(T_c-T\right)+\kappa\left(T_c^4-T^4\right), & \varphi_0<\varphi<2\pi,\end{cases}\tag{38}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -h_2\left(T_{c2} - T\right),\ 0 < \varphi < 2\pi, \tag{39}$$

$$T\left(r, \varphi + 2\pi\right) = T\left(r, \varphi\right). \tag{40}$$

Задачу визначення квазістаціонарного температурного поля зведено до розв’язання еквівалентного їй інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна.

Після операції усереднення отримаємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яка розпадається на дві крайові задачі в області $\Omega_\varphi = \left\{\Omega_{\varphi 1} + \Omega_{\varphi 2}\right\}$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{2Rr_c^2 h_2}{S}u + \frac{2Rr_c^2}{S}\bar{F}\left(\varphi, u\right) + \frac{2Rr_c^2 h_1}{S}u = 0. \tag{41}$$

Перша задача в області $\Omega_{\varphi 1} = \left\{0 < \varphi < \varphi_0\right\}$ запишемо так:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} - \frac{2r_c^2}{S}\left(Rh_2 - R_1 h_1\right)u_1 + \frac{2Rr_c^2}{S}h_2 T_M = 0, \\ u_1\left(0\right) = T_m, \qquad u_1\left(\varphi_0\right) = T_M. \end{gathered} \tag{42}$$

Увівши позначення $g^2 = \frac{2r_c^2}{S}\left(Rh_2 - R_1 h_1\right),\ g_1 = \frac{2Rr_c^2 h_2 T_M}{S}$, отримаємо розв’язок задачі (42)

$$u_1\left(\varphi\right) = C_1 e^{g\varphi} + C_2 e^{-g\varphi} + \frac{2Rh_2 T_M}{Rh_2 - R_1 h_1}. \tag{43}$$

Друга задача в області $\Omega_{\varphi 2} = \left\{\varphi_0 < \varphi < 2\pi\right\}$ представлена у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + g^2 u_2 = -h_1 T_0 - \tau\left(T_c^4 - u_2^4\right), \\ -\frac{du_2\left(\varphi_0\right)}{d\varphi} = \left(h_2 - h_1\right)u_2 + h_1 T_0 + \kappa\left(T_c^4 - u_2^4\right), \qquad u_2\left(2\pi\right) = T_m, \end{gathered} \tag{44}$$

$$\text{де } \tau = a \times \kappa, \qquad a = \frac{2Rr_c^2}{S}.$$

Для побудови функції Гріна для задачі (44) рівняння (44) записано в операторному вигляді

$$Lu = \tau u_2^{\ 4} - \tau T_c^4, \qquad L = \frac{d^2}{d\varphi^2} + g^2.$$

Для знаходження функції u_2 побудовано функцію Гріна для спряженого оператора L^* до оператора L у кожній з підобластей області $\Omega_\varphi = \left\{\Omega_{\varphi 1} + \Omega_{\varphi 2}\right\}$

Рівняння Гаммерштейна у кожній підобласті запишемо так:

$$u_{22}(\xi)=u_{22}(\varphi_0)G'_{2\varphi}(\varphi_0,\xi)-u_{22}(2\pi)G'_{2\varphi}(2\pi,\xi)+$$

$$+\omega_2\int_{\varphi_0}^{2\pi}G_2(\varphi,\xi)d\varphi-\tau\int_{\varphi_0}^{2\pi}G_2(\varphi,\xi)u_{22}^4 d\varphi,\ \Omega_{\varphi 2}=\{\varphi_0<\varphi<\xi,\ \xi<\varphi<2\pi\}.$$

Після перетворень та обчислення інтегралів

$$\int_0^{\varphi_0}G_1(\varphi,\xi)d\varphi,\ \int_{\varphi_0}^{2\pi}G_2(\varphi,\xi)d\varphi$$

рівняння Гаммерштейна записано у вигляді

$$u(\xi)=u_L(\xi)-\tau\int_0^{2\pi}G_i(\varphi;\xi)u^4 d\varphi,$$

$$u_L(\xi)=u_{21}(0)G'_{\varphi}(0,\xi)-u_{21}(\varphi_0)G'_{\varphi}(\varphi_0,\xi)+\omega_1\int_0^{\varphi_0}G_1(\varphi,\xi)d\varphi+ \qquad (45)$$

$$+u_{22}(\varphi_0)G'_{\varphi}(0,\xi)-u_{22}(2\pi)G'_{\varphi}(2\pi,\xi)+\omega_2\int_0^{\varphi_0}G_2(\varphi,\xi)d\varphi.$$

Розв’язок інтегрального рівняння (45) знайдено із застосуванням модифікованого методу Ньютона .

За допомогою системи комп’ютерної математики Mathcad побудовано температурний розподіл поверхні валка. Розроблено алгоритм розв’язання неоднорідної задачі та за допомогою GUI-додатка PDEToolbox Matlab побудовано температурний розподіл валка.

В 4.2 розглянуто математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. Температурне поле циліндричного валка доцільно розглядати як температурне поле двошарового циліндра. Моделювання температурного розподілу на поверхні валкових калібрів під час термічної обробки та прокатки стрічки належить до задач визначення температурного поля у циліндричній області, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Для визначення температурного розподілу $T(r,z,\varphi,t)$ у такому складеному циліндрі приходимо до такої крайової задачі на спряження в області $\Omega\times t=\{(r,z,\varphi,t)|0<r<r_0,0<z<l,0<\varphi<2\pi,t>0\}$:

$$\lambda_{1,2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\lambda_{1,2}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\lambda_{1,2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}-c_{1,2}\rho_{1,2}\frac{\partial T}{\partial t}=\begin{cases}-w, & \forall\quad r_0-\Delta+0\le r<r_0,\\ 0, & \forall\quad 0<r<r_0-\Delta-0\end{cases} \qquad (46)$$

$$T(r,0,t)=T(r,z,0)=T_0,\qquad T(r,z,l)=T_l, \qquad (47)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0-\Delta-0,z,\varphi,t)=\lambda_2 T_r(r_0-\Delta+0,z,\varphi,t), \qquad (48)$$

$$T(r_0-\Delta-0,z,\varphi,t)=T(r_0-\Delta+0,z,\varphi,t), \qquad (49)$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1 T_r(r_0,z,\varphi,t)=-\alpha(T-t_c)-\varepsilon\sigma(T^4-t_c^4),\\ &T_r(0,z,\varphi,t)=0,\end{aligned} \qquad (50)$$

$$T(r,\varphi+2\pi,t)=T(r,\varphi,t), \qquad (51)$$

де $\lambda_{1,2},\ c_{1,2},\ \rho_{1,2}, \alpha, \varepsilon, \sigma$– відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів шару покриття та основного тіла валка; t_c – температура навколишнього середовища; w– щільність джерела тепла.

Оскільки температура циліндра уздовж його довжини залишається сталою, похідною по z можна знехтувати, поклавши $\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$ При цьому задача (46) – (51) спрощується, рівняння (46) в області $\Omega_1 \times t = \{(r, \varphi, t) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ набуває вигляду

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2}\rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \le r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0 \end{cases}. \tag{52}$$

Побудовано метод та відповідний алгоритм розв'язання задачі (46) –(51) .

Згідно з методом маємо на границі внутрішнього та зовнішнього циліндрів умову імпедансного типу

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r = r_0 - \Delta} = \begin{cases} g_0, & \omega t < \varphi < \omega t + \varphi_0, t > 0, \\ f_0 + f(u), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi, t > 0, \end{cases} \tag{53}$$

де $g_0, f_0, f(u)$– сталі величини або кусково-монотонні функції.

В 4.3 побудовано математичну модель температурного розподілу процесу гарячого спікання виробів у двошаровому контейнері циліндричної форми.

Визначення температурного розподілу у виробі приводить до розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками.

Для визначення температурного розподілу $T(r, z, t)$ у складеному циліндрі приходимо до такої крайової задачі на спряження в області $\Omega \times t : \{0 \le r \le r_0,\ 0 \le z \le l,\ 0 \le t \le t_0\}$:

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r}\right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2}\rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = f_{1i}(t) \begin{cases} -\dfrac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, & r - \Delta \le r < r_0 \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta \end{cases}, \tag{54}$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \tag{55}$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \qquad T_{1,2}(r, l, t) = T_l, \tag{56}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t)}{\partial r}, \tag{57}$$

$$T_1(r_0 - \Delta - 0, z, t) = T_2(r_0 - \Delta + 0, z, t),, \tag{58}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0, z, t)}{\partial r} = -f_{1i}(t)[\alpha_1(T_1 - T_c) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_c^4)], \qquad \frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0, \tag{59}$$

де $\lambda_{1,2},\ c_{1,2},\ \rho_{1,2},\ \alpha_{1,2}$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів тіла контейнера та виробу; $T_{1,2}$– температура контейнера та виробу; $f_{1i}(t)$ – кусково-неперервна функція, що відповідає за періодичну дію джерел тепла.

Для визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі отримано граничну умову імпедансного типу. Запропонована математична модель та алгоритм розв'язання задачі з достатньою точністю описують процес спікання виробів у контейнері.

Для дослідження температурного поля внутрішнього циліндра T_2 необхідно знати усереднений тепловий потік від зовнішнього циліндра до внутрішнього. Для цього сформульовано умову спряження на межі зовнішнього та внутрішнього циліндрів. Знайдено тепловий потік через поверхню зовнішнього циліндра до внутрішнього.

У такий спосіб визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі T_2 зводить задачу (54)–(59) до крайової задачі з умовою імпедансного типу

$$\lambda_2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \tag{60}$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \qquad 0 < z < l, \qquad t > 0$$

$$T_2(r,z,0) = T_0, \tag{61}$$

$$T_2(r,0,t) = T_0, \qquad T_2(r,l,t) = T_l, \tag{62}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2 \frac{\partial T_2(r_0-\Delta+0,z,t)}{\partial r} = \frac{\lambda_2}{(r_0-\Delta)}\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{c_1\lambda_2\rho_1}{\lambda_1(r_0-\Delta)}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{I^2\rho_0\beta}{2(r_0-\Delta)S} f_{1i}(t)T_2 + \\ + \frac{I^2\rho_0\lambda_2 f_{1i}(t)\left(r_0\Delta - \Delta^2/2\right)}{\lambda_1 S^2(r_0-\Delta)} - \frac{r_0\lambda_2 f_{1i}(t)}{\lambda_1(r_0-\Delta)}\left[\alpha(T_2-T_c) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_c^4)\right], \qquad \left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{r=0} = 0.\end{gathered} \tag{63}$$

Отримана умова (63) є умовою імпедансного типу, оскільки вона поряд з нормальною містить і дотичну похідну. Температурне поле у внутрішньому циліндрі, а потім у зовнішньому знайдено за допомогою скінченно-різницевої схеми Кранка-Ніколсон для рівняння теплопровідності.

Проведено числові розрахунки та побудовано температурні розподіли під час спікання виробів із спресованого порошкового заліза.

У 4.4 побудовано математичну модель температурного поля складної системи:
екструдер, нагрівник, полімерна нитка (філамент), що рухається через екструдер з постійною швидкістю у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності з додаванням відповідних крайових та нелокальної інтегральної умов. Філамент розігрівається в обмеженій області зовнішніми джерелами тепла конвективним або кондуктивним способом до температури плавлення філаменту на виході із зони нагрівання екструдера. Задача розв'язана числовим і аналітичним методом. Побудовано температурні розподіли полімерної нитки в екструдері та на виході з нього для різних умов керування процесом адитивного друку деталей.

У **п'ятому розділі** побудовано математичні моделі теплових процесів, що протікають у складних системах (електричних машинах), які на відміну від існуючих математичних моделей враховують характер теплового обміну на межі розділу шарів та дозволяють розраховувати температуру окремих частин складної області. Запропонований метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній системі з осесиметричними елементами – багатошаровому циліндрі, де в одній частині елементів діють внутрішні джерела тепла, а у іншій – зовнішні. Розглянуто метод розв’язання задачі в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів з кондуктивним теплообміном між шарами.

Побудовано математичну модель температурного поля радіального перерізу складної багатошарової області, що складається з двох шарів, в яких відсутні джерела тепла, та шару з композитного матеріалу, в якому діють внутрішні джерела тепла. З геометричної точки зору, один із шарів виробу у радіальному перерізі має вигляд «4-пелюсткової троянди».

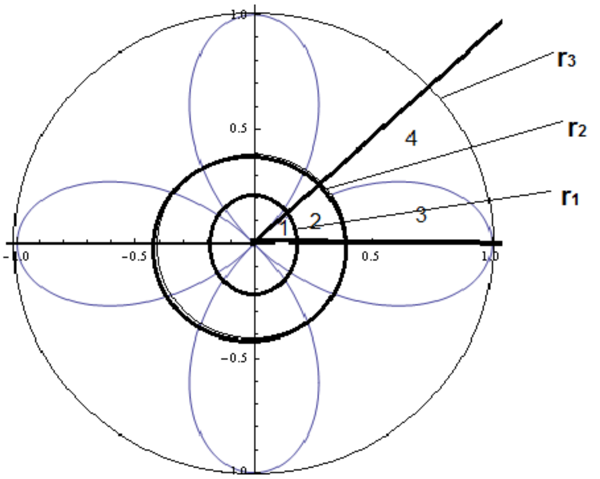


Рис. 3. Схема радіального перерізу складної області

Визначення температурного розподілу $T(r,\varphi)$ у тришаровому циліндрі рис.3, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішніх шарах тепло передається від зовнішнього теплопровідністю, має вигляд такої крайової задачі на спряження в області $\Omega:\{0<r<r_3, r=r_3\cos 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\}$:

$$\lambda_i \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_i}{\partial r}\right) + \lambda_i \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} -\dfrac{I^2\rho_0}{S^2},\ r_2 \le r < r_3\cos 2n, \alpha_2<\varphi<\alpha_3, n=1,2,.. \\ 0,\quad 0<r<r_1, r_1<r<r_2,(0<\varphi<\alpha_2)\ r_2<r<r_3,(\alpha_2<\varphi<\alpha_3)\end{cases} \quad (64)$$

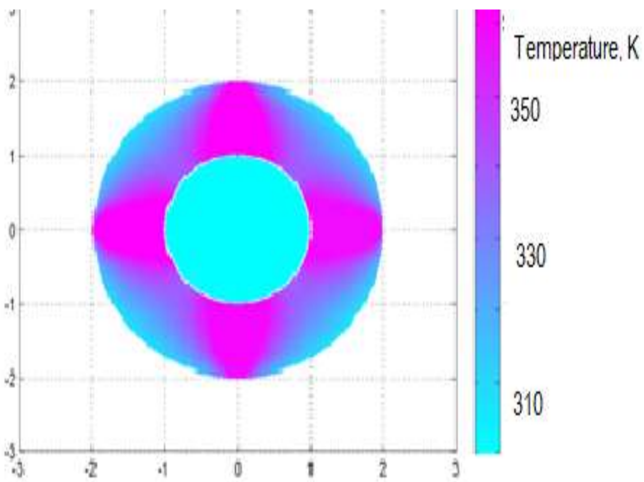
$$\lambda_3 T_{3r}(\mathrm{r}_3,\varphi) = -\alpha(T_3-T_c)-\varepsilon\sigma(T_3^4-T_c^4), \quad (65)$$

$$T_r(\mathrm{r}_i-0,\varphi)=T_r(\mathrm{r}_i+0,\varphi), \qquad i=1,2,3, \quad (66)$$

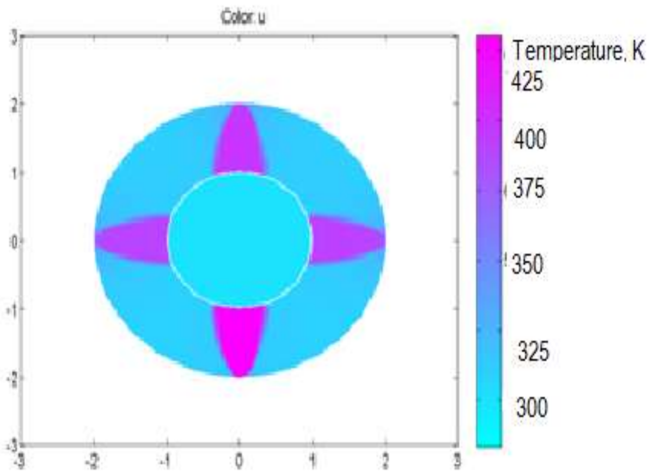
$$T_i(r_i-0,\varphi)=T_i(r_i+0,\varphi), \qquad i=1,2,3, \quad (67)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\overline{r_3 \cos 2\varphi - 0}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\overline{r_3 \cos 2\varphi + 0}}. \qquad (68)$$

Побудована математична модель забезпечує можливість більш точно оцінювати температуру обмоток електричної машини в процесі її роботи. Запропонований метод дослідження математичної моделі температурного поля конструктивних елементів електричної машини ґрунтується на розв'язанні задачі стаціонарної теплопередачі методом скінченних елементів і може бути успішно застосований для широкого класу електричних машин. Проведено числовий експеримент, який з достатньою точністю відповідає натурним експериментам щодо вимірів температурних розподілів в обмотках статора та ротора (рис. 4). Обмотка статора виконана із алюмінію, ізоляція обмотки – міканіт. Діаметр ротора $r_1 = 1.2m$; діаметр статора внутрішній $r_2 = 1.4m$, зовнішній $r_3 = 1.6m$; струм статора 200–500А.



а)



б)

Рис. 4. Розв'язок (64)–(68) а) – без ізоляції обмотки; б) – з ізоляцією

Побудована математична модель теплового процесу в синхронній машині з постійним магнітом у формі спиць та метод розв'язання крайової задачі, що описує процес теплообміну в такій складній області. Математична модель розподілу температурного поля в синхронній машині з постійним, у формі спиць, магнітом, яка має вигляд багатошарової області з різними теплофізичними характеристиками шарів, подана у вигляді крайової задачі з умовою імпедансного типу в складній області.

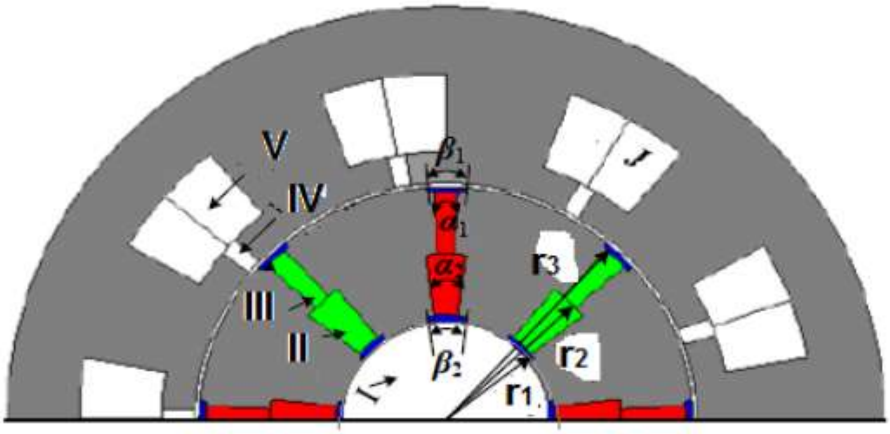


Рис. 5. Частини двигуна (розбиття на підобласті)

Математична модель температурного розподілу $T(r,\varphi)$ в багатошаровій області $\Omega:\{0<r<r_6,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, де внутрішнє джерело тепла зосереджено в обмотках, тобто в області V (Рис.5), може бути записана як крайова задача з умовами спряження у вигляді

$$\lambda_i \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_i}{\partial r}\right)+\lambda_i\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_i}{\partial\varphi^2}=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{I^2\rho_0}{S^2},\ r_4\le r<r_5, s_j-\dfrac{c_2}{2}<\varphi<s_j+\dfrac{c_2}{2}, j=1,2,.. \\ 0,\quad 0<r<r_1, r_5<r<r_6, (0<\varphi<2\pi)\ r_1<r<r_2, (r_i-\dfrac{\alpha_2}{2}<\varphi<r_i+\dfrac{\alpha_2}{2}) \\ r_2<r<r_3(r_i-\dfrac{\alpha_1}{2}<\varphi<r_i+\dfrac{\alpha_1}{2}), r_3<r<r_4(s_j-\dfrac{c_1}{2}<\varphi<s_j+\dfrac{c_1}{2}), \end{cases} \tag{69}$$

$$\lambda T_{ir}(\mathrm{r}_i,\varphi)=-\alpha(T_i-T_c)-\varepsilon\sigma(T_i^4-T_c^4),\qquad i=3,5, \tag{70}$$

$$T_{ir}(\mathrm{r}_i-0,\varphi)=T_{ir}(\mathrm{r}_i+0,\varphi),\qquad i=2,4, \tag{71}$$

$$T_i(r_i-0,\varphi)=T_i(r_i+0,\varphi), \tag{72}$$

де T_1-T_5 –температури підобластей; $T_{1r}-T_{5r}$–похідні температур підобластей.

Досліджуване поле температур складається з п'яти підобластей. Граничні умови при описі ідеального теплового контакту на границі підобластей являють собою рівність температур і теплових потоків на граничних поверхнях. Граничні умови спряження четвертого роду дозволяють об'єднувати температурні поля у всьому виробі, де тепло передається теплопровідністю від одного конструктивного елемента до іншого. Задача розв'язується методом скінченних елементів. Запропонована математична модель температурного поля в електричній машині дозволяє контролювати температуру в режимі реального часу. Модель дозволяє розраховувати температуру окремих частин машини, що важливо для швидкого регулювання умов її експлуатації і охолодження.

Побудована математична модель теплового процесу у складній електромеханічній системі − в двигуні складеної структури з постійними магнітами. Складна електромеханічна система, якою є **с**инхронний двигун з постійним магнітом, використовується у гібридних електромобілях середнього розміру.

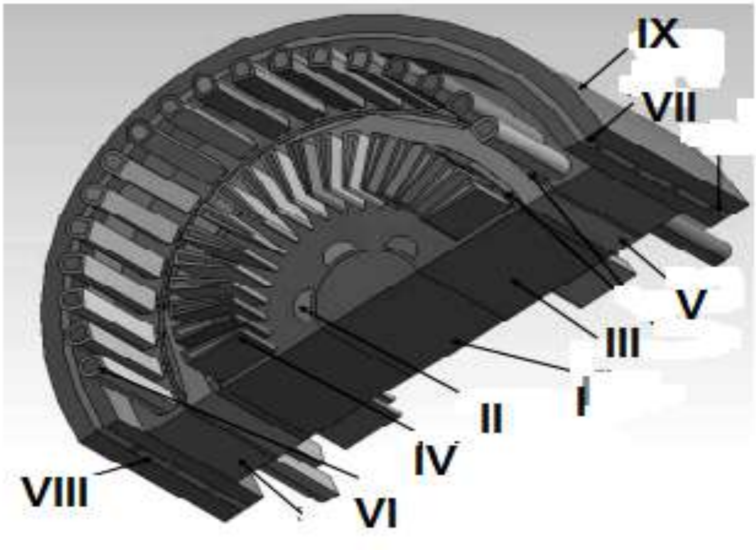


Рис. 6. Модель двигуна складеної структури з постійними магнітами

Підобласті синхронної машини з постійним магнітом позначено так:

I Вал $0 < r < r_1$;

II Осьові прорізи для охолодження $r_1 \le r < r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi \; 0 < r < r_1$;

III Внутрішня серцевина ротора $r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi < r < r_3$;

IV Внутрішні обмотки ротора $r_3 < r < r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi$;

V Зовнішня серцевина ротора $r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi < r < r_5$;

VI Обмотки статора $r_5 < r < r_6$;

VII Корпус $r_6 < r < r_7$;

VIII Охолоджуючий водяний канал $r_7 < r < r_8$;

IX Корпус $r_8 < r < r_9$.

Області II–IV подано у вигляді частини 2n пелюсткової троянди, яка вирізана кільцем, а область VI − кільцем з щільно укладеними колами, причому настільки щільно, що кільце можна вважати однорідним (рис. 6). Отже, маємо 9 підобластей, причому в VI, IV підобластях зосереджені внутрішні джерела тепла.

Математична модель визначення теплового стану двигуна складної структури з постійними магнітами (CS-PMSM) у області

$\Omega \times t: \{0 < r < r_9, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < t < t_0\}$ має вигляд

$$\lambda_i \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T_i}{\partial r}) + \lambda_i \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_i}{\partial \varphi^2} + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \tag{73}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{I^2 \rho_0 (1+\beta T_i)}{S^2}, r_3 < r < r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi, r_5 < r < r_6 \\ 0, \quad 0 < r < r_1, r_1 \le r < r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi, \\ \quad r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi < r < r_3 \;, \\ \quad r_4 \cap r_4 \cos 2n\varphi < r < r_5 \;, r_6 < r < r_9 \end{cases}$$

$$T_i(r,\varphi,0) = T_0, \tag{74}$$

$$T_i(r,0,\varphi,t) = T_0, \qquad T_i(r,l,\varphi,t) = T_0\,, \tag{75}$$

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{76}$$

Для зовнішньої поверхні кожуха і торцевих обмоток гранична умова записується як

$$\lambda_3 \left.\frac{\partial T_3}{\partial r}\right|_{r=r_2} = \left[-\alpha(T_3 - T_c) - \varepsilon\sigma(T_3^4 - T_c^4)\right], \tag{77}$$

$$T_i(r_{i-0}, z, \varphi, t) = T_i(r_{i+0}, z, \varphi, t), \qquad i = 3,4,5,6, \tag{78}$$

$$\lambda_i \left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{r=r_i-0} = \lambda_{i+1} \left.\frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}\right|_{r=r_i+0}, \qquad i = 3,4,5,6. \tag{79}$$

Умови (78)–(79) є умовами ідеального теплового контакту. Крім того, умова (79) використовує похідну у напрямку заданого вектора, де S – загальна площа перерізу алюмінієвої деталі статора, зокрема $Q = \{r_1 \le r \le r_2 \cap r_2 \cos 2n\varphi\}, n = 1,2...$

$$S(Q) = \pi r_2^2 - \frac{\pi r_1^2}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Теплова модель не вимагає розрахунку її складових для різних геометричних розмірів і теплових параметрів. Математична модель дає можливість коригувати залежності теплофізичних властивостей матеріалу від температури в разі значного впливу даного чинника на результат розрахунку. На підставі теоретичних і експериментальних досліджень макетних зразків отримано наочні картини розподілу температури. Запропонована модель надає розробнику можливість оцінити температури конструктивних частин CS-PMSM.

Електрична машина являє собою складну багатошарову циліндричну область.

Виходячи із вищезазначеного, у найпростішому випадку математичну модель теплового процесу в електричній машині подано у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності у тришаровому циліндрі, де в одному з шарів (обмотці) діють внутрішні джерела тепла, а у двох інших тепло передається від одного шару до іншого. Схематичне зображення тришарового циліндра наведено на рис. 7.

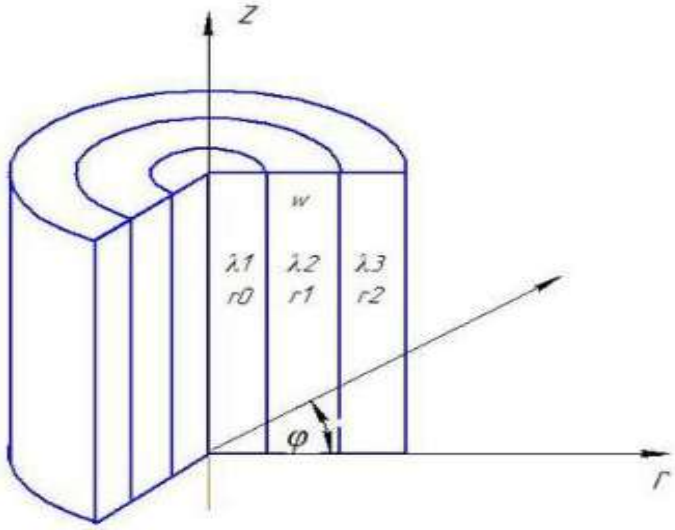


Рис. 7. Тришаровий циліндр з різними теплофізичними характеристиками шарів

Запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній рухомій області – багатошаровому циліндрі, одні шари якого нерухомі, а інші обертаються навколо своєї осі зі сталою швидкістю, при цьому в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами.

Визначення температурного розподілу $T(r,z,t)$ у тришаровому циліндрі, де у зовнішньому шарі діють внутрішні джерела тепла, а у внутрішніх шарах тепло передається від зовнішнього теплопровідністю, має вигляд такої крайової задачі на спряження в області $\Omega\times t:\{0<r<r_0,\ 0<z<l,\ 0<t<t_0\}$:

$$\lambda_i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial T_i}{\partial r}\Big)+\lambda_i\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}-c_i\rho_i\frac{\partial T_i}{\partial t}=\begin{cases}-\dfrac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{S^2},\ r_1\le r<r_2\\ 0,\quad 0<r<r_0, r_0<r<r_1,\ r>r_2\end{cases} \tag{80}$$

$$T_i(r,z,0)=T_0, \tag{81}$$

$$T_i(r,0,t)=T_0,\quad T_i(r,l,t)=T_0, \tag{82}$$

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\qquad \lambda_3\left.\frac{\partial T_3}{\partial r}\right|_{r=r_2}=\left[-\alpha\ (T_3-T_c)-\varepsilon\sigma(T_3^4-T_c^4)\right], \tag{83}$$

$$T\,(r_{i-0},z,t)=T_1(r_{i+0},z,t),\quad i=1,2,3, \tag{84}$$

$$\lambda_i\left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{r=r_i-0}=\lambda_{i+1}\left.\frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}\right|_{r=r_i+0}\quad i=1,2,3, \tag{85}$$

де λ_i,c_i,ρ_i – відповідні теплофізичні характеристики шарів циліндра; α_i, I, ρ_0, ε, σ – коефіцієнт тепловіддачі, сила струму, питомий опір дроту обмотки, ступінь чорноти та стала Стефана-Больцмана відповідно; T_c – температура навколишнього середовища; S – сумарна площа перерізів дроту в обмотках статора.

На рис. 8 зображені температурні розподіли, щ побудовані за розв’язками (80)–(85).

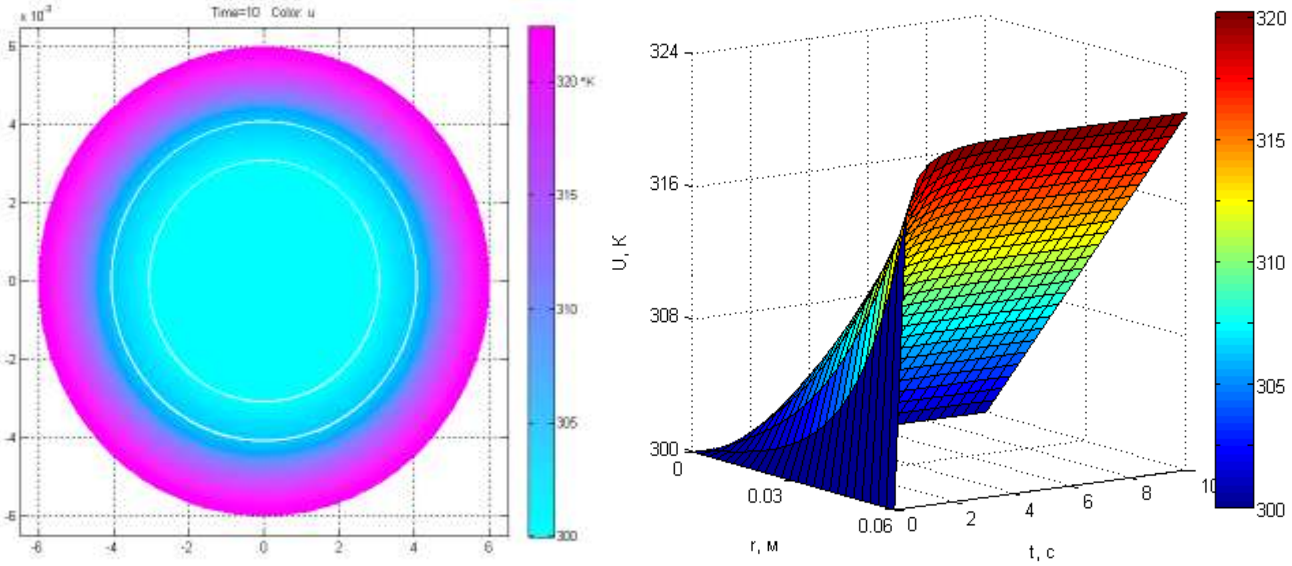


Рис 8. Температурний розподіл в циліндричній тришаровій області вздовж радіуса, що отриманий із розв’язання (80)–(85)

Запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній рухомій системі з осесиметричними елементами – багатошаровому циліндрі, одні шари якого – нерухомі, а інші обертаються навколо своєї осі зі сталою швидкістю, при цьому в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів та з кондуктивним теплообміном між шарами. Суть методу полягає в усередненні температурних розподілів вздовж радіуса у внутрішніх шарах, якщо невизначена гранична умова вздовж радіуса в одному з шарів. Процес усереднення температурного розподілу уздовж радіуса, якщо дозволяє фізична модель задачі, знижує її розмірність, але внаслідок перетворень з’являється на межі шарів гранична умова імпедансного типу. Шляхом послідовного усереднення вздовж радіуса, використовуючи умову спряження на межі шарів, визначається температурний розподіл в останньому шарі. Наступний крок визначення температурних розподілів у багатошаровому циліндрі полягає у оберненому розв’язанні задачі від останнього шару до першого. Отримано аналітичний розв’язок спрощеної задачі для тришарового циліндра, де в одному з шарів діють внутрішні джерела тепла, а до двох інших тепло передається теплопровідністю. Отримано аналітичний розв’язок спрощеної задачі та наближений розв’язок нелінійної задачі, проведено числові експерименти, побудовано графіки температурних розподілів.

В розділі розглянуто приклади побудови математичних моделей і розрахунку температурних розподілів у складній системі – багатошаровій циліндричній області – електричній машині, запропоновано метод розв'язання крайових задач у складних багатошарових осесиметричних областях.

Проведено порівняння результатів числового експерименту: температур отриманих із розв'язків крайових задач із температурами, що є результатами натурного експерименту. Температури виміряні за допомогою пірометра.

ВИСНОВКИ

У дисертації на основі виконаних теоретичних і експериментальних досліджень отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, яке полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей температурних розподілів у складних системах та методів їх дослідження. Такі складні системи включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи циліндричної форми, що нагріваються зовнішніми чи внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються, та які враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з оточуючим середовищем. Отримане рішення відрізняється від існуючих рішень більш повним відображенням процесів теплообміну, розробкою нових обчислювальних методів розв'язання початково-крайових та нелокальних задач, які виникають у математичних моделях, що дозволяє підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Проведено аналіз сучасного стану теорії та практики моделювання теплових процесів, які відбуваються під час основних технологічних процесів у порошковій металургії та електротехніці. Аналіз показав необхідність удосконалення математичних моделей теплових процесів (в складних областях та зі складними умовами теплообміну), методів розв'язання з урахуванням можливостей сучасної обчислювальної техніки. Це і сформувало проблему дисертаційного дослідження, і окреслило коло невирішених задач, що потребують розв'язання для досягнення мети дисертаційного дослідження.

У межах запропонованого напряму на основі сформованих принципів побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей та методів розв'язання задач одержано такі наукові і практичні результати роботи, що мають істотні переваги перед відомими рішеннями.

Вперше:

– сформульовано єдиний підхід, що дозволив побудувати нові та удосконалити існуючі математичні моделі теплових процесів у складних системах, що включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи при щільному та нещільному контакті шарів осесиметричної форми, що нагріваються або охолоджуються, який відрізняється від аналогічних підходів врахуванням залежності температурного поля елементів від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем;

– запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні, який полягає в усереднені температурних розподілів за радіусом у внутрішніх шарах, в умовах невизначеності однієї з граничних умов на межі шарів, та зведені крайової задачі до задачі з умовами імпедансного типу.

Удосконалено:

– математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багатошарових областях при щільному та нещільному контакті шарів, які, на відміну від існуючих, враховують різні закони теплообміну на межі розділу шарів, що залежать від кута повороту елемента навколо своєї осі і дозволяють розраховувати температуру окремих елементів виробів;

– методи розв’язання обернених крайових задач теплопровідності, які, на відміну від існуючих, враховують змінні граничні умови, застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв’язку, що дає можливість розширити коло застосувань методів розв’язання обернених задач;

– математичні моделі процесів теплообміну у вигляді нелокальних задач для рівняння теплопровідності, які, на відміну від існуючих, за рахунок залучення інтегральної умови в математичну модель дозволяють визначити параметри керування температурними розподілами;

– математичні моделі теплообміну між елементами складних систем, де, на відміну від існуючих математичних моделей у вигляді нелокальних задач, як нелокальна умова запропонована умова балансу тепла.

Достовірність і точність результатів, отриманих у дисертаційній роботі, базується на використанні методів математичного моделювання та апарату математичної фізики, забезпечується числовими експериментами, відповідністю моделей технологічним і фізичним процесам, результатами досліджень інших авторів та результатами натурних експериментів.

Проведено аналіз та порівняння результатів числових розрахунків зі значеннями температурних розподілів, отриманих шляхом вимірювання за допомогою приладів.

Упроваджено результати роботи в навчальний процес Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського і практику проектування технологічних процесів та обладнання на підприємствах України та за кордоном. Упровадження на практиці розроблених математичних моделей та комп’ютерних методів розв’язання задач дає можливість суттєво скоротити терміни проектування і матеріальні витрати на створення виробу, охорону навколишнього середовища, підвищити конкурентоспроможність продукції.

Таким чином, було досягнуто мету дисертаційного дослідження – підвищення ефективності контролю температури у складних технологічних процесах металургії (прокатка, термічна обробка), електромеханіки, де мають місце складні умови теплообміну між багатошаровими рухомими та нерухомими елементами на граничних поверхнях, за рахунок побудови нових та удосконалення існуючих математичних моделей процесів теплообміну, розробки ефективних методів розв'язання крайових, нелокальних та обернених задач для визначення основних параметрів керування температурними полями. Це дозволяє підвищити точність визначення температурних розподілів у складних системах.

Результати, що отримані у роботі, становлять науковий інтерес і можуть бути використані під час подальшої розробки математичних моделей теплових процесів у складних системах та методів розв'язання нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Влияние высокоэнергетических воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов: сер. Фундаментальные проблемы современного материаловедения / А. В. Аниськов, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2013. 375 с.
2. Влияние внешних энергетических воздействий на структуру, фазовый состав и свойства материалов / В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2012. 320 с.
3. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов / О. А.Троицкий, В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская и др.; под ред. В. Е. Громова. Новокузнецк: СибГИУ, 2011. 210 с.
4. Ляшенко В. П, Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.*2017. Вип. 6. Ч. 1. С. 37–43. (*index copernicus*)
5. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б., Бриль Т.С., Дем'янченко О.П. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 133–137.
6. Родькин Д. И., Ченчевой В. В., Кобыльская Е. Б. Нелинейные преобразования с рядами Фурье в применении к задачам электротехники. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчук: КрНУ. 2015. Вип. 1(29). С. 82–93.
7. Ляшенко В. П., Черненко В. П., Кобильська О. Б., Аніскoв А. В. Моделювання термопружного стану під час електропластичної деформації. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2014. Вип. 3(50). С. 350–354. (*РИНЦ (eLibrary)*).
8. Kobilskaya O., Lyashenko V. Mathematical model of thermal process with an unknown source. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2016. Вип. 6/2016 (101). Ч. 1. С. 41–45. (*index copernicus*)
9. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Відновлення імпульсного джерела тепла в задачі теплопровідності. *Вісник Кременчуцького національного*

університету імені Михайла Остроградського. 2016. Вип. 2/2016 (97). Ч 1. С. 27–32. (*index copernicus*).

10. Кобильська О. Б. Задача керування джерелом тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2013. № 17. С. 65–71.

11. Кобильська О. Б. Обернена нелокальна задача з умовою інтегрального перевизначення. Математичне та комп’ютерне моделювання: сер. Фізико-математичні науки. Кам’янець-Подільський: К-ПНУ. 2012. Вип. 7. С. 118–124. (BASE, Citefactor, General Impact Factor (GIF) та ін).

12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Застосування ітераційних методів до визначення параметрів керування температурним полем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2012. Вип. 4/2012 (75). С. 34–37. (*index copernicus*).

13. Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. Copper strip electroplastic rolling. *Metalurgical and Mining Industry*. 2015. № 2. P. 294–299. *(scopus).*

14. Слесаренко А. П., Дем’янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 467–471. (*РИНЦ (eLibrary)*).

15. Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2013. Вип. 21 (№ 1058). С. 43–49.

16. Кобильська О. Б. Моделювання імпульсного теплового процесу. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2013. Вип. 22 (№ 1063). С. 84–89.

17. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Нестаціонарні поздовжні хвилі в спадково-пружній циліндричній оболонці. *Вісник Тернопільського НТУ імені Івана Пулюя*. 2012. Вип. № 4 (68). С. 28–34.

18. Кобыльская Е. Б., Ляшенко В. П., Григорова Т. А., Троицкий О. А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2011. Вип. 4/2011 (69). Ч 1. С. 57–62.*(index copernicus*).

19. Троицкий О. А., Сташенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобыльская Е. Б. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов. *Питання атомної науки* і *техніки*. 2011. Вип. 4/2011. С. 111–117. *(scopus, web of science).*

20. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2012. Вип. 19 (№ 1015). С. 167–172.

21. Дем’янченко О. П., Кобильська О. Б., Ляшенко В. П. Математична модель теплообміну у валковому калібрі. *Вісник Харківського національного*

університету ім. В.Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2019. Вип. 42 (№ 1015). С. 55–64.

22. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2020. Вип. 45. С. 41–49.

23. Kobilskaya E., Lyashenko V., Hryhorova T. Integral conditions in the inverse heat conduction problems. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7. № 2. P. 219–227. *(scopus).*

24. Kobilskaya E., Lyashenko V. A method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2020. Вип. 46. С. 25–36.

Праці апробаційного характеру

25. Lyashenko V., Rod'kin D., Kobilskaya E., Martynenko M., Demyanchenko O. Thermal Process Mathematical Model in Electrical Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference*. Kremenchuk, 2017. P. 296–299. *(IEEE, scopus).*

26. Zaika A., Hrytsiuk O., Kobilskaya E., Lyashenko V. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2017. Vol. 1895. Issue 1. P. 090004-1–090004-9. *(scopus).*

27. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2016. Vol. 1773. Issue 1. P. 040005-1–040005-7. *(scopus).*

28. Lyashenko V., Kobilskaya E. Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2014. Vol. 1629. Issue 1. P. 94–101. *(scopus).*

29. Lyashenko V., Kobilskaya E.Contact of Boundary-value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2015. Vol. 1684. Issue 1. P.080009-1–080009-10. *(scopus).*

30. Kobilskaya E., Lyashenko V., Demyanchenko O., Nabok T. Thermal Process in Compound-Structure Permanent-Magnet Synchronous Machine. *Modern Electrical and Energy Systems: Proceedings of the International Conference.* Kremenchuk, 2019. P. 334–338. *(IEEE, scopus).*

31. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Nabok T. Temperature field distribution in spoke-type permanent magnet synchronous machines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference*

Proceedings. Melville New York, 2019. Vol. 2164. Issue 1. P. 060018–080009. *(scopus)*.

32. Lyashenko V., Kobilskaya E., Zaika A., Demyanchenko O., Hryhorova T. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: *AIP Conference Proceedings*. Melville New York, 2018. Vol. 2025. Issue 1. P. 080006-1–080006-7. *(scopus)*.

33. Aniskov A., Lyashenko V., Kobilskaya E. The process control of electroplastic deformation ultrafine wire. *Proceeding of scientific and student's works in the field of Industrial Electrical Engineering*. 2013. Vol. 2. Part 1. Kosice, Slovakia. P. 87–90.

34. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового стану електричної машини. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях*: пр. міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 190–192.

35. Ляшенко В. П., Дем'янченко О. П., Кобильська О. Б. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: тези доп. міжнар. наук. конф, м. Рівне, 2–4 березня 2018 р. Рівне, 2018. С. 65.

36. Беззубченкова Т. С., Кобильська О. Б. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 55–57.

37. Жердєва А.І., Кобильська О. Б. Математичні моделі та методи розв'язку лінійних та нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 58–60.

38. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Заїка А. В., Жердєва А. І. Розрахунок умов теплової рівноваги під час роботи електричної машини. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали V всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 03–05 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 17–20.

39. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Бриль Т. С., Дем'янченко О. П. Метод інтегральних рівнянь у задачах теплообміну. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: материалы междунар. симпозиума, г. Харьков, 26–28 июня 2017 г. Харьков, 2017. С. 59–62.

40. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Нелокальні задачі відновлення джерел тепла. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем*: матеріали II всеукр. наук.-техн. конф. з міжнар. участю, м. Дніпро, 1–3 листопада 2016 р. Дніпро, 2016. С. 71–72.

41. Lyashenko V., Kobilskaya E. Methods for Solving Inverse Nonlocal Problems for Parabolic Equations. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Eight International Conference, Albena, 22–27 June 2016. Albena (Bulgaria), 2016. P. 37–38.

42. Кобильська О. Б., Заїка А. В., Дем'янченко О. П. Алгоритм чисельного розв'язання задачі теплопровідності зі складними умовами теплообміну. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 72–73.

43. Кобильська О. Б., Черненко В. П. Моделювання поширення нестаціонарних повздовжніх хвиль напруги в поропружному стрижні. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 3–5 жовтня 2017 р. Кременчук, 2017. С. 62–63.

44. Черненко В. П., Кобильська О. Б. Математическая модель механического поведения вязкоупругого материала под действием периодической нагрузки. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали всеукр. наук. конф., м. Кременчук, 22–25 вересня 2015 г. Кременчук, 2015. С. 91–92.

45. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Григорова Т. А. Моделювання процесу розповсюдження тепла у двошаровому циліндрі з різними теплофізичними характеристиками. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях:* тр.междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 26–31 мая 2016 г. Харьков, 2016. С. 219–222.

46. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Енергетичні умови в математичних моделях для рівняння теплопровідності. *Математичне моделювання та математична фізика*: матеріали всеукр. наук. конф. м. Кременчук, 22–25 вересня 2015г. Кременчук, 2015. С. 116–117.

47. Lyashenko V., Kobilskaya E. Contact Boundary Value Problems and Nonlocal Problems in Mathematical Models of Heat Transfer. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Seventh International Conference. 28 June – 3 July 2015, Albena, Bulgaria. Albena (Bulgaria), 2015. P. 45.

48. Lyashenko V., Kobilskaya E.Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Sixth International Conference. Albena, 1 July –26 June 2014. Albena (Bulgaria), 2014. P. 28–29.

49. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of process control system of wire drawing. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 28–31 мая 2014 г., Харьков, 2014. С. 259–261.

50. Lyashenko V., Kobilskaya E. Designed of Process Control System of Wire Drawing. *37 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics "MIPRO 2014"*, Opatija 26–30 May 2014. Opatija (Croatia), 2014. P. 31.

51. Bryl T., Lyashenko V., Kobilskaya E., Aniskov A. System of control of pulse processing with hyperfine wire during electroplastic deformation. *XV International PhD Workshop OWD 2013:*conference archives PTETIS, Wisla, 19–22 october 2013. Vol. 33. Wisla, 2013. P. 74–79.

52. Zagirnyak M., Kobilskaya E., Lyashenko V., Salenko A. Heat Surce Control During Additive Processes. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Twelfth International On-Line Conference on

Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena, 24–29 June 2020. San Diego (Bulgaria), 2020. P. 53.

53. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Яковлева Д. М. Моделювання теплового процесу під час ультразвукового електропластичного плющення металу. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2013 г. Харьков, 2013. С. 242–245.

54. Kobilskaya E. Modeling of temperature distribution of the mobile enviroment with pulse sources of heat. *XIV International PhD Workshop OWD 2012:* conference archives PTETIS. Wisla, 19–22 october 2012. Vol. 31. Wisla, 2012. P. 210–213

55. Ляшенко В. П., Кобыльская Е. Б. Определение параметров управления процессом электропластической деформации. *Электрон-фононные и спиновые взаимодействия, инициированные быстрыми заряженными частицами, электромагнитными полями, электрическими токами и СВЧ-излучением в макроскопических проявлениях на обычных наноматериалах*: материалы междунар. конф., г. Туапсе (Россия), 8–15 сентября 2012 г. Туапсе, 2012. С. 154–160.

56. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали конф., м. Київ, 10–11 вересня 2012 р. Київ, 2012. С. 66.

57. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв’язання задачі з рухомою границею. *Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях*: тр. междунар. науч.-практ. конф., г. Харьков, 23–27 апреля 2012 г. Харьков, 2012. С. 278 – 280.

58. Кобильська О. Б., Ляшенко В. П., Слєсаренко А. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*: тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ), г. Харьков, 26–28 июня 2011 г., Харьков, 2011. С. 211–214.

59. Kobilskaya E., Zaika A. Mathematical Model of heat Transfer in an Electric Machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*: book of abstracts Tenth International Conference Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, 20–25 June 2018. Albena (Bulgaria), 2018. P. 39.

АНОТАЦІЯ

Кобильська О. Б. **Математичне та комп’ютерне моделювання теплових процесів у складних системах з рухомими та нерухомими осесиметричними елементами.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. − Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, м. Харків, 2020.

В дисертаційній роботі отримано нове рішення важливої науково-прикладної проблеми, яка полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей температурних розподілів у складних системах та методів їх дослідження. Такі складні системи включають у себе багатошарові рухомі та нерухомі елементи циліндричної форми, що нагріваються зовнішніми чи внутрішніми джерелами тепла або охолоджуються і враховують залежність температурного поля від кута обертання елементів навколо своєї осі та складних умов теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Отримане рішення відрізняється від існуючих рішень більш повним відображенням процесів теплообміну, розробкою нових обчислювальних методів розв’язання початково-крайових та нелокальних задач, які виникають у математичних моделях, що дозволяє підвищити ефективність контролю температури в складних системах.

Удосконалено математичні моделі теплових процесів, що відбуваються у складних багатошарових областях.

Запропоновано нелокальні інтегральні умови для знаходження розв’язків обернених задач та визначення параметрів керування температурними полями.

Удосконалено методи розв’язання обернених крайових задач теплопровідності, які враховують змінні граничні умови і застосовують інтегральну умову балансу тепла для побудови розв’язку. Запропоновано метод розв’язання крайових задач для рівняння теплопровідності у складній області – багатошаровому циліндрі, де в одній частині шарів діють внутрішні джерела тепла, а в іншій – зовнішні. Результати роботи впроваджено в навчальний процес Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського і практику проектування технологічних процесів та обладнання на приватних підприємствах України та Європи.

Ключові слова: математична модель, процес теплообміну, крайова задача, нелокальна задача, інтегральна умова, температурний розподіл, числові методи.

АННОТАЦИЯ

Кобыльская Е. Б. **Математическое и компьютерное моделирование тепловых процессов в сложных системах с подвижными и неподвижными осесимметричными элементами –** На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, 2020.

В диссертационной работе получено новое решение важной научно-прикладной проблемы, которая заключается в разработке новых и усовершенствовании существующих математических моделей температурных распределений в сложных системах и методов их исследования. Такие сложные системы включают в себя многослойные подвижные и неподвижные элементы цилиндрической формы, которые нагреваются внешними или внутренними

источниками тепла и учитывают зависимость температурного поля от угла вращения элементов вокруг своей оси и сложных условий теплообмена поверхности с окружающей средой. Полученное решение отличается от существующих решений более полным отражением процессов теплообмена, разработкой новых вычислительных методов решения начально-краевых и нелокальных задач, которые возникают в математических моделях, позволяет повысить эффективность контроля температуры в сложных системах.

Построены новые и усовершенствованы существующие математические модели тепловых процессов в многослойных подвижных и неподвижных осесимметричных областях.

Предложен метод решения краевых задач для уравнения теплопроводности в сложной области – многослойном цилиндре, где в одной части слоев действуют внутренние источники тепла, а в другой – внешние, при условии неопределенности граничного условия вдоль радиуса в одном из слоев. В основе метода лежит усреднение температурных распределений по радиусу во внутренних слоях. Процесс усреднения температурного распределения вдоль радиуса, если это позволяет физическая модель задачи, снижает ее размерность, но в результате преобразований на границе слоев будем иметь граничное условие импедансного типа. Это позволило повысить эффективность контроля температуры в сложных системах и точность численных расчетов в условиях неопределенности одного из граничных условий на границе слоев и с кондуктивным теплообменом между слоями.

Построены математические модели тепловых процессов, которые протекают во время импульсной обработки изделий и учитывают сложные условия теплообмена, что позволило найти оптимальное сочетание параметров режимов импульсной обработки с переменными температурами нагрева и охлаждения.

Разработаны методы решения обратных краевых задач для уравнения теплопроводности. Методы используют интегральное условие баланса тепла для построения решения. Рассмотрены случаи, когда неизвестным является внутренний, внешний источник тепла или их комбинация и предлагается подход к нахождению решения соответствующей обратной задачи. Исследуются и учитываются особенности влияния импульсных источников тепла на температурное распределение.

Проведен сравнительный анализ точности математических моделей на основе краевой задачи для уравнения теплопроводности и нелокальной задачи для уравнения теплопроводности, которые описывают один и тот же физический процесс нагрева. Проведен анализ и сравнение результатов численных расчетов со значениями температурных распределений, полученных путем измерения с помощью приборов. Предложены методы построения условий импедансного типа для многослойной цилиндрической области с условиями сопряжения 4-го рода на границе раздела слоев с различными теплофизическими характеристиками.

Проведен сравнительный анализ результатов численных и натурных экспериментов, который показал, что предложенные в работе математические модели могут использоваться для построения систем управления процессами тепловой обработки и нагрева осесимметричных элементов сложных систем в металлургии.

Исследования, представленные в работе, соответствуют действующему Закону Украины «О приоритетных направлениях развития науки и техники» от 11.07.2001, а именно, п.п. 3 и 6 статьи 3 «Приоритетные направления развития науки и техники на период до 2020 года» и направленности тематики Кременчугского национального университета имени Михаила Остроградского. Результаты, полученные в диссертационном исследовании, были использованы при разработке технологического оборудования процессов спекания, горячего прессования и высокотемпературной деформации изделий канонической и неканонической форм из порошковых материалов, прогнозирования течения пожара и расчетов температур в сложных системах.

Предложенные в работе методы, модели и компьютерные программы позволяют решать прикладные задачи, возникающие в математических моделях. Полученные в процессе исследований теоретические положения могут быть использованы в дальнейшем как при углубленном изучении теории математических моделей, нелокальных задач, разностных методов, так и в практической деятельности при построении систем управления процессами нагрева подвижных и неподвижных элементов сложных систем действующими внутренними и внешними источниками тепла, для анализа температурных распределений изделий осесимметричной формы.

Результаты работы внедрены в учебный процесс Кременчугского национального университета имени Михаила Остроградского и практику проектирования технологических процессов и оборудования на частных предприятиях Украины и Европы.

Ключевые слова: математическая модель, процесс теплообмена, краевая задача, нелокальная задача, интегральное условие, температурное распределение, численные методы.

ANNOTATION

***Kobilskaya E. B.* Mathematical and computer modeling of thermal processes in complex systems with moving and stationary axisymmetric elements.** – As the manuscript.

Dissertation for obtaining a scientific degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and calculation methods. – A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS Ukraine, Kharkiv, 2020.

In the dissertation work a new solution of an important scientific and applied problem is obtained, which consists in the development of new and improvement of existing mathematical models of temperature distributions in complex systems and methods of their research. The obtained solution differs from the existing solutions by a more complete reflection (temperature distributions) of heat transfer processes, development of new computational methods for solving initial-boundary and nonlocal

problems that arise in mathematical models, which allows to increase the efficiency of temperature control in complex systems.

Mathematical models of thermal processes occurring in complex multilayer areas have been improved. Nonlocal integral conditions for finding solutions of inverse problems and determination of temperature field control parameters are proposed.

Methods for solving inverse boundary value problems of thermal conductivity have been improved, which take into account variable boundary conditions and apply the integral condition of heat balance to construct a solution. The paper proposes a method for solving boundary value problems for the equation of thermal conductivity in a complex region – a multilayer cylinder, where in one part of the layers there are internal heat sources, and in the other – external.

The results of work in the educational process of KrNU and the practice of designing technological processes and equipment at private enterprises of Ukraine and Europe are introduced.

Keywords: mathematical model, heat transfer process, boundary value problem, nonlocal problem, integral condition, temperature distribution, numerical methods

Кобильська Олена Борисівна

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ З РУХОМИМИ ТА НЕРУХОМИМИ ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

(Автореферат)

Підписано до друку 21.12.20. Формат 30×42/4.
Папір Polspeed. Друк цифровий Ум. друк. арк. 1,9.
Обліково-друк. арк. 1,9. Наклад 100 прим. Замовлення № 20165

Редакційно-видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, Полтавська обл., 39600
Реєстраційне свідоцтво серії ДК № 4837 від 22.01.2015 р.