НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М.ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М.ПІДГОРНОГО

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЧЕРНОБРИВКО МАРИНА ВІКТОРІВНА

УДК 539.3:534.1

ДИСЕРТАЦІЯ
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ВИСОКОШВИДКІСНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ М.В. Чернобривко

Науковий консультант: Аврамов Костянтин Віталійович, доктор технічних наук, професор

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Чернобривко М.В. Напружено-деформований стан елементів конструкцій при високошвидкісних навантаженнях. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2020.

Загальною тенденцією сучасного машинобудування є здешевлення готової продукції зі збереженням її надійності та функціональності. Задля цього на етапі загального проектування експериментальні дослідження напружено-деформованого та граничного стану конструкцій доцільно замінити віртуальними випробуваннями на основі числового моделювання, що дозволяє значно скоротити час розробки та суттєво зменшити витрати на її удосконалення.

Особливого значення ця проблема набуває для конструкцій, що працюють в умовах високошвидкісного навантаження, а також експлуатація яких передбачає руйнування окремих елементів в заданий час, коли для кожного натурного експерименту потрібен дорогий дослідний зразок. Таким чином, розробка ефективних аналітично-числових методів дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження на основі математичних моделей, які враховують особливості процесів високошвидкісного деформування, та застосування цих методів до розв’язання важливих прикладних задач є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних аналітично-числових методів дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження різної фізичної природи і надзвукової газової течії та застосування цих методів до розв’язання актуальних прикладних задач.

Об’єктом дослідження є динамічні процеси деформування, що відбуваються в елементах конструкцій з полікристалічних та композитних матеріалів внаслідок високошвидкісного навантаження різної фізичної природи. Предметом дослідження є напружено-деформований та граничний стан в елементах конструкцій з полікристалічних матеріалів та деформований стан в елементах конструкцій з композитних матеріалів, які знаходяться під дією високошвидкісного навантаження різної фізичної природи.

У роботі міститься вирішення науково-технічної проблеми механіки деформівного твердого тіла, яка полягає у розробці ефективних аналітично-числових методів дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження різної фізичної природи і надзвукової газової течії та застосуванні цих методів до розв’язання актуальних прикладних задач.

В результаті виконаних досліджень отримано наступні наукові та практичні результати.

Запропоновано модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні, яка поєднує моделі нестаціонарного термопружного деформування та високошвидкісного пластичного деформування для урахування високошвидкісного зміцнення та температурного знеміцнення матеріалу. Термо-пружно-пластична модель враховує всі обґрунтовані фізичні фактори, що супроводжують процеси високошвидкісного деформування елементів конструкцій із полікристалічних матеріалів.

Запропоновано рівняння напружено-деформованого стану у модифікованій формі Пежини з додатковими температурними множниками у формі Джонсона-Кука, в якому еквівалентні напруження виражаються через еквівалентні деформації, швидкість деформацій та температуру. До його переваг можна віднести той факт, що узагальнене рівняння стану на основі форми Пежини має відносно малу кількість емпіричних констант. Також ці константи є універсальними для багатьох емпіричних залежностей еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій і їх швидкостей, а тому використовуються при моделюванні пластичного плину полікристалічних матеріалів у наукових публікаціях українських, європейських та американських учених. При цьому температурний множник у формі Джонсона-Кука розраховується на основі відомих механічних властивостей матеріалів. Таким чином, числові дослідження термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування елементів конструкцій можна проводити без попередніх коштовних експериментів по визначенню динамічних властивостей матеріалів, а застосовуючи широку базу вже існуючих.

На основі запропонованої узагальненої моделі динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні отримано уточнені розв’язки задач високошвидкісного деформування оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок обриву частини лопатки та локального пошкодження лопаток газотурбінних двигунів сторонніми предметами. Показано, що процес високошвидкісного деформування при локальному навантаженні також носить локальний характер, а зона деформування в конструкції не більше ніж в п’ять разів перевищує зону навантаження.

На основі запропонованого рівняння напружено-деформованого стану отримано уточнені динамічні напруження в задачах високошвидкісного деформування плити з оребренням під впливом газодинамічної ударної хвилі та пластини під впливом гідродинамічного ударного навантаження. За цими результатами сформульовано практичні рекомендації за вибором характеристик елементів конструкцій будівельних споруд та оснастки для обробки матеріалів тиском.

Запропоновано розрахункову модель нестаціонарного деформування корпусу твердопаливного двигуна з композитних матеріалів, яка описує корпус двигуна у формі сферично-циліндрично-сферичної оболонки обертання. Розглядаються композитні матеріали, механічні характеристики яких описуються ортотропними чи функціонально-градуйованими моделями.

Для цього застосовано теорію типу Тимошенка-Рейсснера чи теорію Редді високого порядку. Конструкція навантажена внутрішнім імпульсним тиском, що моделює робочі процеси в двигуні при старті ракети. На основі запропонованої оболонкової моделі отримано ряд закономірностей розподілу динамічних деформацій в композитній конструкції при внутрішньому імпульсному навантаженні.

Розроблено тривимірну скінченно-елементну модель високошвидкісного деформування та розділення навпіл частини обтічника ракети у формі усіченого конусу. Модель враховує нелінійний розподіл напружено-деформованого стану по товщині оболонкової конструкції та вплив швидкості деформації на механічні властивості конструкційного матеріалу. Критерієм локального руйнування матеріалу є граничне значення пластичної деформації. Модель дозволяє отримувати діапазон безпечного для корисного вантажу імпульсного тиску, який спричинює розділення обтічника навпіл. Модель реалізовано в розрахунковому модулі Explicit Dynamics програмного комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS.

Досліджено високошвидкісне деформування та руйнування елементів кріплення головної частини спеціальної ракетної конструкції внаслідок дії газодинамічної ударної хвилі та додаткових навантажень. Враховуються динамічні властивості матеріалу за термо-пружно-пластичною моделлю деформування, яка адаптована для застосування на основі залежності Купера-Саймондса в модулі прямого динамічного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics. Критерієм локального руйнування матеріалу є граничне значення пластичної деформації. За результатами досліджень визначено діаметр центральної шпильки замку стяжки, при якому руйнування елементу кріплення відбувається в заданому діапазоні часу.

Проведено числовий аналіз динамічної нестійкості обтічників ракет в надзвуковому газовому потоці, що моделюються оболонками у формі параболоїда обертання та підкріпленого шпангоутами конуса. Надзвуковий газовий потік моделюється за поршневою теорією із застосуванням уточнення на поправку Крумхара. Досліджено діапазон чисел Маха від 1,01 до 4. Математичні моделі коливань обтічників різної геометричної форми ґрунтуються на гіпотезах Кіргофа-Лява. Переміщення при коливаннях конструкцій представляються через власні форми коливань, які визначаються за методом Релея-Рітца. Отримано ряд закономірностей динамічної нестійкості обтічників та виявлено їх форми коливань при втраті динамічної стійкості.

Достовірність отриманих в роботі результатів досліджень за розробленими моделями підтверджується шляхом їх порівняння з даними експериментів, отриманими іншими авторами, або з результатами, отриманими за іншими моделями.

Результати роботи можуть використовуватися під час проектування, доведення та експлуатації аерокосмічних та машинобудівних конструкцій. Створені математичні моделі, методи та алгоритми обчислення становлять розрахункову основу для аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісного механічного навантаження, що має суттєве практичне значення.

Результати досліджень впроваджено на п'яти підприємствах України. Результати роботи використано при проектуванні корпусу твердопаливного двигуна ракет-носіїв, конструкцій обтічників ракет та ракет-носіїв, елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції на ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля»; при страховому оцінюванні можливих наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди в ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН»; при розробці методики підвищення надійності та довговічності оснащення при обробці матеріалів тиском на ВАТ НВП «ОСНАСТКА» та на ДП «Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування»; при аналізі динамічної міцності та експлуатаційного руйнування виробів на ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О. Г. Івченка». Крім того, окремі результати роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна та у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут».

Ключові слова: швидкісне деформування, імпульсні навантаження, динамічні властивості міцності матеріалу, рівняння напружено-деформованого стану, складена оболонка, ортотропні характеристики, динамічна нестійкість.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Chernobryvko M. V., Kruszka L., Vorobiev Yu. S. Thermo-elastic-plastic Constitutive Model for Numerical Analysis of Metallic Structures under Local Impulsive Loadings. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 566. P. 493-498.
2. Chernobryvko M. V., Vorobiev Yu. S., Kruszka L. Method to analyze the effect of the shock-wave loading on building elements. International Journal of Protective Structures. 2012. Vol. 3. № 2. P. 141-146.
3. Vorob'ev Y. S., Kolodyazhnyi A. V., Chernobryvko M. V., Yareshchenko V. G., Kruszka, L. Theoretical-experimental analysis of structural components separation upon local impulse loading. Strength of Materials. 2002. Vol. 34. № 5. P. 497-499.
4. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. Vol. 49. № 12. P. 2839-2845.
5. Chernobryvko M. V., Avramov K. V. Natural vibrations of parabolic shells. Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 217. № 2. P.229-238.
6. Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Kazachenko O., Batutina T. J. Dynamic instability of parabolic shells in supersonic gas stream. Meccanica. 2016.Vol. 51. No. 4. P. 939-950.
7. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Suleimenov U. S. Dynamic instability of ring-stiffened conical thin-walled rocket fairing in supersonic gas stream. Journal of Mechanical Engineering Science. 2016. Vol. 230(I). P. 55-68.

8. Avramov K., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A. Dynamics of solid propellant motor composite casing under impact pressure. Meccanica. 2018. Vol. 53, № 13. P. 3339-3353.

9. Chernobryvko M., Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamics of thin-walled elements of rocket engine under impact loads. Key engineering materials. 2016. Vol. 715. P. 237-242.

10. Avramov К., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonlinear Dynamics. 2019. № 98(3). P. 1853-1876.

11. Martynenko G., Chernobryvko M., Avramov K., Martynenko V., Tonkonozhenko A., Kozharin V., Klymenko D. Numerical simulation of missile warhead operation. Advances in engineering software. 2018. Vol. 123. P. 93-103.

12. Martynenko G., Avramov K., Martynenko V., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A., Kozharin V. Numerical simulation of warhead transportation. Defence Technology. Available online 9 March 2020. https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.03.005

13. Kruszka L., Worobiew J. S., Chernobrywko M. W. Deformacja cylindrycznych konstrukcji pod dzialaniem dwoch ruchomych obciazen impulsowych. Biuletyn WAT. 2006. Vol. LV. № 02. P. 159-169.

14. Чернобрывко М. В. Оценка прочности элементов конструкций под действием подвижной ударной нагрузки. Вісник ХНТУСГ. 2008. Вип. 69. С. 103-109.

15. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Ярыжко А. В. Нелинейное деформирование конструкций при локальном нагружении. Механіка та машинобудування. 2007. № 1. С. 89-95.

16. Чернобрывко М. В. Оценка динамической прочности устройств ударного действия в аварийных ситуациях. Вісник ХНТУСГ. 2010. Вып. 100. С. 268-272.

17. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Воздействие подвижной нагрузки на плиту, лежащую на упругом основании. Автомобільний транспорт. 2005. Вип. 16 С. 192-194.

18. Чернобрывко М. В. Модель скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при импульсном нагружении. Вісник СевНТУ. 2012. Вип. 133. С. 21-26.

19. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Геотехническая механика. 2011. Вып. 93. С. 192-199.

20. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Основные зависимости для анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием импульсных нагрузок. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2011. Вип. 12. С. 40-46.

21. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2010. Вып. 14. С. 87-93.

22. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Анализ динамического напряженного состояния элементов конструкций при импульсном нагружении. Вестник СевГТУ. 2009. Вип. 97. С. 3-6.

23. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Математическое моделирование скоростного деформирования материалов и элементов конструкций. Наукові нотатки. 2009. Вип. 25 (II). С. 31-38.

24. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Проблемы динамической прочности элементов конструкций при ударно-импульсных нагрузках. Вібрації в техніці та технологіях. 2011. № 3 (63). С. 5-10.

25. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование высокоскоростных деформационных процессов с использованием адаптивных вычислительных методов. Механіка та машинобудування. 2009. № 1. С. 112-119.

26. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Скоростное деформирование защитных конструкций под действием локальных импульсных нагрузок.

Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2012. Вип. 13. С. 406-412.

27. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д., Комяк В. М. Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2014. Вип. 19. С. 162-169.

28. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д. Моделирование деформации и разрушения элемента здания при ударно-волновой нагрузке. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2015. Вип. 21. С. 127-131.

29. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М.В. Динамическое напряженно-деформированное состояние лопатки при ударе по входной кромке. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2008. № 4(51). С. 54-56.

30. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Динамическое упругопласти-ческое деформирование элементов газовых турбин при локальных ударных нагрузках. Надійність і довговічність машин і споруд. 2008. Вип. 31. С. 7-72.

31. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Локальное импульсное воздействие на оболочечные элементы конструкций. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2005. № 9/25. С. 181-184.

32. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Воздействие импульсных нагрузок на оболочечные элементы ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2003. № 40/5. С. 64-67.

33. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Роль импульсных нагрузок для ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2002. №34. С. 136-140.

34. Бреславський Д. В., Сєнько А. В., Татарінова О. А., Чернобривко М. В., Аврамов К.В. Числове моделювання розділення конічної оболонки при спрацюванні стрічкового заряду. Технічна механіка. 2020. № 2. С. 57-65.

35. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Сулейменов У. С. Динамическая неустойчивость

подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Техническая механика. 2015. № 1. С. 15-29.

36. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. Космічна наука і технологія. 2015. Т. 21. № 1. С. 10-14.

37. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая устойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Прикладная гидромеханика. 2014. Том 16 (88), № 4. С. 3 10.

38. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в полете. Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 2, С. 9-16.

39. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Меша Ю. В. Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Вісник НТУ«ХПИ». 2013. № 63 (1063). С. 131-139.

40. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Меша Ю. В., Тишковец Е. В., Жолос О. В. Динамика композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием импульсных нагрузок, описывающих рабочие процессы в двигателе. Космічна наука і технологія. 2017. Т. 23. № 1(104). С. 18-29.

41. Аврамов К. В., Чернобривко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. Космічна наука і технологія. 2019. Т. 25. № 2(117). С. 23-37.

42. . Мартыненко Г. Ю., Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Мартыненко В. Г., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю. Численное моделирование работы боевого снаряжения ракетного комплекса. Технічна механіка. 2018. № 4. С. 90-104.

43. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. Method to analyze of the shock-wave loading on buildings constructions. Proc. of International Seminar on Science and Education, 2011. Rome (Italy). P. 56-58.

44. Bogacz R., Worobjew J., Czernobriwko M., Kruszka L. Oddziaływanie ruchomego obciążenia na płytę na sprężystym podłożu. Materiały XIII Warsztaty Naukowe PTSK «Symulacja w Badaniach i Rozwoju», Warsaw (Poland), 2006. P. 1-2.

45. Воробьев Ю., Крушка Л., Чернобрывко М. Поведение цилиндрических конструкций при воздействии подвижных импульсных нагрузок. Proc. of 13th International scientific and technological conference «Maintenance of infrastructure in crisis situations», Warsaw - Rynia (Poland), 2004. P. 163-171.

46. Chernobryvko M. Kruszka L. Vorobiev Y. Thermo-elastic-plastic constitutive model for numerical analysis of metallic structures under local impulsive loadings. Abstracts book of 8-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013), Osaka (Japan), 2013. P.134.

47. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. High Strain Rate Deformation Model for Contractions Elements under Local Impulsive Loadings. Proc. of Int. Conference «Shock Waves in Condensed Matter», Kiev, 2012. P. 313-315.

48. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Материалы IX Междунар. науч. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, 2011. С. 160-163.

49. Vorobyov Y., Chernobryvko M., Kruszka L. Strain rate deformation and damage of structural elements under local impulsive loadings. Proc. of Seventh International Symposium on Impact Engineering (ISIE2010), Warsaw (Poland), 2010. P.679-686.

50. Чернобрывко М. В. Воробйов Ю. С. Математичні моделі деформаційних процесів при імпульсному навантаженні. Тези доповідей Міжнародної науково-техничної конференції «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», Київ, 2010. С. 181-182.

51. Воробьев Ю. С. Чернобрывко М. В., Крушка Л. Особенности численного анализа скоростного деформирования элементов конструкций под

действием локальных импульсных нагрузок. Proc. of IX Konferencja Naukowo-Techniczna «Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania», Warsaw (Poland), 2005. P.545-551.

52. Chernobryvko M., Kruszka L., Avramov K. Deformation of finned plates under the action of detonation loads. Abstracts book of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienna (Austria), 2014. P. 337-338.

53. Чернобрывко М. В. Теоретико-экспериментальный региональный анализ деформирования цилиндрической оболочки при локальном ударе. Аннотации докладов IX всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород (Россия), 2006. Т.3. С. 215-216.

54. Chernobryvko M. V. Vorobiev Y. S. Behavior of compound shell under detonation loading. Proc. of 8th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2005. P. 299-302.

55. Крушка Л., Чернобрывко М.В. К вопросу о прочности защитных контейнеров при детонационном воздействии. Proc. of 10th International scientific and technological conference «Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí», Zilina (Slovakia), 2005. P. 295-301.

56. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S., Mesha Y. V., Kolodyzny A. V. Dinamics of the shell structures under impulse loading. Proc. of 7th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2002. P. 65-66.

57. Чернобрывко М. В., Тонконоженко А. М., Аврамов К. В., Меша Ю. В. Моделирование разрушения конструкций ракетно-космической техники при срабатывании детонирующих зарядов. Тезисы докладов VII Международной конф. «Космические технологии: настоящее и будущее». г. Днепр, 2019. С. 45.

58. Chernobryvko M., Avramov K., Mesha Y., Tonkonogenko A., Kruszka L. Dynamic failure time of the truncated conical shell under the local impulse. Proc. of 7th International Conference on Mechanics and materials in design (M2D2017), Albufeira (Portugal), 2017. P. 1521-1522.

59. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Клименко Д. В., Батутина Т. Я. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Тез. докл. V Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее», г. Днепр, 2015. С.31.

60. Чернобривко М. В., Воробйов Ю. С., Аврамов К. В., Романенко В. М., Тонконоженко А. М. Вібронапруженість оболонок під впливом імпульсних навантажень. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, 2013. С. 180-182.

61. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes, Nicosia (Cyprus), 2019. P. 371-372.

62. Chernobryvko M. Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamic Strength of Composite Shell under Internal Blast. Proc. of the 4th International Conference on Protective Structures, Beijing (China), 2016. P. 178-187.

63. Chernobryvko M., Martynenko G., Avramov K., Tonkonogenko A., Kozharin V., Martynenko V. Numerical analysis of special rocket structure fracture. Тези доповідей I Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, 2018. С 7-8.

64. Kruszka L., Chernobryvko M., Uspensky B., Avramov K., Martynenko G., Sakhno N., Martynenko V., Mesha Y. Fracture of a special rocket structure under impact loads. Proceedings of the 10-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2019), Gmunden (Austria), 2019. P. 217-222

65. Чернобривко М. В. Моделювання розділення усіченої конічної оболонки при імпульсному навантаженні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 2020. С 325-326.

ABSTRACT

Chernobryvko M.V. Stress-strain state of construction elements under high-speed loads. – Manuscript.

Thesis for Doctor of technical sciences degree in speciality 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine. A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2020.

Cost reducing of finished products while maintaining their reliability and functionality is a general trend in modern mechanical engineering. For this purpose it is advisable to replace experimental studies with virtual tests at the stage of general design. Virtual tests are carried out on the basis of numerical modeling of the stress-strain and limiting state of structures. This can significantly reduce time for development and cost of improvement.

The problem is of particular importance for structures operating under high-speed loading conditions as well as for structures, the operation of which involves the destruction of individual elements at a given time when an expensive prototype is needed for each full-scale experiment. Thus, the development of effective analytical-numerical methods for studies of the stress-strain state of structural elements under the action of high-speed loading on the basis of mathematical models taking into account the peculiarities of high-speed deformation processes is an important problem of mechanics of deformable solids. These methods are used to solve important applications also.

The main purpose of the dissertation research is to develop effective analytical-numerical methods for studies of the dynamic stress-strain state of structural elements under the different physical nature impulse loads and supersonic gas flow, as well as appliance these methods for urgent applied problems solution.

The object of the research is dynamic deformation processes that occur in structural elements of polycrystalline and composite materials at high-speed different physical nature impulse loads. The subject of the research is the stress-

strain state and limit state in structural elements made of polycrystalline materials and the deformed state in structural elements made of composite materials under the action of high-speed different physical nature impulse loads.

The work delivers solution to a relevant scientific and engineering problem of solid mechanics. It consists in the development of effective analytical-numerical methods for studying the dynamic stress-strain state of structural elements under the influence of impulse loads of various physical nature and supersonic gas flow, as well as the application of these methods to solving urgent applied problems.

The following scientific and practical results were obtained during the research.

A generalized model of the dynamic stress-strain state for structural elements from polycrystalline materials under impulse loading is proposed. It is based on a models combination of unsteady thermoelastic deformation and rate plastic deformation to account the high rate hardening and temperature softening of the material. The thermo-elastic-plastic model takes into account all the justified physical factors that exist during high-speed deformation of structural elements made of polycrystalline materials.

The stress-strain state equation for thermo-elastic-plastic model is proposed in a modified Pezhina form with additional Johnson-Cook temperature form where equivalent stress determine on equivalent strains, strain rate and temperature. The generalized stress-strain state equation in a modified Pezhina form has a relatively small number of empirical constants that is an advantage of this equation. These constants are universal for plenty empirical dependencies of equivalent stress on equivalent deformations and their velocities. They are used for modeling of the plastic flow of polycrystalline materials and are described in scientific publications of Ukrainian, European and American scientists. The Johnson-Cook temperature form is calculated based on the known mechanical properties of the materials. Therefore, numerical studies of thermo-elastic-plastic high-velocity deformation of structural elements can be performed without prior high cost experiments to determine the dynamic properties of the material, but on a numerical base of existing values.

The generalized model is used to solve the practical problems. In the high-speed deformation problems of the gas turbine engine casing due to the breakage of a blade part and local damage of the blades by foreign objects, refined solutions are obtained. Studies have shown that under local loading the process of high-speed deformation is also local. The deformation zone in the construction elements is not more than five times exceeds the load zone.

Based on the proposed equation of stress-strain state, refined dynamic stresses in the problems of high-speed deformation of a finned plate under the influence of a gas-dynamic shock wave and a plate under the influence of a hydrodynamic shock load are obtained. Collected results allowed to formulate practical recommendations for the choice of mechanical characteristics for building structural elements and means for processing materials by pressure.

The model for non-stationary deformation of the solid propellant motor composite casing as the spherical-cylindrical-spherical shell with orthotropic or functionally graded characteristics is proposed. The composite materials with orthotropic or functionally graduated mechanical characteristics are considered. The Timoshenko-Reissner theory or the Reddy higher-order theory was used for this purpose. The structure is loaded with an internal impulse pressure which simulates the working processes in the engine during the rocket launch. Regularities of the distribution of dynamic deformations in a structure under internal pulsed loading are obtained.

A three-dimensional finite-element model of high-velocity deformation and bisection of part of the rocket fairing in the form of a truncated cone has been developed. The model takes into account the nonlinear distribution of the stress-strain state in thickness and the influence of the strain rate on the mechanical properties of the material. The criterion of local destruction of the material is the limit value of plastic deformation. The model allows obtaining a safe range of pulse for payload pressure which causes the fairing to split in half. The model is realised in calculation module Explicit Dynamics of the software complex of finite element analysis ANSYS.

The high-speed deformation and destruction of the fastening elements for special rocket under impulse loading has been studied. Shock gas dynamic wave and additional loads influence on a special rocket. The dynamic properties of the material according to the deformation thermo-elastic-plastic model are taken into account. The calculation is based on the Cooper-Simonds dependence in the module of dynamic analysis ANSYS / Explicit Dynamics. The criterion of local destruction for the material is the limit of plastic deformation. Based on the research results diameter of central pin of the screed lock at which control of the fastening element takes place in a given time range is determined.

The dynamic instability of rocket fairings in supersonic gas stream is numerically investigated. The fairings are modeled by parabolic shells and ring-stiffened conical shells. The supersonic gas flow is modeled according to piston theory using a refinement on the Krumhar amendment. The range of Mach numbers from 1.01 to 4 was investigated. Mathematical models of quantitative shades of different geometric shapes are based on Kirgoff-Lev hypotheses. Displacements in the volume of structures are reflected through their own forms of variations, which are determined by the Relay-Ritz method. A number of dynamic instability regularities of fairings are obtained and their forms of oscillations at loss of dynamic stability are revealed.

The reliability of the results obtained by the developed models is confirmed by their comparison with experimental data obtained by other authors or with the results obtained by other models.

The work results can be used in the design, finishing and operation of aerospace and engineering constructions. Developed mathematical models, methods and algorithms are the calculation basis for analysis of the stress-strain state of construction elements under the high-speed mechanical load. The research results were implemented at five enterprises in Ukraine.

The results were used for development works on the solid propellant engine of the rocket, the structures of the rocket fairings, the mounting elements of the special rocket - theYuzhnoye State Design Office; for insuring the possible consequences of the shock waves impact on buildings - The Scientific Center for Risk Studies "RISK"; for methods to increase the reliability and longevity in the processing of pressure – enterprise "OSNASTKA" and the "Kharkiv Research Institute of Mechanical Engineering Technologies"; for the analysis of dynamic strength - Zaporozhye Machine-Building Design Bureau Progress State Enterprise named after Academician A. G. Ivchenko. Besides, custom work results were implemented to the educational process at V. N. Karazin Kharkiv National University and at the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute».

Key words: high strain rate, impulse loading, dynamic strength properties, stress-strain state equation, composite shell, orthotropic characteristics, dynamic instability.

LIST OF APPLICANT PUBLICATIONS

1. Chernobryvko M. V., Kruszka L., Vorobiev Yu. S. Thermo-elastic-plastic Constitutive Model for Numerical Analysis of Metallic Structures under Local Impulsive Loadings. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 566. P. 493-498.
2. Chernobryvko M. V., Vorobiev Yu. S., Kruszka L. Method to analyze the effect of the shock-wave loading on building elements. International Journal of Protective Structures. 2012. Vol. 3. № 2. P. 141-146.
3. Vorob'ev Y. S., Kolodyazhnyi A. V., Chernobryvko M. V., Yareshchenko V. G., Kruszka, L. Theoretical-experimental analysis of structural components separation upon local impulse loading. Strength of Materials. 2002. Vol. 34. № 5. P. 497-499.
4. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. Vol. 49. № 12. P. 2839-2845.

5. Chernobryvko M. V., Avramov K. V. Natural vibrations of parabolic shells. Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 217. № 2. P.229-238.

6. Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Kazachenko O., Batutina T. J. Dynamic instability of parabolic shells in supersonic gas stream. Meccanica. 2016.Vol. 51. No. 4. P. 939-950.

7. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Suleimenov U. S. Dynamic instability of ring-stiffened conical thin-walled rocket fairing in supersonic gas stream. Journal of Mechanical Engineering Science. 2016. Vol. 230(I). P. 55-68.

8. Avramov K., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A. Dynamics of solid propellant motor composite casing under impact pressure. Meccanica. 2018. Vol. 53, № 13. P. 3339-3353.

9. Chernobryvko M., Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamics of thin-walled elements of rocket engine under impact loads. Key engineering materials. 2016. Vol. 715. P. 237-242.

10. Avramov К., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonlinear Dynamics. 2019. № 98(3). P. 1853-1876.

11. Martynenko G., Chernobryvko M., Avramov K., Martynenko V., Tonkonozhenko A., Kozharin V., Klymenko D. Numerical simulation of missile warhead operation. Advances in engineering software. 2018. Vol. 123. P. 93-103.

12. Martynenko G., Avramov K., Martynenko V., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A., Kozharin V. Numerical simulation of warhead transportation. Defence Technology. Available online 9 March 2020. https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.03.005

13. Kruszka L., Worobiew J. S., Chernobrywko M. W. Deformacja cylindrycznych konstrukcji pod dzialaniem dwoch ruchomych obciazen impulsowych. Biuletyn WAT. 2006. Vol. LV. № 02. P. 159-169.

14. Чернобрывко М. В. Оценка прочности элементов конструкций под действием подвижной ударной нагрузки. Вісник ХНТУСГ. 2008. Вип. 69. С. 103-109.

15. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Ярыжко А. В. Нелинейное деформирование конструкций при локальном нагружении. Механіка та машинобудування. 2007. № 1. С. 89-95.

16. Чернобрывко М. В. Оценка динамической прочности устройств ударного действия в аварийных ситуациях. Вісник ХНТУСГ. 2010. Вып. 100. С. 268-272.

17. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Воздействие подвижной нагрузки на плиту, лежащую на упругом основании. Автомобільний транспорт. 2005. Вип. 16 С. 192-194.

18. Чернобрывко М. В. Модель скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при импульсном нагружении. Вісник СевНТУ. 2012. Вип. 133. С. 21-26.

19. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Геотехническая механика. 2011. Вып. 93. С. 192-199.

20. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Основные зависимости для анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием импульсных нагрузок. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2011. Вип. 12. С. 40-46.

21. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2010. Вып. 14. С. 87-93.

22. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Анализ динамического напряженного состояния элементов конструкций при импульсном нагружении. Вестник СевГТУ. 2009. Вип. 97. С. 3-6.

23. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Математическое моделирование скоростного деформирования материалов и элементов конструкций. Наукові нотатки. 2009. Вип. 25 (II). С. 31-38.

24. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Проблемы динамической прочности элементов конструкций при ударно-импульсных нагрузках. Вібрації в техніці та технологіях. 2011. № 3 (63). С. 5-10.

25. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование высокоскоростных деформационных процессов с использованием адаптивных вычислительных методов. Механіка та машинобудування. 2009. № 1. С. 112-119.

26. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Скоростное деформирование защитных конструкций под действием локальных импульсных нагрузок. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2012. Вип. 13. С. 406-412.

27. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д., Комяк В. М. Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2014. Вип. 19. С. 162-169.

28. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д. Моделирование деформации и разрушения элемента здания при ударно-волновой нагрузке. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2015. Вип. 21. С. 127-131.

29. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М.В. Динамическое напряженно-деформированное состояние лопатки при ударе по входной кромке. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2008. № 4(51). С. 54-56.

30. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Динамическое упругопластическое деформирование элементов газовых турбин при локальных ударных нагрузках. Надійність і довговічність машин і споруд. 2008. Вип. 31. С. 7-72.

31. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Локальное импульсное воздействие на оболочечные элементы конструкций. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2005. № 9/25. С. 181-184.

32. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Воздействие импульсных нагрузок на оболочечные элементы ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2003. № 40/5. С. 64-67.

33. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Роль импульсных нагрузок для ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2002. №34. С. 136-140.

34. Бреславський Д. В., Сєнько А. В., Татарінова О. А., Чернобривко М. В., Аврамов К.В. Числове моделювання розділення конічної оболонки при спрацюванні стрічкового заряду. Технічна механіка. 2020. № 2. С. 57-65.

35. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Сулейменов У. С. Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Техническая механика. 2015. № 1. С. 15-29.

36. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. Космічна наука і технологія. 2015. Т. 21. № 1. С. 10-14.

37. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая устойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Прикладная гидромеханика. 2014. Том 16 (88), № 4. С. 3 10.

38. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в полете. Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 2, С. 9-16.

39. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Меша Ю. В. Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Вісник НТУ«ХПИ». 2013. № 63 (1063). С. 131-139.

40. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Меша Ю. В., Тишковец Е. В., Жолос О. В. Динамика композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием импульсных

нагрузок, описывающих рабочие процессы в двигателе. Космічна наука і технологія. 2017. Т. 23. № 1(104). С. 18-29.

41. Аврамов К. В., Чернобривко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. Космічна наука і технологія. 2019. Т. 25. № 2(117). С. 23-37.

42. . Мартыненко Г. Ю., Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Мартыненко В. Г., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю. Численное моделирование работы боевого снаряжения ракетного комплекса. Технічна механіка. 2018. № 4. С. 90-104.

43. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. Method to analyze of the shock-wave loading on buildings constructions. Proc. of International Seminar on Science and Education, 2011. Rome (Italy). P. 56-58.

44. Bogacz R., Worobjew J., Czernobriwko M., Kruszka L. Oddziaływanie ruchomego obciążenia na płytę na sprężystym podłożu. Materiały XIII Warsztaty Naukowe PTSK «Symulacja w Badaniach i Rozwoju», Warsaw (Poland), 2006. P. 1-2.

45. Воробьев Ю., Крушка Л., Чернобрывко М. Поведение цилиндрических конструкций при воздействии подвижных импульсных нагрузок. Proc. of 13th International scientific and technological conference «Maintenance of infrastructure in crisis situations», Warsaw - Rynia (Poland), 2004. P. 163-171.

46. Chernobryvko M. Kruszka L. Vorobiev Y. Thermo-elastic-plastic constitutive model for numerical analysis of metallic structures under local impulsive loadings. Abstracts book of 8-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013), Osaka (Japan), 2013. P.134.

47. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. High Strain Rate Deformation Model for Contractions Elements under Local Impulsive Loadings. Proc. of Int. Conference «Shock Waves in Condensed Matter», Kiev, 2012. P. 313-315.

48. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при

импульсных нагрузках. Материалы IX Междунар. науч. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, 2011. С. 160-163.

49. Vorobyov Y., Chernobryvko M., Kruszka L. Strain rate deformation and damage of structural elements under local impulsive loadings. Proc. of Seventh International Symposium on Impact Engineering (ISIE2010), Warsaw (Poland), 2010. P.679-686.

50. Чернобрывко М. В. Воробйов Ю. С. Математичні моделі деформаційних процесів при імпульсному навантаженні. Тези доповідей Міжнародної науково-техничної конференції «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», Київ, 2010. С. 181-182.

51. Воробьев Ю. С. Чернобрывко М. В., Крушка Л. Особенности численного анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием локальных импульсных нагрузок. Proc. of IX Konferencja Naukowo-Techniczna «Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania», Warsaw (Poland), 2005. P.545-551.

52. Chernobryvko M., Kruszka L., Avramov K. Deformation of finned plates under the action of detonation loads. Abstracts book of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienna (Austria), 2014. P. 337-338.

53. Чернобрывко М. В. Теоретико-экспериментальный региональный анализ деформирования цилиндрической оболочки при локальном ударе. Аннотации докладов IX всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород (Россия), 2006. Т.3. С. 215-216.

54. Chernobryvko M. V. Vorobiev Y. S. Behavior of compound shell under detonation loading. Proc. of 8th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2005. P. 299-302.

55. Крушка Л., Чернобрывко М.В. К вопросу о прочности защитных контейнеров при детонационном воздействии. Proc. of 10th International scientific and technological conference «Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí», Zilina (Slovakia), 2005. P. 295-301.

56. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S., Mesha Y. V., Kolodyzny A. V. Dinamics of the shell structures under impulse loading. Proc. of 7th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2002. P. 65-66.

57. Чернобрывко М. В., Тонконоженко А. М., Аврамов К. В., Меша Ю. В. Моделирование разрушения конструкций ракетно-космической техники при срабатывании детонирующих зарядов. Тезисы докладов VII Международной конф. «Космические технологии: настоящее и будущее». г. Днепр, 2019. С. 45.

58. Chernobryvko M., Avramov K., Mesha Y., Tonkonogenko A., Kruszka L. Dynamic failure time of the truncated conical shell under the local impulse. Proc. of 7th International Conference on Mechanics and materials in design (M2D2017), Albufeira (Portugal), 2017. P. 1521-1522.

59. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Клименко Д. В., Батутина Т. Я. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Тез. докл. V Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее», г. Днепр, 2015. С.31.

60. Чернобривко М. В., Воробйов Ю. С., Аврамов К. В., Романенко В. М., Тонконоженко А. М. Вібронапруженість оболонок під впливом імпульсних навантажень. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, 2013. С. 180-182.

61. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes, Nicosia (Cyprus), 2019. P. 371-372.

62. Chernobryvko M. Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamic Strength of Composite Shell under Internal Blast. Proc. of the 4th International Conference on Protective Structures, Beijing (China), 2016. P. 178-187.

63. Chernobryvko M., Martynenko G., Avramov K., Tonkonogenko A., Kozharin V., Martynenko V. Numerical analysis of special rocket structure fracture.

Тези доповідей I Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, 2018. С 7-8.

64. Kruszka L., Chernobryvko M., Uspensky B., Avramov K., Martynenko G., Sakhno N., Martynenko V., Mesha Y. Fracture of a special rocket structure under impact loads. Proceedings of the 10-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2019), Gmunden (Austria), 2019. P. 217-222

65. Чернобривко М. В. Моделювання розділення усіченої конічної оболонки при імпульсному навантаженні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 2020. С 325-326.

ЗМІСТ

ВСТУП

Загальною тенденцією сучасного машинобудування є здешевлення готової продукції зі збереженням її надійності та функціональності. Задля цього на етапі загального проектування експериментальні дослідження напружено-деформованого та граничного стану конструкцій доцільно замінити віртуальними випробуваннями на основі числового моделювання, що дозволяє значно скоротити час розробки та суттєво зменшити витрати на її удосконалення. Особливого значення ця проблема набуває для конструкцій, що працюють в умовах високошвидкісного навантаження, а також експлуатація яких передбачає руйнування окремих елементів в заданий час, коли для кожного натурного експерименту потрібен дорогий дослідний зразок.

Актуальність теми. В ракетно-космічних системах, енергомашинобудуванні, літакобудуванні, промисловому та житловому будівництві в процесі експлуатації або в аварійних ситуаціях конструкції та їх окремі елементи знаходяться під впливом високошвидкісного навантаження. Ці навантаження мають різну фізичну природу: локальне навантаження ударно–імпульсного характеру, газодинамічна або гідродинамічна ударна хвиля, надзвуковий газовий потік. Однак всі вони характеризуються високою інтенсивністю та швидкістю впливу на конструкцію. Фізика процесів, що протікають в елементах конструкцій під дією високошвидкісних навантажень, досить складна. В залежності від характеру впливу, механічні навантаження можуть спричинювати термо-пружно-пластичне деформування й руйнування або динамічну нестійкість конструкцій. Для числового моделювання таких процесів потрібні математичні моделі, які враховують динамічні властивості конструкційних матеріалів. На цей час існує великий доробок стосовно експериментального вивчення процесів швидкісного деформування конструкційних матеріалів. Результати цих досліджень дозволяють пояснити фізичні явища та ефекти, які супроводжують високошвидкісний деформаційний процес в конструкціях. Численні експериментальні дослідження показують, що існує широкий клас металевих сплавів, фізико-механічні характеристики яких залежать від швидкості деформації, а також температури. Математичне моделювання таких процесів призводить до фізично нелінійних крайових задач, а нестаціонарне деформування елементів конструкцій, що досліджуються, має ряд особливостей, які не можуть бути описані в рамках теорій пружних або малих пластичних деформацій.

Зараз українська ракетно-космічна техніка користується широким попитом на світовому ринку. Під час проектної розробки ракет різного призначення виникає ряд задач, що пов‘язані з дослідженнями нестаціонарного деформування й аналізом процесів руйнування внаслідок експлуатаційних навантажень. Це стосується таких елементів ракет як обтічники, корпуси твердопаливних двигунів та різноманітні кріпильні елементи. Останнім часом асортимент корисних вантажів, що виводяться на орбіту, істотно розширюється. Під час виведення ракети на орбіту корисний вантаж захищається обтічником, а його форма залежить від призначення ракети. У польоті обтічники зовні взаємодіють з надзвуковою газовою течією, вплив якої на конструкцію може призвести до втрати стійкості та спричинити руйнування обтічника або корисного вантажу. Необхідність створення обтічників ракет з підвищеними вимогами до їх динамічної стійкості потребує розробки аналітично-числових методів визначення динамічної нестійкості конструкцій різної геометричної форми.

Таким чином, розробка ефективних аналітично-числових методів дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження на основі математичних моделей, які враховують особливості процесів високошвидкісного деформування, та застосування цих методів до розв’язання важливих прикладних задач є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла, що і визначило тему даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, **темами**. Тема дисертаційної роботи та її основні задачі були сформульовані та розв'язані здобувачем як керівником, відповідальним виконавцем та виконавцем комплексних тем науково-технічних досліджень Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, а саме:

– за держбюджетними науково-дослідними роботами «Розвиток методів аналізу та зниження динамічної напруженості систем елементів енергетичного обладнання в умовах продовження строків його експлуатації» (2001 – 2005 рр., № ДР 0101U003586), «Розробка наукових основ комплексного удосконалення міцносних динамічних властивостей новітніх конструкцій і матеріалів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням технологічних і експлуатаційних факторів» (2006 – 2010 рр., № ДР 0106U000485), «Розробка наукових основ аналізу нестаціонарного динамічного напруженого стану елементів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням пошкоджень» (2011 – 2015 рр., № ДР 0111U001758), «Оцінка надійності енергетичного обладнання при втомному пошкодженні його елементів» (2015 – 2019 рр., № ДР 0115U001089), «Аналіз та поліпшення динамічних міцнісних властивостей елементів перспективних енергетичних машин та ракетно-космічної техніки під дією навантажень різної фізичної природи» (2016 – 2020 рр., № ДР 0111U001758), «Динамічна міцність елементів аерокосмічної та бронетанкової техніки під дією механічних навантажень» (2017 – 2019 рр., № ДР 0111U001758);

– за державним замовленням на найважливіші науково-технічні (експериментальні) розробки та науково-технічну продукцію № ДЗ/443-2013 «Розроблення та впровадження інформаційно-комп'ютерної технології аналізу міцності елементів конструкцій аерокосмічної техніки» (2013 р., № ДР 0113U007341), ДЗ-71-2019 «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням». (2019 – 2020 рр., № ДР 0119U102947);

– за програмно-цільовою та конкурсною тематикою НАН України

«Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення фізико-технічних проблем енергетики НАН України» за темою «Підвищення ефективності елементів конструкцій ракетно-космічної техніки шляхом їх чисельного моделювання та оптимізації» (2020 р., № ДР 0120U101241);

– за цільовими комплексними програмами наукових досліджень НАН України «Науково-технічні проблеми інтеграції енергетичної системи України в Європейську енергетичну систему» у рамках наукового проекту «Розробка заходів підвищення надійності експлуатації високо напружених елементів обладнання ТЕС і ТЕЦ при динамічному навантаженні» (2006 р., № ДР 0106U008600) та (2007 р., № ДР 0107U008038);

– за цільовою програмою наукових досліджень ВФТПЕ НАН України «Наукові основи ефективного перетворення енергії» за темою «Розробка нових методів та засобів діагностування енергетичних машин та підвищення їх міцності та працездатності» (2012 – 2016 рр., № ДР 0112U002490);

– за цільовою комплексною програмою НАН України з наукових космічних досліджень «Вібронапруженість елементів ракетоносіїв під впливом акустичних та імпульсних навантажень» 2013р., № ДР 0113U001771), «Розрахункова оцінка вібрацій елементів аерокосмічних систем при силових та аеродинамічних навантаженнях» (2014-2017 рр., № ДР 0114U003588), «Розробка теоретичних основ проектування тонкостінних елементів ракет-носіїв із високоміцних нанокомпозитних матеріалів» (2018-2019 рр., № ДР 0118U003915), «Розрахункове дослідження напружено-деформованого стану композитних корпусних елементів ракетоносіїв під дією нестаціонарних навантажень» (2020 р., № ДР 0120U101942);

– за цільовою програмою наукових досліджень НАН України «Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд» (2016-2020 рр., № ДР 0116U005703);

– за програмами ДФФД № Ф53.7/038 «Наукові основи проектування багатовимірних коливальних систем в умовах впливу віброударних процесів» (2013 р., № ДР 0113U002848), Ф53.1/023 «Нестаціонарні процеси деформування та руйнування матеріалів елементів конструкцій при імпульсних навантаженнях» за договором «Розробка методів розв'язання нелінійних задач швидкісної деформації тривимірних і оболонкових елементів конструкцій під дією імпульсних навантажень з урахуванням динамічних властивостей матеріалів і конструкційних факторів» (2013р., № ДР 0113U003908);

– за конкурсною тематикою спільних проектів фундаментальних досліджень вчених наукових установ НАН України та Сибірського відділення Російської академії наук «Чисельне моделювання нестаціонарної взаємодії складних пружних конструкцій з рідиною чи газом» (2006 – 2008 рр., № ДР 0106U008609);

– за договорами про міжнародне співробітництво між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та Інститутом проточних машин Польської академії наук (2003-2007 рр.), між Інститутом проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та Воєнно-технічною академією ім. Ярослава Домбровського, Варшава, Польща (2008-2012 рр.);

– за господарським договором з ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «Ризикон» «Розробка методів моделювання наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди» (2006-2009 рр., № ДР 0106U001613);

– за господарськими договорами з ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» «Розробка методів і програм розрахунку динамічного напруженого і граничного стану оболонкових конструкцій при високошвидкісних діях» (2015 р., № SCM YZH SP 03900), «Розробка методів і програм розрахунку тривалості руйнування елементів кріплення БЕ при імпульсному навантаженні (2016 р., № GR2 YZH SPS 25900), «Перевірка працездатності і механічного стану систем кріплення БЕ при транспортуванні на основі комп'ютерного моделювання технологічних і експлуатаційних впливів» (2017 р., № ДР 0117U003630).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних аналітично-числових методів дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження різної фізичної природи і надзвукової газової течії та застосування цих методів до розв’язання актуальних прикладних задач.

Для досягнення зазначеної мети в роботі були поставлені та розв’язані такі ***основні наукові та прикладні задачі***:

– розробити й обґрунтувати загальні принципи моделювання термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування елементів конструкцій, які враховують зміну механічних властивостей конструкційних матеріалів під час деформування, що спричинена високошвидкісним механічним навантаженням;

–розробити узагальнену модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні, що описує як термопружне деформування, так і швидкісне пластичне деформування;

– побудувати рівняння стану для полікристалічних матеріалів, яке поєднує еквівалентні напруження з еквівалентними деформаціями, швидкістю деформацій і температурою, та ґрунтується на модифікації найбільш відомих моделей задля можливості застосування бази визначених емпіричних констант динамічних властивостей матеріалів;

– розробити для запропонованої моделі загальну схему числового аналізу напружено-деформованого і граничного стану конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження;

– застосувати розроблену математичну модель із запропонованим рівнянням стану до розв‘язання таких задач:

• дослідити динамічний напружено-деформований стан оболонкових елементів корпусів газотурбінних двигунів внаслідок локального навантаження обірваною частиною лопатки; дослідити локальний динамічний напружено-деформований стан лопаток газотурбінних двигунів внаслідок навантаження сторонніми предметами;

• дослідити динамічні напруження, що виникають при впливі ударної хвилі на типові елементи промислових будівельних споруд у формі плит з оребренням та на плоскі елементи оснастки;

• дослідити високошвидкісне деформування та розділення навпіл елемента обтічника ракети у формі усіченої конічної оболонки внаслідок спрацювання кумулятивного заряду;

• дослідити високошвидкісне деформування та руйнування елементів кріплення головної частини ракетної конструкції;

– дослідити нестаціонарне деформування композитного корпусу твердопаливного двигуна з ортотропними чи функціонально-градуйованими характеристиками в робочих режимах навантаження при старті ракети;

– розробити аналітично-числовий метод аналізу динамічної нестійкості обтічників ракет у формі параболоїдів обертання та підкріплених шпангоутами конусів в надзвуковому газовому потоці;

– дослідити достовірність результатів числових досліджень, отриманих за розробленими моделями високошвидкісного деформування елементів конструкцій, шляхом їх порівняння з результатами експериментів, апробованими відомими результатами або результатами числових досліджень за іншими моделями.

Об'єкт дослідження – динамічні процеси деформування, що відбуваються в елементах конструкцій з полікристалічних та композитних матеріалів внаслідок високошвидкісного навантаження різної фізичної природи.

Предмет дослідження – напружено-деформований та граничний стан в елементах конструкцій з полікристалічних матеріалів та деформований стан в елементах конструкцій з композитних матеріалів, які знаходяться під дією високошвидкісного навантаження різної фізичної природи.

Методи дослідження. Методологічну основу дослідження деформування та локального руйнування елементів конструкцій становлять загальні положення теорії термопружності та пластичності у поєднанні з емпірично отриманими рівняннями стану, що враховують вплив швидкості деформації та підвищеної температури. Для числових досліджень двовимірних геометричних моделей застосовується адаптивний метод скінченних різниць з лінеаризацією по просторовим координатам нелінійних рівнянь для кожного дискретного часу. В основі часової дискретизації задачі лежить розрахункова схема прогнозу-корекції Вожеле. Для числових досліджень тривимірних геометричних моделей застосовується метод скінченних елементів з явною схемою інтегрування за часом. Методологічну основу для визначення динамічної нестійкості оболонок обертання у надзвуковому газовому потоці становить метод заданих форм та уточнена поршнева теорія. Для отримання рівнянь руху оболонкових конструкцій застосовуються оболонкові теорії типу Тимошенка-Рейсснера та теорія Редді високого порядку.

Наукова новизна одержаних результатів. Виконані в роботі дослідження дозволили одержати такі нові наукові результати:

– запропоновано нову узагальнену модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні, яка ґрунтується на поєднанні моделей нестаціонарного термопружного деформування і швидкісного пластичного деформування для урахування високошвидкісного зміцнення та температурного знеміцнення матеріалу;

– запропоновано нове рівняння напружено-деформованого стану у модифікованій формі Пежини з додатковими температурними множниками у формі Джонсона-Кука, в якому еквівалентні напруження залежать як від еквівалентних деформацій, так і від швидкості деформацій та від температури;

– на основі запропонованої узагальненої моделі динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні вперше отримано уточнені розв’язки задач за термо-пружно-пластичним високошвидкісним деформуванням оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок обриву частини лопатки та локального пошкодження лопаток газотурбінних двигунів сторонніми предметами, та визначено локалізацію динамічних напружень в зоні ударно-імпульсного навантаження;

– на основі запропонованого рівняння напружено-деформованого стану вперше отримано уточнені динамічні напруження плити з оребренням під впливом газодинамічної ударної хвилі та пластини під впливом гідродинамічного ударного навантаження при урахуванні динамічних характеристик матеріалів елементів конструкцій будівельних споруд та оснастки для обробки матеріалів тиском;

– запропоновано нову розрахункову модель нестаціонарного деформування композитного корпусу твердопаливного двигуна у формі сферично-циліндрично-сферичної оболонки обертання з ортотропними чи функціонально-градуйованими характеристиками;

– на основі запропонованої оболонкової моделі композитного корпусу отримано нові закономірності процесу деформування жорстко закріпленої по краях сферично-циліндрично-сферичної ортотропної оболонки при внутрішньому імпульсному навантаженні;

– встановлено нові закономірності втрати динамічної стійкості обтічників ракет в надзвуковому газовому потоці, що моделюються оболонками у формі параболоїда обертання і підкріпленого шпангоутами конуса, та вперше виявлено їх форми коливань при втраті динамічної стійкості.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації результати можуть використовуватися під час проектування, доведення та експлуатації аерокосмічних та машинобудівних конструкцій.

Створені в роботі математичні моделі, методи та алгоритми обчислення становлять розрахункову базу для аналізу напружено-деформованого та граничного стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісного механічного навантаження, що має суттєве практичне значення.

Ряд результатів, рекомендацій та висновків виконаних прикладних досліджень, які наведено в дисертаційній роботі, використано та впроваджено на підприємствах України, а саме:

– на ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» – моделі, методи та програми розрахунку динамічного напружено-деформованого і граничного стану композитного корпусу твердопаливного двигуна в робочих режимах навантаження при старті ракети;

– на ДП КБ «Південне» – моделі, методи та програмне забезпечення для визначення форми коливання обтічників ракет і ракет-носіїв при втраті динамічної стійкості в надзвуковому газовому потоці;

– на ДП КБ «Південне» – моделі та програми розрахунку для перевірки працездатності елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції при імпульсному навантаженні;

– на ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН» – методи моделювання та програми розрахунку наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди;

– на ВАТ НВП «ОСНАСТКА» – методика підвищення надійності і довговічності оснащення для обробки матеріалів тиском;

– на ДП «Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування» – математичні моделі, методи розрахунку та рекомендації по аналізу динамічної міцності захисних споруд і оснастки для формоутворення;

– на ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О.Г. Івченка» – математичні моделі та методики чисельного аналізу динамічної міцності елементів корпусів газотурбінних двигунів в умовах експлуатаційного руйнування лопаткового апарату.

Деякі наукові результати роботи використано в учбовому процесі, а саме:

– у Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна, кафедра теплофізики та молекулярної фізики;

– у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут», кафедра механіки суцільних середовищ та опору матеріалів.

Впровадження розробок на підприємствах та в учбовому процесі підтверджено документально (**Додаток Б**).

Публікації. Матеріали дисертації опубліковані в 65 наукових роботах. З них 42 статті у наукових виданнях України та іноземних держав, з яких 12 включені до міжнародної бази Scopus, та 23 публікацій у матеріалах міжнародних конференцій і симпозіумів.

Особистий внесок здобувача у роботи, опубліковані у співавторстві. Дисертаційна робота є результатом завершених наукових досліджень автора, які було виконано у Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України в період з 2002 по 2020 роки.

Основні результати теоретичних та розрахункових досліджень, що виносяться на захист, отримано самостійно.

У роботах, що написані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному: [1, 19–23] – запропоновано термо-пружно-пластичну узагальнену модель високошвидкісного деформування елементів конструкцій під впливом імпульсного навантаження, яка ґрунтується на застосуванні емпіричних коефіцієнтів, проведено тестові розрахунки та аналіз отриманих результатів, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [13, 15–17, 43, 44] – запропоновано математичну модель імпульсного навантаження, проведено числовий аналіз елементів конструкцій та отримано локалізацію напружено-деформованого стану, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [24–27, 43–51] – розроблено математичні та розрахункові моделі високошвидкісного деформування елементів конструкцій під впливом імпульсного навантаження, проведено аналіз отриманих результатів та формулювання висновків, прийнято участь у постановках задач та виконанні числових розрахунків; [2, 28, 52, 54] – розроблено розрахункову методику визначення нестаціонарного напружено-деформованого стану елементів будівельних споруд під впливом ударної газодинамічної хвилі та проведено числовий аналіз граничного стану для оребреної плити, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [29–32, 56] – розроблено методику розрахунку напружено-деформованого стану елементів газотурбінних двигунів під впливом локального імпульсного навантаження, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [3, 33, 55] – запропоновано розрахункову модель локального імпульсного навантаження як неперервної функції тиску у часі, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [34, 57, 58] – запропоновано розрахункову модель деформування і руйнування елемента конічного обтічника ракети внаслідок спрацювання кумулятивного заряду, проведено розрахункові дослідження, прийнято участь у постановці задач та формулюванні висновків; [4–7, 35–39, 59–60] – здійснено постановку задачі, запропоновано математичні моделі та напіваналітичні методи дослідження, здійснено числові розрахунки й аналіз динамічної нестійкості різних геометричних реалізацій обтічників ракет-носіїв під впливом надзвукового газодинамічного тиску та без нього, проведено аналіз отриманих результатів, прийнято участь у формулюванні висновків; [8-9, 40, 62] – здійснено постановку задачі, запропоновано математичну модель і аналітично-числовий метод аналізу напружено-деформованого та граничного стану композитного корпусу двигуна ракети під впливом робочого імпульсного навантаження та проведено числові розрахунки за розробленою моделлю, проведено аналіз отриманих результатів, розроблено критерії визначення працездатності корпусу двигуна в залежності від внутрішнього максимального тиску навантаження, прийнято участь у формулюванні висновків та практичних рекомендацій; [10, 41, 61] – прийнято участь у постановці задачі, розробці математичної моделі, числовому аналізі, перевірці достовірності отриманих результатів та формулюванні висновків щодо деформування елементів конструкцій з функціонально-градуйованих композитних матеріалів; [11, 42, 63, 64] – виконано розрахункові дослідження процесу руйнування елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції, проведено аналіз часу їх руйнування, прийнято участь у постановці задачі та формулюванні висновків; [12] – виконано дослідження зміни границі пружності в матеріалах спеціальної ракетної конструкції при температурах від -40 ^{0}C до 50 ^{0}C.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися та дістали схвалення на міжнародних конференціях, симпозіумах і наукових семінарах, а саме:

– 7th, 8th, 10th International Symposium on Impact Engineering (Warsaw, Poland, 2010; Osaka, Japan, 2013; Gmunden, Austria, 2019);

– 7th International Conference on Mechanics and materials in design (Albufeira, Portugal, 2017);

– 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes, DynaMAT 2019 (Nicosia, Cyprus, 2019);

– 4th International Conference on Protective Structures, ICPS4-2016 (Beijing, China, 2016);

– 8th European Nonlinear Dynamics Conference (Vienna, Austria, 2014);

– 7th, 8th Conferences «Shell Structures. Theory and Applications» (Gdansk-Yurata, Poland, 2002, 2005);

– 10th International Conference «Riesenie Krizovych Situacii v Specifickom Prostredi» (Žilina, Slovakia, 2005);

– 13th International scientific and technological conference «Maintenance of infrastructure in crisis situations» (Warsaw - Rynia, Poland, 2004);

– IX Konferencjas Naukowo-Techniczna «Programy MES we Wspomaganiu Analizy, Projektowania i Wytwarzania» (Poland, 2005);

– XIII Warsztaty Naukowe PTSK «Symulacja w Badaniach i Rozwoju» (Warsaw, Poland, 2006)

– IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, Россия, 2006);

– International Seminar on Science and Education (Rome, Italy, 2011);

– International Conference «Shock Waves in Condensed Matter» (Kiev, 2012);

– Міжнародній науково-технічній конференції «Міцність матеріалів та елементів конструкцій» (Київ, 2010);

– Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013);

– IX Міжнародній науковій конференції «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Миколаїв, 2011);

– V, VII Міжнародній конференції «Космические технологии: настоящее и будущее» (Дніпро, 2015, 2019);

– I, II Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2018, 2020).

У повному обсязі дисертація доповідалася на засіданні науково-технічної проблемної ради «Математичне моделювання. Механіка деформівного твердого тіла. Динаміка та міцність машин» Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна.

РОЗДІЛ 1
ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТА РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ВПЛИВОМ ВИСОКОШВИДКІСНОГО МЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

За останні десятиріччя у сучасній техніці широкого розвитку набули конструкції, експлуатація яких відбувається при високошвидкісному навантаженні. Значного прогресу досягнуто у створенні машин та споруд, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень: інтенсивних імпульсних, ударних та вибухових впливів, а також надзвукового газового потоку. Практичні успіхи машинобудування безпосередньо пов‘язані з розвитком теоретичних основ та отриманими фундаментальними результатами в механіці деформівного твердого тіла. Стрімкий розвиток обчислювальної техніки дозволив широке застосування числового моделювання в механіці твердого тіла для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій, заміни натурних експериментальних досліджень числовим аналізом.

1.1 Моделювання високошвидкісного деформування та руйнування в елементах конструкцій

Числове моделювання механічних процесів деформування та руйнування, що швидко протікають в елементах конструкцій, суттєво відрізняється від моделювання процесів статичного або квазістатичного деформування. Ця різниця спричинена високою швидкістю деформації, що під впливом короткочасного навантаження змінюється в широкому діапазоні до 10^6 $с^{-1}$. Висока швидкість деформації впливає на механічні характеристики в конструкційних металевих матеріалах, які змінюються в процесі деформування за короткий час впливу високоінтенсивного механічного навантаження. Майже однією з перших спроб урахування впливу швидкості деформації в рівнянні стану для опису пластичного плину матеріалу була робота В.В. Соколовського [66]. В роботі запропоновано зв'язок між приростами деформацій і напружень визначати на основі узагальненого закону Гука: $E\ \varepsilon = \sigma + k\ F(\sigma\text{-}\sigma_т)$, де k – фізична константа а $\sigma_т$ – границя плинності матеріалу. Малверн І. Є. узагальнив цю фізичну залежність, та запропонував її використовувати у вигляді [67]: $E\ \varepsilon = \sigma + \Phi(\sigma\text{-}F(\varepsilon))$, де Φ – функція, яка характеризується властивостями матеріалу та визначається експериментально.

В ранніх роботах [68 – 83] розглядаються особливості швидкісного деформування матеріалів під впливом імпульсного навантаження. Урахування всіх цих особливостей вимагає використання складних математичних моделей, що ґрунтуються на використанні даних експериментальних досліджень.

В роботах Іллюшина А.А. [84], Рахматуліна Х.А. та Дем‘янова Ю.А. [85], Пежини П. [86], Іонова В.Н. та Огібалова П.М. [87], Степанова Г.В. та Харченка В.В. [88 – 92], Кукуджанова В.Н. [93 – 95], Гудрамовича В.С. [96, 97], Воробйова Ю.С. та Колодяжного А.В. [98], Лугового П.З. [99] та інших авторів [100 – 112] закладені основи моделювання процесів швидкісного деформування елементів конструкцій.

У зв‘язку зі значною актуальністю проблеми, в наш час існує багата кількість публікацій за темою дослідження. Можна виділити декілька основних напрямків наукових досліджень:

– експериментальні дослідження властивостей металів в умовах імпульсного навантаження;

– аналіз експериментальних даних і побудова емпіричних залежностей непружного деформування;

– аналітичні та числові дослідження швидкісного деформування елементів конструкцій на основі фізично нелінійних пружно- або в'язко-пластичних математичних моделей;

– дослідження впливу температури під час пластичного деформування металів на основі експериментального вивчення мікро- та макроструктури матеріалів;

– математичне моделювання процесів термопружного та термопластичного деформування;

– аналіз динамічної міцності та умов руйнування елементів конструкцій при високошвидкісному навантаженні.

Високошвидкісне деформування в елементах конструкцій виникає внаслідок впливу короткочасних механічних навантажень. Всі короткочасні навантаження характеризуються спільною рисою: швидким або миттєвим зростанням тиску на контактну поверхню від нуля до максимальної величини. Внаслідок цього впливу на конструкцію можуть протікати процеси пружного або пластичного деформування і, навіть, руйнування.

1.1.1 Експериментальні дослідження високошвидкісного деформування матеріалів, рівняння стану. Виявлені наприкінці минулого сторіччя особливості високошвидкісного деформування металевих сплавів спричинили розвиток нового напрямку експериментальних досліджень, спрямованих на визначення динамічних властивостей матеріалу. Метою цих досліджень є побудова емпіричних залежностей еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій, їх швидкостей і температурних параметрів. В наш час існує декілька основних експериментальних центрів досліджень із апробованими методиками визначення емпіричних коефіцієнтів для оригінального вигляду рівняння стану. Ряд експериментальних центрів динамічні властивості матеріалів визначають за допомогою обладнання, що включає стрижень Гопкінсона. Основні принципи проведення експериментів з використанням стрижня Гопкінсона та обробки даних дослідження викладені в роботі [71]. Цей підхід розвинуто в роботах М. А. Мейерса [83], Л. Крушки [113], А. М. Брагова, А. Ю. Константинова і А. К. Ломунова [114], Г. Джонсона та В. Кука [115], Е. Дж. Зеріллі та Р. У. Армстронга [116], Є. Кадоні [117], Т. Дурсун і К. Сутіс [118] та інших.

Нові методики дослідження динамічних властивостей матеріалів на основі безпосереднього тензометрірування розвинені у роботах Степанова Г.В. та його учнів, які підсумовані у монографіях [77, 88, 119].

У роботах А.В. Колодяжного та його учнів [82, 120 – 125] методи наукової школи Г.В. Степанова знайшли подальшого розвитку за рахунок застосування нового підходу, що дозволив вимірювати швидкість деформації в процесі експериментальних досліджень та визначити напруження в робочій частині зразка. Одночасна реєстрація напружень та деформацій, що змінюються у часі, дозволила безпосередньо визначати емпіричні константи у рівнянні стану $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i)$. Було запропоновано залежність напружень від деформацій та їх швидкостей у вигляді [98]

$$\sigma = E\varepsilon_T^{CT}\left[1+\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{D}\right)^{1/n}\right]+\sigma_T^{CT}\left\{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_T^{CT}}-\left[1+\left(\frac{\varepsilon_e}{D}\right)^{1/n}\right]\right\}^m, \qquad (1.1)$$

де E, ε_T^{CT} – модуль Юнга та границя пружності для деформацій, що визначені при статичному навантаженні;

D, m, n – емпіричні константи зміцнення матеріалу при високошвидкісному деформуванні;

$\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e$ - пружно-пластична деформація і її швидкість, заміряні в процесі випробування зразків.

Зараз в Інституті проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України є база даних емпіричних констант для ряду металевих сплавів [98], широко застосованих для енергетичного, ракетно-космічного та машинобудівного виробництва. Дослідження динамічних властивостей сучасних матеріалів подані в роботах [119, 126 – 129] та інших. А в роботах [130 – 133] колективом вчених з Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» під керівництвом О.К. Морачковського та Д.В. Бреславського досліджено питання пошкоджуваності й руйнування елементів конструкцій.

Експериментальне дослідження високошвидкісного деформування та руйнування матеріалів є надскладною проблемою, оскільки динамічні властивості матеріалів вдається точно визначити тільки із серій складних експериментів. В роботах [134 – 137] показано, що для отримання достовірних експериментальних даних потрібно враховувати велику кількість факторів.

Багато публікацій з аналізу результатів експериментальних досліджень швидкісного деформування та руйнування матеріалів висвітлюють тему локалізації деформації та виникнення адіабатичних смуг зсуву в матеріалі та вплив температури на процес утворення зон локального пластичного плину [138 – 145]. Показано, що смуги локалізованої деформації при імпульсних навантаженнях є результатом інтерференції хвиль розвантаження, при цьому величина негативних напружень не перевищує міцності матеріалу. Саме зони локалізації деформації та адіабатичні смуги зсуву в матеріалі є джерелом руйнації в процесі експлуатації виробу.

Металографічні дослідження показали, що товщина смуг локалізованої деформації мала та не перевищує 5 - 20 мкм [141]. Зерна в смузі рівноосні та мають розмір 0.05 - 0.2 мкм [142]. Існує два типи локалізації деформації: перший тип в формі вузьких смуг з різкими краями і підвищеної мікротвердістю; другий, дифузний, тип локалізації характеризується розмитими межами зі зниженою мікротвердістю. Такі розмиті області деформації, як правило, спостерігаються в зоні розгалуження, коли смуга локалізації закінчується. У феритних сталях і сплавах локалізація деформації супроводжується фазовим переходом, який проявляється на металографічних шліфах у вигляді білої смуги [143]. Причиною локалізації деформації є втрата стійкості пластичного течії, що виникає в результаті ефекту термічного знеміцнення [140]. За термопластичною моделлю робота пластичної деформації, в умовах, близьких до адіабатичних, переходить в тепло. Це призводить до термічного знеміцнення матеріалу та утворенню смуг адіабатичного зсуву. Термопластична модель задає умови втрати стійкості у вигляді конкретних величин деформації, як правило, з експериментів по крученню [139], або тиску в ударній хвилі [134, 135, 144, 145]. Необхідною умовою локалізації деформації є наявність деформованого стану матеріалу, всередині якого зароджуються такі смуги. При цьому температура в смугах зсуву за різними джерелами дорівнює 500 – 800 ^{0}С [119,146, 147].

Для урахування впливу температурного знеміцнення Г. Джонсоном і В. Куком було запропоновано залежність еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій, їх швидкостей та гомологічної температури $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}\left(\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq}, T_*\right)$ у вигляді [115]

$$\sigma_{eq} = Y\left(1 + A\varepsilon_{eq}{}^{n}\right)\left(1 + B\ln\varepsilon'_*\right)\left(1 - CT_*^{m}\right), \tag{1.2}$$

де Y – границя плинності матеріалу, що визначена при статичному навантаженні;

A, B, C, n, m – емпіричні константи матеріалу при високошвидкісному деформуванні;

ε_{eq} – еквівалентні пластичні деформації;

$\varepsilon'_* = \varepsilon' / \varepsilon'_0$, – безрозмірна швидкість пластичної деформації;

ε'_0 –швидкість пластичної деформації на початку пластичного плину матеріалу;

$T^* = \dfrac{T - T_p}{T_t - T_p}$ – гомологічна температура;

T – поточна температура;

T_p – кімнатна температура;

T_t – температура плавлення.

Результати експериментальних досліджень фізико-механічних властивостей сучасних алюмінієвих сплавів і високоміцних сталей подані в роботах [148–152], а в [153] подані емпіричні константи для широкого ряду металевих сплавів.

1.1.2 Математичне моделювання процесів високошвидкісного деформування та руйнування. Зараз відбувається стрімкий розвиток обчислювальних технологій, що дозволив удосконалити ряд математичних моделей та числових методів для аналізу динаміки конструкцій та їх нестаціонарного напружено-деформованого стану.

Числові дослідження процесів високошвидкісного деформування і руйнування конструкції вимагають повного урахування всіх факторів навантаження, оскільки саме їх сукупний вплив може спричинювати пошкодження матеріалу в конструкціях. У розділах монографій [144 – 146, 149, 150], що стосуються локального навантаження ударного та імпульсного характеру, показано обмежений характер зони розвитку інтенсивних динамічних деформацій та напружень. В цій локальній області, навіть для тонкостінних конструкцій, розвиваються деформації та напруження, які описуються тривимірними моделями. Таким чином, застосування оболонкових математичних моделей для розв‘язання задач швидкісного пружно-пластичного деформування стає неможливим для багатьох корпусних елементів конструкцій. А в роботі А. В. Колодяжного, М. М.Маштакова і В. І. Севрюкова [151] проведено дослідження швидкісного пружного деформування циліндричної оболонки при неосесиметричному локальному ударно-імпульсному навантаженні. Проаналізовано зміщення та характер напружено-деформованого стану оболонки. Рішення отримано методом рядів по окружній координаті й кінцево-різницевим методом по осьовій координаті та у часі. Показано, що запропонований підхід до моделювання пружного деформування внаслідок імпульсного навантаження дає задовільну точність результатів числових досліджень.

В роботах [73, 82, 142, 143] динамічна поведінка елементів конструкцій досліджується за допомогою лінійних геометричних залежностей і деформаційної теорії пластичності. Такий підхід застосовано для дослідження пружних та малих пластичних деформацій. Для інтенсивних імпульсних навантажень характерний динамічний тривимірний напружено-деформований стан, що розвивається в пружно-пластичній стадії. При цьому механічні властивості металів та їх сплавів змінюються в залежності від величини та швидкості деформації, як показано в роботах [82, 94, 107, 108, 134, 135,158, 159]. Для розв‘язання таких задач використовуються математичні моделі, що враховують динамічні властивості матеріалу.

Урахування впливу деформації, її швидкості та температури при математичному моделюванні процесів високошвидкісного деформування та руйнування елементів конструкцій відбувається за рахунок корегування границі текучості матеріалу. Основні розрахункові моделі, що розглянуті в літературі [160–164], змінюють границю текучості шляхом додавання множників у рівняння стану, які залежать від швидкості деформації та температури. Більшість моделей описують деформаційне зміцнення та температурне знеміцнення конструкційного матеріалу статечною залежністю, зокрема і для моделей ізотропного або кінематичного зміцнення. При цьому вплив швидкості деформації або температури може враховуватися як у статечному, так і у логарифмічному вигляді.

Значна актуальність проблеми адекватного моделювання процесів ударного та імпульсного навантаження спричинює підвищений інтерес до її вирішення у всіх технічно розвинених країнах. В Україні такі дослідження виконуються в багатьох наукових центрах, а саме: в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук України, в Інституті проблем міцності ім. Г.С.Писаренка Національної академії наук України, в Інституті технічної механіки Національної академії наук України, в Інституті електрозварювання імені Є. О. Патона Національної академії наук України, в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», в Національному технічному університететі «Харківський політехнічний інститут», в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара, в Національному аерокосмічному університеті ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», в Національному авіаційному університеті та інших. Особливий інтерес викликає моделювання напружено-деформованого стану при пластичному плині матеріалу, що призводить до його руйнуванні. Цій тематиці присвячено багато робіт. Опубліковано ряд монографій, що узагальнюють ці дослідження [77, 81, 89, 92, 93, 119, 145 – 147, 156]. У них проведена систематизація існуючих підходів і методів моделювання пружно-пластичного деформування й руйнування механічних систем.

Перед тим, як продовжити огляд досліджень, необхідно відзначити наступне. Побудова математичної моделі реального процесу швидкісного деформування об'єкта у вигляді гранично-часової задачі залежить від характеру та діапазону зміни основних параметрів. Складність розв'язання таких задач пов'язана з розвитком процесів в часі, а також з необхідністю урахування специфічних особливостей поведінки матеріалу, які проявляються при його динамічному деформуванні. Найбільш відомі теорії пластичності умовно можна поділити на два типи: деформаційна теорія пластичності та теорія пластичної течії. Між ними існує принципова різниця. У деформаційній теорії пластичності встановлюється зв'язок між напруженнями та деформаціями, це призводить до скінченних співвідношень. У теорії пластичної течії встановлюється зв'язок між нескінченно малими приростами пластичних деформацій і напружень, це призводить до диференціальних рівнянь [162, 163]. Для дослідження й опису процесу швидкісного пружно деформування різних матеріалів широко використовуються імітаційні моделі об'єктів кінцевої довжини у вигляді балок, плит або оболонок.

Найбільш застосованою теорією деформаційного типу є теорія малих пружно-пластичних деформацій О.А. Ільюшина [84]. Залежності цієї теорії сформульовані для простого навантаження. Хоча і при складних навантаженнях, що близькі до простих, вказана теорія дає результати, які добре узгоджуються з експериментальними даними.

У роботах [98, 161] використовується динамічний варіант теорії пластичних деформацій:

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_0\right), \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2\psi}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_0 = \frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_0\right), \qquad \tau_{yz} = \frac{1}{2\psi}\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_z - \frac{1}{3}\varepsilon_0\right), \qquad \tau_{xz} = \frac{1}{2\psi}\gamma_{xz}. \tag{1.3}$$

Для пружних деформацій – $\psi = \dfrac{1}{2\mu}$, а для пластичних швидкісних деформацій – $\psi = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i)}$,

де σ_i –напруження,

ε_i –деформації,

$\dot{\varepsilon}_i$ –швидкості деформацій.

Динамічне зміцнення матеріалів описується залежністю інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій і швидкості деформації у вигляді [98]

$$\sigma_i = \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{pl}}{\gamma}\right)^m\right] E\varepsilon_i, \tag{1.4}$$

де E – модуль пружності;

m і γ – коефіцієнти чутливості до швидкості деформації;

$\dot{\varepsilon}_i^{pl}$ – швидкість деформації в пластичній стадії.

Складність розв’язання задач теорії пластичності полягає в їх нелінійності. Принциповим питанням для таких задач є питання єдності розв’язку. Математична модель швидкісного деформування елементів конструкцій повинна враховувати неоднорідність матеріалу що виникає в процесі деформування. Тому усі механічні характеристики матеріалу є змінними як за просторовими координатами, так і в часі.

Для забезпечення фізичної достовірності розрахунків руйнування важливою проблемою є вибір критерію руйнування і опису кінетики накопичення пошкодженості. В наш час широко відомими є критерії руйнування Мізеса, Друкера-Прагера, Пісаренко-Лебедева, Бреслера-Пістера, Вильяма-Варнке, два останніх застосовуються для бетону, Хенкінсона, для ортотропних матеріалів типу деревини, Хіла, для анізотропних матеріалів [103, 161–163]. Використання критеріїв руйнування пов‘язане з переходом від складного напруженого-деформованого стану до еквівалентного простому одноосьовому розтягуванню та введенням еквівалентних деформацій та еквівалентних напружень. Поширеними однокомпонентними, або однопараметричними, критеріями міцності є критерій Губера – Мізеса та Кулона – Треска, двопараметричними – Лоде – Надаї. А з розвитком та широким розповсюдженням програмного забезпечення, створеного компанією ANSYS, мабуть найбільшого поширення набула теорія Губера - Мізеса – Генки. Вона використовує як умову текучості пластичних матеріалів наступне співвідношення [150]:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\,. \qquad (1.5)$$

Треба відзначити, що вираз (1.5) широко застосовується для визначення еквівалентних напружень в елементах конструкцій з ізотропних матеріалів, а також використовується для ортотропних матеріалів. Динамічні властивості матеріалів враховуються шляхом застосування емпіричних коефіцієнтів в експериментально-розрахункових залежностях рівняння стану.

Як було показано в попередньому підпункті, з експериментальних досліджень виявлено, що локалізоване високошвидкісне навантаження спричинює інтенсивні динамічні напруження в обмежених зонах конструкції. Оболонкові конструкції також не є винятком. В них по товщині розвиваються тривимірні пружно-пластичні деформації та напруження, як показано в роботах П.П. Лепіхіна з співавторами [164, 165]. Ця особливість швидкісного деформування оболонкових конструкцій не дозволяє застосовувати традиційні моделі для визначення локального впливу імпульсного навантаження. Ще однією особливістю задач локального швидкісного деформування є те, що навіть для конструкцій з осьовою симетрію, задача не є вісьосиметричною.

1.2 Основні числові методи розв‘язання задач механіки деформівного твердого тіла при високошвидкісному навантаженні

Використання аналітичних методів для розв’язання фізично та геометрично нелінійних задач високошвидкісного деформування елементів конструкцій складної геометрії є доволі обмежене і навіть неможливе, тому що через свою громіздкість та неуніверсальність вони є малоефективними. Для розв’язання цього класу задач використовують числові або аналітично-числові методи. Математичний апарат, що призначений для числового аналізу високошвидкісного динамічного напружено-деформованого стану конструкцій, базується на застосуванні таких числових методів, як метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. В наш час існує велика кількість монографій та обзорних статей, в яких розглядаються ці методи та особливості їх використання для розв‘язання задач механіки деформівного твердого тіла.

Одним з перших наближених методів, що обуло використано для розв'язання крайових задач, був метод кінцевих різниць [166, 167]. Цей метод полягає в наступному. Область безперервної зміни аргументу замінюється кінцевою сукупністю точок або вузлів, званих сіткою. Шукані функції, що розглядаються в цих точках, називаються сітковими функціями. Похідні, що входять в диференціальні рівняння та крайові умови, замінюються тими чи іншими різницевими співвідношеннями. Для визначення невідомих значень функцій у вузлових точках формується система алгебраїчних рівнянь. Методи кінцевих різниць привабливі тим, що їх в принципі можна прикласти до будь-якій системі диференціальних рівнянь, хоча урахування граничних умов задачі як правило є громіздкою операцією.

В наш час найбільш популярний підхід, який полягає в характерному для механіки розбитті тіла на елементи кінцевих розмірів– метод скінченних елементів (МСЕ). Кожен елемент наближено описує поведінку малої області тіла, яку він представляє. Умови безперервності накладаються зазвичай у вузлах елементів. МСЕ вперше був описаний в роботі А. Хреннокоффа [168]. Подальша розробка методу була зроблена Р. Курантом [169], Дж. Аргірос [170], М. Тернером, Р. Клаффом, Г. Мартіном, Л. Топпа [171]. Потім з'явилися основоположні монографії О. Зенкевича [172], Г. Стренга, Дж. Фікса [173], Р. Галлагера [174], А.С. Сахарова та І. Альтенбаха [175] та багато інших. Діапазон застосування МСЕ, його ефективність і легкість обліку граничних умов зробили його одним з найбільш популярних методів розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища.

До недоліків методу слід віднести, по-перше, необхідність дискретизації усього досліджуваного об'єкта, що неминуче веде до великої кількості кінцевих елементів, по-друге, можливість виникнення нереальних розривів значень фізичних величин, що виражені через старші похідні від шуканих функцій, між суміжними елементами. При моделюванні локальних ефектів фазових переходів при локальному ударному навантаженні доцільно розрахункову схему ускладнювати не для всієї конструкції, а достатньо це зробити в заздалегідь визначеної обмеженої області. Для таких розрахунків зручно використовувати адаптивні кінцево-різницеві методи, які дозволяють перебудовувати розрахункову сітку в процесі розв’язання задачі залежно від величини похибки розв’язку, згідно заданої точності. В роботах [176 177] викладено методи розрахунку означених задач на базі адаптованих для неоднорідного матеріалу, характеристики якого змінюються під час процесу деформування, скінченних різниць. Також використання методу скінченних різниць дозволяє реалізовувати нові види залежності еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій, швидкості деформації та температури, а також використовувати алгоритми, що адаптуються в процесі рішення до зміни властивостей матеріалу в просторі та часі в залежності від параметрів навантаження.

При використанні МСЕ для дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій слід звертати увагу на особливості реалізації моделі. Розв’язання нелінійних задач високошвидкісного деформування здійснюються за допомогою ітераційних процесів в явному вигляді [178]. Числова реалізація даного класу задач на основі МСЕ відбувається в програмному комплексі ANSYS.

В ANSYS/Explicit Dynamics підтримуються явні методи інтегрування рівнянь динаміки. Явними методами називають методи розв’язання рівнянь динаміки, що не пов’язані із розв’язанням систем рівнянь, але використовують рекурентні співвідношення, які виражають переміщення, швидкості і прискорення на даному кроці через їх значення на попередніх кроках. У разі використання діагональної матриці мас вдається її «обернути», спростив тим самим розрахунок і набагато зменшити час однієї ітерації на основі заміни триангуляції матриць з рішеннями при змінних уравновішуючих навантаженнях на матричні множення. Така методика передбачає маленькі кроки і достатньо мілку розбивку, щоб правильно описати діагональною матрицею розподілення мас. У якості компенсації, маленький крок дозволяє відстежити всі зміни в характеристиках конструкції та у її поведінці. Всі нелінійності та контактна взаємодія враховуються у векторі внутрішніх сил. Основний час займає не формування та обернення матриць, а розрахунок цього вектору. Із-за дуже малого розміру кроку, що складає 10^{-6} – 10^{-7} с, явні методи зазвичай застосовуються лише для розрахунку короткочасних процесів.

В ANSYS/Explicit Dynamics при явному інтегруванні застосовується метод центральних різниць, а прискорення вважається постійним в рамках кроку. В основі часової дискретизації - центральна диференціальна схема інтегрування другого порядку, на основі якої обчислюються значення прискорень, швидкостей і переміщень [178]. Використовуються спеціальні технології, оптимізовані для дослідження високошвидкісних короткотривалих процесів. В основі просторової дискретизації лежить МСЕ, який ґрунтується на рівнянні руху у вигляді

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K(\varepsilon_i,\dot{\varepsilon}_i)]\{u\}=\{F\}, \tag{1.6}$$

де $[M]$ – матриця мас скінченно-елементної моделі;

$\{u\}$ – вектор узагальнених вузлових переміщень скінченно-елементної моделі;

$[K]$ – матриця жорсткості скінченно-елементної моделі;

$\{F\}$– вектор сил зведених до вузлів.

Дискретні значення прискорень, швидкостей і переміщень знаходяться за формулами

$$\begin{gathered}\{\ddot{u}\}_n=[M]^{-1}(\{F\}-[K(\varepsilon_i(\{u_n\}),\dot{\varepsilon}_i(\{u_n\}))]\{u_n\}),\\ \{\dot{u}\}_{n+\frac{1}{2}}=\{\dot{u}\}_{n-\frac{1}{2}}+\{\ddot{u}\}_n\Delta t,\\ \{u\}_{n+1}=\{u\}_n+\{\dot{u}\}_{n+\frac{1}{2}}\Delta t.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Якщо крок інтегрування за часом не перевищує $\Delta t_{cr}=\dfrac{2}{\omega_{\max}}$, де максимальна власна частота даної системи $\omega_{\max}\approx\dfrac{2c}{\Delta x_{\min}}$ (c – швидкість звуку в матеріалі, $\Delta x_{\min}$ - мінімальний характерний розмір елементів), то дана система є стійкою.

Існує проблема опису фронту поширення ударних хвиль, оскільки високочастотні хвилі поширюються через сітку повільніше, ніж швидкість звуку. Рішення цієї проблеми може бути реалізовано шляхом введення штучної об'ємної в'язкості [178]

$$q = \rho l \left(C_0 D_{kk}^2 + C_1 c D_{kk} \right), \tag{1.8}$$

де $l = V^{\frac{1}{3}}$ - характерний розмір елемента;

ρ – щільність;

c – швидкість звуку;

D_{kk} – компоненти тензора швидкості деформації;

C_0, C_1 – константи.

Опис руху деформованого суцільного середовища ґрунтується на багатокомпонентному Лагранжево-Ейлеровому підході, який описує течію матеріалу через рухому в просторі сітку [178]. Він дозволяє для кожного елементу містити суміш декількох матеріалів. Також застосовується однокомпонентний Лагранжевого-Ейлеровий підхід і Лагранжева постановка.

Матриця мас $[M]$ в рівнянні (1.6) формується з виразу для кінетичної енергії при деформації елементів конструкції $T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right) dxdydz$, де V – об'єм тіла, ρ – щільність матеріалу.

При застосуванні МСЕ кінетична енергія деформації має вигляд [178]

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{\upsilon}^T N^T N \dot{\upsilon} dV = \frac{1}{2} \dot{\upsilon}^T M_e \dot{\upsilon}, \tag{1.9}$$

де $u = \upsilon N$ – переміщення

υ – вектор компонент вузлових переміщень;

N – матриця функцій форм, яка визначає положення вузлових елементів.

Так матриця мас елемента має вигляд $M_e = \iiint\limits_{V_e} \rho N_e^T N_e dV$.

Матриця жорсткості $[K]$ отримується з виразу для внутрішньої віртуальної роботи $\delta W = \int\limits_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV$, де W – внутрішня віртуальна робота. Зауважимо, що для нелінійної системи потенційна енергія накопичується в часі та, як правило, не виражається явно потенційною функцією зсуву або швидкості.

Геометрична нелінійність моделюється із застосуванням методу Лагранжа. Передбачається, що всі змінні: координати x_i, переміщення u_i, деформації ε_{ij}, напруження σ_{ij}, швидкості v_i, об'єм V та інші матеріальні змінні відомі в момент часу t. Розв'язується задача для набору лінеаризованих синхронних рівнянь, що мають переміщення як вхідні данні для отримання розв'язку в момент часу $t + \Delta t$. Ці синхронні рівняння отримано з виразу для елементів за принципом віртуальної роботи [179]

$$\int\limits_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int\limits_V f_i^B \delta u_i dV + \int\limits_S f_i^S \delta u_i dS , \tag{1.10}$$

де σ_{ij} – компоненти тензору напружень Коші;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – тензор деформацій;

u_i – переміщення;

x_i – поточна координата;

f_i^B – компоненти об'ємних сил;

f_i^S – компоненти поверхневих сил;

V – об'єм деформованого тіла;

S – поверхня деформованого тіла, на яку діє навантаження.

При диференціюванні рівняння зберігаються тільки лінійні члени, а всі члени вищого порядку ігноруються.

Визначальні фізичні співвідношення використовуються для створення взаємозв'язку між приростом напружень і приростом деформацій. Але напруження Коші залежать також і від повороту твердого тіла, вони не є інваріантом. Тому для урахування в визначальних фізичних співвідношеннях швидкості Яумана напружень Коші застосовується підхід, запропонований Макмікінгом і Райсом [179]:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{J} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\dot{\omega}_{jk} - \sigma_{jk}\dot{\omega}_{ik}, \tag{1.11}$$

де $\dot{\sigma}_{ij}^{J}$ – швидкість Яумана напружень Коші;

$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right)$ –тензор повороту;

$\dot{\sigma}_{ij}$ – похідна напружень Коші за часом

Тому швидкість напружень Коші має вигляд

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{J} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{jk} + \sigma_{jk}\dot{\omega}_{ik}. \tag{1.12}$$

Використовуючи основні фізичні співвідношення, зміна напружень через деформації може бути подана як:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{J} = c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{1.13}$$

де c_{ijkl} – тензор матеріальних констант;

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$ – тензор швидкості деформації;

v_i – швидкість.

Переміщення знаходяться з рівняння [179]:

$$D\delta W = \int_V \delta\varepsilon_{ij} c_{ijkl} D\varepsilon_{kl} dV + \int_V \sigma_{ij}\left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\frac{\partial D u_k}{\partial x_j} - 2\delta\varepsilon_{ik} D\varepsilon_{kj}\right)dV\,. \tag{1.14}$$

Рівняння (1.14) є набором лінійних рівнянь з додатками Du_i або змінними переміщеннями, які можна розв'язати за допомогою стандартних лінійних розв'язків Макмекін і Райс [179]. Жорсткість має два визначення. По-перше, це матеріальна жорсткість, що обумовлена напруженнями. По-друге це жорсткість, що обумовлена геометричною нелінійністю – жорсткістю напружень.

Важливою вимогою при розв‘язання задач механіки деформівного твердого тіла при високошвидкісному навантаженні у програмному комплексі ANSYS є вибір типу скінченного елементу, що забезпечує реалізацію математичної моделі пластичної течії матеріалу та його руйнування. Граничні умови в вузлах елементів повинні задовольняти рівності, як переміщень, так і похідних. Функції форм при цьому дозволяють описувати безперервну і гладку зміну напружень. При великих швидкостях деформацій у розрахунковому модулі ANSYS/Explicit Dynamics використовується гексаедральний 8-вузловий елемент, який забезпечує рівність у вузлах не тільки переміщень, а й швидкостей і прискорень [180]. Він підтримує можливість розрахунку НДС з урахуванням початкових пластичних деформацій. У цьому випадку миттєве навантаження є таким, що інваріант тензору початкових деформацій перебільшує межу плинності. Деформації у скінченному елементі складаються з пружної та пластичної складових $\{\varepsilon\} = \{e\} + \{\varepsilon^p\}$. Для визначення значень компонентів вектору початкових пластичних деформацій застосовується метод, який був запропонований Дж. Аргірісом та Р. Галлагером, та узагальнений О. Зенкевичем [172, 180].

При розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла при високошвидкісному навантаженні методи скінченних елементів та скінченних різниць доповнюють один одного при дослідженні динамічного напружено-деформованого стану й дозволяють отримувати більш надійні результати в широкому діапазоні змінних параметрів.

1.3 Огляд досліджень хвильових процесів оболонкових конструкцій в надзвуковому газовому потоці

Корпусні елементи космічної техніки, зокрема обтічники ракет, під час польоту піддаються різного роду динамічним впливам, до числа яких відноситься і вплив зустрічного надзвукового газового потоку. Цей вплив зумовлює хвильові процеси в корпусних тонкостінних елементах ракет, які можуть спричинювати поломки корисного вантажу та систем ракетоносія. Найбільш поширеним динамічним явищем при цьому є вимушені коливання та автоколивання, що можуть мати нестійкі режими. В роботах [181, 182] подано результати дослідження флаттера конструкцій. Дослідження проводяться числовими методами.

Проблемою прогнозування динамічної нестійкості ракетно-космічної техніки є побудова та дослідження адекватних моделей взаємодії газового середовища та механічної системи, а також створення адекватних методів розрахункового аналізу реальних об'єктів, що зазвичай мають конструктивні особливості, наприклад, посилення тонкостінних елементів. Обтічник ракети являє собою тонку оболонку, яка захищає корисний вантаж під час виведення на орбіту. Для широкого класу ракет та ракет-носіїв обтічник можна моделювати тонкою оболонкою обертання. В монографіях Я.М. Григоренка й А. П. Мукоєда [183] та Е. І. Григолюка [184] показано, що можна застосовувати метод Релея- Рітца дослідження коливань тонких оболонок. А для отримання рівнянь руху оболонок доцільно застосування методу заданих форм, який використовує потенційну та кінетичну енергію конструкцій.

В роботах Л. В. Курпи з співавторами [185] запропоновано метод дослідження динамічної нестійкості пластин складної форми, для математичної моделі застосовані класична теорія та теорія деформації зсуву першого порядку. Для розв‘язання багатьох задач, пов’язаних з визначенням динамічної нестійкості конструкцій, надзвукова газова течія моделюється із застосуванням поршневої теорії. В роботі [186] наведено дослідження флаттера конічної оболонки із застосуванням поршневої теорії, що дає простий вираз тиску при числах Маха $M > 1$.

У роботі [187] Х. Крумхар запропонував застосовувати поліпшену поршневу теорію для опису тиску в надзвуковому потоці газу:

$$p = -\xi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \xi_2 \frac{\partial w}{\partial t} - \xi_3 w \right),$$

$$\xi_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta}, \quad \xi_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2r\beta}, \tag{1.15}$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad r = R_0 tg(\theta),$$

де V_f – швидкість потоку газу; M – число Маха; r – змінний радіус перетину оболонки.

Доданок $\xi_3 w$ в співвідношенні (1.15) називають поправкою Крумхара. Поправка Крумхара залежить від поздовжньої координати оболонки θ.

1.3.1 Оболонкові конструкції у формі параболоїдів обертання. Параболічні оболонки широко застосовуються в ракетно-космічній техніці. Зокрема, обтічники цілого класу ракет-носіїв є тонкою конструкцію, яка добре описується параболічною оболонкою. У науковій літературі існує велика кількість теоретичних досліджень оболонок обертання [188]. Огляд ранніх публікацій, присвячених коливанням параболічних оболонок, опублікований в книзі [189]. В оглядовій статті В. Д. Кубенка і П. С. Ковальчука [190] розглядаються вільні, вимушені та параметричні коливання оболонок. У роботах [191, 192] подані загальні підходи та методи дослідження оболонок обертання. У монографії [193] розглянуто питання визначення потенційної енергії оболонок. У монографії Н. В. Валішвілі [194] викладено методи й методики числового аналізу пологих оболонок обертання та сферичних куполів, наведено алгоритми розрахунків стійкості зазначених конструкцій.

При наявності великої кількості теоретичних досліджень, що присвячені оболонкам обертання, числові дослідження параболоїдів практично відсутні в літературі. У статті [195] розглянуто динаміку обертання навколо осі симетрії параболічної оболонки. У роботі поданий аналіз стійкості при різних кутових швидкостях обертання, досліджено області динамічної нестійкості. У статті [196] показано відмінності прояву крайових ефектів в дотичних параболічних оболонках від еліптичних. Для дослідження лінійних коливань циліндричної оболонки застосовується метод Релея - Рітца в роботі [197]. Вільні коливання параболічних оболонок обертання аналізуються в статті [198]. Для аналізу цих оболонок використовується теорія деформації зсуву першого порядку. Дискретизація системи за допомогою методу диференціальних квадратур приводить до проблеми власних значень. Ґрунтуючись на теорії деформації зсуву першого порядку, в статтях [199, 200] основна увага приділяється динамічній поведінці помірно товстих параболічних панелей і оболонок обертання. Для дискретизації системи рівнянь використано узагальнений метод диференціальних квадратур. Основні рівняння руху виражаються в термінах п'яти узагальнених компонент зсуву точок, що лежать на середній поверхні параболічної оболонки.

1.3.2 Оболонкові конструкції конічної форми з підкріпленням. Експериментальні дослідження свідчать, про те що на трансзвукових і надзвукових швидкостях польоту ракети спостерігаються інтенсивні аеропружні коливання. Практичний інтерес до аналізу динамічної поведінки обтічників ракет у формі конуса в надзвуковому газовому потоці спричинив цілий ряд досліджень власних і вимушених коливань конічних оболонок з підкріпленнями. Розглянемо публікації, присвячені динаміці конічних оболонок. У статті [201] для дослідження динаміки конічної оболонки застосовується метод Релея-Рітца. Композитні, пологі, консольні конічні оболонки розглядаються в роботі [202]. Використовуються принцип Гамільтона з методом Релея-Рітца для виведення рівнянь вимушених коливань конічної оболонки. У статті [203] аналізуються вільні коливання замкнутих конічних оболонок. Коливання оболонок розкладаються в ряди Фур'є по окружній координаті, а по поздовжній координаті проводиться дискретизація за допомогою методу скінченних елементів. Теорія підкріплених оболонок докладно розглядається в роботі [204]. В [205] застосовується метод скінченних елементів для розрахунку підкріплених оболонок. Метод матриці переносу використовується для аналізу динаміки конічної оболонки в роботі [205]. Показано, що перша власна частота має власну моду з шістьма хвилями в окружному напрямку. Вільні лінійні коливання конічної панелі аналізуються методом Релея-Рітца в публікаціях [206 - 208].

Ряд робот присвячено результатам аналізу аеропружних коливань оболонок обертання. Застосування поршневий теорії до аналізу аеропружних коливань оболонок обертання розглянуто в роботі [209]. Дослідження аеропружних коливань конічних оболонок з використанням поршневий теорії наведені в роботах [210-211]. Огляд результатів, присвячених скінченноелементним дослідженням аеропружних коливань конструкцій, поданий в роботі [212]. А коливання тонких оболонок з урахуванням геометричної нелінійності подані в монографії [213].

На основі класичної теорії оболонок з геометричною нелінійністю і техніки «розмазаних» ребер жорсткості в [214] виведені визначальні рівняння руху посилених циліндричних панелей. Конічні оболонки з армуванням в поздовжньому і окружному напрямках досліджували Рао та Редді [215].

Вільні коливання кільцевих циліндричних оболонок аналізуються методом Релея-Рітца в роботі [216]. М. Руззене в роботі [217] як засіб підвищення стійкості розглянутої оболонки пропонує періодично розміщувати периферійні ребра жорсткості. А складена циліндрична оболонка, що армована стрингерами і кільцями, в надзвуковому потоці газу розглянута в статті [218]. Дивергенція оболонки аналізується на основі моделі лінійної структури. В роботі Ю.В. Скосаренка [219] викладено методику розв'язання задачі про власні коливання циліндричних оболонок з ребрами, що взаємодіють з вісесиметричною пружною основою. Пружна основа розглядається за моделями Вінклера та Пастернака. Досліджено числовими методами вплив жорсткості пружної основи та її положення по довжині оболонки на частоти власних коливань.

1.4 Дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій ракетної техніки

Основною тенденцією сучасного ракетобудування є здешевлення готової продукції зі збереженням її надійності. Одним із засобів досягнення цієї мети є заміна серії експериментальних досліджень комп'ютерним моделюванням. Особливо актуальний числовий експеримент при аналізі руйнування конструкцій ракетно-космічної техніки, коли для кожного натурного експерименту потрібен новий дослідний зразок. Такі задачі виникають на етапі розробки проектної документації як для окремих елементів, так і для складних збірних вузлів ракетної техніки.

1.4.1 Дослідження напружено-деформованого стану корпусів твердопаливних двигунів ракет при експлуатаційних навантаженнях. Останнім часом все більше металевих елементів ракетно-космічної техніки заміняють на конструкції з композитних матеріалів. В Україні на ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» зараз виготовляється ряд композитних корпусів двигунів. При проведенні проектних робіт досліджується динамічний напружений та граничний стан виробів для заданих навантажень внутрішнім тиском. Експериментально визначаються усереднені граничні напруження для композитних зразків матеріалу з різним напрямком намотки волокон. На рис.1.1 подана поверхня руйнування композитного зразка з напрямком намотки волокон вздовж зразка, а на рис.1.2 – поперек зразка. Вони істотно відрізняються.

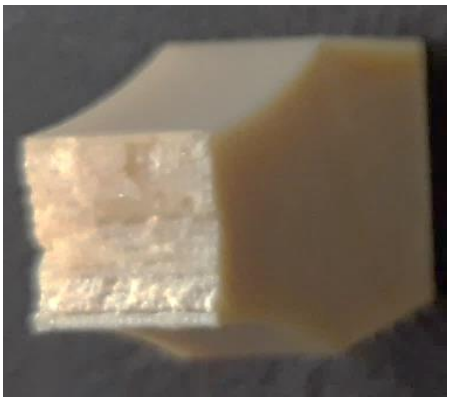


Рис. 1.1. Поверхня руйнування композитного зразка
з напрямком намотки волокон вздовж зразка

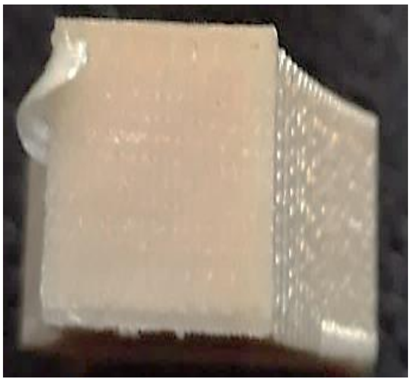


Рис. 1.2. Поверхня руйнування композитного зразка
з напрямком намотки волокон поперек зразка

Оскільки багаточисельні експериментальні дослідження суттєво збільшують собівартість готового виробу, доцільно проводити попередні числові дослідження динамічної міцності конструкції на основі використання визначених усереднених граничних напружень для композитних зразків матеріалу.

Геометрична модель корпусу твердопаливного двигуна є оболонкою обертання. Багато публікацій присвячено анізотропним оболонкам, на які діють нестаціонарні навантаження.

Аналізу частотних характеристик ортотропних тонких конструкцій присвячені роботи Я. М. Григоренка із співавторами [220, 221], О. О. Рассказова та інших [222] та інші.

У роботах [323 - 225] П. З. Лугового із співавторами розглянуті питання аналізу динамічної поведінки оболонкових конструкцій при імпульсних навантаженнях. У рамках теорії типу С. П. Тимошенка в роботі [223] подана методика числового дослідження нестаціонарного деформування та міцності багатошарових оболонок обертання при імпульсному навантаженні. Показано особливості динамічної поведінки багатошарових оболонок при осесиметричному імпульсному навантаженні. А в статті П. З. Лугового, В. Н. Сіренка, Ю. В. Скосаренка та Т. Я. Батутіної [226] подана методика дослідження динаміки підкріпленої циліндричної оболонки, що перебуває під дією локальних короткочасних навантажень. Поздовжні підкріплюючі елементи враховуються за конструктивно-ортотропною схемою, а кільцеві ребра – за дискретною схемою. Використано метод розкладу розв'язку за формами власних коливань.

Дослідження поведінки композитних оболонок при імпульсному навантаженні проведено у монографії Н. В. Сметанкіної [227]. Застосовано уточнену теорію, що враховує поперечні деформації. Наведено результати розрахунків для ортотропних пластин із різними умовами закріплення.

Розглянемо публікації, присвячені аналізу напружено-деформованого стану корпусів твердопаливних двигунів, що виникає в процесі експлуатації.

У статті [228] подані результати експериментальних досліджень динаміки циліндра із композитного матеріалу для стартового двигуна космічної системи «Спейс Шаттл». В роботі експериментально визначалися критичні навантаження. При цьому показано, що критичні параметри тонкостінних композитних оболонок обираються з різних критеріїв. Наприклад, напруження тонкостінних оболонок відповідають критеріям міцності.

В роботі [229] наголошується, що одним із складних та важливих завдань для конструктора, що працює з твердопаливними ракетними двигунами, є визначення граничних навантажень, при яких двигун може працювати без руйнування.

У публікації [230] підкреслюється, що вібрації твердопаливного двигуна грають визначальну роль в нестаціонарних процесах горіння зерен ракетного палива. А у [231] зазначено, що внутрішній тиск, який виникає внаслідок роботи твердопаливного двигуна, може спричиняти значні напруження у корпусі. Ці напруження можуть привести до руйнування конструкції.

Процеси, що виникають в твердопаливному двигуні зі зняттям внутрішнього тиску, подані у роботі [232]. Досліджується вплив температури на напружено-деформований стан двигуна, деформації визначаються числовими методами з використанням програмного забезпечення для скінченно-елементного аналізу NASTRAN. Аналізу термонапруженого стану твердопаливних ракетних двигунів присвячені і роботи [233, 234], в них зміни температури моделюються як вузькосмугові випадкові процеси.

Проблеми міцності твердопаливних двигунів розглянуті в монографіях [235 – 237].

В статті [238] автор твердопаливний ракетний двигун аналізує як довгий пружний циліндр. Щоб змоделювати динамічний відгук Chyuan S. W. використовує перехідну модель скінченних елементів.

Результати досліджень, приведених в роботі [239], показують, що динамічний ефект важливий для структурної цілісності зерен твердого палива. Кілька конфігурацій твердопаливного двигуна проаналізовані для оцінки структурної цілісності при різних умовах навантаження. Скінченно-елементна модель була створена для моделювання амплітуд напружень Мізеса в роботі

[240]. Залежність механічних властивостей модифікованого двухосновного палива від швидкості деформації досліджена в статті [241]. Про тривимірне моделювання екструзійного формування твердого ракетного палива з двома основами повідомляється в роботі [242]. Метод вимірювання парної реакції композитного палива запропонований в статті [243]. Для перевірки методу було проведено числові дослідження динаміки рідини. Числовий підхід для моделювання задач взаємодії між рідиною та твердим тілом в перехідному процесі запалювання було запропоновано авторами роботи [244].

Ряд публікацій присвячено аналізу динаміки композитних оболонок і пластин. В роботі [245] розглянута динаміка композитних пластин під впливом вибухового навантаження. Композитний матеріал моделюється як ортотропний. Як випливає з роботи [246], для аналізу динаміки композитної оболонки необхідно враховувати зсув. Теорія деформації зсуву вищого порядку ламінованої оболонки розроблена Редді І.Н. та Ліу С.Ф. в роботі [247]. Соедел В. в роботі [248] наводить точні розв'язки типу Нав'є для лінійних коливань циліндричних оболонок, а нелінійна теорія оболонки Доннелла використовується для опису напружено-деформованого стану ортотропної циліндричної оболонки.

Теорія деформацій зсуву вищих порядків для аналізу шаруватих анізотропних оболонок обертання запропонована в роботі [249]. Аналітичні рішення для класичних теорій першого і третього порядку розроблені для дослідження стійкості прямокутних композитних конструкцій до вигину та вільних коливань при різних граничних умовах в роботі [250]. Узагальнений розв‘язок для дворазово зігнутої багатошарової композитної оболонки отримано з використанням восьміузлових вигнутих квадратичних ізопараметричних скінченних елементів в роботі [251].

Стаціонарні та перехідні процеси композитних оболонок обертання аналізуються в статті [252]. Детальний огляд композитних оболонок поданий М. Н. Тоорані та А. А. Лакісом в роботі [253].

В монографії [98] розглядається динаміка оболонки, складеної з циліндричної середини та полусферичних днищ, з ізотропного матеріалу. Параметри напружено-деформованого стану визначаються з рівнянь лінійної теорії Тимошенка. Багато публікацій присвячені аналізу динаміки композитних складених оболонок, зокрема комбінованої оболонки, що складається з двох одинарних оболонок: циліндричної та сферичної [254–265]. Однак не так багато вчених, що займалися аналізом динаміки комбінованої оболонки з трьох одинарних оболонок, особливо для сферично-циліндрично-сферичної оболонки, [266 – 267]. В роботі [267] запропоновано уніфіковані формули для аналізу поведінки вільних коливань сферично-циліндрично-сферичної оболонки з довільними граничними умовами. Значна увага приділяється питанню з‘єднання окремих частин в єдину оболонкову конструкцію.

1.4.2 Методи числового моделювання в задачах деформування та прогнозованого руйнування елементів конструкцій. Створення багатофункціонального оперативно-тактичного ракетного комплексу «Грім-2» в даний час є важливим проектом Державного космічного агентства України спільно з провідними підприємствами галузі [168]. Зменшення експериментальних досліджень на стадії розробки проектної документації конструкції та заміна їх віртуальними випробуваннями на основі комп’ютерного моделювання дозволяє значно знизити собівартість готової продукції.

Ряд питань, пов’язаних з дослідженнями, що направлені на забезпечення міцністної надійності та вибору оптимальних параметрів силових елементів конструкцій ракетно-космічної техніки, розглянуто в роботах А. П. Дзюби [269-270]. А в статті В. С. Гудрамовича та А. П. Дзюби [271] узагальнені методи розв’язання різних задач контактної взаємодії елементів оболонкових конструкцій між собою та штампами різного типу. Розглянуті схеми визначення руйнуючих навантажень.

Тематика динамічного руйнування бойових частин спеціальних конструкцій і аналіз напружено-динамічного й граничного станів пристроїв захисту цікавить науковців всього світу, тому було докладено багато зусиль для вивчення цієї проблеми.

В роботі [272] подано розроблену комп'ютерну модель для числового моделювання параметрів фрагментації вибухово-рухомої оболонки. Боєголовка, яка розглядається в публікації [273], складається з композитного корпусу і вибухової речовини, що може значно зменшити пошкодження об'єктів поза діапазоном зони активного ураження. А для того, щоб оцінити вплив пошкодження при вибухових роботах, експериментально проаналізовано три типи зарядів. У роботі [274] подана конструкція захисної перегородки у вигляді багатошарової композитної структури, що складається з лицьової плити, фронтального аерогелієвого слою з повсті, антисенсорного шару та пластини, що протидіє проникненню. Боєголовка з напівсферичним «носом» виготовлена для імітації бойової частини протикорабельних ракет. Експериментально проаналізовано захисну здатність багатошарової композиційної структури. Застосування спечених металевих матеріалів для снарядів з боєголовкою, що вибухає, розглядається в роботі [275]. Подано результати аналізу проникнення й руйнування захисної конструкції, що ґрунтуються на моделюванні з різними параметрами запуску і фази впливу. Випробування призвели до чітких залежностей залишкової швидкості як функції швидкості удару та властивостей попереднього шару (тип матеріалу й товщина). Аналіз даних показав, що існують протидіючі ефект, які впливають на механізм руйнування сталі, і ці ефекти пов’язані з особливостями геометрії захисної конструкції.

Запропоновано нову формулу для прогнозування початкової швидкості фрагменту бойової частини з порожнистою серцевиною в роботі [276]. Експериментально проаналізовано просторову дисперсію генераторної боєголовки фрагмента у публікації [277]. У статті наведено пояснення феномена дисперсії фрагментів за допомогою одновимірної теорії шоку. Експериментальні результати роботи [278] показують, що процес прискорення бойової частини можна розділити на дві окремі фази: початкове прискорення під ударно-хвильовим навантаженням і подальше прискорення під навантаженням продуктами детонації. У роботі [279] подано розроблену модель для прогнозування руйнування від близько розташованих барабанних стрижнів. Це моделювання передбачає синергетичні ефекти від будь-якого побічного збитку від суббоєприпасів і корисних навантажень на бомбардувальні засоби. Запропоновано систему снарядів для підвищення ефективності та ефективності збитків, завданих системою протитанкового озброєння, шляхом створення балістичного снаряда, який може розщеплюватися на кілька боєголовок і одночасно залучати ціль [280].

В роботі [281] для моделювання процесом керування у польоті розроблено тривимірний інтегрований закон керування та контролю з обмеженням кута впливу для того, щоб не перевернути ракету на наземну нерухому мішень при наявності насиченого вхідного сигналу та відмови приводу. Числове моделювання впроваджено для демонстрації ефективності та надійності інтегрованого закону про керівництво та контроль. Методологія оцінки зони вразливості від спрацювання боєзаряду розглядається в статті [282], Комп’ютерна модель складається з розрахунку дисперсії фрагментів, визначення місць потрапляння, розрахунків проникнення та ймовірності розрахунків ураження, що використовує дерево відмов, встановлене для конкретного досліджуваного об’єкта ураження. На основі розробленої методології проводиться оцінка вразливості та аналізу живучості літака.

У роботі [283] було досліджено реакцію похованих сховищ на вибухові навантаження через звичайну детонацію зброї методом скінченних елементів. Проводиться аналіз динамічної міцності конструкції, попередньо навантаженої статичним тиском. Числові розрахунки здійснювалися з використанням програмного забезпечення для аналізу скінченних елементів і систем автоматизованого проектування ABAQUS. Достовірність прийнятих параметрів моделі скінченних елементів була встановлена порівняннями з існуючими емпіричними формулами. Стаття [284] присвячена моделюванню проникнення сталевого затиску в алюмінієвий лист. Розрахунки проводилися з використанням багатоцільової програми скінченно-елементного аналізу LS-DYNA. У роботі [285] проведено експериментальне та числове дослідження впливу двохосьового швидкісного навантаження на пакет ламінованих композитних пластин. Розроблено методику числового аналізу за методом скінченних елементів з використанням критеріїв відмови Хашина для композитного матеріалу. У роботі [286] для моделювання крихкого руйнування матеріалу розглядається скінченно-елементне числове розв'язання задачі.

У роботі [287] досліджується вплив високої швидкості деформації на матеріал, що розшаровується. Розглядається підхід, який ґрунтується на дворівневому дослідженні: глобальному та локальному, у поєднанні з числовими методами явної динаміки. Підхід проілюстрований у випадку моделювання розшарування матеріалу при різних масштабах довжини від мікроструктури до макрозразку, використовувалася багатомасштабна концепція. Числова реалізація методу здійснюється в програмному комплексі Abaqus/Explicit з використанням його можливостей спільного моделювання характеристик для об'єднання двох окремих аналізів. У статті [288] подано зворотний метод прогнозування еталонної геометрії пластично деформованого тіла. Еталонна конфігурація знайдена шляхом розв'язання пружно-пластичної крайової задачі. В оберненому аналізі використовуються рівняння стану пружно-пластичного типу.

У статті [289] запропоновано метод моделювання акустичних хвиль, що виникають в результаті дії імпульсного навантаження. Показано, що при досить гладкої формі імпульсу метод інтегрування за часом може бути як явним, так і неявним. Для точного моделювання напружень у зоні, що близька до вершини тріщини, застосовано числову методику для задач розповсюдження хвиль. Числова реалізація включає лінійні скінченні елементи зі зменшеною дисперсією, а також двоступеневий часовий інтеграційний підхід. Ефективні аналітично-числові методи дослідження механічних процесів, що виникають на перехідних режимах, при нестаціонарному електро-механічному навантаженні з урахуванням їх взаємодії з акустичним середовищем запропоновано в роботах І. В. Янчевського [290-291].

У роботі [292] розглядається оптимізація форми за допомогою пружної контактної задачі. Здійснюється зміна форми контактної поверхні таким чином, що розподіл сили між контактними поверхнями пружних тіл є рівномірним. В монографії [293] показано, що результати числових досліджень руйнування конструкцій за методами скінченних елементів, програмне забезпечення яких реалізовано у програмних комплексах, зокрема ANSYS, у порівнянні з експериментальними даними дають відносну похибку розрахунків в межах 4,5%. Для ряду нелінійних задач пружно-пластичної механіки руйнування, що умовно-сходяться, така точність розв’язку є задовільною.

1.5 Висновки за розділом 1 та постановка задач досліджень

Підсумовуючи, можна відзначити, що експериментальні дослідження властивостей більшості металевих матеріалів під час високошвидкісного деформування показали залежність напружень не тільки від деформацій, але й від швидкості деформацій і температури. При цьому зростання швидкості деформацій спричинює зміцнення матеріалу, а підвищення температури викликає його знеміцнення, що відбувається одночасно.

В залежності від інтенсивності навантаження процес деформування може відбуватися як в пружній так і в пластичній стадії. Пластичні деформації виникають в локальних максимально навантажених зонах та спричинюють руйнування матеріалу. При цьому в конструкційному елементі процес деформування одночасно може протікати як в пружній, так і в пластичній стадії, а руйнування матеріалу внаслідок пластичного плину носить локальний характер.

Складність процесів викокошвидкісного деформування вимагає застосування тривимірних динамічних математичних моделей для визначення напружено-деформованого стану в конструкціях та їх окремих елементах. У зв'язку з локальним характером розповсюдження зон виникнення пластичних деформацій тривимірні моделі необхідно застосовувати і для оболонкових конструкцій. Винятком є деформування осьосиметричних оболонок обертання під впливом внутрішнього ударно-хвильового навантаження або зовнішнього надзвукового газового потоку. В процесі високошвидкісного деформування в елементах конструкцій виникають деформації, які не можна вважати малими, цей факт потребує геометрично нелінійної постановки задачі. А для урахування залежності напружень від деформацій, швидкості деформацій і температури потребує фізично нелінійної постановки задачі. Отже, задача дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій при високошвидкісних навантаженнях є геометрично ї фізично нелінійною.

Аналіз напружено-деформованого та граничного стану за традиційними методиками досліджень проводять, як правило, експериментально або для ідеалізованих об'єктів. Такі підходи мають обмежене застосування до практичних задач. Вони не враховують всіх геометричних особливостей конструкцій та сумарних навантажень. Універсальних методів для розв'язання задач високошвидкісного деформування не існує. Для кожного конкретного типу імпульсного навантаження виникає потреба обґрунтування моделі та побудови адекватної розрахункової схеми. Аналіз динамічного напружено-деформованого стану багатьох сучасних конструкцій енергетичних машин та ракетно-космічної техніки під дією високошвидкісних навантажень різної фізичної природи дозволяє визначати зони небезпечної локалізації напружень та пластичного плину матеріалу та знаходити шляхи підвищення динамічної міцності конструкцій.

Таким чином, актуальною є проблема розробки ефективних аналітично-числових методів дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження різної фізичної природи і надзвукової газової течії та застосування цих методів до розв’язання сучасних прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Впровадження цих методів в практику виробництва на промислових підприємствах і в конструкторських бюро дозволяє замінити коштовні експериментальні дослідження віртуальними випробуваннями на основі числового моделювання для вирішення завдань проектування.

Виходячи з вищевикладеного, сформульовані й розв’язані такі задачі:

– розробити й обґрунтувати загальні принципи моделювання термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування елементів конструкцій, які враховують зміну механічних властивостей конструкційних матеріалів під час деформування, що спричинена високошвидкісним механічним навантаженням;

–розробити узагальнену модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні, що описує як термопружне деформування, так і швидкісне пластичне деформування;

– побудувати рівняння стану для полікристалічних матеріалів, яке поєднує еквівалентні напруження з еквівалентними деформаціями, швидкістю деформацій і температурою, та ґрунтується на модифікації найбільш відомих моделей задля можливості застосування бази визначених емпіричних констант динамічних властивостей матеріалів;

– розробити для запропонованої моделі загальну схему числового аналізу напружено-деформованого і граничного стану конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження;

– застосувати розроблену математичну модель із запропонованим рівнянням стану до розв‘язання таких задач:

• дослідити динамічний напружено-деформований стан оболонкових елементів корпусів газотурбінних двигунів внаслідок локального навантаження обірваною частиною лопатки; дослідити локальний динамічний напружено-деформований стан лопаток газотурбінних двигунів внаслідок навантаження сторонніми предметами;

• дослідити динамічні напруження, що виникають при впливі ударної хвилі на типові елементи промислових будівельних споруд у формі плит з оребренням та на плоскі елементи оснастки;

• дослідити високошвидкісне деформування та розділення навпіл елемента обтічника ракети у формі усіченої конічної оболонки внаслідок спрацювання кумулятивного заряду;

• дослідити високошвидкісне деформування та руйнування елементів кріплення головної частини ракетної конструкції;

– дослідити нестаціонарне деформування композитного корпусу твердопаливного двигуна з ортотропними чи функціонально-градуйованими характеристиками в робочих режимах навантаження при старті ракети;

– розробити аналітично-числовий метод аналізу динамічної нестійкості обтічників ракет у формі параболоїдів обертання та підкріплених шпангоутами конусів в надзвуковому газовому потоці;

– дослідити достовірність результатів числових досліджень, отриманих за розробленими моделями високошвидкісного деформування елементів конструкцій, шляхом їх порівняння з результатами експериментів, апробованими відомими результатами або результатами числових досліджень за іншими моделями.

РОЗДІЛ 2
ТЕРМО-ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ВИСОКОШВИДКІСНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Літературний огляд робіт за результатами експериментальних досліджень високошвидкісного деформування матеріалів, поданий у першому розділі, показав, що для процесів, які характеризуються швидкістю деформації в діапазоні від 10^3 $с^{-1}$ до 10^6 $с^{-1}$ спостерігається:

– висока швидкість деформівного процесу, яка спричинена швидкою зміною навантаження у часі;

– нестаціонарний напружено-деформований стан, який швидко змінюється за часом;

– зміна фізико-механічних властивостей матеріалу під час деформування;

– поява локалізованих зон з високою концентрацією напруження, що виникають у матеріалі конструкції за мілі- або навіть мікро-секунди та спричинюють локальне руйнування матеріалу.

Визначені особливості не можуть бути описані в рамках теорій пружних або малих пластичних деформацій. Для розв‘язання таких задач потрібно враховувати динамічні властивості матеріалів.

Найважливішою проблемою математичного моделювання зазначеного класу задач є урахування всіх фізичних факторів, що впливають на процес деформування. В цьому розділі розглядаються навантаження, які носять імпульсний характер. Досліджується вплив однократних імпульсів, оскільки при повторному навантаженні необхідно враховувати зміну властивостей матеріалу внаслідок попереднього імпульсного навантаження.

У розділі проводиться обґрунтування необхідності урахування температури та швидкості деформації при моделюванні високошвидкісного деформування елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів. Запропоновано тривимірну модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій під впливом імпульсного навантаження. Вона об‘єднує існуючі відокремлені моделі задля комплексного урахування впливу температури та швидкості деформації при пружно-пластичному деформуванні.

В даному розділі приведено формулювання крайової задачі просторового термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування твердого тіла. Для кожного моменту часу компоненти вектору переміщень визначаються з тривимірних рівнянь руху термопружності. При пластичному деформуванні проводиться заміна коефіцієнтів Ламе, вони визначаються з урахуванням зміни модулю зміцнення та адіабатичного розігріву під час пластичної течії матеріалу. Компоненти тензору деформацій визначаються за компонентами вектору переміщень. Передбачається, що еквівалентні деформації, отримані з компонент тензору деформацій, є повними та містять вклад від пружних і пластичних деформацій. При цьому пружна частина повної деформації утворюється з деформацій, що виникають внаслідок механічного й температурного навантажень. Для визначення компонент тензору динамічних напружень за компонентами тензору деформацій запропоновано нове узагальнене рівняння стану, яке пов‘язує еквівалентні напруження з еквівалентними деформаціями, швидкістю деформацій та температурою.

У розділі подано структурну схему числового розв‘язання сформульованої задачі визначення напружено-деформованого стану конструкцій та їх елементів під впливом імпульсного навантаження.

Проведено аналіз достовірності результатів розрахунків за узагальненою моделлю для тестового прикладу шляхом їх порівняння з даними експериментальних досліджень та результатами числових досліджень за методом скінченних елементів за моделлю Купера-Саймондса [158] в програмній системі скінченно-елементного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics.

2.1 Особливості високошвидкісного деформування полікристалічних матеріалів

Створення сучасних інженерних конструкцій, що працюють в екстремальних умовах експлуатації, тісно пов'язане з розробкою теоретичних основ і методів удосконалення розрахункових моделей, які відповідають вимогам надійності та економічності об'єктів проектування. Моделювання процесів високошвидкісного деформування конструкцій потребує урахування ряду особливостей, що пов‘язані зі зміною механічних характеристик конструкційних матеріалів під час деформування. Експериментально підтверджено [82, 89, 92], що на напруження під час високошвидкісного деформування впливають не тільки деформації, але й швидкість їх зростання, а також температура, при якій відбувається динамічний процес [113]. Розглянемо цей вплив більш детально.

Експериментальні дослідження багатьох авторів [83, 143, 144, 294, 295] показують наявність локалізації деформації під час ударного навантаження. У випадку інтенсивного ударного впливу на полікристалічні матеріали, якими є метали та їх сплави, спостерігається пластична течія матеріалу в локальних його об‘ємах. Але цей процес суттєво не впливає на напружено-деформований стан всього об‘єму матеріалу. Як приклад, на рис. 2.1 показані типові результати експериментальних досліджень [144] впливу високоінтенсивного ударного навантаження на зразок з високоміцнісної сталі. А на рис. 2.2 окремо збільшена полоса зсуву в матеріалі. На мікрорівні локальні зсуви відбуваються у окремих кристалографічних площинах, що і є причиною підвищеної деформації в локальних об’ємах матеріалу [83, 89, 144, 294]. Також, з точки зору мікрорівня, пластична течія матеріалу є процес неоднорідний. Але цей факт суттєво не впливає на напружено-деформований стан всього об’єму матеріалу, а процес деформування на макрорівні можна вважати однорідним [89].

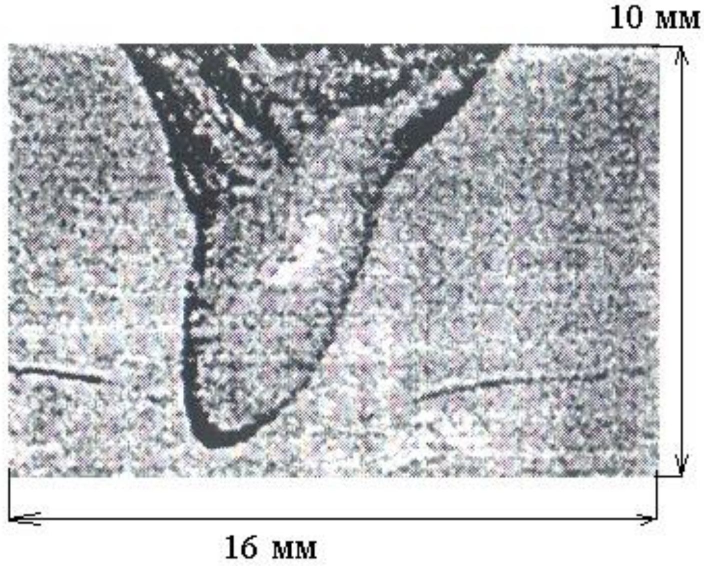


Рис. 2.1. Локалізація пластичних деформацій у високоміцній сталі після ударної взаємодії

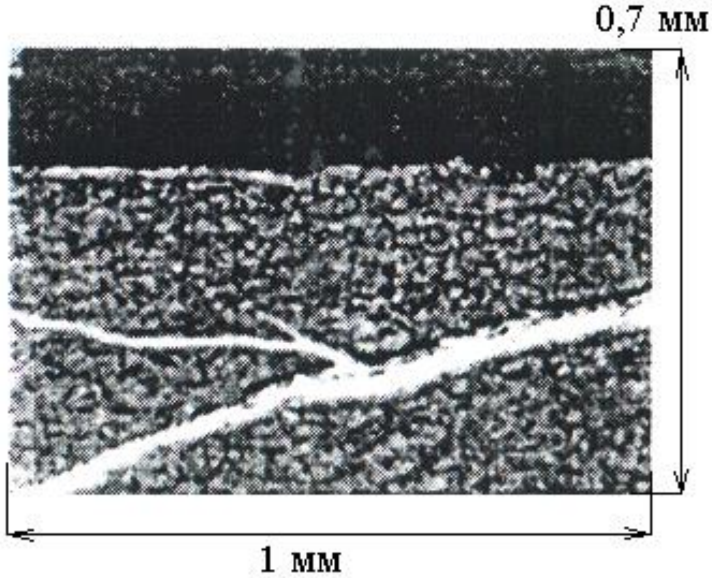


Рис. 2.2. Полоса зсуву після ударної взаємодії

Визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій з металевих матеріалів, що знаходяться під впливом високошвидкісного локалізованого навантаження, повинно ґрунтуватися на фізично нелінійних залежностях компонент тензору напружень від інших параметрів напружено-деформованого стану, щоб враховувати зміну механічних властивостей матеріалів під час деформування, та враховувати температуру, при якій відбувається деформування. Особливо це важливо в разі високошвидкісного навантаження, що спричинює руйнування конструкції. Узагальнена математична модель, що описує напружено-деформований стан конструкції, повинна одночасно поєднувати підмоделі, що відповідають структурно-пов'язаним фізичним полям в матеріалі.

2.2 Моделювання особливостей високошвидкісного деформування елементів конструкцій з пружно-пластичного матеріалу з урахуванням впливу температури

2.2.1 Локалізація пластичних деформацій. Моделювання динамічних процесів високошвидкісного деформування й руйнування елементів конструкцій під впливом імпульсного навантаження потребує урахування нелінійної залежності напружень від деформацій, швидкостей деформацій та температури. Порівняння результатів експериментальних та числових досліджень [86, 114, 296] показує, що використання статичних та квазістатичних методів розв’язання для даного класу задач недопустимо, тому що веде до значних розбіжностей поміж значеннями експериментальних даних і числових розв’язків. Пов’язане це з наявністю незворотної зміни механічних властивостей у матеріалі під час високошвидкісної деформації [91]. Під впливом імпульсного навантаження в конструкційних елементах з’являються ефекти, що пов’язані з фазовими переходами стану металів під час швидкісного деформування [296]. Визначимо особливості напружено-деформованого стану в елементах конструкцій з пружно-пластичного матеріалу, що виникає внаслідок впливу імпульсного навантаження.

В залежності від інтенсивності та локалізації впливу імпульсного механічного навантаження, в конструкційному елементі одночасно можуть виникати такі деформаційні зони: I – зона пружного деформування; II – зона пластичної течії; III – зона локального руйнування (рис. 2.3).

Для високошвидкісних процесів деформування та руйнування елементів конструкцій значення границь поміж зонами не є сталими механічними величинами, вони не дорівнюють значенням границь плинності та міцності, що отримані при статичних випробуваннях матеріалів [297]. Границею між першою та другою зонами деформування є динамічна границя плинності σ_y^d Вона є функцією, що визначається за сталими механічними константами матеріалу конструкційного елементу: статичної границі плинності σ_y^{st}; модуля Юнга $E(T)$, що залежить від температури матеріалу, та змінною у процесі деформування величиною швидкості деформацій $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$.

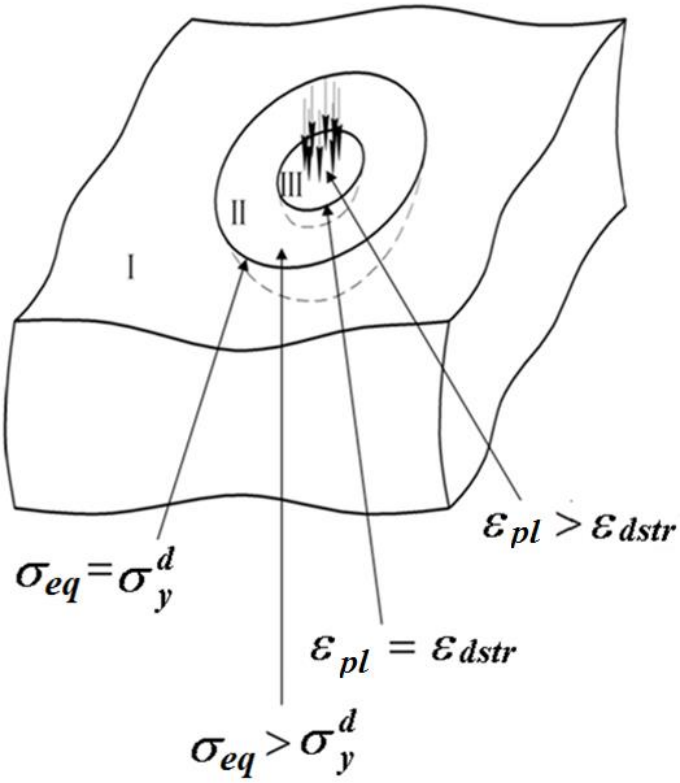


Рис. 2.3. Модель розташування деформаційних зон
в конструкційному елементі

Таким чином, граничне значення максимального пружного напруження зростає разом із ростом швидкості деформування [115, 298]. Границею між другою та третьою зонами обираємо максимальні пластичні деформації ε_{dstr}, оскільки це граничне значення є актуальним як для статичних, так і для динамічних випробувань [86]

2.2.2 Вплив температури на механічні характеристики полікристалічних матеріалів. Отже, для високошвидкісного деформування полікристалічних матеріалів границя плинності зростає внаслідок збільшення швидкості деформації. Але підвищення температури знеміцнює матеріал та зменшує статичну границю плинності [115]. Експериментальні діаграми деформування м‘яких сталей та алюмінієвих сплавів доводять наявність різкого стрибкоподібного переходу з пружної області деформування в пластичну у формі так званого «зуба» плинності. Задля найбільшої наочності на рис. 2.2 показані дані експериментальних досліджень зразків зі сталі 34GS на стиск при температурі 200^0C з урахуванням «зуба» пластичної течії металу. На діаграмі видно, що на початку пластичної течії матеріалу під час утворення полос зсуву (рис. 2.4), що супроводжується локальними адіабатичними температурними процесами на мікрорівні, спостерігається зниження еквівалентних напружень.

Таким чином, для моделювання впливу температури на динамічну міцність конструкцій необхідно враховувати наявність верхньої, нижньої та усередненої границі плинності, або використовувати мультилінійну залежність еквівалентних напружень від еквівалентних (ефективних) пластичних деформацій $\varepsilon_{eq\backslash}$.

Зазначимо, що вплив температури відслідковується двічі: по-перше, фізичні характеристики металу під час пружного деформування залежать від загальної температури протікання процесу, особливо коли температура сягає 200^0C і вище; а по-друге, на процеси в обмеженій області великих пластичних деформацій впливає локальний розігрів, зв’язаний зі швидкісним деформуванням матеріалу, що спричинює утворення адіабатичних смуг зсуву.

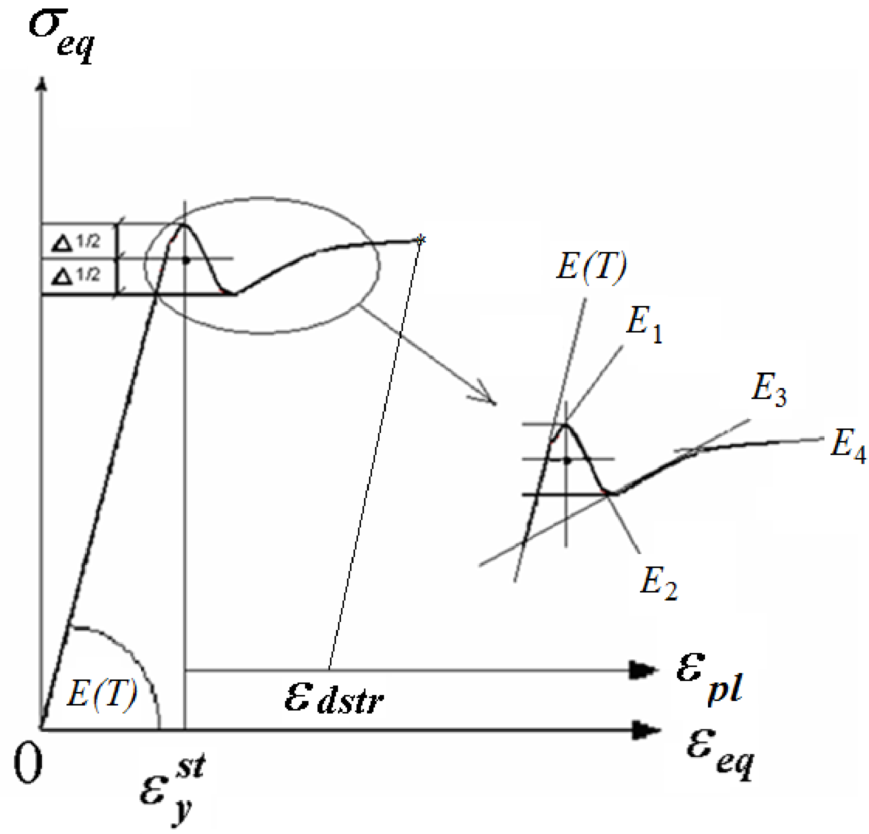


Рис. 2.4. Діаграма деформування сталі 34GS
при температурі 200^{0}С

2.2.3 Вплив швидкості деформації на границю плинності в матеріалі. Окрім зазначених вище факторів, деформування елементів конструкцій при імпульсному навантаженні супроводжується фізичними ефектами, викликаними високою швидкістю деформації від 10^3 с$^{-1}$ до 10^6 с$^{-1}$. Схематичне зображення залежності еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій та їх швидкостей показане на рис. 2.5.

На початку високошвидкісного деформування, коли процес відбувається в пружній стадії, швидкість деформацій стрімко зростає від нуля до свого максимального значення (точка 1 на рис. 2.5). Це зростання спричинює і зростання границі плинності матеріалу. Отже, динамічна границя плинності матеріалу σ_y^d є функцією статичної границі плинності матеріалу для початкової температури $\sigma_y^{st}(T_0)$ та швидкості деформації $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$:

$\sigma_y^d = f(\sigma_y^{st}(T_0), \frac{\partial\varepsilon}{\partial t})$.

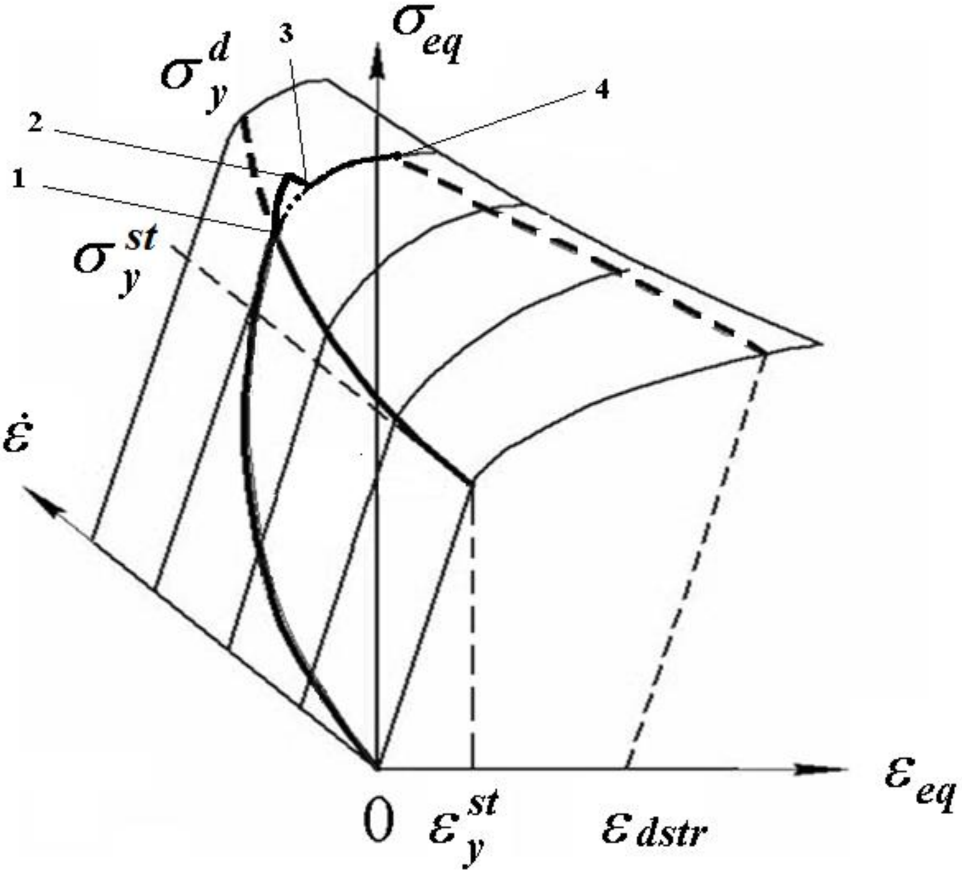


Рис. 2.5. Схематичне зображення залежності еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій та їх швидкостей

Далі зростання швидкості деформації призупиняється [82]. За динамічну границю плинності матеріалу приймаємо значення σ_y^d, що отримано при максимальному значенні швидкості деформації, а максимальну швидкість деформації вважаємо сталою для стадії пластичної течії матеріалу. Інтервали 1÷2 та 2÷3 на рис. 2.5 відповідають наявності «зуба» плинності в матеріалі. В разі його відсутності перехід від малих пластичних деформацій до пластичної течії в матеріалі відбувається рівномірно, як показано крапками на рис. 2.5. А коли пластичні деформації сягнуть свого граничного значення ε_{dstr}, то починається руйнування матеріалу (точка 4 на рис. 2.5).

2.2.4 Загальний вигляд емпіричного рівняння стану полікристалічних матеріалів у випадку високошвидкісного деформування. Таким чином, при побудові єдиної математичної моделі швидкісного деформування елементів конструкцій з пружно-пластичних матеріалів, механічні властивості яких залежать від температури, необхідно враховувати можливість одночасного існування зон пружних, малих пластичних і великих пластичних деформацій, а також одночасний вплив температури та швидкості деформації на фізико-механічні властивості матеріалу.

Математичне моделювання динамічного процесу деформування й руйнування елементів конструкцій базуються на використанні великої кількості експериментальних даних. В роботі використано результати експериментальних досліджень, що проводилися вченими Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України у відділі нестаціонарних механічних процесів, Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України у відділі міцності та руйнування за умов ударного та імпульсного навантаження, наукових установ Північного відділення Російської академії наук та Польської академії наук, а також у Військово-технічній академії Польщі у Варшаві, під час виконання спільних з НАН України науково-дослідницьких проектів та договорів про співпрацю між ученими України та Польщі.

Для побудови адекватної емпіричної залежності, яку можна використовувати як рівняння стану матеріалу, необхідно враховувати нелінійність всіх складових фізичного процесу: нелінійність характеру зміни напружено-деформованого стану по простору й у часі; динамічних властивостей матеріалу й впливу температурних параметрів. Таким чином, рівняння стану є нелінійною динамічною функцією

$$F_k = \left\{ \sigma_{eq}(t), \varepsilon_{eq}(t), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, T \right\}, \tag{2.1}$$

де $\sigma_{eq}(t)$ – еквівалентні напруження в матеріалі;

$\varepsilon_{eq}(t)$ – еквівалентні деформації в матеріалі;

T – поточна температура металу або металевого сплаву;

t – час, відлік якого починається з моменту дії механічного навантаження.

Обрана залежність дозволяє враховувати вплив температурного режиму системи «конструкція - навколишнє середовище» (рис. 2.4), а також вплив зміни швидкості деформацій (рис. 2.5).

Оцінку ступеня впливу швидкості деформації та температури на динамічні властивості матеріалу необхідно проводити в кожному конкретному випадку. Так, аналіз експериментальних даних високошвидкісного деформування зразків з м'яких сталей, алюмінію та їх сплавів [299,300] дозволив зробити висновок про те, що підвищення температури зразка до 200^0С сприяє появі «зуба» або просто виразної точки пластичної течії матеріалу (рис. 2.2). Тобто, для зазначених матеріалів характерна наявність різкої границі плинності, яка проявляється у вигляді «зуба» або площадки пластичної течії. Зазначимо, що математична модель також повинна відображати цей факт.

Також слід зазначити, що у загальному випадку мікроструктура полікристалічних матеріалів у стадії пластичної течії та руйнування неоднорідна, тому що процес руйнування кристалічної решітки є анізотропним. Але при моделюванні на макрорівні ця неоднорідність осереднюється, а пластична течія матеріалу та його руйнування у твердому тілі описуються на підставі загальних закономірностей.

Також звернемо увагу на той факт, що як руйнуючі навантаження розглядаються однократні імпульси, що спричинюють великі пластичні деформації. Великі пластичні деформації, на відміну від пружних та малих пластичних деформацій, в матеріалі призводять до необернених змін, які спричинюють новий структурний стан матеріалу після зупинки дії зовнішнього навантаження.

2.3 Термо-пружно-пластична узагальнена математична модель високошвидкісного деформування елементів конструкцій

Аналіз особливостей високошвидкісного деформування елементів конструкцій дозволив сформулювати основні вимоги до узагальненої термо-пружно-пластичної математичної моделі:

– рівняння руху доцільно формулювати у переміщеннях, оскільки границі зон напружено-деформованого стану (рис. 2.3) змінюються у часі та залежать від величини максимального тиску зовнішнього навантаження;

– математична модель повинна враховувати можливість виникнення термонапружень як під час пружного деформування внаслідок підвищеної температури зовнішнього середовища, так і під час пластичної течії матеріалу внаслідок локального розігріву у полосах зсуву (рис. 2.2). Зауважемо, що для визначеного класу задач швидкість протікання процесів пластичного деформування, як мінімум, на порядок вища за швидкість процесів перенесенням теплоти та власного теплового випромінювання тіла [77, 78, 91, 92]. Тому розглядається адіабатичний розігрів у полосах зсуву [201, 301] ;

– оскільки рівняння стану (2.1) є нелінійною функцією, то визначення компонент тензору напружень за компонентами тензору деформацій доцільно проводити на основі ієрархічної системи моделей, кожна з яких відповідає окремій зоні деформування (рис. 2.3) ;

– математична модель повинна враховувати, що границя плинності матеріалу не є сталою величиною, а змінюється в залежності від швидкості імпульсного навантаження.

Нагадаємо, що в рамках глобальної мети даної роботи, узагальнена математична модель повинна забезпечити універсальність аналітично-числових методів дослідження напружено-деформованого стану конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження механічного характеру. Тому математичне моделювання повинно охоплювати якмога більший діапазон конкретних задач високошвидкісного деформування та руйнування конструкцій. А задля цього будемо враховквати всі вищє зазначені особливості деформування полікристалічних матеріалів під впливом високошвидкісного механічного навантаження.

Сформулюємо математичну модель, що відповідає вищезазначеному переліку вимог.

2.3.1 Постановка динамічної задачі у переміщеннях. На початку деформаційного процесу, незалежно від інтенсивності та локалізації зовнішнього механічного впливу, деформування відбувається у пружній зоні. Тобто, для всієї конструкції виконуються умови для зони I (рис. 2.1). При цьому висока температура зовнішнього середовища може спричинювати термонавантаження, які як початковий напружено-деформований стан впливають на подальший розвиток напружено-деформованого стану в конструкції. Тому для моделювання деформування конструкції під впливом динамічного тиску доцільно розглядати початково-крайову динамічну задачу термопружності [301].

Для довільної конструкції або її частини, що моделюється тривимірним тілом, рівняння руху в переміщеннях записуються таким чином [302];

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}+\mu\Delta U_i-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial x_i}+F_i=\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \tag{2.2}$$

де $U(x_i,t)$ – вектор переміщень;

$u=(x_i,t), v=(x_i,t), w=(x_i,t)$ – компоненти вектору переміщень;

x_i – поточні координати;

λ,μ – коефіцієнти Ламе;

α – коефіцієнт теплового розширення;

K = λ+2μ/3 – модуль об’ємного стиснення;

Θ – відносне об’ємне розширення: $\Theta = divU$,

для нестисливого матеріалу Θ = 0;

F_i – компоненти об‘ємної сили, що віднесена до одиниці об‘єму.

Зауважимо, що коефіцієнти Ламе в області пластичного деформування є змінними величинами, оскільки коефіцієнт Пуассона ν змінюється від 0,3 в пружній області деформування до 0,5 в області пластичного деформування. Нижче будуть наведені вирази коефіцієнтів Ламе через коефіцієнт Пуассона для кожної із зазначених зон.

Температура зовнішнього середовища враховується в початкових умовах, а вплив високошвидкісного механічного навантаження – у граничних.

Початкові умови такі:

$$\begin{aligned} &U(x_i, 0) = 0, \\ &\frac{\partial U(x_i, 0)}{\partial t} = 0, \\ &T(x_i, 0) = T_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Граничні умови такі:

$$\begin{aligned} &U(x_i, t)\big|_{\Gamma} = f_1(P(x_i, t)), \\ &\left.\frac{\partial U(x_i, t)}{\partial x_i}\right|_{\Gamma} = f_2(P(x_i, t)), \\ &T(x_i, t)\big|_{\Gamma} = T_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Сформульована у вигляді (2.2) – (2.4) задача термопружності дозволяє враховувати вплив температури на початковій стадії процесу деформування. А функція тиску в граничних умовах (2.4) дозволяє крім зовнішнього навантаження враховувати ще й попередній статичний напружено-деформований стан конструкції внаслідок її збирання, умов експлуатації тощо.

Для декартової системи координат за умови відсутності об‘ємних сил рівняння руху (2.2) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta u-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\Delta v-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\Delta w-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

а для циліндричної системи координат за тією ж умовою їх вигляд такий:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\mu\left(\frac{u}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\Theta}\right)+\mu\Delta u-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{r\partial\varphi}-\mu\left(\frac{u}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\Theta}\right)+\mu\Delta v-3\alpha K\frac{\partial T}{r\partial\varphi}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\mathit{\Theta}}{\partial z}+\mu\mathit{\Delta} w-3\alpha K\frac{\partial T}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Відзначимо, що постановка початково-крайової задачі (2.2) – (2.4) у переміщеннях дійсна як для пружного, так і для пластичного деформування.

Розв‘язок задачі дозволяє визначати компоненти вектору переміщень $U(x_i,t)$, для будь якої точки твердого тіла x_i, як неперервні за часом функції, не зважаючи на те, до якої деформаційної зони належить ця точка у конкретний момент часу.

2.3.2 Визначення повної деформації та швидкості деформування. Компоненти тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ визначаються за компонентами вектору переміщень $u_i(t)$ за широко відомими залежностями [161]. За компонентами тензору деформацій визначаються еквівалентні (або ефективні) деформації [146]

$$\varepsilon_{eq} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2)}{2} + \frac{3(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)}{4}}, \qquad (2.7)$$

$$e_{11} = +\frac{2}{3}\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\varepsilon_{22} - \frac{1}{3}\varepsilon_{33}$$

$$e_{22} = -\frac{1}{3}\varepsilon_{11} + \frac{2}{3}\varepsilon_{22} - \frac{1}{3}\varepsilon_{33}$$

$$e_{33} = -\frac{1}{3}\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\varepsilon_{22} + \frac{2}{3}\varepsilon_{33}$$

де e_{11}, e_{22}, e_{33} – компоненти девіатору деформацій у прямокутній системі координат;

$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$ – половинні компоненти тензору деформацій у прямокутній системі координат.

Іноді, замість еквівалентних деформацій, використовують інтенсивність деформацій [104, 161]

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 3/2(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)}, \quad (2.8)$$

або скорочено

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}},$$

де e_{ij} – компоненти девіатора деформацій в прямокутній системі координат.

Зауважимо, що всі знайдені величини дійсні як для пружного, так і для пластичного деформування матеріалу.

Багато досліджень пружно-пластичного деформування підтверджують той факт, що повна деформація є сумою її пружної та пластичної складових [104, 146, 161]. В нашому випадку еквівалентну деформацію можна записати як суму еквівалентних її пружної $\varepsilon_{eq}^{e} = \varepsilon_{eq}^{eM} + \varepsilon_{eq}^{eT}$ та пластичної ε_{eq}^{pl} частини:

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{eq}^{eM} + \varepsilon_{eq}^{eT} + \varepsilon_{eq}^{pl}, \tag{2.9}$$

де ε_{eq}^{eM} – пружна частина повної деформації, що виникає внаслідок механічного навантаження;

ε_{eq}^{eT} – пружна частина повної деформації, що виникає внаслідок температурного навантаження;

ε_{eq}^{pl} – пластична частина повної деформації.

Відзначимо, що пластичне деформування відбувається без зміни об‘єму матеріалу [104]: $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0^{e} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}^{e} + \varepsilon_{22}^{e} + \varepsilon_{33}^{e}\right)$, $\varepsilon_0^{pl} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}^{pl} + \varepsilon_{22}^{pl} + \varepsilon_{33}^{pl}\right) = 0$. Під час пластичної течії у матеріалі конструкційного елементу під дією механічної імпульсного навантаження відбувається руйнування кристалічних решіток і фазові перетворення [296]. У дослідженнях, що проведені в роботі [87], встановлено, що при тиску ударного стиснення в діапазоні 5...9 ГПа зміна густина сталі становить 3...5%. Оскільки у задачах швидкісного деформування діапазон ударного тиску на кілька порядків нижче, тому можна використовувати граничний перехід $\lim\limits_{\rho \to \rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = 0$ і розглядати густину матеріалу як сталу величину.

Звернемо увагу, що компоненти тензора деформацій є функціями часу

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$. Визначимо тензор швидкостей деформацій, компонентами якого є значення похідних за часом від компонент тензору деформацій – $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$, а швидкість деформації знаходимо за формулою [161]

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t} = \tag{2.10}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{23}^2}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{31}^2}{\partial t}\right)},$$

або скорочено

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial e_{ij}(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial e_{ij}(t)}{\partial t}}.$$

Подальше визначення еквівалентних напружень і компонент тензора напружень за відомими еквівалентними деформаціями та компонентами тензора деформацій здійснюється за ієрархічною системою моделей, які відповідають фізичним процесам пружного, малого пластичного з можливістю розвантаження й пластичного деформування з можливостю руйнування конструкційного матеріалу.

2.3.3 Узагальнене рівняння стану елементів конструкцій при високошвидкісному навантаженні. Динамічна границя плинності. Задля єдиного аналітичного опису термопружного та пружно-пластичного (або термо-пружно-пластичного) напруженого стану конструкції використовуємо гіпотезу про існування єдиної кривої деформування, що встановлює однозначну залежність між еквівалентними деформаціями та ε_{eq} та еквівалентними напруженнями σ_{eq} [104].

Як було показано у першому розділі, в наш час запропоновано ряд залежностей, які для матеріалів з кінематичним зміцненням мають форму, що обумовлено відомою теоремою О. А. Іллюшина [161].

Широкого застосування знайшла апроксимуюча залежність для зони пластичної течії матеріалу у вигляді [98]:

$$\sigma_{eq} = A\varepsilon_{eq}^{m}\left[1+\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Проведений аналіз експериментальних досліджень високошвидкісного деформування металів та їх сплавів та існуючих рівнянь стану дозволили побудувати аналітичну емпіричну залежність $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}\left(\varepsilon_{eq}, \frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial t}, T\right)$ як узагальнене модифіковане рівняння стану, що враховує деформаційне зміцнення матеріалу та вплив локального підвищення температури й початкового температурного режиму.

Загальний вигляд цієї залежності такий:

$$\sigma_{eq} = E(T_0)\varepsilon_y^{st}\left[1+\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)^{\frac{1}{n}}\right]+$$

$$+\sigma_y^{st}\left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_y^{st}}-\left[1+\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right)^{m}\cdot\left(1-\left(\frac{T-T_k}{T_p-T_k}\right)^{r}\right), \qquad (2.11)$$

де $E(T_0)$ – модуль Юнга для температури матеріалу на початку процесу навантаження;

ε_y^{st} - деформація, що відповідає статичній границі плинності;

σ_y^{st} - статична границя плинності;

T – поточна температура;

T_k – температура, при якій проводилося визначення характеристик матеріалу;

T_p –температура плавлення матеріалу;

D, n – експериментальні параметри чутливості матеріалу до швидкості деформації;

m – параметр чутливості матеріалу до деформаційного зміцнення;

r – параметр чутливості матеріалу до температурного знеміцнення.

Перший доданок рівняння (2.14) є динамічною границею плинності

$$\sigma_y^d = \sigma_y^{st}\left[1 + \left(\frac{1}{D}\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)^{\frac{1}{n}}\right], \qquad (2.12)$$

де статична границя плинності матеріалу конструкції визначається з урахуванням температури: $\sigma_y^{st} = E(T_0)\varepsilon_y^{st}$.

Задля визначення поточної температури у локальній зоні пластичної течії необхідно розв’язати рівняння балансу енергії [301]

$$\frac{dE}{dt} = N_F + N_P + IQ,$$

де $E = \rho\left(U_i + \frac{V^2}{2}\right)$ – повна енергія елементарного об’єму;

$\rho\frac{V^2}{2}$ – кінетична енергія;

ρ - густина матеріалу;

$\overline{V}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$ – вектор швидкостей переміщень;

$U_i = Ic_V T$ – теплова енергія елементарного об’єму;

I – механічний еквівалент тепла;

c_V – питома теплоємність;

$Q = \lambda \nabla^2 T$ – енергія теплопередачі, що відсутня при адіабатичному процесі;

$N_F = \rho(\bar{F} \cdot \bar{V})$– міцність масових сил;

$\bar{F}(X, Y, Z)$ – вектор масових сил;

$N_P = div(\hat{\sigma}\bar{V})$– міцність об'ємних сил;

$\hat{\sigma}$ – тензор напружень.

Оскільки процес є адіабатичним, як було зазначено вище, то поточна температура T визначається відповідно до залежності [92]

$$T(\vec{r}, t) = \frac{f\left(\varepsilon_{eq}, \dfrac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)}{c\rho} \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\vec{r}, t) d\varepsilon(\vec{r}, t), \tag{2.13}$$

де $f\left(\varepsilon_{eq}, \dfrac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t}\right)$ – експериментальна функція, що визначає частину роботи деформації, яка переходить у теплову енергію, $0 < f\left(\varepsilon_{eq}, \dfrac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t}\right) < 1$;

c – питома теплоємність матеріалу;

ε_f – фактична деформація на заданий момент часу;

$\vec{r}$ – радіус- вектор точки конструкції, де відбувається пластична течія матеріалу.

Зазначимо, що за результатами експериментальних досліджень [92], для металів $0{,}8 < f\left(\varepsilon_{eq}, \dfrac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t}\right) < 1$.

Основною проблемою використання емпіричних рівнянь стану для розв‘язання задач високошвидкісної динаміки є необхідність коштовних попередніх експериментальних досліджень зразків матеріалів, що суттєво збільшує час дослідження та його собівартість. Перевагою запропонованого рівняння (2.14) є мала кількість констант, що визначаються експериментально, та широка база даних констант для полікристалічних матеріалів, визначених для моделей Купера-Саймондса, Джонсона-Кука та типу Пежини [146, 156], які можуть бути адаптовані для даної моделі.

2.3.4 Моделювання динамічного напруженого стану. Моделювання динамічного напруженого стану відбувається на основі ієрархічної системи моделей, які відповідають фізичному стану матеріалу для кожної зони деформування. Для кожної моделі визначаються еквівалентні напруження за вже відомими еквівалентними деформаціями (2.10).

Розглянемо кожну модель за послідовністю її появи.

1. Модель термопружного деформування.

Для першої зони термопружного деформування пластичні деформації не виникають $\varepsilon_{ij}^{p} = 0$. При цьому застосовується закон Гука як на стадії навантаження, так і на стадії розвантаження. Зауважимо, що розвантаження за законом Гука відбувається і для наступної зони малих пластичних деформацій. Компоненти тензора напружень σ_{ij} визначаються через компоненти тензора деформацій ε_{ij} з рівняння $\sigma_{ij} = E(T_0)\varepsilon_{ij}$, де модуль Юнга для початкової температури $E(T_0)$ визначається експериментально. Коефіцієнти Ламе визначаються за відомими залежностями [301] $\lambda = \dfrac{E(T_0)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ та $\mu = \dfrac{E(T_0)}{2(1+\nu)}$.

2. Модель деформування матеріалу при малих пластичних деформаціях, що передбачає як появу «зуба» плинності, так і можливість розвантаження.

Друга зона малих пластичних деформацій виникає одразу ж, як пружні еквівалентні напруження перевищать значення динамічної границі плинності $\sigma_{eq} \geq \sigma_y^d$ та триває доки $\varepsilon_{0,2} \geq \varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_*$, де ε_* – експериментально визначена для кожного матеріалу константа. Для цієї зони приймається гіпотеза пропорційності компонент девіатору деформацій компонентам девіатору напружень, а рівняння Гєнкі [161] узагальнюються як динамічний варіант теорії малих пластичних деформацій

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_{eq}\left(\varepsilon_{eq}, \partial\varepsilon_{eq}/\partial t, T\right)}{\varepsilon_{eq}}\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0\right), \qquad (2.14)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера;

$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0 = K\Theta$ – середнє нормальне напруження.

Модуль об‘ємного стиснення K і кожен з параметрів Ламе для зони малих пластичних деформацій визначаються з урахуванням зміни модулю зміцнення $E_c = \dfrac{\sigma_{eq}}{\varepsilon_{eq}}$: $\lambda = \dfrac{E_c \nu(E_c)}{(1+\nu(E_c))(1-2\nu(E_c))}$ та $\mu = \dfrac{E_c}{2(1+\nu(E_c))}$, але адіабатичний розігрів при малих деформаціях суттєво не впливає на напружений стан конструкції [98].

3. Модель пластичної течії матеріалу з урахуванням швидкості й історії деформування за досліджуваний інтервал часу та впливу температури на розвиток адіабатичних смуг зсуву. (рис. 2.2).

Розрахункова модель для визначення компонент тензора напружень за компонентами тензора деформацій для третього випадку приймається для $\varepsilon_* \geq \varepsilon_{eq} > \varepsilon_{dstr}$. Для цього випадку деформування приймаються гіпотези: тіло, що деформується, є ізотропним; відносна зміна об'єму є пружною деформацією, а рівняння Прандтля-Рейса [161] узагальнюються з використанням емпіричної залежності (2.11)

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_{eq}\left(\varepsilon_{eq}, \partial\varepsilon_{eq}/\partial t, T\right)}{\partial\varepsilon_{eq}/\partial t}\partial\varepsilon_{ij}/\partial t. \qquad (2.15)$$

Для цієї зони деформування потрібно враховувати адіабатичний розігрів, а перший коефіцієнт Ламе визначати так [301]: $\lambda_s = \lambda + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{c_\varepsilon}$.

Слід зазначити, що для багатьох задач швидкісного деформування, для матеріалів яких справедливо $\varepsilon_* \to \varepsilon_{dstr}$, можливо використання узагальнених рівнянь динамічної деформаційної теорії пластичних деформацій (2.14) для моделювання всього процесу пластичної течії матеріалу [87]. Також отримано [98], що в більшості випадках теорія пластичної течії та динамічна деформаційна теорія дають схожі результати, які відрізняються в межах наших знань про динамічні характеристики матеріалу [89]. При великих пластичних деформаціях залежності (2.14) дають практично ті самі результати, що й теорія пластичної течії (2.15), але значно краще описують області, де діаграма матеріалу має характер спадання [302].

Як для динамічної деформаційної теорії пластичних деформацій, так і для теорії пластичної течії моделювання процесу руйнування матеріалу реалізується таким чином. Коли еквівалентні деформації досягають свого граничного значення $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{dstr}$, матеріал конструкції вважається зруйнованим, а розрахунковий час вважається часом руйнування.

2.4 Загальні зауваження до вибору методів та алгоритмів числових досліджень. Програмне забезпечення числового моделювання

Для узагальнення складних фізичних процесів на макрорівні необхідна схематизація реального процесу. Для того, щоб отримати достовірні розв‘язки, схематизація процесу, що розглядається, повинна бути коректною за основними трьома напрямами: геометрією об‘єкта дослідження, умов навантаження та динамічної поведінки матеріалу конструкції.

Для схематизації за геометрією об‘єкта дослідження слід враховувати той факт, що кількість параметрів, яка визначає динамічну міцність конструкції, досить велика. Навіть при сучасному розвитку обчислювальної техніки розв‘язання динамічної задачі механіки при імпульсному навантаженні для многокомпонентної складеної конструкції у тривимірній постановці може бути багаточасовою процедурою з великою кількістю циклів ітераційного процесу визначення розв‘язку. Довготривалий розрахунок може привести к значним похибкам у розрахункових параметрах. Тому, для цілого ряду модельних задач, доцільно розглядати не всю конструкцію, а тільки її частину. Також важливу роль відіграє раціональна постановка задачі, що дозволяє визначити вплив імпульсного навантаження на динамічну міцність конструкції за розрахунками її окремих елементів, а зниження розмірності задачі отримати за рахунок природньої симетрії геометрії цих елементів.

Під час схематизації умов навантаження слід враховувати характер руху навантаження, зону його впливу на конструкцію та його тривалість. В залежності від зазначених факторів обирається часова та просторова дискретизація рівнянь руху (2.2).

Схематизація динамічної поведінки матеріалу конструкції залежить від двох попередніх. Ступінь складності геометричної форми конструкції, граничних умов, що пов‘язані з зовнішнім навантаженням та неоднорідністю властивостей конструкційного матеріалу, впливають безпосередньо на вибір методу просторової дискретизації та опосередковано на схему дискретизації за часом. А вже для обраної просторово-часової дискретизації характер динамічної поведінки матеріалу конструкції під час його навантаження схематизується за узагальненою моделлю (2.11). Така послідовність схематизації при підготовці вхідних даних дозволяє отримувати необхідну точність розв‘язку динамічної задачі.

Оскільки область рішень для задач динаміки конструкцій є простір–час, то дискретизація за простором і часом може проводитися одночасно або послідовно [146]. Для всіх розглянутих задач приймалася послідовна дискретизація. Це дозволяє адаптувати розміри дискретного кроку як у часі, так і у просторі до зміни механічних характеристик неоднорідного матеріалу під час процесу деформування. Також слід зазначити той факт, що при моделюванні локальних ефектів фазових переходів, доцільно розрахункову схему ускладнювати не для всієї конструкції, а достатньо це зробити в заздалегідь визначеній обмеженій області.

Сучасний математичний апарат не дозволяє отримувати точні розв‘язки фізично нелінійних задач високошвидкісної динаміки конструкцій, тому необхідна лінеаризація процесу деформування для кожного дискретного кроку за часом. Вибір оптимальної схеми інтегрування за часом обумовлений рядом вимог до результатів досліджень, основна з яких є тривалість процесу деформування. Для динамічних процесів малої тривалості найбільш прийнятні явні схеми у зв'язку з більшою адекватністю одержуваних рішень реальної кінетики фізичних процесів в матеріалі [146].

В роботах [92, 93, 304] показана перспективність застосування схеми прогнозу-корекції Вожеле для нелінійних процесів, що швидко протікають. Похибка апроксимації при застосуванні схеми Вожеле має порядок $(\partial t)^5$, а сама схема вигідно відрізняється від багатьох інших простотою початкових співвідношень та легкістю зміни шагу інтегрування, що особливо важливо при розрахунку великих пластичних деформацій.

В основі часової дискретизації поставленої задачі (2.2) – (2.15) лежить розрахункова схема прогнозу-корекції Вожеле. Розрахунковий крок за часом має дві складові. Під час «прогнозу» за отриманими з двох попередніх кроків (t_{k-2}) й (t_{k-1}) значеннями швидкостей та прискорень визначалися швидкості в вузлах для поточного кроку (t_k) за формулою

$$\frac{\partial U(t_k)}{\partial t} = \frac{\partial U(t_{k-1})}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 U(t_{k-2})}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 U(t_{k-1})}{\partial t_2} \right], \tag{2.16}$$

де Δt – крок інтегрування за часом.

При «корекції» по чотирьох сусідніх вузлах визначається усереднена швидкість між вузлами. Якщо градієнти шуканих величин перевищували задані значення, то величина кроку зменшувалася вдвічі, а розрахунки на поточному кроці за часом повторювалися для зменшеного кроку.

Початковий крок за часом обирається за формулою

$$\Delta t = 0{,}9 \cdot \frac{min(\Delta l_i)}{c}, \tag{2.17}$$

де Δl_i – характерний розмір у координатному просторі розмірності i;

c – швидкість поширення хвилі в матеріалі.

Швидкість поширення хвилі в матеріалі визначається за формулою $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$.

Масштабний коефіцієнт 0,9 використовується для зменшення кроку часу і вводиться з міркувань стабільності розрахунку.

Вибір методу інтегрування у просторі залежить від конкретної геометрії досліджуємої конструкції. На цей час основними методами числового інтегрування рівнянь по просторовим координатам в задачах аналізу напружено-деформованого стану конструкцій при високошвидкісному навантаженні є метод скінченних елементів та метод скінченних різниць [93, 180, 146]. Кожен з них має свої переваги та недоліки, як було зазначено у першому розділі, які й зумовлюють вибір методу для кожної конкретної задачі. Застосування методу скінченних різниць для задач зі спрощеною геометрією дозволяє у повній мірі моделювати нелінійні фізичні властивості матеріалу у вузлах сітки. Тому його застосування для аналізу задач меншої від 3D розмірності або для тривимірної геометрії ортогональних локальних областей конструкцій є доцільним. Для більшості реальних об’єктів можливо звести задачу до двовимірної. Для внутрішніх точок будується система різницевих рівнянь другого порядку, а для точок граничних поверхонь – першого і другого порядку. У кутових точках застосовується одновимірна екстраполяція. Для задач зі складною тривимірною геометрією, які потребують точного урахування складних граничних умов, доцільно застосування методу скінченних елементів, який реалізовано за явною схемою [180].

Узагальнена структурна схема числових досліджень подана на рис. 2.6. Зауважимо, що кількість дискретних величин, які описують динамічний напружено-деформований стан реальних конструкцій під час високошвидкісного термо-пружно-пластичного деформування, зазвичай дуже велика. Об‘єм розрахунків для конструкцій із складною геометрією навіть для сучасної обчислювальної техніки знаходиться на межі можливостей. Тому доцільно розв‘язання задач проводити в декілька етапів: спочатку за методом скінченних елементів визначати напружено-деформований стан реальної конструкції за тривимірною геометрічною моделлю при спрощеній моделі деформування матеріалу, а потім в окремих зонах локалізації деформацій додатково досліджувати процес деформування із застосуванням термо-пружно-пластичної моделі (2.2) – (2.15). Застосування поетапного числового моделювання дозволяє визначати напружено-деформований стан конструкцій з необхідною точністю при всіх видах розглянутого імпульсного навантаження.

Програмна реалізація за приведеною схемою розробляється для кожної конкретної геометрії конструкції з використанням максимально можливого зниження розмірності геометричної моделі задачі.

Стійкість схеми обчислень визначається шляхом числових експериментів [98, 180]. Якщо при зменшенні кроку вдвічі за просторовими координатам різниця між шуканими величинами не перевищує задану точність, то досліджувану схему інтегрування вважаємо умовно стійкою. Подрібнення кроків сітки за просторовими та часовими координатами зменшує похибку обчислень, але суттєво збільшує час розрахунків, тому крок інтегрування за просторовими координатами обирається для кожного конкретного випадку.

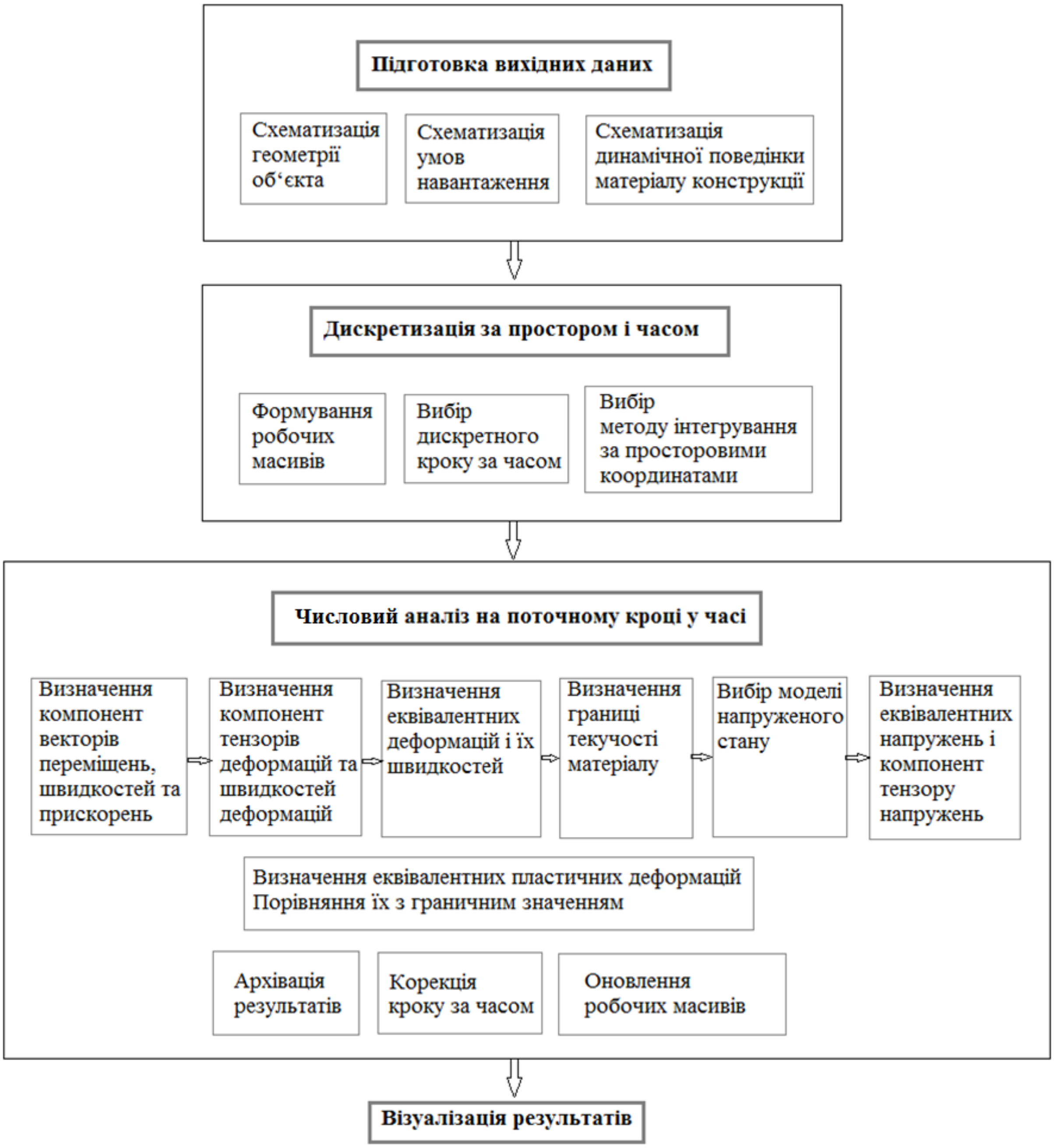


Рис. 2.6. Структурна схема числового аналізу напружено-деформованого стану конструкції під впливом високошвидкісного навантаження

2.5 Аналіз достовірності результатів, отриманих за узагальненою моделлю

Аналіз достовірності результатів числових досліджень динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що отримані за термо-пружно-пластичною моделлю (2.2) – (2.15), проводився двома способами:

– порівнянням даних розрахунку з результатами експериментальних досліджень ударного локального навантаження стальної оболонки [304];

– порівнянням даних розрахунку з результатами числових досліджень пружно-пластичного деформування за моделлю Купера-Саймондса, що враховує вплив швидкості навантаження, але не враховує впливу температури.

2.5.1 Порівняння результатів числових досліджень з експериментальними даними. Експериментальні дослідження проводилися для шарнірно опертої циліндричної оболонки зі сталі Х18Н10Т з радіусом внутрішньої поверхні R = 0,125 м, товщиною h = 0,0095 м, довжиною L = 0,6 м. Відношення товщини оболонки до її радіусу дорівнює h/R = 0,076. На оболонку із заданої висоти скидалися ударники сферичної форми заданої маси. Таким чином досягалося локальне ударне навантаження оболонки зі заданою швидкістю зіткнення [304]. Проводилися дослідження для мас вантажів ударника від 0,35 кг до 1,7 кг і висот падіння від 0,5 м до 1,25 м. Відомості про експерименти наведені в таблиці 2.1, а в таблиці 2.2 подана швидкість зіткнення ударника з оболонкою в залежності від висоти скидання ударника.

Методика і апаратура для експериментального дослідження поведінки елементів конструкцій при ударному навантаженні розроблена в ІПМаш ім. А.Н. Підгорного НАН України [82, 98]. Вона дозволяє з необхідною точністю реєструвати поточні значення деформацій у часі та вимірювати часові інтервали. Методика досліджень грунтується на принципах використання широкосмугової вимірювальної та реєструючої апаратури та інваріантності навантаження при контактному ударі, що дозволяє використовувати невелику кількість тензодатчиков для отримання поля деформацій. Вимірювання деформації здійснювалося малобазними тензодатчиками, розташованими на зовнішній поверхні оболонки, що охоплює локального зону ударного навантаження. На рис. 2.7 а показано розміщення датчиків на поверхні оболонки. Орієнтація тензодатчиков на поверхні циліндра вибиралася уздовж напрямків головних деформацій ε_x та ε_φ. Кожен експеримен проводився з повторюванністю три рази.

Таблиця 2.1

Відомості про експеримент

Висота скидання ударника, м	Маса ударника, кг		
0,5	0,35	0,83	1,7
0,75	0,35	0,83	1,7
1,0	0,35	0,83	1,7
1,25	0,35	0,83	1,7

Таблиця 2.2

Швидкість зіткнення

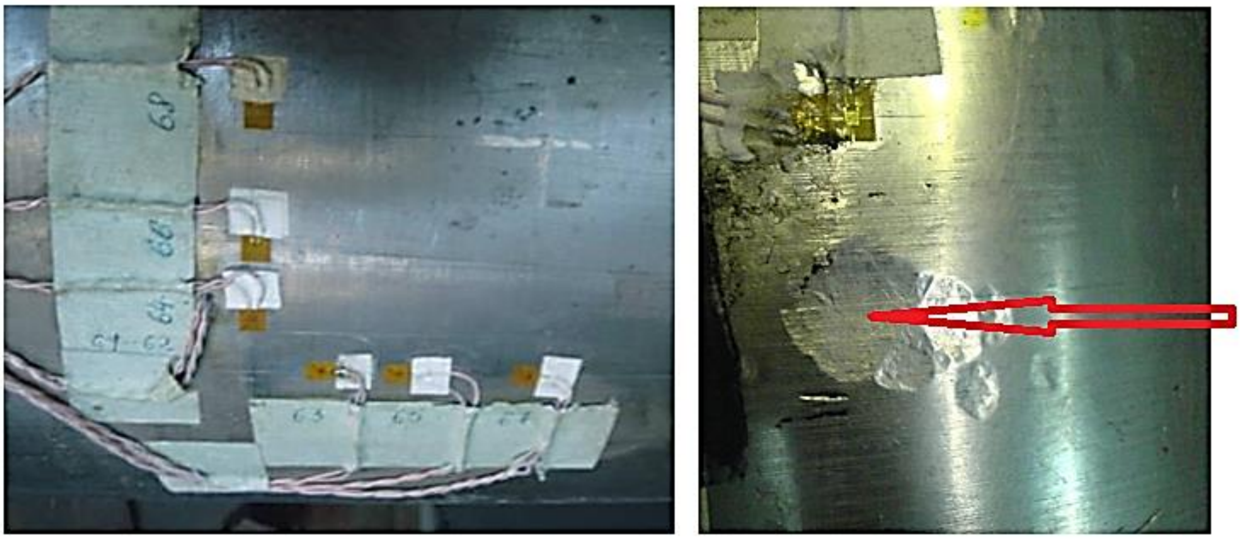
Висота скидання ударника, м	1,25	1,0	0,75	0,5
Швидкістьзіткнення ударника з оболонкою, м\с	4,95	4,43	3,84	3,13

За результатами обробки експериментальних даних [15, 304] були отримані поздовжні $\varepsilon_x = \varepsilon_x(t)$ та окружні $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(t)$ деформації циліндричної оболонки. За їх значеннями з рівняння

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\varphi^2 - 2\varepsilon_x \varepsilon_\varphi}$$

визначалися еквівалентні деформації для кожної точки вимірювання.

Зазначимо, що для всіх випадків, окрім навантаження ударником масою 0,35 кг з висот скидання 0,5 м та 0,75 м, було зафіксовано появу наклепу на зовнішній поверхні оболонки, як показано на рис. 2.7 б. Виникнення локальних зон наклепання внаслідок ударно-імпульсного навантаження свідчить про те, що в зоні контакту в оболонці зі сталі виникають пластичні деформації. Вони локалізуються в зоні контакту, наприклад, для експерименту по скиданню ударника масою 1,7 кг з висоти 1,25 м площа зони контакту складала $S \approx 10^{4}$ м^2. Саме зона наклепу і становить найбільший інтерес для числового моделювання процесів деформування.



а б

Рис. 2.7. Фотографії експериментального дослідження сталевої циліндричної оболонки при локальному ударному навантаженні:

а –розміщення датчиків на поверхні оболонки;

б –наклеп на сталевій оболонці

Було проведено числове моделювання деформування оболонки, що використовувалася для експериментальних досліджень, в зоні навантаження. Для розрахунку приймалися такі фізико-механічні характеристики для сталі Х15Н8А18: E = 206 ГПа, E_1 = 739 МПа, ε_y^{st} = 1,43·10^{-3}, σ_y^{st} = 299 МПа, σ_{dstr} = 589 МПа, T_p = 1540 ^{0}С, T_k = 27 ^{0}С, α = 12·10^8 ^{0}С$^{-1}$ (27 ^{0}С) ÷ 14·,710^8 ^{0}С$^{-1}$ (727 ^{0}С), ν = 0,3 ÷ 0,5 , ρ = 7,8·10^3 кг/м^3, D = 396 с$^{-1}$, n 7,14 , m = 0,124 , r = 1.

Досліджувалися переміщення та деформації локальної зони циліндричної оболонки розміром $3a \times 3a$, яка включає зону навантаження $a \times a$ (рис. 2.8). Переміщення знаходилися за рівняннями (2.2) з початковими умовами (2.3), де $T_0 = 27\ ^0$C. Зазначений матеріал є малостисливим: $\Theta \approx 0$, тому в рівнянні (2.2) перший додаток приймався равним нулю.

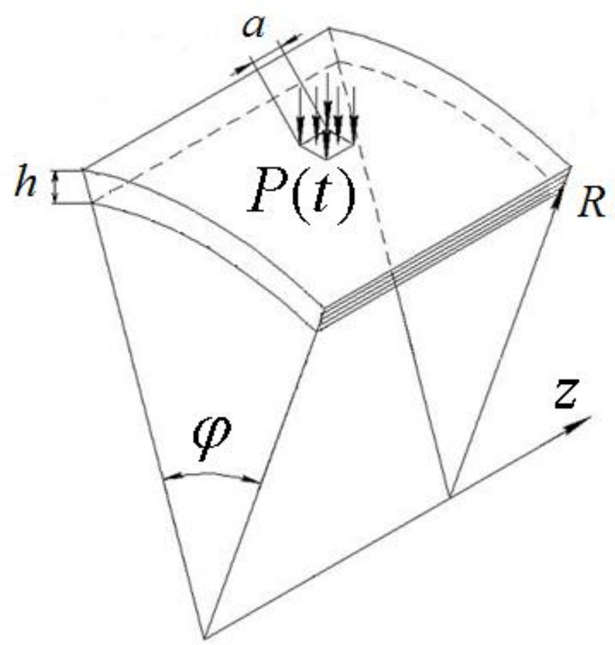


Рис. 2.8. Схема ударного навантаження оболонки

Кривизна досліджуємої частини оболонки є малою, тому для моделювання локального деформування циліндричної оболонки внаслідок ударного навантаження доцільно перейти від глобальної циліндричної системи координат ($r,\ \varphi,\ z$) до локальної декартової. Система координат обирається таким чином, щоб вісь z була протилежно направлена до напрямку дії імпульсного навантаження. Декартові координати змінюються в межах: $0 \le x \le 3a$, $0 \le y \le 3a$ та $0 \le z \le h$. Ударне навантаження моделюється динамічним тиском, що прикладений до поверхні $z = h$ в квадратній зоні площею10^{-4} м^2: $a \le x \le 2a$, $a \le y \le 2a$. Числове значення функції тиску $P(x,y,h,t)$ для граничних умов (2.4) визначається з експериментальних даних імпульсу навантаження.

За результатами експериментальних досліджень отримані значення імпульсів навантаження для мас та висот, що приведені в таблиці 2.1. Типова форма імпульсів навантаження показана на рис 2.9 [305].

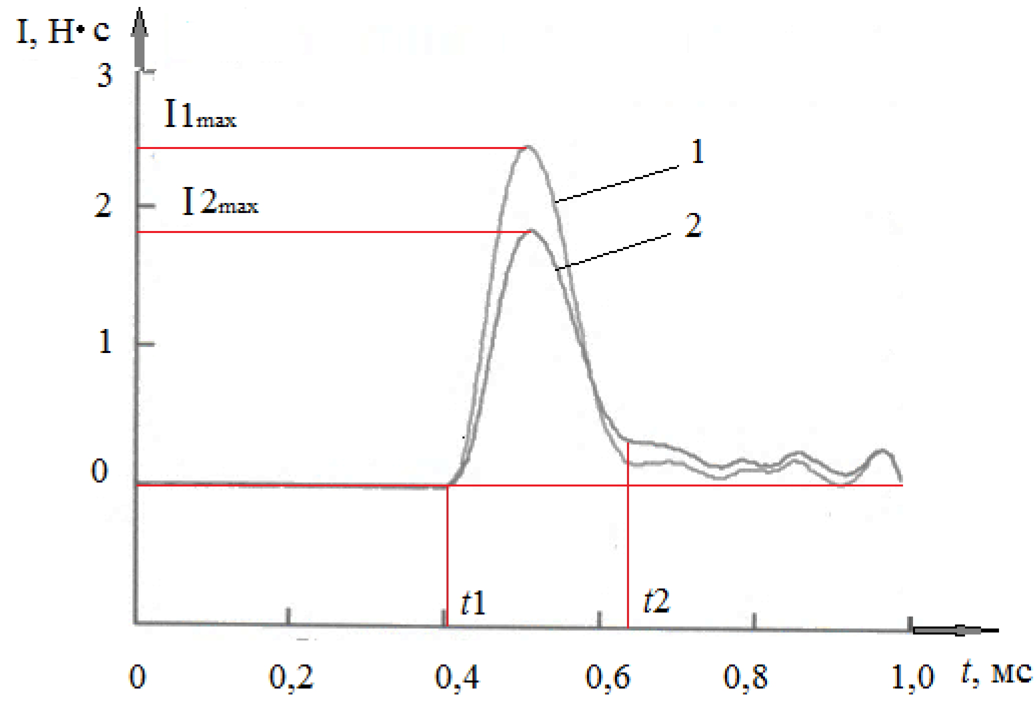


Рис. 2.9. Типова форма імпульсів навантаження

За експериментальними даними максимальних імпульсів та часу їх впливу на поверхню контакту визначається максимальний тиск навантаження на контактну зону $P_{max} = P_{max}(x,y,h)$, де $a \le x \le 2a$, $a \le y \le 2a$. Затухання в часі функції тиску моделювалося за експоненціальним законом [105]

$$P(x,y,h,t) = P_{max}(x,y,h) \cdot e^{\frac{-t}{\theta}}, \tag{2.18}$$

де θ – емпіричний параметр швидкості спадання навантаження в часі;

t – поточний розрахунковий час.

Значення параметра θ визначалося із експериментальних кривих форм імпульсів навантаження, для розрахунків приймалося θ = 10^{-4} с.

За початковий час t = 0 приймемо момент прикладення імпульсного навантаження.

Таким чином, рівняння руху (2.2) з початковими умовами (2.3) доповнюються лінеарізованими граничними умовами на поверхні $z = h$, що навантажується

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -P(x, y, h, t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2.19}$$

Всі інші граничні умови є нульовими, як визначено із експериментальних досліджень [304].

Вибір методу числової дискретизації запропонованої математичної моделі деформування локальної зони оболонкової конструкції внаслідок імпульсного навантаження ґрунтується на тому, що процес деформування є суттєво нелінійним. Метод скінченних різниць при правильно підібраному кроці інтегрування у часі дозволяє отримати найбільш точний розв’язок в вузлах сітки. Для розв‘язання задачі застосовувалася явна схема методу скінченних різниць та метод прогонки [305, 306]. При цьому використано структуровану просторово-часову сітку $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$, де $\Omega_\tau = \{t^0, t^1 \ldots, t^n, \ldots\}$ – розбиття за часом. Приймаємо, що $t^k = kh_t$, де h_t – крок у часі. Для визначення компонент вектору переміщень згідно зі схемою прогнозу-корекції Вожеле застосовувалися такі залежності:

$$u(t^k) = u(t^{k-1}) + \frac{h_t}{2}\left(\dot{u}(t^{k-2}) + \dot{u}(t^{k-1})\right),$$

$$v(t^k) = v(t^{k-1}) + \frac{h_t}{2}\left(\dot{v}(t^{k-2}) + \dot{v}(t^{k-1})\right), \tag{2.20}$$

$$w(t^k) = w(t^{k-1}) + \frac{h_t}{2}\left(\dot{w}(t^{k-2}) + \dot{w}(t^{k-1})\right).$$

Для дискретизації задачі у просторі використовувалася Ω_h – рівномірна декартова сітка з вектором просторових кроків $\vec{h} = \left(h_x, h_y, h_z\right)$. Частинні похідні компонент вектору переміщень апроксимувалися центральними різницями [305, 306]. Для дискретних значень вектору переміщень та його компонент прийняті позначення: $u(x_n, y_m, z_l, t^k) = u^k_{nml}, v(x_n, y_m, z_l, t^k) = v^k_{nml}$, та $w(x_n, y_m, z_l, t^k) = w^k_{nml}$ де $x_n = nh_x$, $y_m = mh_y$ та $z_l = lh_z$.

Початковий крок по координаті z обирається на основі формули (2.17).

Таким чином, у дискретному вигляді рівняння (2.2) можна записати

$$
\begin{gathered}
u^{k+1}_{nml} = 2u^k_{nml}\left(1 - \frac{\lambda+2\mu}{h_x^2} - \frac{\mu}{h_y^2} - \frac{\mu}{h_z^2}\right) + \frac{h_t^2}{\rho}\left[\left(\frac{\lambda+2\mu}{h_x^2}\right)\left(u^k_{n+1ml} + u^k_{n-1ml}\right) + \right. \\
+\left(\frac{\mu}{h_y^2}\right)\left(u^k_{nm+1l} + u^k_{nm-1l}\right) + \left(\frac{\mu}{h_z^2}\right)\left(u^k_{nml+1} + u^k_{nml-1}\right) - \frac{3\alpha K}{2h_x}\left(T^k_{n+1ml} - T^k_{n-1ml}\right) + \\
\left. +\left(\frac{\mu}{4h_x h_y}\right)(v^k_{n+1m+1l} - v^k_{n+1m-1l} - v^k_{n-1m+1l} + v^k_{n-1m-1l}) + \left(\frac{\mu}{4h_x h_z}\right)(w^k_{n+1ml+1} - w^k_{n-1ml+1} - w^k_{n+1ml-1} + w^k_{n-1ml-1})\right] - u^{k-1}_{nml}, \\
v^{k+1}_{nml} = 2v^k_{nml}\left(1 - \frac{\mu}{h_x^2} - \frac{\lambda+2\mu}{h_y^2} - \frac{\mu}{h_z^2}\right) + \frac{h_t^2}{\rho}\left[\left(\frac{\mu}{h_x^2}\right)\left(v^k_{n+1ml} + v^k_{n-1ml}\right) + \left(\frac{\lambda+2\mu}{h_y^2}\right)\left(v^k_{nm+1l} + v^k_{nm-1l}\right) + \right. \\
+\left(\frac{\mu}{h_z^2}\right)\left(v^k_{nml+1} + v^k_{nml-1}\right) - \frac{3\alpha K}{2h_y}\left(T^k_{nm+1l} - T^k_{nm-1l}\right) + \\
\left. +\left(\frac{\mu}{4h_x h_y}\right)(u^k_{n+1m+1l} - u^k_{n+1m-1l} - u^k_{n-1m+1l} + u^k_{n-1m-1l}) + \left(\frac{\mu}{4h_y h_z}\right)(w^k_{nm+1l+1} - w^k_{nm+1l-1} - w^k_{nm-1l+1} + w^k_{nm-1l-1})\right] - v^{k-1}_{nml}, \\
w^{k+1}_{nml} = 2w^k_{nml}\left(1 - \frac{\mu}{h_x^2} - \frac{\mu}{h_y^2} - \frac{\lambda+2\mu}{h_z^2}\right) + \frac{h_t^2}{\rho}\left[\frac{\mu}{h_x^2}\left(w^k_{n+1ml} + w^k_{n-1ml}\right) + \frac{\mu}{h_y^2}\left(w^k_{nm+1l} + w^k_{nm-1l}\right) + \right. \\
+\frac{\lambda+2\mu}{h_z^2}\left(w^k_{nml+1} + w^k_{nml-1}\right) - \frac{3\alpha K}{2h_z}\left(T^k_{nml+1} - T^k_{nml-1}\right) + \\
\left. +\frac{\mu}{4h_x h_z}(u^k_{n+1ml+1} - u^k_{n-1ml+1} - u^k_{n+1ml-1} + u^k_{n-1ml-1}) + \frac{\mu}{4h_y h_z}(v^k_{nm+1l+1} - v^k_{nm+1l-1} - v^k_{nm-1l+1} + v^k_{nm-1l-1})\right] - w^{k-1}_{nml}.
\end{gathered}
\tag{2.21}
$$

Дискретний вигляд граничних умов на поверхні контактної взаємодії $z = h$, відповідно до рівнянь (2.19), такий:

$$\frac{\lambda+2\mu}{h_z}(w_{nm1}^k - w_{nm0}^k) + \frac{\lambda}{h_x}(u_{n+1m0}^k - u_{nm0}^k) + \frac{\lambda}{h_y}(v_{nm+10}^k - v_{nm0}^k) = -P_{nm0}^k ,$$

$$\frac{v_{nm1}^k - v_{nm0}^k}{h_z} + \frac{w_{nm+10}^k - w_{nm0}^k}{h_y} = 0, \quad \frac{w_{n+1m0}^k - w_{nm0}^k}{h_x} + \frac{u_{nm1}^k - u_{nm0}^k}{h_z} = 0. \qquad (2.22)$$

Числове розв‘язання системи рівнянь (2.21) з урахуванням умов навантаження (2.22) дозволяє визначити компоненти вектору переміщень $U(x_n ,y_m ,z_l ,t^{k+1}) = U_{nml}^{k+1}$ у вузлах сітки для тривимірної області $0 \le x \le 3a$, $0 \le y \le 3a$ та $0 \le z \le h$ на $k+1$ кроку у часі. Ще раз підкреслимо, що розглядається навантаження однократним імпульсом.

Подальше розв‘язання задачі призводить до визначення еквівалентних деформацій та їх швидкостей у вузлах сітки на кожному кроці у часі за формулами (2.7) та (2.10).

Оскільки розглянутий клас задач відноситься до умовно-збіжних, то збіжність різницевої схеми перевіряється в результаті числових розрахунків шляхом зменшення величин просторових кроків $\vec{h} = \left(h_x ,h_y ,h_z\right)$ вдвічі з відповідним зменьшенням кроку у часі h_t.

Для цієї задачі початкові просторові кроки обиралися такі: $h_x = h_y = h_z = 5 \cdot 10^{-4}$ м, а початковий крок у часі h_t визначався за формулою (2.17). Під час розрахунку, в залежності від імпульсу навантаження й величини імпульсного тиску, значення кроків змінювалися відповідно до схеми прогнозу-корекції Вожеле (2.20).

На рис. 2.10 показані результати розрахунку еквівалентних деформацій в центрі ударного навантаження на зовнішній поверхні циліндричної оболонки (рис. 2.7) для випадків скидання грузів з висоти 1,25 м з масами 0,35 кг (крива *1*), 0,85 кг (крива *2*) та 1,7 кг (крива *3*), а також максимальні еквівалентні деформації, що отримані з експериментальних досліджень – (точки *4*). Еквівалентні деформації для третього випадку, що отримані з розрахунку, перевищують границю пружності (зона *5* на кривій *3*). Такий розрахунковий результат свідчить про появу локальних пластичних деформацій та узгоджується з експериментальним фактом виникнення локальної зони наклепання (рис. 2.7 б). Таким чином, результати розрахунків відповідають даним експериментальних досліджень.

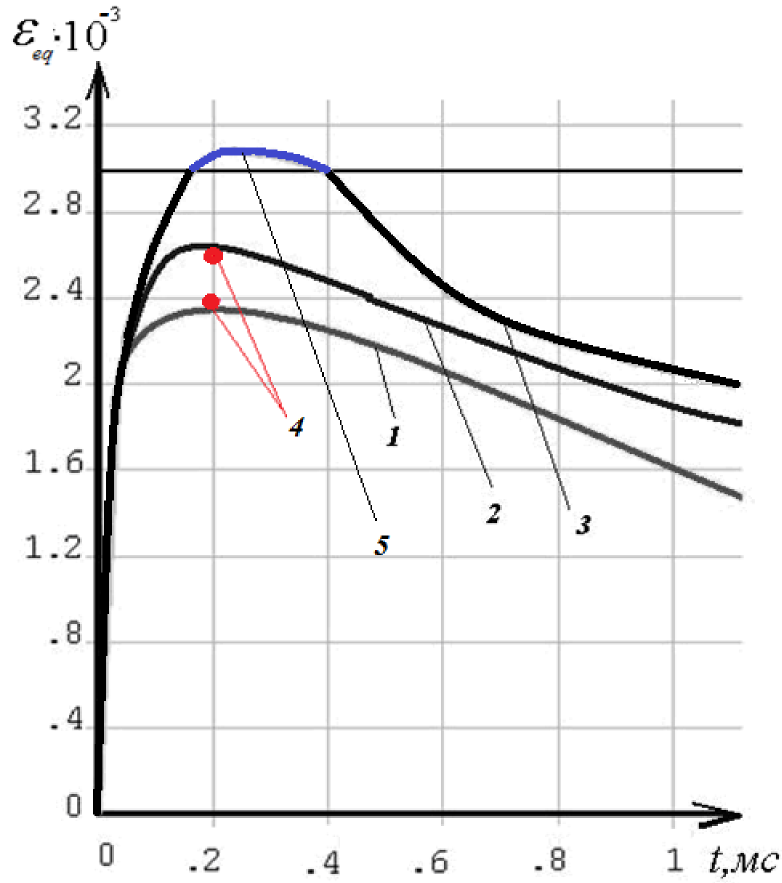


Рис. 2.10. Еквівалентні деформації в центрі ударного навантаження

Звернемо увагу, що пластичні деформації локалізовані в зоні впливу імпульсного навантаження, тому в задачах дослідження пружно-пластичного деформування елементів конструкцій внаслідок локального навантаження достатньо розглядати тільки ту частину конструкції, що зазнає впливу навантаження. В цих зонах застосування двовимірних геометричних моделей для оболонкових конструкцій неможливе із-за тривимірного напружено-деформованого стану, що з‘являється в локалізованій зоні навантаження.

2.5.2 Порівняння результатів числових досліджень з даними, що отримані за методом скінченних елементів. Числові розрахунки за двома методами: запропонованим та скінченних елементів, проводилися для циліндричної оболонки, яка описана в підпункті 2.5.1. Розглядалися шість розрахункових випадків імпульсного навантаження оболонки (рис. 2.8). За даними експериментів про імпульс навантаження (рис. 2.9) розраховувався максимальний тиск на зону контакту. Відомості про імпульсне навантаження для кожного розрахункового випадку подано в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Відомості про імпульсне навантаження для розрахункових випадків

№	Маса, кг	Швидкість, м/с	Імпульс, Н·с	Максимальний тиск, МПа
1	0.35	4.43	1.5	247
2	0.35	4.95	1.7	277
3	0.83	3.13	2.6	416
4	0.83	3.84	3.2	509
5	0.83	4.43	3.7	588
6	1.7	5.77	9.8	1569

Для реалізації методу скінченних елементів доцільно використовувати стандартні апробовані програмні комплекси, такі як Ansys, Abaqus та інші. В цей час існує багато програмних систем скінченно-елементного аналізу, з яких найбільш поширена на провідних підприємствах та конструкторських бюро в Україні є програмне забезпечення, що створено компанією ANSYS Inc. [180].

В програмній системі скінченно-елементного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics реалізовано близько десяти основних моделей, що описують пластичну течію металів [149, 156]. Найбільш популярними моделями пластичної течії металів є рівняння стану Купера-Саймондса (Cowper-Symonds), Джонсона-Кука (Johnson-Cook) і Зеріллі-Армстронга (Zerilli-Armstrong) [158, 115-118]. Як було показано в першому розділі, кожна з цих моделей має свої переваги та недоліки, але кожна із запропонованих моделей має порівняно невелику кількість емпіричних констант та відносно легко реалізується в програмному комплексі.

Найбільш простою з цих моделей є модель Купера-Саймондса, яка враховує кінематичне зміцнення матеріалу, вплив швидкості деформації на динамічну границю плинності та включає найменшу кількість емпіричних констант. Саме вона й була обрана для порівняльного аналізу результатів розрахунків імпульсного навантаження циліндричної оболонки (табл. 2.3).

Динамічна границя плинності за цією моделлю визначається таким чином [146]:

$$\sigma_y = \left(A + B\varepsilon_{pl}{}^{n}\right)\left(1 + (\dot{\varepsilon} / D)^{1/q}\right), \qquad (2.23)$$

де σ_y – границя плинності ізотропного деформаційного зміцнення, що залежить від швидкості деформації матеріалів;

A – границя плинності при нульовій пластичній деформації;

B – коефіцієнт деформаційного зміцнення;

ε_{pl} – еквівалентні (ефективні) пластичні деформації;

n – показник деформаційного зміцнення;

$\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформацій;

D, q – коефіцієнти зміцнення швидкості деформації.

Якщо константи в моделі Купера-Саймондса визначити через константи рівняння (2.12) таким чином: $A = E(T_0)\varepsilon_y^{st}$, $D \equiv D$, $q \equiv n$, а коефіцієнт деформаційного зміцнення визначити нульовим: $B = 0$, то отримаємо тотожную рівність для динамічної границі плинності матеріалу (2.12): $\sigma_y^d \equiv \sigma_y$. Таким чином, динамічна границя плинності матеріалу за двома моделями визначається однаково. Для зони пластичної течії показник деформаційного зміцнення за замовчуванням середовища розробки залишається $n = 1$, а коефіцієнт B знаходиться як усереднене значення модулів E_i (рис. 2.4).

Для зазначеної оболонки (рис. 2.7) проводилися числові дослідження, метою яких було порівняння результатів розрахунків переміщень та еквівалентних напружень, які отримані двома методами. За першим методом було використано модель (2.2) – (2.15) з числовою реалізацією за методом скінченних різниць, як описано в попередньому пункті 2.5.1. Еквівалентні напруження знаходилися за рівнянням стану (2.11) у вузлах сітки з урахуванням адіабатичного підвищення температури для зони пластичної течії матеріалу. Відповідно до залежності (2.12), поточна температура у вузлі сітки визначається таким чином:

$$T_{nml}^{k} = T_0 + \frac{f\left((\varepsilon_{eq})_{nml}^{k}, (\dot{\varepsilon}_{eq})_{nml}^{k}\right)}{2c\rho} \sum_{p=k_{pl}}^{k} \left(\sigma_{nml}^{p} - \sigma_{nml}^{p-1}\right)\left(\varepsilon_{nml}^{p} - \varepsilon_{nml}^{p-1}\right). \qquad (2.28)$$

За другим методом використовувався метод скінченних елементів в ANSYS / Explicit Dynamics. Для розрахунків при пружному деформуванні будо застосовано термопружну модель, а для визначення пластичного плину матеріалу використано модель Купера-Саймондса з емпіричними константами матеріалу, адаптованими з моделі (2.11).

Результати розрахункових досліджень максимальних переміщень і максимальних напружень за двома методами та їх порівняння подано у таблиці 2.4. Для всіх варіантів розрахунку максимальні значення досягаються в центрі локальної зони навантаження імпульсним тиском Наводяться шість варіантів розрахунків для імпульсу навантаження, що змінювався в діапазоні 1,5 ... 9,8 кг·м/с (табл. 2.3). Нагадаємо, що статична границя плинності матеріалу σ_y^{st} = 299·МПа, а границя міцності по критерію Писаренка-Лебедєва [161] σ_{dstr} = 589 МПа. Розрахунки проводилися без застосування механізму урахування руйнування матеріалу.

Таблиця 2.4

Максимальні переміщення та напруження в циліндричній оболонці при локальному ударно-імпульсному навантаженні

№	Імпульс I, кг·м/с	Максимальні переміщення U, мм			Максимальні напруження σ_{max}, МПа		
		Модель (2.14)	Модель Купера-Саймондса	Відносна похибка, %	Модель (2.14)	Модель Купера-Саймондс	Відносна похибка, %
1	1,5	5,2	5,2	0	363	372	2,4
2	1,7	5,5	5,4	1.9	369	373	1,1
3	2,6	5,8	5,9	1.7	573	574	0,2
4	3,2	6,1	6,1	0	575	577	0,3
5	3,7	6,1	6,2	0,6	576	578	0,3
6	9,8	6,2	6,4	3,1	582	668	12,9

Порівняльний аналіз результатів показав, що числові значення максимальних переміщень і напружень для обох розрахунків майже збігаються для випадків 1–5. Відносна похибка не перевищує трьох відсотків. За абсолютними значеннями максимальних еквівалентних напружень можна зробити висновок, що процес деформування відбувається в пружно-пластичній стадії, але максимальні напруження менші за границю міцності матеріалу.

Для шостого розрахункового варіанту збіжність результатів зменшується. Якщо відносна похибка для максимальних переміщень незначно перевищує три відсотки, то максимальні еквівалентні напруження суттєво відрізняються. За результатами експериментальних досліджень [304] імпульс навантаження для випадку 6 спричинює наклепання матеріалу, тобто виникнення пластичних деформацій, а не руйнування оболонки. Для моделі (2.14) максимальні еквівалентні напруження близькі до границі міцності за критерієм Писаренка-Лебедєва $\sigma_{dstr} = \frac{\sigma_+}{\sigma_-}\sigma_{eq} + \sigma_{11}\left(1 - \frac{\sigma_+}{\sigma_-}\right)$, де σ_+ – границя плинності матеріалу для розтягування, а σ_- – границя плинності матеріалу для стискання, але не перевищують її. А для моделі Купера-Саймондса максимальні еквівалентні напруження значно перевищують зазначену границю. Пояснити цей факт можна тим, що модель Купера-Саймондса не враховує адіабатичне знеміцнення матеріалу. Приймаючи до уваги результати проведених досліджень, критерієм руйнування матеріалу для узагальненої термо-пружно-пластичної моделі було обрано максимальні пластичні деформації. За цим критерієм висновки про критичні навантаження, що спричинюють локальне руйнування матеріалу, якісно не відрізняються при дослідженні за обома математичними моделями.

Числові дослідження напружено-деформованого стану складних багатоелементних конструкцій під впливом високошвидкісних навантажень пов'язані з рядом труднощів. Основною проблемою цих досліджень є велика кількість дискретних даних за просторовими координатами, що необхідні для забезпечення збіжності розв'язку на кожному інтервалі часу (2.17). Навіть для сучасної обчислювальної техніки обробка цих даних займає багато годин і, навіть, днів. Щоб уникнути означеної проблеми, пропонується використання ієрархічної системи математичних моделей та різної схематизації геометрії об'єкта (рис. 2.6). Спочатку доцільно проводити числовий аналіз напружено-деформованого стану конструкції з максимально точною геометричною моделлю та білінійним рівнянням стану матеріалу [119, 76]. Під час цього аналізу визначається динамічний тиск на конструкцію внаслідок механічного високошвидкісного впливу та зони локалізації пластичних деформацій. А потім в локальних зонах розраховуються параметри напружено-деформованого стану за моделлю (2.2) – (2.15). Такий підхід дозволяє значно скоротити час розрахунків за рахунок заміни нелінійної задачі білінійною на першому етапі досліджень та зменшення кількості дискретних даних при обмеженні зони досліджень на другому етапі.

Для зазначених в табл. 2.3 імпульсів навантаження визначалися максимальні переміщення для частини оболонки, описаної в попередньому пункті 2.5.1 (рис. 2.8). Розрахунки проводилися за трьома моделями пластичного плину матеріалу: динамічною моделлю (2.2) – (2.15), динамічною моделлю Купера-Саймондса [156] та пружно-пластичною білінійною моделлю [156]. На рис. 2.11 подано результати цих розрахунків.

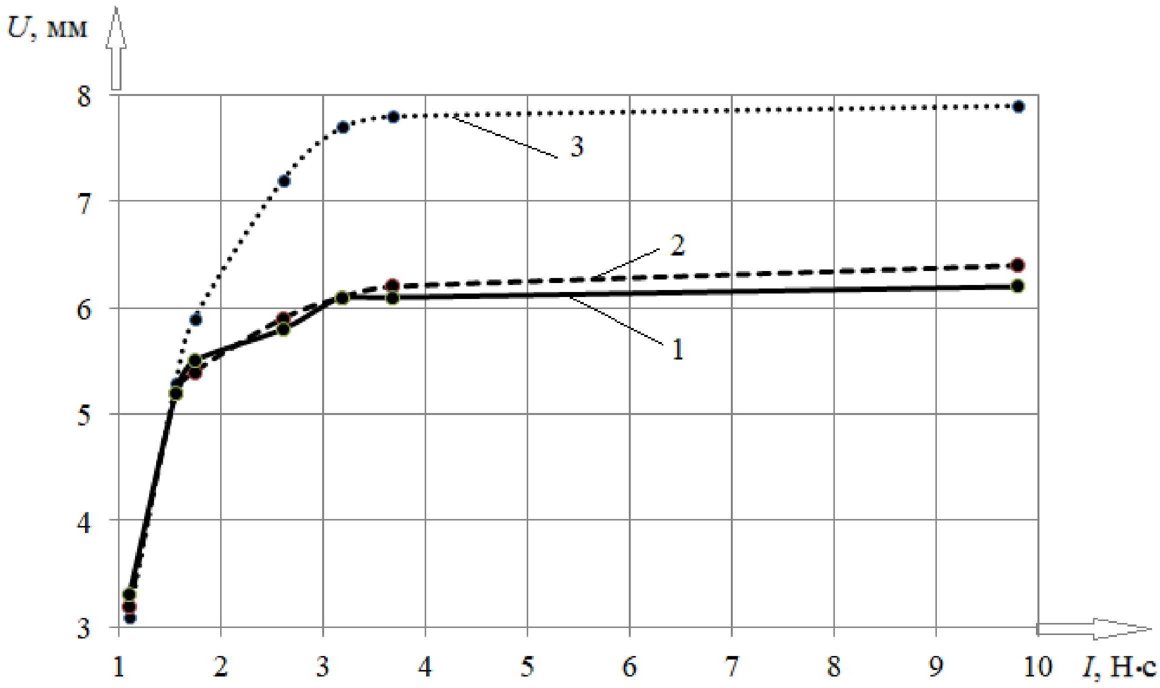


Рис. 2.11. Залежність максимальних переміщень від імпульсу навантаження для різних моделей пластичного плину матеріалу

Результати, що отримані за динамічною моделлю (2.2) – (2.15) (крива 1, рис. 2.11), реалізовані за описаною вище методикою. Результати розрахунків за моделлю Купера-Саймондса (крива 2, рис. 2.11) реалізована в ANSYS / Explicit Dynamics. Для третього випадку пружно-пластична білінійна модель реалізована в ANSYS / Transient. За результатам числового аналізу отримано, що для перших двох випадків навантаження, які відповідають пружному та малому пластичному деформуванню (табл. 2.4), результати розрахунків за трьома моделями – близькі. Подальше збільшення імпульсу навантаження призводить до суттєвої різниці поміж результатами розрахунку за динамічними моделями (крива 1 та крива 2, рис. 2.11) та статичною пружно-пластичною моделлю (крива 3, рис. 2.11). Розбіжність в максимальних значеннях, які отримані для зони пластичного плину матеріалу, складає біля 30%. Значна різниця між результатами числового аналізу при застосуванні статичних і динамічних пружно-пластичних моделей було отримано і в дослідженнях [98, 303].

Таким чином, для визначення напружено-деформованого стану зібраних багатоелементних конструкцій зі складною геометрією доцільно застосовувати стандартні розрахункові комплекси скінченно-елементного аналізу з адаптацією розробленої моделі високошвидкісного деформування. Наприклад, застосування в програмній системі ANSYS / Explicit Dynamics моделі кінематичного зміцнення Купера-Саймондса у поєднанні з модулем пружності, що залежить від температури, дозволяє реалізувати запропоноване рівняння стану (2.14). Адаптована модель може використовуватися для всіх типів елементів розрахункового модулю ANSYS / Explicit Dynamics і в поєднанні з усіма критеріями руйнування [149]. Застосування адаптованої моделі для розв‘язання конкретних задач дозволяє суттєво скоротити час на розв’язання окремої задачі, а також розробляти методики розрахунку для цілого класу аналогічних задач з урахуванням особливостей їх збирання, експлуатації, транспортування та роботи в умовах ударно-імпульсного навантаження.

Термо-пружно-пластичну узагальнену модель високошвидкісного деформування елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження було використано для розв’язання ряду практичних задач, наведених у наступних розділах.

2.6 Висновки за розділом 2

У розділі викладено основні положення узагальненої моделі динамічного напружено-деформованого стану конструкцій під впливом імпульсного навантаження. Модель враховує фізичні особливості процесу високошвидкісного деформування полікристалічних матеріалів та ґрунтується на одночасному урахуванні високошвидкісного зміцнення та температурного знеміцнення матеріалу. Вона враховує нелінійну залежність еквівалентних напружень як від еквівалентних деформацій, так і від швидкості деформацій та температури. Від існуючих запропонована модель відрізняється застосуванням рівняння стану у модифікованій формі Пежини з додатковими температурними множниками у формі Джонсона-Кука, що дозволяє більш точно моделювати пластичну течію полікристалічних матеріалів.

До переваг запропонованої моделі можна віднести той факт, що рівняння напружено-деформованого стану на основі форми Пежини має відносно малу кількість емпіричних констант. Також, ці константи є універсальними для багатьох емпіричних залежностей еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій і їх швидкостей, а тому присутні у наукових публікаціях українських, європейських та американських вчених для багатьох полікристалічних матеріалів. А температурний множник у вигляді Джонсона-Кука розраховується на основі відомих механічних властивостей матеріалів. Таким чином, числові дослідження термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування конструкцій за розробленою моделлю можна проводити без попередніх коштовних експериментів по визначенню динамічних властивостей матеріалів, а застосовуючи широку базу вже існуючих.

Для числового дослідження тривимірного динамічного напружено-деформованого стану конструкцій під впливом високошвидкісного навантаження запропоновано проводити двоетапні розрахунки за ієрархічною системою моделей пластичного плину матеріалу. На першому етапі досліджень доцільно проводити числовий аналіз напружено-деформованого стану конструкції з максимально точною геометричною моделлю та білінійним рівнянням стану матеріалу. А вже на другому етапі в локальних зонах концентрації напружень проводити розрахунки за термо-пружно-пластичною моделлю (2.2) – (2.15). Це дозволяє на кожному етапі значно зменшити кількість дискретних даних за просторовими координатами, що необхідні для забезпечення збіжності розв’язку задачі для кожного дискретного моменту часу, і тим самим суттєво скоротити час досліджень.

Запропоновано розрахункову методику визначення динамічного термо-пружно пластичного стану в елементах конструкцій. Вона ґрунтується на застосуванні адаптованого методу кінцевих різниць та дискретизації у часі за схемою прогнозу-корекції Вожеле для розв'язання суттєво нелінійних задач високошвидкісного деформування конструкцій з матеріалу, механічні характеристики якого змінюються під час процесу деформування. Перевагою цієї методики є відносно простий спосіб числового розв'язання рівнянь руху у переміщеннях та фіксований алгоритм знаходження всіх інших параметрів напружено-деформованого стану за компонентами вектору переміщень на кожному дискретному кроці за часом. Використання рівнянь руху у переміщеннях дозволяє одночасно досліджувати як пружне, так і пластичне деформування в елементі конструкції, враховувати зміну границі плинності матеріалу в залежності від інтенсивності імпульсного навантаження.

Результати, що подано в розділі 2, опубліковані в роботах [1, 13 – 25, 43 – 51].

РОЗДІЛ 3
ВИСОКОШВИДКІСНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Багато елементів конструкцій сучасної промисловості працюють в умовах високошвидкісних навантажень. Деякі з них зазнають високошвидкісного механічного впливу під час технологічних аварій і техногенних катастроф. Під час проектування проводяться теоретичні та експериментальні дослідження динамічної міцності конструкцій як для штатних режимів експлуатації, так і для типових аварійних випадків. Застосування числового моделювання для визначення напружено-деформованого стану в конструкціях під час високошвидкісного деформування дозволяє на етапах розробки проектної документації та доведення готового виробу визначати потрібні конструкційні матеріали та геометричні параметри елементів конструкцій для заданого рівня навантажень. Числовий аналіз, що ґрунтується на математичних моделях, які враховують всі обґрунтовані фізичні фактори процесу деформування, дозволяє значно зменшити кількість необхідних натурних експериментів.

В даному розділі подано методи розв‘язання практичних задач високошвидкісного деформування елементів конструкцій при імпульсному навантаженні, які ґрунтуються на застосуванні термо-пружно-пластичної математичної моделі та числовому методі розв‘язання тривимірної динамічної задачі, що викладені у розділі 2.

Наведено результати досліджень динамічного напружено-деформованого стану оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок локального ударного навантаження частиною лопатки, а також локальної зони лопаток газотурбінного двигуна при пошкодженні сторонніми предметами під час експлуатації. Вплив ударно-імпульсного навантаження на ці елементи газотурбінного двигуна може спричиняти їх локальне пошкодження. Запропоновано двоетапне розрахункове дослідження: на першому етапі визначається локальна зона пошкодження елемента конструкції, а на другому етапі для визначеної зони досліджується тривимірний динамічний термо-пружно-пластичний напружено-деформований стан.

Приводяться числові методи розв‘язання задач високошвидкісного деформування плити з оребренням під впливом газодинамічної ударної хвилі та пластини під впливом гідродинамічного ударного навантаження. Запропоновані методи ґрунтуються на використанні експериментальних даних по ударно-хвильовому навантаженню зазначених елементів конструкцій.

3.1 Напружено-деформований стан оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок локального ударного навантаження частиною лопатки

Під час експлуатації на корпусні елементи газотурбінних двигунів часто діють високошвидкісні ударно-імпульсні локальні навантаження. Причиною їх можуть бути фрагменти, що з‘являються при руйнуванні лопаткового апарату або ротора [308, 309]. Світовий досвід доведення та експлуатації турбомашин показує, що неможливо уникнути появи випадкових експлуатаційних дефектів, які можуть призвести до їх руйнування. Так, при обриві лопатки, може бути пошкоджено і навіть виведено з ладу корпус двигуна. На рис. 3.1 подано фотографії оболонкової частини типового корпусу газотурбінного двигуна до експлуатації, та його зруйнованого часткою лопатки фрагменту.

а) б)

Рис. 3.1. Частина корпусу газотурбінного двигуна:

а) до експлуатації; б) фрагмент, що зруйнований часткою лопатки

Для запобігання руйнування корпусів елементами зруйнованих лопаток під час експлуатації, обов‘язковим етапом проектних робіт є динамічний аналіз міцності оболонок із заданими фізико-механічними характеристиками матеріалу. Метою цього аналізу є оцінка міцності оболонки корпусу двигуна під впливом заданого імпульсного навантаження. Поєднання числових і експериментальних досліджень окремих елементів корпусу дозволяє значно скоротити кількість натурних експериментальних досліджень повної конструкції. А проведення числових досліджень за математичними моделями різного рівня складності дозволяє підвищити надійність та достовірність цієї оцінки.

За замовленням ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О.Г. Івченка» було проведено моделювання пошкодження частини корпусу газотурбінного двигуна фрагментом лопатки, що зазнала руйнування. Вхідні дані для постановки задачі були надані підприємством-замовником. Метою числового дослідження напружено-деформованого стану елемента конструкції у формі частини циліндричної оболонки є підтвердження того, що змодельоване ударно-імпульсне навантаження може бути витримане конструкцією та не спричинить її руйнування.

Напружено-деформований стан корпусних елементів і всієї конструкції пов’язан з такими факторами навантаження як максимальний тиск, час і зона його впливу, швидкість зростання й затухання імпульсу тиску та іншими [310, 311]. Для комплексного моделювання динаміки конструкції внаслідок впливу високошвидкісного навантаження та аналізу її динамічної міцності й стійкості потрібно урахування всіх особливостей механічного впливу [119], тому завдання високошвидкісного впливу δ-функцією може внести значну похибку в результати розрахунків. Найбільше прийнятним методом урахування впливу високошвидкісного механічного навантаження на конструкцію є використання даних експериментальних досліджень, що повніше відображають процес навантаження.

Аналіз напружено-деформованого стану оболонкової частини корпусу газотурбінного двигуна (рис. 3.1 а) при ударно-імпульсному навантаженні проводиться в два етапи. На першому етапі досліджувався вплив відірваної частини лопатки на корпусний елемент двигуна, визначалася зона локалізації напружень. На другому етапі розглядалася зона локалізації напружень в конструкції. Для аналізу напружено-деформованого стану в цій зоні використовується термо-пружно-пластична модель деформації матеріалу (2.14), що дозволяє достовірніше оцінити динамічну міцність в зоні навантаження за рахунок уточненого моделювання динамічних властивостей матеріалу [77, 88, 98]. Для такого аналізу застосовується числовий метод, що викладено у підрозділі 2.5.

Досліджено напружено-деформований стан оболонкової частини корпусу при високошвидкісному навантаженні відірваною частиною лопатки. Моделюється процес зіткнення зі швидкістю 314 м/с призматичного ударника з розмірами поверхні зіткнення 0,017 м × 0,003 м та довжиною 0,2 м зі сталі 15Х1М1Ф зі стальною (Ст 20) циліндричною оболонкою товщиною 0,016 м, діаметром 2,85 м і довжиною 0,12 м. Моделювання проводиться за методом скінченних елементів з урахуванням впливу температури при пружному деформуванні та пластичної течії матеріалу за рівнянням стану Купера-Саймондса, як описано в розділі 2 Для сталі 15Х1М1Ф приймалися наступні механічні характеристики: модуль Юнга $E = 214$ ГПа, густина $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, статична границя текучості $\sigma_T = 320$ МПа, границя міцності $\sigma_B = 500$ МПа. А механічні характеристики сталі 20 приймалися такими: модуль Юнга $E = 212$ ГПа, густина $\rho = 7{,}86 \cdot 10^3$ кг/м^3, статична границя текучості $\sigma_T = 175$ МПа, границя міцності $\sigma_B = 350$ МПа. Зауважмо, що значення статичних границь текучості та міцності матеріалу ударника значно перевищують ці параметри для матеріалу оболонки. При числових дослідженнях крок у часі дорівнював 0,1 мс, а максимальний лінійний розмір оболонкового 4-вузлового елементу SHELL163, який підтримує кінематичне зміцнення матеріалу за моделлю Купера-Саймондса, не перевищував 1 мм.

На рис. 3.2 наведено результати розрахунку максимальних еквівалентних напружень. Вони виникають на 0,8 мс від початку контактної взаємодії ударника з оболонкою. Результати досліджень показують значну локалізацію деформаційного процесу. При площі зони контакту ударника S_P розмір зони підвищених напружень не перевищує $S \leq (5 \div 10)\ S_P$. Максимальні значення еквівалентних напружень дорівнюють 169 МПа і не перевищують границю текучості матеріалу. Нагадаємо, що статична границя текучості матеріалу σ_T = 175 МПа, а таким чином, за результатами першого етапу числових досліджень, задане навантаження не спричинює пластичної течії матеріалу оболонки та є безпечним для конструкції.

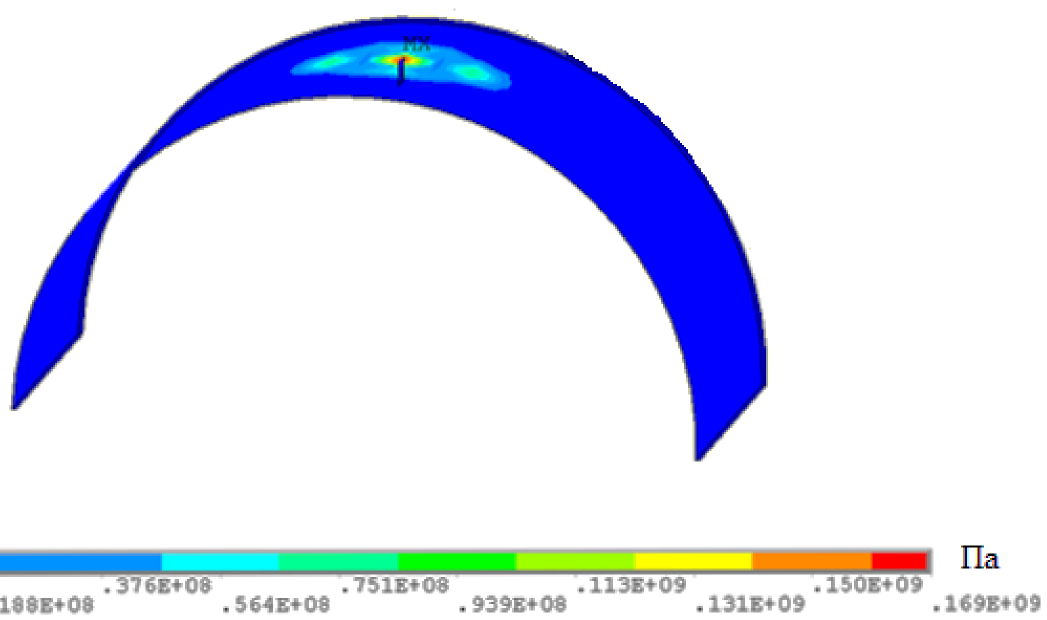


Рис. 3.2. Максимальні еквівалентні напруження при локальному ударно-імпульсному навантаженні

Зміна у часі максимальних еквівалентних напружень показана на рис. 3.3. Аналіз результатів показав, що максимальні напруження виникають в зоні ударного навантаження і швидко затухають.

Подальші дослідження проводилися для частини циліндричної оболонки з лінійними розмірами $0 \leq \xi \leq 80$ мм та $0 \leq \eta \leq 120$ мм. Навантаження моделюється функцією динамічного тиску (2.21), яка діє на локальну зону з координатами (ξ_1, η_1), де 25 мм $\leq \xi_1 \leq$ 27 мм, а 62 мм $\leq \eta_1 \leq$ 78 мм.

Максимальний тиск визначався з умов зіткнення ударника з оболонкою та приймався усереднено по всій поверхні контакту P_{max} = 0,5 МПа. Нульовий час для розрахунків приймався в момент зіткнення ударника з оболонкою.

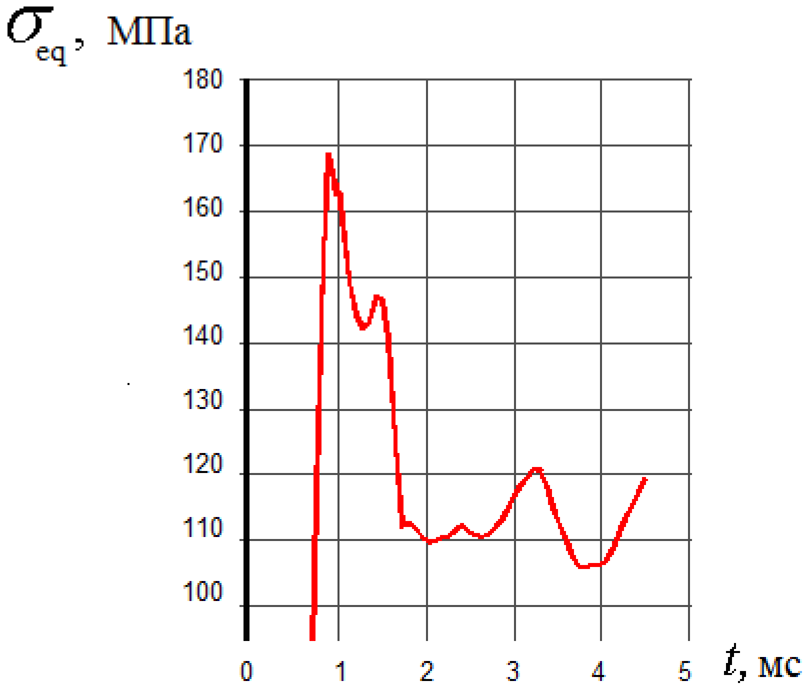


Рис. 3.3. Зміна у часі максимальних еквівалентних напружень

Моделювання напружено-деформованого стану здійснювалось за термо-пружно-пластичною моделлю, що викладена у розділі 2. Рівняння руху у переміщеннях для циліндричної системи координат приймалися у вигляді (2.6). Початкові умови (2.3) приймалися нульовими для температури T_0 = 27 ^{0}С, а функції тиску у граничних умовах (2.4) визначалися аналогічно (2.18). Метод числового розв‘язання рівнянь руху с початковими і граничними умовами, а також визначення параметрів напружено-деформованого стану в локальній частині конструкції викладено в підрозділі 2.5. Початковий розрахунковий крок у часі дорівнював 0,05 мс, максимальний просторовий крок на перевищував 1 мм. Динамічні властивості матеріалу оболонки приймалися за даними експериментальних досліджень, викладених в монографії [82].

На рис. 3.4 наведено результати розрахунку максимальних еквівалентних напружень на поверхні навантаження, що отримані за термо-пружно-пластичною моделлю. Аналіз результатів розрахунку еквівалентних напружень підтверджує той факт, що максимальні значення напружень не перевищують границю текучості матеріалу σ_T = 175 МПа. Аналіз даних підтверджує, що під час високошвидкісного деформування внаслідок локального навантаження напружено-деформований стан також локалізований в зоні ударного навантаження. При віддалені від цієї зони еквівалентні напруження різко падають.

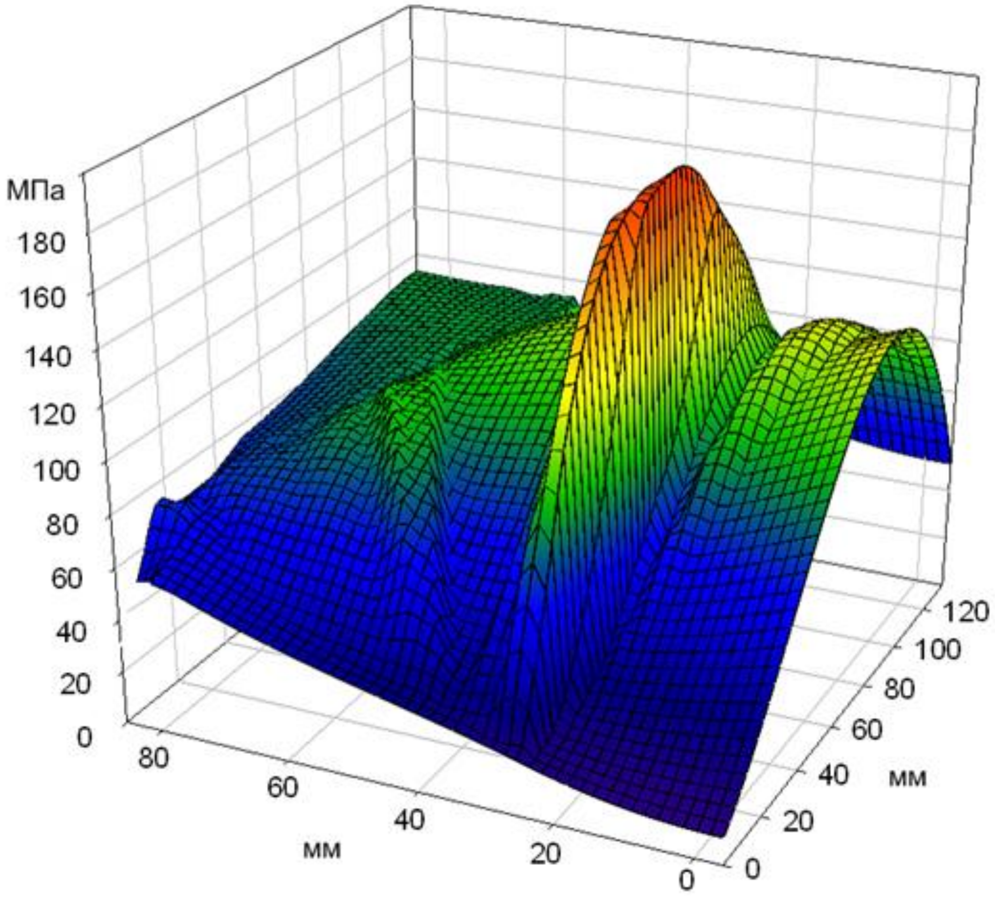


Рис. 3.4. Максимальні еквівалентні напруження на поверхні навантаження

Відзначимо, що результати числового аналізу, визначені за двома математичними моделями, близькі. Таким чином, можна прогнозувати, що для обраного матеріалу оболонки зазначені ударно-імпульсні навантаження не призводять до пластичного деформування, а обраний конструкційний матеріал задовольняє вимогам підприємства-замовника.

Було проведено додаткові числові дослідження, які показали, що збільшення швидкості зіткнення ударника до 317 м/с призводить до пластичного деформування в місті контактної взаємодії ударника з оболонкою. Також до пластичного деформування призводить і навантаження оболонки ударника зі зменшеними розмірами поверхні зіткнення до 0,012 м × 0,003 м.

3.2 Моделювання пошкодження лопаток газотурбінних двигунів сторонніми предметами під час експлуатації

Ще однією проблемою для газотурбінних двигунів є руйнування лопаток під час експлуатації внаслідок ударної взаємодії із сторонніми предметами на високій швидкості обертання [315]. За статистикою, до 40% дострокового зняття з експлуатації двигунів є наслідком пошкодження саме сторонніми предметами [311, 316] На рис. 3.5 показана лопатка з типовим пошкодженням кромки сторонніми предметами.

На стадії проектування лопаткового апарату двигуна проводиться аналіз напружено-деформованого стану лопаток при ударно-імпульсному навантаженні. Результати дослідження мають підтвердити, що обраний конструкційний матеріал не зруйнується під час навантаження заданим тиском.

З метою зменшення кількості натурних експериментів за рахунок розрахункових досліджень було розроблено метод числового аналізу динамічної міцності кромки лопатки під дією заданого високошвидкісного ударно-імпульсного навантаження. В наш час швидкого розвитку новітніх матеріалів розроблений метод значно прискорює вибір потрібних механічних параметрів матеріалу для заданого діапазону навантажень. Проведення числових досліджень на повній конструкції недоцільно, бо це процес є трудомістким і витратний за часом. Приймаючи до уваги локалізацію напружень, динамічну міцність конструкційного матеріалу доцільно досліджувати в обмеженій області впливу навантаження. За результатами модельних досліджень відокремлюються всі незадовільні варіанти. Таким чином значно зменшується час числових досліджень на повній конструкції.

Рис. 3.5. Типове пошкодження лопатки газотурбінного двигуна сторонніми предметами

Задача розв‘язувалася із застосування термо-пружно- пластичної моделі (2.14). Моделювання проводилося для титанового сплаву, що має наступні фізико-механічні властивості: $E = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Па, $\sigma_T = 4{,}9 \cdot 10^8$ Па, $\sigma_B = 6{,}9 \cdot 10^8$ Па, $D = 4{,}45 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, $n = 4{,}84$, $m = 4{,}84$, $\rho = 4{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Лопатка оберталася з частотою 90 Гц. Дія частки на лопатку при швидкості зіткнення 300 м/с відповідала максимальному тиску навантаження $P_0 = 95$ МПа з коефіцієнтом загасання імпульсу 10^6 с$^{-1}$. Тривалість імпульсу 10^{-5} с$^{-1}$. Розглядається прямокутний виріз біля бокової кромки лопатки довжиною $L = 5$ см. Зона навантаження дорівнює 1 см і знаходиться по центру вирізу 2 см $\leq l \leq$ 3 см. На рис. 3.6 наводяться результати розрахунків зміни еквівалентних напружень за часом в зоні зміни напружено-деформованого стану внаслідок ударно-імпульсного навантаження 1 см ≤ l ≤ 4 см.

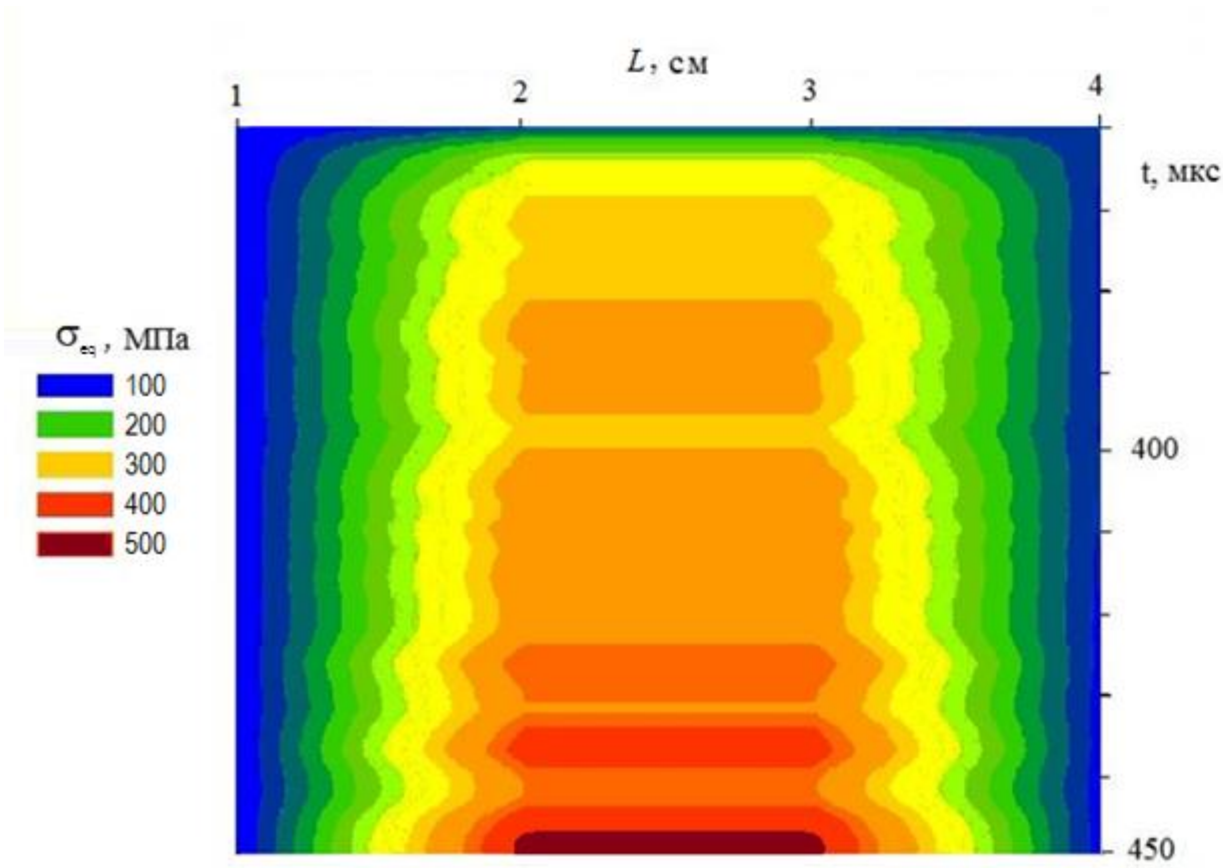


Рис. 3.6. Максимальні еквівалентні напруження в локальній зоні удару по боковій кромці лопатки

За даними розрахунку, в перші 450 мкс з моменту навантаження, еквівалентні напруження досягають границі текучості, що свідчить про появу пластичних деформацій. Також спостерігається значна локалізація деформаційного процесу. Таким чином, за цими двома показниками можна прогнозувати виникнення явища наклепання на кромці лопатки, а не руйнування.

Розрахункові дослідження більш тривалого за часом динамічного напружено-деформованого стану в локальній зоні імпульсного ударного навантаження показані на рис. 3.7.

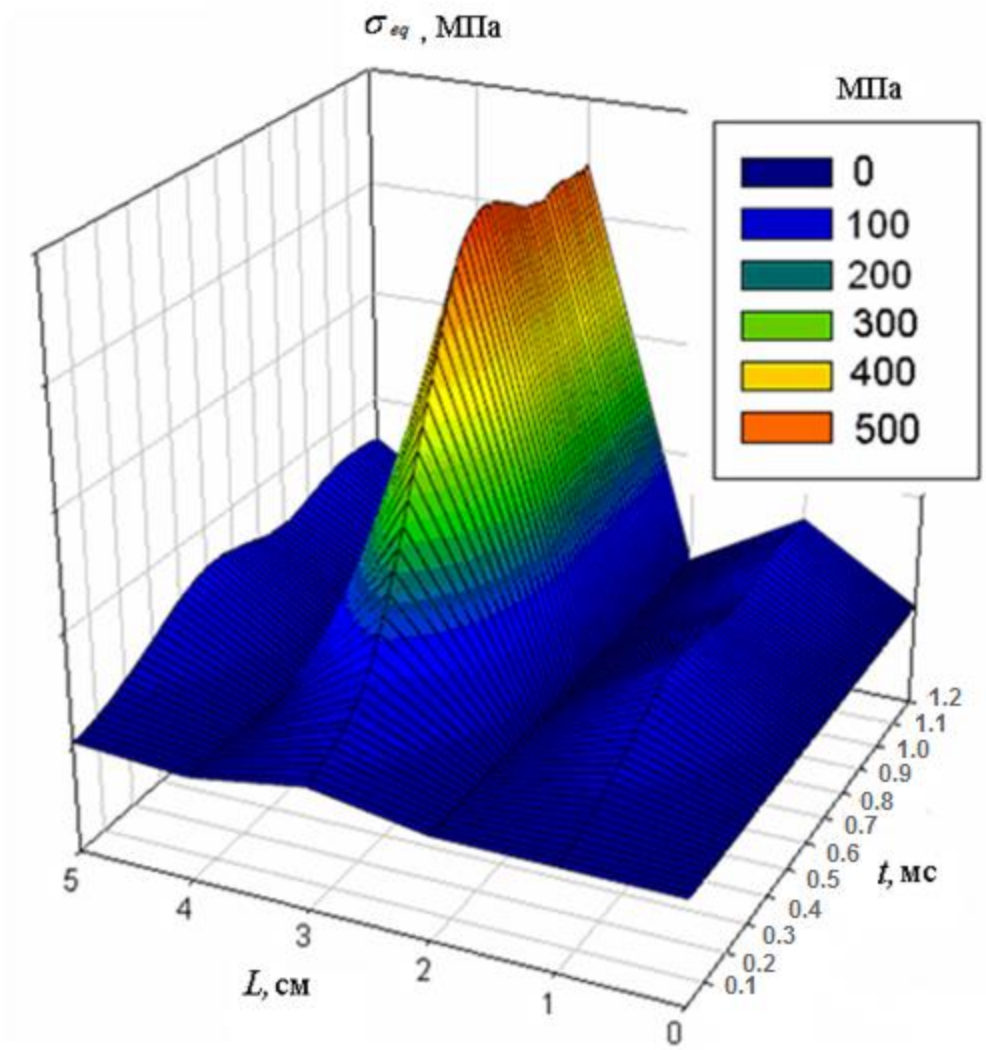


Рис. 3.7. Динаміка еквівалентних напружень
в зоні удару по боковій кромці лопатки

Результати розрахунків показують, що еквівалентні напруження в зоні ударної взаємодії зростають до максимального значення і протягом перших 400 мкс, а далі деякий час майже не змінюють свого значення. З цього можна зробити висновок, що для обраного титанового сплаву задане імпульсне навантаження не спричинить руйнування матеріалу, а тільки локальне наклепання в місці контакту.

Аналіз загальної картини напружено-деформованого стану дозволяє зробити висновок про рівень динамічної напруженості в зоні локального імпульсного навантаження, а значення еквівалентних напружень – оцінити міру пошкодження лопатки в зоні контакту. Зауважимо, що за викладеним методом можна дослідити вплив локального ударно-імпульсного навантаження на будь-яку частину лопатки.

3.3 Визначення наслідків впливу газодинамічної ударної хвилі на елементи будівельних конструкцій

Моделювання високошвидкісного навантаження конструкцій газодинамічною ударною хвилею, як правило, пов’язане з оцінкою міцності та цілісності будівельних споруд та обладнання внаслідок природніх чи техногенних катастроф. На підприємствах, де зберігається вибухонебезпечна речовина, аналіз наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди проводиться для кожної можливої аварійної ситуації. Для цього визначається напружено-деформований стан контейнерів зберігання вибухонебезпечної речовини та розглядається вплив імпульсного навантаження у вигляді ударної хвилі у повітряному середовищі на будівельні споруди у зоні можливого ураження.

Зазвичай, в дослідженнях на стадії проектування, ударну хвилю розглядають як сферичну хвилю навантаження з тиском на фронті [312]

$$
\begin{gathered}
P(t) = P_{max} e^{\frac{-t}{\theta}}, \\
P_{max} = \left(0{,}8\sqrt[3]{k_0} + 3{,}5\sqrt[3]{k_0^{\,2}} + 12k_0\right)/10; \\
\theta = 1{,}7 \cdot 10^{-3} k_0 \sqrt{R_0},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

де k_0 – параметр, що характеризує інтенсивність тиску та має розмірність маси;

R_0 – відстань від джерела ударної хвилі до конструкції.

Зауважимо, що за виразом (3.1) тиск не залежить від координати. Такий підхід доцільний для задач, де лінійні розміри конструкції значно менше за довжину фронту ударної хвилі, або коли джерело навантаження розташовано всередині захисної споруди [98]. Але для визначення наслідків техногенних аварій на будівлі великих підприємств та для проектування захисних споруд необхідно моделювання впливу детонаційного навантаження на задану обмежену зону у просторі. Для таких задач динамічний тиск внаслідок ударно-хвильового навантаження має бути функцією як максимального тиску та часу дії навантаження, так і координати [313, 314]. В ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН» розроблено алгоритм та програмне забезпечення для визначення тиску як функції просторових координат та часу за фізичними даними по вибухонебезпечній речовині та її місцю знаходження. Аналіз цих даних, що були надані за господарським договором «Розробка методів моделювання наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди», показав, що для типових фасадів промислових будівель максимальний тиск від ударної хвилі P_{max} значно відрізняється від моделі (3.1). На максимальне навантаження фасадів впливає не тільки маса вибухової речовини, але й відстань від центру вибухової хвилі та кут її надходження до будівлі.

Далі використовувалися дані по газодинамічній ударній хвилі, що отримані в ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН» з віртуального експерименту аварійної ситуації на хімічному виробництві (Додаток Б).

3.3.1 Моделювання впливу газодинамічної ударної хвилі. Проаналізуємо результати експериментальних досліджень абсолютного тиску у просторі внаслідок впливу детонаційної ударної хвилі, що отримані Науковим центром вивчення ризиків «РИЗИКОН» (м. Сєвєродонецьк) та надані для виконання науково-дослідної роботи за темою «Розробка методів моделювання наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди». Під час експерименту отримані масиви даних, які складаються зі значень абсолютного тиску за часом для кожної заданої точки простору. За результатами експерименту складається сукупність таких масивів для заданої області у просторі. На рис. 3.8 подано типовий графік, побудований за експериментальними даними зміни у часі надлишкового тиску для заданої точки простору, що виникає в результаті впливу ударної хвилі внаслідок аварійного вибуху [313].

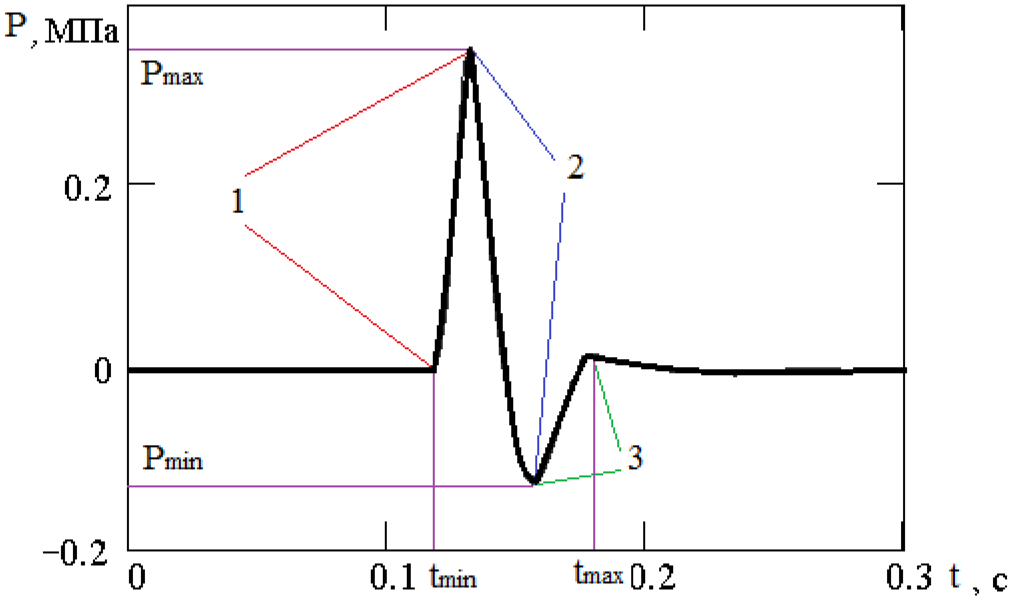


Рис. 3.8. Залежність імпульсного тиску від часу для заданої точки простору при детонаційному навантаженні

Обробка експериментальних даних дозволяє для обраних точок простору визначити значення абсолютного тиску $\tilde{P}$. Але в задачах визначення динамічної міцності конструкції на напружено-деформований стан впливає лише надлишковий тиск, а не абсолютний. Для визначення надлишкового тиску навантаження за даними експерименту враховуємо, що 1 атмосфера = 101325 Па абсолютного тиску, а надлишковий тиск P обчислюється згідно рівності: $P = (\tilde{P}-1)\cdot 101325$ Па. Таким чином, експериментальні дані дозволяють отримати масиви значень надлишкового тиску від часу для заданих точок простору при дії детонаційної ударної хвилі.

Визначимо вид емпіричної залежності тиску у заданій точці простору як функції часу. Проаналізуємо експериментальні дані. Графік, що показаний на рис. 3.8, має характерну форму імпульсного навантаження для точки M (x, y, z) декартового простору. Процес навантаження розпочинається в момент часу $t_{\min}$. Далі (рис. 3.8, зона 1) відбувається стрімкий зріст зовнішнього тиску від нуля до $P_{\max}$. Як правило, ця зона за часом дуже мала, тому при аналітичному моделюванні імпульсного навантаження розрахунки розпочинають з моменту часу, що відповідає $P_{\max}$ [98]. Числове значення спаду тиску від $P_{\max}$ до $P_{\min}$ задає величину амплітуди навантаження (рис. 3.8, зона 2). Вплив імпульсного навантаження припиняється при $t_{\max}$, коли значення тиску повертається знову практично до нуля (рис. 3.8, зона 3). Сумарно зони 2 та 3 доцільно моделювати спаданням тиску від ($P_{\max}$ - $P_{\min}$) до нуля за експоненціальним законом, що добре узгоджується з експериментальними даними та теоретичними методами розрахунку [98]. Час впливу імпульсного тиску розраховується як $t^* = t_{\max} - t_{\min}$.

Такий підхід дозволяє згладити функцію тиску за часом та зберегти адекватність моделі фізичному процесу імпульсного навантаження. Таким чином, модель імпульсного тиску для заданої точки декартового простору має вигляд

$$P(x,y,z,t) = Q(x,y,z)e^{\frac{-t}{\theta}}, \tag{3.2}$$

де $P(x, y, z, t)$ – функція локального тиску в точці М (x, y, z);

$Q(x, y, z) = (P_{max} - P_{min})$ – максимальний тиск в заданій координаті;

t – час навантаження, $t_{min} \leq t \leq t_{max}$;

θ – емпіричний параметр швидкості спадання навантаження в часі.

Була розроблена методика адаптації динамічного масиву вихідних даних просторового тиску $P = P(x,y,z,t)$, внаслідок газодинамічних ударних навантажень на будівельні об'єкти, до числового аналізу динамічної міцності елементів будівельних споруд: балок (цифра 1, рис. 3.9), плит (цифра 2, рис. 3.9), 3 – колон (цифра 3, рис. 3.9), 4 – рамних конструкцій (цифра 4, рис. 3.9) та інших.

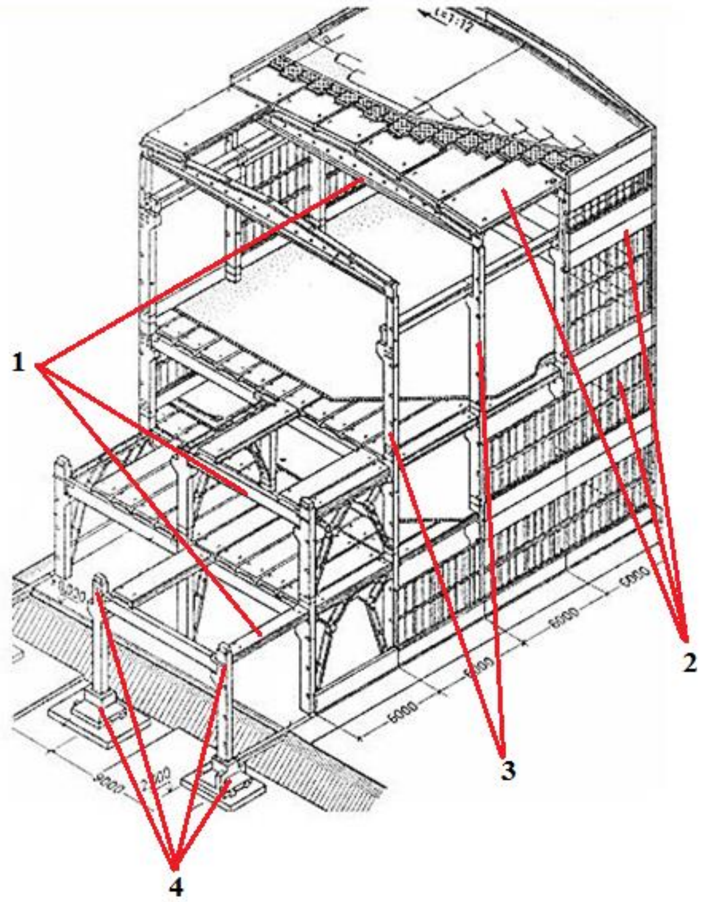


Рис. 3.9. Типова будівельна споруда:

1 – балки;

2 – плити;

3 – колони;

4 – рамна конструкція

Для аналізу динамічної міцності елементів будівельних споруд внаслідок навантаження ударною газодинамічною хвилею запропонована наступна модель динамічного тиску на поверхні конструкції, що навантажуються.

Схема навантаження показана на рис. 3.10. Центр вибухової хвилі (цифра 1 на рис.3.10) розташований на відстані L від точки розрахунку на будівельній споруді (цифра 2 на рис.3.10). Вибухова хвиля (цифра 3 на рис.3.10) до кожної точки поверхні, що навантажується, надходить під кутом $\varphi = \varphi(x, y)$, де (x, y, z) – декартова система координат, що пов‘язана з будівлею.

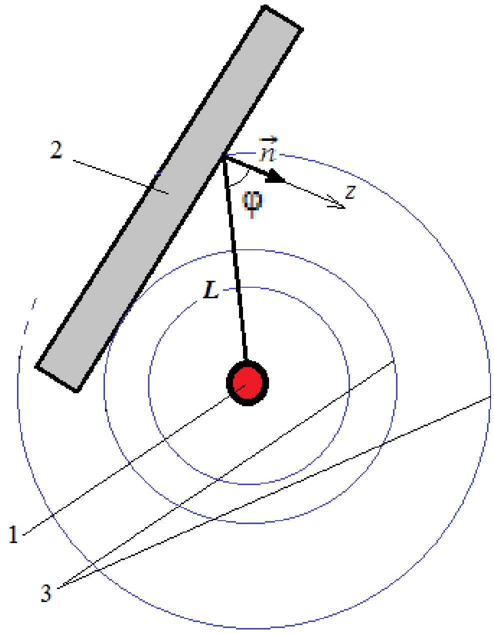


Рис. 3.10. Схема навантаження типової споруди:

1– центр вибухової хвилі;

2 – будівельна споруда;

3 – вибухова хвиля

Тоді модель навантаження кожної точки споруди буде мати вигляд

$$P = P(x,y,z,t) = P_{max}(x,y)e^{\frac{-t}{\theta}} \cdot f(L,\varphi), \qquad (3.3)$$

де $P_{max}(x,y)$ – емпірична функція максимального тиску на фронті ударної хвилі в заданій точці конструкції;

$f(L,\varphi)$ – емпірична функція впливу ударної хвилі на конструкцію.

Функція (3.3) формується для кожної точки контакту (x, y) з масиву вихідних даних за віртуальними експериментальними дослідженнями розповсюдження газодинамічної хвилі у часі. Очевидно, що використання такого обсягу числової інформації для аналізу динамічної міцності будівельних конструкцій неефективно. Тому була запропонована методика адаптації масиву вихідних даних впливу ударно-хвильових навантажень на конструкції для подальшого визначення їх динамічної міцності.

Для адаптації масиву вихідних даних впливу ударно-хвильових навантажень необхідно реалізувати деякі процедури.

1. Оскільки вихідний масив являє собою дискретні значення абсолютного тиску для кожної заданої точки простору, що змінюється в часі, то на першому етапі обробки вихідних даних будуються два масиви: одновимірний масив за часом і масив значень абсолютних навантажень на конструкцію для точок простору, що відповідають координатам фронтальної поверхні плити.

2. На другому етапі переходимо від абсолютного тиску до надлишкового та будуємо матрицю $P(x,y)\big|_{t=t_n}$, $n=1,2,3...$ для кожного дискретного моменту часу, яка дозволяє досліджувати весь процес навантаження для кожної дискретної точки конструкції. Також визначаємо числове значення максимальної амплітуди тиску навантаження для кожної точці фасаду. Як приклад, на рис. 3.11 показано надлишковий тиск в часі для початку координат.

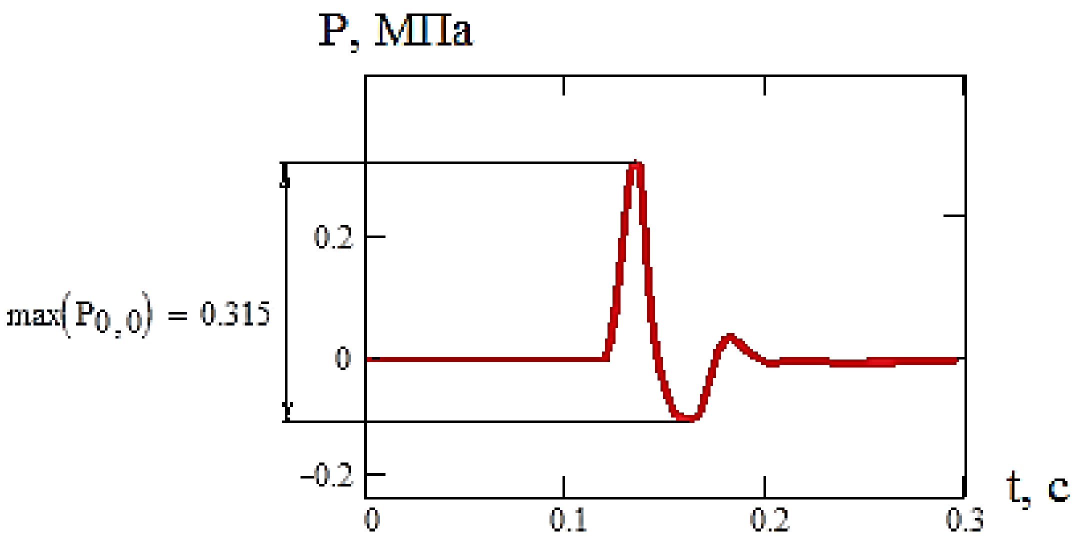


Рис. 3.11. Надлишковий тиск в часі для початку координат

Треба відмітити, що об‘єм дискретної інформації по надлишковому тиску для кожної координати конструкції за проміжок часу впливу ударної хвилі дуже великий. Використання її для визначення напружено-деформованого стану елементів будівель в такому вигляді приводить до втрати збіжності розв‘язку задачі. Тому запропоновано метод адаптації отриманих масивів даних для розрахункових досліджень динамічної міцності.

3. На третьому етапі з отриманих даних максимальної амплітуди тиску навантаження для кожної точці фасаду досліджуємої конструкції будується двовимірний масив $P(x,y)_{max}$. На рис. 3.12 показана поверхня максимального надлишкового тиску для площини простору розміром 5 м×15 м. Для даного випадку навантаження максимальне значення масиву дорівнювало 40,5 кПа та досягалося у точці з координатами (x, y)=(0.25 м, 0.82 м).

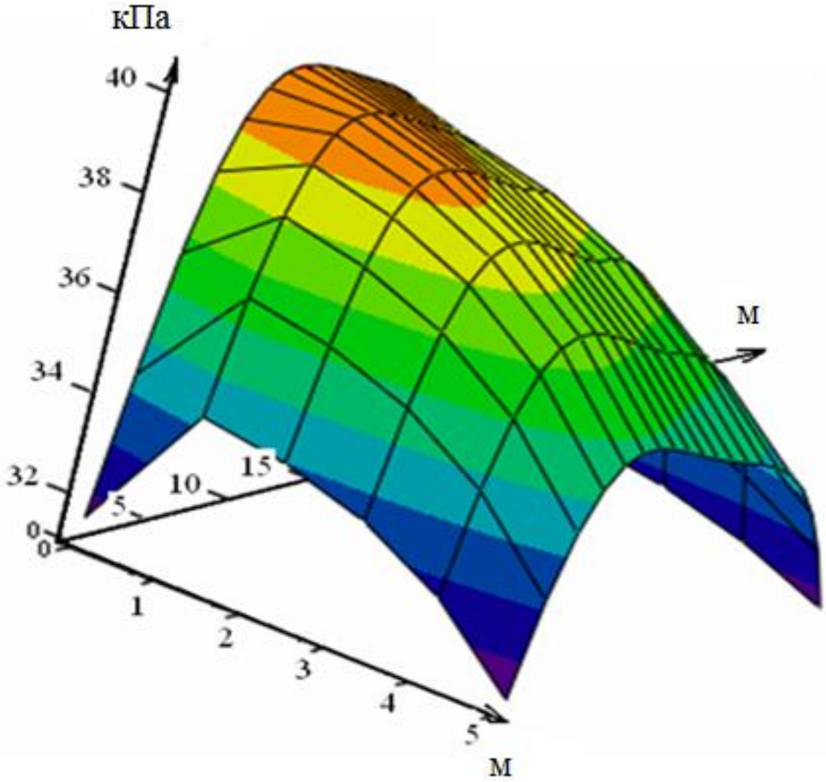


Рис. 3.12. Поверхня максимального надлишкового тиску

для площини простору розміром 15 м×5 м

Аналіз поверхні дозволяє зробити висновок про її гладкість. Таким чином, для подальшого дослідження динамічної міцності для моделювання ударно-хвильового імпульсного навантаження в виразі (3.3) константу P_{max} замінюємо дискретним масивом $P(x,y)_{max}$. Функцію $f(L,\varphi)$ приймаємо за одиницю. Відлік часу розпочинаємо з моменту максимального навантаження. Константу θ визначаємо з інтервалу спадання тиску з максимального до мінімального значення (рис.3.10) для точки з максимальним навантаженням.

Таким чином, газодинамічне навантаження моделюється динамічним тиском на поверхні конструкції, що дотична до фронту розповсюдження ударної хвилі

$$P = P_{max}(x,y)e^{\frac{-t}{\theta}}, \tag{3.4}$$

де $P(x,y)_{max}$ – масив максимальних амплітуд навантажень на фронтальній поверхні конструкції;

t – розрахунковий час, що розпочинається з моменту навантаження конструкції максимальним тиском.

Верифікація розробленого методу адаптації масиву вихідних даних впливу ударно-хвильових навантажень на будівельні споруди проводилася у ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН». Результати досліджень були використані для оцінки підвищення динамічної міцності елементів конструкцій будівельних споруд (Додаток Б).

3.3.2. Моделювання наслідків впливу газодинамічної ударної хвилі на плиту з оребренням. В наш час значно збільшилась кількість промислових об'єктів і жилих будівель, що зазнають впливу газодинамічної ударної хвилі. Більшість з них в результаті детонаційного впливу зберігає свою цілісність, але виникнення пластичних деформацій в окремих елементах будівель можуть призвести до повного руйнування. Уникнути такого руйнування можна шляхом зміцнення зазначених елементів конструкцій, а для цього потрібно моделювання їх динамічної міцності під час вибухового навантаження.

Для визначення можливих наслідків руйнування промислових об‘єктів повне геометрично достовірне моделювання кожної типової будівельної споруди (рис. 3.9) недоцільно через великий обсяг вхідних даних і невизначеності кута надходження фронту ударної хвилі (рис. 3.10). Тому запропоновано і створено типову елементну базу, що містить: балки з різними граничними умовами (жорстке закладення, шарнірне обпирання, вільний край та їх комбінації) та з варійованими геометричними розмірами; колони, які на додачу до властивостей балок можуть бути статично навантажені вздовж осі; рами, як з‘єднання балок і колон; плити з геометричними розмірами в плані, товщиною та ребрами і різними видами граничних умов. Як показав узагальнений опит експериментальних досліджень, оцінювати наслідки впливу ударної хвилі на будівельну споруду можна за визначенням ступеня пошкодження самого навантаженого елементу [313]. Для проведення числового аналізу динамічної міцності базових елементів за термо-пружно-пластичною математичною моделлю (2.11) було використано експериментально отримані механічні властивості металевих матеріалів, з урахуванням впливу швидкості деформації на границю текучості при температурі +20 ^{0}C., та бетонів, з урахуванням впливу температури на границю міцності [112–318]. Навантаження моделюється за методикою, що описана у попередньому підпункті.

Поверхня максимального надлишкового тиску на зовнішні стіни будівлі є вихідними даними для числового моделювання наслідків впливу газодинамічної ударної хвилі. Розроблено методику моделювання динамічного напружено-деформованого стану і прогнозу руйнування типових елементів будівельних споруд. Нижче цю методику викладено для одного з найбільш загального типового елементу будівельних споруд – панелі з ребрами та отворами (рис. 3.13).

Розглядається плита з лінійними розмірами в плані $a \times b$ і товщиною h, що на порядок менша за лінійні розміри. Плита підкріплена N ребрами вздовж координатної осі Оx та M ребрами вздовж координатної осі Оy. Площа фронтальної поверхні дорівнює $F = a \times b - F_B$, де F_B – площа вирізів.

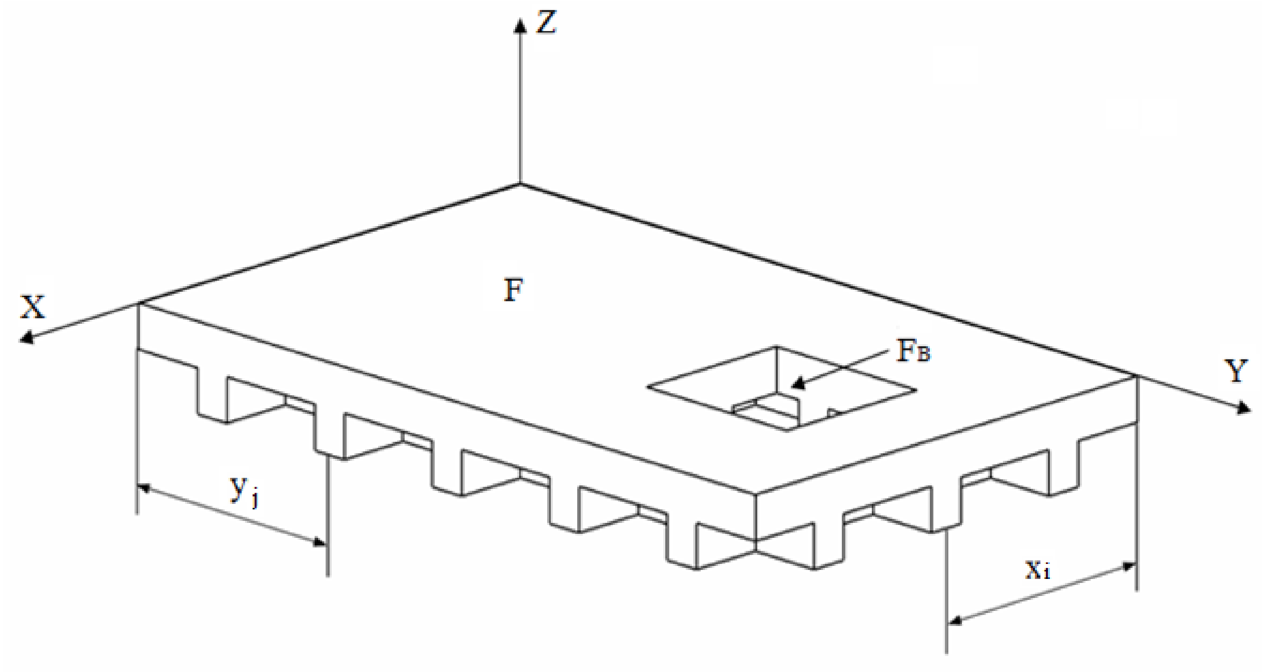


Рис. 3.13. Плита складної форми

Оскільки товщина плити у порівнянні з її лінійними розмірами значно менша, то як математична модель може бути використана загальна теорія пластин [319, 320]. Розглядається задача деформування пластини з вирізами та ребрами під впливом динамічного навантаження $P(x,y,t)$, яке визначається за моделлю (2.11). Ударно-хвильове навантаження спрямоване по нормалі до фронтальної поверхні плити в протилежному напрямку. Система поздовжніх та поперечних ребер моделюється на основі класичної теорії балок [321]. Переміщення конструкції в нормальному напрямку до фронтальної поверхні плити $W = W(x,y,t)$ знаходяться з варіаційного принципу Гамільтона

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[\left(\Pi + \sum_{i=1}^{N} \Pi_{x_i} + \sum_{j=1}^{M} \Pi_{y_j} \right) - \left(\mathrm{T} + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{T}_{x_i} + \sum_{j=1}^{M} \mathrm{T}_{y_j} \right) \right] - \right.$$
$$\left. - \iint_{(F)} P(x,y,t) \delta W \right\} dt = 0, \tag{3.5}$$

де Π – потенційна енергія пластини без ребер;

Π_{x_i} – потенційна енергія і-го ребра в поздовжньому напрямку;

Π_{y_j} – потенційна енергія і-го ребра в поперечному напрямку;

T– кінетична енергія пластини без ребер;

T_{x_i} – кінетична енергія і-го ребра в поздовжньому напрямку;

T_{y_j} – кінетична енергія і-го ребра в поперечному напрямку.

Переміщення $W = W(x, y, t)$ та навантаження $P(x, y, t)$ розкладаються по базисних функціях. Як базисні обираються функції Крилова по кожній координаті для різного типу закріплення країв [321]. В результаті задача зводиться до системи диференціальних рівнянь, вид розв'язання якої залежить від способу закріплення країв плити та кількості ребер і прорізів. Інтегрування отриманих рівнянь проводиться числовими методами, в результаті якого визначаються переміщення конструкції.

За визначеними переміщеннями числово визначаються еквівалентні напруження як функція деформації, швидкості деформацій, температури і часу (2.11). Ступінь пошкодженості плити складної форми визначається шляхом порівняння розрахункових значень еквівалентних напружень зі значеннями границь текучості та міцності матеріалу плити.

Нижче наведено результати розрахунків динамічного напружено-деформованого стану шарнірно закріпленої плити з лінійними розмірами в плані 4 м × 10 м та товщиною 0,12 м з поздовжніми ті поперечними ребрами 0,06 м × 0,06 м, які розташовані через кожні 0,5 м. Властивості матеріалу характеризуються такими параметрами: σ_T = 245 МПа – границя текучості, σ_B = 387 МПа – границя міцності, $\theta = 10^{-5}$ с – коефіцієнт експоненціального зниження тиску в часі. Максимальне значення надлишкового тиску при ударно-хвильовому навантаженні дорівнює 40,53 кПа (рис. 3.12). Розрахунки проводилися для випадку, коли початки координат та координатні площини *xOy* співпадають для поверхні максимального надлишкового тиску (рис. 3.12) та фасадної поверхні плити (рис. 3.13). Отримані еквівалентні напруження для серединної поверхні підкріпленої ребрами плити. Результати досліджень еквівалентних напружень в моменти часу 0,7 мс, 0,8 мс, 0,9 мс та 1 мс з початку розрахунку для серединної поверхні вздовж прямої $y = 0{,}82$ м показані на рис. 3.14.

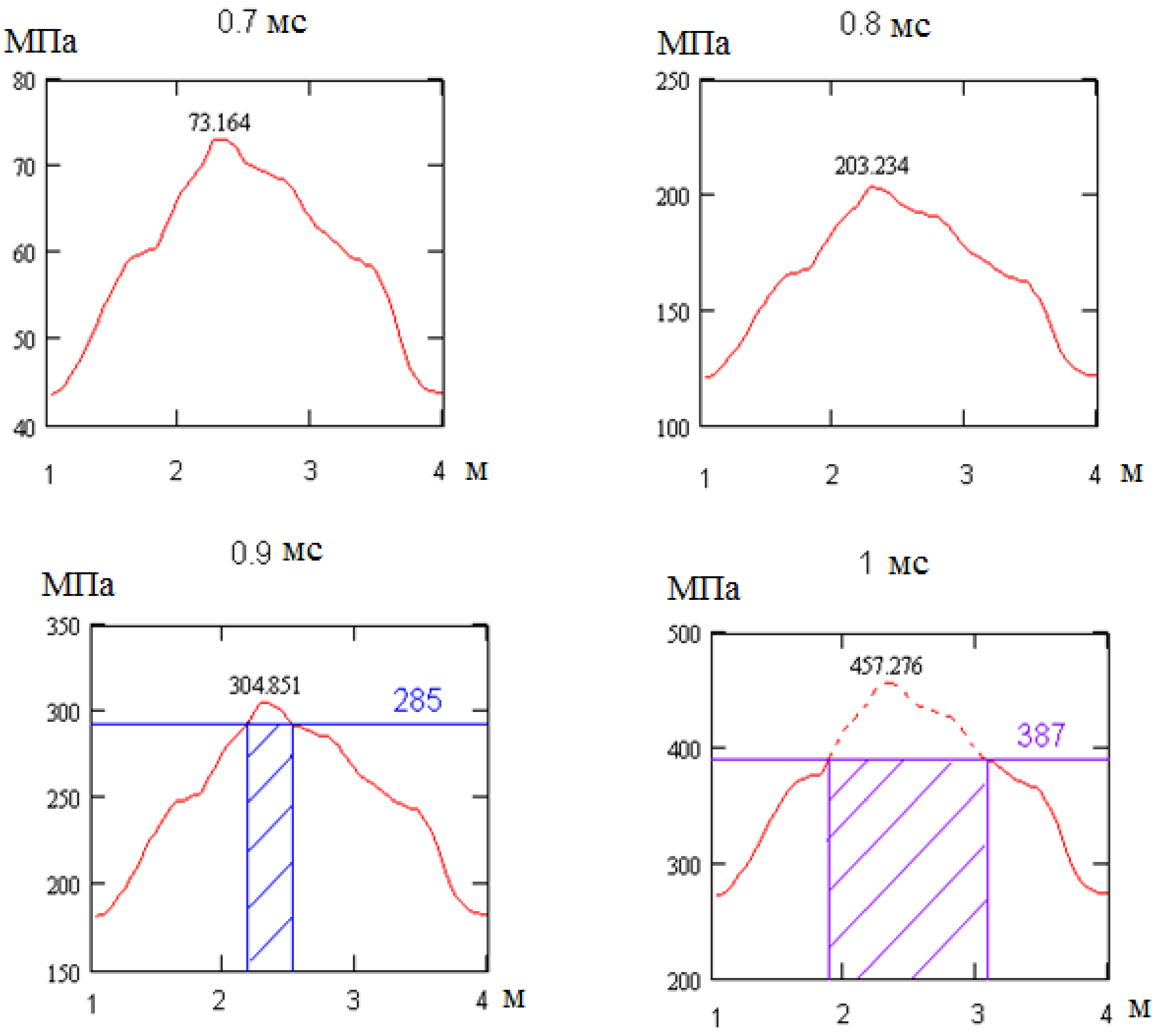


Рис. 3.14. Еквівалентні напруження вздовж прямої $y = 0{,}82$ м

Аналіз результатів числових досліджень показує, що вздовж прямої $y = 0{,}82$ м, яка містить точку максимального тиску на конструкцію, до 0,8 мс процес деформування відбувається в пружній стадії. Але вже на 0,9 мс з‘являється зона пластичного деформування, яка характеризується еквівалентними напруженнями, що перевищують границю текучості σ_T = 245 МПа. У 1 мс ці напруження ще зростають і перевищують границю міцності

σ_B = 387 МПа, тому можна прогнозувати руйнування плити в її центральній частині в зоні більш ніж один метр в ширину (рис. 3.14).

Запропоновано метод числового аналізу наслідків впливу газодинамічної ударної хвилі на базові елементи будівельних споруд. Він ґрунтується на використанні моделі високошвидкісного навантаження у вигляді (3.4), що використовує масив максимальних амплітуд навантажень на фронтальній поверхні конструкції. Вона дозволяє визначати еквівалентні напруження для кожної координати фасадної поверхні та по їх значеннях прогнозувати зони руйнування конструкційного елементу. Щоб дослідити достовірність результатів моделювання за динамічним тиском (3.4) проводилися тестові розрахунки для балки, що описана в роботі [314].

3.3.3. Аналіз достовірності результатів моделювання наслідків впливу газодинамічної ударної хвилі на прикладі балочного перекриття. Стальні перекриття у формі балок широко використовуються у будівництві, а вплив вибухових явищ на їх напружено-деформований стан та оцінка наслідків дії газодинамічної хвилі широко висвітлено у двотомній монографії У. Бейкера та П. Кокса [313, 314].

Досліджується шарнірно оперта балка з геометричними розмірами: довжина l = 6,1 м; товщина h = 0,353 м; площа поперечного перерізу F = $4{,}95\cdot10^{-3}$ м^2; момент інерції перерізу I_y = $1{,}02\cdot10^{-4}$ м^4. В роботі [314] описано ударно-хвильове навантаження з максимальним надлишковим тиском на фронті 9,79 кПа. Характеристики матеріалу балки: модуль Юнга E = 207 ГПа, густина ρ = $7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, границя текучості σ_T = 245 МПа, границя міцності при розриві σ_B = 387 МПа.

За даними, що надані ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН» по результатах моделювання ударно-хвильового навантаження аналогічного прикладу [314], побудована поверхня максимального надлишкового тиску для площини простору 5 м × 6 м (рис. 3.15). Вважаємо, що балка розташована на висоті 5 м над нульовою поверхнею (рис. 3.15, координата x).

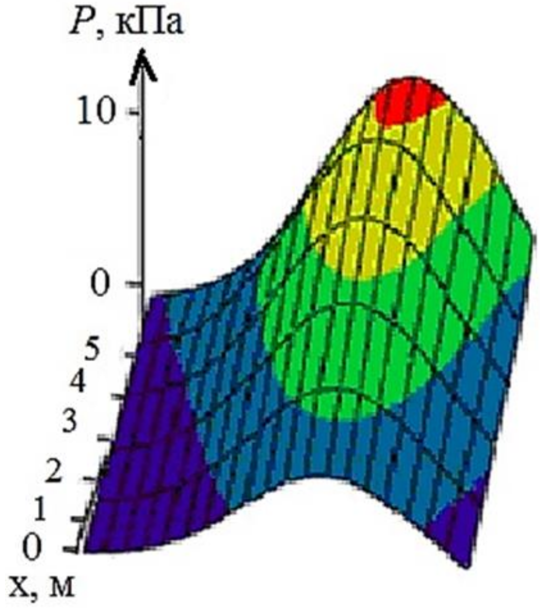


Рис. 3.15. Поверхня максимального надлишкового тиску
для площини простору розміром 5 м × 6 м

Балки з різними граничними умовами моделюються як континуальні об'єкти на основі теорії стрижнів. Переміщення балки визначаються з рівняння поперечних коливань під дією заданого навантаження з урахуванням інерції повороту поперечного перерізу [321]:

$$EI_y \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} - \rho I_y \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = P(z,t), \tag{3.6}$$

де E – модуль Юнга для матеріалу балки;

ρ – густина матеріалу балки;

I_y – осьовий момент інерції перерізу;

F – площа поперечного перерізу;

$u(z,t)$ – переміщення в поперечному напрямку;

$P(z,t)$ – динамічний тиск внаслідок ударно-хвильового впливу на балку;

z – координата вздовж осі балки;

t – розрахунковий час з початком відліку в момент максимального навантаження.

Розв‘язання рівняння (4.2) проводиться аналітично-числовим методом. Переміщення $u(z,t)$ та динамічний тиск $P(z,t)$ подаються у вигляді рядів за власними формами коливань балки, а інтегрування отриманих рівнянь проводиться числовими методами, в результаті чого визначаються динамічні переміщення конструкції для кожної координати z.

Для тестового прикладу отримані максимальні переміщення $u_{max}=$ $= 0{,}025$ м. А в [314] наводяться значення $\tilde{u}_{max} = 0{,}0254$ м. Отже, значення максимальних переміщень за двома методиками числових досліджень співпадають.

За визначеними переміщеннями визначаються еквівалентні напруження за рівнянням (2.11). Отримано, що максимальні еквівалентні напруження мають величину $\sigma_{max} = 257{,}8$ МПа. А динамічна границя текучості матеріалу $\sigma_T^{din} = 283$ МПа. Отже, висновок з числового аналізу наступний: вплив ударно-хвильового навантаження з максимальним надлишковим тиском на фронті 9,79 кПа на балку з зазначеними вище геометричними та фізико-механічними характеристиками не спричинить виникнення зон пластичного деформування. Тобто, урахування динамічних характеристик матеріалу стального перекриття у формі балки показує, що перекриття в даному випадку не отримає залишкових деформацій та збереже свою цілісність. За методикою, що було використано в роботі [314], приймався коефіцієнт зміцнення матеріалу $k = 1{,}25$. Його урахування збільшує границю текучості до значення $\tilde{\sigma}_T = 285$ МПа, що майже співпадає з величиною, отриманою за моделлю (2.11). Далі в роботі [314] на основі діаграм визначаються напруження за час дії імпульсу – $\tilde{\sigma}_{max}=$ $= 216$ МПа. Суттєва розбіжність результатів за двома методиками пояснюється різними засобами оцінки напружень. Напруження, що знайдені на основі діаграм, значно знижені по величині із-за урахування понижуючого коефіцієнта, отриманого на основі коефіцієнта зміцнення матеріалу. Крім того, в роботі [314] стверджується, що ударна хвиля не вплине на цілісність перекриття в зв'язку з малими переміщеннями. Таким чином, основний висновок, що перекриття в даному випадку не зруйнується під дією ударно-хвильового навантаження, співпадає.

Аналіз проведених числових досліджень показав, що заміна динамічного тривимірного масиву даних імпульсного тиску в заданій точці простору $\tilde{P}\{x(t),y(t),z(t)\}$ поверхнею надлишкового тиску дозволяє спростити розрахунки, зберігаючи достовірність отриманих результатів.

3.4 Моделювання наслідків впливу гідродинамічної ударної хвилі на плоскі елементи оснастки

3.4.1 Моделювання впливу гідродинамічної ударної хвилі. В деяких випадках природних катастроф гідродинамічна хвиля може спричинювати високошвидкісне ударне навантаження. На базі експериментальних даних, отриманих від учених наукових установ Сибірського відділення Російської академії наук під час виконання спільного дослідження за темою «Числове моделювання нестаціонарної взаємодії складних пружних конструкцій з рідиною чи газом», було визначено емпіричну модель гідродинамічного тиску як функції часу. Досліджувалися експериментальні дані по накату окремої хвилі на вертикальну стінку. Результати експерименту були отримані в Інституті гідродинаміки ім. М.А. Лаврентьєва СО РАН (ІГіЛ), Інституті обчислювальної техніки СО РАН (ІХТ) і Кемеровському державному університеті (КемГУ). На рис. 3.16 подано результати цих досліджень для гідродинамічного навантаження $F/(\rho g h^2)$, що діє на вертикальну стінку, та значення безрозмірного гідродинамічного тиску $P/(\rho g h)$ в кутовій точці, де ρ - щільність рідини, h - глибина рідини вдалині від хвилі, g - прискорення вільного падіння. Відокремлена хвиля з початковою амплітудою $a/h = 0{,}5$

набігає на вертикальну стінку, яка розташовувалася на відстані $x/h=15$ від початкового положення вершини хвилі. Відзначимо, що в усі моменти часу максимальне значення тиску на вертикальній стінці досягається в кутовій точці. Кривими 1 і 2 показані результати, отримані в ІГіЛ, кривими 3 і 4 - в КемГУ, крива 5 показує розподіл гідродинамічного тиску, отриманого в ІХТ (значення для тиску в кутовій точці не визначались).

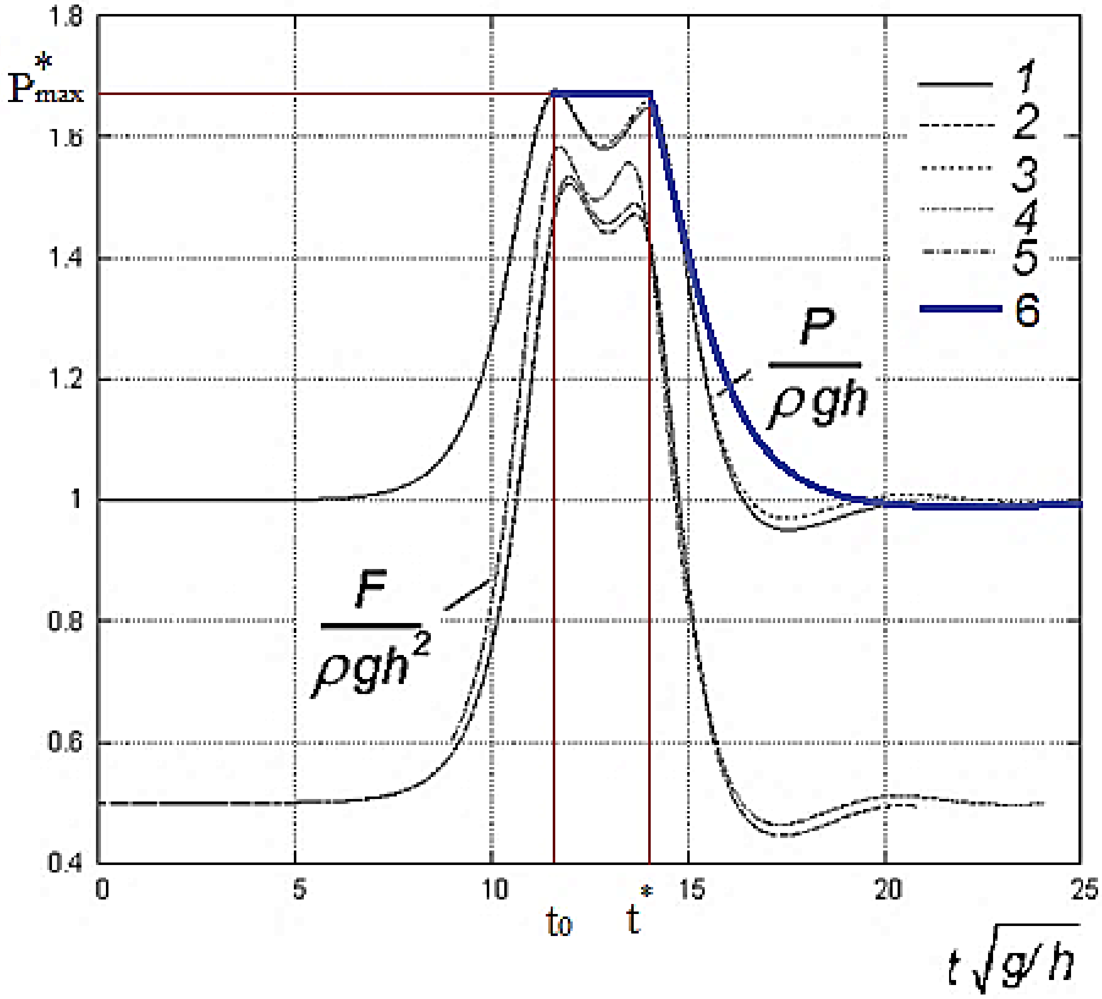


Рис. 3.16. Модель гідродинамічного навантаження на плиту

Оскільки всі результати мають сходну геометрію та близькі числові значення, то для числового аналізу динамічної міцності конструкцій під дією гідродинамічного навантаження запропоновано використання залежності, що з перевищенням апроксимує тиск на стінку (крива 6, рис. 3.16), а саме:

$$P = \begin{cases} P^*_{max}, & t_0 \le t \le t^*, \\ P^*_{max} e^{\frac{-(t+t^*)}{\theta}}, & t > t^*, \end{cases} \qquad (3.7)$$

де P^*_{max} –максимальний тиск;

t_0 – час початку розрахунків, що відповідає початку дії максимального тиску;

t^* – час дії максимального тиску.

Аналіз графіків гідродинамічного навантаження (рис. 3.16) показує, що час зростання та спадання ударної хвилі від нульового до максимального тиску приблизно однаковий. Але дослідження впливу дії ударної хвилі на конструкції [314] показали, що руйнування відбувається під час спадання тиску на фронті з максимальної амплітуди до мінімального значення. Тому часом зростання тиску на фронті ударної хвилі до максимального значення можна знехтувати, як і у випадках навантаження пороховими газами або газодинамічною хвилею.

Таким чином, модель (3.7) описує вплив гідродинамічної ударної хвилі на конструкцію у вигляді неперервного у часі тиску на фронтальну поверхню.

3.4.2 Аналіз напруженого стану в плоских елементах оснастки. Обробка матеріалів високошвидкісним тиском, що виникає внаслідок детонації або інших імпульсних джерел енергії, стабільно використовується в сучасному виробництві. Наприклад, ця технологія на сьогодення незамінна для використання штучних алмазів. Проведення таких технологічних процесів пов'язано з використанням різноманітної оснастки, на яку в процесі експлуатації впливають високоінтенсивні навантаження. Для працездатності оснащення та тривалого використання на стадії розробки проектної документації проводиться аналіз динамічної міцності її елементів. Зазвичай, розрахункові дослідження проводяться за трьома напрямками: оцінка динамічної міцності технологічних камер, в яких проводяться технологічні операції; числове моделювання роботи захисних споруд та боксів, в яких відбувається детонація; визначення динамічної міцності оснащення для формоутворення заготовок [98]. Для всіх напрямків розрахунків математична модель елементів оснастки повинна враховувати особливості швидкісного навантаження, динамічні пружно-пластичні властивості матеріалів та критерії їх руйнування [119, 149, 161].

Розглядався елемент оснастки у формі пластини, геометричні і механічні параметри якої надані ВАТ НВП «ОСНАСТКА». Проводився аналіз динамічної міцності цього елементу під впливом гідродинамічної ударної хвилі з урахуванням границь текучості σ_T = 299 МПа та міцності при розриві σ_B = 589 МПа. Компоненти вектору переміщень пластини визначалися за рівнянням (3.5), а інші параметри напружено-деформованого стану за моделлю, що викладена у попередньому розділі. Динамічні властивості матеріалу приймалися наступними: $D = 3{,}96 \cdot 10^2$ с$^{-1}$, $n = 7{,}14$, $m = 0{,}124$, $r = 1$ та механічні: $E = 2{,}06 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Для моделювання гідродинамічного навантаження використовувалася модель (3.7). З експериментальних досліджень по накату відокремленої хвилі на вертикальну стінку, отриманими під час виконання науково-дослідної роботи «Рекомендації по розрахунку оснастки для обробки матеріалів тиском» , визначався час дії максимального тиску (рис. 3.17).

Приймалося, що розрахунковий час починається в момент, коли тиск відокремленої хвилі на вертикальну стіну є максимальним: t_0 = 0.22 с. Цей тиск діє до моменту t^* = (0,28 - 0,22) с = 0,06 с. Дія максимального навантаження закінчується в момент початку зворотного руху відокремленої хвилі. Значення максимального тиску P^*_{max} на плоский елемент оснастки визначалося з експерименту для різних випадків глибини шару рідини h, що обумовлена експлуатаційними потребами промислового обладнання. З моменту t^* = 0,06 с і до моменту 0,3 с навантаження лінійно спадає до нуля. З експерименту визначено, що у всі моменти часу максимальне значення тиску на вертикальній стінці досягається в кутовій точці і залежить від глибини шару рідини h .

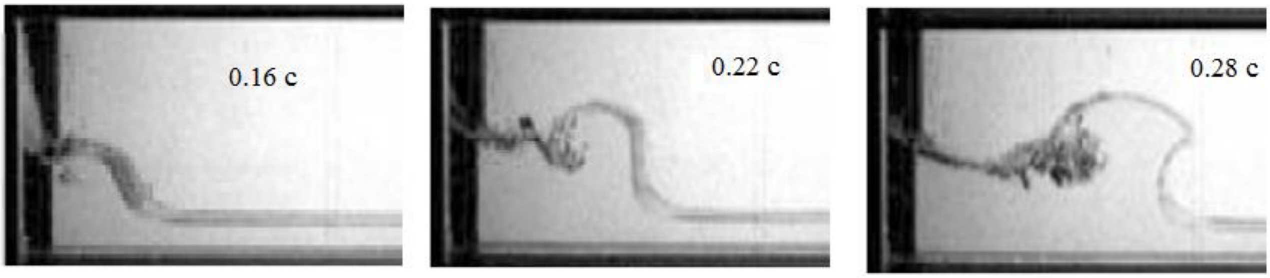


Рис. 3.17. Елемент оснастки під дією гідродинамічного навантаження

В табл. 3.1 подано результати розрахунків максимального напруження в пластині для відокремленої хвилі з початковою амплітудою $a = 0{,}5h$, що набігає на вертикальну стінку, яка розташована на відстані $x = 15h$ від початкового положення вершини хвилі.

Таблиця 3.1

Вплив гідродинамічного навантаження на елемент оснастки

h, м	P^*_{max}, кПа.	Максимальні напруження σ_{max}, МПа	σ_{max} / σ_T
1	16,7	74,422	0,249
2	35,0	139,844	0,468
3	48,1	233,254	0,780

На рис. 3.18 подано результати числових досліджень максимальних напружень у часі для шару рідини h =3 м. Максимальні напруження виникають на 0,064 с, тобто через 4 мс після максимального впливу гідродинамічного навантаження. Далі спостерігається їх суттєве зменшення, а повторне зростання на 0,261 с відбувається до значення $0{,}68 \cdot \sigma_{max}$. Таким чином можна зробити висновок, що деформування оснастки відбувається в пружній області.

За результатами числових досліджень динамічної міцності пластини можна зробити висновок, що для обраного елементу оснастки всі геометричні та механічні параметри задовольняють експлуатаційним вимогам, оскільки максимальні напруження не перевищують границю текучості для всіх трьох випадків початкової глибини шару рідини.

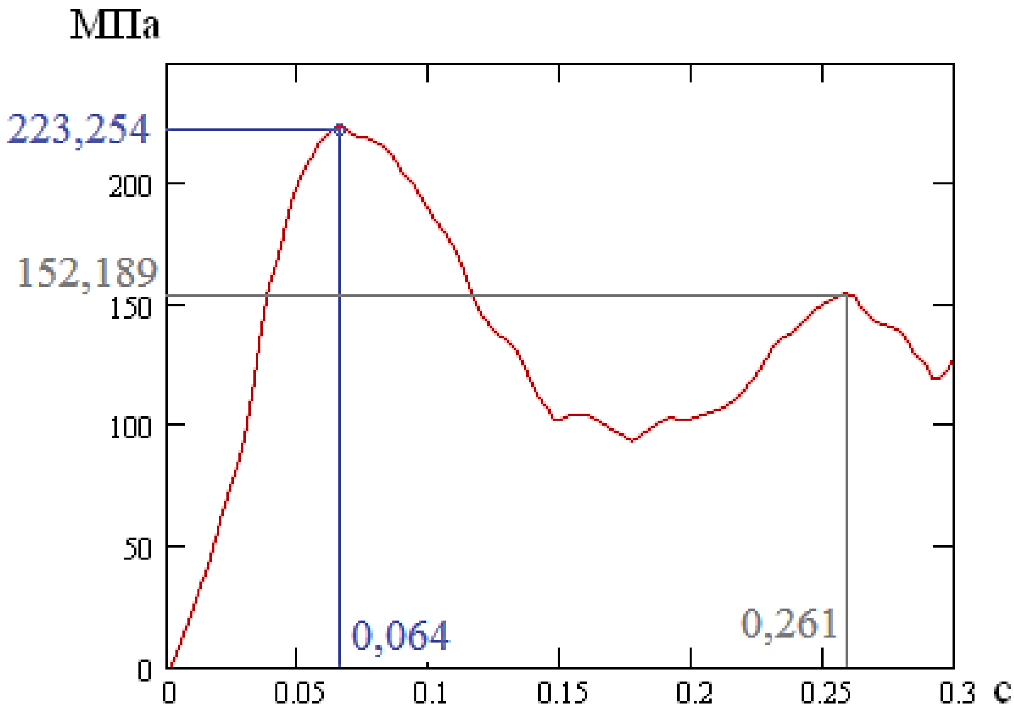


Рис. 3.18. Максимальні напруження у часі для шару рідини h =3 м

3.5 Висновки за розділом 3

У третьому розділі на основі узагальненої моделі динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні сформульовані та розв‘язані задачі високошвидкісного деформування оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок локального ударного навантаження частиною лопатки та локального пошкодження лопаток газотурбінних двигунів сторонніми предметами під час експлуатації. Запропоновано розв‘язання задач проводити у два етапи. На першому етапі динамічний напружено-деформований стан в конструкціях досліджується за скінченно-елементними моделями, що відтворюють геометрію конструкцій та за спрощеними фізичними моделями пружно-пластичного деформування конструкційних матеріалів. На другому етапі досліджень розглядається локальна зона навантаження конструкції за термо-пружно-пластичною моделлю деформування матеріалу, яка дозволяє уточнити динамічні напруження в зоні імпульсного навантаження. Можливість застосування такого підходу ґрунтується на експериментально виявленому явищі локалізації пластичних деформацій при локальному ударно-імпульсному навантаженні елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів, яке висвітлювалося у попередніх розділах. Результати числового аналізу також свідчать про локалізацію динамічних напружень в зоні ударно-імпульсного навантаження. Показано, що при локальному навантаженні зона концентрації динамічних навантажень в конструкції не більше ніж в п’ять разів перевищує зону навантаження.

На стадії проектної розробки газотурбінних двигунів проводиться аналіз напружено-деформованого стану в елементах конструкції при ударно-імпульсних навантаженнях. Результати цих досліджень мають підтвердити, що для обраного конструкційного матеріалу динамічні напруження не перевищують заданих величин. Запропоновано на початкових етапах проектування для визначення вимог до механічних властивостей конструкційних матеріалів проводити додаткове числове моделювання локального пошкодження елементів газотурбінних двигунів на спрощених геометричних моделях з використанням узагальненої термо-пружно-пластичної моделі високошвидкісного деформування. Це дозволяє більш точно визначати вплив ударно-імпульсного навантаження на напружено-деформований стан елементів конструкції. Розроблені математичні моделі, методики розрахунків та результати числового аналізу динамічного напружено-деформованого стану елементів корпусів газотурбінних двигунів в умовах експлуатаційного руйнування лопаткового апарату було впроваджено на ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О.Г. Івченко» (Додаток Б).

Проведено аналіз даних експериментальних досліджень впливу газодинамічної ударної хвилі на типові елементи промислових споруд та одинокої гідродинамічної хвилі на плоскі елементи оснастки. На основі проведеного аналізу для кожного типу навантаження розроблено емпіричні моделі динамічного тиску, що описують високошвидкісний вплив ударної хвилі на конструкцію. На основі розроблених моделей навантаження та узагальненої термо-пружно-пластичної моделі високошвидкісного деформування запропоновано числові методи визначення напружено-деформованого стану типових елементів будівельних споруд і плоских елементів технологічної оснастки для гідровибухової штамповки деталей. Достовірність результатів дослідження напружено-деформованого стану типових елементів будівельних споруд перевірялась на тестових прикладах, що розглянуті у монографії У. Бейкера та П. Кокса «Вибухові явища. Оцінка та їх наслідки».

Розроблені моделі та алгоритми числового моделювання впроваджено на ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН», ВАТ НВП «ОСНАСТКА» і ДП «Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування» (Додаток Б).

Результати, що подані в розділі 3, опубліковані в роботах [2, 26 – 33, 52 –56].

РОЗДІЛ 4
ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ РОЗДІЛЕННЯ ОБТІЧНИКІВ РАКЕТ

Системи розділення, які використовують імпульсне навантаження кумулятивним струменем, широко використовуються в сучасному ракетобудуванні [322]. Безпечне розділення та відокремлення обтічника ракети є одним з найважливіших чинників, що впливають на успіх польотної місії. Комп’ютерне моделювання процесів розділення внаслідок імпульсного навантаження на етапі системного проектування дозволяє значно знизити кількість експериментальних досліджень і, як наслідок, скоротити час розробки та собівартість готової продукції.

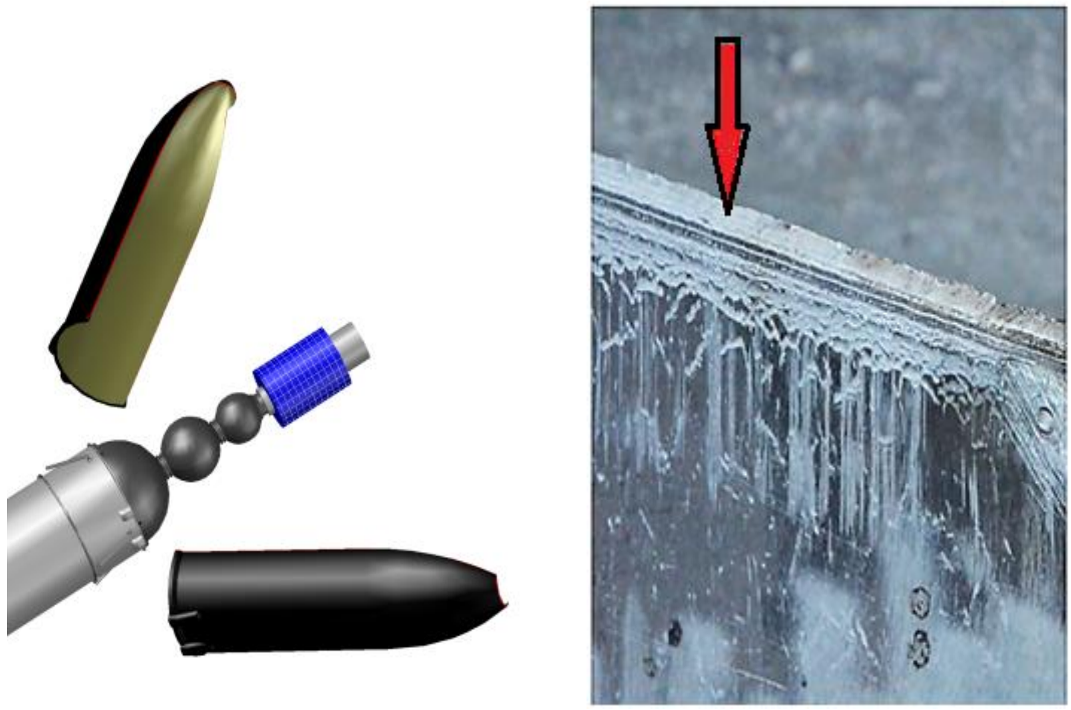
В даному розділі на основі сформульованого у другому розділі методу розв’язання задачі високошвидкісного деформування елементів конструкцій та локального руйнування конструкційного матеріалу внаслідок пластичного плину від впливу високоінтенсивного імпульсного навантаження, викладено методику дослідження процесу розділення обтічників ракет при спрацюванні подовженого кумулятивного заряду.

Моделювання процесу розділення обтічників проведено для усіченої конічної оболонки. Така геометрія центральної частини обтічника є типовою для більшості головних обтічників ракет [235]. Характер локального навантаження тонкої конструкції не дозволяє спростити задачу шляхом застосування теорії оболонок, тому задача розв‘язується в тривимірній постановці за методом скінченних елементів. Математична модель розділення обтічника враховує динамічні властивості матеріалу за термо-пружно-пластичною моделлю деформування, що адаптована для застосування в розрахунковому комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS. Для визначення імпульсного тиску при навантаженні кумулятивним струменем розглядається конструкція детонуючого пристрою з кумулятивним зарядом.

Проведено числове моделювання процесу розділення обтічника на дві частини. Показано, що результати числового моделювання якісно співпадають з експериментальними дослідженнями, що проводилися в ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля».

4.1 Постановка задачі

Розділення головного обтічника на дві частини в польоті відбувається внаслідок спрацьовування детонуючого пристрою з кумулятивним зарядом. Під час проектних робіт дослідження процесу розділення проводяться експериментально (рис. 4.1). В результаті експериментів визначається необхідна міцність кумулятивного заряду, який не спричинює пошкодження корисного вантажу ракети та забезпечує розділення обтічника вздовж лінії розташування подовженого кумулятивного заряду.



а б

Рис. 4.1. Розділення обтічника ракети на дві частини подовженим кумулятивним зарядом:
а – загальна схема розділення обтічника;
б – зона розділення обтічника подовженим кумулятивним зарядом

Для зменшення загальної кількості експериментів доцільно проводити попереднє числове моделювання. За результатами числових досліджень вибирається потужність детонуючого пристрою, яка забезпечує розділення обтічника навпіл та непошкодженість корисного вантажу.

Розглядається усічена конічна оболонка як тривимірна конструкція. Зауважимо, що запропоновану методику можна застосовувати і для більш складної форми обтічників ракет. Конструкція жорстко закріплена по краях. Геометричні параметри приймалися наступними: довжина L = 1,6 м, товщина h = 4 мм, радіуси R_1 = 0,34 м і R_2 = 0,2 м.

В наш час основним матеріалом, що використовується для виготовлення більшості обтічників ракет, є алюмінієвий сплав [235, 322]. Це зумовлено тим, що алюмінієві сплави мають яскраво виражені пружно-пластичні властивості та залежність границі плинності матеріалу від швидкості деформації [98, 119]. Ці властивості сприяють процесу розділення кумулятивним струменем. Для розрахункових досліджень використовувалися такі механічні властивості матеріалу: модуль Юнга – $E = 7{\cdot}10^{10}$ Па, статична границя текучості – σ_y^{st} = $1{,}62{\cdot}10^8$ Па. Оскільки процес навантаження конструкції відбувається дуже швидко, то динамічна границя міцності матеріалу також суттєво залежить від швидкості деформації та відмінна від статичної [324]. Тому як критерій руйнування використовується критерій максимальної пластичної деформації, а не максимальних еквівалентних напружень [149, 156]. Доцільність такого вибору показано у другому розділі.

Детонуючі пристрої з подовженим кумулятивним зарядом розташовані на внутрішній поверхні усіченої конічної оболонки вздовж двох протилежних твірних.

Досліджується напружено-деформований стан та процес розділення усіченої конічної оболонки внаслідок спрацювання детонуючих пристроїв. Проводиться оцінка часу розділення оболонки на дві частини.

4.2 Моделювання розділення обтічників ракет внаслідок спрацювання кумулятивного заряду

Технологія різання металів вибухом заснована на просторової концентрації енергії, що виділяється при детонації заряду. Технічні аспекти цього процесу в Україні протягом багатьох років розроблялися в Інституті електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України [325, 326]. Встановлено, що при детонації заряду виникає високий тиск у контактній поверхні. Цей тиск використовується для утворення високошвидкісного струменя, удар якого ріже метал. Процес різання металу вибухом, як правило, супроводжується характерними явищами: виникненням інтенсивної пластичної деформації і навіть місцевих фазових перетворень в структурі матеріалу, локалізацією процесів в дуже малій області тіла зі збереженням цілісності металу в іншій частині конструкції.

Моделювання динамічного деформування та розділення конструкцій при спрацьовуванні детонуючого пристрою складається з двох етапів. На першому етапі моделюється імпульсне навантаження. Визначаються величина максимального тиску на обтічник внаслідок спрацювання детонуючого пристрою, зона його впливу на конструкцію, час дії максимального навантаження та швидкість його згасання. А на другому етапі проводяться дослідження напружено-деформованого стану обтічника та характеру його руйнування під дією визначеного імпульсного тиску.

4.2.1 Моделювання імпульсного навантаження. Побудуємо загальну модель імпульсного навантаження конструкцій внаслідок впливу кумулятивного струменя.

Розглядається внутрішня поверхня оболонки з координатами (ξ, η), на яку у локалізованій зоні $(\xi_1 \le \xi \le \xi_2, \eta_1 \le \eta \le \eta_2)$ діє імпульсне навантаження. Початок часу t_0 відповідає моменту спрацювання детонуючого пристрою. Протягом часу від 0 до t^*, тиск на внутрішню поверхню зростає до свого максимального значення $P_{max} = P_{max}(\xi,\eta)$ за лінійним законом. Максимальний тиск діє на конструкцію до моменту часу t^{**}. Після цього йде експоненціальне зниження тиску до нуля з коефіцієнтом затухання тиску в часі θ. Математичний вираз такого процесу навантаження буде наступним:

$$P(\xi,\eta,t)=\begin{cases}\dfrac{P_{max}}{t^*}t, & t<t^*,\\ P_{max}, & t^*\le t<t^{**},\\ P_{max}e^{-\frac{t}{\theta}}, & t\ge t^{**}.\end{cases} \tag{4.1}$$

Значення величин P_{max}, t^*, t^{**}та θ у виразі (4.1) визначаються для кожного типоряду подовжених кумулятивних зарядів.

При моделюванні процесу різання оболонки подовженим кумулятивним зарядом застосовувалася схема поділу з одностороннім розташуванням детонуючого пристрою [325]. На рис. 4.2 показана схема розташування зарядного пристрою 1 на обтічнику 2 для реалізації процесу різання кумулятивним струменем.

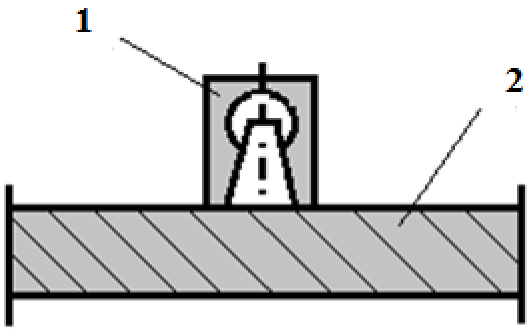


Рис. 4.2. Схема реалізації процесу різання кумулятивним струменем:
1 – зарядний пристрій;
2 – обтічник

Розглядалася конструкція детонуючого пристрою, що описана в роботі [327]. Принцип дії пристрою полягає в тому, що при ініціюванні детонації в заряді-роздавальнику детонаційної команди кут набігання детонаційної хвилі на внутрішню поверхню облицювання кумулятивної виїмки подовженого кумулятивного заряду буде близький до 90 °. Крім того, заряд-роздавальник детонаційної команди дозволяє створити оптимальну хвилю детонації в поперечному перерізі подовженого кумулятивного заряду, що також збільшує пробивну здатність останнього. Всі перераховані вище фактори сприяють формуванню суцільного та рівного без розривів «кумулятивного ножа». Таким чином, при моделюванні спрямованості дії детонаційного навантаження приймаємо напрямок уздовж зовнішньої нормалі до поверхні оболонки.

Для запобігання утворенню металевих осколків оболонки та каналізування утворених при детонації газоподібних продуктів, оболонка подовженого кумулятивного заряду повинна зберігати свою цілісність і не руйнуватися під час вибуху [327]. З точки зору ударно-хвильової моделі, критеріальним виразом умови неруйнування, тобто збереження суцільності, оболонки подовженого заряду при детонації може бути вираз [327]

$$P_{вн} \le P_{кр} , \tag{4.2}$$

де $P_{вн}$ - ударний тиск на зовнішній поверхні трубчастого кожуха в момент виходу ударної хвилі з оболонки;

$P_{кр}$ - критичний тиск руйнування трубчастого кожуха.

Для розрахунку тиску $P_{вн}$ використовується емпірична залежність [327]:

$$P_{вн} = P_x \cdot e^{-a(\delta / r_в)^b} , \tag{4.3}$$

де P_x – тиск на внутрішній поверхні трубчастого кожуха;

δ- товщина трубчастого кожуха подовженого заряду;

$r_в$- радіус вибухової речовини;

a, b - емпіричні коефіцієнти, що залежать від матеріалу оболонки.

Для металевих оболонок емпіричні коефіцієнти у (4.3) приймаються наступними [327]: $a \approx 0{,}665$; $b \approx 0{,}615$.

Значення $P_{кр}$ у (4.2) визначені експериментально для різних комбінацій «трубчастий кожух - зовнішнє середовище». Встановлено, що під час вибуху у повітряному просторі подовженого заряду в мідному кожусі $P_{кр}$ = 1,96 ГПа; в алюмінієвому – $P_{кр}$ = 1,77 ГПа.

Не дивлячись на те, що подовжені кумулятивні заряди в мідній оболонці є найбільш поширеними, вони мають один суттєвий недолік. Їх не можна встановлювати на конструкції з алюмінієвих сплавів на тривалий термін експлуатації в агресивних середовищах, тому що між зарядом і алюмінієвої перепоною виникає гальванічна пара, що викликає корозію металу. Тому, при моделюванні максимального тиску на оболонку було прийнято, що використовується типоряд зарядів в алюмінієвій оболонці. Таким чином, приймалося, що ширина зони навантаження s = 3 мм, а максимальний тиск P_{max} = 1,77 ГПа.

Для визначення часу впливу максимального навантаження на конструкцію необхідно дослідити швидкість поширення фронту детонації вибухової речовини та характер загасання детонаційної хвилі. Для цього використано експериментальні дані про швидкість поширення фронту детонації гексогену, які наведено в роботі [328]. Аналіз результатів експериментальних досліджень, проведених в роботі [328], показав, що швидкість детонаційного фронту для гексогену u_f = 2,74 км/с, початкова швидкість кордону «вибухова речовина / середовище» – u_{p_f}= 3,14 км/с, а час реакції вибухової речовини дорівнює 0,1 мкс. Таким чином, коефіцієнт затухання тиску в часі було прийнято $\theta = 10^{-7}$ с.

Також в роботі [328] проводяться дослідження для вибухової речовини різної щільності. Показано, що для щільних речовин профіль детонаційної хвилі в зоні хімічних реакцій перетворюється в «поличку» без яскраво вираженого піку Неймана. Результати експериментальних досліджень пояснюються в рамках класичної теорії Зельдовича - Неймана - Дерінга зі звичайним ударним стрибком на фронті детонаційної хвилі [312]. Таким чином, модель імпульсного навантаження (4.1) може бути використана для подовжених кумулятивних зарядів з гексогеном. Середня швидкість поширення детонаційного фронту для гексогену в розрахунках приймається U_{cp} = 2,9 км/с.

Визначимо час впливу імпульсного тиску (4.1) на конструкцію. За початок відліку часу приймемо момент детонації подовженого кумулятивного заряду. Виходячи з даних, що надані ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» для виконання робіт за темою «Розрахункова оцінка вібрацій елементів аерокосмічних систем при силових та аеродинамічних навантаженнях», заряд знаходиться на відстані 4÷5 мм від конструкції, яку потрібно «розрізати». Детонаційна хвиля досягне поверхні оболонки в момент часу 1,4 мкс для шнура на відстані 4 мм, або в момент часу 1,7 мкс для шнура на відстані 5 мм. Далі для числових досліджень приймалося усереднене значення – 1,5 мкс. Максимальний тиск впливає на зону навантаження конструкції до моменту часу 15 мкс, а потім спадає за експоненціальним законом. Розрахунковий час впливу імпульсного тиску на конструкцію обрано з тестових розрахунків з розділення алюмінієвих конструкцій [328], він дорівнює 16 мкс. Зауважимо, що розрахунковий час навантаження за моделлю (4.1) відповідає реальному часу впливу подовженого кумулятивного заряду на досліджуємий обтічник.

4.2.2 Моделювання розділення конічних обтічників ракет. Моделювання процесу розділення обтічників проведено в розрахунковому комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS. Геометрична модель конструкції реалізована для усіченої конічної оболонки, але всі розроблені методи можуть бути застосовані для більш складної геометрії головного обтічника ракети. Хоча треба зазначити, що геометрія центральної частини обтічника у формі усіченого конуса є типовою для більшості головних обтічників ракет [235].

Деформування матеріалу обтічника внаслідок навантаження високошвидкісним тиском (4.1) моделюється згідно з моделлю, наведеною у розділі 2. Для моделювання пластичного зміцнення матеріалу адаптовано модель Купера-Саймондса (2.27). При цьому вплив температури на напружено-деформований стан конструкції враховується на стадії пружного деформування шляхом вибору відповідного модуля Юнга. Вплив адіабатичного розігріву під час пластичного плину матеріалу не враховується у зв‘язку з малим часом протікання всього процесу розділення [91, 95].

Вплив швидкості деформації на механічні характеристики алюмінієвого сплаву описується моделлю зміцнення Купера-Саймондса (2.27) та реалізується в розрахунковому модулі ANSYS/ Explicit Dynamics. Алгоритм пластичного потоку, який використовується в розрахунковому комплексу для цієї моделі, дозволяє зменшити високочастотні коливання, які спостерігаються на поверхні плинності при високих швидкостях деформації. Враховуються динамічні властивості алюмінієвого сплаву, коефіцієнти зміцнення швидкості деформації приймаються наступними: D = 6500, q = 4. Максимальна пластична деформація матеріалу має значення ε_{fail} = 0,24.

Характер локального навантаження тонкої конструкції вимагає застосування тривимірної скінченно-елементної моделі. За товщиною оболонка розбивається на 4 шари з товщиною по 1 мм кожний. На рис. 4.3 показано скінченно-елементну тривимірну модель частини обтічника.

Було використано тривимірний скінченний елемент SOLID164. Елемент визначається вісьмома вузлами, що мають такі ступені свободи на кожному вузлі: переміщення, швидкості та прискорення у вузлових напрямках x, y та z [156]. Скінченно-елементна модель побудована таким чином, щоб максимальний лінійний розмір в скінченному елементі по товщині оболонки не перевищував 1 мм. В цілому скінченно-елементна модель усіченої конічної оболонки містить близько 52 тисяч елементів.

Процес розділення обтічника на дві частини досліджувався протягом 100 мкс. З них перші 16 мкс імпульсний тиск навантажує дві зони товщиною по 3 мм, що розташовані вздовж протилежних твірних на внутрішній поверхні оболонки. З тестових розрахунків визначено, що 100 мкс достатньо для завершення процесу розділення обтічника, якщо максимальний тиск спричинює пластичну деформацію величиною ε_{fail}.

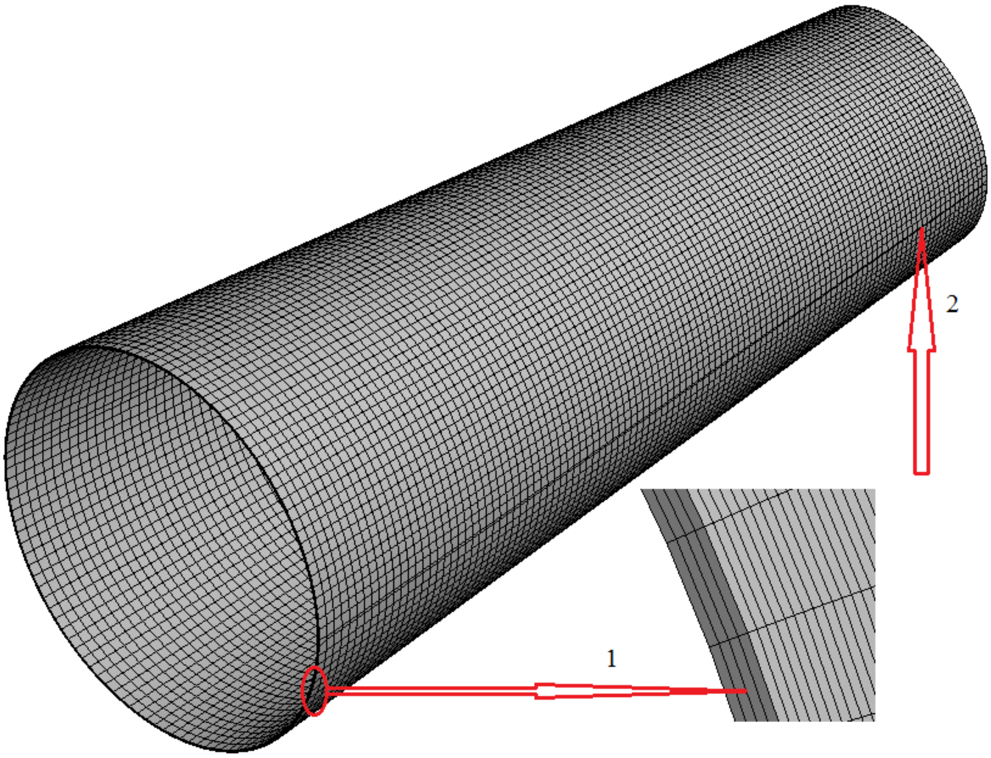


Рис. 4.3. Скінченно-елементна тривимірна модель частини обтічника:
1 – розбиття на скінченні елементи по товщині;
2 – розташування подовженого заряду

Проведено числове моделювання розділення конструкції на дві частини та досліджено характер розділення. Розділення конструкції моделюється наступним чином. Руйнування окремого елементу, коли величина пластичної деформації ε_{pl} досягає свого граничного значення ε_{fail}, визначається згідно з процедурою Failure за обраним критерієм руйнування. Часом розділення всієї конструкції вважаємо момент, коли зруйновані всі елементи по товщині вздовж твірної усіченого конусу.

4.3 Числові дослідження процесу розділення

Аналіз розподілу пластичних деформацій по товщині оболонки в перші мікросекунди з моменту детонації подовженого шнура підтверджує, що динамічний напружено-деформований стан оболонки має несиметричний відносно серединної поверхні оболонки характер. На рис. 4.4 подано результати розрахунків пластичних деформацій в моменти часу 1 мкс, 2 мкс, 10 мкс та 11 мкс.

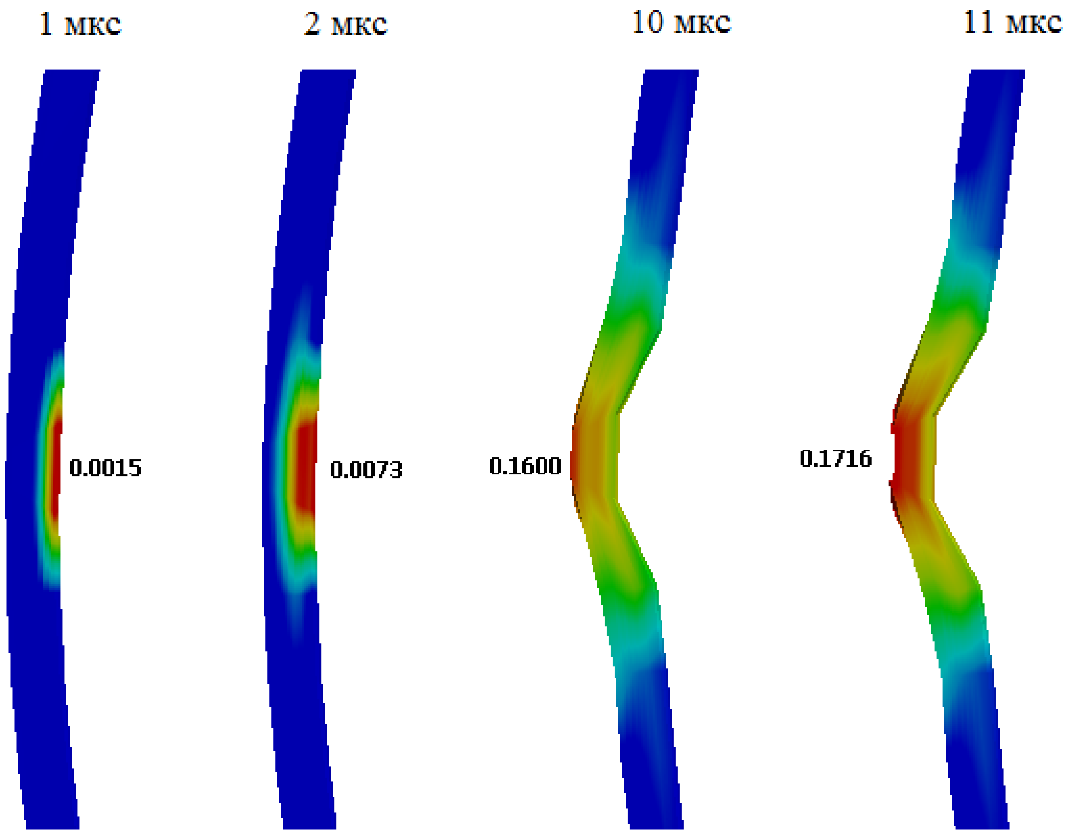


Рис. 4.4. Пластичні деформації в центральному поперечному перерізі конструкції в зоні імпульсного навантаження в різні моменти часу

Вже в перші мікросекунди імпульсного впливу матеріал конструкції зазнає пластичного плину на поверхні навантаження. На першій мікросекунді максимальні пластичні деформації дорівнюють ε_{pl}=1,5·10^{-3}, а на другій мікросекунді вони збільшуються майже в п'ять разів до ε_{pl}=7,3·10^{-3}. На десятій мікросекунді пластичні деформації сягають і зовнішньої поверхні оболонки, вони більш ніж в сто разів перевищують максимальне значення на першій мікросекунді та дорівнюють ε_{pl}=0,16. Вже наступної мікросекунди спостерігається процес руйнування окремих скінченних елементів на зовнішній поверхні оболонки в зоні імпульсного навантаження, а по товщині пластичні деформації продовжують зростати.

Таким чином отримано, що пластичні деформації, які руйнують конструкцію, локалізовані у зоні навантаження та нерівномірно розподіляються за часом по товщині оболонки.

Розділення конструкції навпіл відбувається вздовж навантажених твірних. На рис. 4.5 – 4.9 подано результати числового моделювання розділення.

В момент часу 14 мкс (рис. 4.5) спостерігається пластичне деформування вздовж всієї навантаженої твірної. Величина пластичних деформацій на зовнішній поверхні сягає значення ε_{pl}=0,177 у верхній частині конічної оболонки. К нижньої частині величина пластичних деформацій зменшується до ε_{pl}=0,12. При цьому ненавантажена частина конструкції не зазнає пластичних деформацій.

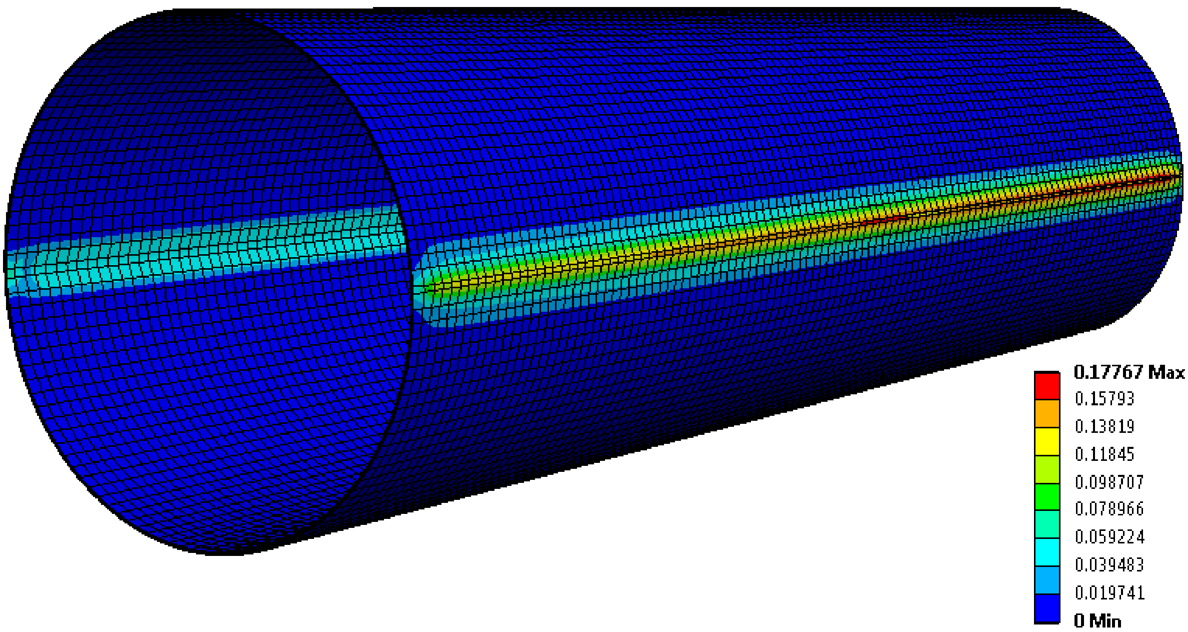


Рис. 4.5. Пластичні деформації в момент часу 14 мкс

На 21 мкс починається розділення оболонки навпіл. Процес спостерігається в верхній частині, як показано на рис. 4.6.

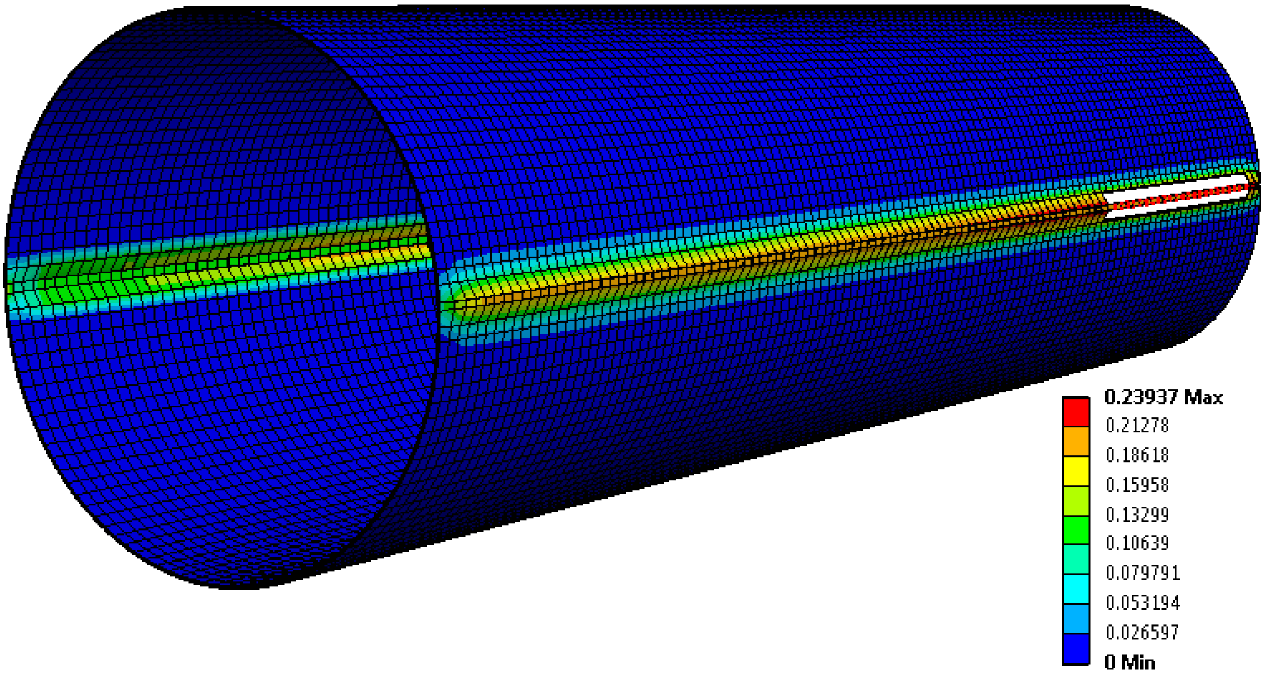


Рис. 4.6. Пластичні деформації в момент часу 21 мкс

А к 27 мкс оболонка вже розділюється навпіл вздовж навантажених твірних (рис. 4.7).

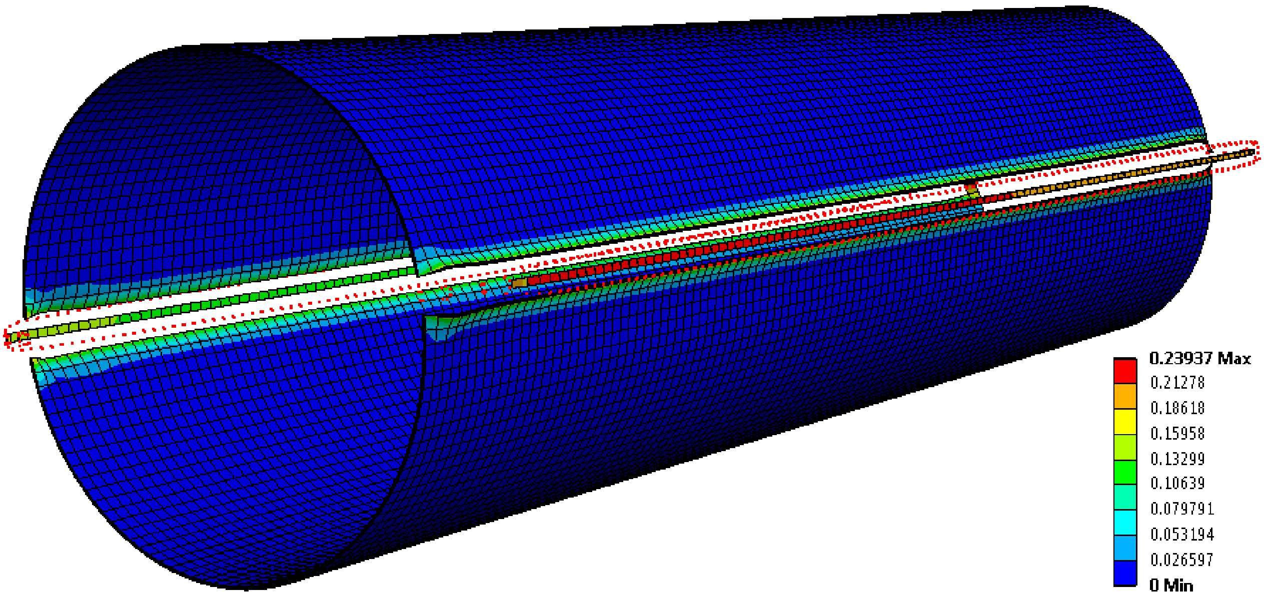


Рис. 4.7. Пластичні деформації в момент часу 27 мкс

У кожному результаті, що подано на рис. 4.5 – 4.9, спостерігається локалізація процесу пластичного деформування.

Аналіз результатів розрахунку показує, що з моменту детонації і до настання граничного стану в звуженій частині конічної оболонки в конструкції розвиваються пластичні деформації по товщині оболонки. Ці деформації локалізовані в зоні навантаження. Руйнування уздовж навантажених твірних триває до 27 мкс. У цей момент вся конструкція розділюється на дві частини вздовж навантажених твірних на протилежних сторонах обтічника.

Зазначимо, що за результатами моделювання розділення тонкої конструкції відбувається локально, вздовж навантаженої твірної по товщині оболонки. Якісно це відповідає результатам експерименту по розділенню обтічника подовженим кумулятивним зарядом (рис. 4.1 б) Таким чином, обраний детонуючий пристрій, що не є небезпечним для корисного вантажу ракети, забезпечує розділення оболонки навпіл. При цьому загальна частина конструкції залишається неушкодженою та не утворює уламки, що є важливим фактором збереження корисного вантажу ракети.

Проводилося порівняння зростання пластичних деформацій в центральній точці твірної в зоні навантаження обтічника подовженим кумулятивним зарядом для моделі Купера-Саймондса та динамічної білінійної моделі [149, 156]. Приймалося, що максимальний тиск дорівнює P_{max} = = 1,77 ГПа. Результати розрахунку подано на рис. 4.8. Суцільна лінія отримана за моделлю Купера-Саймондса, а пунктирна лінія отримана за динамічною білінійною моделлю. За результатами розрахунку отримано, що пластичні деформації ε_{pl} розраховані за обома моделями сягають свого граничного значення ε_{fail} одночасно на 22 мкс. Хоча на всьому інтервалі дослідження значення пластичних деформацій, отриманих за динамічною білінійною моделлю, декілька перевищують розрахункові значення, що отримані за моделлю Купера-Саймондса.

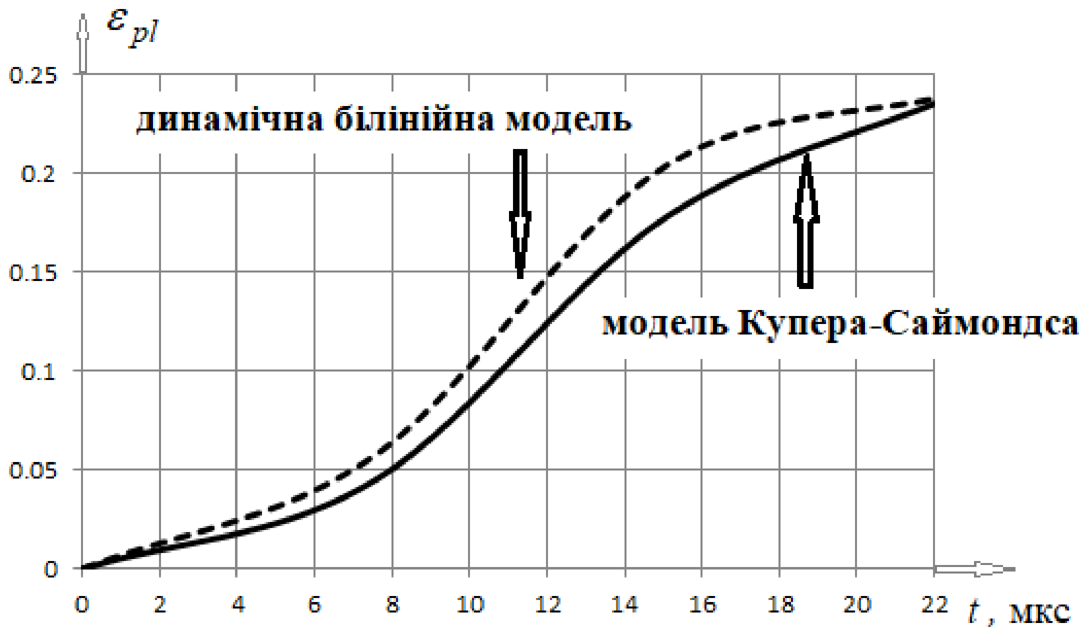


Рис. 4.8. Пластичні деформації в центральній точці твірної в зоні навантаження при максимальному тиску P_{max} = 1,77 ГПа

Досліджувалося на скільки можна зменшити максимальний тиск P_{max}, щоб забезпечити розділення обтічника на дві частини, та як це зменшення вплине на час розділення оболонки. Отримано, що зменшення імпульсного тиску до P_{max} = 1,1 ГПа вдвічі збільшує час розділення з 27 мкс до 54 мкс. А найменшим значенням, що спричинює розділення конструкції, є тиск P_{max} = 1,02 ГПа. Він відповідає часу розділення оболонки навпіл 68 мкс.

На рис. 4.9 показано зміну в часі еквівалентних напружень (пунктирна лінія) і пластичних деформацій (суцільна лінія) для імпульсного тиску з P_{max} = 1,02 ГПа. Результати приведено для точки на внутрішній поверхні ширшого краю усіченого конусу в зоні навантаження обтічника подовженим кумулятивним зарядом. Саме в цьому місці конструкції розділення займає найбільший час. За результатами розрахунків видно, що в процесі деформування еквівалентні напруження значно перевищують статичну границю текучості алюмінієвого сплаву σ_y^{st} = 1,62·10^8 Па.

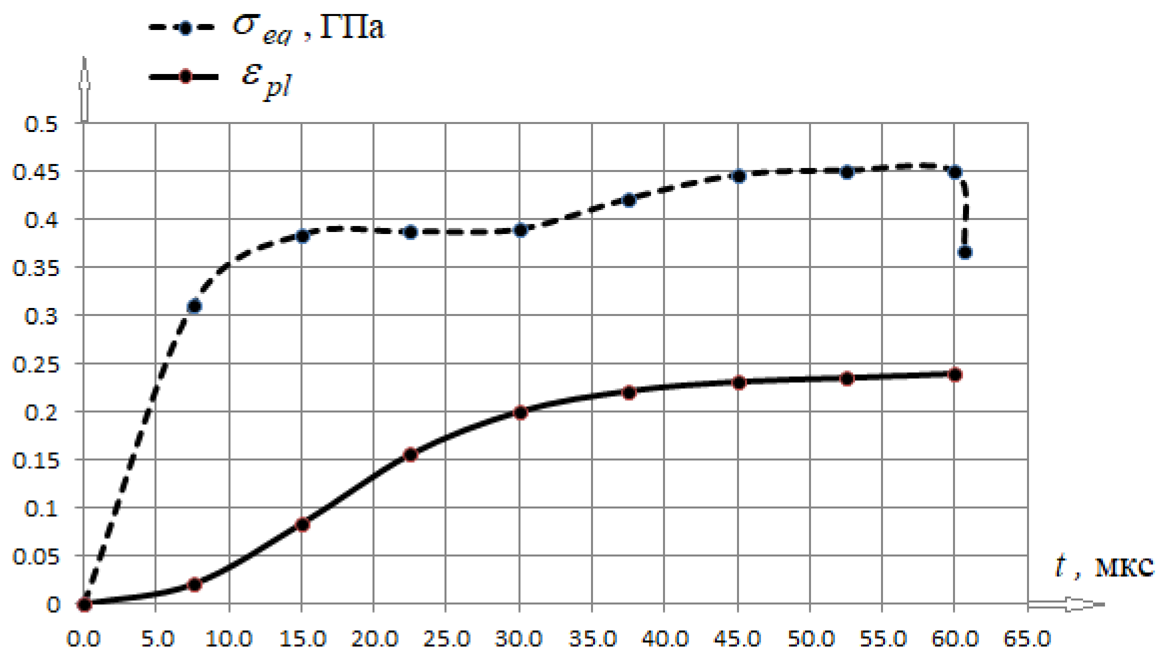


Рис. 4.9. Зміна в часі еквівалентних напружень і пластичних деформацій в центральній точці твірної в зоні навантаження при максимальному тиску P_{max} = 1,02 ГПа

4.4 Висновки за розділом 4

У четвертому розділі розроблено методику дослідження процесу розділення обтічників ракет при спрацюванні подовженого кумулятивного заряду.

Обтічники ракет забезпечують неушкодженість корисного вантажу під час виведення його на орбіту. Безпечне розділення обтічника в польоті є необхідною складовою успішної польотної місії. Комп’ютерне моделювання процесів розділення на етапі системного проектування дозволяє значно знизити кількість експериментальних досліджень і, як наслідок, скоротити час розробки та собівартість готової продукції.

Розділення головного обтічника на дві частини відбувається внаслідок спрацьовування детонуючого пристрою з кумулятивним зарядом. Вплив кумулятивного струменя на конструкцію моделюється локальним навантаженням імпульсним тиском, який визначається за фізичними властивостями детонуючої речовини та взаємним розташуванням детонуючого пристрою та обтічника.

Розроблено тривимірну скінченно-елементну модель високошвидкісного деформування та розділення частини обтічника ракети у формі усіченого конусу. Модель враховує нелінійний розподіл напружено-деформованого стану по товщині тонкої конструкції та вплив швидкості деформації на механічні властивості конструкційного матеріалу. Руйнування скінченного елементу здійснюється за критерієм максимальної пластичної деформації. Модель адаптована для числових досліджень в розрахунковому комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS в модулі ANSYS/ Explicit Dynamics.

Проведено моделювання розділення для частини конструкції обтічника у формі усіченої конічної оболонки з алюмінієвого сплаву широкого застосування внаслідок спрацювання типового заряду в алюмінієвій оболонці. За результатами числового моделювання досліджено розділення конструкції на дві частини без уламків.

Результати числового моделювання відображають локалізацію процесу розділення, вплив швидкості деформації на динамічні властивості матеріалу та нерівномірний розподіл пластичних деформацій по товщині тонкої конструкції. Модель дозволяє отримувати діапазон безпечного для корисного вантажу імпульсного тиску, який спричинює розділення обтічника навпіл.

Результати числового моделювання якісно збігаються з експериментальними дослідженнями, що проводилися в ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля». Проведено аналіз імпульсного тиску, що спричинює розділення оболонки та є небезпечним для корисного вантажу.

Розроблені моделі та методи числового аналізу розділення обтічників ракет передані до ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для використання на етапі експериментальної обробки (Додаток Б).

Результати, що подано в розділі 4, опубліковані в роботах [2, 34, 57–58, 65].

РОЗДІЛ 5
ДИНАМІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ОБТІЧНИКІВ РАКЕТ В НАДЗВУКОВОМУ ГАЗОВОМУ ПОТОЦІ

Як зазначалося у попередньому розділі, дослідження працездатності конструкції обтічника при експлуатаційних навантаженнях є невід’ємною частиною робіт, що проводяться при проектуванні ракет. Для забезпечення неушкодженості корисного вантажу під час виведення його на орбіту, поряд з дослідженнями безпечного розділення обтічника проводяться дослідження динамічної нестійкості обтічника в надзвуковому газовому потоці. Це пов’язано з тим, що в польоті при взаємодії деяких обтічників з газовим потоком можуть виникнути інтенсивні автоколивання. В окремих випадках вони можуть призвести до руйнування конструкції або до поломок корисного вантажу.

У цьому розділі розглядаються типові обтічники ракет. Конструкції обтічників моделюються тонкими оболонками обертання параболічної або конічної форми, що підкріплені шпангоутами. Досліджуються їх аеропружні коливання в надзвуковому газовому потоці. Математичні моделі коливань обтічників різної геометричної форми ґрунтуються на гіпотезах Кіргофа-Лява. Напруження за деформаціями визначаються за законом Гука. Для отримання рівнянь руху оболонок обертання застосовується метод заданих форм. Власні форми вільних коливань отримано за методом Релея-Рітца. Динамічний тиск на обтічник від впливу надзвукового газового потоку визначається за поршневою теорією з урахуванням поправки Крумхара [187].

Пропонується метод аналізу режимів автоколивань обтічників. Внаслідок взаємодії надзвукового газового потоку з обтічником спостерігається обмін енергією між конструкцією і газовим потоком. Цей енергообмін спричинює динамічну нестійкість конструкції. Виникнення динамічної нестійкості відповідає втраті стійкості тривіального стану рівноваги. Динамічна стійкість тривіального стану рівноваги досліджується за характеристичними показниками, застосовується пряме числове інтегрування рівнянь руху [213]. Якщо стійкість тривіального стану рівноваги втрачається, спостерігається біфуркація Хопфа [329]. У точці біфуркації Хопфа народжується граничний цикл. Значення чисел Маха в точках біфуркацій Хопфа є критичними числами Маха. Значення частот граничних циклів є критичними частотами автоколивань.

Аналізується втрата динамічної стійкості обтічників, що відповідає біфуркації Хопфа. Досліджуються частоти початку автоколивань та форми втрати динамічної стійкості, що спостерігаються при зародженні автоколивань.

Аналіз динамічної нестійкості обтічників ракет під дією надзвукового газового потоку дозволяє виконати заходи, щоби уникнути автоколивань та зменшити зовнішній вплив на корисний вантаж.

5.1 Визначення аеродинамічного тиску на обтічники ракет в надзвуковому газовому потоці

Попит на українську ракетно-космічну техніку в останні роки розширився далеко за межі країни, що призвело до зміни умов експлуатації ракет. Розміри обтічників істотно залежать від кількості та розмірів корисного вантажу, що виводиться на орбіту (рис. 5.1). Отже, динамічні характеристики обтічників різних серій істотно відрізняються між собою.

Обтічники ракет моделюються тонкими оболонками обертання, які можуть бути параболічної або конічної форми (рис.5.1). Вони з’єднуються з циліндричною оболонкою, це з’єднання моделюється жорстким закріпленням. Деякі обтічники всередині підсилюються шпангоутами.

Вже з перших секунд польоту ракети обтічники взаємодіють з надзвуковим газовим потоком. Обтічники деяких сучасних ракет зазнають в польоті значних аеропружних коливань, що можуть спричинити їх руйнування [330-332]. Найбільше поширеним динамічним явищем при цьому є вимушені коливання та автоколивання, що можуть мати нестійкі режими.

а б

Рис. 5.1. Загальний вигляд обтічника ракети:
а – параболічної форми;
б – конічної форми

Дослідження, які проводилися в ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля», показали, що інтенсивні автоколивання обтічників спостерігаються при швидкостях польоту ракети незначно більших одного Маха $M = v/a$, де v – швидкість тіла відносно потоку, a – швидкість звуку [333-334]. Далі розглядається діапазон чисел Маха M від 1,01 до 4.

Аеродинамічний тиск моделюється залежностями квазістатичної аеродинамічної теорії [335] з урахуванням лінеаризованої зміни фізичних характеристик залежно від висоти підйому ракети над рівнем моря. За замовленням ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» дослідження проводилися для $30 \div 50$ секунд польоту. Для надзвукового потоку на $30 \div 50$ секундах польоту визначальними фізичними величинами є число Маха, модифікований динамічний тиск і температура середовища, що визначають швидкість потоку газу [336].

Аеродинамічний тиск на оболонці, що коливається, відповідно до квазістатичної теорії потенціальних надзвукових потоків можна виразити у вигляді [337-338]:

$$p = -p_1\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + p_2\frac{\partial w}{\partial t} - p_3 w\right), \tag{5.1}$$

$$p_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta} = q; \quad p_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}; \quad p_3 = \frac{1}{2r\beta},$$

де q – модифікований динамічний тиск;

V_f – швидкість потоку газу;

M – число Маха;

$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$;

r – змінний радіус перетину оболонки.

Зауважимо, що поправкою Крумхара $p_3 w$ для розглянутої конструкції зневажити не можна, оскільки змінний радіус r суттєво змінюється вздовж висоти обтічника.

Для визначення характеристик потоку газу проведено моделювання польоту ракети для моделі кінематики руху, що описана в статті [336]. Варіація початкових умов у математичній моделі кінематики приводить до різних траєкторій руху. Були обрані дві характерні траєкторії польоту, для яких було проведено подальше числове дослідження. Для першої траєкторії в проміжку часу 30÷50 секунд висота польоту спостерігалася 1051÷4379 м над рівнем моря, а для другої – 1021÷4290 м над рівнем моря. При цьому усереднений вектор швидкостей у геоцентричній системі координат Гринвіча мав координати (471 м/с; 102 м/с; 33 м/с) для 30-ої секунди польоту і (545 м/с; 232 м/с; 33 м/с) для 50-ої секунди польоту. Так, сумарна швидкість змінювалась від 483 м/с до 593 м/с. Приймалося, що швидкість звуку у сухому повітрі при t = 20 °С дорівнює 343 м/с. Таким чином, значення сумарної швидкості свідчать про те, що розглянутий часовий інтервал є зоною надзвукового польоту ракети.

Для визначення фізичних характеристик аеродинамічного тиску необхідно враховувати ряд факторів. Зокрема, густина атмосфери істотно залежить від температури. У роботі [336] показано, що нагрівання атмосфери від сонячного опромінювання може приводити до зміни її густини в 5,3 рази для однієї і тієї ж висоти. При одночасному врахуванні ще і зміни висоти орбіти, максимальні значення густини атмосфери можуть перевищувати мінімальні в 12 разів [336]. Таким чином, зміна густини атмосфери може призводити до істотних змін аеродинамічного моменту. У даному дослідженні були використані усереднені результати моделювання [336]. Приймалося, що густина атмосфери змінюється в проміжку 1,11÷0,8 кг/м3; температура навколишнього середовища змінюється в проміжку 8÷12 0С; статичний тиск змінюється в проміжку 89,8÷59 кПа.

Прийняті значення дозволяють визначити аеродинамічний тиск (5.1) і провести подальші дослідження аеродинамічних коливань обтічників в формі оболонок обертання: параболічної та підкріплених шпангоутами конічної.

Дослідження процесу коливань оболонкової конструкції в надзвуковому газовому потоці здійснюється числовими методами.

5.2 Динамічна нестійкість параболічних обтічників ракет-носіїв в надзвуковому газовому потоці

5.2.1 Постановка задачі та математична модель деформування конструкції. Розглядаються обтічники ракет-носіїв у формі, що подана на рис. 5.1 а. Геометрична форма конструкції моделюється параболічною оболонкою обертання. Досліджується явище динамічної нестійкості оболонки під впливом зовнішнього навантаження надзвуковим газовим потоком, що є надзвичайно небезпечним для міцності обтічника. Визначаються числа Маха, коли зовнішнє навантаження може призвести до значного підвищення переміщень точок оболонки. Досліджуються умови, при яких обтічник може втратити динамічну стійкість положення рівноваги та почати здійснювати небезпечні коливання.

Для отримання рівнянь руху параболічної оболонки застосовується метод заданих форм.

Обтічники ракетної техніки являють собою тонкі оболонки з великою площею відносно об'єму матеріалу, тому моделюється тонка параболічна оболонка, а зсуви та інерція обертання не враховуються. Ескіз параболічної оболонки подано на рис. 5.2.

Положення точки на нейтральній поверхні оболонки визначається двома криволінійними координатами θ та φ, координатні лінії яких є взаємно перпендикулярними. Координатні лінії обрані наступним чином: θ – вздовж твірної оболонки; φ – кут, який відкладається за проекцією перетину оболонки на площину, яка є ортогональною до вісі її симетрії (рис. 5.2). Положення точки на оболонці визначається трьома координатами: θ, φ та z, де $z \in \left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$ – координата, яка відмірюється в напрямі нормалі до поверхні, h – товщина оболонки.

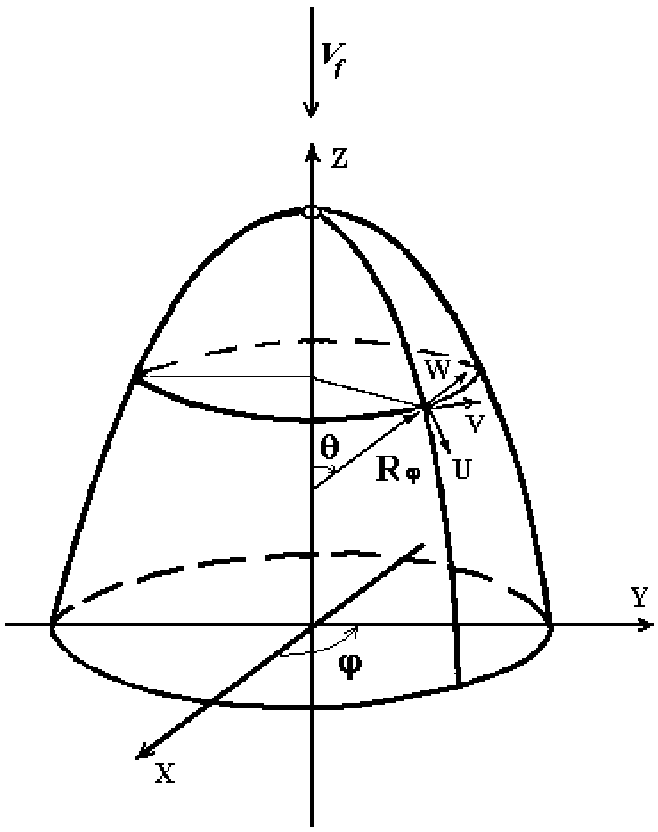


Рис. 5.2. Ескіз параболічної оболонки

Для зв'язку криволінійних координат точки на нейтральній поверхні оболонки з тривимірною декартовою системою координат вводяться наступні параметри: R_θ, R_φ – радіуси кривизни оболонки вздовж координатних ліній; A_θ, A_φ – параметри Ламе оболонки вздовж координатних ліній. Для оболонок обертання радіуси кривизни координатних ліній θ і φ визначаються за формулами [339-340]

$$R_\theta = \frac{R_0}{\left(1+\chi sin^2\theta\right)^{3/2}},$$
$$R_\varphi = \frac{R_0}{\left(1+\chi \sin^2\theta\right)^{1/2}}, \tag{5.2}$$

де R_0 – радіус кривизни в особливій точці оболонки θ=0,

χ – параметр, який вказує на форму оболонки обертання.

Для параболічних оболонок у (5.2) $\chi = -1$ [340].

Стан серединної поверхні параболічної оболонки описується проекціями переміщень на напрями дотичних до координатних ліній, $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, де координати θ і φ описують положення точок на серединній поверхні (рис. 5.2). Проекції переміщень точок оболонки, які знаходяться на відстані z від нейтральної поверхні, позначаються $u_\theta(\theta,\varphi,z,t)$, $u_\varphi(\theta,\varphi,z,t)$, $u_z(\theta,\varphi,z,t)$.

Вершина оболонки є особливою точкою [341-342]. Тому в моделі конструкції в області цієї точки зробимо отвір діаметром менше, ніж товщина оболонки. Наявність цього отвору практично не впливає на динаміку конструкції [342].

Кінетична енергія T параболічної оболонки має вигляд [340]:

$$\mathrm{T} = \frac{\rho}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] R_\theta R_\varphi \, sin\theta d\theta d\varphi dz, \tag{5.3}$$

де h – товщина оболонки;

ρ – густина матеріалу оболонки;

θ_1 – координата верхньої точки оболонки вздовж твірної;

θ_2 – координата нижньої точки оболонки вздовж твірної.

Зауважимо, що у виразі для кінетичної енергії (5.3) при інтегруванні не враховуються множники $(1 + z/R_\theta) \approx 1$ та $\left(1 + z/R_\varphi\right) \approx 1$.

Проінтегруємо вираз (5.3) по товщині оболонки та визначимо радіуси кривизни координатних ліній θ і φ згідно з (5.2), отримаємо кінетичну енергію параболічної оболонки у вигляді

$$\mathrm{T} = \frac{\rho h R_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{sin\theta}{cos^4\theta} d\theta\, d\varphi\,. \tag{5.4}$$

Потенціальну енергію пружної деформації оболонки подаємо у вигляді [329]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + \frac{z}{R_\theta} \right) \left(1 + \frac{z}{R_\varphi} \right) R_\theta R_\varphi \right\} sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dz, \tag{5.5}$$

де σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} – компоненти тензора напруження;

ε_{11}, ε_{12}, ε_{22}– компоненти тензора деформацій.

Для опису деформації параболоїда використовуються гіпотези Кірхгофа - Лява. Компоненти тензорів напруження і деформацій задовольняють закону Гука [339]

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} \right),$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right), \tag{5.6}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12},$$

де E – модуль Юнга;

ν – коефіцієнт Пуассона.

З урахуванням рівнянь (5.6) потенціальна енергія оболонки (5.5) має такий вигляд:

$$\Pi = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2\right)\times$$
$$\left(z^2 + \frac{R_0\left(1+\cos^2\theta\right)}{\cos^3\theta}z + \frac{R_0^2}{\cos^4\theta}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dz. \tag{5.7}$$

Координата нижньої точки оболонки вздовж твірної θ_2 у виразах (5.4) та (5.7) визначається з рівняння $\theta_2 = arctg(R/R_0)$, де R – максимальний радіус обтічника у місці з’єднання з циліндричною оболонкою (рис. 5.1 а).

Компоненти тензора деформацій пов‘язані з компонентами вектору переміщень серединної поверхні параболічної оболонки залежностями [339, 343]

$$\varepsilon_{11} = E_1 + zK_1,$$
$$\varepsilon_{22} = E_2 + zK_2, \tag{5.8}$$
$$\varepsilon_{12} = \Omega_1 + 2z\Omega_2,$$

де $E_1 = \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + w\right)cos^3\theta$;

$$K_1 = \frac{1}{R_0{}^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)cos^6\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial\theta} + 3u\right)cos^5\theta\, sin\theta\right];$$

$$E_2 = \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} + u\cdot cos\theta + w\cdot sin\theta\right)ctg\theta\ ;$$

$$K_2 = \frac{1}{R_0{}^2}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}ctg\theta cos\theta - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}ctg^2\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - u\right)ctg\theta cos^4\theta\right];$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\cos^3\theta - v\cdot\cos^2\theta\sin\theta + w\cdot\frac{\cos^4\theta}{\sin\theta} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}ctg\theta\right);$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{R_0{}^2}\left[\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos^4\theta}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial v}{\partial\theta} + v\right)\frac{\cos^4\theta}{\sin\theta}\right].$$

Потенціальну енергію (5.7) з урахуванням (5.8) після інтегрування по товщині оболонки подаємо в наступному вигляді:

$$\Pi = \frac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\left(E_1+E_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(E_1E_2 - \frac{1}{4}\Omega_1^2\right)\right]R_0^2\frac{sin\theta}{cos^4\theta}d\theta d\varphi +$$
$$+\frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\left\{\left(K_1+K_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(K_1K_2 - \Omega_2^2\right)\right\}R_0^2\frac{sin\theta}{cos^4\theta} + \right.$$
$$\left. + 2\left\{\left(E_1K_1 + E_2K_2\right) + \nu\left(E_1K_2 + E_2K_1\right) + \left(1-\nu\right)\Omega_1^2\Omega_2^2\right\}R_0\frac{sin\theta\left(1+cos^2\theta\right)}{cos^3\theta}\right]d\theta d\varphi. \tag{5.9}$$

Приймаємо, що на координатній лінії $\theta = \theta_1$ виконуються граничні умови вільного краю, а на координатній лінії $\theta = \theta_2$ оболонка жорстко закріплена

$$u\big|_{\theta=\theta_2} = v\big|_{\theta=\theta_2} = w\big|_{\theta=\theta_2} = \frac{\partial w}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\theta_2} = 0\,. \tag{5.10}$$

Віртуальну роботу δA аеродинамічного тиску (5.1), що діє на параболічну оболонку, подаємо так:

$$\delta\mathrm{A} = R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p\, \delta w \frac{sin\theta}{cos^4\theta} d\theta\, d\varphi, \tag{5.11}$$

де p – тиск надзвукового потоку на конструкцію;

δw – віртуальне переміщення оболонки.

Для опису тиску в надзвуковому потоці газу застосовується поліпшена поршнева теорія [337], де $r = R_0 tg(\theta)$ – поточний радіус оболонки. Підкреслимо, що поправка Крумхара залежить від координати θ оболонки. Вираз для віртуальної роботи (5.11) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{M^2-1}}{V_f R_0 \rho_f}\delta\mathrm{A} = -\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Bigg[\left(R_0 V_f \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0\left(M^2-2\right)}{\left(M^2-1\right)} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{sin\theta}{cos^4\theta} - \\ - \frac{V_f}{2\sqrt{M^2-1}} \frac{w}{cos^3\theta} \Bigg] \delta w d\theta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Для виведення рівнянь руху параболічної оболонки з скінченним числом степенів свободи скористаємося методом заданих форм [329]. Переміщення $u(\theta,\varphi,t), v(\theta,\varphi,t), w(\theta,\varphi,t)$ розкладемо в ряд по формах власних коливань

$$\begin{aligned} u(\theta,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t) U_n(\theta,\varphi), \\ v(\theta,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t) V_n(\theta,\varphi), \\ w(\theta,\varphi,t) &= \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t) W_n(\theta,\varphi), \end{aligned} \tag{5.13}$$

де $q^{(u)} = [q_1^{(u)},...,q_{N_u}^{(u)}];\ q^{(v)} = [q_1^{(v)},...,q_{N_v}^{(v)}];\ q^{(w)} = [q_1^{(w)},...,q_{N_w}^{(w)}]$ – вектори узагальнених координат;

$U_n(\theta,\varphi), V_n(\theta,\varphi), W_n(\theta,\varphi)$– власні форми вільних коливань оболонки.

Для розрахунку власних форм вільних лінійних коливань застосовувався метод Релея – Рітца (RRM) [329].

Проводились дослідження вільних коливань параболічних оболонок. Отримано, що використання повного й укороченого рядів Фур‘є для знаходження власних форм і частот коливань параболічної оболонки обертання (рис. 5.2) приводить до однакового результату. Тому власні форми вільних лінійних коливань параболічної оболонки записуємо у вигляді укорочених рядів:

$$U_n(\theta,\varphi) = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^{(n)} \psi_i^{(u)}(\theta) \cos j\varphi,$$

$$V_n(\theta,\varphi) = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} B_{ij}^{(n)} \psi_i^{(v)}(\theta) \sin j\varphi, \tag{5.14}$$

$$W_n(\theta,\varphi) = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}^{(n)} \psi_i^{(w)}(\theta) \cos j\varphi,$$

де $A_{ij}^{(n)}, B_{ij}^{(n)}, C_{ij}^{(n)}$ – невідомі коефіцієнти, що обчислюються з задачі на власні значення вільних лінійних коливань параболічної оболонки;

$\psi_i^{(u)}(\theta), \psi_i^{(v)}(\theta)$ – функції власних форм коливань в площинах, що дотичні до параболічної оболонки;

$\psi_i^{(w)}(\theta)$ – функції власних форм коливань в нормальних напрямках до параболічної оболонки.

Для наближеного визначення власних частот коливань в (5.20) для $\psi_i^{(u)}(\theta), \psi_i^{(v)}(\theta)$ використовуються власні форми поздовжніх коливань консольного стрижня у вигляді

$$\psi_i^{(u)}(\theta)=\psi_i^{(v)}(\theta)=cos\frac{(2i-1)\pi\theta}{2\theta_2}, \tag{5.15}$$

а для $\psi_i^{(w)}(\theta)$ обрано власні форми згинних коливань консольного стрижня у вигляді

$$\begin{aligned}\psi_i^{(w)}(\theta)=\frac{1}{2}\left[cosh(\eta)-cos(\eta)\right]-\\ -\frac{sinh(k_i s)-sin(k_i s)}{2\left(cosh(k_i s)-cos(k_i s)\right)}\left[sinh(\eta)-sin(\eta)\right],\end{aligned} \tag{5.16}$$

де $\eta=k_i\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2}$;

k_i – відомий коефіцієнт [334].

Власні частоти та форми вільних коливань оболонки можуть бути отримані шляхом мінімізації функціоналу дії системи на періоді коливань [329]:

$$\int_0^{2\pi/\omega}(\Pi-\mathrm{T})dt=\frac{\pi}{\omega}\left[\tilde{\Pi}\left(A_{ij}^{(1)},\ldots,C_{ij}^{(2)}\right)-\omega^2\tilde{\mathrm{T}}\left(A_{ij}^{(1)},\ldots,C_{ij}^{(2)}\right)\right], \tag{5.17}$$

де ω – частота власних коливань оболонки.

Стаціонарне значення функціоналу (5.17) досягається, коли виконуються наступні співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(\tilde{\Pi}-\omega^2\tilde{T}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{ij}}\left(\tilde{\Pi}-\omega^2\tilde{T}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\left(\tilde{\Pi} - \omega^2 \tilde{T}\right) = 0, \tag{5.18}$$

де $T = \omega^2 sin^2(\omega t)\tilde{T}$ – кінетична енергія оболонки;

$\Pi = cos^2(\omega t)\tilde{\Pi}$ – потенціальна енергія оболонки.

З умови мінімуму функціонала (5.17) на множині змінних $A_{ij}^{(1)},...,C_{ij}^{(2)}$ з використанням (5.14) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(\Pi_{max} - \mathrm{T}_{max}\right) = 0, \ \left(i = 1...N_1, \ \ j = 1...N_2\right), \\
&\frac{\partial}{\partial B_{ij}}\left(\Pi_{max} - \mathrm{T}_{max}\right) = 0, \ \left(i = 1...N_3, \ \ j = 1...N_4\right), \\
&\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\left(\Pi_{max} - \mathrm{T}_{max}\right) = 0, \ \left(i = 1...N_5, \ \ j = 1...N_6\right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ці рівняння можна подати у вигляді проблеми власних значень:

$$[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{A} = 0, \tag{5.20}$$

де $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_N]$ – форми вільних коливань оболонки

$\mathbf{C}, \mathbf{M}$ –матриці жорсткості та мас, відповідно.

В результаті розв’язання проблеми власних значень (5.20) отримуємо набір з N власних частот коливань ω_i; $i = 1, \dots, N$, та N форм вільних коливань $\mathbf{A}^{(n)}$; $n = 1, \dots, N$.

Таким чином, власні частоти ω_i та форми вільних коливань $\mathbf{A}^{(n)}$ знаходимо як розв’язок задачі (5.20).

Для розв’язання системи рівнянь (5.13) всі узагальнені координати поєднаємо у одному векторі $q = [q^{(u)}, q^{(v)}, q^{(w)}] = [q_1, \dots, q_{N_G}]$, де $N_G = N_u + N_v + N_w$.

Визначимо узагальнені сили Q_n, де $n=1,\ldots,N_G$. Узагальнені сили $Q^{(u)}$ та $Q^{(v)}$, що відповідають узагальненим координатам $q^{(u)}$ та $q^{(v)}$, відповідно, дорівнюють нулю: $Q^{(u)}\equiv 0$, $Q^{(v)}\equiv 0$. Тоді елементи вектору узагальнених сил $Q^{(w)}$, що відповідає узагальненій координаті $q^{(w)}$, подаємо у вигляді

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{R_0 V_f^2 \rho_f} Q_n^{(w)} =$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\left(R_0\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{R_0\left(M^2-2\right)}{V_f\sqrt{M^2-1}}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{sin\theta}{cos^4\theta}-\frac{w}{2cos^3\theta}\right)W_n(\theta,\varphi)d\theta d\varphi, \tag{5.21}$$

де $n=1,\ldots,N_w$.

Розкладання (5.13) використаємо у (5.21). Тоді вектор узагальнених сил $Q^{(w)}$ можна подати у такому вигляді

$$Q^{(w)} = K^{(w)}q^{(w)} + C^{(w)}\dot{q}^{(w)}, \tag{5.22}$$

де $K^{(w)}$ – матриця аеродинамічної жорсткості;

$C^{(w)}$ – матриця аеродинамічного демпфірування.

З урахуванням (5.13) кінетична енергія матиме вид квадратичної форми узагальнених швидкостей, а потенціальна енергія – квадратичної форми відносно узагальнених координат. Ці квадратичні форми, в загальному випадку, можна подати як $\Pi=\Pi\left(q_1,\ldots,q_{N_G}\right)$ та $T=T\left(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{N_G}\right)$. Тоді рівняння Лагранжа II роду, що описують рух оболонки, наберуть наступного матричного вигляду:

$$[M]\begin{bmatrix}\ddot{q}^{(u)}\\ \ddot{q}^{(v)}\\ \ddot{q}^{(w)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q^{(u)}\\ q^{(v)}\\ q^{(w)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ K^{(w)}q^{(w)}+C^{(w)}\dot{q}^{(w)}\end{bmatrix}=0, \tag{5.23}$$

де $M = diag\left(m_1,\ldots,m_{N_G}\right)$.

З теорії оболонок відомо [329, 339], що власні частоти, у формах яких переважають поздовжні та крутильні коливання, значно вищі за власні частоти, у формах яких переважають згинні коливання. Тому в рівнянні (5.24) приймемо $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(v)} = 0$. Тоді з перших двох рівнянь системи (5.23) отримуємо наступні матричні співвідношення:

$$q^{(u)} = \left[K_{u,w}\right] q^{(w)},\; q^{(v)} = \left[K_{v,w}\right] q^{(w)}. \tag{5.24}$$

Співвідношення (5.24) використаємо в (5.23) і отримаємо рівняння, що описують лінійні коливання оболонки, відносно узагальнених координат поперечних переміщень

$$\left[M_{11}\right]\ddot{q}^{(w)} + \left[K_*\right] q^{(w)} + \left[C^{(w)}\right]\dot{q}^{(w)} = 0, \tag{5.25}$$

де $\left[K_*\right] = \left[K_{31}\right]\left[K_{u,w}\right] + \left[K_{32}\right]\left[K_{v,w}\right] + \left[K_{33}\right] + \left\lfloor K^{(w)} \right\rfloor$.

Діагональна матриця $[M_{11}]$ отримана з діагональної матриці $[M]$.

Отримана система диференціальних рівнянь (5.25) описує рух параболічної оболонки в надзвуковому газовому потоці.

5.2.2 Форма втрати динамічної стійкості параболічної оболонки. Внаслідок взаємодії надзвукового газового потоку з параболічною оболонкою, що моделює обтічник, спостерігається обмін енергією між конструкцією і газовим потоком. Цей енергообмін спричинює виникнення динамічної нестійкості конструкції, що відповідає втраті стійкості тривіального стану рівноваги динамічної системи (5.25). При втраті стійкості спостерігається біфуркація Хопфа, народжується граничний цикл.

Дослідимо форму оболонки, яка спостерігається при зародженні автоколивань, використовуючи рівняння (5.25). Метод розрахунку цієї форми наступний.

Динамічну систему (5.25) перепишемо відносно фазових координат $y = \left(q_1^{(w)},\ldots,q_{N_w}^{(w)},\dot{q}_1^{(w)},\ldots,\dot{q}_{N_w}^{(w)}\right)$ у векторному вигляді

$$\dot{y} = Gy. \tag{5.26}$$

Розв’язок системи (5.26) подаємо в наступному вигляді:

$$y = A_l\, exp(\lambda_l\, t), \tag{5.27}$$

де A_l – вектор з $2N_w$ елементів;

λ_l – характеристичний показник, $l = 1,2,\ldots$

Характеристичні показники λ_i визначаються з проблеми власних значень $[G - E\lambda_l]A_l = 0$ [329]. Динамічна стійкість тривіального стану рівноваги [213] визначається за величинами λ_i.

Розглянемо випадок, коли всі характеристичні показники комплексно-зв'язані:

$$\begin{aligned} \lambda_{2j-1} &= \alpha_j + i\Omega_j, \\ \lambda_{2j} &= \alpha_j - i\Omega_j, \end{aligned} \tag{5.28}$$

де $j = 1,\ldots,N_w$;

i – уявна одиниця.

Власні вектори, що відповідають цим власним значенням, подаємо так:

$$\begin{aligned} A_{2j-1} &= \gamma_j + i\delta_j, \\ A_{2j} &= \gamma_j - i\delta_j. \end{aligned} \tag{5.29}$$

В області стійкості тривіального стану рівноваги виконується наступна нерівність: α_j<0; j=1,…,N_w. У точці втрати стійкості (біфуркація Хопфа) α_1=0, а на початку області розвитку нестійкості $\alpha_1>0$.

Розглянемо розв’язання динамічної системи (5.26) при біфуркації Хопфа. Його подаємо в наступному вигляді:

$$y=\sum_{j=1}^{N_w}\left\{C_j\left(\gamma_j+i\delta_j\right)exp\left[\left(\alpha_j+i\Omega_j\right)t\right]+D_j\left(\gamma_j-i\delta_j\right)exp\left[\left(\alpha_j-i\Omega_j\right)t\right]\right\},\qquad(5.30)$$

де C_j, D_j –константи інтегрування.

Оскільки всі дійсні частини власних значень, окрім одного, від'ємні, то з часом складові рішення (5.30) з від’ємними дійсними частинами власних значень наближаються до нуля. Таким чином в рішенні (5.30) залишається лише частина, яка має нульову дійсну частину характеристичного показника. Таке рішення можна записати у вигляді

$$y=\left(C_*\gamma_1+D_*\delta_1\right)cos\left(\Omega_1 t\right)+\left(D_*\gamma_1-C_*\delta_1\right)sin\left(\Omega_1 t\right),\qquad(5.31)$$

де C_*, D_* – константи інтегрування, визначені з початкових умов.

Надалі розглянемо такий вид рухів, який характеризується наступними значеннями констант інтегрування: $C_*=D_*=1$.

Елементи векторів γ_1 і δ_1 визначимо як $\gamma_1=\left(\gamma_1^{(1)},\ldots,\gamma_1^{(2N_w)}\right)$ та $\delta_1=\left(\delta_1^{(1)},\ldots,\delta_1^{(2N_w)}\right)$. Тоді узагальнені координати системи (5.31) мають вигляд

$$q_j^{(w)}=\sqrt{2\left(\gamma_1^{(j)2}+\delta_1^{(j)2}\right)}\,sin\left(\Omega_1 t+\varphi_j\right),\qquad(5.32)$$

де $tg\varphi_j=\dfrac{\gamma_1^{(j)}+\delta_1^{(j)}}{\gamma_1^{(j)}-\delta_1^{(j)}}$.

Рівняння (5.32) використаємо в співвідношеннях (5.19). В результаті отримаємо вираз для поперечних коливань параболічної оболонки

$$w(\theta,\varphi,t)=\sum_{j=1}^{N_w}\sqrt{2\left(\gamma_1^{(j)2}+\delta_1^{(j)2}\right)}W_j(\theta,\varphi)sin\left(\Omega_1 t+\varphi_j\right). \qquad (5.33)$$

Просторова форма втрати стійкості в точці біфуркації Хопфа має вид (5.33).

Таким чином, при втраті динамічної стійкості параболічної оболонки зароджуються автоколивання (5.33). Форма оболонки при автоколиваннях визначається з числових досліджень. Підкреслимо, що частота коливань оболонки на початку автоколивань Ω_1. є комплексною частиною характеристичного показника λ_i, дійсна частина якого дорівнює нулю.

5.2.3 Числове моделювання динамічної нестійкості. Для дослідження динамічної нестійкості параболічних оболонок їх переміщення розкладаються за формами коливань (5.13). Для цього спочатку визначаються власні форми коливань (5.14) за методом Релея-Рітца [329]. Потім ці результати використовуються в аналізі динамічної стійкості та її втрати для обтічників параболічної форми.

Було визначено аеропружні коливання параболічних оболонок з різними висотами, а саме: H_1 = 2 м, H_2 = 3 м, H_3 = 4 м, та однаковим радіусом основи r = 2 м. Товщини оболонок h приймалися однаковими і рівними 5 мм. Всі розрахунки проводилися для матеріалу з такими механічними характеристиками: E = 71 ГПа, ρ = 2640 кг/м^3, ν = 0,3. Усереднена густина газового потоку ρ_f = 1,0 кг/м^3.

Достовірність результатів числового моделювання на основі теорії тонких оболонок та отримані власні частоти коливань параболічних оболонок за цими моделями перевірялися шляхом їх порівняння з результатами числового аналізу, отриманими для тривимірних моделей методом скінченних елементів в програмному комплексі ANSYS.

Як тестові проведені розрахунки частот власних коливань сферичної оболонки з радіусом $R = 2$ м, жорстко закріпленої по діаметру. В табл. 5.1 подано результати цих обчислень. Відносна похибка розрахунків за двома методами менше одного відсотка.

Таблиця 5.1

Частоти власних коливань сферичної оболонки з радіусом *R* = 2 м, отримані за МСЕ та методом Релея-Рітца

Номер частоти	Метод скінченних елементів, Гц	Метод Релея – Рітца, Гц	Відносна похибка
1	231,29	231,79	0,00216
2	364,83	364,98	0,00041
3	370,86	370,96	0,00027
4	388,63	388,22	0,00106
5	393,95	395,86	0,00482
6	396,35	397,13	0,00196

В табл. 5.2 подано результати розрахунків частот власних коливань для параболічної оболонки з висотою $H_1 = 2$ м. Для розрахунку власних форм коливань використовувалися співвідношення (5.14). Результати, отримані методом Релея – Рітца, порівнювалися з даними, що отримані за методом скінченних елементів. Результаті такого порівняння подано в табл. 5.2. Отже, результати, що отримані за методом скінченних елементів, близькі до даних, що отримані методом Релея – Рітца.

Результати числового аналізу перших власних частот коливань для параболоїдів різної висоти подано в табл. 5.3. У цій таблиці наведено результати розрахунків, отримані методом Релея – Рітца (МРР) та методом скінченних елементів (МСЕ). Звернемо увагу на те, що при послідовному збільшенні висоти параболоїда власні частоти коливань оболонкової конструкції падають.

Таблиця 5.2

Частоти власних коливань параболічної оболонки з висотою H_1 = 2 м та радіусом R = 2 м, отримані за МСЕ та методом Релея-Рітца

Номер частоти	Метод скінченних елементів, Гц	Метод Релея – Рітца, Гц	Відносна похибка
1	157,50	157,60	0,00063
2			
3	159,34	160,54	0,00747
4			
5	162,67	164,04	0,00835
6			
7	167,43	168,22	0,00470
8			
9	173,58	173,3	0,00162
10			

Для параболоїда висотою H_2 = 3 м спостерігається досить гарний збіг результатів, отриманих за двома методами. Відносна похибка обчислень, як і для перших двох розрахунків, не перевищує 1%. При збільшенні висоти параболоїда до H/R = 2 спостерігається велика різниця між частотами, що отриманими різними методами. Отже, для оболонки з висотою H_3 = 4 м результати, що отримані методом Релея – Рітца і методом скінченних елементів, істотно різняться.

Як показали числові розрахунки, при подальшому збільшенні висоти параболоїда точність власних частот, отриманих за методом Релея-Рітца, сильно знижується. Це відбувається тому, що базисні функції (5.14), які апроксимуються формами коливань (5.16), добре описують коливання тільки «низьких» параболоїдів, для яких $0 < \theta < 0{,}4\pi$. При значеннях кутової координати вздовж твірної параболічної оболонки від $\theta \geq 0{,}4\pi$ до $\theta < 0{,}5\pi$ радіус кривизни меридіану змінюється до нескінченності. Оскільки його значення при $\theta \geq 0{,}4\pi$ швидко зростає, то при цьому точність числового інтегрування падає. Для більш високих параболоїдів необхідно використовувати базисні функції, відмінні від (5.14). Застосування як базисних функцій поліномів або тригонометричних функцій не дало позитивних результатів. Для розрахунків коливань «високих» параболоїдів можна рекомендувати метод скінченних елементів.

Таблиця 5.3

Частоти власних коливань параболічних оболонок з висотами $H_2 = 3$ м та $H_3 = 4$ м, радіусом $R = 2$ м, отримані за МСЕ та методом Релея-Рітца

Номер частоти	Метод	$H_2 = 3$ м	$H_3 = 4$ м
		Частота, Гц	
1, 2	МСЕ	105.0	75.7
	МРР	105.1	86.3
3, 4	МСЕ	105.7	76.0
	МРР	106.0	86.5
5, 6	МСЕ	106.1	77.4
	МРР	107.3	86.8
7, 8	МСЕ	108.6	78.5
	МРР	108.4	87.0
9,10	МСЕ	108.9	80.9
	МРР	109.9	87.4

Числові дослідження коливань «низьких» параболоїдів в надзвуковому газовому потоці дозволили визначити ряд закономірностей щодо поведінки типового ряду обтічників в польоті.

Для оболонок з висотами H_1, H_2, H_3 досліджувалося значення числа Маха *M*, при якому спостерігалася втрата динамічної стійкості конструкції. Таке число Маха називається критичним; воно позначається M_*. Відзначимо, що для значень чисел Маха $M < 1$ та $M = 0$, тобто для дозвукового та для звукового газового потоку, теорія, яка описується співвідношенням (5.1), – непридатна. Тому динамічна нестійкість параболоїдів досліджувалася при $M > 1$. Оскільки експериментально зафіксовано появу автоколивань в перші секунди надзвукового потоку, то розрахунки проводилися в такому діапазоні чисел Маха M : $1{,}01 \le M \le 2$.

Досліджено залежність реальної частини першого характеристичного показника α_1 від числа Маха M . На рис. 5.3 показано результати проведених досліджень.

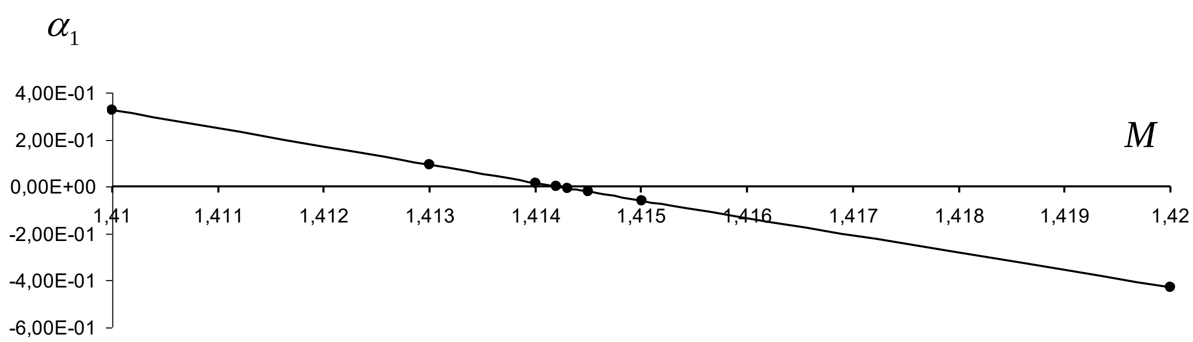


Рис. 5.3. Залежність реальної частини першого характеристичного показника від числа Маха M

Слід зазначити лінійний характер цієї залежності. Визначено, що для всіх розглянутих параболічних оболонок втрата стійкості $\alpha_1 = 0$, що відповідає біфуркації Хопфа, спостерігається при числі Маха $M = 1.4142$. При числах Маха $M > 1.4142$ значення залежність реальної частини першого характеристичного показника $\alpha_1 < 0$, а при $M < 1.4142$ – $\alpha_1 > 0$.

Таким чином, для оболонок з висотами H_1, H_2, H_3 динамічна нестабільність спостерігається в діапазоні чисел Маха 1< $M \leq$ 1.4142.

Проведено аналіз достовірності отриманого результату. Критичні значення чисел Маха досліджувалися при різному числі доданків в розкладанні (5.13). Метою цього аналізу було дослідити збіжність критичних значень чисел Маха при збільшенні числа степенів свободи, що описують конструкцію.

Результати розрахунків критичних чисел Маха для параболоїдів з висотами H_1, H_2, H_3 подано в табл. 5.4 Тут показані результати розрахунків для систем з 6, 8, 10 та 12 степенями свободи. Як випливає з таблиці, критичні значення чисел Маха для систем с 8, 10 і 12 степенями свободи – близькі. Це свідчить про збіжність результатів. Характерно, що критичне значення числа Маха не змінюється при збільшенні висоти оболонки з 2 до 4 м. Це пояснюється тим, що інтенсивний коливальний процес протікає в нижній частині оболонки. Робота сил тиску на формах вільних коливань для трьох оболонок істотно не відрізняється.

Таблиця 5.4

Значення критичних чисел Маха M_* при різному значенні числа степенів свободи N_w в моделі конструкції

N_w	H_1 = 2 м	H_2 = 3 м	H_3 = 4 м
6	1.380	1.384	1.378
8	1.41421	1.41421	1.41421
10	1,4142	1,4142	1,4142
12	1,4142	1,4142	1,4142

Досліджувався вплив на значення критичних чисел Маха поправки Крумхара [178], яка входить до співвідношення (5.1). Порівняння результатів, отриманих з поправкою Крумхара і без неї, показало, що числові значення критичних чисел Маха практично не змінюються.

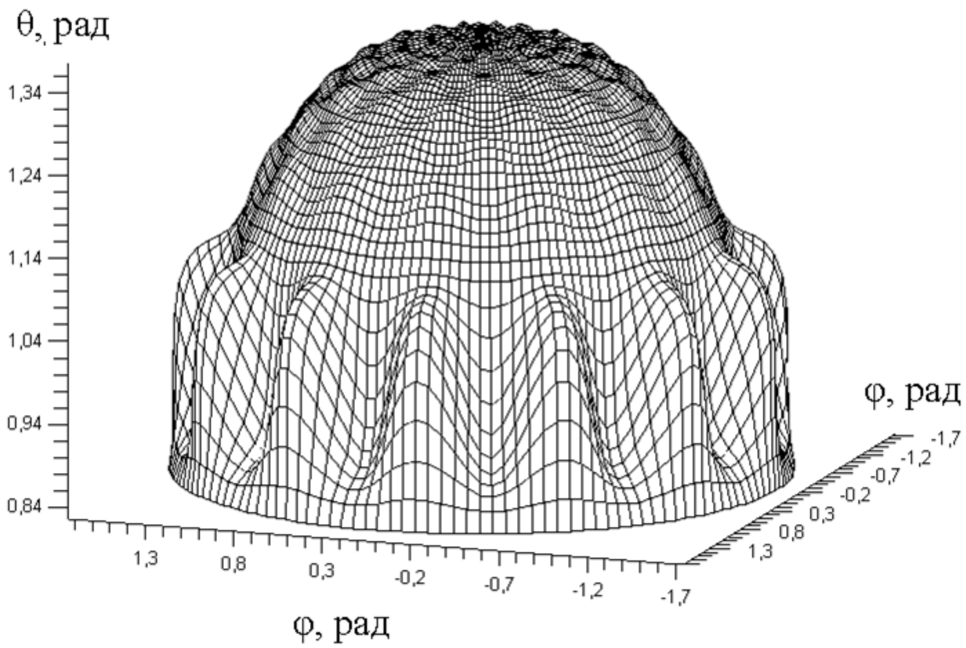
Досліджувалися частоти на початку автоколивань оболонки. Метод їх визначення викладено в пункті 5.2.2. Результати розрахунків частот на початку автоколивань для оболонок з різними висотами подано в табл. 5.5. Зауважимо, що частоти на початку автоколивань значно вищі за нижні власні частоти оболонок. Відзначимо, що при збільшенні висот параболічних оболонок, частоти автоколивань ростуть, а власні частоти падають.

Таблиця 5.5

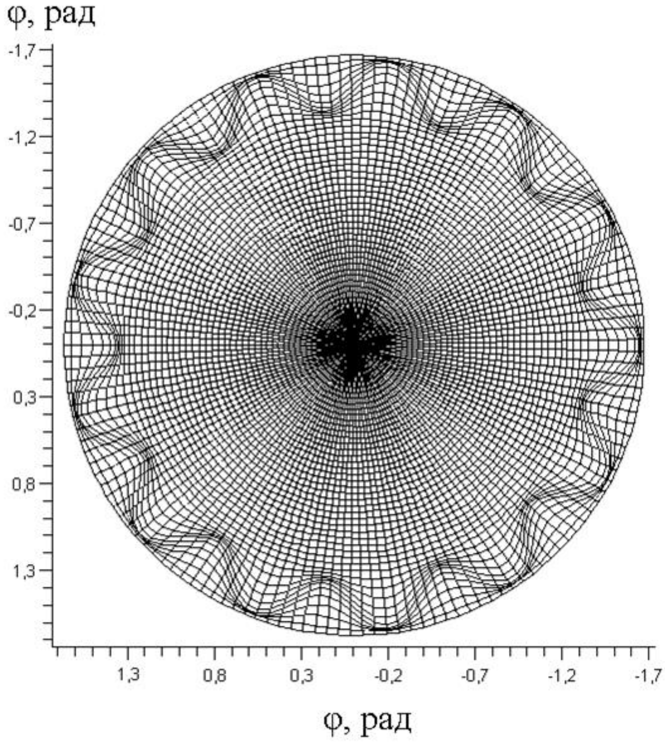
Значення частот на початку автоколивань для оболонок з висотами H_1, H_2, H_3

H	H_1	H_2	H_3
Ω_1, Гц	529.55	576.50	619.45

Досліджувалися форми оболонок різної висоти на початку автоколивань. Форма оболонки при виникненні автоколивань має вигляд (5.33). Форма втрати динамічної стійкості на початку автоколивань оболонкової конструкції в надзвуковому газовому потоці для оболонок з висотами H_1, H_2, H_3 показані на рис. 5.4, 5.5 та 5.6, відповідно.



а



б

Рис. 5.4. Форма втрати динамічної стійкості параболічної оболонки з радіусом основи 2 м і висотою 2 м:

а – вид збоку;

б – вид зверху

Для всіх трьох розрахункових випадків приймалося, що момент часу дорівнює $t = \dfrac{0{,}5\pi}{\Omega_1} - \varphi_1$. Саме в цей момент в рівнянні (5.33) $sin(\Omega_1 t + \varphi_1) = 1$.

Як видно з рис. 5.4 – 5.6, інтенсивні автоколивання спостерігаються в нижніх частинах оболонок. В області кріплення обтічника, що моделюється параболоїдом обертання, до основної частини ракети спостерігається хвилеутворення поперечних автоколивань в окружному напрямку з великим числом вузлів, а вгорі параболоїда вузлів коливань в окружному напрямку немає. Характерною особливістю всіх форм є той факт, що інтенсивність коливань вершини параболоїда значно менше, ніж інтенсивність коливань її нижній частини.

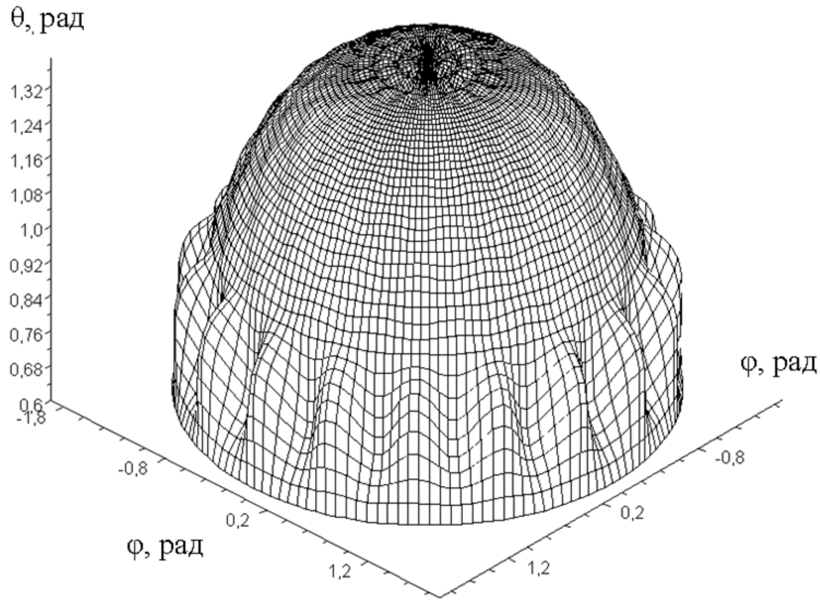


Рис. 5.5. Форма втрати динамічної стійкості параболічної оболонки з радіусом основи 2 м і висотою 3 м

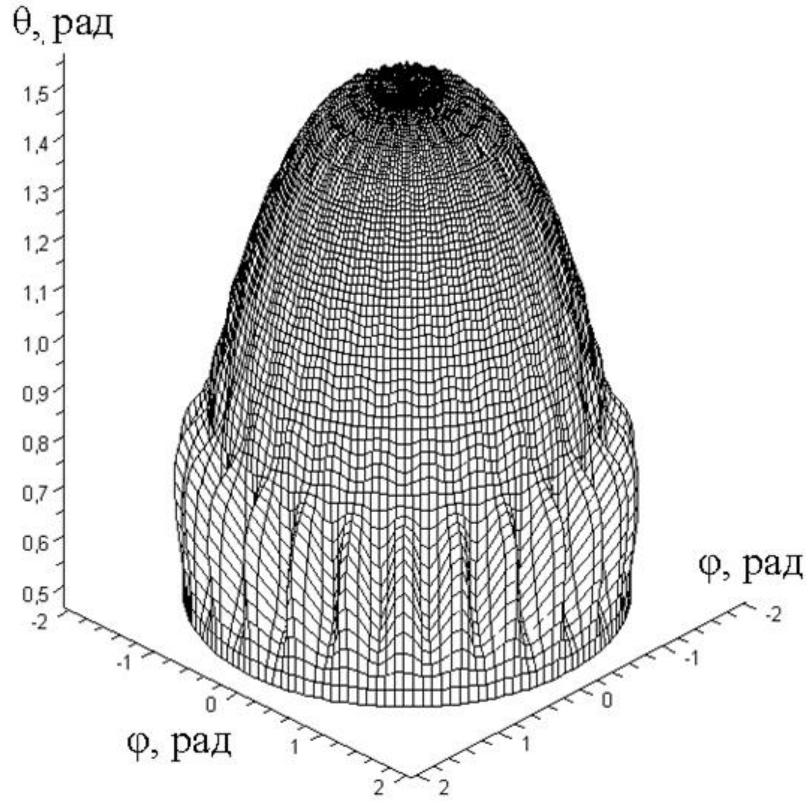


Рис. 5.6. Форма втрати динамічної стійкості параболічної оболонки з радіусом основи 2 м і висотою 4 м

Зауважимо, що критичне значення числа Маха не змінюється при збільшенні висоти оболонки з 2 м до 4 м. Це пояснюється тим, що інтенсивний коливальний процес протікає в нижній частині параболічної оболонки.

5.3 Динамічна нестійкість підкріплених шпангоутами конічних обтічників ракет в надзвуковому газовому потоці

5.3.1 Постановка задачі та математична модель деформування обтічника. Досліджуються коливання обтічників ракет у надзвуковому газовому потоці, що мають конічну форму (рис. 5.1 б) та підкріплені шпангоутами. Як зазначалося раніше, обтічники ракетної техніки являють собою тонкі оболонки з великою площею відносно об'єму матеріалу, тому вони моделюються тонкими конічними оболонками, підсиленими внутрішніми кільцями. Для опису деформації оболонкової конструкції застосовуються гіпотези Кірхгофа – Лява, зсуви та інерція обертання не враховуються. Компоненти тензорів деформацій та напружень задовольняють закону Гука [339].

Для отримання рівнянь руху конічної оболонки з різною кількістю шпангоутів застосовується метод заданих форм, а власні форми коливань знаходяться за методом Релея–Рітца. Кінетична та потенціальна енергії конструкції подаються залежними від компонент вектору переміщень конічної оболонки. Аеродинамічний тиск надзвукового газового потоку, що діє на конічну оболонку, моделюється поршневою теорією [337].

Проводиться аналіз втрати динамічної стійкості конструкції, що відповідає біфуркації Хопфа.

Розглядається конічна оболонка висотою H та радіусом основи R. Оболонка має постійну товщину h. В основі оболонка жорстко закріплена. Серединна поверхня конічної оболонки з шпангоутами показана на рис. 5.7.

Утворююча конічної оболонки складає з віссю z кут α. З середини оболонку підсилено N кільцями, які розташовано паралельно основі оболонки на однаковій відстані відносно одне одного. В конструкціях, що розглядалися, всі кільця мають однаковий поперечний переріз та виготовлені з однакового з оболонкою матеріалу. Під час деформування оболонкової конструкції кожне кільце вигинається в своїй площині та в перпендикулярному напрямку. До того ж воно зазнає деформації кручення та розтягу-стиску. При коливаннях обтічника кільця здійснюють згинно-крутильно-повздовжні коливання [344].

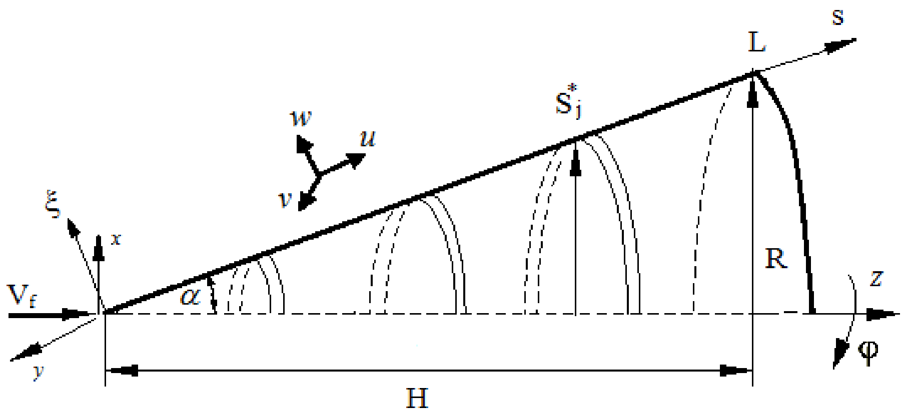


Рис. 5.7. Серединна поверхня конічної оболонки зі шпангоутами

Пов'яжемо з оболонкою криволінійну систему координат (s, φ, ξ) (рис. 5.7). Параметри Ламе конічної оболонки вздовж координатних ліній приймають такі значення: A_1=1, A_2=s·sin α. Радіуси кривизни конічної оболонки вздовж координатних ліній s та φ такі: $R_s = +\infty$, $R_\varphi = s \cdot \tan\alpha$. Шпангоути кріпляться в точках з такими координатами утворюючою $s_j^* = j\,N/[(N+1)\cdot\cos\alpha]$. Проекції переміщень точок оболонки на напрямки s, φ й ξ, позначимо $u(s, \varphi, t)$, $v(s, \varphi, t)$, й $w(s, \varphi, t)$ відповідно.

Потенціальну енергію конструкції подаємо у вигляді суми потенціальної енергії конічної оболонки Π_1 та потенціальних енергій всіх шпангоутів $\Pi_2^{(l)}$, де $l = 1,\ldots,N$:

$$\Pi = \Pi_1 + \sum_{l=1}^{N} \Pi_2^{(l)} . \tag{5.34}$$

Потенціальна енергія конічної оболонки приймає вигляд

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0^+}^{L}\left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}\right)\left[R - \left(\frac{H}{cos\,\alpha} - s\right)sin\alpha\right]ds\,d\varphi\,d\xi\,, \quad (5.35)$$

де $L = \frac{H}{cos\,\alpha}$ – довжина твірної конусу.

Елементи тензору деформацій пов‘язані з компонентами вектору переміщень наступними співвідношеннями:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial s} - \xi\frac{\partial^2 w}{\partial s},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{s\,tan\,\alpha} + 2\xi\left(\frac{1}{s\,tan\,\alpha}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi} - \frac{\partial w}{s\,\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}\right]\right), \quad (5.36)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{s\,tan\,\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} + u\cdot tan\,\alpha + w\right) + \xi\left(\frac{1}{s^2\,tan^2\,\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{\partial w}{s\,\partial s}\right).$$

Прийнявши до уваги зв‘язок компонент тензора напружень з компонентами тензора деформацій у вигляді закону Гука [338], виразимо потенціальну енергію конічної оболонки (5.35) через компоненти вектору переміщень. Для цього у (5.35) додамо (5.36) та проінтегруємо вираз по товщині оболонки, отримаємо

$$\Pi_1 = \frac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0^+}^{L}\left[\left(E_1 + E_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(E_1E_2 - \frac{1}{4}\Omega_1^2\right)\right]\left\{R - \left(\frac{H}{cos\,\alpha} - s\right)sin\alpha\right\}ds\,d\varphi$$
$$+ \frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0^+}^{L}\left[\left(K_1 + K_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(K_1K_2 - \Omega_2^2\right)\right]\left\{R - \left(\frac{H}{cos\,\alpha} - s\right)sin\alpha\right\}ds\,d\varphi, \quad (5.37)$$

де $E_1 = \frac{\partial u}{\partial s}$;

$$E_2 = \frac{1}{s \cdot tg\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot tg\alpha + w\right);$$

$$K_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s};$$

$$K_2 = \left(\frac{1}{s^2 \cdot tg^2\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right] - \frac{\partial w}{s \cdot \partial s}\right);$$

$$\Omega_1 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{s \cdot tg\alpha};$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{s \cdot tg\alpha}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{\partial w}{s \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}\right].$$

Щоб отримати потенціальну енергію j-го шпангоута розглянемо його деформований стан. Ділянку шпангоута показано на рис. 5.8.

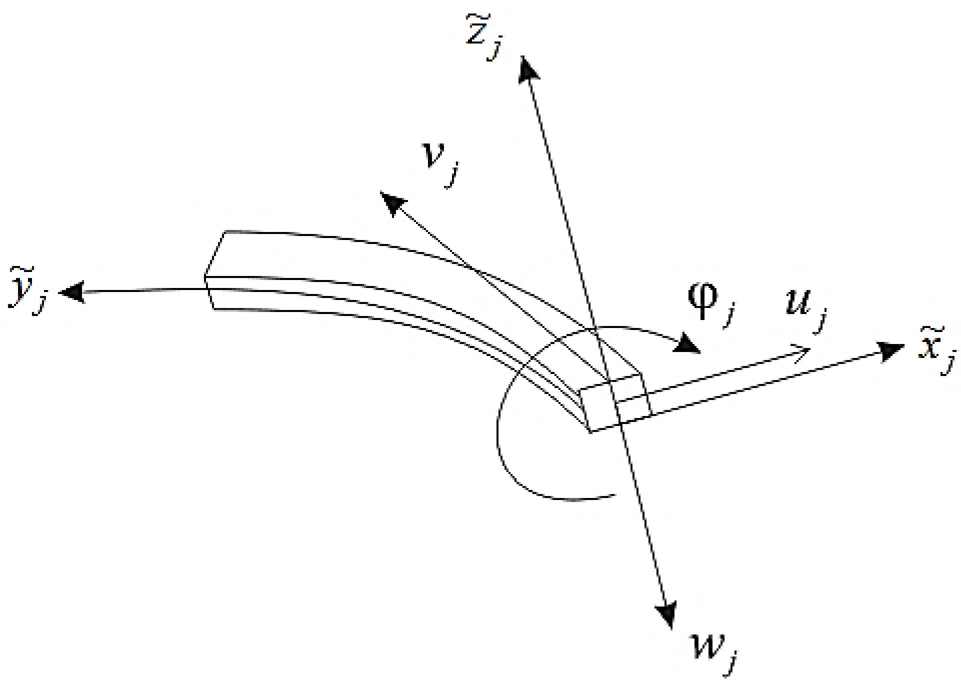


Рис. 5.8. Ділянка шпангоута

Кривизну серединної лінії j-го шпангоута позначимо через R_j.

Пов‘яжемо з шпангоутом локальну систему координат $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j)$; вісь $\tilde{y}_j$ розташовано вздовж поздовжньої координати шпангоута; вісь $\tilde{z}_j$ спрямовано вздовж твірної конічної оболонки; вісь $\tilde{x}_j$ розташовано так, що $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j)$ утворюють праву трійку векторів. Згин шпангоута в двох площинах характеризується переміщеннями $u_j(\tilde{y}_j, t)$ та $w_j(\tilde{y}_j, t)$. Розтяг – стиск шпангоута описується переміщеннями $v_j(\tilde{y}_j, t)$, а кручення моделюється функцією кута повороту $\varphi_j(\tilde{y}_j, t)$.

Деформації та узагальнені переміщення шпангоута пов‘язані між собою співвідношеннями [344]

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\partial v_j}{\partial \tilde{y}_j} - \frac{w_j}{R_j}, \\
\tau &= \frac{\partial u_j}{R_j \partial \tilde{y}_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tilde{y}_j}, \\
\chi_1 &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{\varphi_j}{R_j}, \\
\chi_2 &= \frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{w_j}{R_j^2},
\end{aligned} \tag{5.38}$$

де $\chi_1, \chi_2 -$ зміна кривизни серединної лінії кільця;

$\varepsilon -$ окружна деформація;

$\tau -$ відносний кут закручування.

Потенціальну енергію *j*-го шпангоута з урахуванням виразів (5.38) подаємо в такому вигляді:

$$\Pi_2^{(j)} = \frac{1}{2} \int \left\{ E_j F_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial \tilde{y}_j} - \frac{w_j}{R_j} \right)^2 + E_j J_{Z_j} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial \tilde{y}_j^2} + \frac{\varphi_j}{R_j} \right)^2 + \right.$$

$$+E_j J_{X_j}\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial\tilde{y}_j^2}+\frac{w_j}{R_j^2}\right)^2+G_j J_j\left(\frac{\partial u_j}{R_j\partial\tilde{y}_j}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial\tilde{y}_j}\right)^2\Bigg\}d\tilde{y}_j,, \qquad (5.39)$$

де E_j – модуль Юнга j-го шпангоута;

G_j – модуль зсуву j-го шпангоута;

F_j – площина поперечного переріз шпангоута;

J_{Z_j}, J_{X_j}, J_j – моменти інерції поперечних перерізів шпангоута;

R_j – радіус кривизни серединної лінії j-го шпангоута.

Один з боків шпангоута жорстко пов'язаний з внутрішньою поверхнею оболонки. Цей зв'язок виражається співвідношеннями між узагальненими переміщеннями оболонки й шпангоутів.

$$\begin{gathered}u_j(\tilde{y}_j,t)=u(s_j^*,\varphi,t)-\tilde{h}_j\varphi_1(s_j^*,\varphi,t),\\ v_j(\tilde{y}_j,t)=-v(s_j^*,\varphi,t)-\tilde{h}_j\varphi_2(s_j^*,\varphi,t),\\ w_j(\tilde{y}_j,t)=-w(s_j^*,\varphi,t),\\ \varphi_j(\tilde{y}_j,t)=\varphi_1(s_j^*,\varphi,t),\end{gathered} \qquad (5.40)$$

де $\varphi_1\left(s_j^*,\varphi,t\right)=\left.\frac{\partial w(s,\varphi,t)}{\partial s}\right|_{s=s_j^*}$;

$$\varphi_2=\frac{\partial w(s_j^*,\varphi,t)}{\partial\tilde{y}}+\frac{v(s_j^*,\varphi,t)}{R_j};$$

$$\tilde{h}_j=\tilde{H}_j+\frac{h}{2};$$

$\tilde{H}_j$ – відстань від внутрішньої сторони оболонки до серединної ліні кільця.

Ці співвідношення дозволяють виразити потенціальну енергію шпангоута (5.39) через переміщення оболонки. Тому потенціальну енергію всієї конструкції вдається виразити через компоненти переміщень оболонки.

Таким чином, з урахуванням (5.37) та (5.39), отримуємо потенціальну енергію підкріпленого шпангоутами конічного обтічника (5.34), яку можна записати в операторному вигляді таким чином:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_{0^+}^{L} \Lambda(u,v,w) ds d\varphi + \sum_{j=1}^{N} \oint \Lambda_j \left[u(s_j^*,\varphi,t), v(s_j^*,\varphi,t), w(s_j^*,\varphi,t) \right] d\tilde{y}_j\ , \quad (5.41)$$

де $\Lambda(u,v,w)$ і $\Lambda_j \left[u(s_j^*,\varphi,t), v(s_j^*,\varphi,t), w(s_j^*,\varphi,t) \right]$ – оператори відносно переміщень оболонки.

Кінетична енергія конструкції складається з кінетичної енергії оболонки T_1 й кінетичних енергій всіх шпангоутів $T_2^{(j)}$

$$T = T_1 + \sum_{j=1}^{N} T_2^{(j)}\ . \quad (5.42)$$

Кінетична енергія конічної оболонки після інтегрування по товщині має вигляд

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{0^+}^{L} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \left[R - \left(\frac{H}{\cos\alpha} - s \right) \sin\alpha \right] ds\, d\varphi, \quad (5.43)$$

де ρ – густина матеріалу оболонки.

Кінетичну енергію *j*-го шпангоута подаємо у вигляді

$$T_2^{(j)} = \frac{\rho_1 F_j}{2} \oint \left(\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2 + \dot{w}_j^2 \right) d\,\tilde{y}_j + \frac{\rho_1 J_j}{2} \oint \dot{\varphi}_j^2 d\,\tilde{y}_j\ , \quad (5.44)$$

де ρ_1 – густина матеріалу шпангоутів;

J_j – полярний момент інерції j-го шпангоута.

Кінетичну енергію шпангоута (5.44) записуємо через похідні від переміщення оболонки (5.40). Підсумовуючи результат з (5.43), отримуємо кінетичну енергію конструкції (5.42) в переміщеннях оболонки.

На оболонку зовні діє надзвуковий газовий потік. На значній відстані від оболонки потік рухається в позитивному напрямку осі z з надзвуковою швидкістю V_f. Використовуючи співвідношення поршневої теорії [337], віртуальну роботу аеродинамічного тиску δA, що діє на поверхню оболонки, подаємо так:

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{V_f\rho_f}\delta\mathrm{A} = \\ = -\int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\left(V_f\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{M^2-2}{M^2-1}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]\delta w\,ds\,d\varphi, \tag{5.45}$$

де M – число Маха;

ρ_f – усереднена для обраних висот густина газу;

δw – віртуальне переміщення конструкції.

5.3.2 Динамічна модель з скінченним числом степенів свободи. Динаміку оболонки опишемо моделлю зі скінченним числом степенів свободи. Для виведення рівнянь руху підкріпленої шпангоутами конічної оболонки з скінченним числом степенів свободи скористаємося методом заданих форм. Компоненти переміщень оболонки розкладемо в ряд за власними формами коливань $U_n(s, \varphi)$, $V_n(s, \varphi)$, $W_n(s, \varphi)$ так:

$$u(s,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t)U_n(s,\varphi),$$

$$v(s,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t)V_n(s,\varphi), \tag{5.46}$$

$$w(s,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t)W_n(s,\varphi),$$

де $q^{(u)}=[q_1^{(u)}, \ldots, q_{Nu}^{(u)}]$, $q^{(v)}=[q_1^{(v)}, \ldots, q_{Nv}^{(v)}]$, $q^{(w)}=[q_1^{(w)}, \ldots, q_{Nw}^{(w)}]$ – вектори узагальнених координат.

Для розрахунку власних форм коливань застосовується метод Релея-Рітца [329]. Власні форми коливань подаємо у вигляді

$$U_n(s,\varphi)=\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} A_{lj}^{(n)}\psi_l^{(u)}(s)\cos j\varphi,$$

$$V_n(s,\varphi)=\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} B_{lj}^{(n)}\psi_l^{(v)}(s)\sin j\varphi, \tag{5.47}$$

$$W_n(s,\varphi)=\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} C_{lj}^{(n)}\psi_l^{(w)}(s)\cos j\varphi,$$

де $A_{lj}^{(n)}, B_{lj}^{(n)}, C_{lj}^{(n)}$ – невідомі коефіцієнти, які знаходяться з проблеми власних значень.

Функції $\psi_l^{(u)}(s)$, $\psi_l^{(v)}(s)$ є власними формами поздовжніх коливань консольного стрижня. Функції $\psi_l^{(w)}(s)$ описують згинні форми консольного стрижня:

$$\psi_l^{(u)}(s)=\psi_l^{(v)}(s)=\sin\frac{(2l-1)\pi s}{L},$$

$$\psi_l^{(w)}(s)=\frac{1}{2}\left(\cosh\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]-\cos\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]\right)- \tag{5.48}$$

$$-\frac{sinh(k_l s)+sin(k_l s)}{2(cosh(k_l s)-cos(k_l s))}\left(sinh\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]-sin\left[k_l\left(1-\frac{s}{L}\right)\right]\right).$$

Для спрощення подальшого аналізу всі узагальнені координати об‘єднаємо в один вектор $q=[q^{(u)},q^{(v)},q^{(w)}]=[q_1,...,q_{N_G}]$, де $N_G=N_u+N_v+N_w$.

Співвідношення для узагальнених сил Q_n, $n=1,...,N_G$ визначимо наступним чином. Вектори узагальнених сил $Q^{(u)},Q^{(v)},Q^{(w)}$ відповідають наступним векторам узагальнених координат $q^{(u)},q^{(v)}$, $q^{(w)}$. Всі елементи векторів $Q^{(u)},Q^{(v)}$ дорівнюють нулю $Q^{(u)}\equiv 0$, $Q^{(v)}\equiv 0$. Елементи вектору узагальнених сил $Q^{(w)}$ визначаються з урахуванням (5.45) наступним чином:

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{V_f\rho_f}Q_n^{(w)}=$$
$$=-\int_0^{2\pi}\int_{0^+}^{L}\left(V_f\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{M^2-2}{M^2-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)W_n(s,\varphi)\left[R-\left(\frac{H}{cos\,\alpha}-s\right)sin\alpha\right]dsd\varphi, \tag{5.49}$$

де $n=1,...,N_w$.

Розкладання (5.46) використаємо в співвідношенні (5.49). В результаті отримаємо вектор узагальнених сил в матричному вигляді (5.23).

Розкладання для переміщень (5.46), використовуючи (5.47) і (5.49), вводяться у кінетичну та потенціальну енергії конструкції, та здійснюються необхідні інтегрування. Як результат, потенціальна енергія (5.41) подається у вигляді квадратичної форми відносно узагальнених координат $\Pi=\Pi(q_1,...,q_{N_G})$, а кінетична енергія (5.42) – узагальнених швидкостей $T=T(\dot q_1,...,\dot q_{N_G})$. Тоді рівняння Лагранжа II роду, що описують рух підсиленої шпангоутами конічної оболонки, можна подати в такому вигляді:

$$M_{11}\ddot{q}^{(u)} + K_{11}q^{(u)} + K_{12}q^{(v)} + K_{13}q^{(w)} = 0\,,$$
$$M_{22}\ddot{q}^{(v)} + K_{21}q^{(u)} + K_{22}q^{(v)} + K_{23}q^{(w)} = 0\,, \tag{5.50}$$
$$M_{33}\ddot{q}^{(w)} + K_{31}q^{(u)} + K_{32}q^{(v)} + K_{33}q^{(w)} + K^{(w)}q^{(w)} + C^{(w)}\dot{q}^{(w)} = 0\,,$$

де M_{ii} – матриці мас, які є діагональними;

K_{il}– матриці жорсткості;

$C^{(w)}$ – матриця аеродинамічного демпфірування;

$K^{(w)}$ – матриця аеродинамічної жорсткості.

Як зазначалося раніше, власні частоти, у формах яких є перевага поздовжніх і крутильних коливань, значно вище власних частот, у формах яких є перевага згинних коливань [329, 339]. Тому інерційні поздовжні та крутильні складові можна не враховувати $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(v)} = 0$. Тоді з перших двох рівнянь системи (5.50) отримаємо

$$q^{(u)} = K_{u,w}\, q^{(w)},$$
$$q^{(v)} = K_{v,w}\, q^{(w)}, \tag{5.51}$$

де $K_{u,w}$ и $K_{v,w}$ – матриці розміром $N_u \times N_w$ та $N_v \times N_w$.

Розв‘язок (5.51) вводиться в третє рівняння системи (5.50). Тоді отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат згинних коливань в матричному вигляді

$$M_{33}\ \ddot{q}^{(w)} + K_*\, q^{(w)} + \tilde{C}^{(w)}\dot{q}^{(w)} = 0, \tag{5.52}$$

де $K_* = K_{31}K_{u,w} + K_{32}K_{v,w} + K_{33} + K^{(w)}$;

$\tilde{C}^{(w)} = C^{(w)} + A,$

A– діагональна матриця, що описує демпфірування в матеріалі конструкції.

Подальше розв‘язання рівнянь (5.52) проводиться числовими методами. Метою подальшого числового аналізу є визначення критичних чисел Маха надзвукового газового потоку та відповідних форм коливань втрати динамічної стійкості конічних оболонок, що підкріплені різною кількістю рівномірно розподілених вздовж твірної шпангоутів. Метод розрахунку форми оболонки під час втрати динамічної стійкості конструкції обтічника докладно розглядається в пункті 5.2.3. Далі цей метод буде застосовуватися для числового розрахунку просторової форми втрати стійкості підкріпленої шпангоутами конічної оболонки.

5.3.3 Числовий аналіз динамічної нестійкості. Для аналізу динамічної нестійкості конструкції розраховано характеристичні показники. Їх отримано при різних значеннях чисел Маха. Визначено діапазон чисел Маха, де спостерігається динамічна нестійкість. Особливу увагу приділено дослідженню форми оболонки при втраті нею динамічної стійкості в надзвуковому газовому потоці. Досліджено форму втрати стійкості конструкції з різним набором підсилюючих шпангоутів.

Розглядаються чотири варіанти конструкції. Всі вони складаються з конічної оболонки висотою H=5,24 м, радіусом R=1,95 м й товщиною h=2 мм. Механічні характеристики матеріалу: E=72 ГПа, ρ=770 кг/м^3, ν=0,3.

Перша конструкція являє собою конічну оболонку без шпангоутів. Друга, третя й четверта конструкції містять три, п’ять й сім шпангоутів, відповідно. Площа поперечних перерізів шпангоутів F_j=570 мм^2. Відстані між шпангоутами обирались рівними між собою й краями оболонки, та мали такі значення: d_3 = 1,398 м для оболонки з трьома шпангоутами, d_5 = 0,932 м для оболонки з п‘ятьма шпангоутами і d_7 = 0,699 м для оболонки з сьома шпангоутами. Механічні характеристики матеріалу шпангоутів не відрізнялись від характеристик конічної оболонки.

Проведено дослідження власних частот коливань конструкцій з різним числом шпангоутів методом Релея-Рітца (RRM). Отримані результати порівнювались з даними скінченно-елементного аналізу (FEM). Результати розрахунку власних частот в Гц для всіх чотирьох конструкцій подано в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Власні частоти чотирьох конструкцій в Гц

№ частоти	Без шпангоутів			З трьома шпангоутами		
	RRM	FEM	Відносна похибка, %	RRM	FEM	Відносна похибка, %
1	27,088	27,1	0,04	60,952	61,0	0,18
2	27,465	27,5	0,13	61,179	61,5	1,17
3	27,973	28,0	0,10	61,842	62,0	0,56
4	28,671	28,7	0,10	62,171	62,2	0,10
5	30,474	30,8	1,07	63,418	63,5	0,27
6	31,230	31,5	0,86	63,830	64,0	0,54
7	32,753	33,0	0,75	65,418	65,5	0,25
8	35,437	35,5	0,18	66,818	67,4	1,64
9	38,485	39,0	1,34	67,404	68,0	1,55
10	41,873	42,6	1,74	69,078	69,3	0,53

№ частоти	З п‘ятьма шпангоутами			З сімома шпангоутами		
	RRM	FEM	Відносна похибка, %	RRM	FEM	Відносна похибка, %
1	69,674	69,5	0,25	70.761	71,6	1,19
2	75,105	75,0	0,14	76.993	76,5	0,64
3	77,557	77,8	0,31	77.764	79,8	2,62
4	85,804	85,9	0,11	91.175	91,6	0,47
5	86,024	86,2	0,20	109.02	109,3	0,26
6	86,306	86,2	0,11	111.90	112,7	0,71
7	86,921	87,0	0,09	112.16	113,3	1,02
8	87,075	87,3	0,26	112.69	113,9	1,07
9	87,553	87,3	0,28	113.25	115,0	1,55
10	89,031	88,7	0,37	114.31	117,4	2,70

Відносна похибка результатів, що отримані за двома методами, знаходиться в межах 2 %, 1,7 %, 0,4 % і 2,7 % для конструкції без шпангоутів і для конструкцій з трьома, п‘ятьма й сімома шпангоутами, відповідно. Таким чином, максимальна відносна похибка не перевищувала 2,7 %.

Аналіз власних частот чотирьох конструкцій показав, що оребрення конструкції призводить до збільшення власних частот більше ніж в два рази. А за результатами числових досліджень, які наведені в табл. 5.6, можна зробити висновок, що збільшення числа шпангоутів від п'яти до семи не впливає на перші три власні частоти коливань конструкції. На рис. 5.9 показано графіки власних частот коливань конічних обтічників без шпангоутів (графік 1) та з трьома (графік 2), п'ятьма (графік 3) й сімома (графік 4) шпангоутами, в залежності від їхнього номера *n*.

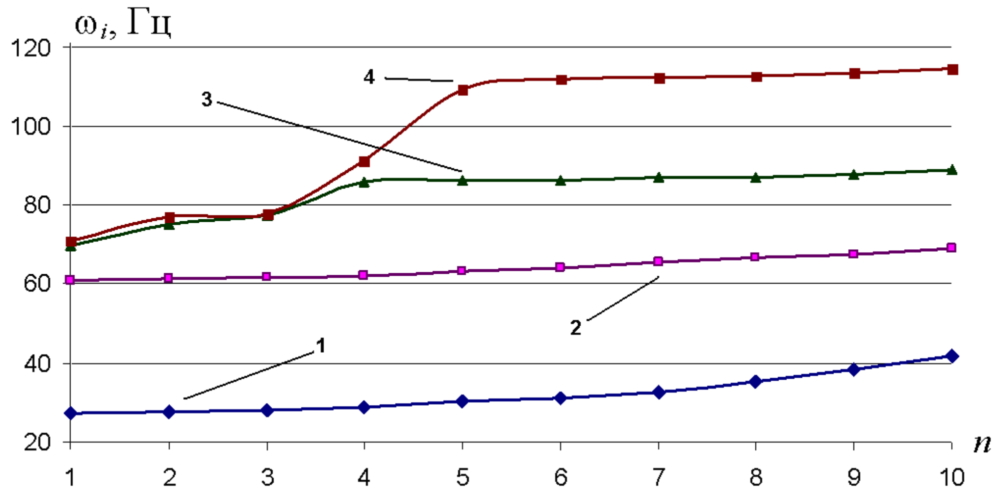


Рис. 5.9. Власні частоти коливань:

1 – конічний обтічник без шпангоутів;

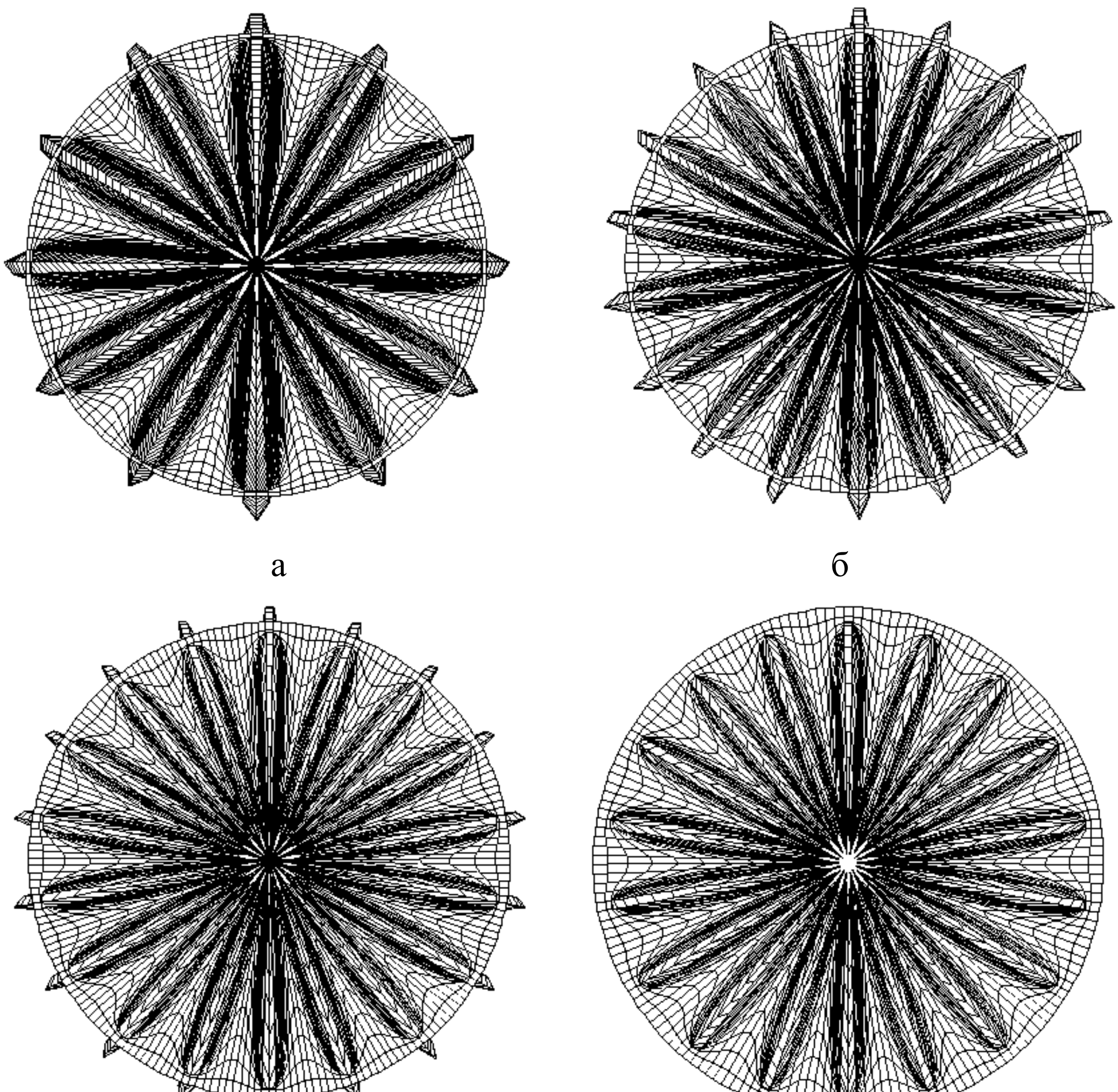
2 – конічний обтічник з трьома шпангоутами;

3 – конічний обтічник з п'ятьма шпангоутами;

4 – конічний обтічник з сімома шпангоутами

Досліджувалися власні форми коливань кожної з чотирьох конструкцій. Число вузлів в окружному напрямі першої форми для конструкції з шпангоутами дорівнює 24. Це в півтора рази більше, ніж для конструкцій без шпангоутів, що дорівнює 36.. Число вузлів в окружному напрямі не змінюється, якщо число шпангоутів збільшується від 3 до 7. Перша власна форма коливань для всіх розглянутих конструкцій не має вузлів в поздовжньому напрямі.

Наявність шпангоутів у обтічників істотно змінює вигляд першої власної форми. На рис. 5.10 показано першу власну форму (вид зверху) коливань конструкцій з різним числом шпангоутів.



а б

в г

Рис. 5.10. Перша власна форма коливань (вид зверху):

а – обтічник без шпангоутів;

б – обтічник з трьома шпангоутами;

в – обтічник з п’ятьма шпангоутами;

г – обтічник з сімома шпангоутами

Аналіз результатів показав, що підсилення конструкції конічного обтічника сімома шпангоутами дозволяє зменшити коливання в нижній частині конструкції.

Досліджувалася динамічна нестійкість конструкції в надзвуковому газовому потоці. Для цього розраховувалися характеристичні показники динамічної системи (5.52) для різних чисел Маха *M*. Числа Маха задавалися з деяким кроком h_M та розрахунки проводилися для дискретних значень $M_j = 1 + jh_M$, де $j = 1,2,..$ Для кожного дискретного значення M_j знаходилися характеристичні показники. У результаті таких числових досліджень визначаються діапазони чисел Маха *M*, при яких стан рівноваги конструкцій стійкий або нестійкий. Граничне значення числа Маха *M*, при якому стійкий стан рівноваги змінюється нестійким, називається критичним значенням.

Для числових досліджень динамічної нестійкості густина газового потоку приймалася ρ_f = 1 кг/м^3. У розкладах (5.47) використовувалося однакове число доданків $N_u = N_v = N_w$. Числові значення доданків в цих розкладах приймалися наступні: 8, 9, 12, 15, 18, 21. Відповідно, динамічна система (5.52) при цих розкладах має 8, 9, 12, 15, 18, 21 степенів свободи. Критичні числа Маха M_* визначалися для моделей з різним числом степенів свободи. Таким чином, досліджувалася збіжність результатів за (5.47). Результати розрахунків критичних чисел Маха для систем з 8, 9, 12, 15, 18, 21 степенями свободи дуже близькі. Більше того, конструкції з трьома, п‘ятьма і сімома шпангоутами мають дуже близькі критичні числа Маха *M* = 1.4142.

В результаті числового аналізу встановлено, що всі чотири конструкції мають однаковий діапазон динамічної нестійкості в надзвуковому газовому потоці для значень чисел Маха *M*: $1{,}01 \le M \le 1{,}414$. При $M > 1{,}414$ стан рівноваги конструкцій – стійкий.

Визначено частоту початку автоколивань Ω_1 за основі методу, що викладений в пункті 5.2.2. Фактично, знаходиться частота, з якою коливається конструкція при втраті нею стійкості.

В табл. 5.7 подано результати розрахунків для моделей оболонок з 9, 12, 15 й 18 степенями свободи N_w.

Таблиця 5.7

Значення критичних частот автоколивань Ω_1

N_w	Ω_1, Гц			
	Без шпангоутів	З трьома шпангоутами	З п‘ятьма шпангоутами	З сімома шпангоутами
9	63.180	65.623	57.841	58.256
12	57.113	58.938	60.113	60.147
15	56.657	60.007	60.532	60.734
18	56.392	60.319	61.096	61.045

Підкреслимо, що значення частоти початку автоколивань Ω_1 може бути обрано в якості критерія збіжності розкладень (5.47). Як видно з цієї таблиці, для чотирьох розглянутих конструкцій найкраща збіжність отриманих результатів спостерігається при 15 степенях свободи.

Досліджено зміну першої власної частоти та частоти автоколивань для різних конструкцій (рис. 5.11).

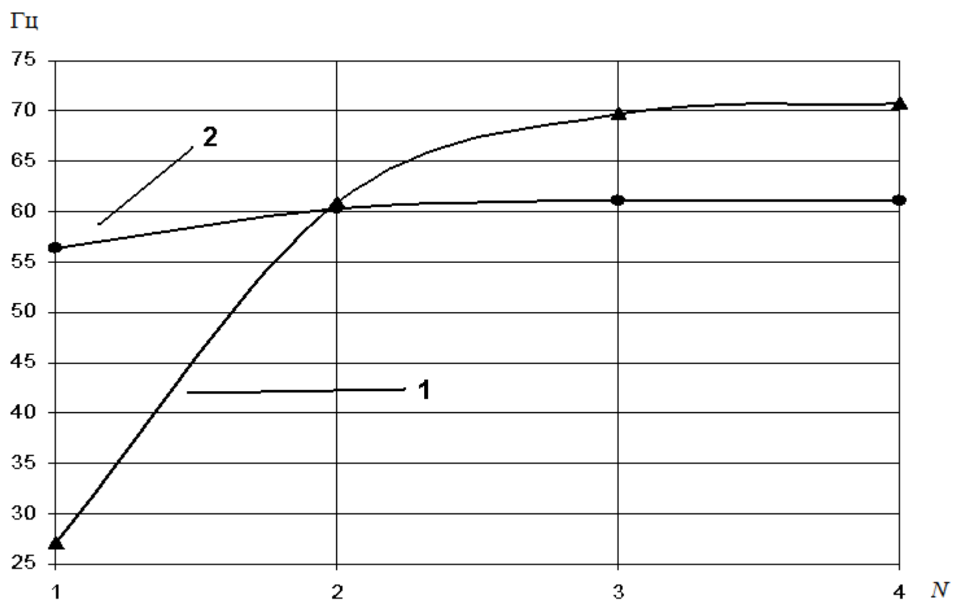


Рис. 5.11. Графіки зміни власних (крива 1) і критичних (крива 2) частот коливань конструкцій

На рис. 5.11 показано зміну першої власної частоти ω_1 (крива 1) і критичної частоти автоколивань Ω_1 (крива 2) в залежності від конструкції. Конічний обтічник без шпангоутів позначається номером 1 на осі абсцис, а конічні обтічники з трьома, п'ятьма та сімома шпангоутами позначаються номерами 2,3 та 4 на осі абсцис, відповідно. Аналіз цих результатів доводить, що для конічної оболонки без шпангоутів частота автоколивань значно вище першої власної частоти. Ці частоти близькі для конічної оболонки з трьома шпангоутами. Критична частота автоколивань менше, ніж перша власна частота для конструкцій з п'ятьма та сімома шпангоутами. Підкреслимо, що критична частота автоколивань і перша власна частота конструкцій мало змінюються, якщо число шпангоутів збільшується від п'яти до семи.

Для критичних частот кожної з чотирьох конструкцій було досліджено просторову форму коливань при втраті динамічної стійкості. Для цього використовувався метод, запропонований в пункті 5.2.2 для параболічної оболонки. Як приклад, на рис. 5.12 та рис. 5.13 подано форми втрати динамічної стійкості на початку автоколивань конструкції для конічних оболонок з трьома та сімома шпангоутами, відповідно.

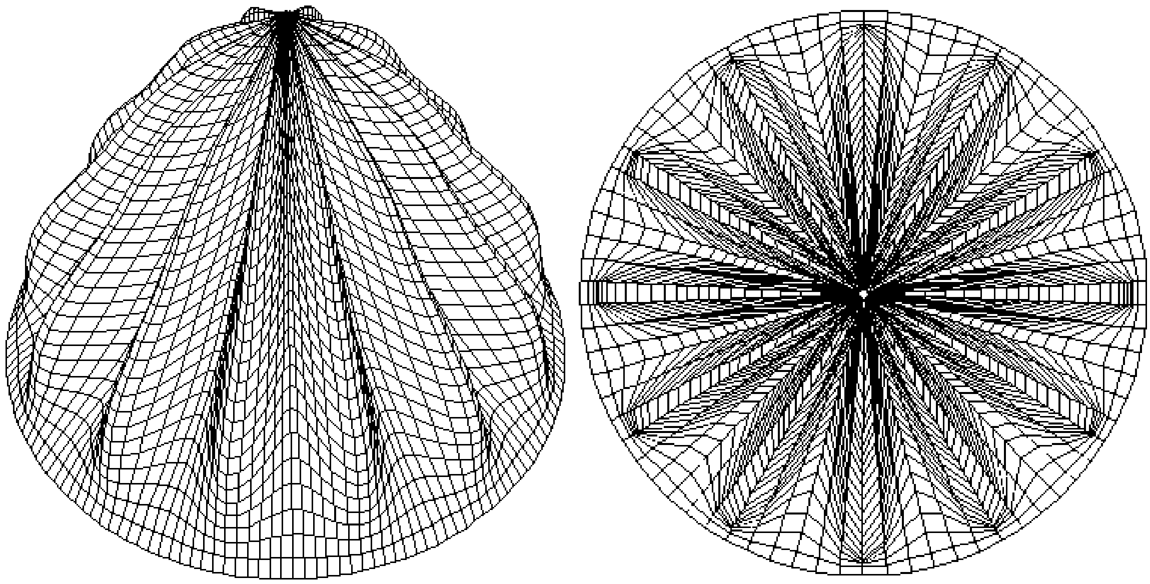
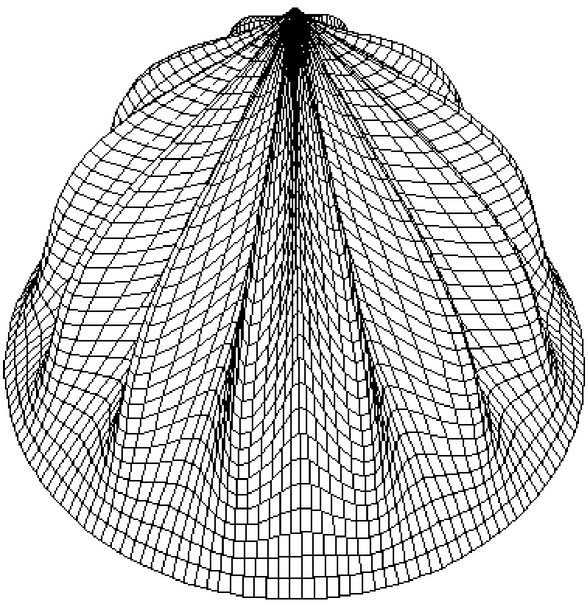


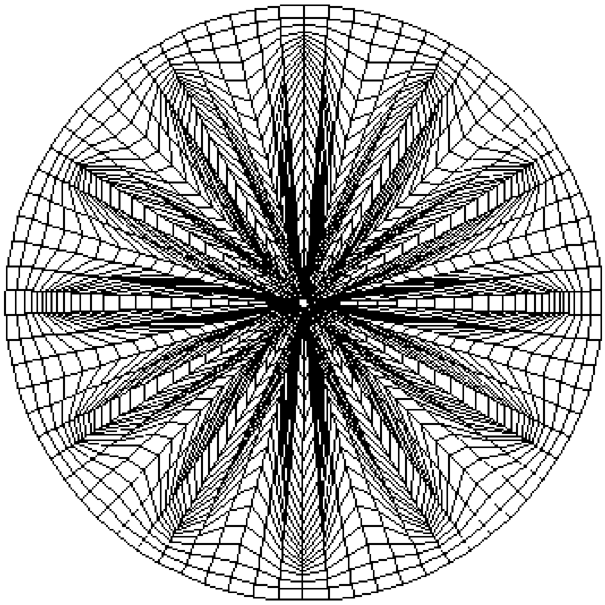
Рис. 5.12. Форма втрати динамічної стійкості
конічного обтічника з трьома шпангоутами (вид збоку та зверху)

Показані на рис. 5.12 та рис. 5.13 просторові форми коливань конструкцій відповідають біфуркації Хопфа. Для візуалізації результатів динамічного аналізу обирався момент часу $t=\dfrac{\pi}{2\Omega_1}-\varphi_1$, що відповідає максимальному значенню множника $sin(\Omega_1 t+\varphi_1)=1$ у розкладенні (5.33).

З приведених результатів можна зробити висновок, що автоколивання відбуваються вздовж всієї конструкції. В області кріплення обтічника до наступної частини корпусу ракети у випадку сімох шпангоутів хвилеутворення поперечних автоколивань в окружному напрямку менше, ніж у випадку трьох шпангоутів. А у верхній частині конструкції наявність додаткових шпангоутів майже не впливає на процес хвилеутворення.



а



б

Рис. 5.13. Форма втрати динамічної стійкості
конічного обтічника з сімома шпангоутами (вид збоку та зверху)

Зауважимо, що критична частота значення числа Маха не зменшується при підсиленні конструкції трьома, п‘ятьма або сімома шпангоутами, а діапазон динамічної нестійкості обтічника в надзвуковому газовому потоці дорівнює $1{,}01 \le M \le 1.414$.

5.4 Висновки за розділом 5

У п‘ятому розділі подано моделі, методи та результати дослідження динамічної нестійкості обтічників ракет в надзвуковому газовому потоці.

Для забезпечення неушкодженості корисного вантажу під час виведення його на орбіту, поряд з дослідженнями безпечного розділення обтічника проводяться дослідження динамічної нестійкості обтічника в надзвуковому газовому потоці. Це пов’язано з тим, що деякі обтічники в польоті зазнають значних аеропружних коливань. В окремих випадках подібні коливання можуть призвести до руйнування конструкції або до поломок корисного вантажу.

Розглядалися конструкції, які мають форму параболічних оболонок обертання та конічних оболонок з підкріпленням різним набором шпангоутів. Аналізувалася втрата динамічної стійкості конструкцій, що відповідає біфуркації Хопфа, на $30 \div 50$ секундах польоту. З аналізу проведених досліджень кінематики руху ракети отримано, що на цей час польоту на обтічник діє надзвуковий газовий потік. Надзвуковий газовий потік моделюється за поршневою теорією із застосуванням уточнення на поправку Крумхара. Для числового аналізу поставленої задачі створено методико-програмне забезпечення. Виконано розрахунки та проведено аналіз коливань цих конструкцій у діапазоні чисел Маха: $1{,}01 \le M \le 2$.

Розроблено математичні моделі коливань обтічників у формі параболічних оболонок обертання та конічних оболонок, що підкріплені шпангоутами, з кінцевим числом степенів свободи на основі методу заданих форм. Математичні моделі коливань обтічників різної геометричної форми ґрунтуються на гіпотезах Кіргофа-Лява. Коливання конструкцій розкладаються за власними формами коливань, які визначаються за методом Релея-Рітца для кожної геометрії конструкцій. Для отримання рівнянь руху обтічника під впливом надзвукового газового потоку застосовуються рівняння Лагранжа другого роду. Матриці мас, жорсткості конструкції та аеродинамічної жорсткості й демпфірування визначаються з виразів для кінетичної, потенціальної енергій та виразу для узагальнених сил.

Розроблено числовий метод визначення динамічної нестійкості обтічників ракет під впливом надзвукового газового потоку, що дозволяє отримувати: критичні числа Маха, діапазони нестійкого стану рівноваги, форми коливань, що спостерігаються при зародженні автоколивань.

Проведено аналіз динамічної нестійкості оболонкових конструкцій у формі параболоїда обертання та підкріпленого шпангоутами конуса. Для параболічних обтічників характерною особливістю всіх форм при зародженні автоколивань є той факт, що інтенсивність коливань вершини параболоїда значно менше, ніж інтенсивність коливань її нижньої частини. Підсилення обтічника шпангоутами дозволяє знизити критичну частоту. Встановлено, що для всіх розглянутих конструкцій обтічників ракет, геометричні параметри яких були надані ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля», нестійкий стан рівноваги спостерігається для значень чисел Маха: $1{,}01 \leq M \leq 1.4142$.

Достовірність розроблених моделей та отриманих результатів числового аналізу власних форм і частот коливань за цими моделями перевірялася шляхом їх порівняння з результатами числового аналізу власних частот і форм вільних коливань отриманими за тривимірними скінченно-елементними моделями в програмному комплексі ANSYS.

Дослідження виконано згідно Цільової комплексної програми НАН України по науковим космічним дослідженням на 2012–2017 рр.

Результати, що подано в розділі 5, опубліковані в роботах [4–7, 35–39, 59–60].

РОЗДІЛ 6
НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ КОРПУСІВ ТВЕРДОПАЛИВНИХ ДВИГУНІВ РАКЕТ ПІД ДІЄЮ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Виготовлення твердопаливного двигуна ракети-носія з композитних матеріалів дозволяє значно знизити його вагу та збільшити масу корисного вантажу, тому в наш час все більше корпусів виготовляють із композитних матеріалів. Один з критеріїв працездатності твердопаливної ракети – її міцність, що пов'язана з нестаціонарними динамічними процесами в корпусі двигуна при старті ракети. На етапі загального проектування проводяться дослідження напружено-деформованого стану конструкції, що виникає внаслідок навантажень в робочих режимах. Для цих досліджень необхідне використання динамічних математичних моделей деформування композитного корпусу твердопаливного двигуна ракети під дією внутрішнього імпульсного тиску, який характеризує робочі процеси в двигуні при старті.

Цей розділ присвячено розробці математичних моделей нестаціонарного деформування типової конструкції корпусу твердопаливного двигуна з композитних матеріалів з ортотропними чи функціонально-градуйованими характеристиками в робочих режимах навантаження при старті ракети. Корпус двигуна являє собою конструкцію з великою площею відносно об’єму матеріалу, тому моделюється оболонковою конструкцією. Оболонкова модель композитного корпусу з ортотропними характеристиками ґрунтується на застосуванні теорії типу Тимошенка-Рейсснера, а з функціонально-градуйованими характеристиками – теорії Редді високого порядку.

Проведені числові дослідження нестаціонарного деформування композитної складеної оболонки під впливом імпульсного навантаження, що моделює типову конструкцію корпусу, надану ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля». Достовірність отриманих результатів перевірялась шляхом їх порівняння з результатами розрахунку за методом скінченних-елементів в програмному комплексі ANSYS.

6.1 Постановка задачі

Найбільш небезпечним, з точки зору динамічної міцності корпусу твердопаливного двигуна, є етап старту ракети, коли на корпус двигуна діють значні нестаціонарні динамічні навантаження, які можуть призвести до поломок. Після закінчення етапу старту на корпус твердопаливного двигуна діють сталі в часі навантаження, які є значно меншими за стартові навантаження. Тому доцільно розглядати початок роботи ракетного двигуна, що відбувається протягом перших 20 мс, для оцінювання його працездатності. Протягом цього часу імпульсний тиск, що діє на корпус двигуна, за проміжок від 0 до t^* мс зростає до свого максимального значення, та діє до моменту часу t^{**} мс. Після цього йде експоненціальне зниження тиску. Внутрішній тиск $P_z(t)$, що діє на корпус в нормальному напрямку, є функцією часу па діє на всю внутрішню поверхню

$$P_z = \begin{cases} \dfrac{P_{max}}{t^*} t, \; t < t^*, \\ P_{max}, \; t^* \le t < t^{**}, \\ P_{max} e^{-\frac{t}{\theta}}, \; t \ge t^{**}, \end{cases} \tag{6.1}$$

де P_{max} – максимальне значення тиску;

θ – коефіцієнт затухання тиску в часі.

Значення величин P_{max}, t^*, t^{**}та θ визначаються експериментально для кожного типоряду двигунів.

При протіканні робочих процесів у твердопаливному двигуні виділяється велика кількість теплоти. Швидкість протікання теплових процесів в композитному матеріалі твердопаливного ракетного двигуна дуже мала. Тому корпус двигуна нагрівається повільно [346]. За цей проміжок часу корпус оболонки не встигає нагрітися, тому теплові процеси не враховуються.

Розглядається типова конструкція корпусу твердопаливного двигуна, конструктивно-компоновочну схему якої подано на рис. 6.1.

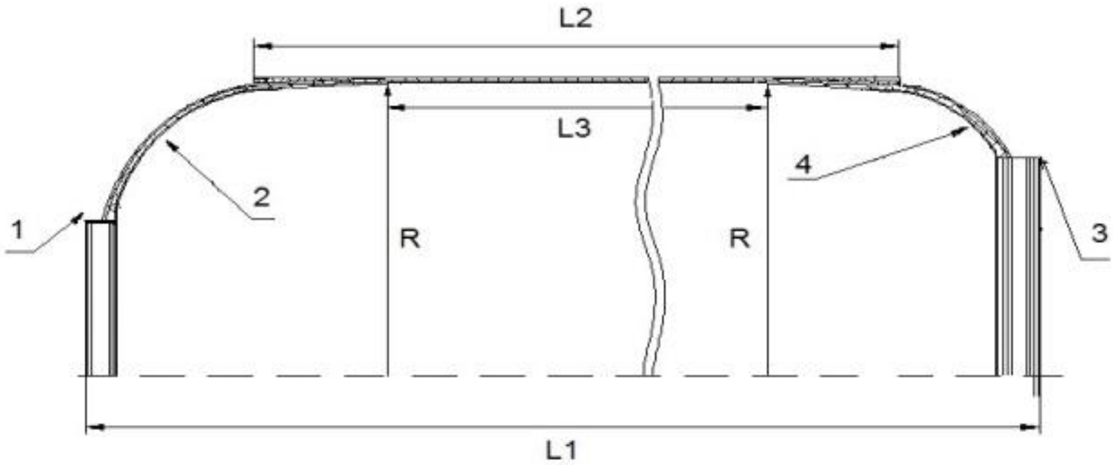


Рис. 6.1. Конструктивно-компоновочна схема
корпусу твердопаливного двигуна

Аналіз конструктивно-компоновочної схеми конструкції показав, що узагальнену модель для числових досліджень працездатності корпусу при внутрішньому імпульсному навантаженні тиском (6.1) доцільно будувати як складену оболонку з циліндричною середньою частиною та двома днищами у вигляді усічених напівсферичних оболонок.

6.2 Моделювання нестаціонарного деформування корпусів з ортотропних композитних матеріалів

6.2.1 Математична модель нестаціонарного деформування композитного корпусу твердопаливного двигуна. Розглядається оболонкова конструкція (рис. 6.2), яка складається з трьох складових частин: лівого днища, центральної циліндричної частини та правого днища. Днища мають форму усічених півсфер радіусу R. Висоти лівого й правого днища – H_1 і H_2, відповідно. Днища жорстко закріплені по зовнішніх краях. Циліндрична частина конструкції має довжину L і радіус R. Поза зоною кріплення з днищами циліндрична частина оболонки має постійну товщину h. На ділянці з'єднання циліндра з днищами товщина конструкції лінійно змінюється від h до $2h$. Товщина днищ поза зоною закріплення також постійна і дорівнює h.

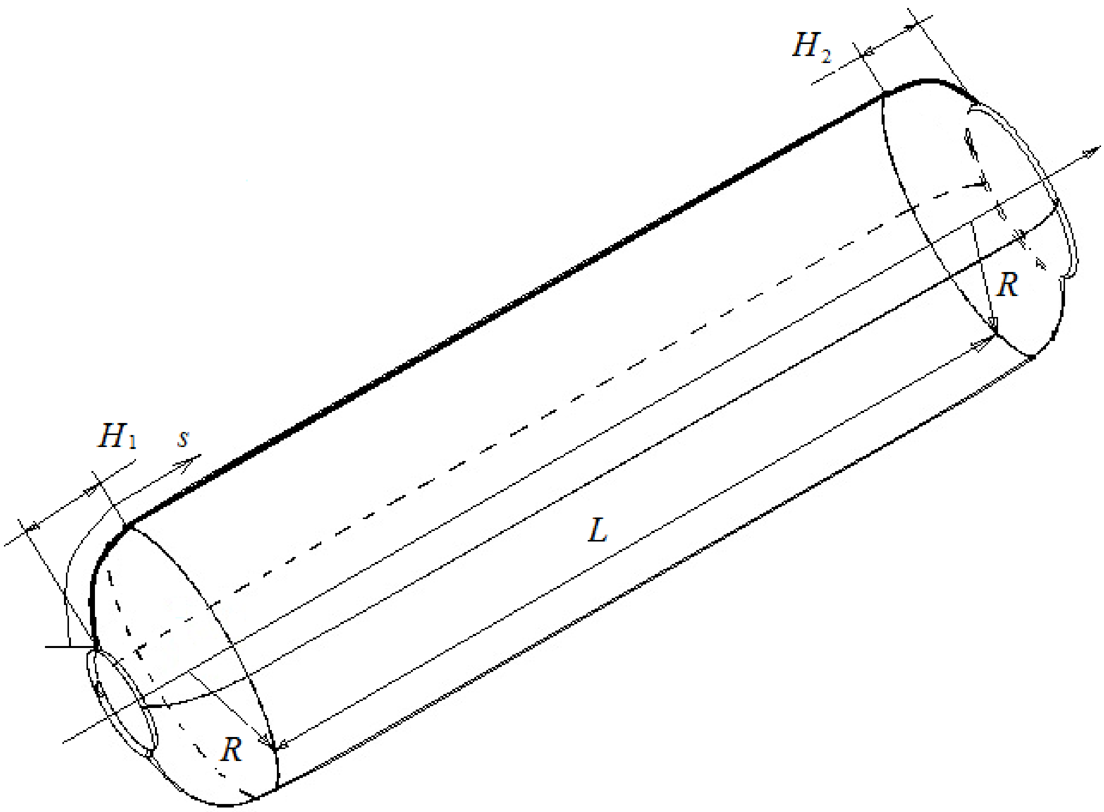


Рис. 6.2. Геометрична модель корпусу твердопаливного двигуна

Композитний матеріал конструкції має механічні властивості ортотропного матеріалу. В моделі динамічного деформування враховується зсув та інерція обертання, застосовується теорія типу Тимошенка-Рейсснера. Зв’язок між напруженнями і деформаціями виражається за законом Гука. Нестаціонарний напружено-деформований стан оболонки описується в компонентах вектору переміщень серединної поверхні оболонки та в кутах повороту нормалі до серединної поверхні.

Положення точок серединної поверхні циліндричної оболонки (рис. 6.3) описується поздовжньою координатою x і окружною координатою φ. Тоді переміщення точок серединної поверхні оболонки описується компонентами переміщень $\tilde{u}_x(x,\varphi,t), \tilde{u}_\varphi(x,\varphi,t), \tilde{u}_z(x,\varphi,t)$. Перпендикулярно до серединної поверхні оболонки введемо вісь z. Циліндрична оболонка має змінну товщину, яка залежить тільки від поздовжньої координати оболонки $h(x)$ і не залежить від φ. Координатні лінії оболонки задовольняють умовам: $0 \le x \le L$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-h(x)/2 \le z \le h(x)/2$.

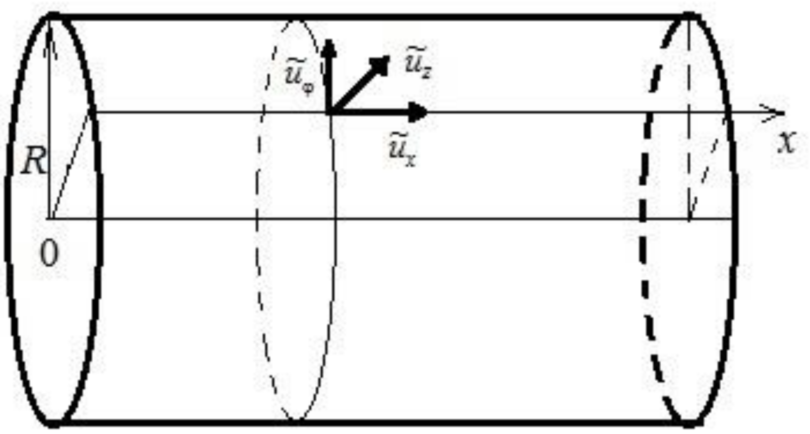
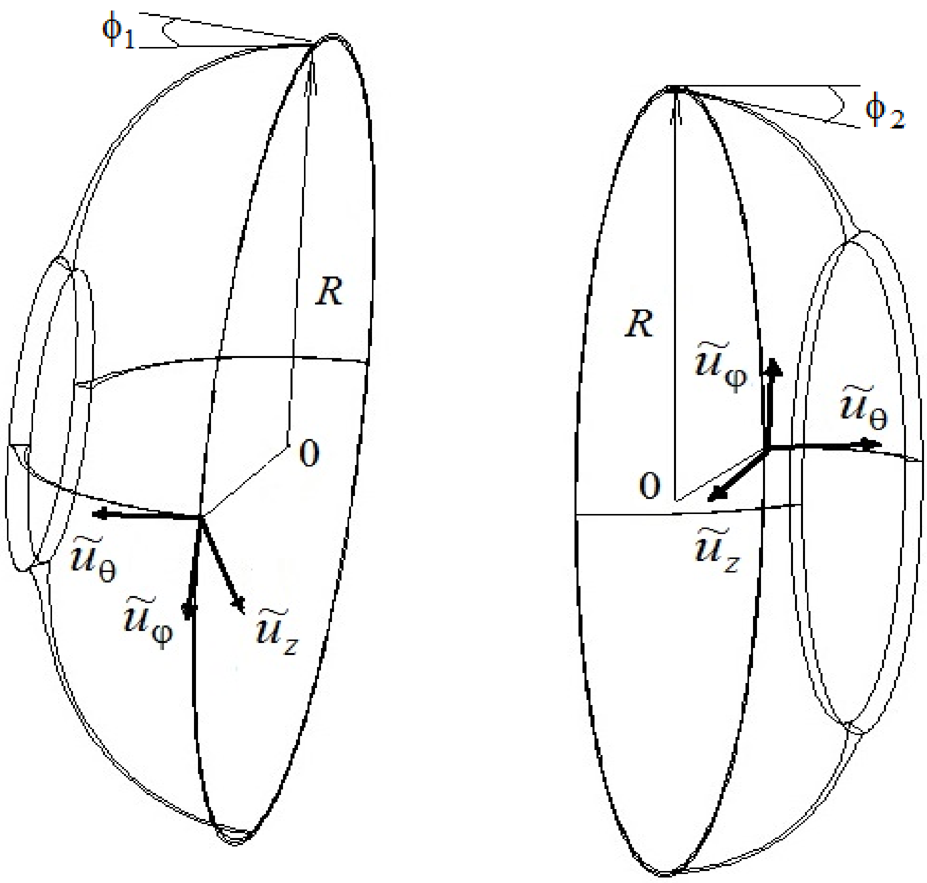


Рис. 6.3. Ескіз серединної поверхні циліндричної оболонки

Серединні поверхні днищ є півсферами; розглянемо їх в сферичних координатах (θ,φ). Тоді компоненти переміщень точок серединної поверхні позначимо через $\tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_z$ Ці компоненти переміщень показані на рис. 6.4 днища мають змінну товщину $h(\theta)$, яка залежить від координати θ.

Властивості матеріалу центральної циліндричної оболонки описуються модулями Юнга $E_{xx}, E_{\varphi\varphi}$, модулями зсуву $G_{x\varphi}, G_{xz}, G_{\varphi z}$ і коефіцієнтами Пуассона $\mu_{x\varphi}, \mu_{\varphi x}$. Властивості матеріалу днищ у формі усічених сферичних оболонок описуються модулями Юнга $E_{\theta\theta}, E_{\varphi\varphi}$, модулями зсуву $G_{\theta\varphi}$, $G_{\theta z}, G_{\varphi z}$ і коефіцієнтами Пуассона $\mu_{\theta\varphi}, \mu_{\varphi\theta}$.



а б

Рис. 6.4. Ескіз серединної поверхні днищ:

а – ліве днище; б – праве днище

Компоненти вектору переміщень u_x, u_φ, u_z довільної точки циліндричної частини (x,φ,z), розташованої на відстані z від серединної поверхні, подаються так [347]:

$$\begin{aligned} &u_x(x,\varphi,z,t) = \tilde{u}_x(x,\varphi,t) + z\,\tilde{\beta}_x(x,\varphi,t), \\ &u_\varphi(x,\varphi,z,t) = \tilde{u}_\varphi(x,\varphi,t) + z\,\tilde{\beta}_\varphi(x,\varphi,t), \\ &u_z(x,\varphi,z,t) = \tilde{u}_z(x,\varphi,t), \end{aligned} \tag{6.2}$$

де $\tilde{\beta}_x(x,\varphi,t)$, $\tilde{\beta}_\varphi(x,\varphi,t)$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні.

Компоненти тензора деформацій відповідають наступним співвідношенням [347]:

$$\varepsilon_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{xx} + z\tilde{k}_{xx}, \ \ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + z\tilde{k}_{\varphi\varphi}, \ \ \varepsilon_{x\varphi} = \tilde{\varepsilon}_{x\varphi} + z\tilde{k}_{x\varphi},$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} + \tilde{\beta}_x, \ \ \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R} + \tilde{\beta}_\varphi, \qquad (6.3)$$

де $\tilde{\varepsilon}_{xx}, \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \tilde{\varepsilon}_{x\varphi}, \tilde{k}_{xx}, \tilde{k}_{\varphi\varphi}, \tilde{k}_{x\varphi}$ деформації точок серединної поверхні;

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{x\varphi}$ деформації довільних точок оболонки.

Деформації серединної поверхні обчислюються так [348]:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}, \ \ \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R}, \ \ \tilde{\varepsilon}_{x\varphi} = \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \varphi},$$

$$\tilde{k}_{xx} = \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x}, \ \ \tilde{k}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi}, \ \ \tilde{k}_{x\varphi} = \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial \varphi}. \qquad (6.4)$$

Розподілені зусилля і моменти відповідають наступним співвідношенням:

$$N_{xx} = \frac{E_{xx} h(x)}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \mu_{x\varphi} \left(\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R} \right) \right],$$

$$N_{\varphi\varphi} = \frac{E_{\varphi\varphi} h(x)}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \mu_{\varphi x}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right],$$

$$N_{x\varphi} = G_{x\varphi} h(x) \left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \varphi} \right],$$

$$M_{xx} = \frac{E_{xx} h^3(x)}{12\left(1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x} + \mu_{x\varphi} \cdot \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right], \qquad (6.5)$$

$$M_{\varphi\varphi} = \frac{E_{\varphi\varphi} h^3(x)}{12\left(1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \mu_{\varphi x} \cdot \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x} \right],$$

$$M_{x\varphi} = \frac{G_{x\varphi} h^3(x)}{12} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial \varphi} \right],$$

$$Q_{xz} = \kappa G_{xz} h(x) \cdot \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} + \tilde{\beta}_x \right],$$

$$Q_{\varphi z} = \kappa G_{\varphi z} h(x) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R} + \tilde{\beta}_\varphi \right].$$

Рівняння руху циліндричної частини тонкостінної конструкції подаємо у вигляді [343, 349]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} = \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{Q_{\varphi z}}{R} = \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{N_{\varphi\varphi}}{R} + P_z = \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_{xz} = \frac{\rho h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_{\varphi z} = \frac{\rho h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2},
\end{gathered} \tag{6.6}$$

де ρ – щільність матеріалу конструкції.

Співвідношення (6.5) використаємо в (6.6) і отримаємо систему рівнянь в похідних, що описує динаміку циліндричної частини конструкції, відносно $\left(\tilde{u}_x, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_z, \tilde{\beta}_x, \tilde{\beta}_\varphi\right)$

$$\frac{E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\mu_{x\varphi}}{R} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{G_{x\varphi}}{R} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \varphi^2} \right] = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial t^2},$$

$$
\begin{gathered}
G_{x\varphi}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{u}_x}{\partial x\partial\varphi}\right]+\frac{1}{R^2}\frac{E_{\varphi\varphi}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}+\mu_{\varphi x}\frac{\partial^2\tilde{u}_x}{\partial x\partial\varphi}\right]+\\
\frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}-\tilde{u}_\varphi+R\tilde{\beta}_\varphi\right]=\rho\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial t^2},\\
\kappa G_{xz}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial\tilde{\beta}_x}{\partial x}\right]+\frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+R\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi}\right]-\\
-\frac{E_{\varphi\varphi}}{(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x})R^2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\tilde{u}_z+R\mu_{\varphi x}\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x}\right]+P_z=\rho\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial t^2},\\
\frac{E_{xx}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_x}{\partial x^2}+\frac{\mu_{x\varphi}}{R}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial x\partial\varphi}\right]+\frac{G_{x\varphi}}{R}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial x\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_x}{\partial\varphi^2}\right]-\\
=\frac{12\kappa G_{xz}}{h^2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial x}+\tilde{\beta}_x\right]=\rho\frac{\partial^2\tilde{\beta}_x}{\partial t^2},\\
G_{x\varphi}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_x}{\partial x\partial\varphi}\right]+\frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x})}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi^2}+R\mu_{\varphi x}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_x}{\partial x\partial\varphi}\right]-\\
-\frac{12\kappa G_{\varphi z}}{Rh^2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}-\tilde{u}_\varphi+R\tilde{\beta}_\varphi\right]=\rho\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}.
\end{gathered}
\tag{6.7}
$$

Тепер розглянемо рівняння руху днищ в сферичній системі координат (θ,φ,z). Координати лівої та правої частини відповідають наступним нерівностям $\theta_1 \le \theta \le \pi/2$, $-2\pi < \varphi \le 0$, $-h(\theta)/2 \le z \le h(\theta)/2$ та $\theta_2 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-h(\theta)/2 \le z \le h(\theta)/2$, відповідно.

Компоненти вектору переміщень днищ u_θ, u_φ, u_z з урахуванням поперечного зсуву та інерції обертання подаємо так [347]:

$$
\begin{aligned}
u_\theta(\theta,\varphi,z,t) &= \tilde{u}_\theta(\theta,\varphi,t)+z\tilde{\beta}_\theta(\theta,\varphi,t),\\
u_\varphi(\theta,\varphi,z,t) &= \tilde{u}_\varphi(\theta,\varphi,t)+z\tilde{\beta}_\varphi(\theta,\varphi,t),\\
u_z(\theta,\varphi,z,t) &= \tilde{u}_z(\theta,\varphi,t),
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

де $\tilde{\beta}_\theta(\theta,\varphi,t)$, $\tilde{\beta}_\varphi(\theta,\varphi,t)$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні.

Компоненти тензора деформацій днищ пов'язані з переміщеннями наступним чином [348]:

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \frac{z}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R tan\theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + z\left(\frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\beta}_\theta}{R tan\theta}\right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R tan\theta} + \frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} + z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\beta}_\varphi}{R tan\theta} + \frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \varphi}\right), \quad (6.9)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\theta}{R} + \tilde{\beta}_\theta,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\varphi z} = \frac{1}{R \cdot sin\theta}\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R} + \tilde{\beta}_\varphi.$$

Розподілені силові фактори в днищах пов'язані з компонентами переміщень залежностями

$$N_{\theta\theta} = \frac{E_{\theta\theta} h(\theta)}{1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R tan\theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R}\right)\right],$$

$$N_{\varphi\varphi} = \frac{E_{\varphi\varphi} h(\theta)}{1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}}\left[\frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R tan\theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \mu_{\varphi\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R}\right)\right],$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{E_{\theta\theta} h^3(\theta)}{12\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R tan\theta}\tilde{\beta}_\theta\right)\right], \quad (6.10)$$

$$M_{\varphi\varphi} = \frac{E_{\varphi\varphi} h^3(\theta)}{12\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\beta}_\theta}{R tan\theta} + \frac{\mu_{\varphi\theta}}{R}\frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta}\right].$$

Рівняння руху усіченої півсфери тонкостінної конструкції мають вигляд [343, 349]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(N_{\theta\theta}\,sin\theta\right)+\frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}-N_{\varphi\varphi}\,cos\theta+Q_{\theta z}\,sin\theta=\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial t^2}R\rho h(\theta)sin\theta\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(N_{\theta\varphi}\,sin\theta\right)+\frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+N_{\varphi\theta}\,cos\theta+Q_{\varphi z}\,sin\theta=\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial t^2}R\rho h(\theta)sin\theta\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Q_{\theta z}\,sin\theta\right)+\frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial\varphi}-\left(N_{\theta\theta}+N_{\varphi\varphi}\right)sin\theta+RP_z\,sin\theta=\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial t^2}R\rho h(\theta)sin\theta, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(M_{\theta\theta}\,sin\theta\right)+\frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}-M_{\varphi\varphi}\,cos\theta-RQ_{\theta z}\,sin\theta=\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial t^2}\frac{R\rho h^3}{12}sin\theta\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(M_{\theta\varphi}\,sin\theta\right)+\frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+M_{\varphi\theta}\,cos\theta-RQ_{\varphi z}\,sin\theta=\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}\frac{R\rho h^3}{12}sin\theta\ .$$

Співвідношення (6.10) використаємо в (6.11) і отримаємо рівняння руху сферичних днищ тонкостінної конструкції

$$\frac{E_{\theta\theta}}{1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}}\left\{\frac{1}{R^2\rho}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}+\mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2\rho\,tan\theta}\left[\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+\tilde{u}_z+\mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{u}_\theta}{tan\theta}+\tilde{u}_z\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{G_{\theta\varphi}}{R^2\rho\,sin\theta}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial\varphi^2}\right]+\frac{\kappa G_{\theta z}}{R^2\rho\,tan\theta}\left[\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}-\tilde{u}_\theta+R\tilde{\beta}_\theta\right]+$$

$$+\frac{E_{\varphi\varphi}}{1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}}\frac{cos\theta}{R^2\rho\,sin\theta}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{u}_\theta}{tan\theta}+\tilde{u}_z+\mu_{\varphi\theta}\left(\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+\tilde{u}_z\right)\right]=\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1}{sin\theta\,tan\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\varphi}-\frac{\tilde{u}_\varphi}{tan^2\theta}\right]+$$

$$+\frac{E_{\varphi\varphi}}{\rho R^2\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{tan\theta\,sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\varphi}_\theta+\frac{\mu_{\varphi\theta}}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu_{\varphi\theta}}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}\right]+$$

$$+\frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2}\left[\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta}-\frac{\tilde{u}_\varphi}{tan^2\theta}+\frac{1}{sin\theta\,tan\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\varphi}\right]+\frac{\kappa G_{\varphi z}}{\rho R^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}-\tilde{u}_\varphi+\tilde{\beta}_\varphi\right]=\frac{\partial^2\tilde{u}_\varphi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\kappa G_{\theta z}}{R^2\rho\, sin\theta}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+R\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{tan\theta}\left(\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}-\tilde{u}_\theta+R\tilde{\beta}_\theta\right)\right]+$$

$$+\frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2\rho\, sin\theta}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+R\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi}\right]-\frac{E_{\theta\theta}}{R^2\rho\, sin\theta\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\times \quad (6.12)$$

$$\times\left[\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+\tilde{u}_z+\mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{u}_\theta}{tan\theta}+\tilde{u}_z\right)\right]-$$

$$-\frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2\rho\, sin\theta\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{u}_\theta}{tan\theta}+\tilde{u}_z+\mu_{\varphi\theta}\left(\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}+\tilde{u}_z\right)\right]+\frac{P_z}{\rho h}=\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{E_{\theta\theta}}{R^2\rho\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta^2}+\mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{12\kappa G_{\theta z}}{R\rho h^2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}-\tilde{u}_\theta+R\tilde{\beta}_\theta\right]+$$

$$+\frac{E_{\theta\theta}}{R^2\rho\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)tan\theta}\left[\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta}+\mu_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{tan\theta}\tilde{\beta}_\theta\right)\right]+$$

$$+\frac{G_{\theta\varphi}}{R^2\rho\, sin\theta}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial\varphi^2}\right]-$$

$$-\frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2\rho\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)tan\theta}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{\beta}_\theta}{tan\theta}+\mu_{\varphi\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta}\right]=\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2}\left[\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta\partial\varphi}\right]+\frac{2G_{\theta\varphi}}{\rho R^2\, tan\theta}\left[\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\theta}-\frac{\tilde{\beta}_\varphi}{tan\theta}+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\varphi}\right]+$$

$$+\frac{1}{\rho R^2\, sin\theta}\frac{E_{\varphi\varphi}}{\left(1-\mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}\right)}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial\varphi}+\mu_{\varphi\theta}\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\theta}{\partial\theta\partial\varphi}\right]-$$

$$-\frac{12\kappa G_{\varphi z}}{\rho R h^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\varphi}-\tilde{u}_\varphi+R\tilde{\beta}_\varphi\right]=\frac{\partial^2\tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}.$$

Доповнимо рівняння руху циліндричної частини оболонки (6.7) і рівняння руху днищ (6.12) різними граничними умовами. Спочатку розглядатимемо граничні умови з’єднання циліндричної оболонки з лівим днищем. Кінематичні граничні умови мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_x(0,\varphi,t) = cos(\phi_1)\tilde{u}_\theta(\pi/2,-\varphi,t),\\
&\tilde{u}_\varphi(0,\varphi,t) = \tilde{u}_\varphi(\pi/2,-\varphi,t),\\
&\tilde{u}_z(0,\varphi,t) = sin(\phi_1)\tilde{u}_z(\pi/2,-\varphi,t),\\
&\tilde{\beta}_x(0,\varphi,t) = \tilde{\beta}_\theta(\pi/2,-\varphi,t),\\
&\tilde{\beta}_\varphi(0,\varphi,t) = \tilde{\beta}_\varphi(\pi/2,-\varphi,t),
\end{aligned} \tag{6.13}$$

де ϕ_1 – кут нахилу дотичної до лівого днища в точці її стику з циліндричною оболонкою.

Силові умови з’єднання циліндричної оболонки з лівим днищем такі:

$$\begin{aligned}
&N_{xx}(0,\varphi,t) = cos(\phi_1)\, N_{\theta\theta}(\pi/2,-\varphi,t),\\
&N_{x\varphi}(0,\varphi,t) = N_{\theta\varphi}(\pi/2,-\varphi,t),\\
&N_{\varphi\varphi}(0,\varphi,t) = sin(\phi_1)\, N_{\varphi\varphi}(\pi/2,-\varphi,t),\\
&Q_{xz}(0,\varphi,t) = Q_{\theta z}(\pi/2,-\varphi,t),\\
&Q_{\varphi z}(0,\varphi,t) = Q_{\varphi z}(\pi/2,-\varphi,t).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Тепер сформулюємо граничні умови з’єднання циліндричної оболонки з правим днищем. Кінематичні граничні умови виглядають так:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_x(L,\varphi,t) = cos(\phi_2)\tilde{u}_\theta(\pi/2,\varphi,t),\\
&\tilde{u}_\varphi(L,\varphi,t) = \tilde{u}_\varphi(\pi/2,\varphi,t),\\
&\tilde{u}_z(L,\varphi,t) = sin(\phi_2)\tilde{u}_z(\pi/2,\varphi,t),\\
&\tilde{\beta}_x(L,\varphi,t) = \tilde{\beta}_\theta(\pi/2,\varphi,t),\\
&\tilde{\beta}_\varphi(L,\varphi,t) = \tilde{\beta}_\varphi(\pi/2,\varphi,t),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

де ϕ_2 – кут нахилу дотичної до правого днища в точці стиковки з циліндричною оболонкою.

Силові граничні умови з’єднання циліндричної оболонки з правим днищем мають вид

$$
\begin{aligned}
&N_{xx}(L,\varphi,t) = cos(\phi_2) N_{\theta\theta}(\pi/2,\varphi,t),\\
&N_{x\varphi}(L,\varphi,t) = N_{\theta\varphi}(\pi/2,\varphi,t),\\
&N_{\varphi\varphi}(L,\varphi,t) = sin(\phi_2) N_{\varphi\varphi}(\pi/2,\varphi,t),\\
&Q_{xz}(L,\varphi,t) = Q_{\theta z}(\pi/2,\varphi,t),\\
&Q_{\varphi z}(L,\varphi,t) = Q_{\varphi z}(\pi/2,\varphi,t).
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

Кінець лівого днища жорстко затиснений, що виражається наступними граничними умовами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{u}_\varphi(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t) = 0,\\
&\tilde{\beta}_\theta(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{\beta}_\varphi(\theta_1,\varphi,t) = 0,
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

$$
\frac{\partial \tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_\varphi(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0,
$$

$$
\frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\varphi} = 0.
$$

Кінець правого днища оболонки теж жорстко затиснений, що виражається граничними умовами

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{u}_\varphi(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t) = 0,\\
&\tilde{\beta}_\theta(\theta_1,\varphi,t) = 0, \tilde{\beta}_\varphi(\theta_1,\varphi,t) = 0,
\end{aligned} \tag{6.18}
$$

$$
\frac{\partial \tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_\theta(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_\varphi(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0;
$$

$$
\frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1,\varphi,t)}{\partial\varphi} = 0.
$$

Тепер розглянемо початкові умови задачі. У початковий момент часу t=0 оболонка знаходиться в стані спокою. Цей факт виражається наступними початковими умовами для циліндричної оболонки:

$$\tilde{u}_x(x,\varphi,0)=\tilde{u}_\varphi(x,\varphi,0)=\tilde{u}_z(x,\varphi,0)=\tilde{\beta}_x(x,\varphi,0)=\tilde{\beta}_\varphi(x,\varphi,0)=0, \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial t}(x,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial t}(x,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial t}(x,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{\beta}_x}{\partial t}(x,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial t}(x,\varphi,0)=0.$$

Початкові умови для сферичних днищ

$$\tilde{u}_\theta(\theta,\varphi,0)=\tilde{u}_\varphi(\theta,\varphi,0)=\tilde{u}_z(\theta,\varphi,0)=\tilde{\beta}_\theta(\theta,\varphi,0)=\tilde{\beta}_\varphi(\theta,\varphi,0)=0, \qquad (6.20)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial t}(\theta,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial t}(\theta,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial t}(\theta,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{\beta}_\theta}{\partial t}(\theta,\varphi,0)=\frac{\partial\tilde{\beta}_\varphi}{\partial t}(\theta,\varphi,0)=0\,.$$

Таким чином, рух композитного корпусу твердопаливного двигуна описується системою рівнянь (6.7, 6.12) з граничними умовами (6.13 – 6.18) та початковими умовами (6.19 – 6.20).

6.2.2 Метод розв’язання задачі. В цьому підрозділі динамічна система в часткових похідних приводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь великої розмірності.

Компоненти переміщень і кутів повороту циліндричної частини конструкції подаємо у вигляді розкладань в ряди Фур'є:

$$\tilde{u}_x(x,\varphi,t)=\sum_{n=0}U_{X,n}(x,t)\cos n\varphi,$$

$$\tilde{u}_\varphi(x,\varphi,t)=\sum_{n=1}U_{\varphi,n}(x,t)\sin n\varphi, \qquad (6.21)$$

$$\tilde{u}_z(x,\varphi,t)=\sum_{n=0}U_{Z,n}(x,t)\cos n\varphi,$$

$$\tilde{\beta}_x(x,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{X,n}(x,t)\cos n\varphi,$$

$$\tilde{\beta}_\varphi(x,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{\varphi,n}(x,t)\sin n\varphi,$$

де $U_{X,n}, U_{\varphi,n}, U_{Z,n}, B_{X,n}, B_{\varphi,n}$ – невідомі функції.

При виведенні рівнянь нестаціонарної динаміки конструкції розглянемо більш загальний вид навантажень у порівнянні з (6.1). Імпульсний тиск подаємо так: $P_z(x,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,t)\cos n\varphi$. Тепер розклади (6.21) використаємо в рівняннях системи (6.7) і отримаємо систему диференціальних рівнянь в часткових похідних щодо амплітуд гармонік розкладань (6.21):

$$\frac{\partial^2 U_{X,n}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 U_{X,n}}{\partial x^2} + n^2 K_2 U_{X,n} + nK_3 \frac{\partial U_{\varphi,n}}{\partial x} + K_4 \frac{\partial U_{Z,n}}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_{\varphi,n}}{\partial t^2} + K_5 \frac{\partial^2 U_{\varphi,n}}{\partial x^2} + \left(n^2 K_6 + K_7\right) U_{\varphi,n} + nK_{81} \frac{\partial U_{X,n}}{\partial x} - \\ &- nK_{82} U_{Z,n} + K_9 B_{\varphi,n} = 0, \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_{Z,n}}{\partial t^2} + K_{10} \frac{\partial^2 U_{Z,n}}{\partial x^2} + \left(n^2 K_{11} + K_6\right) U_{Z,n} + K_{12} \frac{\partial U_{X,n}}{\partial x} + nK_{82} U_{\varphi,n} + \\ &+ K_{10} \frac{\partial B_{X,n}}{\partial x} + K_9 B_{\varphi,n} = \frac{P_n(x,t)}{\rho h}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 B_{X,n}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 B_{X,n}}{\partial x^2} + \left(n^3 K_2 + K_{13}\right) B_{X,n} + K_{13} \frac{\partial U_{Z,n}}{\partial x} + nK_3 \frac{\partial B_{\varphi,n}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_{\varphi,n}}{\partial t^2} + K_5 \frac{\partial^2 B_{\varphi,n}}{\partial x^2} + K_{14} B_{\varphi,n} + K_{15} U_{\varphi,n} + nK_{15} U_{Z,n} + nK_{82} \frac{\partial B_{X,n}}{\partial x} + n^2 K_8 B_{X,n} = 0.$$

де $K1 = -\dfrac{E_{xx}}{\rho\left(1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)}$,

$$K2 = \frac{G_{x\varphi}}{\rho R^2},$$

$$K3 = -\frac{1}{\rho R}\left(\frac{\mu_{x\varphi} E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}} + G_{x\varphi}\right),$$

$$K4 = -\frac{\mu_{x\varphi} E_{xx}}{\rho R\left(1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)},$$

$$K5 = -\frac{G_{x\varphi}}{\rho},$$

$$K6 = \frac{E_{\varphi\varphi}}{\rho R^2\left(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)},$$

$$K7 = \frac{\kappa G_{\varphi z}}{\rho R^2},$$

$$K8 = -\frac{E_{\varphi\varphi}}{\rho R^2\left(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)},$$

$$K81 = \frac{1}{\rho R}\left(\frac{\mu_{\varphi x}E_{\varphi\varphi}}{R\left(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)} + G_{x\varphi}\right),$$

$$K82 = \frac{1}{\rho R^2}\left(\frac{E_{\varphi\varphi}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}} + \kappa G_{\varphi z}\right),$$

$$K9 = -\frac{\kappa G_{\varphi z}}{\rho R},$$

$$K10 = -\frac{\kappa G_{xz}}{\rho},$$

$$K11 = \frac{\kappa G_{\varphi z}}{\rho R^2},$$

$$K12 = \frac{\mu_{\varphi x}E_{\varphi\varphi}}{\rho R\left(1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}\right)},$$

$$K13 = \frac{12\kappa G_{xz}}{\rho h^2},$$

$$K14 = \frac{12\kappa G_{\varphi z}}{\rho h^2},$$

$$K15 = -\frac{12\kappa G_{\varphi z}}{\rho R h^2}.$$

Коефіцієнти K_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, динамічної системи (6.22) залежать від параметрів оболонки.

Систему рівнянь в часткових похідних (6.22) зведемо до системи звичайних диференціальних рівнянь великої вимірності. Для цього всі часткові похідні по поздовжній координаті x замінимо їх скінченно-різницевими апроксимаціями за допомогою центральних різниць. Всі невідомі системи (6.22) в області $0 \le x \le L$ подаємо сітковими функціями з кроком $l = L/J$, де $J-$ число точок дискретизації функції. Дискретні значення координати x визначимо так: $x_j = jl$. Вектор невідомих системи (6.22) подаємо так: $\mathbf{U_{x,n}} = \{U_{X,n}, U_{\varphi,n}, U_{Z,n}, B_{X,n}, B_{\varphi,n}\}$. Значення функції $\mathbf{U_{x,n}}$ в дискретних точках подаємо так: $\mathbf{U^{(j)}_{x,n}}$, $j = 0,...,J$. Для апроксимації часткових похідних скористаємося скінченно-різницевими співвідношеннями. Тоді розв'язок системи (6.22) апроксимуємо розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь, який в матричному вигляді напишемо так:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U_{x,n}}}{\partial t^2} + \mathbf{C_1 U_{x,n}} = \mathbf{P_{x,n}}, \tag{6.23}$$

де $\mathbf{U_{x,n}} = \{\mathbf{U^{(0)}_{x,n}}, ..., \mathbf{U^{(J)}_{x,n}}\}$;

$\mathbf{C_1}$ - стала матриця;

$\mathbf{P_{x,n}} = \{\mathbf{P^{(0)}_{x,n}}, ..., \mathbf{P^{(J)}_{x,n}}\}$;

$\mathbf{P^{(j)}_{x,n}} = \{0, 0, P_n^{(j)}, 0, 0\}$.

Отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, що описує динаміку сферичних днищ. Компоненти переміщень і кутів повороту сферичних днищ подаємо у виді розкладів в ряди Фур'є:

$$\tilde{u}_\theta(\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0} \tilde{U}_{\theta,n}(\theta,t)\cos n\varphi;\ \tilde{u}_\varphi(\theta,\varphi,t) = \sum_{n=1} \tilde{U}_{\varphi,n}(\theta,t)\sin n\varphi,$$

$$\tilde{u}_z(\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_{z,n}(\theta,t)\cos n\varphi, \tag{6.24}$$

$$\tilde{\beta}_\theta(\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{\theta,n}(\theta,t)\cos n\varphi;\ \tilde{\beta}_\varphi(\theta,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_{\varphi,n}(\theta,t)\sin n\varphi,$$

де $\tilde{U}_{\theta,n}, \tilde{U}_{\varphi,n}, \tilde{U}^{(u_z)}_{z,n}, \tilde{B}_{\theta,n}, \tilde{B}_{\varphi,n}$ – невідомі функції.

Розклади (6.24) введемо до системи рівнянь в часткових похідних (6.12). В результаті отримаємо систему рівнянь в часткових похідних, яка в матричному виді є такою:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}}{\partial t^2} + \mathbf{A_1} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}}{\partial \theta^2} + \mathbf{A_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}}{\partial \theta} + \mathbf{A_3} \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}} = \frac{1}{\rho h} \mathbf{P_n}(\theta, t), \tag{6.25}$$

де $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}} = \left\{ \tilde{U}_{\theta,n}, \tilde{U}_{\varphi,n}, \tilde{U}_{z,n}, \tilde{B}_{\theta,n}, \tilde{B}_{\varphi,n} \right\}$; $\mathbf{A_1, A_2, A_3} -$ сталі матриці.

Систему рівнянь в часткових похідних (6.25) зведемо до системи звичайних диференціальних рівнянь. Введемо вектор глобальних невідомих сферичних днищ конструкції $\mathbf{U_{s,n}} = \left\{ \tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{0})}_{\mathbf{s,n}}, \ldots, \tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{M})}_{\mathbf{s,n}} \right\}$. Розв’язок системи рівнянь в часткових похідних (6.24) замінимо розв’язком системи звичайних диференціальних рівнянь відносно вектору невідомих $\mathbf{U_{s,n}}$. Ця система буде мати вид, аналогічний системі (6.22).

Отже, нестаціонарна динаміка складеної оболонки, що моделює конструкцію твердопаливного двигуна, описується з’єднаною системою звичайних диференціальних рівнянь, що містить рівняння для лівого днища, центральної частини та правого днища. Компоненти вектору переміщень $\mathbf{U_{s,n}}$ задовільняють граничним умовам з’єднання (6.13) та (6.15). Вектор розв’язків для лівого днища позначимо $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}$, а для правого $\overline{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}$. З граничних умов для лівого днища (6.17) і з аналогічних граничних умов для правого днища (6.18) отримуємо, що для лівого днища виконується умова $\hat{\mathbf{U}}^{(0)}_{\mathbf{s,n}} = \{0,0,0,0,0\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, а для правого днища справедливо співвідношення: $\overline{\mathbf{U}}^{(\mathbf{0})}_{\mathbf{s,n}} = \{0,0,0,0,0\}$.

Розглянемо умову зшивання розв’язків. Розв’язок для останнього вузла дискретизації лівого днища дорівнює розв’язку в першій точці дискретизації циліндричної оболонки: $\hat{\mathbf{U}}^{(\mathbf{M_1})}_{\mathbf{s,n}} = \mathbf{U}^{(\mathbf{0})}_{\mathbf{x,n}}$, де $M_1 -$ кількість вузлів дискретизації в лівому днищі. Умови стикування (6.13) в матричному виді:

$$\mathbf{A_4}\left\{\left(\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_1})}-\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_1}-\mathbf{1})}\right)/\,h_s+\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_1})}\right\}=\mathbf{A_5}\left\{\left(\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{1})}-\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{0})}\right)/\,l+\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{0})}\right\}, \quad (6.26)$$

де $\mathbf{A_4}, \mathbf{A_5}$ – сталі матриці, що залежать від параметрів системи.

Розв’язок в останній точці дискретизації для правого днища дорівнює розв’язку в останній точці дискретизації для циліндричної оболонки: $\overline{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_2})}=\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{J})}$, де M_2 - кількість вузлів дискретизації розв’язку для правого днища. Умови стикування (6.15) подаємо в матричному виді:

$$\mathbf{A_6}\left\{\left(\overline{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_2})}-\overline{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_2}-\mathbf{1})}\right)/\,h_s+\overline{\mathbf{U}}_{\mathbf{s,n}}^{(\mathbf{M_2})}\right\}=\mathbf{A_7}\left\{\left(\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{J})}-\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{J}-\mathbf{1})}\right)/\,l+\mathbf{U}_{\mathbf{x,n}}^{(\mathbf{J})}\right\}, \quad (6.27)$$

де $\mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7$ – сталі матриці, що залежать від параметрів системи.

Для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь застосовується метод Ньюмарка [350].

6.2.3 Результати числового моделювання нестаціонарного деформування корпусу двигуна. Створено методико-програмне забезпечення, що дозволяє визначати переміщення та компоненти тензору напружень корпусу твердопаливного двигуна (рис. 6.2) з ортотропного матеріалу під дією імпульсного тиску (6.1). Проведено числові дослідження нестаціонарного деформування для типової конструкції корпусу.

Основною метою числового моделювання є розрахунок допустимих імпульсних навантажень, які не призведуть до втрати працездатності корпусу. Для цього досліджувалася динамічна міцність конструкції з параметрами: L=2,95 м, h=0,06 м, R=0,4 м, H_1=0,3 м, H_2=0,25 м. Імпульсне навантаження наростає по лінійному закону і досягає максимального значення за часовий інтервал $t^*=5\cdot10^{-3}$ с. Навантаження залишається постійним до значення часу $t^{**}=30\cdot10^{-3}$ с. З моменту часу $t^{**}=30\cdot10^{-3}$ с розпочинається зниження тиску навантаження з коефіцієнтом затухання $\theta = 10^{-5}$ с. Розрахунки проводилися для значень максимального імпульсного тиску: P_{max}=12 МПа. Механічні характеристики композитного матеріалу: E_{xx}=130 ГПа, $E_{\theta\theta}$=130 ГПа, $E_{\varphi\varphi}$=125 ГПа, $G_{x\varphi}=G_{\theta\varphi}=G_{xz}=G_{\varphi z}=G_{\varphi\theta}$=3,9 ГПа, $\mu_{x\varphi}=\mu_{\varphi x}=\mu_{\theta\varphi}=\mu_{\varphi\theta}$=0,32, ρ=1400 кг/м^3.

Результати розрахунку переміщень точок серединної поверхні вздовж твірної оболонкової конструкції, подано на рис. 6.5. На цьому рисунку на осі аплікат наведено переміщення точок U .

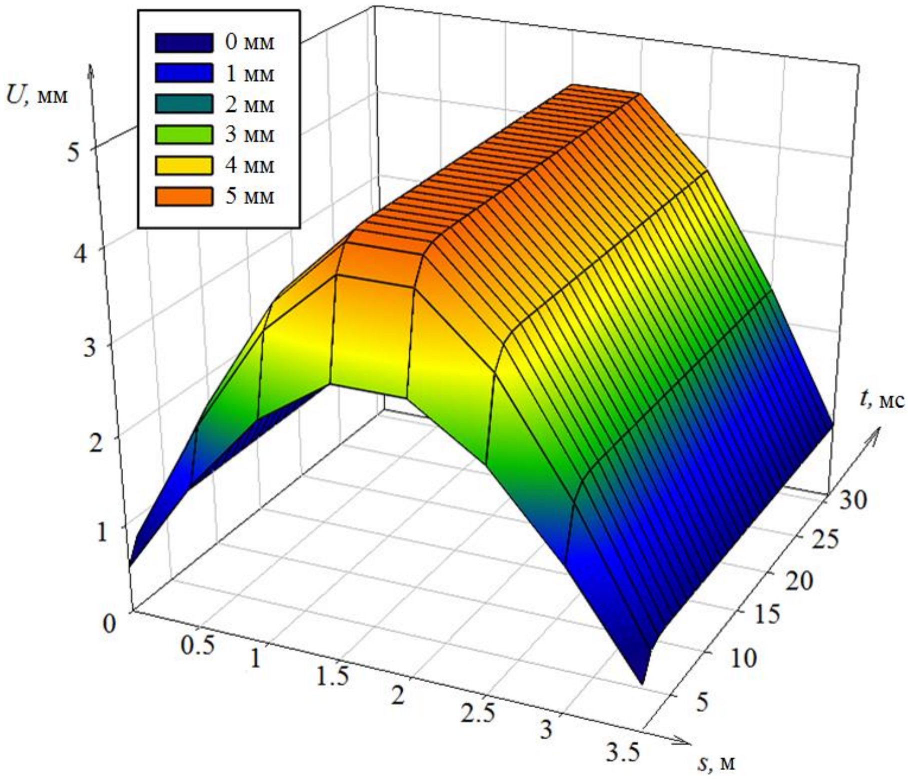


Рис. 6.5. Переміщення точок серединної поверхні вздовж твірної оболонкової конструкції на інтервалі часу 0 – 30 мс

Точки твірної серединної поверхні конструкції описуються дуговою координатою s (рис. 6.2). З рис. 6.5 випливає, що максимальні переміщення спостерігаються в середній частині циліндричної оболонки. Два днища мають найменші переміщення. Підкреслимо, що переміщення досягають свого максимуму за 10 мс і за час 30 мс не змінюють своїх значень. Максимальні переміщення складають 5 мм.

На рис. 6.6 подані переміщення точок серединної поверхні циліндричної частини конструкції на інтервалі часу 0–0,1с. З рис. 6.6 витікає, що максимальні переміщення досягають свого максимуму 5 мм за 10 мс і протягом всього процесу навантаження зберігають свої значення.

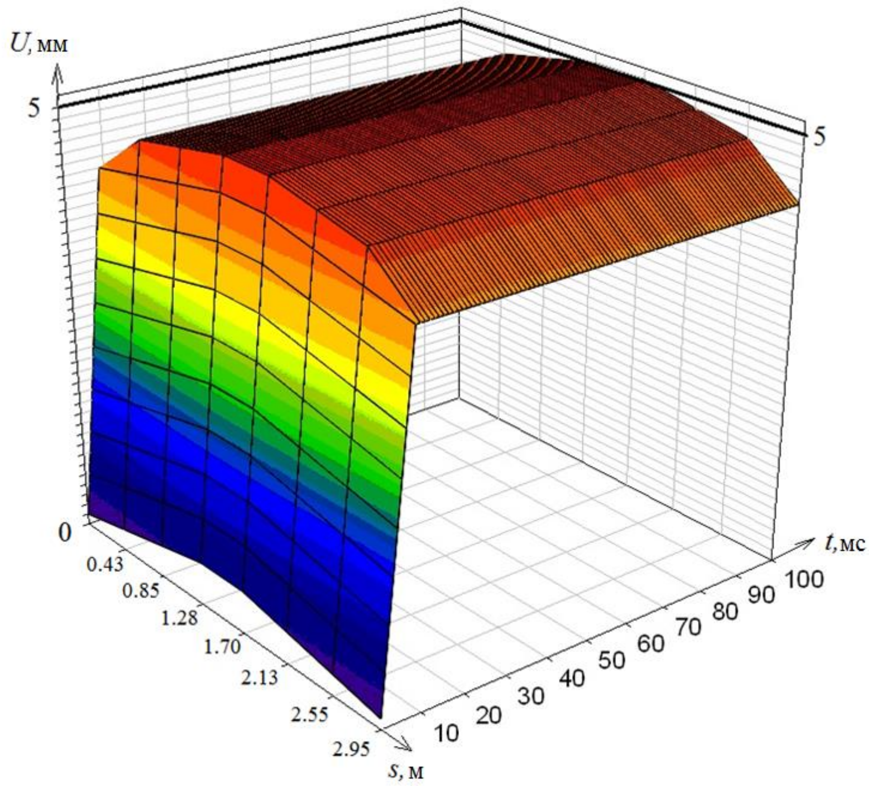


Рис. 6.6. Переміщення точок серединної поверхні циліндричної частини конструкції на інтервалі часу 0 – 100 мс

Для оцінки достовірності розробленої математичної моделі та результатів числових досліджень нестаціонарного деформування складеної оболонки з ортотропного матеріалу під дією внутрішнього імпульсного навантаження, конструкція досліджувалася методом скінченних елементів в програмному комплексі ANSYS.

На рис. 6.7 показані переміщення конструкції, які отримані за тривимірною моделлю методом скінченних елементів, в момент часу 10 мс. Порівняльний аналіз результатів досліджень показує, що отримані за розробленою моделлю переміщення (рис. 6.5) близькі до значень, отриманих в програмному комплексі ANSYS (рис. 6.7).

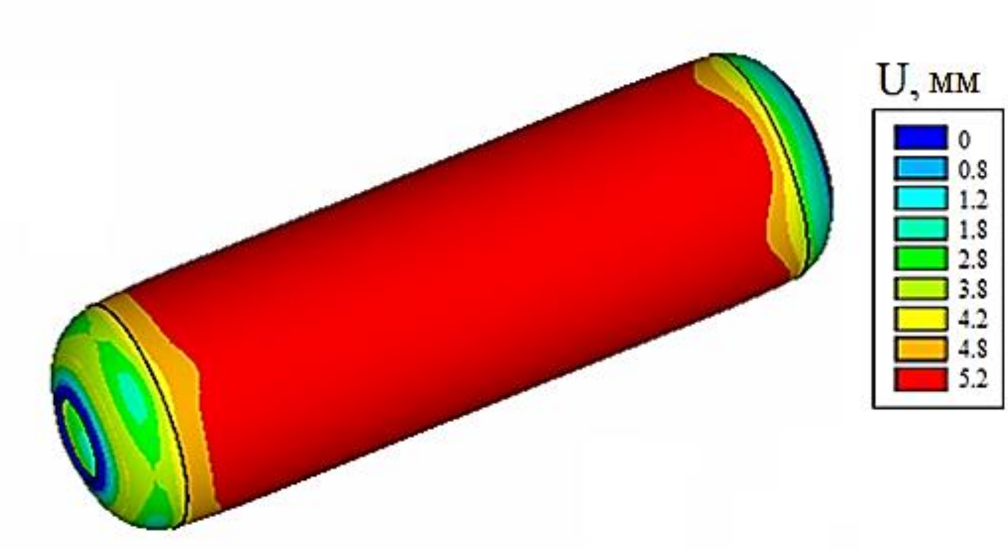


Рис. 6.7. Переміщення конструкції, що отримані за методом скінченних елементів, в момент часу 10 мс

Проводилися дослідження динамічної міцності композитної конструкції з параметрами, поданими вище, і імпульсним навантаженням (6.1). Розрахунки проводилися для трьох значень максимального імпульсного тиску: P_{max}=5 МПа, P_{max}=10 МПа, P_{max}=15 МПа.

Розглянемо напруження, що виникає в конструкції при її динамічній деформації. Відзначимо, що для досліджуємого ортотропного матеріалу найбільші значення мають компоненти тензора напруження σ_{xx} і $\sigma_{\theta\theta}$. Як показало числове моделювання, найбільші значення має компонента тензора напруження σ_{xx}. Результати розрахунку напруження σ_{xx} вздовж твірної, точки якої характеризуються дуговою координатою *s*, подано на рис. 6.8. Тут наведено напруження, що спостерігається в момент часу $t = 15 \cdot 10^{-3}$ с. Пунктирною і точковою лініями показані графіки напруження, отримані при максимальному імпульсному тиску P_{max}=5 МПа і P_{max}=10 МПа, відповідно. Суцільною лінією наведено напруження, отримані для значень максимального імпульсного тиску P_{max}=15 МПа. Пряма лінія відповідає значенню напруження σ_{xx} = 230 МПа.

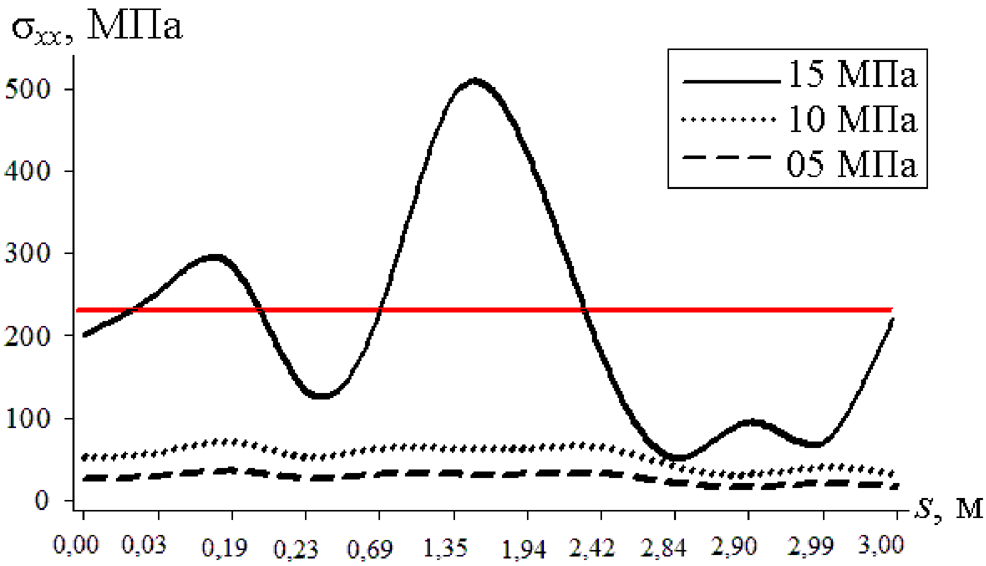


Рис. 6.8. Компонента тензора напружень σ_{xx}

вздовж твірної складеної оболонки

З експериментальних досліджень, що проводилися підприємством, яке проектує твердопаливні двигуни, були вибрані критерії працездатності конструкції з точки зору міцності. Як випливає з розрахункового аналізу, який подано вище, максимальним напруженням є σ_{xx}. Конструкція вважається за працездатну, якщо $|\sigma_{xx}| < \sigma_*$, де σ_* – границя міцності. Слід підкреслити, що ортотропний матеріал є пружним.

Як величину межі міцності приймемо $\sigma_* = 230$ МПа. Отже, виходячи з аналізу зміни компоненти тензора напружень σ_{xx} вздовж твірної складеної оболонки, поданої на рис. 6.8, конструкція, навантажена зсередини з максимальним імпульсним тиском $P_{max} = 15$ МПа, не задовольняє критеріям працездатності. Конструкція, навантажена зсередини з максимальним внутрішнім тиском $P_{max} = 10$ МПа, задовольняє умові працездатності.

Для цих трьох випадків максимального тиску значення переміщень в точці серединної поверхні складеної оболонки з координатами $(x,\varphi) = (1{,}43;\ \pi/6)$ в момент часу 5 мс порівнювалися з результатами розрахунку за методом скінченних елементів. Результати цих досліджень показані в табл. 6.1.

Розрахунки виконувались для трьох значень максимального тиску при імпульсному навантаженні, які показані в першому стовпчику табл. 6.1. Дані, отримані за викладеною методикою, показані у другому стовпчику, а результати розрахунків у програмному комплексі ANSYS подано в третьому стовпчику. Відносна різниця результатів показана у четвертому стовпчику табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Переміщення в точці серединної поверхні складеної оболонки з координатами $(x,\varphi)=(1{,}43;\ \pi/6)$ в момент часу 5 мс

P_{max}, МПа	Переміщення, мм		Відносна похибка, %
	Запропонований метод	ANSYS	
5	1.8	1.9	5
10	3.9	3.8	3
15	5.4	5.7	5

Відносна похибка розрахунків за двома методами не перевищує 5%. Таким чином, можна зробити висновок, що результати отримані з необхідною достовірністю.

Також числово досліджувалася поведінка напруження σ_{xx} за часом. Розрахунки проводилися для трьох значень максимального імпульсного тиску: P_{max}=12 МПа, P_{max}=13 МПа, P_{max}=14 МПа. Зміна напруження σ_{xx} за часом показана на рис. 6.9. Максимальне значення компоненти тензору напружень σ_{xx} сягається за 10 мс. Напружено-деформований стан конструкції при P_{max}=12 МПа і P_{max}=13 МПа відповідає критерію працездатності, який сформульований вище, а напружено-деформований стан конструкції при P_{max}=14 МПа не відповідає цьому критерію.

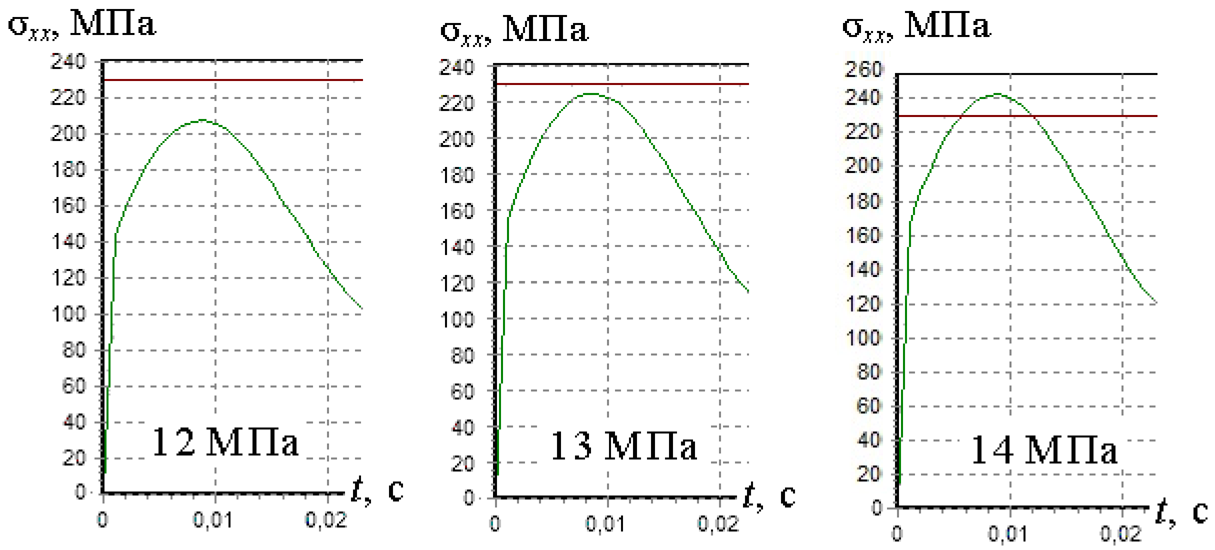


Рис. 6.9. Зміна компоненти тензору напружень σ_{xx} за часом при різних значеннях максимального імпульсного тиску

Результатом аналізу динаміки та міцності конструкції є зміна переміщень і компонент тензора напружень за часом. Підкреслимо, що час зростання імпульсного навантаження складає 5 мс, а максимальне значення переміщень і компонент тензора напруження спостерігається у момент часу 10 мс. Отже, після закінчення зростання та досягнення максимального навантаження компоненти переміщень і напруження продовжують зростати. Максимальне напруження σ_{xx} спостерігається в момент часу 10 мс і вже в момент часу 20 мс знижується в два рази.

Результати динамічного аналізу компонент тензора напружень σ_{xx} порівнювалися з відповідними компонентами тензору напружень при постійному внутрішньому тиску P_{max} = 13 МПа, що отримані методом скінченних елементів за тривимірною моделлю. Аналіз результатів статичного дослідження показує, що максимальне значення компоненти тензора напружень σ_{xx} дорівнює 220,83 МПа. В зоні з‘єднання циліндричної частини з сферичними днищами, та прилеглій до неї, максимальні напруження зменшуються до 124,89 МПа, тобто майже вдвічі. Це пояснюється тим, що в зоні з‘єднання центральної частини з днищами товщина конструкції вдвічі більше, ніж у інших частинах (рис. 6.1).

Максимальні напруження σ_{xx} для максимального тиску $P_{max} = 12$ МПа, $P_{max} = 13$ МПа та $P_{max} = 14$ МПа, що виникають в центральній частині складеної оболонки, приведені в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Максимальні напруження σ_{xx} в точці серединної поверхні складеної оболонки з координатами $(x,\varphi) = (1{,}43; \pi/6)$

P_{max}, МПа	Максимальні напруження σ_{xx}, МПа		Відносна похибка, %
	Запропонований метод	ANSYS/ Static	
12	207,3	204,2	1,5
13	224,6	220,8	1,7
14	240,5	237,4	1,3

Порівняльний аналіз результатів досліджень за двома методами показує, що компоненти тензора напружень σ_{xx} отримані за розробленою моделлю та в універсальній програмній системі скінченно-елементного аналізу ANSYS – близькі. При цьому динамічні максимальні напруження σ_{xx} декілька перевищують статичні.

Запропонована математична модель та програмне забезпечення дозволяє суттєво спростити варіативні розрахунки для вибору потрібних механічних властивостей матеріалу.

6.3 Моделювання нестаціонарного деформування корпусів з функціонально-градуйованих композитних матеріалів

6.3.1 Модель конструкції з функціонально-градуйованого матеріалу. В останні роки створення нових композитних конструкційних матеріалів з включенням наночастинок є важливим напрямком розвитку полімерних композитів. Багато літературних джерел свідчать про те, що характеристики як еластомерів, так і жорстких полімерів можуть бути істотно поліпшені шляхом їх модифікації малими добавками наночастинок – фулеренів, нанотрубок, нановолокон. Основні наукові дослідження нанокомпозитів систематизовані в оглядових статтях [351]–[354], найбільш докладним і системним з яких є огляд [353]. Показано, що полімерні нанокомпозити є перспективними конструкційними матеріалами та все частіше використовуються в ракетній техніці для виготовлення корпусних елементів ракет.

Виготовлення твердопаливного двигуна ракети-носія з нанокомпозитних матеріалів дозволяє значно знизити його вагу, тому останнім часом досліджується можливість заміни металевих корпусів на виготовлені із нанокомпозитів. Разом із цим є потреба в якісних математичних моделях, що описують процеси деформування композитних корпусів при експлуатаційних навантаженнях, та дозволяють замінити ряд експериментальних досліджень числовим аналізом на етапі загального проектування. Розрахункові дослідження корпусних ракетних конструкцій з нанокомпозитних матеріалів за традиційними скінченно-елементними моделями пов’язані з рядом труднощів. Труднощі викликані дуже великими лінійними розмірами конструкцій при малій товщині. Для дискретизації механічних властивостей композитних матеріалів, що зміцнені вуглецевими нанотрубками, потрібна велика кількість скінченних елементів. Це призводить до матричної задачі дуже великої розмірності, що значно ускладнює, а в деяких випадках, і унеможливлює числові дослідження динаміки конструкцій.

Для дослідження нестаціонарного деформування з'єднаної сферично-циліндрично-сферичної оболонки, що моделює конструкцію корпусу твердопаливного двигуна, з функціонально-градуйованих нанокомпозитів необхідно враховувати зміну фізико-механічних властивостей матеріалу за товщиною оболонки. При цьому класичні моделі теорії оболонок не дозволяють правильно описати цю зміну. Тому було обрано модель, що ґрунтується на застосуванні теорії Редді високого порядку.

Для моделювання механічних властивостей функціонально-градуйованого композитного матеріалу було розглянуто п'ять основних типів наноармування в поперечному напрямку тонкостінної конструкції [355, 356]. Вони мають пружні характеристики. Композитний матеріал оболонки має властивості функціонально-градуйованого матеріалу. Ці властивості композиту враховуються в моделях. Прийнято такі позначення для п'яти основних типів композитного матеріалу [355, 357]: мають змінне наноармування в поперечному напрямку "FG-V", "FG-**Λ**", "FG-X", "FG-O"; мають рівномірне наноармування в поперечному напрямку "UD". Механічні властивості в поперечному напрямку змінюються за власним законом для кожного типу матеріалу.

Закон Гука для функціонально-градуйованого композитного матеріалу конструкції має вигляд [357]

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}(z) & Q_{12}(z)\\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\end{bmatrix},$$

$$\sigma_{12}=G_{12}(z)\gamma_{12}, \tag{6.28}$$

$$\sigma_{13}=G_{13}(z)\gamma_{13},$$

де $Q_{11}(z)=\dfrac{E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}$;

$Q_{22}(z)=\dfrac{E_{22}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}$;

$Q_{12}(z)=\dfrac{\mu_{21}(z)E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}$;

E_{11}, E_{22} – модулі Юнга;

G_{12}, G_{13} – модулі зсуву;

$\mu_{12},\ \mu_{21}$ – коефіцієнти Пуассона;

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ – елементи тензора деформацій;

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ – елементи тензора напружень.

Індекси 1 та 2 у формулах (6.28) вказують на координати вздовж твірної оболонки та в окружному напрямку, відповідно. Індекс 3 вказує на координату вздовж зовнішньої нормалі до серединної поверхні оболонки.

Досліджується корпус твердопаливного двигуна. Геометрична модель конструкції подана на рис. 6.10. Вона виготовлена з функціонально-градуйованого композитного матеріалу, армованого вуглецевими нанотрубками.

Товщина корпусу значно менше за його лінійні розміри, тому він моделюється складеною оболонкою обертання з твірною $\mathbf{S} = \mathbf{S_I} \cup \mathbf{S_{II}} \cup \mathbf{S_{III}}$. Твірна складається з трьох частин: двох дуг кіл по краях і центральної прямої лінії. Таким чином, складена оболонка містить три частини: ліве днище I в формі усіченої півсферичної оболонки, центральну частину II у формі циліндричної оболонки і праве днище III в формі усіченої півсферичної оболонки (рис. 6.10).

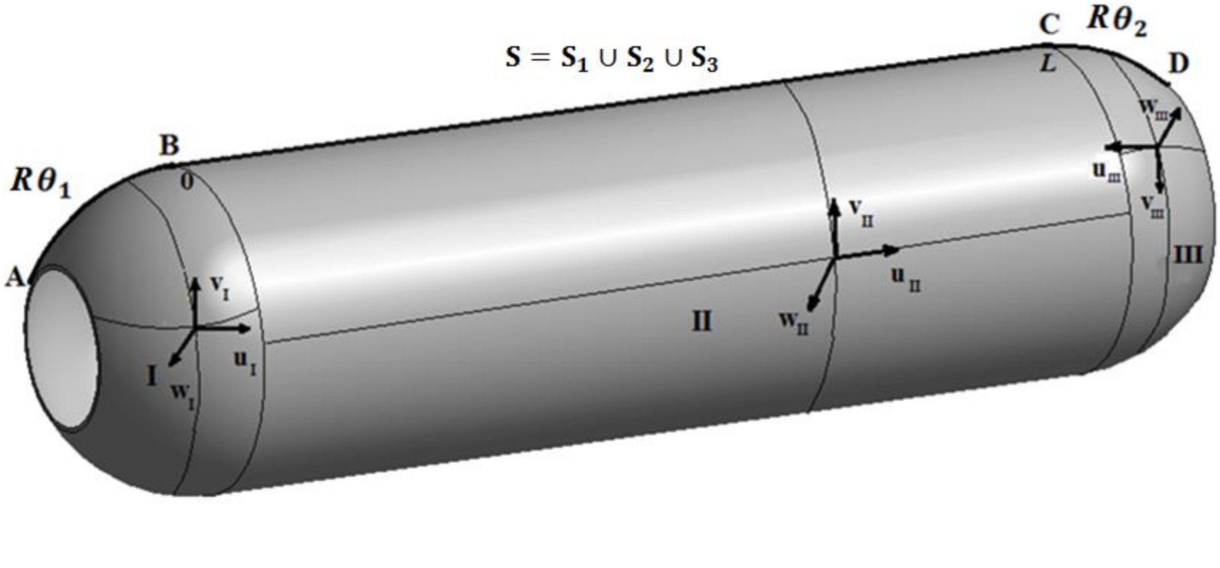


Рис. 6.10. Геометрична модель конструкції

Ліве днище має форму усіченої півсферичної оболонки з радіусом R та твірною $\mathbf{S_I}$ довжиною $R \cdot \theta_1$. На рис. 6.10 ця ділянка твірної міститься поміж точками А і В. Компоненти вектору переміщень для точок лівого днища позначимо (u_I, v_I, w_I), як зображено на рис. 6.10. Напрямок компоненти w_I співпадає з напрямком зовнішньої нормалі до поверхні оболонки, а компоненти $u_{I,}$ і v_I мають напрямки вздовж координатних ліній (θ_I, φ_I) лівої усіченої півсферичної оболонки, відповідно.

Центральна частина конструкції має форму циліндричної оболонки довжиною L і радіусу R. Її твірна $\mathbf{S_{II}}$ міститься між точками В і С на рис. 6.10. Компоненти вектору переміщень циліндричної частини позначимо (u_{II}, v_{II}, w_{II}). Напрямок компоненти w_{II} співпадає з напрямком зовнішньої нормалі циліндричної оболонки, а компоненти $u_{II,}$ і v_{II} мають напрямок вдовж координатних ліній (x, φ), відповідно.

Вздовж окружної координати в точці В (рис. 6.10), що відповідає $x = 0$ для центральної оболонки та $\theta_I = \pi/2$ для лівої кришки, відбувається з'єднання частин конструкції. Тут виконуються умови нерозривного з'єднання. Позитивні напрямки для окружних координат φ_I та φ співпадають.

Праве днище має форму усіченої півсферичної оболонки з радіусом R і твірною $\mathbf{S_{III}}$ довжиною $R \cdot \theta_2$. На рис. 6.10 ця ділянка твірної знаходиться між точками С і D. Компоненти вектору переміщень для точок правого днища позначимо $(u_{III}, v_{III}, w_{III})$. Компонента w_{III} співнаправлена з зовнішньою нормаллю до поверхні оболонки, а компоненти $u_{III,}$ та v_{III} спрямовані уздовж координатних ліній $(\theta_{III}, \varphi_{III})$ лівої усіченої напівсферичної оболонки, відповідно. Уздовж окружної координати в точці С, відповідної $x = L$ для центральної оболонки та $\theta_{III} = \pi/2$ для правої кришки, відбувається з'єднання частин конструкції (рис. 6.10). Тут також виконуються умови нерозривного з'єднання. Позитивні напрямки для окружних координат φ і φ_{III} протилежні.

На обох краях конструкція жорстко закріплена.

Товщина всіх складових частин тонкостінної конструкції однакова і дорівнює h.

6.3.2 Основні рівняння для складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки з функціонально-градуйованого композитного матеріалу. Для математичного моделювання деформування складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки обертання з функціонально-градуйованого композитного матеріалу (рис.6.10) під дією імпульсного навантаження внутрішнім осьосиметричним тиском необхідно попередньо окремо побудувати моделі деформування для усіченої сферичної та циліндричної оболонок з функціонально-градуйованого композитного матеріалу.

Визначимо основні рівняння усіченої сферичної оболонки з функціонально-градуйованого композитного матеріалу.

Ескіз усіченої сферичної оболонки показано на рис. 6.11. Точки серединної поверхні цієї оболонки характеризуються двома координатами (θ, φ), де $\theta^* \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Орт нормалі до серединної поверхні назовні – позитивний. Поперечною координатою є z.

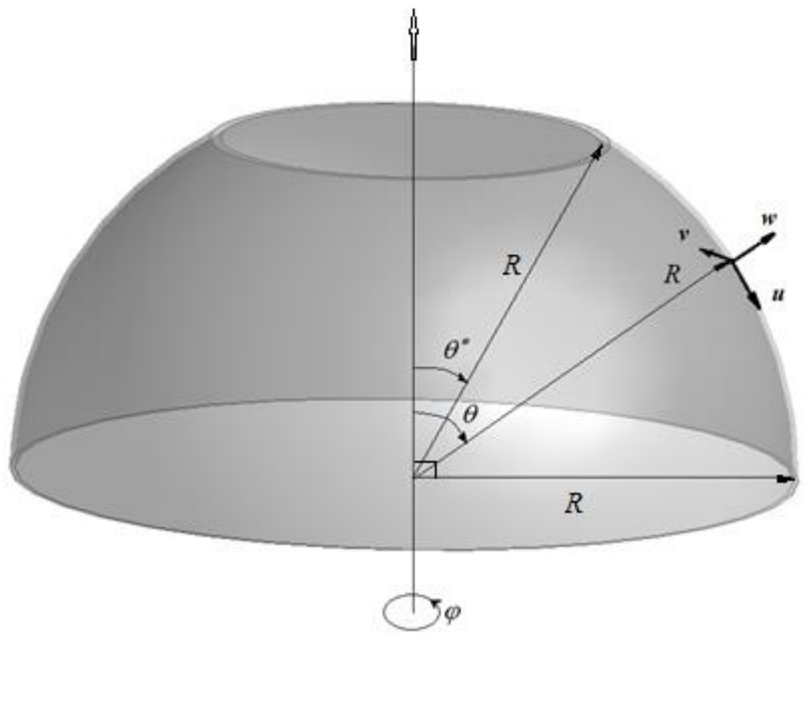


Рис. 6.11. Ескіз усіченої сферичної оболонки

Дослідження Дж. Н. Редді [358] показують, що в композитних конструкціях при навантаженні виникають зсуви, які бажано враховувати. Для градієнтно-структурних композитних оболонок математична модель деформування повинна відображати нелінійний характер зсувів за товщиною. Тому переміщення оболонки визначаються за теорією деформацій високого порядку.

Переміщення довільної точки усіченої сферичної оболонки описується п'ятьма функціями:
$u(\theta,\varphi,t)$, $v(\theta,\varphi,t)$, $w(\theta,\varphi,t)$ – трьома проекціями вектору переміщень на координатні осі (θ,φ,z), де $\theta^* \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$ і $-h/2 \le z \le h/2$;
$\psi_\theta(\theta,\varphi,t)$ і $\psi_\phi(\theta,\varphi,t)$ – двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні відносно осей θ і φ.

Дотримуючись робіт [358, 359], переміщення довільної точки оболонки, розташованої на відстані z від серединної поверхні, подаємо так:

$$u_\theta(\theta,\varphi,z,t) = \left(1+\frac{z}{R}\right)u(\theta,\varphi,t) + z\psi_\theta(\theta,\varphi,t) +$$
$$+z^2\Omega_\theta(\theta,\varphi,t) + z^3\gamma_\theta(\theta,\varphi,t),$$
$$u_\phi(\theta,\varphi,z,t) = \left(1+\frac{z}{R}\right)v(\theta,\varphi,t) + z\psi_\phi(\theta,\varphi,t) +$$
$$+z^2\Omega_\phi(\theta,\varphi,t) + z^3\gamma_\phi(\theta,\varphi,t),$$
$$u_z(\theta,\varphi,z,t) = w(\theta,\varphi,t), \tag{6.29}$$

де $R -$ радіус серединної поверхні оболонки;
$\Omega_\theta, \gamma_\theta, \Omega_\phi, \gamma_\phi$ – невідомі функції.

Функції $\Omega_\theta, \gamma_\theta, \Omega_\phi, \gamma_\phi$ знаходяться з рівнянь [358]

$$\varepsilon_{\theta z}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi z}\big|_{z=\pm h/2} = 0, \tag{6.30}$$

де $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{\varphi z}$ – деформації зсуву, які знаходяться таким чином:

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{1 + z/R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R}\right),$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{1 + z/R}\left(\frac{1}{Rsin\theta}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{u_\phi}{R}\right). \qquad (6.31)$$

Після перетворень з (6.29) – (6.31) отримуємо такі вирази для функцій $\Omega_\theta, \gamma_\theta, \Omega_\phi, \gamma_\phi$:

$$\Omega_\theta \equiv \Omega_\theta(\theta, \varphi, t) = \frac{\psi_\theta}{2R} + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta},$$

$$\gamma_\theta \equiv \gamma_\theta(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2R^3}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\psi_\theta}{2R^2} - \frac{u}{R^3} - \frac{4}{h^2}\left(\psi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right],$$

$$\Omega_\phi \equiv \Omega_\phi(\theta, \varphi, t) = \frac{\psi_\phi}{2R} + \frac{1}{2R^2 sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$\gamma_\phi \equiv \gamma_\phi(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2R^3 sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\psi_\phi}{2R^2} - \frac{v}{R^3} - \frac{4}{h^2}\left(\psi_\phi + \frac{1}{Rsin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\right]. \qquad (6.32)$$

Після підстановки виразів (6.32) у рівняння (6.29) отримуємо, що проекції переміщень довільної точки оболонки залежать від п'яти функцій: $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, $\psi_\theta(\theta, \varphi, t)$ і $\psi_\phi(\theta, \varphi, t)$.

Зв'язок компонент тензору деформацій $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{\theta\varphi}$, $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{\varphi z}$ з п'ятьма невідомими функціями $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, $\psi_\theta(\theta, \varphi, t)$ і $\psi_\phi(\theta, \varphi, t)$ отримаємо з залежностей, що приведені в статті [359]. Після перетворень можна записати

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + z\left(-\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right) + z^2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)\right) +$$

$$+ z^3\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta}\right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}u+\frac{w}{R}+\mathrm{z}\left(-\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R\ \ \sin\theta}\frac{\partial\psi_{\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\psi_{\theta}\right)+$$

$$+\mathrm{z}^2\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Omega_{\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\Omega_{\theta}-\frac{1}{R^2\sin\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi_{\varphi}}{\partial\varphi}\right)-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R^2}\left(\frac{u}{R}+\psi_{\theta}\right)\right)+$$

$$+\mathrm{z}^3\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\gamma_{\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\gamma_{\theta}-\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\Omega_{\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R^2}\Omega_{\theta;}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}v+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\mathrm{z}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi_{\theta}}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\psi_{\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_{\varphi}}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\mathrm{z}^2\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Omega_{\theta}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R^2\sin\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi_{\theta}}{\partial\varphi}\right)-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\Omega_{\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R^2}\left(\frac{u}{R}+\psi_{\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R}\frac{\partial\Omega_{\varphi}}{\partial\theta}-\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_{\varphi}}{\partial\theta}\right)\right)+$$

$$+\mathrm{z}^3\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\gamma_{\theta}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\Omega_{\theta}}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R}\gamma_{\varphi}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{R^2}\Omega_{\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_{\varphi}}{\partial\theta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\Omega_{\varphi}}{\partial\theta}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta z}=\psi_{\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\mathrm{z}^2\left(3\gamma_{\theta}-\frac{\Omega_{\theta}}{R}+\frac{u}{R^3}+\frac{\psi_{\theta}}{R^2}\right),$$

$$\varepsilon_{\varphi z}=\psi_{\varphi}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\mathrm{z}^2\left(3\gamma_{\varphi}-\frac{\Omega_{\varphi}}{R}+\frac{u}{R^3}+\frac{\psi_{\varphi}}{R^2}\right). \qquad (6.33)$$

Потенціальну енергію деформації усіченої полусферичної оболонки подаємо в загальному вигляді

$$\Pi_{cap}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-0.5h}^{0.5h}\left(Q_{11}{\varepsilon_{\theta\theta}}^2+2Q_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\theta\theta}+Q_{22}{\varepsilon_{\varphi\varphi}}^2+G_{23}{\varepsilon_{\varphi z}}^2+\right.$$

$$\left.+G_{13}{\varepsilon_{\theta z}}^2+G_{12}{\varepsilon_{\theta\varphi}}^2\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)^2R^2 sin\theta dzd\theta d\varphi. \qquad (6.34)$$

Для зручності подальших викладок вирази (6.33) подаємо у вигляді рядів

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\sum_{i=0}^{3} z^i\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)},\qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\sum_{i=0}^{3} z^i\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)},\qquad \varepsilon_{\theta\varphi}=\sum_{i=0}^{3} z^i\varepsilon_{\theta\varphi}^{(i)},$$

$$\varepsilon_{\theta z}=\sum_{i=0}^{2} z^i\varepsilon_{\theta z}^{(i)},\qquad \varepsilon_{\varphi z}=\sum_{i=0}^{3} z^i\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}. \tag{6.35}$$

В рядах (6.35) вирази для $\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}$, $\varepsilon_{\theta\varphi}^{(i)}$, $\varepsilon_{\theta z}^{(i)}$, $\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}$ формуються з рівнянь (6.33).

Також введемо позначення для компонент Q_{ij} і G_{ij} у законі Гука для функціонально-градуйованого композитного матеріалу (6.28)

$$Q_{ij}^{(k)}=\int_{-0.5h}^{0.5h} Q_{ij}z^k dz,\qquad G_{ij}^{(k)}=\int_{-0.5h}^{0.5h} G_{ij}z^k dz. \tag{6.36}$$

Для інтегрування потенціальної енергії (6.34) по товщині врахуємо той факт, що множник $(1+z/R)^2\approx 1$.

Після підстановки розкладів (6.35) і (6.36) у вираз для потенціальної енергії (6.34), отримуємо загальний вигляд потенціальної енергії усіченої сферичної оболонки Π_{cap}, відносно п'яти невідомих функцій: $u(\theta,\varphi,t)$, $v(\theta,\varphi,t)$, $w(\theta,\varphi,t)$, $\psi_\theta(\theta,\varphi,t)$ и $\psi_\phi(\theta,\varphi,t)$.

Після інтегрування (6.34) по z отримуємо потенціальну енергію

$$\Pi_{cap}=\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\widetilde{\theta^*}}^{\pi/2}\sum_{i=0}^{4}\Pi_i\,(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi, \tag{6.37}$$

де $\Pi_0=Q_{11}^{(0)}\left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\right)^2+Q_{22}^{(0)}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\right)^2+2Q_{12}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}+G_{23}^{(0)}\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\right)^2+G_{13}^{(0)}\left(\varepsilon_{\theta z}^{(0)}\right)^2+G_{12}^{(0)}\left(\varepsilon_{\theta\varphi}^{(0)}\right)^2$;

$\Pi_1=2Q_{11}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}+2Q_{12}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+2Q_{12}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}+2Q_{22}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+2G_{23}^{(1)}\varepsilon_{\varphi z,0}\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}+$
$+2G_{13}^{(1)}\varepsilon_{\theta z,0}\varepsilon_{\theta z}^{(1)}+2G_{12}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)}$;

$$\prod_2=2Q_{11}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}+2Q_{12}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}+2Q_{12}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}k_{\varphi\varphi}^{(1)}+2Q_{12}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}+2Q_{22}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}+$$

$$+2G_{23}^{(2)}\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}+2G_{13}^{(2)}\varepsilon_{\theta z}^{(0)}\varepsilon_{\theta z}^{(2)}+2G_{12}^{(2)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(2)}+Q_{11}^{(2)}\left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\right)^2+Q_{22}^{(2)}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\right)^2+G_{23}^{(2)}\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}\right)^2+$$

$$+G_{13}^{(2)}\left(\varepsilon_{\theta z}^{(1)}\right)^2+G_{12}^{(2)}\left(\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)}\right)^2;$$

$$\prod_3=2Q_{11}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}+2Q_{11}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(2)}+2QQ_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}+2Q_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}+2Q_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+$$

$$+2Q_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}+2Q_{22}^{(3)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}+2Q_{22}^{(3)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+2G_{23}^{(3)}\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}+$$

$$+2Q_{23}^{(3)}\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}+2G_{13}^{(3)}\varepsilon_{\theta z}^{(0)}\varepsilon_{\theta z}^{(3)}+2G_{13}^{(3)}\varepsilon_{\theta z}^{(1)}\varepsilon_{\theta z}^{(2)}+2G_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(3)}+2G_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(2)};$$

$$\prod_4=2Q_{11}^{(4)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}+2Q_{12}^{(4)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}+2Q_{12}^{(4)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}+2Q_{12}^{(4)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+2Q_{22}^{(4)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}+$$

$$+2G_{23}^{(4)}\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}+2G_{13}^{(4)}\varepsilon_{\theta z}^{(1)}\varepsilon_{\theta z}^{(3)}+2G_{12}^{(4)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi\varphi}^{(3)}+Q_{11}^{(4)}\left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}\right)^2+Q_{22}^{(4)}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\right)^2+G_{23}^{(4)}\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\right)^2+$$

$$+G_{13}^{(4)}\left(\varepsilon_{\theta z}^{(2)}\right)^2+G_{12}^{(4)}\left(\varepsilon_{\theta\varphi}^{(2)}\right)^2.$$

Кінетичну енергію усіченої напівсферичної оболонки подаємо в загальному вигляді

$$T_{cap}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-0.5h}^{0.5h}\rho(z)\left(\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{z}{R}\right)^2 R^2 sin\theta dz d\theta d\varphi. \qquad (6.38)$$

Застосуємо (6.29) у виразі (6.38). Для скорочення форми запису кінетичної енергії введемо такі позначення:

$\frac{\partial u}{\partial t}\equiv\dot{u}$, $\frac{\partial v}{\partial t}\equiv\dot{v}$, $\frac{\partial w}{\partial t}\equiv\dot{w}$, $\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\equiv\dot{\psi_\theta}$ та $\frac{\partial\psi_\phi}{\partial t}\equiv\dot{\psi_\phi}$.

Похідні функцій (6.32) матимуть вигляд

$$\dot{\Omega}_\theta\equiv\dot{\Omega}_\theta(\theta,\varphi,t)=\frac{\dot{\psi_\theta}}{2R}+\frac{1}{2R^2}\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta},$$

$$\dot{\gamma}_\theta \equiv \dot{\gamma}_\theta(\theta,\varphi,t) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2R^3}\frac{\partial \dot{w}}{\partial\theta} - \frac{\dot{\psi}_\theta}{2R^2} - \frac{\dot{u}}{R^3} - \frac{4}{h^2}\left(\dot{\psi}_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial \dot{w}}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$\dot{\Omega}_\phi \equiv \dot{\Omega}_\phi(\theta,\varphi,t) = \frac{\dot{\psi}_\phi}{2R} + \frac{1}{2R^2 sin\theta}\frac{\partial \dot{w}}{\partial\varphi},$$

$$\dot{\gamma}_\phi \equiv \dot{\gamma}_\phi(\theta,\varphi,t) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2R^3 sin\theta}\frac{\partial \dot{w}}{\partial\varphi} - \frac{\dot{\psi}_\phi}{2R^2} - \frac{\dot{v}}{R^3} - \frac{4}{h^2}\left(\dot{\psi}_\phi + \frac{1}{R sin\theta}\frac{\partial \dot{w}}{\partial\varphi}\right)\right]. \qquad (6.39)$$

Врахуємо той факт, що множник $(1 + z/R)^2 \approx 1$. Тоді після перетворень отримаємо вираз для кінетичної енергії усіченої напівсферичної оболонки

$$T_{cap} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z)\Big(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2 + z\left(2\dot{u}\dot{\psi}_\theta+2\dot{v}\dot{\psi}_\phi\right) + z^2\left(\dot{\psi}_\theta^{\,2}+2\dot{\Omega}_\theta\dot{u}+\dot{\psi}_\phi^{\,2}+2\dot{v}\dot{\Omega}_\phi\right) +$$

$$+z^3\left(2\dot{\gamma}_\theta\dot{u}+2\dot{\Omega}_\theta\dot{\psi}_\theta+2\dot{v}\dot{\gamma}_\phi+2\dot{\psi}_\phi\dot{\Omega}_\phi\right) + z^4\left(\dot{\Omega}_\theta^{\,2}+2\dot{\gamma}_\theta\dot{\psi}_\theta+\dot{\Omega}_\phi^{\,2}+2\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) +$$

$$z^5\left(2\dot{\Omega}_\theta\dot{\gamma}_\theta+2\dot{\Omega}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) + z^6\left(\dot{\gamma}_\theta^{\,2}+\dot{\gamma}_\phi^{\,2}\right)\Big)\cdot R^2 sin\theta dz d\theta d\varphi. \qquad (6.40)$$

Для інтегрування виразу для кінетичної енергії (6.40) по товщині оболонки введемо позначення

$$r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \rho(z) dz\,, i = 0..6. \qquad (6.41)$$

Застосуємо (6.41) у (6.40) і виконаємо інтегрування по товщині. Отримаємо вираз для кінетичної енергії усіченої полусферичної оболонки у вигляді подвійного інтеграла, який містить п'ять невідомих функцій $u(\theta,\varphi,t)$, $v(\theta,\varphi,t)$, $w(\theta,\varphi,t)$, $\psi_x(\theta,\varphi,t)$ и $\psi_\phi(\theta,\varphi,t)$:

$$T_{cap} = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} r_0(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + r_1\big(2\dot{u}\dot{\psi}_\theta + 2\dot{v}\dot{\psi}_\phi\big) +$$

$$+ r_2\left(\dot{\psi}_\theta^{\ 2} + 2\dot{\Omega}_\theta\dot{u} + \dot{\psi}_\phi^{\ 2} + 2\dot{v}\dot{\Omega}_\phi\right) +$$

$$+r_3\big(2\dot{\gamma}_\theta\dot{u} + 2\dot{\Omega}_\theta\dot{\psi}_\theta + 2\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\Omega}_\phi\big)+r_4\left(\dot{\Omega}_\theta^{\ 2} + 2\dot{\gamma}_\theta\dot{\psi}_\theta + \dot{\Omega}_\phi^{\ 2} + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) +$$

$$+r_5\big(2\dot{\Omega}_\theta\dot{\gamma}_\theta + 2\dot{\Omega}_\phi\dot{\gamma}_\phi\big) + r_6\big(\dot{\gamma}_\theta^{\ 2} + \dot{\gamma}_\phi^{\ 2}\big)R^2 sin\theta dz d\theta d\varphi. \qquad (6.42)$$

Для потенціальної та кінетичної енергій складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки (рис. 6.10) границя інтегрування лівого днища дорівнює $\theta^* = (\frac{\pi}{2} - \theta_1)$, а границя інтегрування правого днища – III – $\theta^* = (\frac{\pi}{2} - \theta_2)$.

Напрямок обертання по окружній координаті для лівого днища (рис. 6.10) збігається з позитивним напрямком координати φ усіченої сферичної оболонки (рис. 6.11). Тому потенціальну та кінетичну енергії лівого днища I можна сформувати з (6.37) і (6.42) таким чином:

$$\Pi_{\mathrm{I}}\left(u_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), v_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), w_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), \psi_{x_{\mathrm{I}}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), \psi_{\phi_{\mathrm{I}}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t)\right)=$$

$$= \Pi_{cap}\left(u(\theta,\varphi,t), v(\theta,\varphi,t), w(\theta,\varphi,t), \psi_x(\theta,\varphi,t), \psi_\phi(\theta,\varphi,t)\right),$$

$$T_{\mathrm{I}}\left(u_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), v_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), w_{\mathrm{I}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), \psi_{x_{\mathrm{I}}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t), \psi_{\phi_{\mathrm{I}}}(\theta_{\mathrm{I}},\varphi,t)\right)=$$

$$= T_{cap}\left(u(\theta,\varphi,t), v(\theta,\varphi,t), w(\theta,\varphi,t), \psi_x(\theta,\varphi,t), \psi_\phi(\theta,\varphi,t)\right). \quad (6.43)$$

Напрямок обертання по окружній координаті для правого днища III (рис. 6.10) – протилежний позитивному напрямку координати φ усіченої сфери (рис. 6.11). Тому потенціальну та кінетичну енергії правого днища III можна виразити з (6.37) і (6.42) так:

$$\Pi_{\text{III}}\left(u_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),v_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),w_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),\psi_{\theta_{\text{III}}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),\psi_{\phi_{\text{III}}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t)\right)=$$

$$=\Pi_{cap}\left(u(\theta,-\varphi,t),v(\theta,-\varphi,t),w(\theta,-\varphi,t),\psi_{\theta}(\theta,-\varphi,t),\psi_{\phi}(\theta,-\varphi,t)\right),$$

$$T_{\text{III}}\left(u_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),v_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),w_{\text{III}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),\psi_{\theta_{\text{III}}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t),\psi_{\phi_{\text{III}}}(\theta_{\text{III}},\varphi,t)\right)=$$

$$=T_{cap}\left(u(\theta,-\varphi,t),v(\theta,-\varphi,t),w(\theta,-\varphi,t),\psi_{\theta}(\theta,-\varphi,t),\psi_{\phi}(\theta,-\varphi,t)\right). \quad (6.44)$$

Визначимо основні рівняння циліндричної оболонки з функціонально-градуйованого композитного матеріалу.

Ескіз циліндричної оболонки подано на рис. 6.12. Точки серединної поверхні цієї оболонки характеризуються двома координатами (x,φ), де $0\le x\le L$, $0\le\varphi<2\pi$. Орт нормалі до серединної поверхні назовні – позитивний. Поперечної координатою є z.

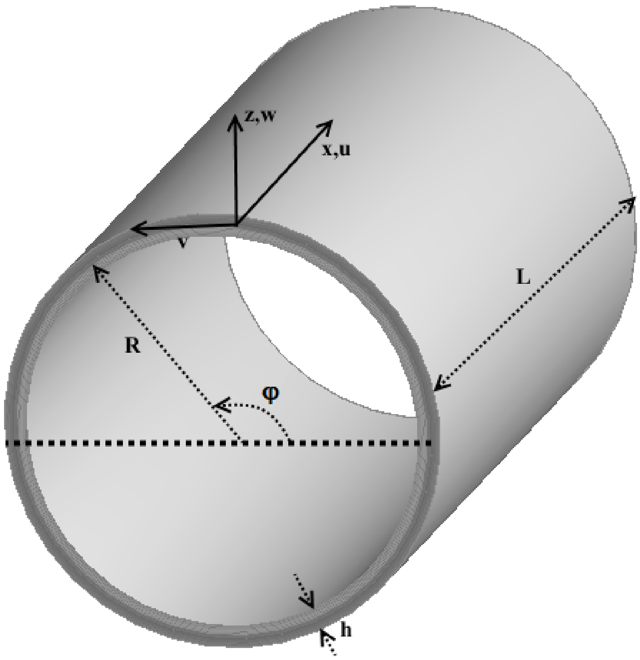


Рис. 6.12. Ескіз циліндричної оболонки

Для визначення переміщень оболонки використано теорію деформацій зсуву високого порядку. Переміщення довільної точки циліндричної оболонки описується п'ятьма функціями [358, 359]:

$u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$, $w(x,\varphi,t)$ – трьома проекціями вектору переміщень на координатні осі (x,φ,z), де $0 \leq x \leq L$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $-h/2 \leq z \leq h/2$;

$\psi_x(x,\varphi,t)$ и $\psi_\phi(x,\varphi,t)$ – двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні щодо осей x та φ.

За підходом, що викладено в роботах [358, 359], переміщення довільної точки оболонки, розташованої на відстані z від серединної поверхні, можна подати у вигляді

$$u_x(x,\varphi,z,t) = u(x,\varphi,t) + z\psi_x(x,\varphi,t) +$$
$$+z^2\Omega_x(x,\varphi,t) + z^3\gamma_x(x,\varphi,t),$$
$$u_\phi(x,\varphi,z,t) = \left(1+\frac{z}{R}\right)v(x,\varphi,t) + z\psi_\phi(x,\varphi,t) +$$
$$+z^2\Omega_\phi(x,\varphi,t) + z^3\gamma_\phi(x,\varphi,t),$$
$$u_z(x,\varphi,t,z) = w(x,\varphi,t), \tag{6.45}$$

де $R -$ радіус серединної поверхні циліндричної оболонки;

$\Omega_x, \gamma_x, \Omega_\phi, \gamma_\phi$ – невідомі функції.

Функції $\Omega_x, \gamma_x, \Omega_\phi, \gamma_\phi$ знаходяться з рівнянь [359].

$$\varepsilon_{xz}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi z}\big|_{z=\pm h/2} = 0, \tag{6.46}$$

де ε_{xz}, $\varepsilon_{\varphi z} -$ деформації зсуву, які знаходяться так:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x};$$
$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{1+z/R}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{u_\phi}{R}\right). \tag{6.47}$$

Після перетворень, з (6.45), (6.46) та (6.47) отримуємо такі вирази для функцій $\Omega_x, \gamma_x, \Omega_\phi, \gamma_\phi$:

$$\Omega_x(x,\varphi,t) = 0,$$

$$\gamma_x(x,\varphi,t) = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x(x,\varphi,t)\right),$$

$$\Omega_\phi(x,\varphi,t) = \frac{4}{12R^2 - h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + R\cdot\psi_\phi(x,\varphi,t)\right),$$

$$\gamma_\phi(x,\varphi,t) = -16\frac{R}{h^2(12R^2 - h^2)}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + R\cdot\psi_\phi(x,\varphi,t)\right). \qquad (6.48)$$

Після підстановки виразів (6.48) у вирази (6.45), отримуємо, що проекції переміщень довільної точки циліндричної оболонки залежать від п'яти невідомих функцій: $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$, $w(x,\varphi,t)$, $\psi_x(x,\varphi,t)$ і $\psi_\phi(x,\varphi,t)$.

Потенціальну енергію деформації композитної циліндричної оболонки подаємо в загальному вигляді

$$\Pi_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-0.5h}^{0.5h}\left(Q_{11}{\varepsilon_{xx}}^2 + 2Q_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}\varepsilon_{xx} + Q_{22}{\varepsilon_{\varphi\varphi}}^2 + G_{23}{\varepsilon_{\varphi z}}^2 + G_{13}{\varepsilon_{xz}}^2 + \right.$$

$$\left. + G_{12}{\varepsilon_{x\varphi}}^2\right)\left(1 + \frac{z}{R}\right)R dz dx d\varphi. \qquad (6.49)$$

Зв'язок компонент тензору деформацій ε_{xx}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{\theta x\varphi}$, ε_{xz}, $\varepsilon_{\varphi z}$ з п'ятьма невідомими функціями $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$, $w(x,\varphi,t)$, $\psi_x(x,\varphi,t)$ і $\psi_\phi(x,\varphi,t)$ отримуємо, виходячи з залежностей, які подані в статті [359]. Вона має вигляд:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3\frac{\partial \gamma_x}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R} + z\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_\phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R^2}\right) +$$

$$+z^2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \theta_\phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi_\phi}{\partial \varphi}\right) + z^3\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_\phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial \theta_\phi}{\partial \varphi}\right) + z^4\left(-\frac{1}{R^3}\frac{\partial \gamma_\phi}{\partial \varphi}\right),$$

$$\varepsilon_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\phi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+z^2\left(\frac{\partial \theta_\phi}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi_x}{\partial \varphi}\right) + z^3\left(\frac{\partial \gamma_\phi}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi}\right) + z^4\left(-\frac{1}{R^2}\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi}\right),$$

$$\varepsilon_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + z^2 \cdot 3\gamma_x,$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \psi_\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + z\left(2\theta_\phi - \frac{1}{R}\psi_\phi - \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+z^2\left(3\gamma_\phi - \frac{1}{R}\theta_\phi + \frac{1}{R^3}v + \frac{1}{R^2}\psi_\phi\right) + z^3\left(\frac{1}{R^2}\theta_\phi - \frac{1}{R}\gamma_\phi\right) + z^4\frac{1}{R}\gamma_\phi, \quad (6.50)$$

де $\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right);$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial \psi_x}{\partial \varphi}\right);$$

$$\frac{\partial \theta_\phi}{\partial x} = \frac{4R}{12R^2 - h^2}\left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial \theta_\phi}{\partial \varphi} = \frac{4R}{12R^2 - h^2}\left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right);$$

$$\frac{\partial \gamma_\phi}{\partial x} = -\frac{16R}{h^2(12R^2 - h^2)}\left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial \gamma_\phi}{\partial \varphi} = -\frac{16R}{h^2(12R^2 - h^2)}\left(\frac{\partial \psi_\phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right).$$

Для зручності подальших викладок вирази (6.50) подаємо у вигляді розкладів у ряди

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \sum_{i=0}^{3} z^i \varepsilon_{xx}^{(i)}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \sum_{i=0}^{4} z^i \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}, \qquad \varepsilon_{\theta\varphi} = \sum_{i=0}^{4} z^i \varepsilon_{x\varphi}^{(i)},$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \sum_{i=0}^{2} z^i \varepsilon_{xz}^{(i)}, \qquad \varepsilon_{\varphi z} = \sum_{i=0}^{4} z^i \varepsilon_{\varphi z}^{(i)}. \quad (6.51)$$

В рядах (6.51) вирази для $\varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}, \varepsilon_{x\varphi}^{(i)}, \varepsilon_{xz}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(i)}$ формуються з рівнянь (6.50).

Використаємо позначення (6.36) для компонент Q_{ij} и G_{ij} в законі Гука для функціонально-градуйованого матеріалу (6.28).

Після підстановки уявлень (6.50) і (6.51) в вираз для потенціальної енергії (6.49), отримуємо загальний вигляд потенціальної енергії циліндричної оболонки Π_{II} відносно п'яти невідомих функцій: $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$, $w(x,\varphi,t)$, $\psi_x(x,\varphi,t)$ та $\psi_\phi(x,\varphi,t)$. Інтегруючи (6.49) по z, отримуємо:

$$\Pi_{\text{II}}=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\sum_{i=0}^{8}\Pi_i\,(x,\varphi)dxd\varphi, \tag{6.52}$$

де $\Pi_0=\left(Q_{11}^{(0)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(1)}\right){\varepsilon_{xx}^{(0)}}^2+2\left(Q_{12}^{(0)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(1)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(0)}+\left(Q_{22}^{(0)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(1)}\right){\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}}^2+;$

$$+\left(G_{23}^{(0)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(1)}\right){\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}}^2+\left(G_{13}^{(0)}+\frac{1}{R}G_{13}^{(1)}\right){\varepsilon_{xz}^{(0)}}^2+\left(G_{12}^{(0)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(1)}\right){\varepsilon_{x\varphi}^{(0)}}^2;$$

$$\Pi_1=2\left(Q_{11}^{(1)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(2)}\right)\varepsilon_{xx}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(1)}+2\left(Q_{12}^{(1)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(2)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(0)}\right)+$$

$$+2\left(Q_{22}^{(1)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(2)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}+2\left(G_{23}^{(1)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(2)}\right)\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}+2\left(G_{13}^{(1)}+\frac{1}{R}G_{13}^{(2)}\right)\varepsilon_{xz}^{(0)}\varepsilon_{xz}^{(1)}+$$

$$+2\left(G_{12}^{(1)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(2)}\right)\varepsilon_{x\varphi}^{(0)}\varepsilon_{x\varphi}^{(1)};$$

$$\Pi_2=\left(Q_{11}^{(2)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(3)}\right)\left({\varepsilon_{xx}^{(1)}}^2+2\varepsilon_{xx}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(2)}\right)+2\left(Q_{12}^{(2)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(3)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(2)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(0)}\right)+$$

$$+\left(Q_{22}^{(2)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(3)}\right)\left({\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}}^2+2\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\right)+\left(G_{23}^{(2)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(3)}\right)\left({\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}}^2+2\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\right)+$$

$$+\left(G_{13}^{(2)}+\frac{1}{R}G_{13}^{(3)}\right)\left({\varepsilon_{xz}^{(1)}}^2+2\varepsilon_{xz}^{(0)}\varepsilon_{xz}^{(2)}\right)+\left(G_{12}^{(2)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(3)}\right)\left({\varepsilon_{x\varphi}^{(1)}}^2+2\varepsilon_{x\varphi}^{(0)}\varepsilon_{x\varphi}^{(2)}\right);$$

$$\Pi_3=2\left(Q_{11}^{(3)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{xx}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(2)}\right)+2\left(Q_{12}^{(3)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(4)}\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(2)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{xx}^{(0)}\right)+2\left(Q_{22}^{(3)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\right)+$$

$$+2\left(G_{23}^{(3)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\right)+2\left(G_{13}^{(3)}+\frac{1}{R_\varphi}G_{13}^{(4)}\right)\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{xz}^{(2)}+$$

$$+2\left(G_{12}^{(3)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{x\varphi}^{(0)}\varepsilon_{x\varphi}^{(3)}+\varepsilon_{x\varphi}^{(1)}\varepsilon_{x\varphi}^{(2)}\right);$$

$$\Pi_4=\left(Q_{11}^{(4)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(5)}\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(2)^2}+2\varepsilon_{xx}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(3)}\right)+2\left(Q_{12}^{(4)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(5)}\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(2)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}\varepsilon_{xx}^{(0)}\right)+\left(Q_{22}^{(4)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(5)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)^2}+2\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}+2\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\right)+$$

$$+\left(G_{23}^{(4)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(5)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(2)^2}+2\varepsilon_{\varphi z}^{(0)}\varepsilon_{\varphi z}^{(4)}+2\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}\right)+\left(G_{13}^{(4)}+\frac{1}{R}G_{13}^{(5)}\right)\varepsilon_{xz}^{(2)^2}+$$

$$+\left(G_{12}^{(4)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(5)}\right)\left(\varepsilon_{x\varphi}^{(2)^2}+2\varepsilon_{x\varphi}^{(0)}\varepsilon_{x\varphi}^{(4)}+2\varepsilon_{x\varphi}^{(1)}\varepsilon_{x\varphi}^{(3)}\right);$$

$$\Pi_5=2\left(Q_{11}^{(5)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(6)}\right)\varepsilon_{xx}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+2\left(Q_{12}^{(5)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(6)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{xx}^{(2)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}\varepsilon_{xx}^{(1)}\right)+$$

$$+2\left(Q_{22}^{(5)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(6)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\right)+2\left(G_{23}^{(5)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(6)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(1)}\varepsilon_{\varphi z}^{(4)}+\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}\right)+$$

$$+2\left(G_{12}^{(5)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(6)}\right)\left(\varepsilon_{x\varphi}^{(1)}\varepsilon_{x\varphi}^{(4)}+\varepsilon_{x\varphi}^{(2)}\varepsilon_{x\varphi}^{(3)}\right);$$

$$\Pi_6=\left(Q_{11}^{(6)}+\frac{1}{R}Q_{11}^{(7)}\right)\varepsilon_{xx}^{(3)^2}+2\left(Q_{12}^{(6)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(7)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}\varepsilon_{xx}^{(2)}\right)+$$

$$+\left(Q_{22}^{(6)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(7)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)^2}+2\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}\right)+\left(G_{23}^{(6)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(7)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi z}^{(3)^2}+2\varepsilon_{\varphi z}^{(2)}\varepsilon_{\varphi z}^{(4)}\right)+$$

$$+\left(G_{12}^{(6)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(7)}\right)\left(\varepsilon_{x\varphi}^{(3)^2}+2\varepsilon_{x\varphi}^{(2)}\varepsilon_{x\varphi}^{(4)}\right);$$

$$\Pi_7=2\left(Q_{12}^{(7)}+\frac{1}{R}Q_{12}^{(8)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}\varepsilon_{xx}^{(3)}+2\left(Q_{22}^{(7)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(8)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)}+2\left(G_{23}^{(7)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(8)}\right)\varepsilon_{\varphi z}^{(3)}\varepsilon_{\varphi z}^{(4)}+$$

$$+2\left(G_{12}^{(7)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(8)}\right)\varepsilon_{x\varphi}^{(3)}\varepsilon_{x\varphi}^{(4)};$$

$$\Pi_8=\left(Q_{22}^{(8)}+\frac{1}{R}Q_{22}^{(9)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(4)^2}+\left(G_{23}^{(8)}+\frac{1}{R}G_{23}^{(9)}\right)\varepsilon_{\varphi z}^{(4)^2}+\left(G_{12}^{(8)}+\frac{1}{R}G_{12}^{(9)}\right)\varepsilon_{x\varphi}^{(4)^2}.$$

Кінетичну енергію циліндричної оболонки подаємо в загальному вигляді так:

$$T_{II}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-0.5h}^{0.5h}\rho(z)\left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right)\cdot\left(1+\frac{z}{R}\right)R\,dz\,dx\,d\varphi. \quad (6.53)$$

Для скорочення форми запису позначимо $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u}$, $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv \dot{v}$, $\frac{\partial w}{\partial t} \equiv \dot{w}$, $\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \equiv \dot{\psi}_x$ и $\frac{\partial \psi_\phi}{\partial t} \equiv \dot{\psi}_\phi$.

Похідні функцій (6.48) матимуть такий вигляд:

$$\dot{\Omega}_x(x,\varphi,t) = 0,$$

$$\dot{\gamma}_x(x,\varphi,t) = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \dot{\psi}_x(x,\varphi,t)\right),$$

$$\dot{\Omega}_\phi(x,\varphi,t) = \frac{4}{12R^2 - h^2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} + R\cdot\dot{\psi}_\phi(x,\varphi,t)\right),$$

$$\dot{\gamma}_\phi(x,\varphi,t) = -16\frac{R}{h^2(12R^2 - h^2)}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} + R\cdot\dot{\psi}_\phi(x,\varphi,t)\right). \qquad (6.54)$$

Використаємо вирази (6.45) для потенціальної енергії (6.53). Після перетворень з урахуванням рівнянь (6.54), отримаємо

$$T_{II} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 +$$

$$+z\left(2\dot{u}\dot{\psi}_x + \frac{1}{R}\dot{u}^2 + 3\frac{1}{R}\dot{v}^2 + \frac{1}{R}\dot{w}^2 + 2\dot{v}\dot{\psi}_\phi\right) +$$

$$+z^2\left(\dot{\psi}_x^{\ 2} + 2\frac{1}{R}\dot{u}\dot{\psi}_x + \dot{\psi}_\phi^{\ 2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\psi}_\phi + 2\dot{v}\dot{\theta}_\phi + 3\frac{1}{R^2}\dot{v}^2\right) +$$

$$+z^3\left(2\dot{\gamma}_x\dot{u} + \frac{1}{R}\dot{\psi}_x^{\ 2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\theta}_\phi +\right.$$

$$\left. 2\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\theta}_\phi + \frac{1}{R^3}\dot{v}^2 + \frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi^{\ 2} + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\psi}_\phi\right) +$$

$$+z^4\left(\dot{\theta}_x^{\ 2} + 2\dot{\gamma}_x\dot{\psi}_x + 2\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x\dot{u} + \dot{\theta}_\phi^{\ 2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\theta}_\phi + 2\frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi\dot{\theta}_\phi\right) +$$

$$+z^5\left(2\dot{\theta}_x\dot{\gamma}_x + 2\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x\dot{\psi}_x + 2\dot{\theta}_\phi\dot{\gamma}_\phi + \frac{1}{R}\dot{\theta}_\phi^{\ 2} + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) +$$

$$+z^6\left(\dot{\gamma}_x^{\ 2} + \dot{\gamma}_\phi^{\ 2} + 2\frac{1}{R}\dot{\theta}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) + z^7\left(\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x^{\ 2} + \frac{1}{R}\dot{\gamma}_\phi^{\ 2}\right)\Big)R\,dz\,dx\,d\varphi. \qquad (6.55)$$

Для інтегрування виразу для кінетичної енергії (6.55) по товщині оболонки використаємо позначення

$$r_k = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^k \rho(z) dz, \qquad k = 0..7. \tag{6.56}$$

Застосуємо (6.56) у (6.55), інтегруємо по товщині, отримуємо вираз для кінетичної енергії циліндричної оболонки у вигляді подвійного інтеграла, який містить п'ять невідомих функцій $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$, $w(x,\varphi,t)$, $\psi_x(x,\varphi,t)$ і $\psi_\phi(x,\varphi,t)$:

$$\begin{aligned} T_{II} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} & r_0(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + r_1\left(2\dot{u}\dot{\psi}_x + \frac{1}{R}\dot{u}^2 + 3\frac{1}{R}\dot{v}^2 + \frac{1}{R}\dot{w}^2 + 2\dot{v}\dot{\psi}_\phi\right) + \\ & + r_2\left(\dot{\psi}_x^{\,2} + 2\frac{1}{R}\dot{u}\dot{\psi}_x + \dot{\psi}_\phi^{\,2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\psi}_\phi + 2\dot{v}\dot{\theta}_\phi + 3\frac{1}{R^2}\dot{v}^2\right) + \\ & + r_3\left(2\dot{\gamma}_x\dot{u} + \frac{1}{R}\dot{\psi}_x^{\,2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\theta}_\phi + 2\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\theta}_\phi + \frac{1}{R^3}\dot{v}^2 + \frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi^{\,2} + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\psi}_\phi\right) + \\ & + r_4\left(\dot{\theta}_x^{\,2} + 2\dot{\gamma}_x\dot{\psi}_x + 2\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x\dot{u} + \dot{\theta}_\phi^{\,2} + 4\frac{1}{R}\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\theta}_\phi + 2\frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi\dot{\theta}_\phi\right) + \\ & + r_5\left(2\dot{\theta}_x\dot{\gamma}_x + +2\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x\dot{\psi}_x + 2\dot{\theta}_\phi\dot{\gamma}_\phi + \frac{1}{R}\dot{\theta}_\phi^{\,2} + 2\frac{1}{R^2}\dot{v}\dot{\gamma}_\phi + 2\frac{1}{R}\dot{\psi}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) + \\ & + r_6\left(\dot{\gamma}_x^{\,2} + \dot{\gamma}_\phi^{\,2} + 2\frac{1}{R}\dot{\theta}_\phi\dot{\gamma}_\phi\right) + r_7\left(\frac{1}{R}\dot{\gamma}_x^{\,2} + \frac{1}{R}\dot{\gamma}_\phi^{\,2}\right)\Big) R\,dx\,d\varphi. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Для п'яти невідомих функцій умови нерозривного з'єднання частин I і II мають вигляд

$$\begin{aligned} & u_I(\pi/2,\varphi,t) = u_{II}(0,\varphi,t), \\ & \psi_{\theta_I}(\pi/2,\varphi,t) = \psi_{x_{II}}(0,\varphi,t), \\ & v_I(\pi/2,\varphi,t) = v_{II}(0,\varphi,t), \end{aligned} \tag{6.58}$$

$\psi_{\phi_I}(\pi/2, \varphi, t) = \psi_{\phi_{II}}(0, \varphi, t),$

$w_I(\pi/2, \varphi, t) = w_{II}(0, \varphi, t),$

а для частин II і III мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&u_{II}(L, \varphi, t) = -\, u_{III}(\pi/2, -\varphi, t),\\
&\psi_{x_{II}}(L, \varphi, t) = -\, \psi_{\theta_{III}}(\pi/2, -\varphi, t),\\
&v_{II}(L, \varphi, t) = -\, v_{III}(\pi/2, -\varphi, t),\\
&\psi_{\phi_{II}}(L, \varphi, t) = -\psi_{\phi_{III}}(\pi/2, -\varphi, t),\\
&w_{II}(L, \varphi, t) = w_{III}(\pi/2, -\varphi, t).
\end{aligned}
\tag{6.59}
$$

З отриманих виразів для кінетичних та потенціальних енергій кожної складової частини (6.43), (6.44) та (6.52), (6.57) отримуємо вираз для кінетичної та потенціальної енергій складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки, що моделює корпус твердопаливного двигуна ракети.

Кінетична енергія складеної оболонки формується з суми енергій кожної з її частин

$$
\mathrm{T} = \mathrm{T_I}\,\left(u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}, w_{\mathrm{I}}, \psi_{\theta_{\mathrm{I}}}, \psi_{\phi_{\mathrm{I}}}\right) + \mathrm{T_{II}}\,\left(u_{\mathrm{II}}, v_{\mathrm{II}}, w_{\mathrm{II}}, \psi_{\theta_{\mathrm{II}}}, \psi_{\phi_{\mathrm{II}}}\right) +
$$

$$
+\mathrm{T_{III}}\,\left(u_{\mathrm{III}}, v_{\mathrm{III}}, w_{\mathrm{III}}, \psi_{\phi_{\mathrm{III}}}, \psi_{\theta_{\mathrm{III}}}\right). \tag{6.60}
$$

Потенціальна енергія складеної оболонки включає суму енергій кожної з її частин, а також доповнюється доданками потенціальної енергії нероз'ємного з'єднання лівої та правої кришок з центральною частиною

$$
\Pi = \Pi_{\mathrm{I}}\,\left(u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}, w_{\mathrm{I}}, \psi_{\theta_{\mathrm{I}}}, \psi_{\phi_{\mathrm{I}}}\right) + \Pi_{\mathrm{II}}\,\left(u_{\mathrm{II}}, v_{\mathrm{II}}, w_{\mathrm{II}}, \psi_{\theta_{\mathrm{II}}}, \psi_{\phi_{\mathrm{II}}}\right) +
$$

$$
+\Pi_{\mathrm{III}}\,\left(u_{\mathrm{III}}, v_{\mathrm{III}}, w_{\mathrm{III}}, \psi_{\phi_{\mathrm{III}}}, \psi_{\theta_{\mathrm{III}}}\right) + \mathbf{U}_{LC} + \mathbf{U}_{RC}\,, \tag{6.61}
$$

де $\mathbf{U}_{LC}$- енергія з'єднання лівої кришки з центральною частиною;

$\mathbf{U}_{RC}$.- енергія з'єднання правої кришки з центральною частиною.

Для визначення енергії з'єднання кожної з кришок з центральною частиною скористаємося методом штучних пружин [360. 361]. Тоді енергія з'єднання лівої кришки з центральною частиною буде такою:

$$\mathbf{U}_{LC} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(k_1\left(u_I\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_{II}(0)\right)^2 + k_2\left(v_I\left(\frac{\pi}{2}\right) - v_{II}(0)\right)^2 + k_3\left(w_I\left(\frac{\pi}{2}\right) - w_{II}(0)\right)^2 + \right.$$
$$\left. + k_4\left(\psi_{\theta_I}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi_{x_{II}}(0)\right)^2 + k_5\left(\psi_{\varphi_I}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi_{\varphi_{II}}(0)\right)^2\right) R d\varphi, \qquad (6.62)$$

а енергія з'єднання правої кришки з центральною частиною має вигляд:

$$\mathbf{U}_{RC} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(k_6\left(u_{III}\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_{II}(L)\right)^2 + k_7\left(v_{III}\left(\frac{\pi}{2}\right) - v_{II}(L)\right)^2 + k_8\left(w_{III}\left(\frac{\pi}{2}\right) - w_{II}(L)\right)^2 + \right.$$
$$\left. + k_9\left(\psi_{\theta_{III}}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi_{x_{II}}(L)\right)^2 + k_{10}\left(\psi_{\varphi_{III}}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi_{\varphi_{II}}(L)\right)^2\right) R d\varphi, \qquad (6.63)$$

де $k_1, \ldots, k_{10}$ – штучні жорсткості пружин.

Складена конструкція на усічених краях напівсферичних днищ – затиснена. Для п'яти невідомих функцій граничні умови виглядають так:

– для лівого днища

$$\begin{aligned} u_I(\pi/2 - \theta_1, \varphi, t) &= 0, \\ \psi_{\theta_I}(\pi/2 - \theta_1), \varphi, t) &= 0, \\ v_I(\pi/2 - \theta_1), \varphi, t) &= 0, \\ \psi_{\phi_I}(\pi/2 - \theta_1), \varphi, t) &= 0, \\ w_I(\pi/2 - \theta_1), \varphi, t) &= 0, \end{aligned} \qquad (6.64)$$

– для правого днища

$$
\begin{aligned}
u_{III}(\pi/2-\theta_2,-\varphi,t)&=0,\\
\psi_{\theta_{III}}(\pi/2-\theta_2,-\varphi,t)&=0,\\
v_{III}(\pi/2-\theta_2,-\varphi,t)&=0,\\
\psi_{\phi_{III}}(\pi/2-\theta_2,-\varphi,t)&=0,\\
w_{III}(\pi/2-\theta_2,-\varphi,t)&=0.
\end{aligned}
\tag{6.65}
$$

Отримані вирази для кінетичної (6.60) і потенціальної (6.61) енергій, доповнені граничними умовами (6.64) та (6.65), використано для отримання рівнянь руху конструкції.

6.3.3 Метод числового аналізу деформування конструкції. Для отримання рівнянь руху конструкції використано метод заданих форм [213, 329], який ґрунтується на застосуванні рівнянь Лагранжа. Для отримання власних форм і частот коливань використано метод Релея-Рітца [213, 329].

Для зручності подальшого викладення, введемо кусочну координату s уздовж твірної складеної оболонки (рис. 6.10):

$$
s=\begin{cases}
-R\cdot\theta_I, & \pi/2-\theta_1\le\theta_I<\pi/2,\\
x & 0\le x\le L,\\
L+R\cdot(\pi/2-\theta_{III}), & \pi/2-\theta_2\le\theta_{III}<\pi/2,
\end{cases}
\tag{6.66}
$$

де θ_I – поздовжня координата лівої кришки;

θ_{III} – поздовжня координата правої кришки.

Початком відліку координати s обираємо точку $x=0$. Позитивний напрямок координати s відповідає позитивному напрямку координати x.

Загальну кутову координату ϕ подаємо так:

$$\phi = \begin{cases} \varphi, & \text{для } \pi/2 - \theta_1 \le \theta_I < \pi/2, \\ \varphi & \text{для } \quad 0 \le x \le L, \\ -\varphi, & \text{для } \pi/2 - \theta_2 \le \theta_{III} < \pi/2. \end{cases} \tag{6.67}$$

Застосуємо метод Релея-Рітца для розрахунку власних частот і форм коливань. Шуканими є п'ять функцій, що описують переміщення і кути повороту нормалі. Подаємо їх у наступному вигляді

$$\begin{bmatrix} u(s,\phi,t) \\ v(s,\phi,t) \\ w(s,\phi,t) \\ \psi_s(s,\phi,t) \\ \psi_\varphi(s,\phi,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(s)\cos(n\phi) \\ V_n(s)\sin(n\phi) \\ W_n(s)\cos(n\phi) \\ S_n(s)\cos(n\phi) \\ \Phi_n(s)\sin(n\phi) \end{bmatrix} \cos(\omega t), \tag{6.68}$$

де ω – частота власних коливань конструкції;

n – число хвиль в окружному напрямку.

Функції $U_n(s)$, $V_n(s)$, $W_n(s)$, $S_n(s)$, $\Phi_n(s)$ повинні задовольняти граничним умовам (6.64) і (6.65). Для цього виберемо базисні функції

$\sin\left(\dfrac{i\pi s}{\theta_1 R + L + \theta_2 R}\right)$, де $i = \overline{1, N}$.

Тоді їх розкладання по базисних функціях можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} U_n(s) \\ V_n(s) \\ W_n(s) \\ S_n(s) \\ \Phi_n(s) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} A_i \\ A_{N+i} \\ A_{2N+i} \\ A_{3N+i} \\ A_{4N+i} \end{bmatrix} \sin\left(\frac{i\pi s}{\theta_1 R + L + \theta_2 R}\right), \tag{6.69}$$

де $[A_1, \dots, A_{5N}]$ – невідомі параметри, які розраховуються в результаті застосування методу Релея-Рітца.

Для випадку, коли число хвиль в окружному напрямку $n = 0$, розкладання (6.68) з урахуванням (6.69) замінюємо на таке:

$$\begin{bmatrix} u(s,\phi,t) \\ v(s,\phi,t) \\ w(s,\phi,t) \\ \psi_s(s,\phi,t) \\ \psi_\varphi(s,\phi,t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} A_i \\ A_{N+i} \\ A_{2N+i} \\ A_{3N+i} \\ A_{4N+i} \end{bmatrix} \sin\left(\frac{i\pi s}{\theta_1 R + L + \theta_2 R}\right) \cos(\omega t), \quad \forall \phi \in [0; 2\pi). \quad (6.70)$$

Зауважимо, що розкладання (6.70) п'яти невідомих функцій, що описують переміщення і кути повороту нормалі, по базисних функціях для кусочної координати s, заданої у вигляді (6.66), дозволяє автоматично задовольнити умовам (6.62), (6.63). Дотримуючись методу Релея-Рітца [213, 329] приходимо до проблеми власних значень, з якої знаходяться власні частоти і форми вільних коливань складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки.

Оболонка всередині навантажена осьосиметричним і рівномірно розподіленим імпульсним тиском [213, 329]. Приймаємо, що імпульсний тиск для кожної точки серединної поверхні оболонки – однаковий $P(s,\phi,t) \equiv P(t)$; для кожної точки серединної поверхні оболонки тиск направлено вздовж зовнішній нормалі.

Поведінка тиску в часі якісно ділиться на три частини. Зростання тиску від нуля до максимального значення P_{max} за синусоїдальним законом спостерігається на першій частині часового інтервалу. На другому часовому інтервалі внутрішній тиск тримається на рівні P_{max}. Зниження тиску за експоненціальним законом спостерігається на третьому часовому інтервалі. Таким чином, залежність внутрішнього тиску від часу має такий вигляд:

$$P(t) = \begin{cases} P_{max}\sin(\pi t/2t_{max}), & t < t_{max}, \\ P_{max}, & t_{max} \le t < t_{damp}, \\ P_{max}e^{-t/\mathbf{\theta}}, & t \ge t_{damp}, \end{cases} \quad (6.71)$$

де t_{max} – час досягнення тиском свого максимального значення;

t_{damp}– час початку спадання тиску;

θ – коефіцієнт загасання тиску.

На рис. 6.13 подано загальний вигляд зміни в часі внутрішнього тиску $P(t)$ для довільного P_{max}. Приймалися розрахункові значення t_{max}= 1 мс і t_{damp}= 2 мс. Коефіцієнт загасання тиску дорівнював 0,2 t_{max}, а тривалість навантаження – 3 мс.

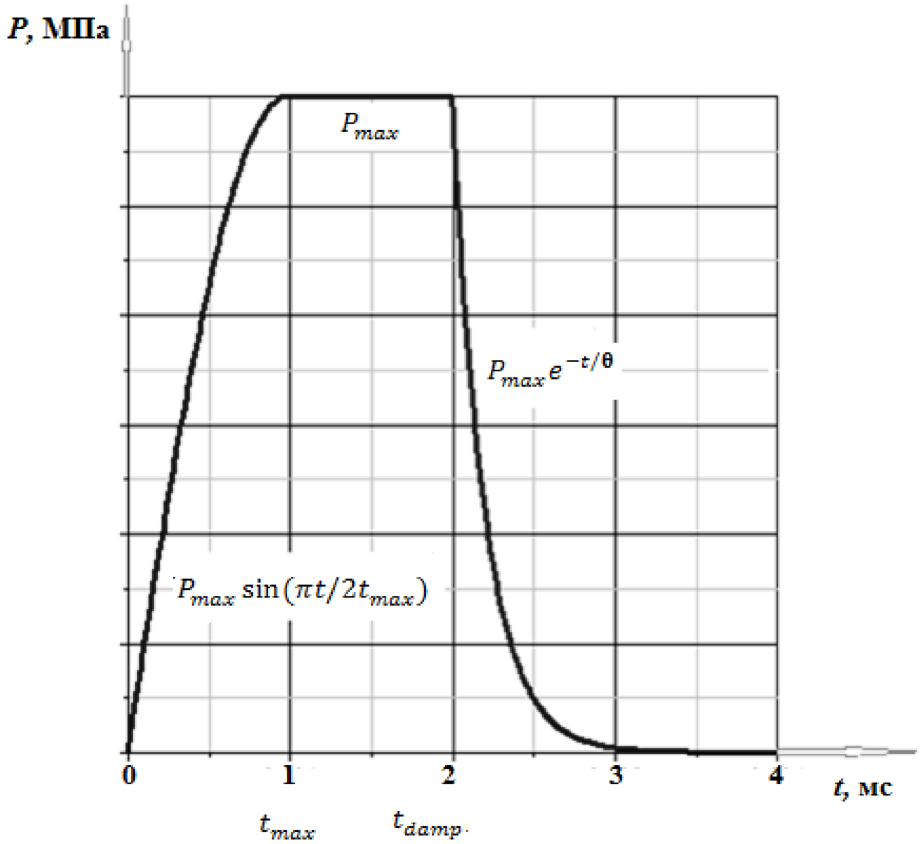


Рис. 6.13. Зміна в часі внутрішнього тиску

Розглянемо віртуальну роботу від дії тиску (6.71), що спрямований по зовнішній нормалі до поверхні оболонки. Повна віртуальна робота складеної оболонки формується з суми для кожної з її частин. Тоді віртуальна робота δA цього тиску (6.71) набуває такого вигляду:

$$\delta A = P(t)\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_{\theta_1}^{\pi/2}\delta w_{\mathrm{I}}R\sin\theta_I\,d\theta_I + \int_0^{L}\delta w_{\mathrm{II}}dx - \int_{\theta_2}^{\pi/2}\delta w_{\mathrm{III}}R\sin\theta_{III}\,d\theta_{III}\right)Rd\varphi\,, \quad (6.72)$$

де $\delta w_{\text{I}} = \delta w_{\text{I}}(\theta_I, \varphi, t) -$ варіація нормальної компоненти вектору переміщень лівої кришки складеної оболонки;

$\delta w_{\text{II}} = \delta w_{\text{II}}(x, \varphi, t) -$ варіація нормальної компоненти вектору переміщень центральної частини складений оболонки;

$\delta w_{\text{III}} = \delta w_{\text{III}}(\theta_{III}, -\varphi, t) -$ варіація нормальної компоненти вектору переміщень правої кришки складеної оболонки.

Рух конструкції під впливом навантаження (6.72) розкладаємо в ряд за власними формами коливань. Власні частоти ω_i і форми вільних коливань визначаються з проблеми власних значень. Звернемо увагу на те, що навантаження конструкції є осьосиметричним, а віртуальна робота δA не залежить від окружної координати. Тому, для розкладів п'яти невідомих функцій в ряди за власними формами коливань скористаємося тільки тими формами коливань, у яких число хвиль в окружному напрямку дорівнює нулю. Отримаємо вирази

$$u = \sum_{j=1}^{N_*} q_j(t) U_n{}^{(j)}(s)\,, \forall\phi \in [0; 2\pi),$$

$$v = \sum_{j=1}^{N_*} q_{j+N_*}(t) V_n{}^{(j)}(s)\,, \forall\phi \in [0; 2\pi),$$

$$w = \sum_{j=1}^{N_*} q_{j+2N_*}(t) W_n{}^{(j)}(s)\,, \forall\phi \in [0; 2\pi),$$

$$\psi_s = \sum_{j=1}^{N_*} q_{j+3N_*}(t) S_n{}^{(j)}(s)\,, \forall\phi \in [0; 2\pi),$$

$$\psi_\varphi = \sum_{j=1}^{N_*} q_{j+4N_*}(t) \Phi_n{}^{(j)}(s)\,, \forall\phi \in [0; 2\pi), \qquad (6.73)$$

де $\boldsymbol{q} = \{q_1, \dots, q_{5N_*}\}$ – вектор узагальнених координат, який описує рух конструкції.

Розкладання (6.73) застосуємо для кінетичної енергії (6.60) та потенціальної енергії (6.61) конструкції. Зробимо необхідне інтегрування. Кінетична енергія буде мати вигляд квадратичної форми узагальнених швидкостей

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}\left(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{5N_*}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{5\mathrm{N}_*} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

а потенціальна енергія – вигляд квадратичної форми узагальнених координат

$$\Pi = \Pi\left(q_1, \dots, q_{5N_*}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{5\mathrm{N}_*} \mathrm{c}_{ij} q_i q_j,$$

де $\mathbf{M} = \left\{m_{ij}\right\}_{i=\overline{1,5N_*}}^{j=\overline{1,5N_*}}$ – матриця мас;

$\mathbf{C} = \left\{c_{ij}\right\}_{i=\overline{1,5N_*}}^{j=\overline{1,5N_*}}$ – матриця жорсткості.

Тоді рівняння Лагранжа відносно узагальнених координат конструкції прийме такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{5N_*} \left(m_{ij} \ddot{q}_j + \mathrm{c}_{ij} q_j\right) = Q_i, \qquad i = \overline{1,5N_*}, \tag{6.74}$$

де $\mathbf{Q} = \left\{Q_1, \dots, Q_{5N_*}\right\}$ – вектор узагальнених сил, відповідних віртуальній роботі (6.72).

Ці узагальнені сили обчислюються так:

$$\begin{aligned} &Q_i = 0, && \text{при } i = \overline{1,2N_*}, i = \overline{1+3N_*,5N_*}, \\ &Q_i = P(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_n{}^{(i)}(s), \quad \forall \phi \in [0; 2\pi), && \text{при } i = \overline{1+2N_*,3N_*}, \end{aligned} \tag{6.75}$$

де **S –** площа внутрішньої поверхні конструкції.

Звичайні диференціальні рівняння руху складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки (6.74) з урахуванням виду узагальнених сил (6.75) розв’язуються шляхом числового інтегрування.

6.3.4 Числовий аналіз нестаціонарного деформування складених сферично-циліндрично-сферичних оболонок з функціонально-градуйованих композитних матеріалів. Проведено числові дослідження деформування складених сферично-циліндрично-сферичних оболонок, що виготовлені з основних типів функціонально-градуйованих композитів "UD", "FG-V", "FG-**Λ**", "FG-X" та "FG-O" [352].

Досліджувалася конструкція (рис. 6.10) з геометричними параметрами: L=2,6 м, h=0,006 м, R=0,45 м, $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = \pi/4$.

Для розрахунку навантаження (6.71) приймалися значення максимального тиску від $P_{\max} = 5 \cdot 10^5$ Па до $P_{\max} = 12 \cdot 10^5$ Па.

Механічні характеристики композитного матеріалу приймалися такими:
E_{11}^{CNT}=5,6466 ТПа; E_{22}^{CNT}=7,08 ТПа; G_{12}^{CNT}=1,9445 ТПа;
μ_{12}^{CNT}=0,175; ρ^{CNT}=1400 кг/м^3; $V_{CNT}^{*} = 0{,}28$;
E^{m}=2,5 ГПа ; μ^{m}=0,34; ρ^{m}=1150 кг/м^3 [352].

Для дослідження достовірності результатів розрахунків за розробленою моделлю було застосовано тривимірну скінченно-елементну модель конструкції з матеріалу типу "UD". Скінченно-елементна модель реалізована в програмному комплексі ANSYS. Тривимірні розрахунки проводилися для випадку розподілу нанотрубок в окружному напрямку оболонки для матеріалу типу «UD». Для інших типів матеріалу застосування тривимірних моделей майже неможливе. Труднощі пов’язані з дуже великими лінійними розмірами конструкції при малій товщині. Для дискретизації функціонально-градуйованих механічних властивостей матеріалу потрібна велика кількість скінченних елементів. Це призводить до матричної задачі дуже великої розмірності. Для матеріалу типу «UD» механічні характеристики розраховувалися за методикою, що викладена в роботах [355, 357], та приймалися такими:

E_{11}=E_{33}=5.51 ТПа; E_{22}^{CNT}=224,73 ТПа; $G_{12} = G_{13}$=G_{23} = 1,44 ТПа;

$\mu_{12} = \mu_{13}$=μ_{23}=0,175;, ρ=1220 кг/м^3.

Проводилось порівняння власних частот, у яких число хвиль в окружному напрямку дорівнює нулю $\omega_N^{(0)}$. Отримано якісний збіг результатів за двома методами числового аналізу. На рис. 6.14 показана перша безвузлова по окружній координаті форма коливань складеної оболонки, що отримана в ANSYS. А на рис. 6.15 зподана проекція першої безвузлової по окружній координаті форми коливань, що отримана в системі комп'ютерної математики Maple.

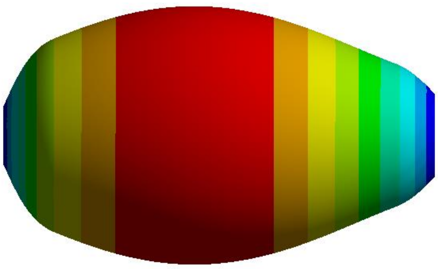


Рис. 6.14. Перша безвузлова по окружній координаті форма коливань (ANSYS)

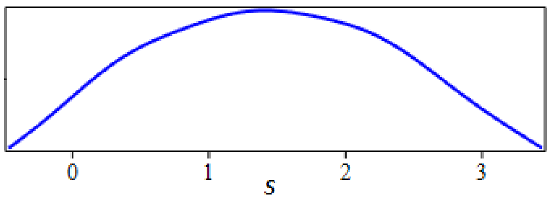


Рис. 6.15. Проекція першої безвузлової по окружній координаті форми коливань (Maple)

Частота, що відповідає першій безвузловій по окружній координаті формі коливань, яка отримана в ANSYS, дорівнює 137,27 Гц, а розрахована в Maple за поданим методом дорівнює 137,74 Гц. Відносна похибка розрахунків становить 0,34%. Відзначимо, що отримана перша безвузлова форма коливань $\omega_1^{(0)}$ є 21 формою власних коливань складеної оболонки ω_{21}. Частота другої безвузлової по окружній координаті форми коливань, що отримана в ANSYS, дорівнює 283,21 Гц, а розрахована в Maple за поданим методом дорівнює 297,31 Гц. Відносна похибка розрахунків становить 4,7%. Вона є 72 формою власних коливань. Для більш високих форм коливань також зберігається якісна і кількісна відповідність результатів розрахунку. Наприклад, третя безвузлова по окружній координаті форма коливань є 130 формою коливань конструкції з частотою 476,16 Гц. Відносна похибка обчислень за запропонованою моделлю не перевищує 5% в порівнянні з тривимірним розрахунком.

Досліджувалися власні частоти складеної оболонки для п'яти основних типів функціонально-градуйованих матеріалів. Результати цих досліджень для перших десяти частот наведено в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Безвузлові по окружній координаті власні частоти складеної оболонки

N	Безвузлові по окружній координаті власні частоти $\omega_N^{(0)}$, Гц				
	"UD"	"FG-V"	"FG-O"	"FG-Λ"	"FG-X"
1	137.74	141.67	141.51	141.34	141.51
2	297.31	305.81	305.45	305.09	305.45
3	476.16	489.76	489.18	488.61	489.18
4	670.37	689.52	688.71	687.90	688.71
5	763.71	785.20	784.73	786.20	786.47
6	774.45	796.44	793.22	798.01	800.59
7	794.91	817.64	809.81	820.05	826.82
8	824.24	847.51	832.42	851.18	865.68
9	866.48	891.23	882.38	889.14	890.19
10	879.05	903.30	890.19	907.76	929.66

Аналіз результатів показує, що різниця між безвузловими по окружній координаті власними частотами – мала. Різниця між першими безвузловими по окружній координаті власними частотами для різних типів функціонально-градуйованих матеріалів не перевищує 3 %, а між десятьма – в межах 5 %. При цьому найнижчі частоти спостерігаються для композитного матеріалу типу "UD". Для частот від першої до четвертої найбільші значення мають частоти для матеріалу типу "FG-V", а для частот від п’ятої до десятої найбільші значення мають частоти для матеріалу типу "FG-X".

На рис. 6.16 подано графіки безвузлових по окружній координаті власних частот $\omega_1^{(0)}$ в залежності від їхнього номеру N. В загальній нумерації безвузлові по окружній координаті власні частоти з номерами N більше четвертого мають номери n > 200.

Оскільки найнижчі частоти спостерігаються для композитного матеріалу типу "UD", то далі показані результати числових досліджень нестаціонарного деформування конструкції саме для цього типу композитного матеріалу.

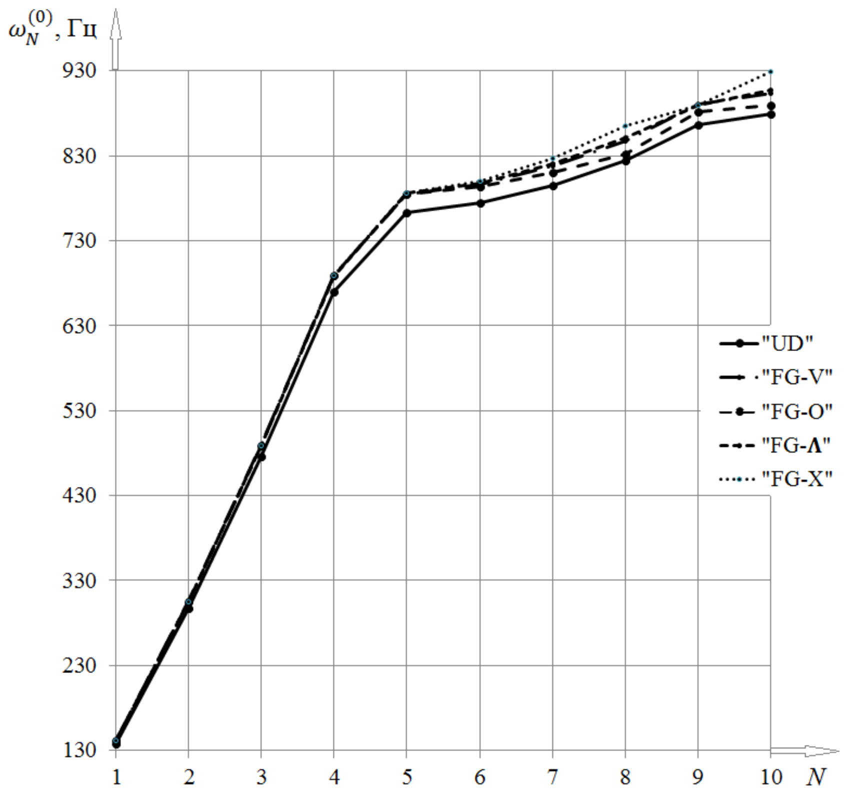


Рис. 6.16. Безвузлові по окружній координаті власні частоти

Для типу композитного матеріалу "UD" проводилося дослідження максимальних переміщень $\boldsymbol{U}(u_s, u_\phi, u_z)$, що зазнає конструкція протягом деформування за перші 3 мс з моменту дії імпульсного навантаження.

Достовірність результатів, отриманих за числовим моделюванням в Maple за розробленою моделлю, перевірялась порівнянням з результатами розрахунків, отриманими за тривимірними скінченно-елементними моделями в ANSYS. Конструкція навантажувалася нестаціонарним тиском (6.71) з P_{max} від $5\ 10^5$ Па до $12\ 10^5$ Па. Отримано, що переміщення сягають свого максимального значення уздовж окружної координати $0 \leq \varphi < 2\pi$ при $s = 1{,}43$ м. Результати розрахунків для точки з координатами $(s, \varphi) = (1{,}43;\ \pi/6)$ подано в табл. 6.4. Значення максимального тиску наведені в першій колонці табл. 6.4. Значення переміщень, що отримані за розробленою моделлю, наведені у другій колонці табл. 6.4. Результати розрахунків за методом скінченних елементів приведено в третьому стовпці, а відносна похибка δ/R результатів показана в четвертому стовпці.

Таблиця 6.4

Максимальні переміщення в точці серединної поверхні складеної оболонки з координатами $(s, \varphi) = (1.43,\ \pi/6)$

$P_{max} \cdot 10^{-5}$, Па	Переміщення, мм		
	Maple	ANSYS	Відносна похибка δ/R, %
5	3,4	3,1	0,7
8	6,0	4,9	2,5
10	7,5	6,1	3,0
12	7,8	7,4	1,0

Порівняльний аналіз отриманих результатів показав, що відносна похибка δ/R розрахунків за розробленою моделлю не перевищує 3% в порівнянні з тривимірним скінченно-елементним розрахунком.

На рис. 6.17 показані переміщення, що отримані в ANSYS, для випадку $P = 5 \cdot 10^5$ Па. Максимальні переміщення сягають свого значення 3,07 мм практично у всій центральній циліндричній частині складеної оболонки. Вздовж напівсферичних оболонок до затиснених країв вони спадають з максимальних значень до нульових.

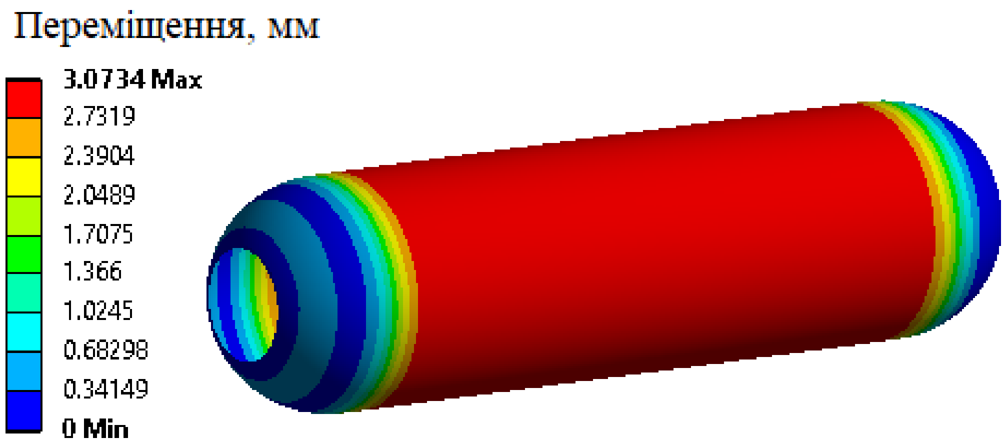


Рис. 6.17. Переміщення при P_{max}= 5·10^5 Па (ANSYS)

На рис. 6.18 показані динамічні переміщення в серединній поверхні складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки, що отримані за розробленою моделлю для випадку P_{max}= 5·10^5 Па. Показано зміну в часі переміщень $\boldsymbol{U}(u_s, u_\phi, u_z)$ в перші 3 мс процесу деформування для точки серединної поверхні $(s, \varphi) = (1{,}43;\ \pi/6)$. Переміщення зростають з моменту початку процесу навантаження конструкції t =0 мс від нульового значення до максимального значення $\boldsymbol{U}_{max}$ = 3,36 мм, яке досягається в момент часу t =2,3 мс. Далі, разом зі зменшенням внутрішнього тиску, відбувається і зниження переміщень.

Динамічні переміщення серединної поверхні складеної сферично-циліндрично-сферичної оболонки розраховувалися і для типів функціонально-градуйованих композитних матеріалів "FG-V", "FG-**Λ**", "FG-X" та "FG-O". Аналіз отриманих даних показав, що результати дуже близькі. Наприклад, максимальні переміщення для матеріалу типу "FG-X" всього на 0,15 мм відрізняються від максимальних переміщень для матеріалу типу "UD".

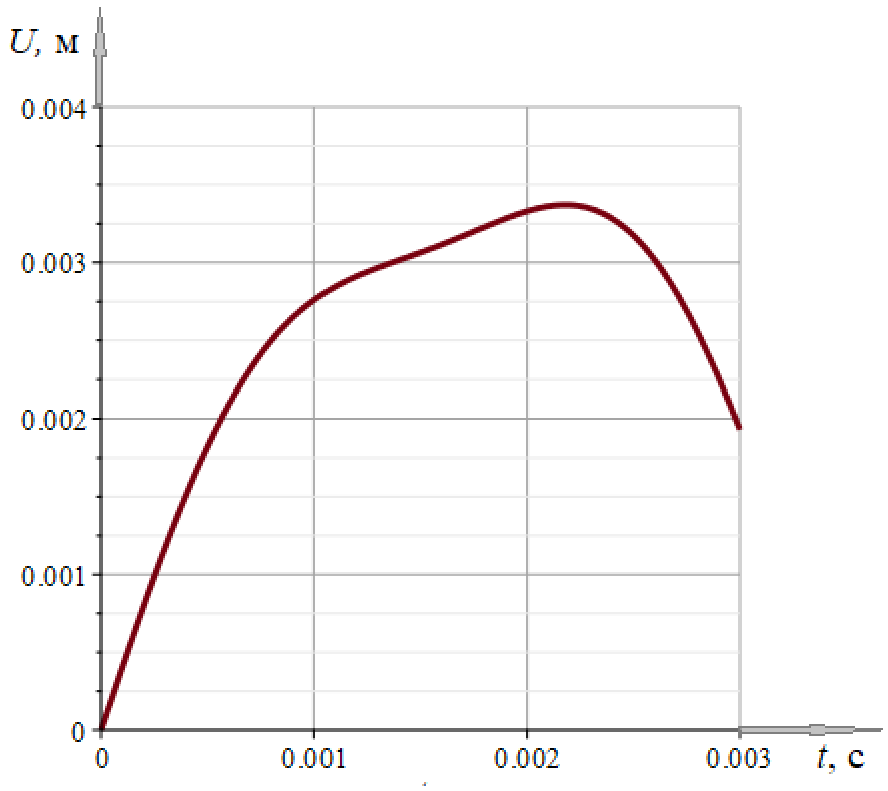


Рис. 6.18. Зміна в часі переміщень $\boldsymbol{U}(u_s, u_\phi, u_z)$ при P_{max}= 5·10^5 Па:

На рис 6.19 показана форма серединної поверхні конструкції в момент часу t =2,3 мс. Отримана форма якісно співпадає з отриманою в ANSYS.

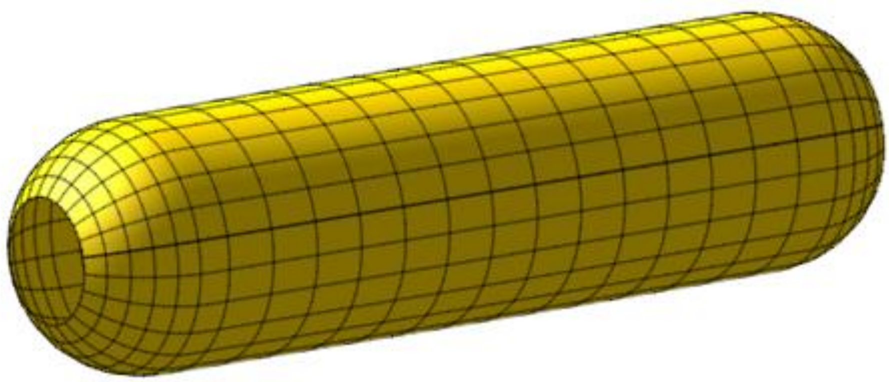


Рис. 6.19. Форма серединної поверхні
в момент часу t = 2,3 мс при P_{max}= 5·10^5 Па

Таким чином, результати розрахунків, що отримані за розробленою моделлю та за методом скінченних елементів, якісно та кількісно співпадають.

Порівняльний аналіз результатів дозволяє зробити висновок про те, що запропонований метод досліджень нестаціонарного деформування корпусів з функціонально-градуйованих композитних матеріалів дає достовірні результати числового моделювання. Всі значення, що отримані при використанні розробленої моделі, є мажорантними по відношенню до результатів розрахунку за методом скінченних елементів. Цей факт є важливим при оцінюванні впливу імпульсного навантаження на конструкцію.

6.4 Висновки за розділом 6

У цьому розділі подано аналітично-числовий метод аналізу нестаціонарного деформування корпусу твердопаливного двигуна з композитного матеріалу під дією імпульсних навантажень, що описують робочі процеси в двигуні при старті ракети.

Аналіз конструктивно-компоновочної схеми корпусу показав, що конструкція має велику площу відносно об’єму матеріалу. Тому вона моделюється складеною сферично-циліндрично-сферичною оболонкою обертання.

Розглядаються композитні матеріали, механічні властивості яких можна описати ортотропними чи функціонально-градуйованими моделями. Для цього застосовано теорію типу Тимошенка-Рейсснера чи теорію Редді високого порядку, відповідно.

Для ортотропного матеріалу на основі рівнянь руху, що враховують зсув та інерцію обертання, розроблено математичну модель динаміки корпусу двигуна під дією внутрішнього імпульсного тиску, який описує навантаження двигуна при старті ракети. Для дослідження динаміки конструкції розроблено аналітично-числовий метод. Запропоновано методику, що основана на поєднанні числових методів скінченних різниць і розкладання у ряди Фур’є. Розроблено алгоритм числового дослідження та програмне забезпечення для аналізу нестаціонарного деформування конструкції.

Проведено числовий аналіз працездатності корпусу твердопаливного двигуна ракети для типової конструкції, що надана ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля». Результатом аналізу динаміки конструкції є залежності вектору переміщень і компонент тензора напружень від часу. Встановлено, що отримані в перші 10 мс параметри напружено-деформованого стану є максимальними и можуть бути використані для оцінювання впливу навантаження на конструкцію.

Для корпусу з функціонально-градуйованого композитного матеріалу для отримання рівнянь руху складеної оболонки використано метод заданих форм, а для отримання власних форм і частот коливань використано метод Релея-Рітца. Застосовуються безвузлові по окружній координаті форми вільних коливань складеної оболонки. Досліджено деформування оболонкових конструкцій, виготовлених з п’яти основних типів функціонально-градуйованих композитних матеріалів.

Достовірність розроблених моделей та отриманих результатів числового дослідження підтверджується шляхом порівняння максимальних значень переміщень з результатами числових досліджень, отриманими за тривимірною скінченно-елементною моделлю в програмному комплексі ANSYS.

Дослідження виконано за замовленням ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» № SCM YZH SP 03900: «Розробка методів і програм розрахунку динамічного напруженого і граничного стану оболонкових конструкцій при високошвидкісних діях». Числовий аналіз працездатності конструкції за розробленою методикою дозволяє значно скоротити кількість натурних експериментальних досліджень. Результати роботи використовуються на етапі експериментального відпрацювання для прогнозування несучої здатності оболонкових конструкцій при високошвидкісних впливах (Додаток Б).

Результати, що подані в розділі 6, опубліковані в роботах [8–10, 40, 41, 61, 62].

РОЗДІЛ 7
ДЕФОРМУВАННЯ ТА РУЙНУВАННЯ КРІПИЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ГОЛОВНОЇ ЧАСТИНИ СПЕЦІАЛЬНОЇ РАКЕТНОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ ВИСОКОШВИДКІСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Україна є однією з небагатьох країн світу, у якій проектуються й виготовляються оперативно-тактичні ракетні комплекси. В останні роки на базі попередніх розробок за проектами «Борисфен» та «Сапсан» ведуться проектні роботи за темою «Грім-2». При цьому нашим виробникам доводиться конкурувати з такими розвиненими в промисловому відношенні країнами як США, Франція, Великобританія. Загальносвітові тенденції розвитку аерокосмічної техніки свідчать про зростаюче застосування розрахункових методик аналізу динамічної міцності конструкцій та заміну експериментальних випробувань числовими експериментами [362, 363]. В ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» також проводяться роботи по зменшенню кількості експериментальних досліджень за рахунок числового визначення окремих параметрів ракетних конструкцій.

В цьому розділі подано матеріали дослідження, що отримані внаслідок числового моделювання високошвидкісного деформування й руйнування кріпильних елементів спеціальної ракетної конструкції. Конструктивно-компоновочна схема конструкції надана ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» (рис. 7.1).

Високошвидкісне деформування конструкції відбувається внаслідок впливу заданого імпульсного навантаження, що задається газодинамічним тиском. Проводиться числове моделювання деформування й руйнування кріпильних елементів конструкції за термо-пружно-пластичною узагальненою моделлю, що адаптована для розрахункових досліджень в програмному комплексі ANSYS. Розрахунки високошвидкісного деформування й руйнування кріпильних елементів конструкції проводяться з урахуванням початкового напружено-деформованого стану, що з’являється в кріпильних елементах внаслідок збирання конструкції. Для цієї задачі ці данні є вхідними параметрами.

Рис. 7.1. Загальний вигляд двоярусної компоновки спеціальної ракетної конструкції

Для визначення потрібних геометричних параметрів, необхідно проведення великого обсягу затратних експериментальних досліджень. Розроблено програмне забезпечення, що спрямовано на визначення необхідних геометричних розмірів елементів кріплення внаслідок числового моделювання процесу високошвидкісного деформування та руйнування, що дозволяє мінімізувати кількість експериментальних досліджень.

Для дослідження динамічної міцності й часу руйнування елементів кріплення потрібно проводити багаторівневий розрахунок, який містить:

1) розрахунок напружено-деформованого стану конструкції внаслідок її збирання (натяга в болтах, шпильках і стрічках кріплень);

2) визначення динаміки конструкції внаслідок імпульсного

газодинамічного тиску і, як наслідок, сумарного навантаження на елементи кріплення від зовнішнього імпульсного навантаження газодинамічним тиском і контактного тиску від рухомих елементів конструкції;

3) розрахунок високошвидкісного деформування та руйнування елементів кріплень під впливом отриманих значень сумарного навантаження на основі нелінійного динамічного аналізу.

Застосування такого алгоритму числових досліджень дозволяє комплексно врахувати всі фактори навантаження на кріпильні елементи конструкції, що спричинюють їх руйнування. Зауважимо, що дослідження руйнування кріпильної стрічки внаслідок дії заданого імпульсного впливу без урахування попереднього статичного навантаження і контактної взаємодії між відокремлюваними елементами та стрічкою, не дозволяє отримати фізичні результати.

Для даного дослідження геометричні моделі кріпильних елементів і сумарні навантаження на елементи кріплення були отримані як вхідні данні.

7.1 Опис конструкції та постановка задачі

Розглянемо спеціальну ракетну конструкцію, що подана на рис. 7.1. Основними функціональними елементами конструкції є відокремлювані елементи, які розташовані першим і другим ярусами навколо центральної циліндричної оболонки. В центральній зоні конструкції відбувається імпульсне навантаження високошвидкісною газодинамічною хвилею, яка спричинює руйнування болтових з'єднань. Розглянемо більш детально болтове з’єднання, що здійснює кріплення відокремлюваних елементів першого ярусу. На рис. 7.2 показана спрощена геометрична модель цього з'єднання. Цифрою 1 позначена бонка, що нероз'ємно з'єднана з ложементом першого ярусу. Болт 2 з шайбою 3 має задану специфікацію з визначеним моментом закрутки. Елемент притиску позначений цифрою 4. Всі елементи $1 \div 4$ виготовлені з різних металевих сплавів, які мають пружно-пластичні властивості.

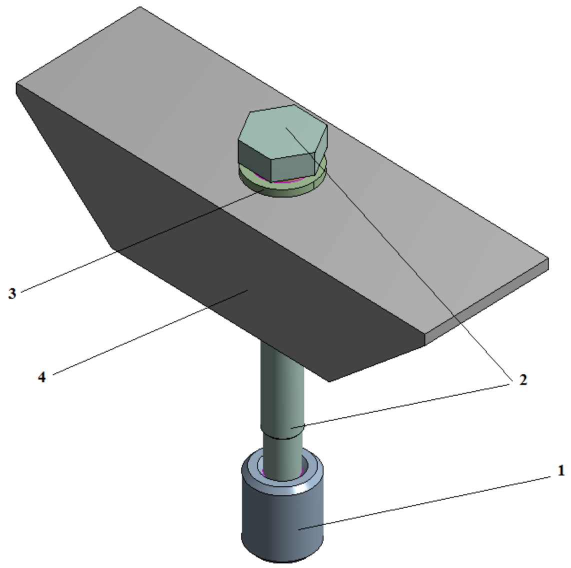


Рис. 7.2. Схема болтового з'єднання першого ярусу

Конструкція зовні фіксується кріпильною стрічкою. Стрічка стягнута болтовими з'єднаннями, що показані на рис. 7.3. Цифрою 1 позначена частина стрічки, що переходить в замкове з'єднання $2 \div 3$. Центральна частина болтового з'єднання має шпильку 4. Матеріал всього болтового з'єднання з кріпильною стрічкою є сталь, що чутлива до швидкості деформування.

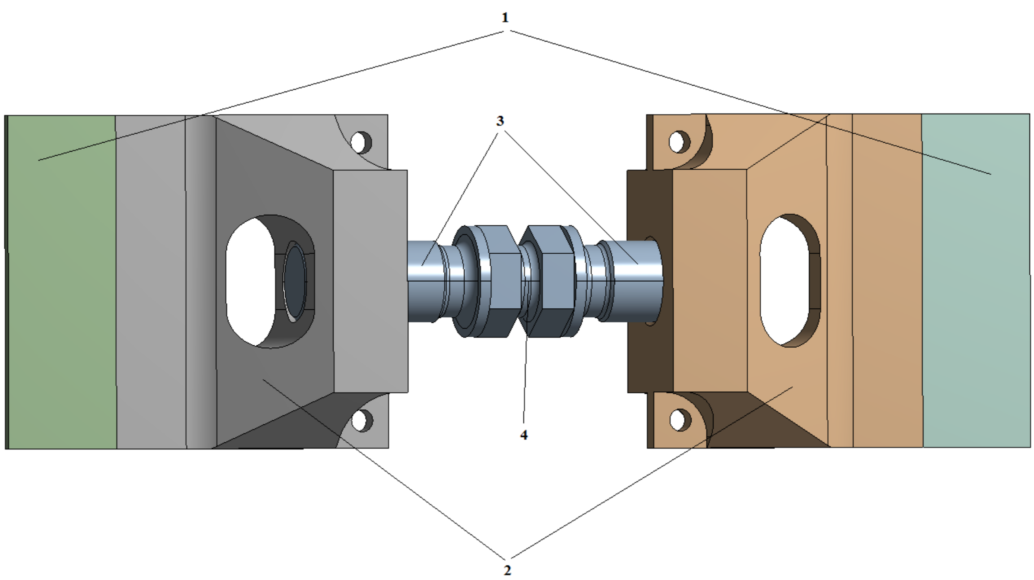


Рис. 7.3. Схема болтового з'єднання відокремлюваних елементів другого ярусу

Всередині конструкції знаходиться джерело імпульсного газодинамічного тиску. Його інтенсивність та час впливу на конструкцію встановлюються експериментально. Для цих досліджень залежність тиску від часу було надано як вхідні дані у вигляді, що подано на рис. 7.4. Сумарний вплив на кріпильні елементи першого ярусу (рис. 7.2) та другого ярусу (рис.7.3) газодинамічного тиску та відокремлюваних елементів, що починають рухатися внаслідок навантаження газодинамічним тиском всієї конструкції, спричинюють руйнування кріпильних елементів.

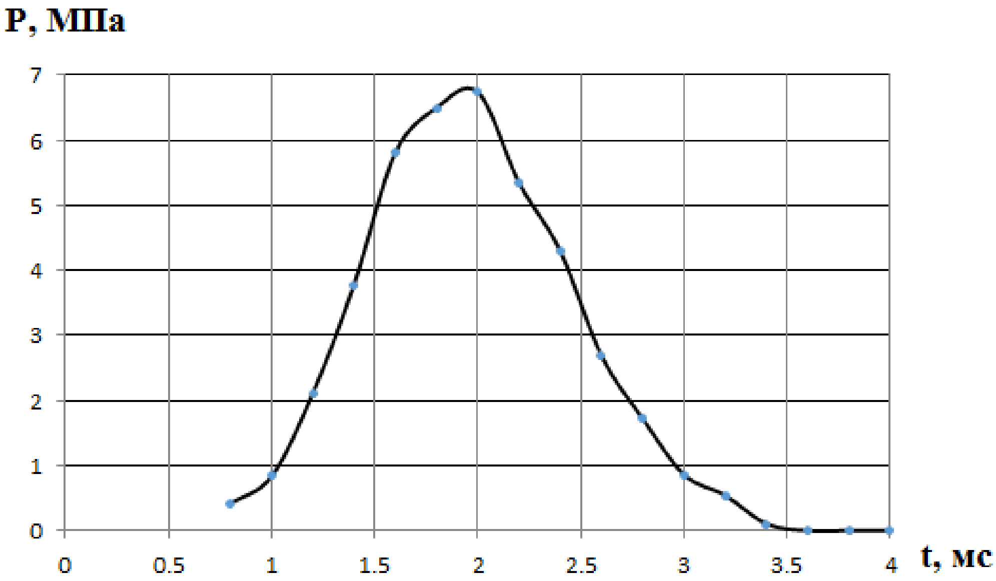


Рис. 7.4. Зміна газодинамічного тиску за часом

Досліджується процес руйнування кріпильних елементів першого та другого ярусів. При числовому моделюванні необхідно отримати такі результати:

– болтове з'єднання першого ярусу повинно руйнуватися саме в болті 2 (рис. 7.2);

– болтове з'єднання другого ярусу повинно руйнуватися в центральній шпильці 4 (рис.7.3).

Задля досягнення цього результату діаметри болтових з'єднань можуть бути змінено.

7.2 Аналіз початкового напружено-деформованого стану кріпильних елементів

Досліджено вплив термонавантажень на загальний напружено-деформований стан кріпильних елементів першого ярусу (рис. 7.2), що виникає при підвищенні температури зовнішнього середовища від +20°C до +50°C та зниженні температури від +20°C до +5°C.

Дослідження термонапруженого стану кріпильних елементів проводилося для одноярусної компоновки спеціальної ракетної конструкції. Напружено-деформованого стан конструкції внаслідок її збирання визначався методом скінченних елементів в універсальній програмній системі скінченно-елементного аналізу ANSYS. Згідно з вхідними даними момент затягування всіх болтів був однаковим.

Аналіз результатів числового дослідження показує, що в діапазоні температур від +5 ^{0}C до +50 ^{0}C напруження в болтових з’єднаннях – практично однакові, а термонавантаження суттєво не змінюють напружено-деформований стан притискного кріплення. Тому при подальших дослідженнях високошвидкісного деформування та руйнування кріпильних елементів спеціальної ракетної конструкції розрахунки проводилися для температури +20°C.

Отримано, що еквівалентні за Мізесом напруження в болті не перевищують границю текучості σ_T, тобто деформування болта буде пружним. Треба відзначити факт виникнення локальних зон пластичних деформацій у містах контакту шайби з притискним елементом. Ці пластичні деформації виникають внаслідок концентрації напружень в зоні контактної взаємодії стальної шайби з алюмінієвим притиском і не впливають на функціональну надійність конструкції вцілому.

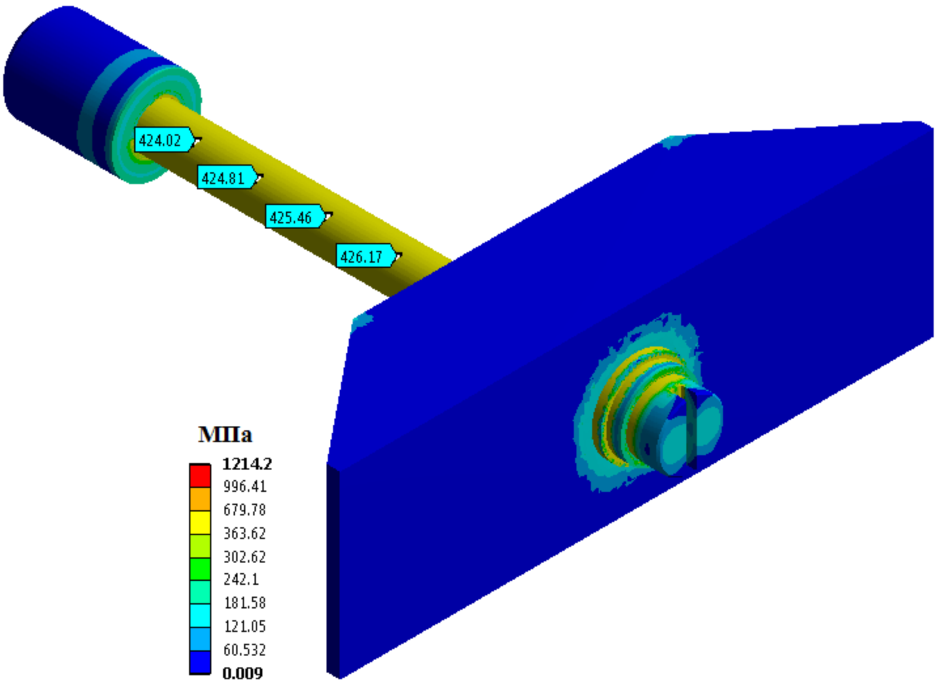


Рис. 7.5. Еквівалентні за Мізесом напруження в притиску

Напруження в кріпильних елементах від затягування притиску відокремлюваних елементів першого ярусу та від затягування зовнішнього кріплення конструкції були отримані від співвиконавців роботи і використовувалися як початкові умови для задачі динамічного деформування та руйнування елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції. На загал, пружні напруження в болтах сягають 43,2 % свого граничного значення (рис. 7.5). А напруження від затягування зовнішнього кріплення сягають свого локального максимуму в місцях галтельних переходів з замків стяжок на стрічки і відповідають 67,5% границі текучості. В зоні фаски на центральній шийці шпильки вони відповідають 60,7% границі текучості. В результаті аналізу напружено-деформованого стану конструкції, що виникає при її збиранні, отримано, що максимальний преднатяг в кріпленнях першого ярусу досягається в гвинті притиску. А в кріпленні відокремлюваних елементів другого ярусу з'являються дві зони локалізації напружень: в місцях галтельних переходів з замків стяжок на стрічки і в зоні фаски на центральній шийці шпильки.

Аналіз отриманих вхідних даних показав, що статичний напружено-деформований стан кріпильних елементів, що виникає внаслідок збирання конструкції, є таким, яким не можна знехтувати при визначенні динамічного напружено-деформованого стану та часу руйнування кріпильних елементів. Подальший числовий аналіз динамічного деформування повної конструкції проводився з урахуванням вхідних статичних напружень.

Контактний тиск на кожну притискну поверхню елемента кріплення першого ярусу задавався з вхідних даних у припущенні, що він рівномірно розподілений по всієї притискної поверхні.

Аналіз напружено-деформованого стану притиску показав, що контактні навантаження від відокремлюваних елементів на притиск першого ярусу спричинюють збільшення більше ніж у десять разів пластичних деформацій у зоні контакту шайби з притискним елементом з алюмінієвого сплаву, але не спричинюють зон пластичного деформування в болті. Таким чином, для подальшого числового моделювання процесу руйнування елементів кріплення першого ярусу потрібно враховувати не тільки контактні навантаження (рис. 7.6, навантаження 1 та 2), а й навантаження від дії газодинамічного тиску (рис. 7.6, навантаження 3).

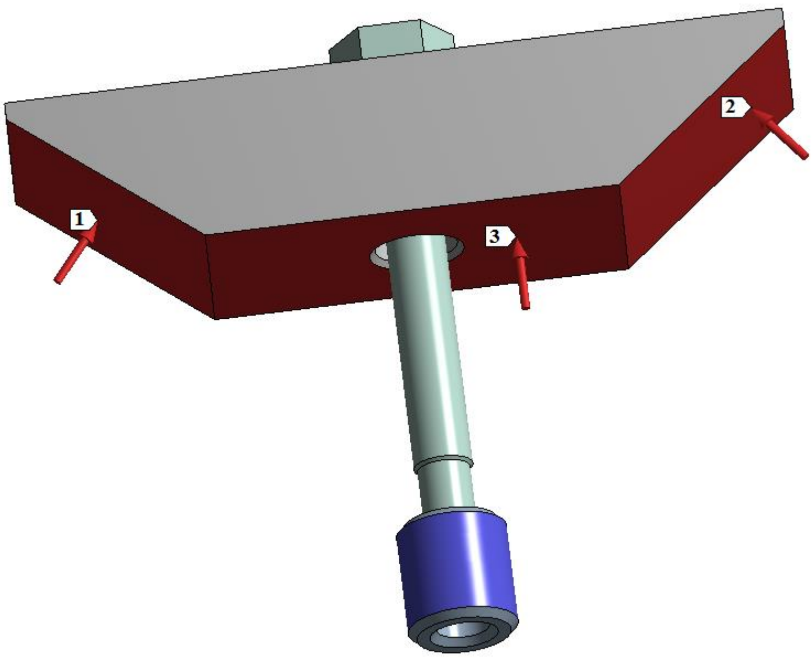


Рис. 7.6. Розрахункова модель для визначення динамічного напружено-деформованого стану та часу руйнування притиску першого ярусу

Поздовжнє навантаження, що діє на стяжку кріпильної стрічки, визначалося співвиконавцями роботи із розрахунків руху всіх елементів конструкції внаслідок впливу газодинамічного тиску. Дослідження проводилися для номінального діаметру центральної шпильки, а також вивчалася можливість зменшення його до 30% від номінального. Підтверджено можливість зменшення діаметру центральної шпильки до 30%.

7.3 Моделювання руйнування кріпильних елементів ракетної конструкції

Основною метою дослідження є розробка моделей руйнування кріпильних елементів першого та другого ярусів, які адекватно відображають фізику процесу високошвидкісного деформування металевих конструкцій внаслідок газодинамічного хвильового імпульсного навантаження та дозволяють визначити час руйнування.

Моделі руйнування кріпильних елементів першого та другого ярусів враховують динамічні властивості матеріалу за термо-пружно-пластичною моделлю деформування, що адаптована для застосування в розрахунковому комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS за методом, що описано у розділі 2. Розрахунки проводяться в модулі прямого динамічного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics. Для моделювання залежності механічних характеристик конструкційних матеріалів від швидкості деформування застосовано залежність Купера-Саймондса [158], яка реалізована в розрахунковому модулі ANSYS/ Explicit Dynamics. Всі елементи, що повинні руйнуватися при газодинамічному впливі, розглядалися виготовленими зі стального сплаву 30 ХГСА. В таблиці 7.1 подані експериментальні константи D та q чутливості матеріалу до швидкості деформації для моделі Купера-Саймондса [156]. Критерій руйнування матеріалу є максимальна пластична деформація: руйнування матеріалу настає тоді, коли величина пластичної деформації ε_{pl} досягає свого граничного значення ε_{fail}, яке для стального сплаву 30 ХГСА [364] наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Механічні характеристики матеріалу елементів, що руйнуються, при пластичному зміцненні по моделі Купера-Саймондса

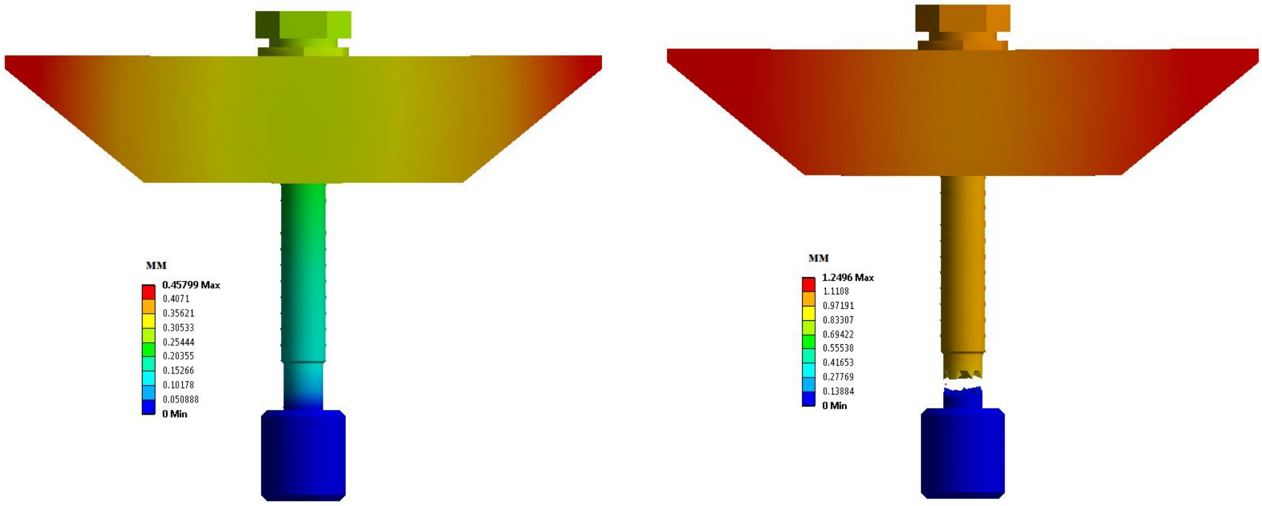
	Тип матеріалу	D	q	ε_{fail}
Болти Шпильки Стрічки	30 ХГСА	4000	5	0,055

Розрахункова модель має відповідність розрахункового часу реальному часу навантаження конструкцій. При визначенні кроку інтегрування за часом використано залежність (2.17). Сумарні навантаження задаються у вигляді дискретних функцій часу для кожної розрахункової моделі та відповідають реальному часу навантаження конструкції. Напруження в болті та центральній шпильці стяжки, що виникають внаслідок її збирання, задаються як початкові значення для динамічного розрахунку.

Таким чином, числові результати напружено-деформованого стану та часу руйнування моделей кріпильних елементів першого та другого ярусів, що отримані в розрахунковому модулі прямого динамічного аналізу ANSYS/ Explicit Dynamics, враховують всі етапи навантаження загальної конструкції (рис. 7.1). За часом сумарні динамічні навантаження для розрахункових моделей співпадають з реальним навантаженням.

7.3.1 Руйнування кріпильних елементів першого ярусу. Проведено ряд розрахункових досліджень руйнування кріпильних елементів першого ярусу. Отримані динамічні переміщення, еквівалентні за Мізесом напруження та пластичні деформації в притиску.

На рис 7.7 показані переміщення в притиску у 1,38 мс (рис 7.7 а) та в моменти часу 1,4 мс (рис 7.7 б).



а б

Рис. 7.7. Переміщення в притиску першого ярусу:

а – в момент часу 1,38 мс;

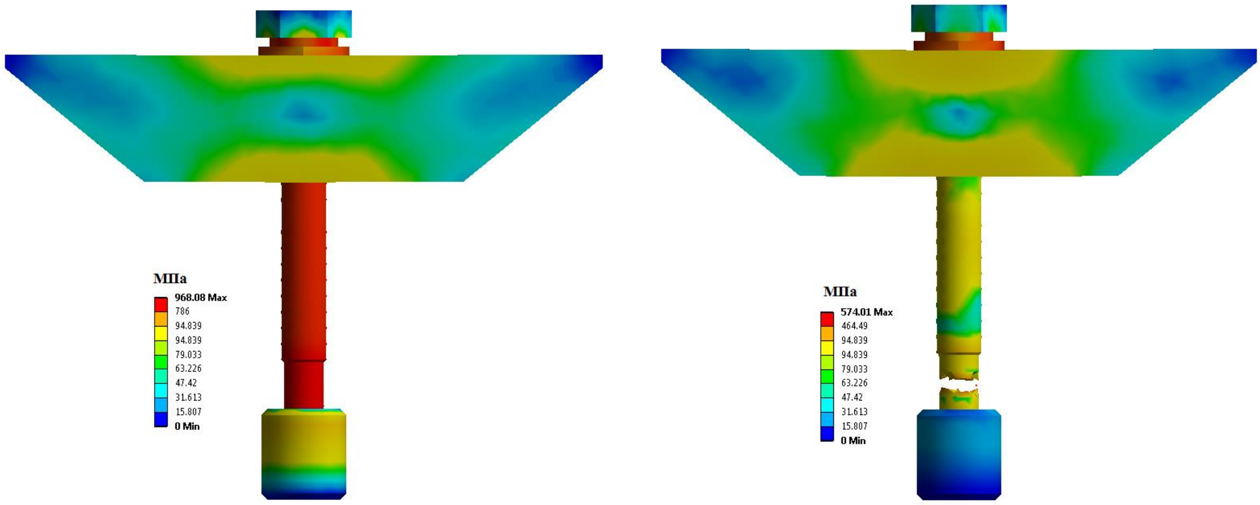
б – в момент часу 1,4 мс

За проміжок часу у 0,02 мс, а саме у 1,39 мс, наступає руйнування болта у місці проточки. У момент часу 1,38 мс максимальні переміщення в притиску сконцентровані на краях алюмінієвої частини. Але під впливом сумарного навантаження ці края починають розтягуватися. Цей процес продовжується до руйнування кріпильного елементу у місці різьби.

Аналіз результатів розрахунків еквівалентних за Мізесом напружень показує, що вже при 1,1 мс, а саме за 0,1 мс після навантаження, в проточці болта концентруються динамічні напруження, які з часом розповсюджуються вздовж всього болта.

На рис 7.8 показано еквівалентні за Мізесом напруження в притиску в момент часу 1,38 мс (рис 7.8 а) та в момент часу 1,4 мс (рис 7.8 б).

В момент часу 1,39 мс болт руйнується у місці проточки, а з часом напруження у болті спадають. Перед руйнуванням рівень максимальних напружень у болті значно вищій, ніж у притискному елементі та шпонці.



а б

Рис. 7.8. Еквівалентні за Мізесом напруження

в притиску першого ярусу:

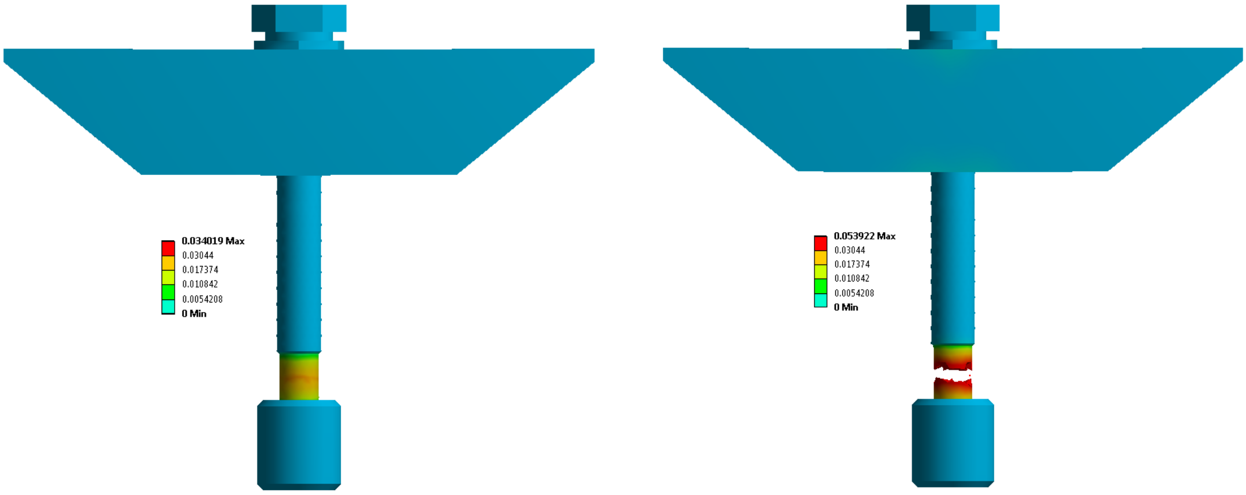
а – в момент часу 1,38 мс;

б – в момент часу 1,4 мс

Треба відзначити високу швидкість зростання максимальних пластичних деформацій. Так, в момент часу 1,38 мс їх максимальне значення дорівнює 0,034, а вже в 1,39 мс наступає руйнування при граничному значенні 0,055. Весь процес руйнування болту не перевищує 20 мкс.

На рис 7.9 показано пластичні деформації в притиску в момент часу 1,38 мс (рис 7.9 а) та в моменти часу 1,4 мс (рис 7.9 б). Динамічні пластичні деформації виникають тільки в зоні заточки болта. Тому під час динамічного навантаження процес руйнування буде відбуватися саме в цій зоні.

Таким чином, зміною діаметру проточки можна корегувати час руйнування притиску до потрібного.



а б

Рис. 7.9. Пластичні деформації в притиску:

а – в момент часу 1,38 мс;

б – в момент часу 1,4 мс

Розрахунковий час руйнування конструкції кріплення відокремлюваних елементів першого ярусу дорівнює 1,39 мс. Цей результат відповідає вимогам, які було сформульовано ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для підготовки проведення експериментальних досліджень руйнування спеціальної ракетної конструкції двоярусної компоновки.

7.3.2 Руйнування кріпильних елементів другого ярусу. Як зазначалося вище, на стадії проектної розробки конструкції потрібно визначити конфігурацію зовнішнього кріплення, яке забезпечить своєчасне руйнування й розліт відокремлюваних елементів. Потрібною конфігурацією вважається така, що руйнується у місці проточки центральної шпильки менше ніж за 2 мс. Тоді зміною діаметру центральної шпильки можна корегувати час руйнування всієї конструкції.

Проведено ряд розрахункових досліджень руйнування кріпильних елементів другого ярусу. Отримані динамічні переміщення, еквівалентні за Мізесом напруження та пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки.

Отримано, що для даної конструкції з номінальним діаметром максимальні напруження та пластичні деформації виникають у місцях переходу від замкового з‘єднання до стрічки, а не у місці проточки центральної шпильки.

Дослідимо процес руйнування кріпильної стрічки номінального діаметру. Аналіз результатів розрахунку переміщення, еквівалентних за Мізесом напружень та пластичних деформацій в стяжці кріпильної стрічки номінального діаметру в момент часу 2,05 мс показав, що в час більший за 2 мс конструкція кріплення відокремлюваних елементів другого ярусу залишається цілою. Такий результат не задовільняє вихідним вимогам, а центральна шпилька не є зоною концентрації максимальних пластичних деформацій. На рис. 7.10 показані результати моделювання пластичних деформацій в стяжці кріпильної стрічки номінального діаметру в момент часу 2,05 мс.

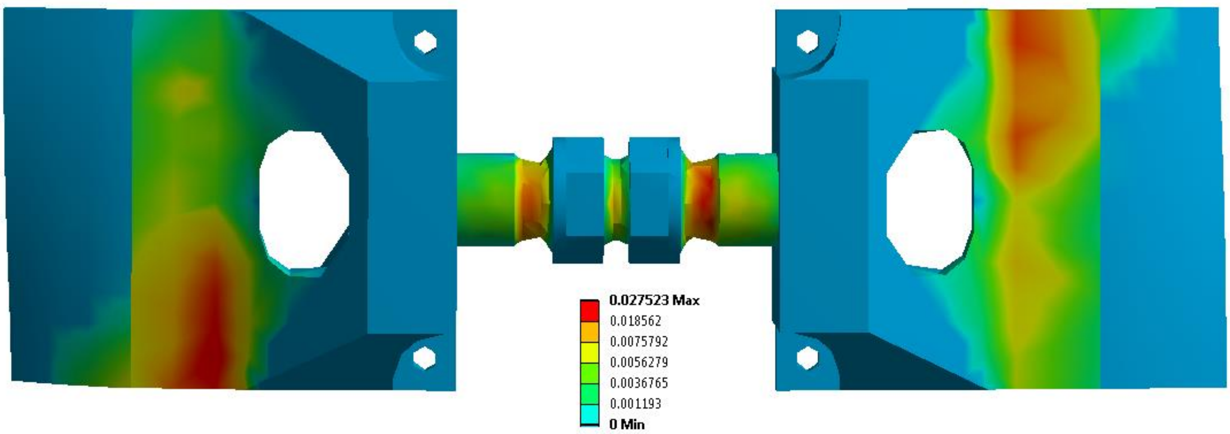


Рис. 7.10. Пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою номінального діаметру в момент часу 2,05 мс

Подальше деформування призводить до руйнування кріпильної стрічки. На рис 7.11 показано пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою номінального діаметру в момент часу 2,12 мс. Руйнування відбувається у місцях концентрації максимальних пластичних деформацій: в місцях галтельного переходу з замка стяжки на стрічку та в бічній проточці замка. Таким чином отримано, що конструкція руйнується в багатьох зонах за час, що перевищує 2 мс.

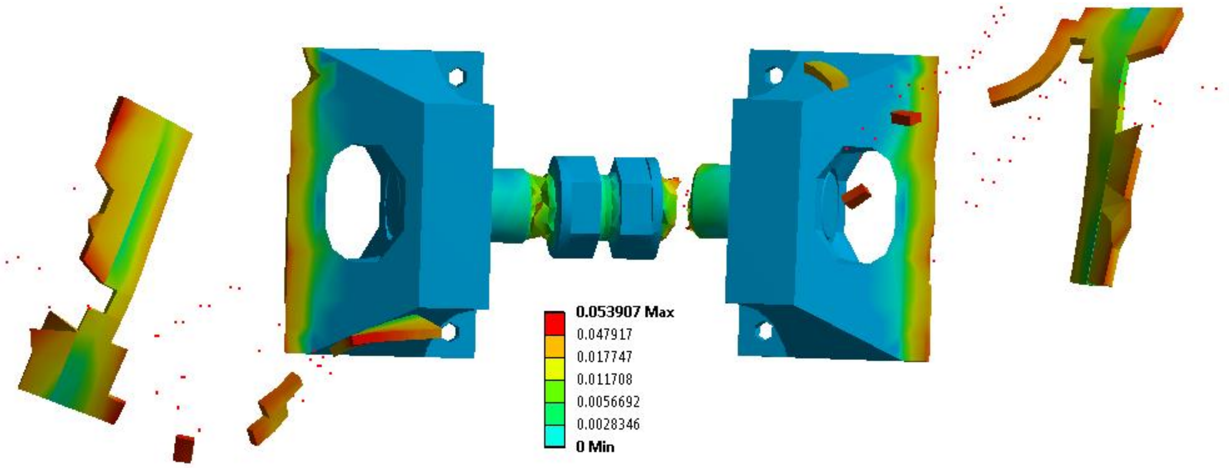


Рис. 7.11. Пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою номінального діаметру в момент часу 2,12 мс

За результатами числового аналізу зроблено висновки про те, що стяжка кріпильної стрічки з центральною шпилькою номінального діаметру не задовільняє вихідним вимогам щодо її конструкції, оскільки руйнування відбувається не в місці центральної шпильки, а на галтельних переходах стяжки в стрічку і в бічній проточці замку. При цьому, час руйнування перевищує значення, що відповідає вимогам, які було сформульовано ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для підготовки проведення експериментальних досліджень руйнування спеціальної ракетної конструкції двоярусної компоновки.

Щоб забезпечити своєчасне руйнування конструкції в центральній шпильці проводилося варіювання значеннями її діаметру. Числовими дослідженнями було замінено натурні випробування.

Числове моделювання показало, що зменшення діаметра центральної шпильки до 77% від початкового значення призводить до потрібного результату. На рис 7.12 показано пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з діаметром центральної шпильки, зменшеним до 77% від номінального, в момент часу 1,82 мс. За цей час від початку навантаження у центральній шпильці локалізуються максимальні напруження та виникають пластичні деформації. Треба відзначити, що при обраному діаметрі центральної шпильки це єдина зона пластичного деформування матеріалу.

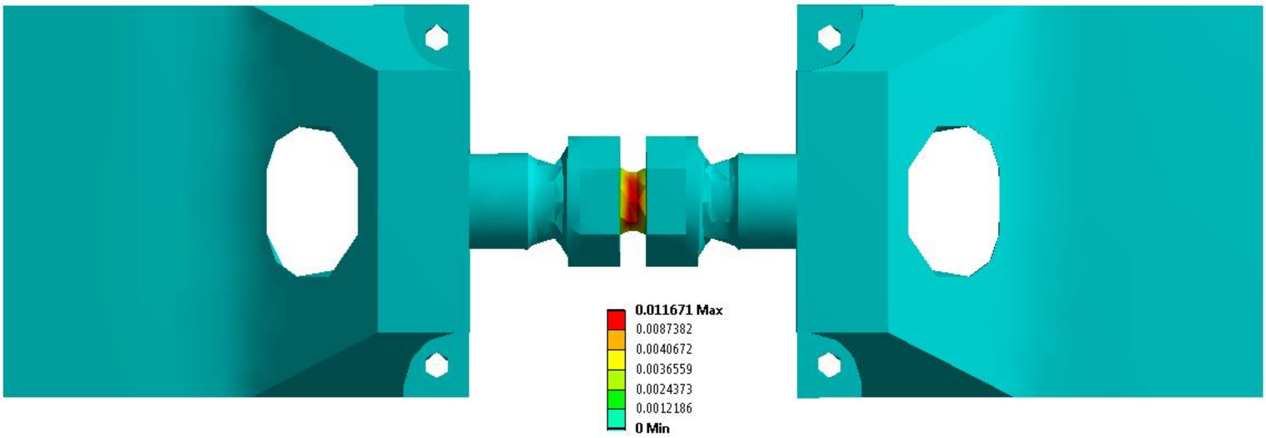


Рис. 7.12. Пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою зменшеного діаметру в момент часу 1,82 мс

За 1,93 мс від початку дії газодинамічної ударної хвилі шпилька руйнується. Саме цей час є часом руйнування спеціальної ракетної конструкції з двоярусною компоновкою відокремлюваних елементів (рис. 7.1) і він відповідає вихідним умовам. На рис 7.13 показано зруйновану шпильку у момент часу 1,94 мс.

Пластичні деформації в центральній проточці шпильки за проміжок часу з 1,82 мс до 1,93 мс зростають з 0,012 до 0,055. Звернемо увагу на те, що зменшення діаметру центральної шпильки до 77% від номінального, суттєво змінює локалізацію пластичних деформацій в конструкції кріплення другого ярусу. Пластичне деформування матеріалу відбувається тільки в шпильці, а решта конструкції деформується пружно. На рис. 7.13 показано пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою зменшеного діаметру в момент часу 1,94 мс.

Таким чином, розрахунковий час руйнування кріплення відокремлюваних елементів другого ярусу дорівнює 1,93 мс. Цей час задовільняє вимогам, які було сформульовано ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для підготовки проведення експериментальних досліджень руйнування спеціальної ракетної конструкції двоярусної компоновки.

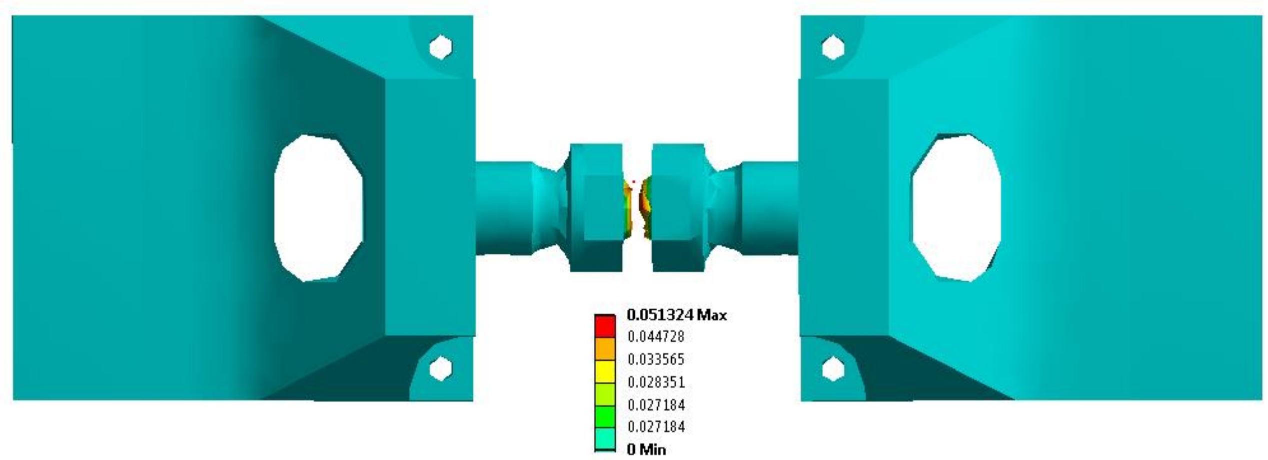


Рис. 7.13. Пластичні деформації в стяжці кріпильної стрічки з центральною шпилькою зменшеного діаметру в момент часу 1,94 мс

На рис. 7.14 показані графіки максимальних напружень в кріпильній стрічці в залежності від часу для зменшеного діаметру центральної шпильки (графік 1) і вихідного діаметра центральної шпильки (графік 2).

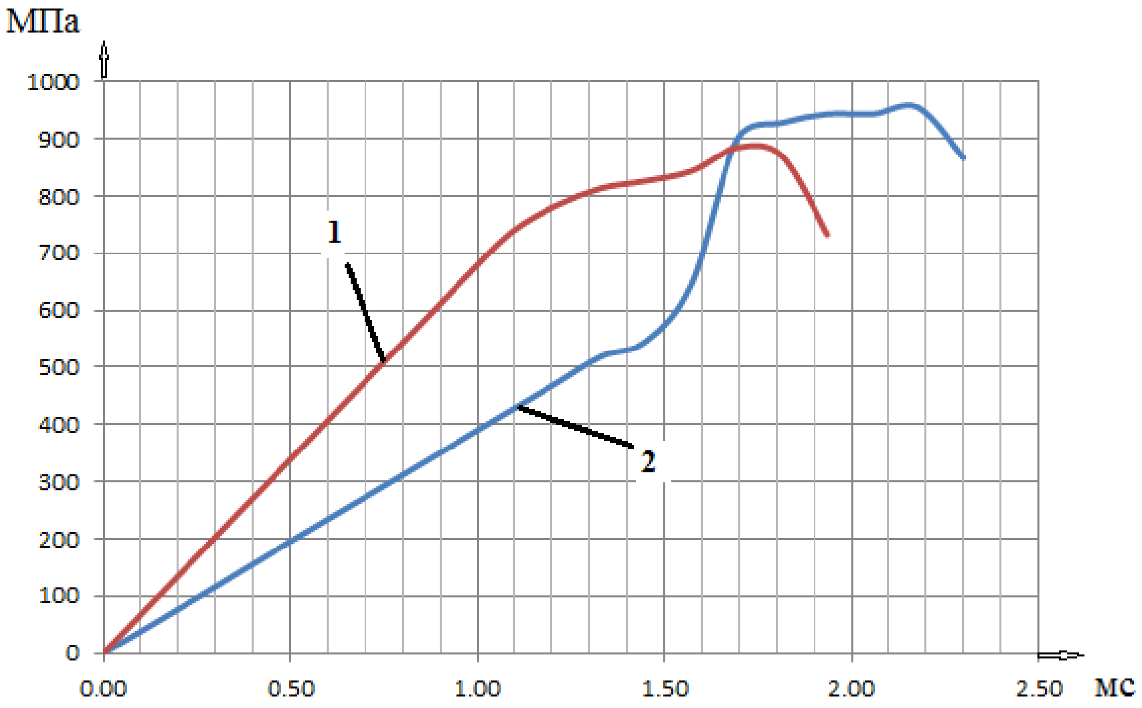


Рис. 7.14. Зміна в часі максимальних напружень в кріпильній стрічці:

1 - зменшений діаметр центральної шпильки;

2 - вихідний діаметр центральної шпильки

Аналіз результатів високошвидкісного деформування та руйнування кріпильної стрічки показує, що максимальні напруження, які виникають в стяжці від початку навантаження і до моменту руйнування, декілька нижчі за статичну границю міцності матеріалу. Це пояснюється динамічним зміцненням матеріалу внаслідок високої швидкості деформації. Проте, пластичні деформації сягають своїх граничних значень. Цей факт підтверджує правильність вибору максимальної пластичної деформації як локального критерію руйнування матеріалу.

Експериментальні дослідження, за якими відбувалося тестування розробленої методики, проводилися спеціалістами ДП «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля. На рис. 7.15 показано фрагмент замкового з‘єднання кріпильної стрічки зі зменшеним діаметром центральної шпильки, що зруйнований саме у місці центральної проточки.

Рис. 7.15. Фрагмент зруйнованої кріпильної стрічки

Таким чином, результати моделювання збігаються з результатами експериментальних досліджень, а розроблена методика може бути використана для варіативних розрахунків при підготовці проведення експериментальних досліджень руйнування спеціальної ракетної конструкції двоярусної компоновки.

7.4 Висновки за розділом 7

У розділі подано розв’язання задачі високошвидкісного деформування та руйнування елементів кріплення головної частини спеціальної ракетної конструкції внаслідок дії газодинамічної ударної хвилі. Враховується, що окрім високошвидкісного навантаження газодинамічним тиском на кріпильні елементи діє контактний тиск інших елементів головної частини. Також враховано напружено-деформований стан елементів кріплення внаслідок збирання конструкції. Моделювання руйнування проводиться в розрахунковому модулі Explicit Dynamics програмного комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS. При моделюванні руйнування кріпильних елементів першого та другого ярусів враховуються динамічні властивості матеріалу за термо-пружно-пластичною моделлю деформування. Вона адаптована для застосування в модулі прямого динамічного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics на основі залежності Купера-Саймондса, а критерієм руйнування обрано критерій максимальної пластичної деформації.

Дослідження виконано за замовленнями ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» «Розробка методів і програм розрахунку тривалості руйнування елементів кріплення БЕ при імпульсному навантаженні» та «Перевірка працездатності і механічного стану систем кріплення БЕ при транспортуванні на основі комп'ютерного моделювання технологічних і експлуатаційних впливів». Достовірність отриманих результатів перевірялася шляхом їх порівняння з результатами експериментальних досліджень, виконаних підприємством-замовником. Результати роботи використовуються при проектуванні спеціальних ракетних конструкцій на етапі конструкторського та експериментального відпрацювання системи кріплення відокремлюваних елементів (Додаток Б).

В результаті числового аналізу руйнування двоярусної компоновки конструкції встановлено діаметр центральної шпильки замку стяжки, при якому руйнування відбувається саме в цій шпильці. Проведені дослідження підтверджують доцільність варіативних розрахунків для підготовки експериментальних досліджень руйнування.

Розглянуте багатоетапне моделювання може бути використано для розрахункових досліджень руйнування складених конструкцій, які знаходяться під дією імпульсних навантажень, що спричинюють швидкість деформування в діапазоні від 10^3 $с^{-1}$ до 10^6 $с^{-1}$.

Наукові результати, що подано в розділі 7, опубліковано в роботах [11, 12, 42, 63, 64].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі міститься вирішення науково-технічної проблеми механіки деформівного твердого тіла, яка полягає у розробці ефективних аналітично-числових методів дослідження динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій внаслідок впливу імпульсного навантаження різної фізичної природи і надзвукової газової течії та застосуванні цих методів до розв’язання актуальних прикладних задач. Отримані результати є теоретичною і практичною основою для інженерних розрахунків напружено-деформованого і граничного стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісних навантажень.

В результаті виконаних досліджень отримано такі наукові та практичні результати.

1. Запропоновано модель динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні, яка поєднує моделі нестаціонарного термопружного деформування та високошвидкісного пластичного деформування для урахування високошвидкісного зміцнення та температурного знеміцнення матеріалу. Термо-пружно-пластична модель враховує всі обґрунтовані фізичні фактори, що супроводжують процеси високошвидкісного деформування елементів конструкцій із полікристалічних матеріалів.

2. Запропоновано рівняння напружено-деформованого стану у модифікованій формі Пежини з додатковими температурними множниками у формі Джонсона-Кука, в якому еквівалентні напруження виражаються через еквівалентні деформації, швидкість деформацій та температуру. До його переваг можна віднести той факт, що узагальнене рівняння стану на основі форми Пежини має відносно малу кількість емпіричних констант. Також ці константи є універсальними для багатьох емпіричних залежностей еквівалентних напружень від еквівалентних деформацій і їх швидкостей, а тому використовуються при моделюванні пластичного плину полікристалічних

матеріалів у наукових публікаціях українських, європейських та американських учених. При цьому температурний множник у формі Джонсона-Кука розраховується на основі відомих механічних властивостей матеріалів. Таким чином, числові дослідження термо-пружно-пластичного високошвидкісного деформування елементів конструкцій можна проводити без попередніх коштовних експериментів по визначенню динамічних властивостей матеріалів, а застосовуючи широку базу вже існуючих.

3. На основі запропонованої узагальненої моделі динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій з полікристалічних матеріалів при імпульсному навантаженні отримано уточнені розв’язки задач високошвидкісного деформування оболонкових елементів корпусу газотурбінного двигуна внаслідок обриву частини лопатки та локального пошкодження лопаток газотурбінних двигунів сторонніми предметами. Показано, що процес високошвидкісного деформування при локальному навантаженні також носить локальний характер, а зона деформування в конструкції не більше ніж в п’ять разів перевищує зону навантаження.

4. На основі запропонованого рівняння напружено-деформованого стану отримано уточнені динамічні напруження в задачах високошвидкісного деформування плити з оребренням під впливом газодинамічної ударної хвилі та пластини під впливом гідродинамічного ударного навантаження. За цими результатами сформульовано практичні рекомендації за вибором характеристик елементів конструкцій будівельних споруд та оснастки для обробки матеріалів тиском.

5. Запропоновано розрахункову модель нестаціонарного деформування корпусу твердопаливного двигуна з композитних матеріалів, яка описує корпус двигуна у формі сферично-циліндрично-сферичної оболонки обертання. Розглядаються композитні матеріали, механічні характеристики яких описуються ортотропними чи функціонально-градуйованими моделями. Для цього застосовано теорію типу Тимошенка-Рейсснера чи теорію Редді високого порядку. Конструкція навантажена внутрішнім імпульсним тиском, що

моделює робочі процеси в двигуні при старті ракети. На основі запропонованої оболонкової моделі отримано ряд закономірностей розподілу динамічних деформацій в композитній конструкції при внутрішньому імпульсному навантаженні.

6. Розроблено тривимірну скінченно-елементну модель високошвидкісного деформування та розділення навпіл частини обтічника ракети у формі усіченого конусу. Модель враховує нелінійний розподіл напружено-деформованого стану по товщині оболонкової конструкції та вплив швидкості деформації на механічні властивості конструкційного матеріалу. Критерієм локального руйнування матеріалу є граничне значення пластичної деформації. Модель дозволяє отримувати діапазон безпечного для корисного вантажу імпульсного тиску, який спричинює розділення обтічника навпіл. Модель реалізовано в розрахунковому модулі Explicit Dynamics програмного комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS.

7. Досліджено високошвидкісне деформування та руйнування елементів кріплення головної частини спеціальної ракетної конструкції внаслідок дії газодинамічної ударної хвилі та додаткових навантажень. Враховуються динамічні властивості матеріалу за термо-пружно-пластичною моделлю деформування, яка адаптована для застосування на основі залежності Купера-Саймондса в модулі прямого динамічного аналізу ANSYS / Explicit Dynamics. Критерієм локального руйнування матеріалу є граничне значення пластичної деформації. За результатами досліджень визначено діаметр центральної шпильки замку стяжки, при якому руйнування елементу кріплення відбувається в заданому діапазоні часу.

8. Проведено числовий аналіз динамічної нестійкості обтічників ракет в надзвуковому газовому потоці, що моделюються оболонками у формі параболоїда обертання та підкріпленого шпангоутами конуса. Надзвуковий газовий потік моделюється за поршневою теорією із застосуванням уточнення на поправку Крумхара. Досліджено діапазон чисел Маха від 1,01 до 4. Математичні моделі коливань обтічників різної геометричної форми

ґрунтуються на гіпотезах Кіргофа-Лява. Переміщення при коливаннях конструкцій представляються через власні форми коливань, які визначаються за методом Релея-Рітца. Отримано ряд закономірностей динамічної нестійкості обтічників та виявлено їх форми коливань при втраті динамічної стійкості.

9. Достовірність отриманих в роботі результатів досліджень за розробленими моделями підтверджується шляхом їх порівняння з даними експериментів, отриманими іншими авторами, або з результатами, отриманими за іншими моделями.

10. Результати роботи можуть використовуватися під час проектування, доведення та експлуатації аерокосмічних та машинобудівних конструкцій. Створені математичні моделі, методи та алгоритми обчислення становлять розрахункову основу для аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій під впливом високошвидкісного механічного навантаження, що має суттєве практичне значення. Результати досліджень впроваджено на п’яти підприємствах України. Результати роботи використано при проектуванні: корпусу твердопаливного двигуна ракет-носіїв, конструкцій обтічників ракет та ракет-носіїв, елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції на ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля»; при страховому оцінюванні можливих наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди в ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН»; для розробки методики підвищення надійності та довговічності оснащення при обробці матеріалів тиском на ВАТ НВП «ОСНАСТКА» та на ДП «Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування»; при аналізі динамічної міцності та експлуатаційного руйнування виробів на ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О.Г. Івченко». Крім того, окремі результати роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна та у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут».

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Chernobryvko M. V., Kruszka L., Vorobiev Yu. S. Thermo-elastic-plastic Constitutive Model for Numerical Analysis of Metallic Structures under Local Impulsive Loadings. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 566. P. 493-498.
2. Chernobryvko M. V., Vorobiev Yu. S., Kruszka L. Method to analyze the effect of the shock-wave loading on building elements. International Journal of Protective Structures. 2012. Vol. 3. № 2. P. 141-146.
3. Vorob'ev Y. S., Kolodyazhnyi A. V., Chernobryvko M. V., Yareshchenko V. G., Kruszka, L. Theoretical-experimental analysis of structural components separation upon local impulse loading. Strength of Materials. 2002. Vol. 34. № 5. P. 497-499.
4. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. Vol. 49. № 12. P. 2839-2845.
5. Chernobryvko M. V., Avramov K. V. Natural vibrations of parabolic shells. Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 217. № 2. P.229-238.
6. Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Kazachenko O., Batutina T. J. Dynamic instability of parabolic shells in supersonic gas stream. Meccanica. 2016.Vol. 51. No. 4. P. 939-950.
7. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Suleimenov U. S. Dynamic instability of ring-stiffened conical thin-walled rocket fairing in supersonic gas stream. Journal of Mechanical Engineering Science. 2016. Vol. 230(I). P. 55–68.
8. Avramov K., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A. Dynamics of solid propellant motor composite casing under impact pressure. Meccanica. 2018. Vol. 53, № 13. P. 3339-3353.

9. Chernobryvko M., Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamics of thin-walled elements of rocket engine under impact loads. Key engineering materials. 2016. Vol. 715. P. 237-242.

10. Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonlinear Dynamics. 2019. № 98(3). P. 1853-1876.

11. Martynenko G., Chernobryvko M., Avramov K., Martynenko V., Tonkonozhenko A., Kozharin V., Klymenko D. Numerical simulation of missile warhead operation. Advances in engineering software. 2018. Vol. 123. P. 93-103.

12. Martynenko G., Avramov K., Martynenko V., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A., Kozharin V. Numerical simulation of warhead transportation. Defence Technology. Available online 9 March 2020. https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.03.005

13. Kruszka L., Worobiew J. S., Chernobrywko M. W. Deformacja cylindrycznych konstrukcji pod dzialaniem dwoch ruchomych obciazen impulsowych. Biuletyn WAT. 2006. Vol. LV. № 02. P. 159-169.

14. Чернобрывко М. В. Оценка прочности элементов конструкций под действием подвижной ударной нагрузки. Вісник ХНТУСГ. 2008. Вип. 69. С. 103-109.

15. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Ярыжко А. В. Нелинейное деформирование конструкций при локальном нагружении. Механіка та машинобудування. 2007. № 1. С. 89-95.

16. Чернобрывко М. В. Оценка динамической прочности устройств ударного действия в аварийных ситуациях. Вісник ХНТУСГ. 2010. Вып. 100. С. 268-272.

17. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Воздействие подвижной нагрузки на плиту, лежащую на упругом основании. Автомобільний транспорт. 2005. Вип. 16 С. 192-194.

18. Чернобрывко М. В. Модель скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при импульсном нагружении. Вісник СевНТУ. 2012. Вип. 133. С. 21-26.
19. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Геотехническая механика. 2011. Вып. 93. С. 192-199.
20. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Основные зависимости для анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием импульсных нагрузок. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2011. Вип. 12. С. 40-46.
21. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2010. Вып. 14. С. 87-93.
22. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Анализ динамического напряженного состояния элементов конструкций при импульсном нагружении. Вестник СевГТУ. 2009. Вип. 97. С. 3-6.
23. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Математическое моделирование скоростного деформирования материалов и элементов конструкций. Наукові нотатки. 2009. Вип. 25 (II). С. 31-38.
24. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Проблемы динамической прочности элементов конструкций при ударно-импульсных нагрузках. Вібрації в техніці та технологіях. 2011. № 3 (63). С. 5-10.
25. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование высокоскоростных деформационных процессов с использованием адаптивных вычислительных методов. Механіка та машинобудування. 2009. № 1. С. 112-119.
26. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Скоростное деформирование защитных конструкций под действием локальных импульсных нагрузок.

Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2012. Вип. 13. С. 406-412.

27. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д., Комяк В. М. Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2014. Вип. 19. С. 162-169.
28. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д. Моделирование деформации и разрушения элемента здания при ударно-волновой нагрузке. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2015. Вип. 21. С. 127-131.
29. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М.В. Динамическое напряженно-деформированное состояние лопатки при ударе по входной кромке. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2008. № 4(51). С. 54-56.
30. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Динамическое упругопластическое деформирование элементов газовых турбин при локальных ударных нагрузках. Надійність і довговічність машин і споруд. 2008. Вип. 31. С. 7-72.
31. Воробьев Ю. С. , Чернобрывко М. В., Крушка Л. Локальное импульсное воздействие на оболочечные элементы конструкций. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2005. № 9/25. С. 181-184.
32. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Воздействие импульсных нагрузок на оболочечные элементы ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2003. № 40/5. С. 64-67.
33. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Роль импульсных нагрузок для ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2002. №34. С. 136-140.
34. Бреславський Д. В., Сєнько А. В., Татарінова О. А., Чернобривко М. В., Аврамов К.В. Числове моделювання розділення конічної оболонки при спрацюванні стрічкового заряду. Технічна механіка. 2020. № 2. С. 57-65.
35. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Сулейменов У. С. Динамическая неустойчивость

подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Техническая механика. 2015. № 1. С. 15-29.

36. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. Космічна наука і технологія. 2015. Т. 21. № 1. С. 10-14.

37. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая устойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Прикладная гидромеханика. 2014. Том 16 (88), № 4. С. 3 10.

38. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в полете. Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 2, С. 9-16.

39. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Меша Ю. В. Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Вісник НТУ«ХПИ». 2013. № 63 (1063). С. 131-139.

40. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Меша Ю. В., Тишковец Е. В., Жолос О. В. Динамика композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием импульсных нагрузок, описывающих рабочие процессы в двигателе. Космічна наука і технологія. 2017. Т. 23. № 1(104). С. 18-29.

41. Аврамов К. В., Чернобривко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. Космічна наука і технологія. 2019. Т. 25. № 2(117). С. 23-37.

42. . Мартыненко Г. Ю., Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Мартыненко В. Г., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю. Численное моделирование работы боевого снаряжения ракетного комплекса. Технічна механіка. 2018. № 4. С. 90-104.

43. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. Method to analyze of the shock-wave loading on buildings constructions. Proc. of International Seminar on Science and Education, 2011. Rome (Italy). P. 56-58.

44. Bogacz R., Worobjew J., Czernobriwko M., Kruszka L. Oddziaływanie rucho-mego obciążenia na płytę na sprężystym podłożu. Materiały XIII Warsztaty Naukowe PTSK «Symulacja w Badaniach i Rozwoju», Warsaw (Poland), 2006. P. 1-2.

45. Воробьев Ю., Крушка Л., Чернобрывко М. Поведение цилиндрических конструкций при воздействии подвижных импульсных нагрузок. Proc. of 13th International scientific and technological conference «Maintenance of infrastructure in crisis situations», Warsaw - Rynia (Poland), 2004. P. 163-171.

46. Chernobryvko M. Kruszka L. Vorobiev Y. Thermo-elastic-plastic constitutive model for numerical analysis of metallic structures under local impulsive loadings. Abstracts book of 8-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013), Osaka (Japan), 2013. P.134.

47. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. High Strain Rate Deformation Model for Contractions Elements under Local Impulsive Loadings. Proc. of Int. Conference «Shock Waves in Condensed Matter», Kiev, 2012. P. 313-315.

48. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Материалы IX Междунар. науч. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, 2011. С. 160-163.

49. Vorobyov Y., Chernobryvko M., Kruszka L. Strain rate deformation and damage of structural elements under local impulsive loadings. Proc. of Seventh International Symposium on Impact Engineering (ISIE2010), Warsaw (Poland), 2010. P.679-686.

50. Чернобрывко М. В. Воробйов Ю. С. Математичні моделі деформаційних процесів при імпульсному навантаженні. Тези доповідей Міжнародної

науково-техничної конференції «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», Київ, 2010. С. 181-182.

51. Воробьев Ю. С. Чернобрывко М. В., Крушка Л. Особенности численного анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием локальных импульсных нагрузок. Proc. of IX Konferencja Naukowo-Techniczna «Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania», Warsaw (Poland), 2005. P.545-551.
52. Chernobryvko M., Kruszka L., Avramov K. Deformation of finned plates under the action of detonation loads. Abstracts book of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienna (Austria), 2014. P. 337-338.
53. Чернобрывко М. В. Теоретико-экспериментальный региональный анализ деформирования цилиндрической оболочки при локальном ударе. Аннотации докладов IX всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород (Россия), 2006. Т.3. С. 215-216.
54. Chernobryvko M. V. Vorobiev Y. S. Behavior of compound shell under detonation loading. Proc. of 8th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2005. P. 299-302.
55. Крушка Л., Чернобрывко М.В. К вопросу о прочности защитных контейнеров при детонационном воздействии. Proc. of 10th International scientific and technological conference «Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí», Zilina (Slovakia), 2005. P. 295-301.
56. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S., Mesha Y. V., Kolodyzny A. V. Dinamics of the shell structures under impulse loading. Proc. of 7th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2002. P. 65-66.
57. Чернобрывко М. В., Тонконоженко А. М., Аврамов К. В., Меша Ю. В. Моделирование разрушения конструкций ракетно-космической техники при срабатывании детонирующих зарядов. Тезисы докладов VII

Международной конф. «Космические технологии: настоящее и будущее». г. Днепр, 2019. С. 45.

58. Chernobryvko M., Avramov K., Mesha Y., Tonkonogenko A., Kruszka L. Dynamic failure time of the truncated conical shell under the local impulse. Proc. of 7th International Conference on Mechanics and materials in design (M2D2017), Albufeira (Portugal), 2017. P. 1521-1522.

59. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Клименко Д. В., Батутина Т. Я. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Тез. докл. V Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее», г. Днепр, 2015. С.31.

60. Чернобривко М. В., Воробйов Ю. С., Аврамов К. В., Романенко В. М., Тонконоженко А. М. Вібронапруженість оболонок під впливом імпульсних навантажень. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, 2013. С. 180-182.

61. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes, Nicosia (Cyprus), 2019. P. 371-372.

62. Chernobryvko M. Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamic Strength of Composite Shell under Internal Blast. Proc. of the 4th International Conference on Protective Structures, Beijing (China), 2016. P. 178-187.

63. Chernobryvko M., Martynenko G., Avramov K., Tonkonogenko A., Kozharin V., Martynenko V. Numerical analysis of special rocket structure fracture. Тези доповідей І Міжнародної науково-технічної конференції

«Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, 2018. С 7-8.

64. Kruszka L., Chernobryvko M., Uspensky B., Avramov K., Martynenko G., Sakhno N., Martynenko V., Mesha Y. Fracture of a special rocket structure under impact loads. Proceedings of the 10-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2019), Gmunden (Austria), 2019. P. 217-222

65. Чернобривко М. В. Моделювання розділення усіченої конічної оболонки при імпульсному навантаженні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 2020. С 325–326.

66. Соколовский В. В. Распространение цилиндрических волн сдвига в упругопластической среде. ДАН СССР, ОТН. 1948. №8. С. 1325-1328.

67. Malvern I. E. The propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-Rate Effect. J. Appl. Mech. 1951. V. 18, № 2. PP 203-208.

68. Karman T. V., Dewuz P. E. On the propagation of plastic deformation in solids. J. Appl. Phys. 1950. №21. P. 987-1006.

69. Радзивончик В. Ф. Скоростное пластическое деформирование металлов. Харьков: Изд-во ХГУ, 1957. 211 с.

70. Гопкинс Г. Динамические неупругие деформации металлов. М.: Мир, 1964. 159 с.

71. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит-ры по строительству. 1965. 448 с.

72. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Распространение упруго-пластических волн изгиба и сдвига при осесимметричных деформациях оболочек вращения. Инж. сб. 1961. Т. 31. С. 135-170.

73. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

74. Райнхарт Дж., Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсных нагрузках. М.: Изд-во иностр. лит. 1968. 297 с.

75. Писаренко Г. С., Петушков В. Г., Степанов Г. В., Фот Н. А. Механические свойства некоторых металлов при высокоскоростном растяжении. Пробл. прочности. 1970. № 7. С. 3-8.
76. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. К.: Наук. думка, 1976. 416 с.
77. Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. – К.: Наук. думка. 1979. 267 с.
78. Степанов Г. В. Влияние скорости деформации на характеристики упругопластического деформирования металлических материалов. Журнал ПМТФ. 1982. № 1. С. 150-152.
79. Аникьев И. И., Михайлова М.И., Списовский А.С., Тимофеев А.Л. Экспериментальное исследование деформирования тонких пластин при статическом нагружении и при взаимодействии их с ударной волной. Прикладная механика. 1983. 19, №10. С. 89-94.
80. Гузь А. Н., Заруцкий В. А., Амиро И. Я., Малашенко С. В., Улитко А. Ф., Аникьев И. И. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций. К.: Наук. думка, 1984. 240 с.
81. Майборода В. П., Кравчук А. С., Холин Н. Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение. 1986. 264 с.
82. Колодяжный А. В., Севрюков В. И. Ударные и импульсные воздействия на конструкции и материалы К.: Наук. Думка. 1986. 168 с.
83. Meyers M. A. Dynamics behavior of materials. New York: Wiley, 1994. 283 p.
84. Ильюшин А. А. Пластичность. М: Гостехиздат. 1948. 378 с.
85. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Изд-во ГИФМЛ. 1961. 403 с.
86. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир. 1968. 175 с.

87. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсном нагружении. М.: Высшая школа. 1975. 63 с.

88. Степанов Г. В., Харченко В. В. Динамическая пластичность. Механика неоднородных сред. Новосибирск. 1989. С. 285-299.

89. Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении. К.: Наук. думка. 1991. 288 с.

90. Степанов Г.В., Харченко В. В. Связь напряжений и деформаций в металлах при воздействии импульсной нагрузки. Проблемы прочности. 1984. № 11. С. 32-37.

91. Степанов Г. В., Харченко В. В. Особенности деформирования металлов при скоростях деформации выше 10^4 $с^{-1}$. Проблемы прочности. 1985. № 8. С. 59-64.

92. Харченко В. В. Моделирование процессов высокоскоростного деформирования материалов с учетом вязкопластических эффектов. Киев.: ИПП НАН Украины. 1999. 280 с.

93. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения. Успехи механики. 1985. №4. С. 21-65.

94. Кукуджанов В. Н. Метод расщепления упругопластических уравнений. Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98-107.

95. Кукуджанов В. Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. 212 с.

96. Мосаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. Думка. 1988. 288 с.

97. Гудрамович В. С., Деменков А. Ф. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. АН Украины, Ин-т техн. механики. Киев: Наук. Думка. 1991. 172 с.

98. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Севрюков В. И., Янютин Е. Г.Скоростное деформирование элементов конструкций Киев: Наук. Думка. 1989. 192 с.
99. Луговой П. З., Чабан В. Н. Оболочечная конструкция при действии импульсной нагрузки Докл. АН УССР. 1983. А, № 2. С. 36-38.
100. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. М.: Машиностроение. 1977. 224 с.
101. Булычев Г. Г., Пшеничников С. Г. Исследование нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при ударных нагрузках. Изд. РАН. Мех. тверд. Тела. 1995. № 3. С. 197-203.
102. Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортов В. Е. Ударно волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус К. 1996. 488с.
103. Кнетс И. В. Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне. 1971. 147 с.
104. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 399 с.
105. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. Киев: Наук. Думка. 1978. 184 с.
106. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2-х т. Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка. 1980. Т.1. 536 с., Т.2. 771 с.
107. Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики тонкостенных конструкций при импульсных воздействиях. Прикл. проб. прочности и пластичности. 1981. Вып. 18. С. 57-66.
108. Динамические задачи механики деформируемых сред. Под ред. Х. А. Рахматулина, И. Н. Зверева. М.: Изд-во МГУ. 1990. 191 с.
109. Аржанников Г. А., Глазырин В. П. Моделирование динамического нагружения толстостенного цилиндра с учетом упрочнения. Мех. деформ. тв. тела. Томск . 1992. С. 47-52.

110. Баженов В. Г., Кибец А. И., Цветкова И. Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20-26.

111. Тарлаковский Д. В., Горшков А. Г. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит. 1995. 352 с.

112. McMeeking R. M., Rice J. R. Finite element formulations for problems of large elasticplastic deformation. International Journal of Solids and Structures. 1975. Vol. 121. P. 601-616.

113. Kruczka L., Novacki W. K. New application of the Hopkinson pressure bar technique to determining dynamic behavior of materials. Mechanica Teoretychna i Stosovna. 1996. 2. № 34. P. 259-280.

114. Брагов А. М., Константинов А. Ю., Ломунов А. К. Экспериментально-теоретическое изучение процессов высокоскоростного деформирования конструкционных материалов. Приволжский научный журнал. 2008. №3. С. 27-33.

115. Johnson G. R., Cook W. H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics. 1983. P. 541-547.

116. Zerilli E. J., Armstrong R. W. Dislocation mechanics based constitutive relations for material dynamics calculations. J. Appl. Phys. 1987. 61(5). P. 1816-1825.

117. Cadoni E., Singh N. K., Singha M. K., Gupta N. K. Dynamic tensile behavior of multi phase high yield strength steel. Materials & Design. 2012. № 32 (10). P. 5091-5098.

118. Dursun T., Soutis C. Recent developments in advanced aircraft aluminium alloys. Materials & Design. 2014. Volume 56. P. 862-871.

119. Трощенко В. Т., Лебедев А. А., Стрижало В. А., Степанов Г. В., Кривенюк В. В. Механика поведения материалов при различных видах нагружения. Киев. 2000. 566 с.

120. Колодяжный А. В., Клименко В.Г. Экспериментальная регистрация высокоскоростных упругопластических деформаций металлов Динамика и прочность машин. 1976. Вып. 23. С. 65-68.

121. Колодяжный А. В. Маштаков Н. М., Севрюков В. И. Упругая реакция цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной импульсной нагрузки Проблемы машиностроения. 1985. Вып. 24. С. 9-12.

122. Воробьев Ю. С. Колодяжный А. В., Ярыжко А. В. Скоростное упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки при локальном ударе. Вісник національного технічного університету «ХПІ», «Динаміка і міцність машин». Харків: НТУ «ХПІ». 2008. Вип. 36. С. 40-48.

123. Колодяжный А. В., Скляр В.А., Ярещенко В.Г. Осесимметричное упругопластическое деформирование цилиндрических оболочек с учетом изгиба и растяжения при импульсном нагружении АН Украины: Ин-т пробл. машиностроения. Харьков. 1991. 16 с.

124. Колодяжный А. В., Скоблик И. И. Экспериментальное исследовани деформированного состояния стальной цилиндрической оболочки при поперечном ударе. Харьков. 1985. 14 с.

125. Колодяжный А.В., Смелянский В.А. Экспериментальное исследование напряженного состояния полусферической стальной оболочки при ударе и импульсном нагружении. Пробл. прочности. 1973. № 10. С. 117-120.

126. Астанін В.В., Щегель Г.О. Моделювання ударної взаємодії при висо-ких швидкостях. Технологические системы. Киев. 2013. № 2(63). С. 39-43.

127. Астанін В.В., Щегель Г.О. Вероятностный поход к задаче повреждений композиционных пластин при ударе. Проблемы прочности. Киев. 2017. № 2. С. 84-98.

128. Баженов В. Г., Гордиенко А. В., Зефиров С. В., Кибец А. И., Крушка Л. Моделирование деформирования и разрушения конструкций из кусочно-однородных материалов с регулярной структурой при взрывном нагружении. Матем. Моделирование. 2006. С. 86-92.

129. Огородников В.А., Перлов В.Е. Экспериментально-расчетный метод определения энергии деформации. поврежденных в результате ДТП транспортных средств. Повышение качества, надежности и долговечности технических систем и технологических процессов. Сборник трудов IX Международной научно-технической конференции. Шарм эль Шейх, Египет. 2010. С. 84-86.

130. Бреславский Д.В., Наумов И.В. Експериментальне дослідження руйнування тонких пластин. Вісник НТУ «ХПІ». Харків, НТУ «ХПІ». 2009. № 42. С. 25-28.

131. Бреславский Д.В., Метелев В.А., Морачковский О.К. Анизотропия ползучести и повреждаемости элементов конструкций при циклическом нагружении Проблемы прочности. Киев. 2015. №2. С. 21-29.

132. Лавінський Д. В. Морачковський О. К. Пружно-пластичне деформування складених конструкцій при дії електромагнітного поля. Вібрації в техніці та технологіях. 2016. № 3 (83). С. 103-108.

133. Breslavsky D., Chuprynin A., Morachkovsky O., Tatarinova O., Will Pro. Deformation and damage of nuclear power station fuel elements under cyclic loading. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Volume: 54 issue: 5-6, P. 348-359.

134. Булычев Г. Г. Математическое моделирование динамики и динамического разрушения деформируемых твердых тел. Часть 1. Модели. Методы. Алгоритмы. Тесты: учебное пособие. М.: РИО МИРЭА. 2010. 167 с.

135. Булычев Г. Г. Математическое моделирование динамики и динамического разрушения деформируемых твердых тел. Часть 2. Динамика. Расслоение. Разрушение: учебное пособие. М.: РИО МИРЭА. 2010. 200 с.

136. Трусов П. В., Волегов П. С., Кондратьев Н. С.Физические теории пластичности : учеб. Пособие. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. 244 с.

137. Беликова А. Ф., Буравова С. Н., Петров Е. В. Локализация деформации при динамических нагрузках. Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 8. С. 68-75.

138. Wright T. W. The physics and mathematics of adiabatic shear bands. Cambridge University Press. 2002. 240 p.

139. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М.: Наука. 1968. 310 с.

140. Olson G. B., Mescall J. F., Azrin M. Shock Waves and HighStrain-Rate Phenomena in Metals. NY, London: Plenum Press. 1983. P. 67-97.

141. Rogers H. C, Shastry C. V., Meyers M. A., Murr L. E. Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals. NY, London: Plenum Press. 1983. P. 285-293.

142. Moss G. L., Meyers M. A., Murr L. E. Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals. NY: Plenum Press. 1981. P. 299-312.

143. Zukas J. A., Nicolas T., Swift H. F., Greszezuk L. B., Curran D. R. Impact Dynamics. New York: Wiley, 1982. 249 p.

144. Zukas J. A. High Velocity Impact Dynamics. New York: Wiley, 1990. 593 p.

145. Моссаковский П. А., Брагов А. М., Колотников М. Е., Антонов Ф. К. Investigation of the shear thickening fluid dynamic properties and its influence on the impact resistance of multilayered fabric composite barrier. Proceedings of 11th international LS-DYNA users conference, LSTC Publishment, Ливермор (раздел 5). 2010. P. 33-43.

146. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods. World Scientific Publishing. 2013. 311 p.

147. Anderson Ted L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, Fourth Edition. CRC Press. 2017. 259 p.

148. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. К.: Наук. думка, 1976. 416 с.

149. Муйземнек А. Ю. Богач А. А. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS-DYNA. Пенза: инф. изд. Центр ПГУ. 2005. 106 с.

150. Трощенко В.Т., Лебедев А. А., Стрижало В. А., Степанов Г. В., Кривенюк В. В. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. К.: Логос. 2000. 571 с.

151. Колодяжный А. В., Маштаков Н. М., Севрюков В. И. Упругая реакция цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной импульсной нагрузки. Проблемы машиностроения. 1985. Вып. 24. С. 9-12.

152. Raftenberg M. N. A shear banding model for penetration calculations. International journal of impact engineering. 2001. Vol. 25. P. 337-350.

153. Morka A., Zduniak B., Niezgoda T. Numerical aspects of penetration simulation. Problems of mechatronics. Armament, aviation, safety engineering. 2011. № 3 (5). P. 21 – 31.

154. Зиньковский А. П. Токарь И. Г., Круц В. А. Влияние параметров локального поверхностного повреждения на собственные частоты колебаний конструктивных элементов. Проблемы прочности. Киев. 2015. № 2. С. 5-11.

155. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment. Journal of Applied Mechanics. 2008. Vol. 75, № 5. 051004, P. 1-9.

156. Hallquist, J. O. LS-DYNA Theory manual. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), Livermore, California 94551. 2006. 680 p.

157. Dong An., Tian Y. General formula to calculate the fragment velocity of warheads with hollow core. International Journal Impact Engineering. 2018. №11 (5). P. 477-496.

158. Cowper G., Symonds P. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. Tech. Rep. Brown University: Division of Applied Mathematics. 1957. 28 p.

159. Peixinho N., Pinho A. Study of viscoplasticity models for the impact behaviour of high-strength steels. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2007. № 2. P. 114-123.

160. Степанов Г. В., Федорчук В. А. Локализованный сдвиг в металлах при ударном нагружении. Пробл. прочности. 2000. № 2. С. 27-42.

161. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наукова думка. 1981. 496 с.

162. Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon' S. A. Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation. Strength of Materials.2013. Vol. 45. №. 1. P.1-9.

163. Hart E. L., Hudramovich V. S., Ryabokon' S. A., Samarskaya E. V. Numerical simulation of stress-strain state for nonhomogeneous shell-type structures based on the finite element method. Modeling and Numerical Simulation of Material Science. 2013. Vol.3, № 4. P. 155-157.

164. Лепихин П. П., Ромащенко В. А. Прочность неоднородных анизотропных полых цилиндров при импульсном нагружении. К.: Наук. думка, 2014. 231 с.

165. Лепихин П. П., Ромащенко В. А. Прочность толстостенных оболочек вращения при импульсном нагружении. К.: Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, 2010. 320 с.

166. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2-х т. –М.: Наука. 1966. Т.2. 480 с.

167. Southwell R. L. Relaxation methods in theoretical physics. Oxford: Oxford Univ. Press. 1946. 346 p.

168. Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by framework method. J. of Applied Mechanics. 1941.Vol. №8. P. A169-A175.

169. Courant R. Variational methods for solutions of problems of equilibrium and vibration. Bulletine of the American Mathematical Society. 1943. № 49. P.1-23.

170. Argiris J. H. Energy theorems of structural analysis. Part I. General theory. Aircraft Engineering. 1954.Vol.26, № 308. P. 347-356.

171. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp J. L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. of Aeronautic Sciences. 1956. №23. P.805-823.

172. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир. 1975. 480 с.

173. Лифанов И. К., Саакян А. В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом теп-ловыделения. Прикл. математика и механика.1982.Т.46, вып.3. С. 494-501.

174. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.

175. Сахаров А. С., Кислоокий В. Н., Кирический В. В., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа. 1982. 480 с.

176. Лук'яненко С. О. Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". К. : Політехніка, 2004. 236 с.

177. Лук'яненко С. О. Чисельні методи розв'язування диференційних рівнянь. Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". К.: Знання України. 2007. 135 с.

178. Муйземнек А. Ю., Богач А. А. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS-DYNA. Пенза: инф. изд. Центр ПГУ, 2005. 106 с.

179. McMeeking R. M., Rice J. R. Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids and Structures. 1975. Vol. 121. P. 601 616.

180. Морозов Е. М., Муйземнек А. Ю., Шадский А. С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. Изд. 2-е, испр. М.: ЛЕНАНД. 2010. .456 с.

181. Миниус Г. М, Расчет флаттера реактивного сопла с продольными сквозными канавками. Численные методы в механике деформируемого твердого тела. 1987. 1987. №2. С. 15-22.

182. Диткин В. В., Орлов Б. А., Пшеничнов Г. И. Численное исследование флаттера конических оболочек Механика твердого тела. 1993. №1. С. 185-189.

183. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа. 1983. 284 с.

184. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М: Наука. 1978. 344 с.

185. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout. International Journal of Non-linear Mechanics. 2016. № 81. P. 103-114.

186. Васильев А. В. Флаттер конической оболочки при внешнем обтекании сверхзвуковым потоком газа. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 32-36.

187. Krumharr H. The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells. AIAA Journal. 1963. Vol. 1. P. 1448-1449.

188. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.

189. Leissa A. W. Vibrations of Shells. Washington, DC.: U.S. Government Printing Office. 1973. NASA SP 288.

190. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S. Nonlinear problems of oscillations of thin shells. International Applied Mechanics. 1998. 34, №8. P. 703-728.

191. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Том 1. М: Машиноведение. 1968. 728 с.

192. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник. Под общей редакцией В. И. Мяченкова. М: Машиностроение. 1989. 456 с.

193. Григолюк Э. И. Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М: Наука. 1978. 344 с.
194. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЦЭВМ. М.: Машиностроение. 1976. 282 с.
195. Gulyayev V. I., Solovjev I. L., Belova M. A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. International Journal of Solids and Structures. 2004. № 41. P. 3565-3583.
196. Karamian-Surville Ph. Numerical experiments on propagation of singularities across an edge in thin parabolic shells. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB. Mechanics. 2001. № 329. P. 75-79.
197. Pellicano F., Avramov K. V. Linear and nonlinear dynamics of a circular cylindrical shell connected to a rigid disk. Commun. in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. № 12. P. 496-518.
198. Dahlberg C., Faleskog J.: Strain gradient plasticity analysis of the influence of grain size and distribution on the yield strength in polycrystals. Europ. Journal Mech.-A/Solids. 2010. № 44. P. 1-16.
199. Tornabene F., Viola E.: Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution, Europ. Journal Mech.- A/Solids. 2009. № 28, P. 991-1013.
200. Viola E., Tornabene F. Free vibrations of three parameters functionally graded parabolic panels of revolution, Mech. Res. Comm. 2009. № 36, P. 587-594.
201. Zhao X. Li., Liew K. M., Ng T.Y. The element-free kp-Ritz method for free vibration analysis of conical shell panels. Journal of Sound and Vibration. 2006. № 295. P. 906-922.
202. Lim C.W. Vibration of cantilevered laminated composite shallow conical shells. International Journal of Solids and Structures. 1998. № 35. P. 1695-1707.

203. Ross C. Vibration and elastic instability of thin-walled conical shells under external pressure. Computers & Structures. 1995. № 55. P. 85-94.

204. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Киев: “Наукова думка”. 1980. 367 с.

205. Irie, T., Yamada, G. and Kaneko, Y. Free vibration of a conical shell with variable thickness. Journal of Sound and Vibration. 1982, 82, 83-94.

206. Ross C., Johns T., Stanton R. M.Vibrations of circular cylindrical shells under external water pressure. Proc. IMechE., J Mech. Eng. Sci.. 1992. № 206. P. 79-86.

207. Stanley A. J., Ganesan N. Free vibration characteristics of stiffened cylindrical shells. Computers & Structures. 1997. № 65,P. 33-45.

208. Srinivasan R. S., Krishnan P. A. Dynamic analysis of stiffened conical shell panels. Computers and Structures. 1989. № 33, P. 831-837.

209. Бочкарев С. А., Матвеенко В.П. Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком. Вычислительная механика сплошных сред. Т.1. 2008. № 3. С. 25-33.

210. Миниус Г. М, Расчет флаттера реактивного сопла с продольными сквозными канавками. Численные методы в механике деформируемого твердого тела. 1987. №2. С. 15-22.

211. Диткин В. В., Орлов Б. А., Пшеничнов Г. И. Численное исследование флаттера конических оболочек. Механика твердого тела. 1993. №1. С. 185-189.

212. Bismarck – Nasr M. N., Finite elements in aeroelasticity of plates and shells. Appl. Mech. Rev. 1996. № 49 (10). P. 17-24.

213. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 704 с.

214. Bich D. H., Dung D. V., Nam V. H. Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels. Composite Structures. 2012. № 94. P. 2465-2473.

215. Rao S. S., Reddy E. S. Optimum design of stiffened conical shell with natural frequency constraints. Computer and Structures. 1981 № 14, P. 103-110.

216. Sharma C. B., Johns D. J. Vibration characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell. J. Sound and Vibrations. 1971. № 14, P. 459-474.

217. Ruzzene M. Dynamic buckling of periodically stiffened shells: application to supercavitating vehicles. International Journal of Solids and Structures. 2004 № 41. P. 1039-1059.

218. Birman V. Divergence instability of reinforced composite circular cylindrical shells. International Journal Solids and Structures. 1990. № 26. P. 571-580.

219. Скосаренко Ю. В. Собственные колебания ребристой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с упругим основанием. Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 5. С. 111-118.

220. Беспалова Е. И., Григоренко Я. М., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Исследование свободных колебаний ортотропных оболочек вращения с переменными параметрами. Прикладная механика. 1978. Т. 14. № 8. С. 43-50.

221. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya. , Efimova T. L. Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2008. Vol. 3, № 5. P. 929-952.

222. Рассказов А. О., Бузун И. М. , Прокопенко Ю. Н. Применение метода Бубнова-Галеркина в сочетании с методом конечных элементов для решения задачи о собственных колебаниях многослойных ортотропных пластин; КАДИ. Киев, 1985. 58 с.

223. Луговой П. З., Мейш В. Ф. Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении. Проблемы прочности. 2000. № 4. С. 86-96.

224. Луговой П. З. Динамика оболочечных конструкций при импульс-ных нагрузках (обзор). Прикладная механика. 1990. Т. 28, № 8. С. 3-20.

225. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. Ф. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. Киев: Изд.-во полиграф. Центр «Киевский университет». 2005. 536 с.

226. Луговой П. З., Сиренко В. Н., Скосаренко Ю. В., Батутина Т. Я. Динамика дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки при действии локального импульсного нагружения. Прикладная механика. 2017. Т. 53, № 2. С. 71-80.

227. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков: Міськдрук. 2011. 376 с.

228. Poe C. C. Impact damage and residual tension strength of a thick graphite/epoxy rocket motor case. Journal of Spacecraft and Rockets. 1992. Vol.29. № .3. P. 394-404.

229. Renganathan K., Nageswara-Rao B., Jana M.K. Failure pressure estimations on a solid propellant rocket motor with a circular perforated grain. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1999. № 76. P. 955-963

230. Montesano J., Behdinan K., Greatrix D. R., и др. Internal chamber modeling of a solid rocket motor: Effects of coupled structural and acoustic oscillations on combustion. Journal of Sound and Vibration. 2008. № 311. P. 20-38.

231. Yildirim H.C., Ozupek S. Structural assessment of a solid propellant rocket motor: Effects of aging and damage. Aerospace Science and Technology. 2011. № 15. P. 635-641.

232. Chen J.T., Leu S.-Y. Finite element analysis, design and experiment on solid propellant motors with a stress reliever. Finite Elements in Analysis and Design. 1998. № 29. P. 75- 86.

233. Heller R.A., Kamat M.P., Singh M.P. Probability of solid-propellant motor failure due to environmental temperatures. Journal of Spacecraft and Rockets. 1979. № 16. P. 140-146.

234. Heller R.A., Singh M.P. Thermal storage life of solid-propellant motors. Journal of Spacecraft and Rockets. 1983. № 20. P. 144-149.

235. Моссаковский В. И., Макаренков А.Г., Никитин П.И. Прочность ракетных конструкций. М.: Высшая школа. 1990. 359 с.
236. Санін Ф.П., Кучма Л.Д., Джур Є.О. Твердопаливні ракетні двигуни. Дніпропетровськ: ДНУ. 1999. 320 с.
237. Борисов В.А. Конструирование основных узлов и систем ракетных двигателей. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2011. 114 с.
238. Chyuan S.W. Dynamic analysis of solid propellant grains subjected to ignition pressurization loading. Journal of Sound and Vibration. 2003. № 268. P. 465-483.
239. Marimuthu R., Rao B. N. Development of efficient finite elements for structural integrity analysis of solid rocket motor propellant grains. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2013. № 111. P. 131-145.
240. Qu K., Zhan X. Finite element analysis of propellant of solid rocket motor during ship motion. Propulsion and Power Research. 2013. № 2. P. 50-55.
241. Yang L., Wang N., Xie K., Su X., Li S. Influence of strain rate on the compressive yield stress of CMDB propellant at low, intermediate and high strain rates. Polymer Testing 2016. № 51. P. 49-57.
242. Kalaycioglu B., Dirikolu M.H., Celik V. An elasto-viscoplastic analysis of direct extrusion of a double base solid propellant. Advances in Engineering Software. 2010. № 9. Vol. 41. P. 1110-1114.
243. Su W., Wang N., Li J., Zhao Y., Yan M. Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants. Journal of Sound and Vibration. 2014. № 333. P. 2226-2240.
244. Li Q., Liu P., He G.Fluid-solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor. Acta Astronautic. 2015. № 110. P. 180–190.
245. Dobyns A.L. Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads. AIAA Journal. 1981. № 19. P. 642-650.
246. Bert C. W., Kumar M. Vibration of cylindrical shells of bimodulus composite materials. Journal of Sound and Vibration. 1982. № 81. P. 107-121.

247. Reddy J. N., Liu C. F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. International Journal of Engineering Science. 1985. № 23. P. 319-330.

248. Soedel W. Simplified equations and solutions for the variation of orthotropic cylindrical shells. Journal of Sound and Vibration. 198.3 № 97. P. 226-242.

249. Bhaskar K., Varadan T. K. A higher-order theory for bending analysis of laminated shells of revolution. Composite Structures. 1991. № 40 P. 815-819.

250. Reddy J. N., Khdeir A. A. Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories. AIAA Journal 1989. № 27. P. 1808-1817.

251. Hufenbach W., Holste C., Kroll L.Vibration and damping behaviour of multi-layered composite cylindrical shells. Composite Structures. 2002. № 58. P. 165-174.

252. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. Composite Structures. 2013. № 98. P. 169-191.

253. Toorani M. H., Lakis A. A. General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects. Journal of Sound and Vibration. 2000. № 237. P. 561-615.

254. Artioli E., Viola E., Free vibration analysis of spherical caps using a G.D.Q. Numerical solution. Journal Pressure Vessel Technol. 2006. № 128 (3). P. 370-378.

255. Bhrawy A., Taha T, Machado J. A review of operational matrices and spectral techniques for fractional calculus. Nonlinear Dynam. 2015. № 81 (3), P. 1023-1052.

256. Choe K., Wang Q., Tang J. Vibration analysis for coupled composite laminated axis-symmetric doubly-curved revolution shell structures by unified Jacobi-Ritz method. Compos. Struct. 2018. № 194. P. 136-157.

257. Lee J. Free vibration analysis of joined spherical-cylindrical shells by matched Fourier-Chebyshev expansions. International Journal of Mechanical Sciences. 2017. Vol. 122, P. 53-62.

258. Li H. Pang F. Chen H. A semi-analytical approach to analyze vibration characteristics of uniform and stepped annular-spherical shells with general boundary conditions. Eur. Journal Mech. A Solid. 2019. № 74, P. 48-65.
259. Oliazadeh P., Farshidianfar A. Analysis of different techniques to improve sound transmission loss in cylindrical shells. Journal Sound Vib. 2017. Vol. 389, P. 276-291.
260. Oliazadeh P., Farshidianfar M.H., Farshidianfar A. Exact analysis of resonance frequency and mode shapes of isotropic and laminated composite cylindrical shells; Part I: analytical studies. Journal Mech. Sci. Technol. 2013. № 27 (12), P. 3635-3643.
261. Oliazadeh P., Farshidianfar M.H., Farshidianfar A. Exact analysis of resonance frequency and mode shapes of isotropic and laminated composite cylindrical shells; Part II: parametric studies. Journal Mech. Sci. Technol. 2013.
№ 27 (12), P. 3645-3649.
262. Shang X.. An exact analysis for free vibration of a composite shell structure-hermetic capsule. Appl. Math. Mech. 2001. № 22 (9), P. 1035-1045.
263. Tornabene F., Viola E., Inman D.J. 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures. Journal Sound Vib. 2009. Vol. 328 (3), P. 259-290.
264. Wang Q., Shao D., Qin B. A simple first-order shear deformation shell theory for vibration analysis of composite laminated open cylindrical shells with general boundary conditions. Compos. Struct. 2018. Vol. 184. P. 211-232.
265. Patel B.P., Nath Y., Shukla K.K. Nonlinear thermo-elastic buckling characteristics of crossply laminated joined conical-cylindrical shells. International Journal of Solids and Structures 2006. № 43. P. 4810-4829.
266. Wu S.H., Qu Y.G., Hua H.X. Vibration characteristics of a spherical-cylindrical-spherical shell by a domain decomposition method. Mech. Res. Commun. 2013. № 49, P. 17-26.

267. Panga F., Lia H., Cuib J., Dua Y., , Gaoa C.Application of flügge thin shell theory to the solution of free vibration behaviors for spherical-cylindrical-spherical shell: A unified formulation. European Journal of Mechanics A Solids. 2019. № 74. P. 381–393.

268. Військовий космос України. Український мілітарний портал: http://mil.in.ua/.

269. Дзюба А. П., Селиванов Ю. М. Некоторые подходы к решению проблемы рационального распределения материала тонкостенных структур. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Ліра, 2012. Вип. 13. С. 121-130.

270. Дзюба А. П. Модели оптимального проектирования оболочечных конструкций на основе принципа максимума Понтрягина с ограничениями общего вида. Техническая механика. 2005. №1. С.118-125.

271. Hudramovich V. S., Dzjuba A. P. Contact interaction and optimization of locally loaded shell structures. Journal of Mathematical Science. 2009. Vol.162, №2. P.231-245

272. Gold V. M. Fragmentation model for large L/D (Length over Diameter) explosive fragmentation warheads. Def Tech. 2017. V. 13. P. 300-309.

273. Liang B., Zhou J. Q., Feng G. P., Lu Y. G. Experimental research on blast power of fiber reinforced anti-hard target warhead. Def Tech. 2017. V. 13. P. 212-220.

274. Li D., Hou H., Chen C., Zhu X., Li M., Yi Q. Experimental study on the combined damage of multi-layered composite structures subjected to close-range explosion of simulated warheads. International Journal Impact Engineering. 2018. V. 114. P. 133-146.

275. Heilig G., Durr N., Sauer M., Klomfass A. Mesoscale analysis of sintered metals fragmentation under explosive and subsequent impact loading. Proc Engin 2013 V.58 P.653–62.

276. An X., Dong Y., Liu J., Tian C. General formula to calculate the fragment velocity of warheads with hollow core. International Journal Impact Engineering. 2018. V. 113. P. 1-8.

277. Dhote K.D., Murthy K.P., Rajan K.M., Sucheendran M.M. Dynamics of multi layered fragment separation by explosion. International Journal Impact Engineering. 2015. V. 75. P. 194-202.

278. Wang X.Y., Wang S.S., Ma F.. Experimental study on the expansion of metal cylinders by detonation. International Journal Impact Engineering. 2018. V. 114. P. 147-198.

279. Lloyd R.M., Sebeny J.L. Novel penetrator study for defeat of ballistic missile payloads. International Journal Impact Engineering 2006. V. 33. P. 380-389.

280. Dhari R.S., Sekar A. Split warhead simultaneous impact. Def Tech. 2017. V. 13. P. 434-443.

281. Wang W., Xiong S., Wang S., Song S., Lai C. Three dimensional impact angle constrained integrated guidance and control for missiles with input saturation and actuator failure. Aerosp Sci Technol. 2016. V. 53. P. 169-187.

282. Konokman H., Kayran A., Kaya M. Aircraft vulnerability assessment against fragmentation warhead. Aerosp Sci Technol. 2017. V. P. .

283. Yang Zh. Finite element simulation of response of buried shelters to blast loadings. Finite Elements in Analysis and Design. 1997. V. 24, Is. 3. P. 113-132.

284. Casalino G., Rotondo A., Ludovico A. On the numerical modelling of the multiphysics self piercing riveting process based on the finite element technique. Adv Engin Softw. 2008. V.39. P. 787-95.

285. Kurşun A., Şenel M., Enginsoy H.M. Experimental and numerical analysis of low velocity impact on a preloaded composite plate. Adv Engin Softw. 2015. V.90. P. 41-52.

286. Perzyńskia K., Wrożynab A., Kuziakb R., Legwanda A., Madeja L. Development and validation of multi scale failure model for dual phase steels. Finite Elements Anal Design. 2017. V.124. P. 7-21.

287. Bettinotti O., Allix O., Perego U., Oancea V., Malherbe B. Simulation of delamination under impact using a global-local method in explicit dynamics. Fin Elem Anal Des 2017 V.125 P 1-13.

288. Lu J., Li L. Determining the reference geometry of plastically deformed material body undergone monotonic loading and moderately large deformation. Fin Elem Anal Des 2017 V.130 P 1-11.

289. Idesman A., Bhuiyan A., Foley J.R. Accurate finite element simulation of stresses for stationary dynamic cracks under impact loading. Fin Elem Anal Des 2017 V.126 P 26-38.

290. Янчевський І.В. Ідентифікація нестаціонарних навантажень, що діють на пружнодеформований елемент конструкції. Інформаційні системи, механіка та керування. 2016. № 14. С. 74-82.

291. Янчевский И.В. Нестационарные колебания электроупругой цилиндрической оболочки в акустическом слое. Прикл. механика. 2018. Т. 54, № 4. С. 70-82.

292. Tada Y., Nishihara Sh. Optimum shape design of contact surface with finite element method. Advances in Engineering Software. 1993. V. 18, Is. 2. P. 75-85.

293. Fletcher C. Computational techniques for fluid dynamics. Fundamental and General Techniques. Springer Verlag: Classical Continuum Physics. 1998. 409 p.

294. Федорчук В. А. Локализация пластического сдвига при ударном нагружении. Проблемы прочности. 2002. № 3. С. 69-72.

295. Мейерс М. А., Мурр Л. Е.. Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов. М.: Металлургия, 1984. 512 с.

296. Коттрелл А. Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. Москва: Металлургиздат, 1958. 267 с.

297. Dietenberger M, Buyuk M., Kan C. Development of a high strain-rate dependent vehicle model. LS-DYNA Anwenderforum: Bamberg, 2005. B-III-1-10.

298. Krieg R. D., Key S. W. Implementation of a Time Dependent Plasticity Theory into Structural Computer Programs. New York: N.Y., 1976. P. 125-137.

299. Abramov A. V., Bragov A. M., Lomunov A. K., Konstantinov A. Yu., Kruszka L., Sergeichev I. V. Experimental and numerical analysis of high strain rate behavior of aluminum alloys AMg-6 and D-16 . Journal de Physique. 2006. №. IV. P. 134 143.

300. Bragov A.M., Konstantinov A.Yu., Kruszka L., Lomunov A.K. Behavior of stainless steel at high strain rates and elevated temperatures. Experiment and mathematical modelling, Materials Physics and Mechanics, 2018. №. 40 (2). P. 133-145.

301. Коваленко А. Д. Термоупругость. К.: Вища школа, 1975. 215 с.

302. Кукуджанов В. Н., Левитин А. Л., Синюк В. С. Численное моделирование повреждающихся упругопластических материалов. М.: ИПМех РАН. 2006. 55 с.

303. Зубов В. И., Степанов Г. В., Широков А. В. Влияние скорости деформации на предел текучести сталей различной прочности. Проблемы прочности. 2003. № 5. С. 113-121.

304.Ярижко О. В. Експериментально-розрахунковий аналіз деформацій циліндричних оболонок в зоні удару: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.09; НАН України, Ін-т пробл. машинобуд. ім. А. М. Підгорного. Харків, 2010. 18 с.

305. Годунов С. К. Рябенький В. С. Разностные схемы: Введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.

306. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3. М.: Наука, 1989. 616 с.

307. Hallquist, J. O. LS-DYNA Theory manual. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), Livermore, California 94551, 2006. – 680 p.

308. Онищик И. И. Испытания и обеспечение надежности авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Изд-во МАИ. 2004. 336с.

309. Иноземцев А. А., Нихамкин М. А., Сандрацкий В. Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Машиностроение, 2008. Т.2. 368с.

310. Storace A. F., Nimmer R. P., Ravenhall R. Analytical and Experimental Investigation of Bird Impact on Fan and Compressor Blading. Journal of Aircaft. 1984. V. 21, Is. 7. P. 520-527.

311. Нихамкин М. Ш., Воронов Л. В., Семёнова И. В. Экспериментальное исследование повреждения лопаток компрессора при попадании посторонних предметов. Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2009, Пермь: ПГТУ. С.364-367.

312. Орленко Л.П. Физика взрыва. Том 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 432 с.

313. Бейкер У., Кокс П. Взрывные явления. Оценка и их последствия. Книга 1. М.: Мир, 1986. 319 с.

314. Бейкер У., Кокс П. Взрывные явления. Оценка и их последствия. Книга 2. М.: Мир, 1986. 384 с.

315. Богуслаев А. В. Качан А. Я., Попов В. В. Влияние повреждений на выносливость рабочих лопаток компрессора ГТД при эксплуатации. Авіаційно-космічна техніка і технологія: Зб. наук. пр. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т"; Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2002. Вип.34. Двигуни та енергоустановки. С.115-118.

316. Нихамкин, М.Ш., Воронов Л.В., Семёнова И.В. Экспериментальное исследование повреждения лопаток компрессора при попадании посторонних предметов. Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. Пермь: ПГТУ, 2009. С.364-367.

317. Al-Zubaidy H, Xiao-Ling Z, Al-Mihaidi R. Year. Experimental investigation of bond characteristics between CFRP fabrics and steel plate joints under impact tensile loads. Composite Structures. 2011. № 94 (2). P. 510-518.

318. Cho S., Ogata Y., Kaneko K. Strain-rate dependency of the dynamic tensile strength of rock. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2003. № 40 (5). P. 763-777.

319. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Том 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наук. Думка. 1982. 400 с.

320. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982. 568 с.

321. Филиппов А.П., Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни К.: Наук. Мысль. 1967. 132 с.

322. Колесников К. С., Кокушкин В. В., Борзых С. В., Панкова Н. В. Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. 376 с.

323. Моссаковский В. И., Макаренков А. Г., Никитин П. И., Саввин Ю. И. Прочность ракетных конструкций. М.: Высш. шк., 1990. 359 с.

324. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н. Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд. «Самарский университет». 2001. 562 с.

325. Петушков В. Г. Применение взрыва в сварочной технике. Под ред. Б.Е. Патона. К.: Наук. Думка. 2005. 753 с.

326. Петушков В. Г., Нестеренко В. Ф., Степанов Г. В. Поведение металлов при высокоскоростной деформации и волнообразование при сварке взрывом. Проблемы прочности. 2012. № 4. С. 146-158.

327. Ефанов В.В., Кузин Е.Н., Тимофеев В.Н., Челышев В.П. Устройства и системы пироавтоматики летательных аппаратов на основе линейных кумулятивных зарядов. Общерос. научно-техн. журнал «Полет». 2003. №10. С.42-49.

328. Кузьмицкий И.В. О зависимости пространственно-временной структуры зоны химической реакции от начальной плотности взрывчатого вещества. Физика горения и взрыва. 2004. Т. 40. № 4. С. 106-111.

329. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 2. Приложения М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 387 с.

330. Афраймович Э. Л., Косогоров Е. А., Плотников А. В. Ударно-акустические волны, генерируемые при запусках ракет и землетрясениях. Космические исследования. 2002. Том 40. № 3. С. 1-15.

331. Аврамов К. В., Пирог В. А., Федоров В. М., Пересадько Т. М., Ширяева Н. В. Нестационарные изгибно-изгибно-продольные колебания ракетоносителя с космическим аппаратом. Проблемы машиностроения. 2011. №5. С. 38- 43.

332. Шевцов Е. И. Проектно конструкторские аспекты обеспечения безопасности на этапе разработки ракеты-носителя. Космические технологии: настоящее и будущее. Днепр. 2013. С. 25.

333. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М., Физматгиз. 1961. 339 с.

334. Dowell E. H. Aeroelasticity of plates and shells. Noordhoff International Publishing, Leyden. 1975. 213 p.

335. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек Ин-т проблем механики РАН. М.: Наука, 2006 . С. 247.

336. Маслова А. И., Пироженко А. В. Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах. Космічна наука і технологія. 2009. Т. 15. № 1. С. 13-18.

337. Бочкарев С. А., Матвеенко В. П. Об одном методе исследования аэроупругой устойчивости оболочек вращения. Вестник СамГУ Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 387-399.

338. Meirovitch L. Elements of vibration analysis. McGraw-Hill Publishing Company. 1986. 534 p.

339. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение. 1962. 431 с.

340. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. Том 1. М: Машиноведение. 1968. 728 с.

341. Bismarck–Nasr M. N. Finite elements in aeroelasticity of plates and shells. Appl. Mech. Rev. 1996. № 49 (10). P. 17–24.

342. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЦЭВМ. М.: Машиностроение, 1976. 282 с.

343. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Физматлит. 1997. 264 с.

344. Avramov K. V., Pierre C., Shyriaieva N. Flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of pre-twisted rotating beams with asymmetric cross-sections. Journal of Vibration and Control. 2007. 13. P. 329-364.

345. Breslavsky I. D., Avramov K. V. Effect of boundary conditions nonlinearities on free large-amplitude vibrations of rectangular plates. Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 73, № 3. P. 567-579.

346. Болгарский А. В., Мухачев Г. А., Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача. Москва: Высшая школа. 1975. 494 с.

347. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. Inc. Marcel Dekker, New York, 2005. 361 p.

348. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. Киев: “Издательский дом академпериодика”. 2006. 472 с.

349. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение. 1977. 485 с.

350. Bathe K. J., Wilson E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N. J. 1976. 528 p.

351. Coleman J. N., Khan U., Blau W. J., Gun’ko Yu. K. Small but strong: A review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites. Carbon. 2006. Vol. 44. P. 1624-1652.

352. Young R. J., Kinloch I. A., Gong L., Novoselov K. S. The mechanics of graphenenanocomposites: A review. Composites Science and Technology. 2012. Vol. 72. P. 1459-1476.

353. Njuguna J., Pielichowski K., Fan J. Polymer nanocomposites for aerospaceapplications. Advances in Polymer Nanocomposites. 2012. P. 472-539.

354. Pitchan M. K., Bhowmik S., Balachandran M., Abraham M. Process optimization of functionalized MWCNT/polyetherimide nanocomposites for aerospace application. Materials and Design. 2017. Vol. 127. P. 193-203.

355. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 99. P. 208-217.

356. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. Composite Structures. 2018. Vol. 186. P. 123-138.

357. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. Composite Structures. 2017. Vol. 182. P. 364-379.

358. Reddy J.N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. International Journal of Solids and Structures. 1984. Vol. 20, № 9/10. P. 881-896.

359. Amabili, M., Reddy, J. N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. International Journal of Non-Linear Mechanics 2010. № 45. P. 409-418.

360. Leissa A. Vibration of shells. Acoustical Society of America, 1993. 428 p.

361. Wu S., Qu Y., Hua H. Vibrations characteristics of joined cylindrical-spherical shell with elastic-support boundary conditions. Journal of Mechanical Science and Technology. 2013. ol. 27(5). P. 1265-1272.

362. Дегтярев А. В. Ракетная техника. Проблемы и перспективы: избр. науч.-техн. публ. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2014. 418 с.

363. Гурский А.И., Дегтярев А.В., Кашанов А.Э. Методологический подход к управлению проектами создания ракетных комплексов. Системи озброєння і військова техніка. 2012. Вып.2. С.42-47.

364. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. К.: Наук. думка, 1988. 736 с.

Додаток А

Перелік праць здобувача

1. Chernobryvko M. V., Kruszka L., Vorobiev Yu. S. Thermo-elastic-plastic Constitutive Model for Numerical Analysis of Metallic Structures under Local Impulsive Loadings. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 566. P. 493-498.

2. Chernobryvko M. V., Vorobiev Yu. S., Kruszka L. Method to analyze the effect of the shock-wave loading on building elements. International Journal of Protective Structures. 2012. Vol. 3. № 2. P. 141-146.

3. Vorob'ev Y. S., Kolodyazhnyi A. V., Chernobryvko M. V., Yareshchenko V. G., Kruszka, L. Theoretical-experimental analysis of structural components separation upon local impulse loading. Strength of Materials. 2002. Vol. 34. № 5. P. 497-499.

4. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. Meccanica. 2014. Vol. 49. № 12. P. 2839-2845.

5. Chernobryvko M. V., Avramov K. V. Natural vibrations of parabolic shells. Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 217. № 2. P.229-238.

6. Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Kazachenko O., Batutina T. J. Dynamic instability of parabolic shells in supersonic gas stream. Meccanica. 2016.Vol. 51. No. 4. P. 939-950.

7. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Suleimenov U. S. Dynamic instability of ring-stiffened conical thin-walled rocket fairing in supersonic gas stream. Journal of Mechanical Engineering Science. 2016. Vol. 230(I). P. 55–68.

8. Avramov K., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A. Dynamics of solid propellant motor composite casing under impact pressure. Meccanica. 2018. Vol. 53, № 13. P. 3339-3353.

9. Chernobryvko M., Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamics of thin-walled elements of rocket engine under impact loads. Key engineering materials. 2016. Vol. 715. P. 237-242.

10. Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes

reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. Nonlinear Dynamics. 2019. № 98(3). P. 1853-1876.

11. Martynenko G., Chernobryvko M., Avramov K., Martynenko V., Tonkonozhenko A., Kozharin V., Klymenko D. Numerical simulation of missile warhead operation. Advances in engineering software. 2018. Vol. 123. P. 93-103.

12. Martynenko G., Avramov K., Martynenko V., Chernobryvko M., Tonkonozhenko A., Kozharin V. Numerical simulation of warhead transportation. Defence Technology. Available online 9 March 2020. https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.03.005

13. Kruszka L., Worobiew J. S., Chernobrywko M. W. Deformacja cylindrycznych konstrukcji pod dzialaniem dwoch ruchomych obciazen impulsowych. Biuletyn WAT. 2006. Vol. LV. № 02. P. 159-169.

14. Чернобрывко М. В. Оценка прочности элементов конструкций под действием подвижной ударной нагрузки. Вісник ХНТУСГ. 2008. Вип. 69. С. 103-109.

15. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Ярыжко А. В. Нелинейное деформирование конструкций при локальном нагружении. Механіка та машинобудування. 2007. № 1. С. 89-95.

16. Чернобрывко М. В. Оценка динамической прочности устройств ударного действия в аварийных ситуациях. Вісник ХНТУСГ. 2010. Вып. 100. С. 268-272.

17. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Воздействие подвижной нагрузки на плиту, лежащую на упругом основании. Автомобільний транспорт. 2005. Вип. 16 С. 192-194.

18. Чернобрывко М. В. Модель скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при импульсном нагружении. Вісник СевНТУ. 2012. Вип. 133. С. 21-26.

19. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Геотехническая механика. 2011. Вып. 93. С. 192-199.

20. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Основные зависимости для анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием импульсных нагрузок. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2011. Вип. 12. С. 40-46.

21. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2010. Вып. 14. С. 87-93.

22. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Анализ динамического напряженного состояния элементов конструкций при импульсном нагружении. Вестник СевГТУ. 2009. Вип. 97. С. 3-6.

23. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Математическое моделирование скоростного деформирования материалов и элементов конструкций. Наукові нотатки. 2009. Вип. 25 (II). С. 31-38.

24. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Проблемы динамической прочности элементов конструкций при ударно-импульсных нагрузках. Вібрації в техніці та технологіях. 2011. № 3 (63). С. 5-10.

25. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование высокоскоростных деформационных процессов с использованием адаптивных вычислительных методов. Механіка та машинобудування. 2009. № 1. С. 112-119.

26. Чернобрывко М. В., Воробьев Ю. С. Скоростное деформирование защитных конструкций под действием локальных импульсных нагрузок. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2012. Вип. 13. С. 406-412.

27. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д., Комяк В. М. Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2014. Вип. 19. С. 162-169.

28. Чернобрывко М. В., Светличная С. Д. Моделирование деформации и разрушения элемента здания при ударно-волновой нагрузке. Проблеми надзвичайних ситуацій. 2015. Вип. 21. С. 127-131.

29. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М.В. Динамическое напряженно-деформированное состояние лопатки при ударе по входной кромке. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2008. № 4(51). С. 54-56.

30. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Динамическое упругопластическое деформирование элементов газовых турбин при локальных ударных нагрузках. Надійність і довговічність машин і споруд. 2008. Вип. 31. С. 7-72.

31. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Локальное импульсное воздействие на оболочечные элементы конструкций. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2005. № 9/25. С. 181-184.

32. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Воздействие импульсных нагрузок на оболочечные элементы ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2003. № 40/5. С. 64-67.

33. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Чернобрывко М. В., Крушка Л. Роль импульсных нагрузок для ГТД. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2002. №34. С. 136-140.

34. Бреславський Д. В., Сєнько А. В., Татарінова О. А., Чернобривко М. В., Аврамов К.В. Числове моделювання розділення конічної оболонки при спрацюванні стрічкового заряду. Технічна механіка. 2020. № 2. С. 57-65.

35. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Сулейменов У. С. Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Техническая механика. 2015. № 1. С. 15-29.

36. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. Космічна наука і технологія. 2015. Т. 21. № 1. С. 10-14.

37. Аврамов К. В., Чернобрывко М. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая устойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Прикладная гидромеханика. 2014. Том 16 (88), № 4. С. 3 10.

38. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Романенко В. Н., Батутина Т. Я., Пирог В. А. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в полете. Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 2, С. 9-16.

39. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. Я., Меша Ю. В. Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Вісник НТУ«ХПИ». 2013. № 63 (1063). С. 131-139.

40. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М., Меша Ю. В., Тишковец Е. В., Жолос О. В. Динамика композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием импульсных нагрузок, описывающих рабочие процессы в двигателе. Космічна наука і технологія. 2017. Т. 23. № 1(104). С. 18-29.

41. Аврамов К. В., Чернобривко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. Космічна наука і технологія. 2019. Т. 25. № 2(117). С. 23-37.

42. . Мартыненко Г. Ю., Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Мартыненко В. Г., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю. Численное моделирование работы боевого снаряжения ракетного комплекса. Технічна механіка. 2018. № 4. С. 90-104.

43. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. Method to analyze of the shock-wave loading on buildings constructions. Proc. of International Seminar on Science and Education, 2011. Rome (Italy). P. 56-58.

44. Bogacz R., Worobjew J., Czernobriwko M., Kruszka L. Oddziaływanie ruchomego obciążenia na płytę na sprężystym podłożu. Materiały XIII Warsztaty Naukowe PTSK «Symulacja w Badaniach i Rozwoju», Warsaw (Poland), 2006. P. 1-2.

45. Воробьев Ю., Крушка Л., Чернобрывко М. Поведение цилиндрических конструкций при воздействии подвижных импульсных нагрузок. Proc. of 13th International scientific and technological conference «Maintenance of infrastructure in crisis situations», Warsaw - Rynia (Poland), 2004. P. 163-171.

46. Chernobryvko M. Kruszka L. Vorobiev Y. Thermo-elastic-plastic constitutive model for numerical analysis of metallic structures under local impulsive loadings. Abstracts book of 8-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013), Osaka (Japan), 2013. P.134.

47. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S. High Strain Rate Deformation Model for Contractions Elements under Local Impulsive Loadings. Proc. of Int. Conference «Shock Waves in Condensed Matter», Kiev, 2012. P. 313-315.

48. Воробьев Ю. С., Чернобрывко М. В. Моделирование динамического напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при импульсных нагрузках. Материалы IX Междунар. науч. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, 2011. С. 160-163.

49. Vorobyov Y., Chernobryvko M., Kruszka L. Strain rate deformation and damage of structural elements under local impulsive loadings. Proc. of Seventh International Symposium on Impact Engineering (ISIE2010), Warsaw (Poland), 2010. P.679-686.

50. Чернобрывко М. В. Воробйов Ю. С. Математичні моделі деформаційних процесів при імпульсному навантаженні. Тези доповідей Міжнародної науково-техничної конференції «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», Київ, 2010. С. 181-182.

51. Воробьев Ю. С. Чернобрывко М. В., Крушка Л. Особенности численного анализа скоростного деформирования элементов конструкций под действием локальных импульсных нагрузок. Proc. of IX Konferencja Naukowo-Techniczna «Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania», Warsaw (Poland), 2005. P.545-551.

52. Chernobryvko M., Kruszka L., Avramov K. Deformation of finned plates under the action of detonation loads. Abstracts book of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienna (Austria), 2014. P. 337-338.

53. Чернобрывко М. В. Теоретико-экспериментальный региональный анализ деформирования цилиндрической оболочки при локальном ударе.

Аннотации докладов IX всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород (Россия), 2006. Т.3. С. 215-216.

54. Chernobryvko M. V. Vorobiev Y. S. Behavior of compound shell under detonation loading. Proc. of 8th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2005. P. 299-302.

55. Крушка Л., Чернобрывко М.В. К вопросу о прочности защитных контейнеров при детонационном воздействии. Proc. of 10th International scientific and technological conference «Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí», Zilina (Slovakia), 2005. P. 295-301.

56. Chernobryvko M. V., Vorobyov Y. S., Mesha Y. V., Kolodyzny A. V. Dinamics of the shell structures under impulse loading. Proc. of 7th Conf. «Shell Structures. Theory and Applications», Gdansk-Jurata (Poland), 2002. P. 65-66.

57. Чернобрывко М. В., Тонконоженко А. М., Аврамов К. В., Меша Ю. В. Моделирование разрушения конструкций ракетно-космической техники при срабатывании детонирующих зарядов. Тезисы докладов VII Международной конф. «Космические технологии: настоящее и будущее». г. Днепр, 2019. С. 45.

58. Chernobryvko M., Avramov K., Mesha Y., Tonkonogenko A., Kruszka L. Dynamic failure time of the truncated conical shell under the local impulse. Proc. of 7th International Conference on Mechanics and materials in design (M2D2017), Albufeira (Portugal), 2017. P. 1521-1522.

59. Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Клименко Д. В., Батутина Т. Я. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Тез. докл. V Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее», г. Днепр, 2015. С.31.

60. Чернобривко М. В., Воробйов Ю. С., Аврамов К. В., Романенко В. М., Тонконоженко А. М. Вібронапруженість оболонок під впливом імпульсних навантажень. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, 2013. С. 180-182.

61. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering

different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes, Nicosia (Cyprus), 2019. P. 371-372.

62. Chernobryvko M. Avramov K., Kruszka L., Tonkonogenko A. Dynamic Strength of Composite Shell under Internal Blast. Proc. of the 4th International Conference on Protective Structures, Beijing (China), 2016. P. 178-187.

63. Chernobryvko M., Martynenko G., Avramov K., Tonkonogenko A., Kozharin V., Martynenko V. Numerical analysis of special rocket structure fracture. Тези доповідей I Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, 2018. С 7-8.

64. Kruszka L., Chernobryvko M., Uspensky B., Avramov K., Martynenko G., Sakhno N., Martynenko V., Mesha Y. Fracture of a special rocket structure under impact loads. Proceedings of the 10-th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2019), Gmunden (Austria), 2019. P. 217-222

65. Чернобривко М. В. Моделювання розділення усіченої конічної оболонки при імпульсному навантаженні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 2020. С 325–326.

Додаток Б

Довідки про використання результатів досліджень

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з наукової роботи
Інституту проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
член-кореспондент НАН України

УКРАЇНА ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ ім. А.М. Підгорного №03534570 НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК

_______________ А.О. Костіков

ДОВІДКА
про участь старшого наукового співробітника, кандидата технічних наук
Чернобривко Марини Вікторівни
у впровадженні розробок Інституту проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України виконував ряд науково-дослідних та науково-технічних робіт для підприємств України. При виконанні держбюджетних тем та господарських договорів Чернобривко Марина Вікторівна була керівником, відповідальним виконавцем та виконавцем цих робіт. Наукові результати, які увійшли в звіти про науково-дослідну роботу за держбюджетними темами, та практичні результати, які увійшли в звіти про науково-технічну роботу за господарськими договорами, є науковими та практичними результатами дисертаційних досліджень Чернобривко М.В. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.

1. Для ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» за господарськими договорами: «Розробка методів і програм розрахунку динамічного напруженого і граничного стану оболонкових конструкцій при

високошвидкісних діях», 2015 р., № SCM YZH SP 03900; «Розробка методів і програм розрахунку тривалості руйнування елементів кріплення БЕ при імпульсному навантаженні», 2016 р., № GR2 YZH SPS 25900; «Перевірка працездатності і механічного стану систем кріплення БЕ при транспортуванні на основі комп'ютерного моделювання технологічних і експлуатаційних впливів», 2017 р., № ДР 0117U003630 (підтверджено Технічним актом № КБ-1 37 приймання науково технічної продукції); за цільовою комплексною програмою НАН України з наукових космічних досліджень у 2013-2020 рр. Чернобривко М.В. була в числі відповідальних виконавців та виконавців робіт. Її участь полягає в наступному:

– в розробці моделей, методів та програм розрахунку динамічного напружено-деформованого і граничного стану композитного корпусу твердопаливного двигуна в робочих режимах навантаження при старті ракети;

– в розробці моделей, методів та програмного забезпечення для визначення форми коливання обтічників ракет і ракет-носіїв при втраті динамічної стійкості в надзвуковому газовому потоці;

– в розробці моделей та програм розрахунку для перевірки працездатності елементів кріплення спеціальної ракетної конструкції при імпульсному навантаженні.

2. На ДП «ЗМКБ «Прогрес» ім. академіка О.Г. Івченка» були використані результати досліджень за держбюджетною темою «Розробка наукових основ комплексного удосконалення міцнісних динамічних властивостей новітніх конструкцій і матеріалів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням технологічних і експлуатаційних факторів», 2006 – 2010 рр., № ДР 0106U000485 (підтверджено Довідкою про використання результатів НДР). Чернобривко М.В. була в числі відповідальних виконавців роботи. Її участь полягає в розробці математичних моделей та методики чисельного аналізу динамічної міцності елементів корпусів газотурбінних двигунів в умовах експлуатаційного руйнування лопаткового апарату.

3. Для ТОВ Науковий центр вивчення ризиків «РИЗИКОН» за господарським договором «Розробка методів моделювання наслідків впливу

ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди», 2006-2009 рр., № ДР 0106U001613 (підтверджено Довідкою про використання результатів НДР) Чернобривко М.В. була відповідальним виконавцем роботи. Її особиста участь полягає в розробці методів моделювання та програм розрахунку наслідків впливу ударно-хвильових навантажень на будівлі та будівельні споруди.

4. Для ВАТ НВП «ОСНАСТКА» (підтверджено Довідкою про використання результатів НДР) та для ДП «Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування» (підтверджено Довідкою про використання результатів НДР) було розроблено «Рекомендації по розрахунку оснастки для обробки матеріалів тиском». Участь Чернобривко М.В. полягає в розробці математичних моделей та методів розрахунку динамічної міцності захисних споруд і оснастки для формоутворення задля підвищення надійності і довговічності оснащення для обробки матеріалів тиском.

Завідувач відділу
надійності та динамічної міцності
Інституту проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України
доктор технічних наук, професор К.В. Аврамов

<table>
<tr><td>СОГЛАСОВАНО

Директор института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

А.В. Русанов</td><td>УТВЕРЖДАЮ

И. о. Главного конструктора и начальника КБ-1
ГП «КБ «Южное»

М.А. Дегтярев</td></tr>
</table>

Технический акт № КБ-1 37
приёмки научно-технической продукции

Настоящий акт составлен о том, что в соответствии с договором №V-55-2017 от 29.05.2017 г. (дело №385-2017) на предприятии принята научно-техническая продукция.

Научно-техническая продукция передана Институтом проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины исх. № 52/839 от 28.11.17 г. и принята ГП «КБ «Южное» вх. № 7790 от 30.11.2017 г.

Научно-техническая продукция условиям договора и технического задания № 12.9698.134 ТЗ удовлетворяет.

Результаты разработки будут использованы по теме «Гром-2» на этапе экспериментальной отработки для анализа механического состояния и работоспособности крепления БЭ при сборке, хранении и транспортировании конструкционной системы с учетом технологических усилий затяжки, трения и контактного взаимодействия элементов, прогнозировании несущей способности оболочечных конструкций при высокоскоростных воздействиях.

Заместитель главного конструктора КБ-1- Начальник комплекса 2	15.12.17	В.Н. Сиренко
Начальник отдела 134	14.12.17	Д.В. Клименко
Начальник сектора отдела 134		А.М. Тонконоженко
Инженер программист I к. отдела 134		В.Ю. Кожарин

Директору ІПМаш України
академіку НАН України
Ю. М. Мацевитому

ДОВІДКА
про використання результатів НДР
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Результати досліджень науковців Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України з бюджетної теми «Розробка наукових основ комплексного удосконалення міцнісних динамічних властивостей новітніх конструкцій та матеріалів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням технологічних та експлуатаційних факторів» були використані на ДП ЗМКБ «Прогрес» ім.. О.Г. Івченко для підвищення вібраційної міцності лопаткових апаратів ГТД.

Головний конструктор
ДП «Івченко-Прогрес»
ім.. академіка О. Г. Івченка В. М. Меркулов

Державне підприємство Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро "ПРОГРЕС" імені академіка О.Г. Івченка
№ 14312921

Rizikon НАУЧНЫЙ ЦЕНТР ИЗУЧЕНИЯ РИСКОВ «РИЗИКОН»

Украина, Луганская обл.
93400, г. Северодонецк,
пр-т. Советский, дом 33В
<u>для переписки:</u>
93411, г. Северодонецк, а/я 44
Тел. (06452) 2 - 75 - 91;
Тел./факс (06452) 2 - 54 - 63
Email: office@ rizikon.lg.ua
№ 1277 от 14.11.08.

Справка

Об использовании результатов НИР Института проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАН Украины

Результаты исследований научных работников Института проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАН Украины по хоздоговору № 281-26 от "27" января 2006 г. «Разработка методов моделирования последствий воздействия ударно - волновых нагрузок на здания и строительные сооружения» и бюджетной теме № II-23-06 «Численное моделирование нестационарного взаимодействия сложных упругих конструкций с жидкостью или газом» были использованы в ООО Научном центре изучения рисков «РИЗИКОН» для оценки повышения динамической прочности элементов конструкций строительных сооружений.

Генеральный директор Э.А. Грановский

Товариство з обмеженою відповідальністю "Науковий центр вивчення ризиків "РИЗИКОН" Сєвєродонецьк Луганської обл. Україна Rizikon ідк. 13396577

СПРАВКА
об использовании результатов НИР
Института проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины
по теме
«РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАСЧЕТУ ОСНАСТКИ
ДЛЯ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ ДАВЛЕНИЕМ»

Результаты работ по бюджетной теме Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины «Разработка научных основ комплексного усовершенствования прочностных динамических свойств новейших конструкций и материалов энергетического и другого оборудования с учетом технологических и эксплуатационных факторов» в виде «Рекомендаций по расчету оснастки для обработки материалов давлением», исполнителями которых является Ю.С. Воробьев, М.В. Чернобрывко, А.В. Ярыжко, внедрены в ОАО НПП «ОСНАСТКА» и использованы для повышение надежности и долговечности оснастки.

Директор,
доктор техн. наук, ст. научн. сотр. В.А. Здор

Начальник научно-производственного
отдела, канд. техн. наук, ст. научн. сотр. Ф.И. Небылицкий

Ученый секретарь,
канд. техн. наук, ст. научн. сотр. В.И. Романский

ВАТ НВП «ОСНАСТКА» 13517472

"ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ДП "Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування",
к.т.н., с.н.с. Котов А.С.

Робота "Рекомендації по розрахунку оснастки для обробки матеріалів тиском" має ціль - розробку математичних моделей, методів розрахунку та рекомендацій по аналізу конструкцій технологічних камер, захисних споруд та боксів, а також оснастки для формоутворення.

При моделюванні швидкісного деформування елементів конструкцій враховуються динамічні характеристики матеріалів. Виконані дослідження нестаціонарного НДС елементів конструкцій при взаємодії з імпульсними навантаженнями.

Результати робіт по бюджетній темі інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгірного НАН України "Розробка наукових основ комплексного удосконалення міцнісних динамічних властивостей новітніх конструкцій та матеріалів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням технологічних та експлуатаційних факторів" у вигляді "Рекомендацій по розрахунку оснастки для обробки матеріалів тиском", виконавцями яких є Ю.С. Воробйов, М.В. Чернобривко, О.В.Ярижко, впроваджено на Державному підприємстві "Харківський науково-дослідний інститут технології машинобудування" і використані для підвищення надійності та довговічності оснастки.

Заступник директора з наукової роботи
к.т.н., доцент В.В. Косенко

Начальгик науково-технічного відділу
к.т.н., с.н.с. О.С. Кобзєв

Вчений секретар
д.т.н., професор О.Я. Мовшович

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор НТУ «ХПІ»

____________ Руслан МИГУЩЕНКО

«05» __10__ 2020 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"
код 02071180

Акт

про використання результатів дисертаційної роботи

Чернобривко Марини Вікторівни

у навчальному процесі Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Комісія у складі:

1. Д.т.н., професор Ларін О.О. – директор навчально-наукового інженерно-фізичного інституту НТУ «ХПІ»;
2. К.т.н., професор Хавін В.Л. – завідувач кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів НТУ «ХПІ»;
3. К.т.н., професор Киркач Б.М. – професор кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів НТУ «ХПІ»,

установила, що при викладанні навчальних дисциплін «Спеціальні питання механіки суцільних середовищ», «Сучасні технології в прикладній механиці», «Спеціальні питання теплопровідності» використовуються математичні моделі, чисельно-теоретичні підходи та спеціальне програмне забезпечення для дослідження напружено-деформованого стану елементів енергетичних машин та ракетно-космічної техніки при високошвидкісних навантаженнях, запропоновані у дисертаційній роботі Чернобривко Марини Вікторівни.

Зазначені розробки Чернобривко М.В. дають можливість істотно підвищити рівень викладання із зазначених дисциплін, а також застосовувати розроблені моделі, методи та підходи при виконанні курсових і дипломних робіт.

Члени комісії:

____________ Олексій ЛАРІН

____________ Валерій ХАВІН

____________ Борис КИРКАЧ