

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Національна академія наук України  
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ЧОРНА ОЛЬГА СЕРГІЇВНА

УДК 519.85

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ**  
**ПЕРЕСТАНОВКАХ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи  
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ О.С. Чорна

Науковий керівник  
доктор технічних наук, професор  
Гребеннік Ігор Валерійович

Харків – 2020

## АНОТАЦІЯ

Чорна О.С. Математичні моделі та методи оптимізації на циклічних перестановках і їх застосування. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, Харків.

Постійне та повсюдне використання обчислювальної техніки в останні десятки років дало масштабного поштовху для розвитку галузі дискретної математики, і зокрема, комбінаторики. В рамках робіт багатьох вчених створено та успішно застосовується широкий спектр різних моделей комбінаторної оптимізації для опису та розв'язання задач проектування, планування, розміщення, класифікації, управління та інших. Математичні моделі цих комбінаторних оптимізаційних задач у багатьох випадках мають складні комбінаторні властивості. Одним з найбільш досліджених і широко використовуваних класів комбінаторних конфігурацій є перестановки різних елементів. Множина перестановок використовується як для моделювання реальних об'єктів і систем, так і при розробці методів розв'язання комбінаторних задач. Однією з фундаментальних властивостей перестановок є їх циклічна структура. Дослідженню циклічної структури перестановок присвячено велику кількість робіт. Окремий клас перестановок складають перестановки, циклічна структура яких складається з єдиного циклу, тобто циклічні перестановки, які є підмножиною множини перестановок.

Серед класів комбінаторних конфігурацій особливе місце займають евклідові комбінаторні множини. Важливим інструментом дослідження евклідових комбінаторних множин є їх відображення в арифметичний евклідов простір, що дозволяє досліджувати опуклі оболонки евклідових

комбінаторних множин. Перестановочний багатогранник це опукла оболонка множини перестановок та він є одним із найбільш досліджених комбінаторних багатогранників. Дослідження підмножин вершин перестановочного багатогранника, які відповідають певним підмножинам множини перестановок, зокрема, циклічним перестановкам, є одним з перспективних підходів для дослідження властивостей деяких перестановок.

Множина циклічних перестановок, її елементи та їх властивості можуть бути використані при розробці нових і модифікації існуючих методів комбінаторної оптимізації. Серед комбінаторних методів пошуку в околі виділяються методи, що використовують циклічні трансфери. Методи на основі циклічних трансферів успішно застосовуються для розв'язання широкого спектра задач про призначення, маршрутизації, складання розкладів і т.д. Основні результати теорії циклічних трансферів спираються на циклічні перестановки. Застосування властивостей циклічних перестановок в теорії циклічних трансферів є актуальним напрямком.

В роботі досліджені моделі та методи комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок і їх застосування для розв'язання наукових і прикладних задач, серед яких — задачі транспортної маршрутизації.

Досліджено властивості циклічних перестановок при їх відображенні в евклідові простір. Використовуються поліедральні властивості перестановок і циклічних перестановок, що відповідають підмножині вершин перестановочного багатогранника. Набув подальшого розвитку клас транспозицій суміжності для перестановок різних елементів, представники якого породжують перестановки, відповідні суміжним вершинам перестановочного багатогранника. Описано властивості суміжності і особливості зміни циклічної структури перестановок при впливі транспозицій суміжності. Проведено класифікацію циклічних перестановок в залежності від впливу транспозицій суміжності на їх циклічну структуру. Доведено відповідні твердження про властивості транспозицій суміжності.

Набули подальшого розвитку методи розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок, зокрема, з лінійними обмеженнями. Для розв'язання задачі без обмежень запропоновано підхід, заснований на комбінації методу гілок та меж і евристики. Запропоновано метод пошуку наближеного розв'язку задачі без обмежень з використанням властивостей транспозицій суміжності. Для розв'язання задачі оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями запропоновано метод на основі випадкового пошуку, з використанням транспозицій суміжності для розв'язання допоміжної задачі.

Набув подальшого розвитку метод комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості. Це дозволяє розв'язувати задачі, для яких побудова допоміжного графа неможлива, на основі досліджених властивостей циклічних перестановок і транспозицій суміжності. Метод застосовано для покращення розв'язків задач транспортної маршрутизації, зокрема, задачі вивозу і доставки (Pickup and Delivery Problem), отриманих за допомогою евристики.

Для розв'язання задач, досліджених в роботі, розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані моделі та методи комбінаторної оптимізації. Наведено результати обчислювальних експериментів, проведено аналіз результатів, який підтверджує ефективність запропонованих підходів.

Отримані результати можуть бути використані при комп'ютерному моделюванні і розв'язанні задач в областях архівації даних і криптографії, квантових обчислень, біоінформатики.

Методи та алгоритми, розроблені автором, реалізовано і використано у програмному забезпеченні для розв'язання задач, пов'язаних з вивозом і доставкою вантажів. Результати використано у держбюджетному науковому дослідженні, в технологічному процесі вивозу і доставки вантажів і в учбовому процесі ХНУРЕ, що підтверджено відповідними актами про використання.

За тематикою дисертації можливо продовження досліджень у напрямку пошуку альтернативних евристик та застосування альтернативних правил розгалуження дерева і побудови оцінок в комбінації методу гілок та меж з евристикою, що мають меншу обчислювальну складність порівняно із запропонованими у даній роботі. У напрямку використання властивостей транспозицій суміжності для подальшого дослідження циклічної структури перестановок та використання їх для розробки нових методів розв'язання задач оптимізації на перестановках із заданою циклічною структурою та у напрямку створення більш ефективних методів розв'язання різних задач комбінаторної оптимізації, ґрунтуючись на застосуванні альтернативної стратегії формування циклічних трансферів від'ємної вартості, за допомогою властивостей множини циклічних перестановок.

Матеріали дисертації досить повно викладено у 20 роботах: з них 6 статей у спеціалізованих виданнях, затверджених ДАК МОН України, 3 статті у закордонних виданнях (всі праці входять до міжнародних наукометричних баз) та 11 тез доповідей на міжнародних конференціях. Автор має 3 статті, що індексуються базою SCOPUS.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, циклічні перестановки, транспозиції, перестановочний багатогранник, транспозиції суміжності, лінійна функція, метод гілок та меж, евристика, задача вивозу і доставки.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта*. 2012. №2 (79). С. 8–12.
2. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов. *Бионика интеллекта*. 2014. №1 (82). С. 7–11.

3. Grebennik I.V., Chorna O.S. Influence of Certain Transpositions on the Cyclic Structure of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. № 6(51). P. 947–955. (Scopus)
4. Grebennik I.V., Chorna O.S. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2015. № 3(4). P. 33–38.
5. Grebennik I.V., Baranov A.V., Chorna O.S., Gorbacheva E.E. Optimization of linear functions on a cyclic permutation based on the random search *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2016. №3(5). P. 211–216.
6. Grebennik I.V., Chorna O.S. Special transpositions of permutation elements and properties of their composition *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 1(53). P. 67–77. (Scopus)
7. Гребеннік І.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2018. №3(49). С. 67-72.
8. Гребеннік І.В., Чорна О.С. Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів. *Біоніка інтелекту*. 2019. №2 (93). С. 28–34.
9. Dupas R., Grebennik I., Litvinchev I., Romanova T., Chorna O. Solution strategy for one-to-one pickup and delivery problem using the cyclic transfer approach. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. №20 (27). P. 1–9. (Scopus)
10. Гребеннік І.В., Тітова О.С. Розв'язання задачі мінімізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. *Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ: тези доповідей 14-ої всеукраїнської 9-ої міжнародної конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 5-6 травня 2011. С. 246–248.
11. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S., Titova O.S. Optimization of linear functions on cyclic permutations. *Problems of decision making under uncertainties:*

тезисы докладов 20-ой международной конференции. Брно, Чехия. 17-21 сентября 2012. С. 43-44.

12. Гребенник И.В., Титова О.С. Свойства смежности циклических перестановок, отображенных в евклидово пространство. *Problems of decision making under uncertainties*: тезисы докладов 22-ой международной конференции. Ялта-Форос. 23-27 сентября 2013. С. 66.

13. Гребенник И.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке*: тезисы докладов 18-ого международного молодежного форума. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 14-16 апреля 2014. Т. 6. С. 333–334.

14. Grebennik I., Chorna O. Special transposition of the elements of permutations and properties of their composition. *4th International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE – 2014)*: тезисы докладов 4-ой международной конференции. 24-25 вересня 2014. С. 178-187.

15. Гребенник И.В., Черная О.С. Влияние специальных классов транспозиций на элементы множества перестановок. *Problems of decision making under uncertainties*: тезисы докладов 25-ой международной конференции. Схидныйця. 11-15 травня 2015. С. 83.

16. Гребенник И.В., Черная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)*: тези доповідей 21-ої всеукраїнської наукової конференції. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 24-25 вересня 2015. С. 132–133.

17. Титов С.В., Черная О.С. Использование платформы FlyElephant для оптимизации линейных функций на циклических перестановках. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 318–321.

18. Гребенник И. В., Черная О. С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 256–259.

19. Черная О.С., Горбачева Е.Е. Оптимизация линейных функций на множестве циклических перестановок с линейными ограничениями. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів. Харків. Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного. 21-24 листопада 2016. С. 35.

20. Гребенник И.В., Черная О.С. Оптимізація маршрутів задачі PDP за допомогою циклічних трансферів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ: Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2019. С. 153–155.



## ABSTRACT

Chorna O.S. Mathematics models and optimization methods on cyclic permutations and their applications. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

A Thesis for a Candidate of Engineering Sciences degree in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods.

Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of NAS Ukraine, Kharkiv.

The constant and widespread use of computer technology in recent decades has given a major impetus to the development of the field of discrete mathematics, and in particular, combinatorics. Many scientists have created and successfully used a wide range of different models of combinatorial optimization to describe and solve problems of design, planning, placement, classification, management and others. Mathematical models of these combinatorial optimization problems in many cases have complex combinatorial properties. One of the most researched and widely used classes of combinatorial configurations is permutations of various elements. Permutations are used both to model real objects and systems and to develop methods for solving combinatorial problems. One of the fundamental properties of permutations is their cyclic structure. A large number of works are devoted to the study of the cyclical structure of permutations. A separate class of permutations consists of single cycle permutations, ie cyclic permutations, which are a subset of the set of permutations.

Among the classes of combinatorial configurations, euclidean combinatorial sets occupy a special place. An important tool for the study of euclidean combinatorial sets is their mapping into the arithmetic euclidean space, which allows to study the convex hulls of euclidean combinatorial sets. A permutation polytope is a convex hull of a set of permutations and it is one of the most studied combinatorial polytope. The study of subsets of vertices of a permutation polytope

that correspond to certain subsets of the set of permutations, in particular, cyclic permutations, is one of the promising approaches for studying the properties of some permutations.

The set of cyclic permutations, its elements and their properties can be used in the development of new and modification of existing combinatorial optimization methods. Among the combinatorial search methods in the neighborhood are methods that use cyclic transfers. Cyclic transfer methods are successfully used to solve a wide range of tasks about assignment, routing, scheduling, etc. The main results of the theory of cyclic transfers are based on cyclic permutations. The application of the properties of cyclic permutations in the theory of cyclic transfers is an important direction.

The paper investigates combinatorial optimization models and methods that using the properties of a set of cyclic permutations and their application for solving scientific and applied problems, including the vehicle routing problems.

The properties of cyclic permutations under their mapping into Euclidean space are investigated. The polyhedral properties of permutations and cyclic permutations corresponding to the subset of vertices of the permutation polytope are used. A class of adjacency transpositions is introduced for permutations of various elements, whose representatives generate permutations corresponding to adjacent vertices of the permutation polytope. The properties of adjacency and the peculiarities of changing the cyclic structure of permutations under the influence of adjacency transpositions are described. The classification of cyclic permutations is carried out depending on the influence of adjacency transpositions on their cyclic structure. The corresponding statements about the properties of adjacency transpositions are proved.

Methods for solving optimization problems for linear functions on the set of cyclic permutations, in particular, with linear constraints, have been further developed. An approach based on a combination of the branch-and-bound algorithm and heuristics is proposed to solve the problem without constraints. A method is proposed for finding an approximate solution to the problem without

constraints using the properties of adjacency transpositions. To solve the problem of optimization of linear functions on the set of cyclic permutations with linear constraints, a method is proposed based on random search, using adjacency transpositions to solve an auxiliary problem.

The method of combinatorial optimization based on cyclic transfers has been further developed in terms of generating cyclic transfers of negative value. This allows to solve problems based on the investigated properties of cyclic permutations and adjacency transpositions in cases where the construction of an auxiliary graph is impossible. The method is applied to improve the solutions obtained using heuristics of transport routing problems, in particular, the Pickup and Delivery Problem.

The software has been developed that implements the proposed models and methods of combinatorial optimization, to solve the problems studied in the work. The results of numerical experiments are presented, the analysis of the results is carried out, confirming the effectiveness of the proposed approaches.

The results obtained can be used in computer modeling and solving problems in the fields of data archiving and cryptography, quantum computing, bioinformatics.

On the topic of the dissertation it is possible to continue research in the direction of searching for alternative heuristics and applying alternative rules of tree branching and construction of estimates in combination of the branch and bound algorithm with heuristics, which have less computational complexity than proposed in this paper. In the direction of using the properties of transpositions of adjacency for further study of the cyclic structure of permutations and their use to develop new methods for solving optimization problems on permutations with a given cyclic structure and in the direction of creating more effective methods for solving various combinatorial optimization problems based on alternative strategy formation of cyclic transfers of negative value, using the properties of the set of cyclic permutations.

The methods and algorithms developed by the author are implemented and used in software for solving problems related to the pickup and delivery of goods. The results were used in state budget scientific research, in the technological processes of transportation of goods and in the educational process of KNURE, which is confirmed by the relevant acts of use.

Keywords: combinatorial optimization, cyclic permutations, transpositions, permutation polytope, adjacency transpositions, linear function, branch-and-bound algorithm, heuristics, pickup and delivery problem.

### LIST OF PUBLICATIONS OF THE APPLICANT

1. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта*. 2012. №2 (79). С. 8–12.
2. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов. *Бионика интеллекта*. 2014. №1 (82). С. 7–11.
3. Grebennik I.V., Chorna O.S. Influence of Certain Transpositions on the Cyclic Structure of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. № 6(51). P. 947–955. (Scopus)
4. Grebennik I.V., Chorna O.S. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2015. № 3(4). P. 33–38.
5. Grebennik I.V., Baranov A.V., Chorna O.S., Gorbacheva E.E. Optimization of linear functions on a cyclic permutation based on the random search *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2016. №3(5). P. 211–216.
6. Grebennik I.V., Chorna O.S. Special transpositions of permutation elements and properties of their composition *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 1(53). P. 67–77. (Scopus)

7. Гребеннік І.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2018. №3(49). С. 67-72.
8. Гребеннік І.В., Чорна О.С. Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів. *Біоніка інтелекту*. 2019. №2 (93). С. 28–34.
9. Dupas R., Grebennik I., Litvinchev I., Romanova T., Chorna O. Solution strategy for one-to-one pickup and delivery problem using the cyclic transfer approach. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. №20 (27). P. 1–9. (Scopus)
10. Гребеннік І.В., Тітова О.С. Розв'язання задачі мінімізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. *Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ: тези доповідей 14-ої всеукраїнської 9-ої міжнародної конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 5-6 травня 2011. С. 246–248.
11. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S., Titova O.S. Optimization of linear functions on cyclic permutations. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 20-ой международной конференции*. Брно, Чехия. 17-21 сентября 2012. С. 43-44.
12. Гребеннік І.В., Тітова О.С. Свойства смежности циклических перестановок, отображенных в евклидово пространство. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 22-ой международной конференции*. Ялта-Форос. 23-27 сентября 2013. С. 66.
13. Гребеннік І.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезиси докладов 18-ого международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 14-16 апреля 2014. Т. 6. С. 333–334.

14. Grebennik I., Chorna O. Special transposition of the elements of permutations and properties of their composition. *4th International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE – 2014)*: тезиси докладов 4-ой международной конференции. 24-25 вересня 2014. С. 178-187.

15. Гребенник И.В., Черная О.С. Влияние специальных классов транспозиций на элементы множества перестановок. *Problems of decision making under uncertainties*: тезиси докладов 25-ой международной конференции. Схидныця. 11-15 травня 2015. С. 83.

16. Гребенник И.В., Черная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)*: тези доповідей 21-ої всеукраїнської наукової конференції. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 24-25 вересня 2015. С. 132–133.

17. Титов С.В., Черная О.С. Использование платформы FlyElephant для оптимизации линейных функций на циклических перестановках. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 318–321.

18. Гребенник И. В., Черная О. С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 256–259.

19. Черная О.С., Горбачева Е.Е. Оптимизация линейных функций на множестве циклических перестановок с линейными ограничениями. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів. Харків. Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного. 21-24 листопада 2016. С. 35.

20. Гребенник И.В., Черная О.С. Оптимізація маршрутів задачі PDP за допомогою циклічних трансферів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції*. Київ: Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2019. С. 153–155.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП .....                                                                                                                            | 6  |
| РОЗДІЛ 1 ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ’ЯЗАННЯ НАУКОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ ..... | 14 |
| 1.1 Особливості математичного моделювання наукових і прикладних задач, що мають комбінаторних структуру.....                           | 14 |
| 1.2 Класи комбінаторних множин в математичних моделях комбінаторних задач .....                                                        | 20 |
| 1.3 Комбінаторні задачі, які мають циклічну структуру, і їх математичне моделювання за допомогою комбінаторних множин .....            | 25 |
| 1.4 Основні методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації.....                                                                    | 30 |
| 1.5 Постановка задачі дослідження .....                                                                                                | 35 |
| РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ .....                                                         | 39 |
| 2.1 Задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках.....                                                                | 39 |
| 2.1.1 Задача оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках без додаткових обмежень.....                                      | 39 |
| 2.1.2 Задача оптимізації лінійної функції з лінійними обмеженнями на циклічних перестановках.....                                      | 41 |
| 2.1.3 Комбінаторні властивості перестановочного багатогранника і циклічні перестановки .....                                           | 42 |
| 2.1.4 Еквівалентна задача оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках з обмеженнями.....                                   | 46 |
| 2.2 Циклічна структура перестановок і властивості транспозицій .....                                                                   | 47 |
| 2.2.1 Циклічна структура перестановок різних елементів .....                                                                           | 47 |
| 2.2.2 Взаємне розташування елементів циклічної перестановки .....                                                                      | 52 |
| 2.3 Транспозиції суміжності і їх властивості.....                                                                                      | 54 |



|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3.1 Властивості транспозицій суміжності .....                                                                    | 54 |
| 2.3.2 Вплив транспозицій суміжності на довільну перестановку .....                                                 | 57 |
| 2.3.3 Вплив транспозицій суміжності на циклічну перестановку .....                                                 | 66 |
| 2.3.3.1 Вплив на циклічну перестановку транспозицій суміжності, що не перетинаються .....                          | 67 |
| 2.3.3.2 Вплив на циклічну перестановку транспозицій суміжності, що перетинаються .....                             | 72 |
| 2.3.3.3 Вплив на циклічну перестановку трьох транспозицій суміжності .....                                         | 76 |
| 2.4 Вплив суперпозицій транспозицій суміжності на довільну перестановку .....                                      | 78 |
| 2.5 Висновки по другому розділу .....                                                                              | 85 |
| РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ .....                                     | 87 |
| 3.1 Властивості лінійних функцій на циклічних перестановках при впливі транспозицій суміжності на змінні .....     | 87 |
| 3.2 Оптимізація лінійної функції на циклічних перестановках без додаткових обмежень .....                          | 91 |
| 3.2.1 Реалізація методу гілок та меж .....                                                                         | 91 |
| 3.2.2 Комбінація методу гілок та меж і евристики .....                                                             | 93 |
| 3.2.3 Метод транспозицій суміжності .....                                                                          | 94 |
| 3.3 Розв'язання задач оптимізації лінійної функції з лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок ..... | 95 |
| 3.3.1 Метод на основі випадкового пошуку .....                                                                     | 96 |
| 3.3.2 Розв'язання допоміжної задачі на множині циклічних перестановок .....                                        | 98 |
| 3.3.3 Використання розпаралелювання в методах оптимізації на циклічних перестановках .....                         | 99 |

|                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.4 Розв'язання допоміжної задачі на множині циклічних перестановок з використанням транспозицій суміжності ..... | 101 |
| 3.4 Генерація циклічних перестановок за допомогою транспозицій .....                                                | 102 |
| 3.4.1 Генерація суміжних циклічних перестановок за допомогою двох транспозицій .....                                | 102 |
| 3.4.2 Оцінка обчислювальної складності алгоритму генерації .....                                                    | 103 |
| 3.5 Висновки по третьому розділу .....                                                                              | 104 |
| <b>РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ</b> .....                                                 | 107 |
| 4.1 Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів .....                  | 107 |
| 4.1.1 Застосування циклічних перестановок для формування циклічних трансферів .....                                 | 110 |
| 4.1.2 Стратегія розв'язання задачі за допомогою циклічних трансферів .....                                          | 110 |
| 4.1.3 Підвищення ефективності розв'язання задачі PDP за допомогою циклічних трансферів.....                         | 113 |
| 4.2 Розв'язання задачі PDP з використанням циклічних трансферів .....                                               | 119 |
| 4.3 Висновки до четвертого розділу .....                                                                            | 124 |
| <b>РОЗДІЛ 5 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ</b> .....                                                                    | 126 |
| 5.1 Задача оптимізації на циклічних перестановках. Метод гілок та меж .....                                         | 126 |
| 5.2 Оптимізація на циклічних перестановках на основі властивостей транспозицій суміжності.....                      | 138 |
| 5.3 Оптимізація на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку .....                                       | 144 |
| 5.3.1 Розв'язання допоміжної задачі методом гілок та меж .....                                                      | 144 |
| 5.3.2 Розв'язання допоміжної задачі за допомогою транспозицій суміжності .....                                      | 151 |
| 5.3.3 Порівняння методів розв'язання допоміжної задачі .....                                                        | 154 |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.4 Генерація циклічних перестановок на основі транспозицій суміжності ..... | 158 |
| 5.5 Висновки до п'ятого розділу .....                                        | 162 |
| ВИСНОВКИ.....                                                                | 165 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....                                              | 169 |
| ДОДАТОК А.....                                                               | 193 |
| ДОДАТОК Б .....                                                              | 196 |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** На даний момент жодна галузь людської діяльності не обходиться без постійного і повсюдного використання обчислювальної техніки. Для опису і розв’язку багатьох задач проектування, планування, розміщення, класифікації, управління створено та успішно застосовується широкий спектр різних моделей дискретного програмування. Комбінаторна оптимізація – один з активно досліджуваних напрямків дискретного програмування. Оптимізаційним комбінаторним задачам присвячені відомі праці вітчизняних і зарубіжних авторів, а саме І.В. Сергієнко, І.І. Меламеда, Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, І.В. Гребенніка, Н.В. Семенової, О.О. Ємця, В.П. Шило, Л.Ф. Гуляницького, П.І. Стецюка, S. Ropke, C.H. Papadimitriou, P. Toth, D. Vigo, F. Bergeron, P. Flajolet, M. Bona. В рамках цього розділу проводиться великий спектр теоретичних і прикладних сучасних досліджень. Під керівництвом проф. Ю.Г. Стояна функціонує наукова школа, один із напрямів якої присвячено розв’язанню оптимізаційних комбінаторних задач геометричного проектування. В цьому напрямі в рамках школи відзначимо результати Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, М.І. Гіля, В.М. Комяк, О.О. Ємця, О.В. Панкратова, Т.Є. Романової, І.В. Гребенніка, О.В. Панкратова, О.С. Пічугіної.

Математичні моделі комбінаторних оптимізаційних задач мають складну комбінаторних природу. Одним з основних понять, яке використовується при математичному моделюванні і розв’язанні комбінаторних оптимізаційних задач є поняття комбінаторної конфігурації, введене К. Бержем, яке отримало подальший розвиток, зокрема, в роботах Ю.Г. Стояна та учнів. Одним з найбільш досліджених і широко використовуваних класів комбінаторних конфігурацій є перестановки різних елементів. Множина перестановок використовується як для моделювання реальних об’єктів і систем, так і при розробці методів розв’язання комбінаторних задач. Властивостям цієї множини й окремих її елементів

присвячено багато робіт. Однією з фундаментальних властивостей перестановок є їх циклічна структура. Відзначимо, що дослідженню циклічної структури перестановок присвячена велика кількість робіт і інтерес до властивостей перестановок, пов'язаних з циклічною структурою проявляється у багатьох сучасних дослідженнях. Окремий клас перестановок складають перестановки, циклічна структура яких складається з єдиного циклу. Такі перестановки називаються циклічними перестановками і складають підмножину множини перестановок. Циклічні перестановки мають всі властивості, характерні для перестановок і при цьому мають ряд специфічних характеристик, властивих тільки їм. Досліджуються циклічні перестановки в роботах різних вчених, серед яких Р. Стенлі, М. Вона, В.О. Ємелічев, Ch.A. Charalambides, А.Н. Ісаченко, S. Elizalde. Циклічні перестановки застосовуються при математичному моделюванні і розв'язанні багатьох задач в різних областях науки і техніки, наприклад, в архівації даних і криптографії, квантових обчисленнях, біоінформатиці. Велика кількість класичних і сучасних публікацій присвячено задачам транспортної маршрутизації. Серед них існує широкий клас задач, в яких для виконання перевезень будуються кільцеві (замкнуті, циклічні) маршрути, при моделюванні яких застосовуються, зокрема, циклічні перестановки. Список публікацій з транспортної маршрутизації надзвичайно широкий, серед них є роботи Р. Toth, D. Vigo, S. Ropke, C. Rego, І.І. Меламеда, А.В. Панішева, Л.Ф. Гуляницького і багатьох інших.

Широке використання циклічних перестановок і можливість їх застосування в нових класах задач визначають актуальність подальшого дослідження властивостей циклічних перестановок і задач оптимізації на циклічних перестановках.

Серед класів комбінаторних конфігурацій особливе місце займають евклідові комбінаторні множини. Важливим інструментом дослідження евклідових комбінаторних множин є їх відображення в арифметичний евклідов простір. Основи теорії евклідової комбінаторної оптимізації та були

закладені проф. Ю.Г. Стояном і розвинені в роботах С.В. Яковлєва, О.О. Ємця, О.С. Пічугіної, Н.В. Семенової, Т.Є. Романової, І.В. Гребенніка та інших. Застосування поліедральної комбінаторики дозволяє розширити спектр математичних інструментів, які використовуються для розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Перестановочний багатогранник є одним з основних, добре досліджених комбінаторних багатогранників. В роботах Г.А. Донця, Л.М. Колєчкиної, О.М. Ісаченко досліджується спеціальний клас транспозицій для перестановок що відповідають суміжним вершинам перестановочного багатогранника, які ми далі будемо називати транспозиціями суміжності. Дослідження підмножин вершин перестановочного багатогранника, які відповідають певним підмножинам множини перестановок є одним з перспективних підходів для дослідження властивостей перестановок. У даній роботі на перестановочному багатограннику досліджуються вершини, відповідні множині циклічних перестановок.

Множина циклічних перестановок, її елементи та їх властивості можуть бути використані при розробці нових стратегій і для модифікації існуючих методів комбінаторної оптимізації. Існує широкий клас покращуючих алгоритмів, загальна стратегія яких базується на пошуку кращого розв'язку в деякому околі вихідного розв'язку. Серед комбінаторних методів пошуку в околі виділяються методи, що використовують циклічні трансфери. Методи на основі циклічних трансферів успішно застосовуються для розв'язання широкого спектра задач про призначення, маршрутизації, складання розкладів і т.д. Теорія циклічних трансферів була запропонована в роботах Р.М. Thompson, J.B. Orlin і Н.Н. Psaraftis. В основі теорії циклічних трансферів лежить поняття циклічних перестановок.

**Мета та задача дослідження.** Метою роботи є розвиток моделей і методів комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок та їх застосування для розв'язання наукових і прикладних задач, зокрема, задач транспортної маршрутизації.

Для досягнення цієї мети поставлені наступні задачі:

1. Дослідження властивостей циклічних перестановок для використання їх в методах комбінаторної оптимізації.
2. Розробка нових і адаптація існуючих методів комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок.
3. Покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, на основі теорії циклічних трансферів з використанням специфічних властивостей циклічних перестановок і властивостей конкретного класу задач.

**Об'єкт дослідження** – комбінаторна природа технічних об'єктів.

**Предмет дослідження** – математичне та комп'ютерне моделювання наукових і прикладних задач оптимізації на циклічних перестановках та методи їх розв'язання.

**Методи дослідження.** В роботі застосовано методи комбінаторики для дослідження особливостей циклічної структури перестановок, властивостей циклічних перестановок та транспозицій суміжності; комбінаторна теорія багатогранників для дослідження властивостей вершин перестановочного багатогранника, що відповідають циклічним перестановкам; методи комбінаторної оптимізації, зокрема, метод гілок та меж, евристичні методи, метод випадкового пошуку для розв'язання задач оптимізації лінійних функції на множині циклічних перестановок при наявності та відсутності додаткових обмежень; метод на основі теорії циклічних трансферів для побудови стратегії покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики.

**Наукова новизна отриманих результатів.**

1. Отримали подальший розвиток методи дослідження спеціального класу транспозицій для перестановок, що відповідають суміжним вершинам перестановочного багатогранника (транспозицій суміжності) в частині:
  - їх впливу на циклічну структуру перестановок;
  - аналізу циклічних властивостей суміжних перестановок;

- їх застосування для генерації циклічних перестановок;

це дозволяє дослідити циклічну структуру суміжних вершин перестановочного багатогранника, розробити нові та адаптувати існуючі методи комбінаторної оптимізації; знизити надлишковість при генерації циклічних перестановок за допомогою транспозицій суміжності.

2. Вперше для циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір, отримано такі результати:

- запропоновано класифікацію циклічних перестановок в залежності від послідовності елементів у циклі, що дозволяє генерувати циклічні перестановки та оцінити складність їх генерації за допомогою транспозицій суміжності.
- побудовано циклічні перестановки за допомогою транспозицій суміжності та їх композицій, які можуть бути використані в методах комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках;
- досліджено взаємне розташування вершин, що відповідають циклічним перестановкам у перестановочному багатограннику, що дозволяє підвищити ефективність методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках;

3. Отримали подальший розвиток методи розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок за рахунок використання властивостей транспозицій суміжності, що дозволяє підвищити ефективність відомих методів (гілок та меж, випадкового пошуку) при розв'язанні задач на циклічних перестановках.

4. Отримав подальший розвиток метод циклічних трансферів для покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості, що дозволяє розширити клас розв'язуваних задач, для яких неможливо побудувати допоміжний граф (auxiliary graph).

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертаційного дослідження отримані автором самостійно. У роботах, написаних у



співавторстві, автору належать: [1, 10–11] – доведення твердження про часткову перестановку та її використання у методі гілок та меж для розв’язання задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок без додаткових обмежень та результати обчислювальних експериментів; [2, 3, 4, 6, 12, 14–16, 18] – дослідження властивостей множини циклічних перестановок, введення та дослідження транспозицій суміжності, дослідження їх впливу на перестановки, метод генерації циклічних перестановок та метод оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок за допомогою транспозицій суміжності; [5, 7, 13, 17, 19] – розв’язання допоміжної задачі при оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок з додатковими обмеженнями. Застосування для цього методу гілок та меж, евристики з використанням методу гілок та меж, паралельних обчислень, методу за допомогою транспозицій суміжності та розробка відповідної частини програмного забезпечення; [8, 9, 20] – метод покращення розв’язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів за допомогою властивостей множини циклічних перестановок. Застосування циклічних трансферів для покращення розв’язків задачі PDP, отриманих за допомогою евристики, та розробка відповідної частини програмного забезпечення.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи було подано на:

1. 14-й всеукраїнській (9 міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики (Львів, Україна, 2011 р.);
2. 18-ому міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті» (Харків, Україна, 2014 рр.);
3. XX, XXII, XXV міжнародних конференціях «Problems of decision making under uncertainties (PDMU)» (Крим, Східниця, Україна, Брно, Чехія, 2012, 2013, 2015 рр.)

4. 4-й міжнародній конференції «International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE)» (Софія, Болгарія, 2014 р.);

5. міжнародній конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS)» (Львів, Україна, 2015 р.);

6. міжнародних науково–практичних конференціях «Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі» (Київ, Україна, 2016, 2019 р.).

7. конференції молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування» Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2016 р.);

8. науковому семінарі відділу математичного моделювання та оптимального проектування інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2020 р.).

9. науковому семінарі кафедри системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, Україна, 2018–2020 р.).

#### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Робота виконана в період з 2012 по 2020 рр. на кафедрі системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки, зокрема, в рамках розділу №293–2 «Генерація комбінаторних конфігурацій в задачах математичного моделювання стійкого розвитку соціально–економічних систем» науково дослідної роботи «Розробка методології і математичних моделей соціально–економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку» (ДР № 0115U001522), в розробці якої автор брав участь як виконавець. В рамках робіт, що виконувались відповідно до плану НДР, автором проведено дослідження моделей та методів комбінаторної оптимізації, розроблено методи оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок при наявності та відсутності додаткових обмежень, розроблено метод генерації циклічних перестановок за допомогою

транспозицій суміжності; розроблено метод покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів, який застосовано до задачі транспортної маршрутизації (Pickup and Delivery Problem з тривимірними обмеженнями завантаження).

**Практичне значення отриманих результатів.** Практичне значення результатів роботи підтверджується актами про використання методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації в держбюджетному науковому дослідженні ДР № 0115U001522; програмного забезпечення для покращення розв'язку задачі вивозу та доставки вантажів, отриманого за допомогою евристики, в ПП «Латона» для розв'язання задач, пов'язаних з перевезенням вантажів. Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки у курсі «Комбінаторні моделі і методи в проектуванні». Запропоновані методи та програмне забезпечення для розв'язання задач вивозу і доставки можуть бути використані для підвищення ефективності діяльності транспортних компаній (Додаток Б).

**Публікації.** За темою дисертаційної роботи опубліковано 20 наукових праць, в тому числі: 6 статей у спеціалізованих виданнях, затверджених ДАК МОН України [1, 2, 3, 6, 7, 8], 2 з яких індексуються у базі SCOPUS [3, 6]; 3 статі у закордонних виданнях [4, 5, 9] (всі праці входять до міжнародних наукометричних баз), 1 з яких індексується у базі SCOPUS [9]; 11 тез доповідей на міжнародних і молодіжних наукових конференціях [10–20].

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота містить вступ, п'ять розділів, висновки по роботі, список використаних джерел зі 236 найменувань на 23 сторінках та 2 додатки на 7 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 199 сторінки, з них 162 сторінки основного тексту, включаючи 40 рисунків.

## **РОЗДІЛ 1**

### **ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ’ЯЗАННЯ НАУКОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ**

У розділі проаналізовано вітчизняні та зарубіжні публікації, присвячені змістовним задачам комбінаторної природи і їх аналізу, властивостям комбінаторних конфігурацій, комбінаторних оптимізаційних задач на перестановках і методів їх розв’язання. Визначено напрямки наукових досліджень.

#### **1.1 Особливості математичного моделювання наукових і прикладних задач, що мають комбінаторних структуру**

Впровадження обчислювальної техніки в різні сфери людської діяльності підкреслило те, що багато важливих задач проектування, планування, розміщення, класифікації, управління добре описуються за допомогою різних моделей дискретного програмування. Це в свою чергу сприяло підвищенню інтересу до комбінаторної оптимізації, в результаті чого було створено ряд класичних наукових праць [21–45], в яких розглядаються задачі оптимізації на комбінаторних множинах та пов’язані з цим питання. Оптимізаційні комбінаторні задачі виникають при розв’язанні задач геометричного проектування та управління [26, 27, 45–54]. Спектр цих задач надзвичайно широкий, серед них є задачі таких напрямків – задачі розміщення об’єктів [48, 55–58], серед яких задачі упаковки [43, 46, 49, 51, 52, 59], задачі покриття і розкрою [51, 60–62], задачі балансного компонування [47, 50]. Крім задач розміщення існують такі важливі класи задач як лінійні і квадратичні задачі про призначення [63–68], транспортні задачі і задачі маршрутизації [69–102], задачі формування розкладів [103–112] і багато інших. Для розв’язання задач, математичні моделі яких можуть

бути подані у вигляді комбінаторних оптимізаційних моделей, було досліджено проблеми перелічувальної комбінаторики [31–33, 37, 113–114], класифіковано і описано основні методи комбінаторної оптимізації [23–27, 39, 41–42, 44, 115].

Математичні моделі комбінаторних оптимізаційних задач, що перелічені вище, мають складну комбінаторну природу [27, 116]. При побудові їх математичних моделей потрібно визначення і конструктивний опис комбінаторних множин, з необхідними комбінаторними властивостями. У багатьох випадках для цього потрібно побудувати комбінаторні множини, що виходять за рамки відомих класів комбінаторних множин. Серед робіт, присвячених властивостям комбінаторних структур, зокрема, перестановок, праці М.Вона [32], F. Bergeron, P. Flajolet [34–36], Ю.Г. Стояна [117], С.В. Яковлева [118–120], О.О. Ємця [77–78], І.В. Гребенніка [121–122], Н.В. Семенової [123–125], Л.Ф. Гуляницького [64, 126], В.П. Шило [127–128], О.М. Ісаченко [129–131].

Дослідження і використання властивостей комбінаторних об'єктів підвищує ефективність процесів моделювання та розв'язання задач, що мають комбінаторну структуру, зокрема, задач комбінаторної генерації і комбінаторної оптимізації. У роботах з перелічувальної комбінаторики досліджено твірні функції [31, 33, 44], методи генерації перестановок з наявністю або з відсутністю заданих патернів [32, 132–136], методи генерації перестановок із заданими властивостями [121–122, 137]. Для перестановок широко досліджено багато властивостей, зокрема, що стосуються циклічної структури перестановок [2–4, 6, 31, 44, 121, 136, 138]. Відомі методи і алгоритми, що дозволяють робити розкладання перестановок в добуток циклів [23–24]. Роботи [117, 121–122, 135, 137] присвячено генерації перестановок із заданою циклічною структурою.

Описані дослідження множини перестановок дозволили використовувати її властивості і застосовувати багато методів комбінаторної оптимізації для розв'язання великого класу задач на множині перестановок.

Проведемо огляд найбільш широко відомих і досліджених задач комбінаторної оптимізації на множині перестановок. Багато задач геометричного проектування добре описуються комбінаторними моделями на перестановках і для їх розв'язання пропонуються комбінаторні оптимізаційні підходи.

У роботах Ю.Г. Стояна та його учнів введено  $\Phi$ -функції як засіб математичного моделювання та розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів [46, 50–53, 139–140]. У ряді робіт задачу розміщення об'єктів пропонується розв'язувати за допомогою методів локального пошуку і за допомогою різних евристик [55–58]. Математичне моделювання і розв'язання деяких однокритеріальних і багатокритеріальних задач розміщення паралелепіпедів описано в роботах [59–62]. Для розв'язання задач розміщення різних об'єктів на кінцевих, нескінченних і напів нескінченних стрічках [58, 60], пропонуються різні точні, наближені [60–62] і евристичні методи [58]. Розвитком цих методів і алгоритмів є розширення двовимірного випадку на  $n$ -мірний [46, 59].

Підхід до розв'язання задач розкрою, упаковки і формування розкладів який базується на поданні їх як задач на фрагментарній структурі введено в [141]. При цьому задача оптимізації зводиться до задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок без додаткових обмежень. Оптимізаційні задачі, що мають фрагментарну структуру, можна розв'язувати різними наближеними методами оптимізації, наприклад, методами локального і випадкового пошуку, методами з використанням еволюційних і мурашиних алгоритмів.

У класі комбінаторних задач, зокрема, пов'язаних з побудовою циклічних маршрутів, виділяють задачі транспортної маршрутизації. Класичною задачею транспортної маршрутизації є задача комівояжера. У публікаціях [69–73] наведено результати теоретичного характеру розв'язання задачі комівояжера. Дано різні (комбінаторні, графові і ін.) описи задачі, постановки її в формі задач лінійного і цілочисельного лінійного

програмування. Докладно описано практичні задачі, що зводяться до задачі комівояжера [87], моделі і методи їх розв'язання [88]. Окремі публікації присвячено опису точних [70] і наближених методів розв'язання задачі комівояжера [71]. Ряд публікацій присвячено розв'язанню гамільтонової задачі комівояжера [89].

Комбінаторні транспортні задачі у чіткій і нечіткій постановці досліджено в роботах [74–78], для них наведено точні і наближені [75] методи розв'язання, в тому числі, метод гілок та меж [77] і метод комбінаторних відсікань [78].

У зарубіжних публікаціях широко досліджено задачі транспортної маршрутизації, що позначаються як VRP (vehicle routing problem) [79–86, 93–94, 102]. Vehicle routing problem (VRP) має різні застосування в транспортній логістиці та список публікацій, присвячений цій проблемі досить великий [142–147]. Хоча різні класи VRP відповідають різним практичним ситуаціям, всі вони націлені на ефективне використання парку транспортних засобів для задоволення потреб клієнтів. Схематичне зображення задачі VRP та приклад її розв'язку для п'ятиох транспортних засобів наведено на рис. 1.1.

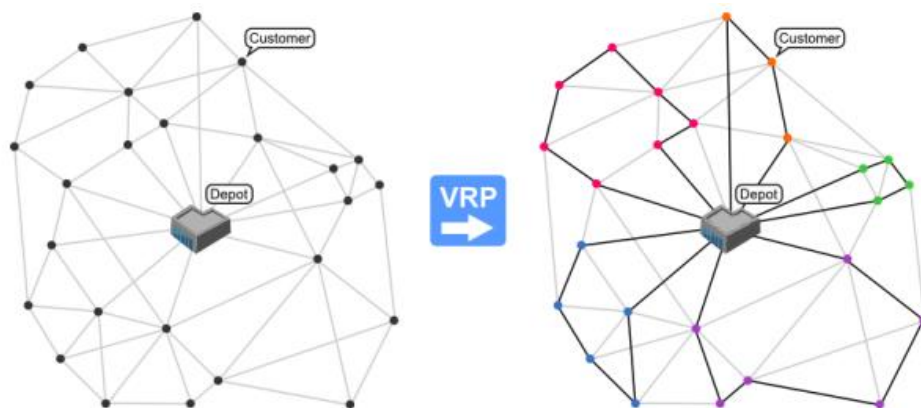


Рисунок 1.1. Приклад задачі VRP та її розв'язку

Поряд з маршрутизацією транспорту в реальних вантажоперевезеннях існують обмеження на завантаження транспортних засобів. Дана проблема була описана в [93] і згадується як capacitated vehicle routing problem (CVRP)

з тривимірними (3D) обмеженнями на завантаження (3L–CVRP) [86]. У 3L–CVRP користувачеві необхідно перевезти ряд коробок (паралелепіпедів), що описані тривимірними лінійними розмірами і їх вагою. На відміну від класичної задачі CVRP, де до уваги приймається тільки вага вантажів. Сучасні результати в області моделювання і методів розв’язання для проблем маршрутизації і завантаження транспортних засобів наведено, наприклад, у [148–149].

У класі задач VRP виділяють задачі розвезення вантажів від багатьох відправників багатьом одержувачам, так звані задачі PDP (pick-up and delivery problem). У Pickup and Delivery Problem (PDP) користувачеві необхідно забрати вантажі в деяких локаціях і доставити їх в інші [80–84, 150–154], наприклад як це продемонстровано на рис. 1.2 [155]. Ця проблема виникає, наприклад, в міських кур'єрських службах і системах доставки "від дверей до дверей".

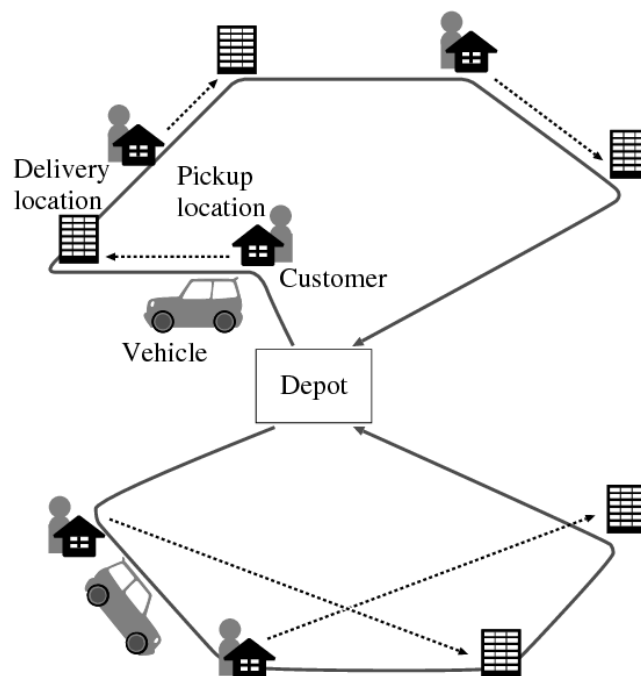


Рисунок 1.2. Приклад задачі PDP та її розв'язку

У задачі PDP парк транспортних засобів обслуговує запити на перевезення між пунктами відправлення (пунктами видачі) і пунктами



призначення (пунктами доставки). Кожен маршрут повинен починатися і закінчуватися в певному депо і повинен задовольняти обмеженням парності і пріоритетності: пункт відправки повинен передувати пункту доставки, і кожна пара пунктів відправки–доставки повинна відвідуватись одним і тим же транспортним засобом [140, 154]. Додатковими обмеженнями, в такому випадку можуть бути, наприклад, часові вікна [81, 91–92, 154], часові обмеження, пов'язані з наявністю транспортних засобів [155], вимоги на завантаження транспортних засобів в порядку стека [82] або черги [83], 2D/3D обмеження на завантаження транспортних засобів [84–86, 140, 156].

Існують різні евристичні і метоевристичні підходи до розв'язання задачі PDP: варіації пошуку з заборонами [157], пошук із заборонами в поєднанні з алгоритмом імітації відпалу [158], методи околів, що звужуються [159], модифікації генетичного алгоритму [160], різні евристики [161], гібридні алгоритми, наприклад, поєднання імітації відпалу і пошуку в широких околах [162], адаптивний пошук в широких околах, непрямий локальний пошук з жадібним декодуванням [163], спрямований метод вилучення ланцюжків [164].

Задачі VRP с обмеженнями на завантаження транспортних засобів, що описуються в форматі 2D або 3D, відносяться до задач геометричного проектування.

Циклічні перестановки можуть бути використані не тільки при побудові математичних моделей різних наукових і прикладних задач, але в методах розв'язання задач. Наприклад, циклічні перестановки лежать в основі загальної стратегії покращення розв'язків задач, яка базується на теорії циклічних трансферів [94, 165]. Теорія циклічних трансферів є основою загальної стратегії пошуку, яка належить до комбінаторних методів пошуку в околі, докладніше про них написано в пункті 1.4.

## 1.2 Класи комбінаторних множин в математичних моделях комбінаторних задач

Розв'язання широкого спектра задач комбінаторної оптимізації та наявність в цих задачах різноманітних обмежень сприяли введенню К. Бержем поняття комбінаторної конфігурації [114, 166], яке дозволяє описувати класи комбінаторних множин з різними властивостями.

Теорія конфігурацій розглядає задачі вибору і розташування елементів деякої дискретної множини відповідно до заданих правил. Клод Берж (C. Berge) запропонував формалізувати поняття комбінаторної конфігурації наступним чином: нехай дано  $m, n$  – натуральні числа, а також дві множини  $U = \{1, \dots, m\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , Причому на  $V$  заданий деякий строгий порядок  $v_1 < \dots < v_n$ . Таким чином, комбінаторною конфігурацією [114, 166] називається відображення  $\varphi: U \rightarrow V$ , яке задовольняє деякому комплексу обмежень  $\Lambda$ . При фіксованих  $m$  і  $n$  число комбінаторних конфігурацій скінченне. Вибір обмежень  $\Lambda$  дозволяє описувати різні комбінаторні конфігурації.

У роботах Ю.Г. Стояна та учнів з дослідження властивостей і розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач геометричного проектування поняття комбінаторної конфігурації є одним з центральних [27, 45, 47, 167–168]. Найбільш вивченими і відомими множинами комбінаторних конфігурацій є множини перестановок, розміщень і сполучень. Крім цього в ряді робіт було вивчено такі множини комбінаторних конфігурацій як поліразміщення, полісполучення, композиційні образи комбінаторних множин [54, 135, 169, 174–175, 177, 181] і різні підмножини класичних множин. Дослідженню властивостей класів композиційних образів комбінаторних множин та властивостям функцій на цих комбінаторних конфігураціях присвячено роботи [47, 167–173]. Застосування класів

композиційних образів комбінаторних множин в задачах геометричного проектування описано, наприклад, в [173].

Широкий інтерес викликали задачі оптимізації на евклідових комбінаторних множинах [26–27, 167–168]. Початок теорії евклідової комбінаторної оптимізації поклав проф. Ю.Г. Стоян в своїх роботах, присвячених теорії і методам евклідової комбінаторної оптимізації, а також, математичним моделям і оптимізаційним методам геометричного проектування [26–27]. Дослідженням задач евклідової комбінаторної оптимізації займалися багато вчених, серед яких, С.В. Яковлев [45, 167–168, 170, 178], О.О. Ємець [176–177], Т.Є. Романова [47, 50–53], І.В. Гребеннік [1–10, 47, 54, 171, 178, 180, 186] та інші.

У роботах Ю.Г. Стояна поняття евклідової комбінаторної множини введено в такий спосіб: множина  $E$  називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо має наступну властивість: два елементи  $\bar{e}, \bar{e} \in E$  відмінні, якщо вони незалежно від інших особливостей відрізняються порядком слідування елементів [27].

Ефективний засіб аналізу задач комбінаторної оптимізації базується на зануренні комбінаторних множин в евклідов простір та подальшому дослідженні еквівалентних задач. Це дозволяє застосовувати класичні засоби неперервної математики для розв’язання задач комбінаторної оптимізації. Так, в роботах С.В. Яковлева описано стратегії розв’язання задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах при наявності або відсутності додаткових обмежень на основі використання методу штрафних функцій і модифікації методу умовного градієнта [118–120, 182], методу гілок і меж в комбінації з чисельними методами недиференційованої оптимізації [182] і наближеного поліноміального методу [120]. В статті [183] сформульовано основи теорії опуклих продовжень функцій, заданих на вершинах опуклих багатогранників. Методи побудови опуклих продовжень для функцій, що задані в точках евклідових комбінаторних множин, дозволяє переходити до еквівалентних задач оптимізації опуклих та сильно опуклих функцій на

евклідових комбінаторних множинах [184–185]. Для розв’язання еквівалентних задач можуть бути використані методи гілок та меж з оцінками мінімуму опуклих функцій на комбінаторних множинах [118].

Відзначимо роботи Н.В. Семенової і її учнів, присвячені оптимізації на комбінаторних множинах перестановок [123, 187] і поліперестановок [125]. У роботах [123–125, 174–175] аналізується і розв’язується ряд багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на різних множинах комбінаторних конфігурацій, серед яких множини перестановок, поліперестановок [123, 125] і множина полірозміщень [175]. Для розв’язання комбінаторних оптимізаційних задач в роботах пропонується полієдральний підхід [175, 179] і лексикографічна оптимізація [187].

У роботах Л.Ф. Гуляницького, присвячених розв’язанню комбінаторних оптимізаційних задач [39, 40, 64, 126, 188–189] для розв’язання задач, зокрема, на множині перестановок, запропоновано гібридний метод деформованих багатогранників [64, 188], методи з сімейства гілок та меж, і фронтальних алгоритмів [126].

Занурення комбінаторних конфігурацій в евклідів простір дозволяє отримати комбінаторні багатогранники [38] і досліджувати задачі евклідової комбінаторної оптимізації методами полієдральної комбінаторики. Комбінаторні багатогранники вивчалися в ряді робіт Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, В.О. Ємелічева, М.М. Ковальова, О.М. Ісаченка, О.О. Ємця і їх учнів [26–27, 38, 118, 120, 129–131, 177, 190–191]. В даний час отримано аналітичні описи комбінаторних многогранників, серед яких багатогранник перестановок і парних перестановок [38, 190], загальний перестановочний багатогранник [26–27], загальний багатогранник розміщень, багатогранники деяких класів сполучень та відповідних полімножин [27] і деякі інші. Частина досліджень присвячено перестановочному багатограннику [2–4, 6, 38, 118, 120, 129–131, 190–192] і загальному багатограннику розміщень [179]. Це опуклі оболонки множини перестановок і множини упорядкованих вибірок із заданої мультимножини відповідно. В деяких роботах, наприклад,

у [38, 129–131] покладено початок опису багатогранника циклічних перестановок, а саме, визначається множина його вершин, розмірність багатогранника циклічних перестановок і дається опис одного сімейства гіперграней. Але використовувати результати цих досліджень як засіб розв’язання задач на циклічних перестановках не має можливості. Занурення комбінаторних множин в евклідов простір дозволяє використовувати засоби безперервної математики при аналізі комбінаторних задач [2–4, 6, 38, 129–131, 167, 175].

Перестановочний багатогранник описується системою нерівностей наступним чином [38]. Задамо вектор  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_n$ , де  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , тоді, позначимо через  $\Pi_n(a)$  – перестановочний багатогранник, який задається наступною системою обмежень:

$$\sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i, \quad \forall \omega \subset N_n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Множина розв’язків даної системи є  $i$ -гранню ( $0 \leq i \leq n-2$ ) перестановочного багатогранника  $\Pi_n(a)$  в тому і тільки тому випадку, коли кожен з цих розв’язків обертає в рівність нерівності  $\sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i$  лише для множин  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-i-1}$ , де для кожного  $\omega_i$ , ( $0 \leq i \leq n-2$ ) це кількість елементів, що володіють властивістю:  $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_{n-i-1} \subset N_n$ .

Для перестановочного багатогранника формалізовані такі поняття як вершина, ребро, грань і діаметр перестановочного багатогранника [38, 192]. До базових властивостей перестановочного багатогранника відносяться критерій суміжності його вершин, критерій суміжності граней. Класичний вид багатогранника перестановок для  $n = 4$  наведено на рис. 1.3.

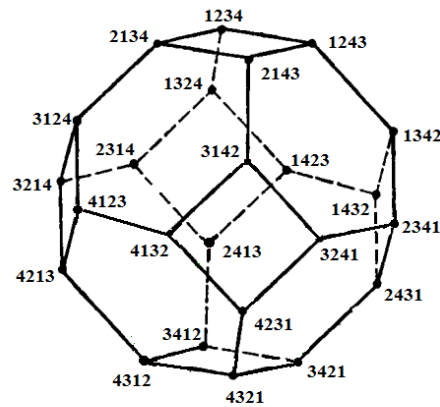


Рисунок 1.3. Перестановочний багатогранник

Одним з підходів у вивченні комбінаторних многогранників є аналіз графів багатогранників. У роботах Г.А. Донця, Л.М. Колєчкіної, А.М. Нагорної [193–197] досліджено застосування теорії графів в поліедральній комбінаториці для розв’язання складних комбінаторних задач на множині перестановок. Роботи присвячено дослідженню властивостей допустимої області евклідової комбінаторної задачі з використанням теорії графів і комбінаторних конфігурацій. Для багатогранника перестановок будується гамільтонів шлях і описано можливості застосування даних результатів для розробки методу розв’язання задач комбінаторної оптимізації на множині перестановок. Приклад графа багатогранника перестановок [196] для  $n = 4$  наведено на рис. 1.4.

Перестановочний багатогранник може бути використано для дослідження і розв’язання задач як на множині перестановок, так і на різних підмножинах множини перестановок. У такому випадку при розв’язанні задач пропонується використовувати перестановочний багатогранник, але досліджувати ті його вершини, які відповідають елементам заданої підмножини множини перестановок. Такий підхід дозволить скористатися багатьма властивостями перестановочного багатогранника.

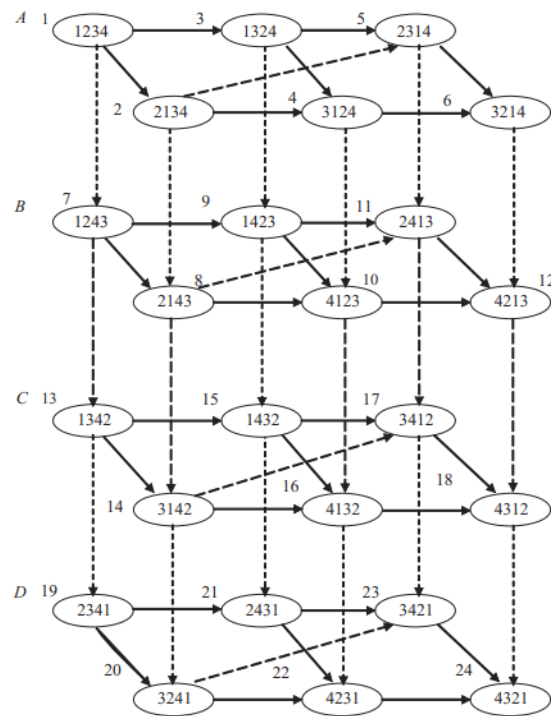


Рисунок 1.4. Граф багатогранника перестановок

### 1.3 Комбінаторні задачі, які мають циклічну структуру, і їх математичне моделювання за допомогою комбінаторних множин

У пункті 1.1 було описано ряд задач, математичні моделі яких засновані на множині перестановок. Математичні моделі деяких задач на перестановках мають циклічну структуру, формалізацією цієї циклічної структури є класичні поняття циклу і циклічної перестановки. Визначення циклу з елементів перестановки наведено, наприклад, у R. Stanley, а множини циклічних перестановок у M. Вона. Розглянемо докладніше основні поняття, слідуючи роботам [31–33, 37].

Лінійний запис (linear ordering) елементів деякої породжуючої множини  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  називається перестановкою  $\pi = \pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n)) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \in P_n$ , або, якщо необхідно підкреслити той факт, що вона містить  $n$  елементів,  $n$ –перестановкою.

Множину перестановок, породжену елементами  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , позначимо  $P_n$ . Розглянемо  $P_n$  – множину перестановок без повторень з  $n$  дійсних чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . І розглянемо деяку перестановку  $\pi = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n)) \in P_n$ , і її елемент  $\pi(a_i) = a_j$ ,  $\forall i, j \in J_n$ . Тоді можна записати  $\pi(a_j) = \pi(\pi(a_i)) = \pi^2(a_i)$ . Узагальнено можна цю формулу представити в такому вигляді:  $\pi^{k-1}(a_j) = \pi(\pi^{k-1}(a_i)) = \pi^k(a_i)$ ,  $\forall i, j \in J_n$ ,  $k \leq n$ .

Якщо для деякого  $l \geq 1$  маємо  $\pi^l(a_i) = a_i$ ,  $i \in J_n$ , і елементи  $a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i)$ , всі різні, то послідовність  $(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i))$  називається циклом довжини  $l$ .

Цикли  $(a_i, \pi(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i))$  і  $(\pi^j(a_i), \pi^{j+1}(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i), a_i, \dots, \pi^{j-1}(a_i))$  вважаються еквівалентними. Кожен елемент множини  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  зустрічається в єдиному циклі перестановки  $\pi$ , і можливо розглядати  $\pi$  як об'єднання циклів, що не перетинаються, або по-іншому, як сукупність циклів  $C_1, \dots, C_k$ , записуючи у вигляді  $\pi = C_1 C_2 \dots C_k$ . Наприклад, якщо перестановка  $\pi$  визначена таким чином:  $\pi(1) = 4$ ,  $\pi(2) = 2$ ,  $\pi(3) = 7$ ,  $\pi(4) = 1$ ,  $\pi(5) = 3$ ,  $\pi(6) = 6$ ,  $\pi(7) = 5$ , то  $\pi = (14)(2)(375)(6)$ . Можливі різні позначення уявлення  $\pi$  як сукупності циклів, наприклад,  $\pi = (753)(14)(6)(2)$ . Можна визначити стандартне подання, при якому в кожному циклі першим іде його найбільший елемент, і цикли записуються в порядку зростання їх максимальних елементів. Таким чином, стандартна форма розглянутої вище перестановки  $\pi \in (2)(41)(6)(753)$ .

Циклічною є така перестановка  $\pi$  з  $n$  елементів, яка містить єдиний цикл довжини  $n$ , тобто  $\pi^n(a_i) = a_i$ ,  $\forall i \in J_n$ . Такі перестановки будемо позначати  $\pi_C$ .

Наведемо приклад циклічної перестановки:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (14625837)$$

Позначимо множину циклічних перестановок, породжених числами  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , через  $P_n^C(a_1, a_2, \dots, a_n)$  або  $P_n^C$ . Відмітимо, що  $P_n^C$  є евклідовою комбінаторною множиною, або е–множиною [26–27].

У роботах О.М.Ісаченка та Я.О. Ісаченка [129–131] досліджуються поліедральні аспекти задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. Досліджено властивості множини допустимих розв’язків з використанням поліедральної комбінаторики, що дозволяє зробити частковий опис опуклої оболонки множини циклічних перестановок.

Велика кількість зарубіжних і вітчизняних робіт [69–71, 88–91, 142–164, 198, 199] присвячено розв’язанню задач маршрутизації, які характеризуються тим, що в них для виконання перевезень використовуються кільцеві (замкнуті, циклічні) маршрути. Вперше задача VRP була сформульована в 1959 р Данцигом і Рамсер і згодом стала називатися класичною [198]. Ця задача є узагальненням широко відомої NP–важкої задачі комівояжера (Traveling Salesman Problem, TSP), для якої все ще розробляються методи і алгоритми, що дозволяють знаходити точні або наближені розв’язки із заданою оцінкою похибки [69–71, 199].

Розв’язанням задачі TSP є циклічний маршрут, математичною моделлю якого є деяка циклічна перестановка з елементів, відповідних номерам міст в задачі TSP. Для задачі VRP розв’язком є набір циклічних маршрутів для деякої кількості транспортних засобів [142–164]. Але для кожного транспортного засобу математичною моделлю маршруту так само є циклічна перестановка елементів, які відповідають пунктам доставки.

Один із шляхів розв’язання задач TSP і VRP складається з генерації елементів з множини циклічних перестановок та з методів і алгоритмів оптимізації функцій на множині циклічних перестановок. За допомогою цих методів і алгоритмів можна отримувати циклічні перестановки, відповідні

оптимальним маршрутам, з точки зору мінімізації функції цілі, яка, в даному випадку є вартістю об'їзду всіх пунктів маршруту. Виходячи з цього задача генерації елементів з множини циклічних перестановок і розробка нових або модифікація вже відомих методів і алгоритмів оптимізації функцій на множині циклічних перестановок є актуальними задачами, яким і присвячена дана дисертаційна робота.

Області практичного застосування комбінаторних задач, що мають циклічні властивості, дуже широкі. Серед них галузі архівації даних і криптографії [200–203], квантових обчислень [204–207], біоінформатики [208–213], у яких наведено застосування множини циклічних перестановок і її підмножин.

Крім того циклічні маршрути використовуються в задачах знаходження найкоротшого шляху і найкоротшого гамільтонового циклу в неповнозв'язному графі, зокрема, для оптимізації роботи розподілених обчислювальних систем [214].

В рамках біоінформатики застосування комбінаторних моделей розглядається у дослідженнях з обчислювальної молекулярної біології та порівняльної геноміки, приклад наведено на рис. 1.5. У роботах [210–213] розглядається одна з основних проблем молекулярної біології – порівняння послідовностей генів.

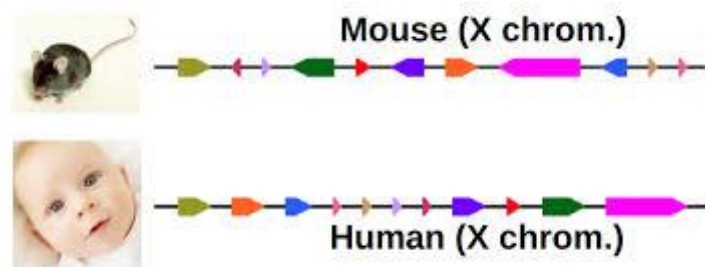


Рисунок 1.5. Порівняльна геноміка

При цьому в даних послідовностях можуть бути зміни, засновані на локальних мутаціях або глобальних перебудовах, наприклад, інверсіях і

транспозиціях фрагментів, приклад наведено на рис. 1.6. У деяких статтях розробляється теорія аналізу складних перестановок в геномі, за допомогою транспозицій, в тому числі у [211–212].

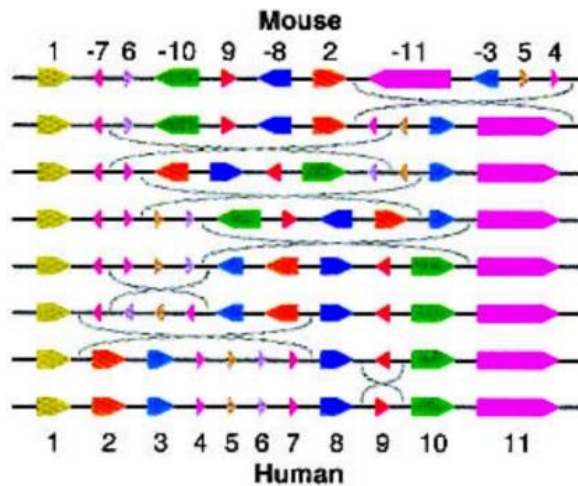


Рисунок 1.6. Складні перестановки в геномі

Опис відповідних біологічних структур можливий за допомогою перестановок, при цьому важливу роль відіграє циклічна структура перестановок.

Квантові комп'ютери вже перевершують своїх класичних конкурентів у розв'язанні певних задач, таких як целочисельна факторизація, пошук в несортованих базах даних, а також розв'язання деяких оптимізаційних задач і проблеми чорного ящика [206].

Множина перестановок, а також, різні її підмножини з певною циклічною структурою використовуються в області квантових обчислень для розв'язання ряду задач [215], наприклад як на рис. 1.7.

В [205] розроблена реалізація циклічних перестановок, як одного з будівельних блоків для побудови довільних single-qudit gates. Ряд робіт з квантових обчислень присвячений оптимізації розв'язання квантової перестановочної проблеми, яка полягає у визначенні парності циклічної перестановки, реалізованої чорним ящиком [206–207].

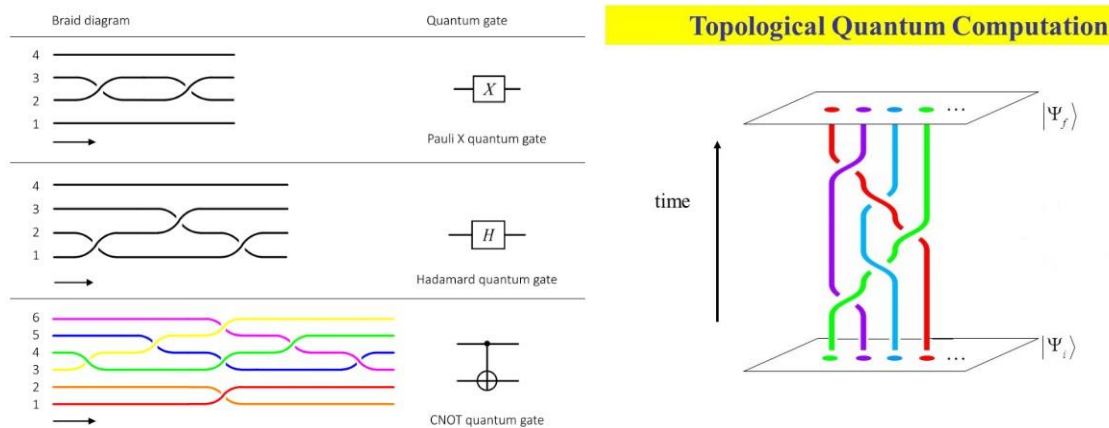


Рисунок 1.7. Схематичний приклад перестановок в квантових обчисленнях

Серед широко досліджуваних на даний момент комбінаторних задач, що мають циклічну структуру, можна виділити наступні класи: задачі перелічувальної комбінаторики з підрахунку перестановок із заданою циклічною структурою [133, 216], задачі генерації перестановок із заданою циклічною структурою [32, 121–122, 132–137], задачі оптимізації на множині перестановок із заданою циклічною структурою [1, 5, 7, 8, 130].

#### 1.4 Основні методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації

Багато дискретних задач оптимізації є NP–складними і в загальному випадку не можуть бути розв’язані за поліноміальний час [106]. Основні складності при розв’язанні даних задач викликані великою розмірністю задач і наявністю декількох точок екстремуму. Все це призводить до неможливості створення точних методів розв’язання для більшості класів проблем. Більш того, математичні моделі прикладних проблем, як правило, адекватно не представляють реальну ситуацію, а є лише наближеними описами, таким чином, отримання точного розв’язку багатьох дискретних оптимізаційних задач не завжди є доцільним [217]. У зв’язку з цим, великий інтерес викликають наближені методи розв’язання таких задач, які дозволяють

отримати розв'язки, близькі до оптимального, при відносно невеликих витратах обчислювальних ресурсів.

Можна умовно розділити методи розв'язання задач дискретної оптимізації на дві групи: точні [70, 217] і наближені методи [24, 39, 71]. Відомо, що точні методи можуть бути модифіковані для отримання наближених розв'язків, а наближені методи можуть в деяких випадках давати точні розв'язки, або виступати в якості допоміжних при знаходженні точних розв'язків. До точних методів належать метод повного перебору, метод гілок та меж [30, 77], метод гілок та відсікань (branch-and-cut) [78, 154], метод послідовного аналізу альтернатив (successive analysis of alternatives) [24, 112] і багато інших. Одним з часто використовуваних методів є метод гілок та меж. Основними відмінностями модифікацій методу гілок та меж є принципи побудови оцінок і принцип розгалуження. Оцінки розв'язку знизу в таких випадках найчастіше досягаються або за допомогою лінеаризації функції мети, або зведенням вихідної проблеми до задачі цілочисельного програмування, яка потім замінюється задачею лінійного програмування. Вибір стратегії розгалуження і побудови оцінок складна задача, яка не має відомого однозначного розв'язку.

Останнім часом велика увага приділяється розробці алгоритмів для розв'язання дискретних задач оптимізації, які можуть бути впроваджені на мультипроцесорних системах [218]. Метод гілок та меж добре піддається паралелізації, і це дає широкі можливості для розв'язання задач великих розмірностей [5, 219].

Для знаходження розв'язку задач цілочисельного програмування успішно застосовується метод гілок та відсікань [78, 154], який засновано на комбінації двох відомих методів: методу гілок та меж і методу відсікань. Метод відсікань дозволяє отримувати більш точні наближення, в той час як метод гілок та меж дозволяє використовувати отримані оцінки для зменшення кількості альтернатив, що аналізуються. Розвиток теорії багатогранників і розробка потужних проблемно-орієнтованих методів

відсікань і їх комбінація з методом гілок та меж дозволила створити клас методів гілок та відсікань.

Метод гілок та відсікань успішно застосовується для розв'язання широкого кола задач дискретної оптимізації, зокрема, для розв'язання задачі комівояжера [78, 154]. Крім того, цей метод застосовується для розв'язання задач теорії розкладів [220], розробки мереж [221], задач упаковки [222]. При розв'язанні багатьох задач дискретної оптимізації, особливо задач великих розмірностей, можливості точних методів обмежені. У зв'язку з цим розробка і вивчення різних наближених методів є актуальною задачею.

Велика кількість публікацій, зокрема [41, 44, 71, 75], присвячені наближеним методам розв'язання задач дискретної оптимізації. Серед наближених методів розв'язання задач дискретної оптимізації можна виділити наступні групи [41]: послідовні алгоритми (в тому числі «жадібні») [115], методи детермінованого [66, 82, 163] і стохастичного [5, 65, 62, 105, 159] пошуку в околі, еволюційні, ройові алгоритми, методи сканування [64, 188] і методи з використанням точних методів.

Для отримання наближених розв'язків задач дискретної оптимізації можна використовувати модифіковані точні методи, такі як метод комбінаторних відсікань, послідовний аналіз альтернатив, метод гілок та меж та інші. Як правило, найкращі результати виходять при модифікації методу гілок та меж [30, 219].

Ще один, відомий підхід до розв'язання задач дискретної оптимізації використовується в класі жадібних алгоритмів. У роботах Papadimitriou і Steiglitz [115] показали, що жадібні алгоритми дозволяють отримати точний розв'язок комбінаторної задачі оптимізації на матроїді. Нажаль, для більшості важливих задач дискретного програмування жадібні алгоритми дозволяють знаходити розв'язки недостатньо близькі до оптимуму цільової функції. Тому вони зазвичай застосовуються для отримання розв'язків, які потім використовуються в якості вихідних для алгоритмів локального пошуку.

Один з класів алгоритмів для розв'язку задач дискретної оптимізації – алгоритми випадкового пошуку [223]. Вони розрізняються по виду імовірнісного розподілу і за принципом генерації допустимих розв'язків. Існують неконтрольовані, так звані «сліпі» алгоритми випадкового пошуку, в яких закон розподілу не залежить від початкової задачі і не змінюється в процесі розв'язання. Такі методи прості в реалізації, але важко прогнозовані. Якщо ж закон розподілу залежить від типу розв'язуваної задачі і змінюється в процесі відповідно до вимог, такі методи називаються методами спрямованого випадкового пошуку [105]. Крім цього існують комбінації методи випадкового пошуку і пошуку в околі [224]. Такий підхід показав хороші результати, так як при певних умовах цей підхід дозволяє використовувати переваги обох методів [5, 225].

В кінці 20 століття методи локального пошуку використовувалися для розв'язання багатьох задач, серед яких були задачі маршрутизації і задача комівояжера [71, 98]. Пізніше були проаналізовані різні варіації пошуку в околі і стратегії старту з багатьох точок, що дало поштовх до створення евристичних методів на підставі локального пошуку. Крім того, метод локального пошуку і його варіації застосовуються для розв'язання ряду інших задач. Зокрема, вони успішно застосовуються для розв'язання задач розміщення [55], задач про призначення [66], задач пошуку мінімального кістякового дерева [224] і задачі комівояжера [82, 163]. У роботах [41, 71, 98, 199, 226] наведено більш детальний огляд методів локального пошуку.

Метод пошуку в околі, це широкий клас покращуючих алгоритмів, загальна стратегія яких базується на пошуку кращого розв'язку в деякій околиці вихідного розв'язку, як наведено на рис 1.8. Однією з основних характеристик методів даного класу є визначення самого околу [163].

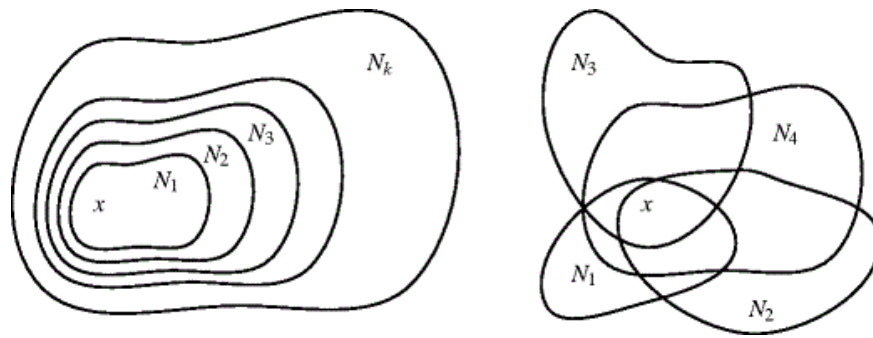


Рисунок 1.8. Варіанти визначення околу

З одного боку, чим ширше поняття околу – тим вище якість розв’язків, отриманих локально і тим менша похибка методу. З іншого боку, очевидно, що чим ширший окіл пошуку – тим більше обчислювальних ресурсів вимагає пошук кращого розв’язку в цьому околі. Грунтуючись на наведених вище міркуваннях, в рамках локального пошуку в околі існує ряд напрямків з різними підходами до стратегії пошуку. Відзначимо деякі з них.

Одна зі стратегій пошуку в околі розглядає так звані «дуже широкі» околи [226]. Існує три класи [226], що використовують дану стратегію без втрати ефективності в пошуку розв’язку: евристичні методи пошуку в широкому околі із змінною глибиною пошуку, стратегії з використанням мережевих методів і динамічного програмування, і методи, що використовуються для розв’язання задач, що в загальному випадку розв’язуються за поліноміальний час, але з додатковими дуже жорсткими обмеженнями.

Методи пошуку в широкому околі із змінною глибиною пошуку успішно застосовуються для розв’язання цілого ряду комбінаторних оптимізаційних проблем. У роботах [94–98] розглядаються відповідні алгоритми для задачі комівояжера. Розв’язання задач маршрутизації (VRP) методами із змінною глибиною пошуку вивчалось в роботах [101–102].

Серед комбінаторних методів пошуку в околі необхідно виділити групу методів, яка використовує циклічні трансфери [94, 103, 165, 226]. Теорія циклічних трансферів є основою загальної стратегії пошуку, подібно



локальним методам пошуку, таким як імітація відпалу або пошук із заборонами. Методи на основі циклічних трансферів можуть бути використані як самостійні методи пошуку в околі, або як допоміжні кроки інших алгоритмів. Існує ряд робіт, в яких описано застосування методів з використанням циклічних трансферів до широкого спектру задач комбінаторної оптимізації, зокрема, до загальної і квадратичної задачі про призначення [67–68], до проблеми маршрутизації транспортних засобів [94], до задачі про мінімальне кістякове дерево [227], до задачі формування розкладу [103].

Необхідно відзначити, що використання циклічних трансферів ефективно для розв’язання задач комбінаторної оптимізації з певними загальними особливостями. Ці задачі, як правило, характеризуються неможливістю знайти точний розв’язок при наявних обчислювальних можливостях і використанням кластеризації вхідних даних в методах розв’язання. Використання циклічних трансферів в рамках розв’язання задач комбінаторної оптимізації є окремою NP–складною задачею.

## **1.5 Постановка задачі дослідження**

Математичному моделюванню та розв’язанню задач комбінаторної оптимізації присвячено роботи багатьох зарубіжних і вітчизняних дослідників. Ґрунтуючись на виконаному огляді, сформульовано наступні висновки.

1. Множина циклічних перестановок використовується при описі областей допустимих рішень і при розв’язанні багатьох задач комбінаторної оптимізації. Багато властивостей множини перестановок, зокрема, що стосуються циклічної структури перестановок, широко досліджені, проте задачі комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках недостатньо вивчені. Отже, дослідження множини циклічних перестановок, її

властивостей і їх застосування для розв'язання задач комбінаторної оптимізації є актуальною проблемою.

2. Методи поліедральної комбінаторики дозволяють досліджувати і розв'язувати задачі комбінаторної оптимізації за допомогою комбінаторних багатогранників. Перестановочний багатогранник – це один з найбільш детально вивчених комбінаторних об'єктів. Побудова комбінаторних багатогранників для різних комбінаторних конфігурацій – складна і нетривіальна задача. Для множини циклічних перестановок на даний момент відповідний комбінаторний багатогранник не досліджено в достатній мірі і тому не може бути використано в якості ефективного інструменту аналізу задач оптимізації на циклічних перестановках. Одним з важливих підходів до аналізу задач оптимізації на циклічних перестановках є використання властивостей підмножини вершин перестановочного багатогранника, відповідних множині циклічних перестановок.

3. Розроблено досить велику кількість методів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач. Однак багато методів втрачають свою ефективність при необхідності врахування обмежень, наприклад, пов'язаних з циклічною структурою. Необхідні модифікації відомих або розробка нових методів, які б використовували комбінаторні властивості підмножин класичних комбінаторних множин із заданою циклічною структурою, для ефективного розв'язання поставлених задач.

4. Серед комбінаторних методів пошуку в околі необхідно виділити групу методів, яка використовує циклічні трансфери. Використання циклічних трансферів в рамках розв'язання задач комбінаторної оптимізації є окремою NP–складною задачею. Однак в деяких випадках, через особливості постановки вихідної задачі, класичні стратегії розв'язання задач з використанням циклічних трансферів незастосовні. Альтернативою класичній стратегії побудови циклічних трансферів може бути побудова циклічних трансферів за допомогою множини циклічних перестановок. Таким чином, актуальним є питання розробки підходів, в яких генерація

циклічних трансферів заснована на використанні множини циклічних перестановок і її властивостей.

5. Велика кількість зарубіжних і вітчизняних робіт присвячено розв'язанню задач маршрутизації, що позначаються як VRP, які характеризуються тим, що в них для виконання перевезень використовуються кільцеві (замкнуті, циклічні) маршрути. У класі задач VRP виділяють задачі розвезення вантажів від багатьох відправників багатьом одержувачам, звані задачами PDP. Ці задачі мають високу обчислювальну складність і отримати точний розв'язок в прийнятний час часто буває неможливо, тому використовують різні евристики. З огляду на циклічну структуру маршрутів в задачах VRP і PDP можливе застосування властивостей множини циклічних перестановок для математичного моделювання та розв'язання цих задач. Таким чином, розробка методів, що дозволяють покращувати розв'язки задач транспортної маршрутизації, отриманих за допомогою евристик є актуальною задачею.

**Задача дослідження.** На основі зроблених висновків сформульовано наступну задачу дослідження дисертаційної роботи: дослідження властивостей множини циклічних перестановок, створення та розвиток математичних моделей і методів комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках для розв'язання наукових і прикладних задач, зокрема, задач транспортної маршрутизації.

Для розв'язання поставленої задачі дослідження необхідно вирішити ряд задач:

1. Дослідження властивостей циклічних перестановок для використання їх в методах комбінаторної оптимізації.
2. Розробка нових і адаптація існуючих методів комбінаторної оптимізації для розв'язання задач на множині циклічних перестановок.
3. Покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, на основі теорії циклічних трансферів з

використанням специфічних властивостей циклічних перестановок і властивостей конкретного класу задач.

Як математичну модель досліджених в роботі задач комбінаторної оптимізації використаємо модель такого виду:

$$K(a) \rightarrow \text{extr},$$

$$a \in A \subseteq P_n^C,$$

де  $K$  – відображення, яке задано на підмножині  $A$  множини циклічних перестановок  $P_n^C$   $n$  різних елементів.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ

Розділ присвячено задачам оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. Досліджено властивості множини циклічних перестановок, властивості класу транспозицій суміжності та їх вплив на перестановки.

У підрозділі 2.1 наведено постановки задач оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок, розв'язанню яких буде присвячена робота. Наведено основні комбінаторні властивості перестановочного багатогранника і описано клас транспозицій суміжності.

Підрозділ 2.2 присвячено множині циклічних перестановок, і особливостям циклічної структури перестановок. Наведено визначення циклу, описано різні варіанти подання циклічної структури перестановки. Описано поняття часткової перестановки. Виділено 6 типів розташування довільних елементів у циклі перестановки.

Підрозділи 2.3 та 2.4 присвячено властивостям транспозицій суміжності і їх впливу на перестановки з різною циклічною структурою.

Результати розділу опубліковано в роботах [1–7, 10–20].

#### **2.1 Задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках**

**2.1.1 Задача оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках без додаткових обмежень**

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок  $P_n^C \subset P_n$ , яка є підмножиною  $P_n$  – множини перестановок без повторень з  $n$  дійсних чисел. Множини  $P_n$  та  $P_n^C$  породжені множиною  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

$$L(p) = \sum_{j=1}^n c_j p_j \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C \subset P_n, \quad (2.2)$$

де  $c_j \in R$ ,  $j \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ , – перестановка елементів породжуючої множини  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Послідовність  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  є упорядкуванням елементів індексної множини  $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Здійснимо відображення множини  $P_n^C$  в арифметичний евклідів простір  $R^n$ . Згідно [27–28] відображення (або занурення) задамо у вигляді

$$f : P_n^C \rightarrow R^n, \quad (2.3)$$

де  $\forall p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C$ ,  $x = f(p) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C \subset R^n$ ,  $x_i = p_i$ ,  $i \in J_n$ .

В результаті занурення  $f$  множині  $P_n^C$  поставимо у відповідність множину  $E_n^C = f(P_n^C)$  та сформулюємо еквівалентну (2.1) – (2.2) задачу оптимізації лінійної функції в просторі  $R^n$

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (2.4)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C, \quad (2.5)$$

де  $c_j \in R$ ,  $j \in J_n$ .

Множина  $E_n^C$  має усі комбінаторні властивості множини  $P_n^C$ , отже, подальші викладки справедливі як для задачі (2.1) – (2.2), так і для (2.4) – (2.5).

Відзначимо, що задача пошуку мінімуму лінійної функції на евклідових комбінаторних множинах перестановок і розміщень без додаткових обмежень розв’язана, наприклад, в [27, 228]. Розв’язок задачі (2.1) – (2.2) на множині перестановок  $P_n$ , породженій елементами  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , має вигляд [26–27]:

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^n c_j p_j, \quad c_j \in R^1, \quad \forall j \in J_n,$$

де  $p_{m_j}^* = a_j, \quad \forall j \in J_n$ , а послідовність  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  така, що  $c_{m_1} \geq c_{m_2} \geq \dots \geq c_{m_n}$ .

Відзначимо, що комбінаторні властивості множини циклічних перестановок  $P_n^C$  не дозволяють розв’язати задачу (2.4) – (2.5) шляхом простого впорядкування.

### 2.1.2 Задача оптимізації лінійної функції з лінійними обмеженнями на циклічних перестановках

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок  $P_n^C \subset P_n$ , що породжена множиною  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i p_i \rightarrow \min, \quad (2.6)$$

$$Cp \leq d, \quad (2.7)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C \subseteq P_n, \quad (2.8)$$

де  $C = [C_{ji}]_{m \times n}$ ,  $d \in R^n$ ,  $c_j \in R$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ , – перестановка елементів породжуючої множини  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Послідовність  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  є упорядкуванням елементів індексної множини  $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Здійснимо відображення виду (2.3) множини  $P_n^C$  в арифметичний евклідов простір  $R^n$ . Використовуючи занурення комбінаторної множини  $P_n^C$  в евклідов простір, сформулюємо задачу оптимізації, еквівалентну задачі (2.6) – (2.8)

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

$$Cx \leq d, \quad (2.10)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C, \quad (2.11)$$

де  $C = [C_{ji}]_{m \times n}$ ,  $d \in R^n$ ,  $c_i \in R$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $j \in J_n$ .

### 2.1.3 Комбінаторні властивості перестановочного багатогранника і циклічні перестановки

Розглянемо перестановочний багатогранник [38, 192] і його комбінаторні властивості, пов'язані з особливістю розташування вершин, відповідних множині циклічних перестановок.



Для кожної перестановки  $p \in P_n$  точка  $v_p = f(p)$  є вершиною багатогранника  $\Pi_n(a)$ . Іншими словами, існує взаємно однозначна відповідність між перестановками елементами множини  $P_n$  і вершинами багатогранника  $\Pi_n(a)$  елементами множини  $\text{vert } \Pi_n$ .

Відповідно до критерію суміжності вершин перестановочного багатогранника  $\Pi_n(a)$ , вершиною перестановочного багатогранника, суміжною з вершиною  $v = (a_{v_1}, a_{v_2}, a_{v_3}, \dots, a_{v_n}) \in \Pi_n(a)$ , що відповідає перестановці  $p \in P_n$ , є вершина, що відповідає перестановці  $p_k$ , отриманій з  $p$  транспозицією породжуючих елементів, рівних  $a_k$  і  $a_{k+1}$ ,  $\forall k \in J_{n-1}$ .

Розглянемо відображення  $\sigma_i$  на множині перестановок,  $\sigma_i : P_n \rightarrow P_n$ , задане наступним чином:

$$\sigma_i(p) = \sigma_i(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_j, \dots, p_n), \quad (2.12)$$

де  $i \in J_{n-1}$ ,  $j, k \in J_n$ ,  $j \neq k$ ,  $\{p_j, p_k\} = \{a_i, a_{i+1}\}$ .

Відображення, задане таким чином, є бієктивним і являє собою транспозицію елементів  $\{a_i, a_{i+1}\} \subset A$  [6, 38, 229–231].

Відображення  $\sigma_i$  при застосуванні до довільної перестановки  $p \in P_n$  породжує перестановку  $p_i = \sigma_i(p)$ ,  $p_i \in P_n$ , відмінну від перестановки  $p$  транспозицією елементів  $\{a_i, a_{i+1}\} \subset A$ . Згідно з визначенням критерію суміжності перестановочного багатогранника  $\Pi_n$  вершини  $v, v_i \in \Pi_n$ , відповідні перестановкам  $p, p_i \in P_n$ , є суміжними. Виходячи з цих передумов транспозиції виду (2.12) назвемо транспозиціями суміжності.

Використовуючи поняття суміжності вершин перестановочного багатогранника, введемо визначення суміжних перестановок.

**Визначення 2.1.** Дві перестановки  $p_1, p_2 \in P_n$ , що відповідають вершинам  $v_1, v_2 \in \Pi_n$ , називаються суміжними перестановками якщо вершини  $v_1, v_2$  є суміжними вершинами багатогранника  $\Pi_n$ .

Існують класичні методи оптимізації лінійних функцій, що використовують для знаходження розв'язку задачі перебір вершин опуклого багатогранника в багатовимірному просторі, наприклад, різноманітні варіації симплекс-методу [232].

Використовуючи цю ідею, можна запропонувати підхід, заснований на переборі вершин перестановочного багатогранника за допомогою транспозицій суміжності та на комбінаторних властивостях циклічних перестановок, з урахуванням обмежень на змінні вихідної задачі, для розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках (2.4) – (2.5) і (2.9) – (2.11).

Позначимо вершину  $v \in \text{vert } \Pi_n$ , відповідну деякій циклічній перестановці  $p \in P_n^C$ , через  $v^C$ , тобто,  $v^C \in \Pi_n^C \subset \text{vert } \Pi_n$ .

Розглянемо перестановочний багатогранник  $\Pi_4$ , наведений на рис. 2.1.

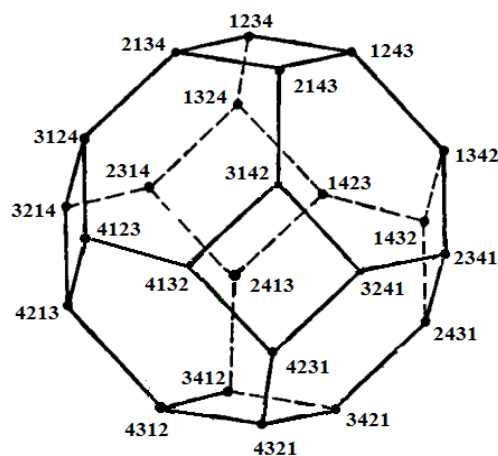


Рисунок 2.1. Перестановочний багатогранник  $\Pi_4$

Розглянемо, яким чином розташовані в перестановочному багатограннику  $\Pi_4$  вершини, відповідні множині  $E_4^C$ . Вершини відповідні множині  $E_4^C$  виділені на рис. 2.2.

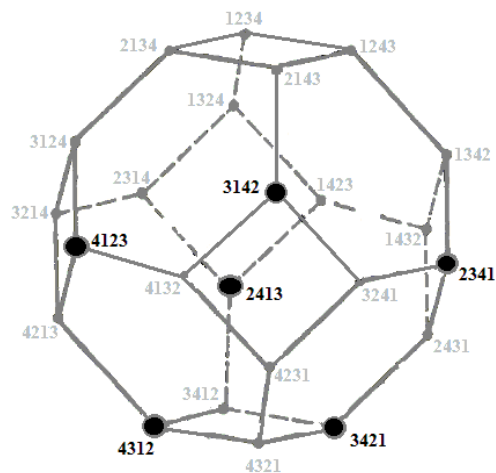


Рисунок 2.2. Вершини відповідні  $E_4^C$  в перестановочному багатограннику  $\Pi_4$

При цьому можна помітити, що можливий перехід між вершинами, що відповідають множині  $E_4^C$  за допомогою дворазового застосування відображення  $\sigma_i$ .

Приклад такого переходу в перестановочному багатограннику  $\Pi_4$  наведено на рисунку 2.3.

Таким чином, для розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок  $P_n^C$  пропонується використання таких вершин перестановочного багатогранника  $\Pi_n$ , які відповідають циклічним перестановкам, за допомогою транспозицій суміжності.



допустимі розв'язки будуть збережені. Об'єднаємо нерівності (2.10) з нерівностями  $C_1 x \leq d_1$  в систему лінійних нерівностей виду  $W^0 x \leq v^0$ , де  $W^0 = [w_{ij}^0]$  –  $(m+n+1) \times n$ -матриця,  $v^0 \in R^{m+n+1}$ . В результаті можна сформулювати задачу оптимізації, еквівалентну (2.9) – (2.11)

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min, \quad (2.13)$$

$$W^0 x \leq v^0, \quad (2.14)$$

$$x_i \geq 0, \quad (2.15)$$

$$x \in E_n^C \subset R^n. \quad (2.16)$$

## 2.2 Циклічна структура перестановок і властивості транспозицій

### 2.2.1 Циклічна структура перестановок різних елементів

Розглянемо далі розташування перших  $k$  елементів в деякій перестановці.

**Визначення 2.2.** Нехай існують породжуючі елементи  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  і  $k$  з них ( $k < n$ )  $a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k}$  визначають перші  $k$  елементів в деякій перестановці:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C,$$

$$p_j = a_{l_j}, j = 1, 2, \dots, k, k < n,$$

$$\{l_1, l_2, \dots, l_k\} \subset J_n.$$

Тоді  $y^k = (a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k})$  назвемо частковою перестановкою для перестановки  $p \in P_n^C$ .

Нехай часткова перестановка  $y^k = (a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k})$  не містить циклів довжини  $1, 2, \dots, k$ . І нехай в перестановці  $p \in P_n^C$  фіксується  $(k+1)$ -й елемент  $a_{l_{k+1}}$ ,  $l_{k+1} \in I_n$ . Тоді утворюється часткова перестановка  $y^{k+1} = (a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k}, a_{l_{k+1}})$ . Елемент  $a_{l_{k+1}}$  в залежності від індексу  $l_{k+1}$  може утворювати (замикати) або не утворювати цикл довжини  $k+1$ .

**Твердження 2.1.** Якщо

- $l_{k+1} > k+1$ , то часткова перестановка  $y^{k+1}$  не буде містити циклів довжини  $1, 2, \dots, k, k+1$ ;
- $l_{k+1} = k+1$ , то часткова перестановка  $y^{k+1}$  буде містити нерухому точку  $y_{k+1}^{k+1} = a_{l_{k+1}}$ .

**Доведення.** Якщо  $l_{k+1} > k+1$ . Проведемо доведення від протилежного. Припустимо, елемент  $a_{l_{k+1}}$  в частковій перестановці  $y^{k+1}$  утворює цикл довжини не більше  $k+1$ .

Тоді в множині елементів  $\{a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k}\}$  повинен міститися елемент  $a_{l_i}$ , такий що  $i = l_{k+1}$ .

Так як  $l_{k+1} > k+1$ , уявімо  $l_{k+1}$  у вигляді:  $l_{k+1} = k+1 + \mu$ , де  $\mu$  – деяке ціле позитивне число. Тоді  $i = k+1 + \mu$ , що неможливо, так як  $i$  приймає значення  $1, 2, \dots, k$ . Отримуємо протиріччя, отже, вихідне припущення невірне.

Перейдемо до випадку, коли  $l_{k+1} = k+1$ . Якщо  $l_{k+1}$  – номер відповідного породжуючого елемента, а  $k+1$  – порядковий номер в перестановці, то при їх рівності елемент утворює нерухому точку згідно з визначенням нерухомої точки. Твердження доведено.

Розглянемо ситуацію, коли  $l_{k+1} < k+1$ . За цієї умови елемент  $a_{l_{k+1}}$  може замикати цикли довжиною від 2 до  $k+1$  (тому що цикл довжини 1 це нерухома точка).

Для прикладу, слідуючи [37], прийmemo для простоти  $a_i = i$  для всіх  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Наприклад, при  $k=2$  елемент  $a_{l_3}$  може замикати два цикли довжини 2, що містять позиції 1 і 3, 2 і 3, тобто  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & a_{l_3} \end{pmatrix}$  та  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a_{l_3} \end{pmatrix}$ .

Або, наприклад, при  $k=5$  елемент  $a_{l_6}=1$  може замикати, або не замикати цикл довжини 3:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & 12 & 1 \end{pmatrix}$  або  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 9 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ .

Цикл довжини  $m < k+1$  буде реалізовано у частковій перестановці  $y^{k+1}$ , в тому випадку, коли існує деяка підмножина елементів часткової перестановки  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}, a_{l_{k+1}}\} \subset \{a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_{k+1}}\}$ ,  $j_i \in J_k$ , така що всі елементи цієї підмножини задовільняють правилу:  $a_{j_r} \leq a_{k+1}$ ,  $r \in J_m$ , та  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}, a_{l_{k+1}}\} = \{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_2}), \dots, \pi(a_{j_m}), \pi(a_{l_{k+1}})\}$ . Інакше кажучи, якщо деяким елементам часткової перестановки відповідає перестановка тих самих елементів.

**Твердження 2.2.** При  $l_{k+1} < k+1$  елемент  $a_{l_{k+1}} = l_{k+1}$  буде замикати цикл довжини  $m < k$  з елементів  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}, a_{l_{k+1}}\}$  тоді, коли множини  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}, a_{l_{k+1}}\}$  та  $\{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_2}), \dots, \pi(a_{j_m}), \pi(a_{l_{k+1}})\}$ , описані вище – тотожні.

Наприклад, елемент  $a_{l_6} = a_1 = 1$  замикає цикл у частковій перестановці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & 12 & a_{l_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тому що, множина}$$

$$\{a_{j_1}, a_{j_2}, a_{l_{k+1}}\} = \{2, 6, 1\} \quad \text{та} \quad \text{множина} \quad \{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_2}), \pi(a_{l_{k+1}})\} =$$

$= \{\pi(2), \pi(6), \pi(1)\} = \{6, 1, 2\}$  тотожні. Якщо, наприклад, часткова перестановка буде:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 9 & 12 & a_{l_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 9 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ , то елемент  $a_{l_6} = a_1 = 1$  не замикає цикл, тому що  $\{a_{j_1}, a_{j_3}, a_{l_{k+1}}\} = \{2, 6, 1\}$ , а множина  $\{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_3}), \pi(a_{l_{k+1}})\} = \{\pi(2), \pi(6), \pi(1)\} = \{7, 1, 2\}$ .

Наприклад, елемент  $a_{l_3} = a_2 = 2$  замикає цикл  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & a_{l_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , якщо множина  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, a_{l_{k+1}}\} = \{3, 1, 2\}$  та множина  $\{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_2}), \pi(a_{l_{k+1}})\} = \{\pi(3), \pi(1), \pi(2)\} = \{2, 3, 1\}$  тотожні. Якщо, наприклад,  $a_{l_1} = a_4 = 4$ , то  $a_{l_3} = a_2 = 2$  не замкне цикл:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & a_{l_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , тому що  $\{a_{j_2}, a_{l_{k+1}}\} = \{1, 2\}$ , а множина  $\{\pi(a_{j_2}), \pi(a_{l_{k+1}})\} = \{\pi(1), \pi(2)\} = \{4, 1\}$ .

Твердження 2.1 і 2.2 дозволяють сформулювати умови, при дотриманні яких новий елемент  $a_{l_{k+1}}$  не буде утворювати в частковій перестановці  $y^{k+1}$  циклів:

або  $l_{k+1} > k + 1$ ;

або при  $l_{k+1} < k + 1$  не існує підмножини елементів часткової перестановки, такої що всі елементи цієї підмножини задовільняють правилу:  $a_{j_i} \leq a_{k+1}$ ,  $i \in J_m$ , та для якої множини  $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}, a_{l_{k+1}}\}$  та  $\{\pi(a_{j_1}), \pi(a_{j_2}), \dots, \pi(a_{j_m}), \pi(a_{l_{k+1}})\}$  – тотожні.

Наведені умови будемо використовувати при точному і евристичному розв'язанні задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок без додаткових обмежень.

У пункті 1.3 наведено визначення циклічної перестановки, слідуючи йому, розглянемо деяку підмножину  $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$  множини породжуючих елементів  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , таку що,  $\forall i_k \in J_n: a_{i_{k+1}} = \pi^l(a_{i_k})$ , де  $l \leq n$ ,  $k, l \in J_n$ ,



і назвемо її ланцюжком. Виділення одного ланцюжка можливо тільки з одного циклу. Тобто, якщо розглядається циклічна перестановка  $p \in P_n^C$  – в ланцюжку можуть бути зафіксовані будь-які елементи з породжуючих і зв'язки між ними. Якщо ж вихідна перестановка складається з декількох циклів,  $p \in P_n \setminus P_n^C$ , то один ланцюжок може бути записаний з використанням тільки тих елементів, які належать одному циклу.

Опишемо спосіб наочного подання ланцюжків. Розглянемо циклічну перестановку  $p \in P_n^C$

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

Виділимо в ній ланцюжок  $(a_1, \pi(a_1), \pi^2(a_1), \pi^3(a_1))$   
 $= (1, \pi(1), \pi^2(1), \pi^3(1)) = (1, 4, 6, 2)$

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 6 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Так само частина ланцюжка може бути прихована на поданні. Повний запис

$$(1, \pi(1), \pi^2(1), \pi^3(1), \pi^4(1), \pi^5(1), \pi^6(1)) = (1, 4, 6, 2, 5, 8, 3).$$

Частина ланцюжка  $(a_1, \pi(a_1), \pi^3(a_1), \pi^6(a_1)) = (1, 4, 2, 3),$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \pi^2(1) & \pi^5(1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \pi(4) & \pi^2(2) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.2 Взаємне розташування елементів циклічної перестановки

Далі розглянемо особливості структури перестановок, зокрема особливості розташування довільних породжуючих елементів в циклічних перестановках.

Розглянемо розташування елементів  $a_i, a_{i+1}$  і  $a_j, a_{j+1}$ ,  $i, j \in J_{n-1}, j \neq i$  в довільній циклічній перестановці  $p \in P_n^C$ , і запишемо їх у формі ланцюжків. Елементи можуть бути розташовані в ланцюжку одним з шести можливих способів, назвемо їх типами. Перші два елементи ланцюжка зафіксуємо – це деякий елемент  $x \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , значення якого довільно, і елемент  $a_i$ , такий що  $\pi(x) = a_i$ . Отже, початок ланцюжка завжди виглядає наступним чином:  $(x, a_i, \_, \_, \_)$ , і далі йдуть три позиції, на яких можуть бути розташовані елементи  $a_{i+1}, a_j, a_{j+1}$  в різному порядку. Цей порядок і задає тип циклічної перестановки для елементів  $a_i, a_j$ . Число способів упорядкування для трьох елементів дорівнює  $3! = 6$ , тобто, кількості перестановок з трьох елементів.

Запишемо всі шість перестановок з елементів  $a_{i+1}, a_j, a_{j+1}$ :

1.  $a_j, a_{i+1}, a_{j+1}$ ;
2.  $a_{j+1}, a_{i+1}, a_j$ ;
3.  $a_{i+1}, a_j, a_{j+1}$ ;
4.  $a_{j+1}, a_j, a_{i+1}$ ;
5.  $a_{i+1}, a_{j+1}, a_j$ ;

6.  $a_j, a_{j+1}, a_{i+1}$ ;

Розглянемо ланцюжки елементів, що відповідають наведеним послідовностям.

Так як розглядаються елементи в довільній циклічній перестановці  $p \in P_n^C$ , то неважливо, з якого саме елемента буде розпочато ланцюжок, так як в циклічній перестановці з будь-якого елемента можна отримати будь-який за кількість кроків  $\leq n-1$ . Далі в роботі, не втрачаючи спільності, будемо починати ланцюжка завжди з фіксованого елемента  $a_i$ , і довільного елемента  $\chi$ , значення якого не суттєво, але елемент  $a_i = \pi(\chi)$ .

Отже, ґрунтуючись на викладеному вище, наведемо всі шість типів розташування елементів  $a_i, a_{i+1}$  і  $a_j, a_{j+1}$ ,  $i, j \in J_{n-1}, j \neq i$  в довільній циклічній перестановці  $p \in P_n^C$ .

$$\text{Тип I: } \begin{pmatrix} \chi & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_j) & \pi^\gamma(a_{i+1}) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_j & a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}.$$

$$\text{Тип II: } \begin{pmatrix} \chi & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_{j+1}) & \pi^\gamma(a_{i+1}) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_{j+1} & a_{i+1} & a_j \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}.$$

$$\text{Тип III: } \begin{pmatrix} \chi & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_{i+1}) & \pi^\gamma(a_j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_{i+1} & a_j & a_{j+1} \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}.$$

$$\text{Тип IV: } \begin{pmatrix} \chi & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_{j+1}) & \pi^\gamma(a_j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_{j+1} & a_j & a_{i+1} \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тип V: } & \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_{i+1}) & \pi^\gamma(a_{j+1}) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_{i+1} & a_{j+1} & a_j \end{array} \right), \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}. \\ \text{Тип VI: } & \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_j) & \pi^\gamma(a_{j+1}) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_j & a_{j+1} & a_{i+1} \end{array} \right), \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}. \end{aligned}$$

Введені визначення і типи циклічних перестановок використаємо для формалізації і дослідження властивостей суміжності елементів множини  $P_n^C$ .

## 2.3 Транспозиції суміжності і їх властивості

### 2.3.1 Властивості транспозицій суміжності

Один з підходів до розв'язання задач (2.4) – (2.5) і (2.9) – (2.11) полягає в дослідженні властивостей циклічних перестановок і властивостей транспозицій суміжності виду (2.12). Необхідно відзначити, що всі розглянуті далі транспозиції, за замовчуванням вважаються транспозиціями суміжності, виду (2.12).

Як зазначено вище, при застосуванні відображення  $\sigma_i(p) = p_i$ ,  $p, p_i \in P_n$  перестановка-аргумент і перестановка, результат застосування відображення  $\sigma_i$ , відрізняються порядком елементів  $\{a_i, a_{i+1}\}$ . Між множиною породжуючих елементів  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  і множиною їх індексів  $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$  існує взаємоднозначна відповідність, тому далі, без втрати спільності будемо розглядати множину перестановок  $P_n$ , що породжена множиною  $\{1, 2, \dots, n\}$ , тобто  $A = J_n$ . Для зручності в подальшому будемо говорити що множина елементів  $\{i, i+1\}$  відповідає транспозиції  $\sigma_i$ .

Назвемо транспозиції  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$  такими, що не перетинаються, якщо підмножини елементів  $\{i, i+1\}$  і  $\{j, j+1\}$ , які відповідають кожній з транспозицій, не перетинаються. Якщо підмножини  $\{i, i+1\}$  і  $\{j, j+1\}$ , що відповідають двом транспозиціям  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$ , перетинаються і  $i+1=j$  або  $i=j+1$ , то такі транспозиції будемо називати транспозиціями, що перетинаються.

Якщо в деякій множині транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  дві транспозиції  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$  дорівнюють одна одній, тобто  $i=j$ , такі транспозиції будемо називати кратними. Кратність  $m$  транспозиції визначається кількістю однакових транспозицій в деякій послідовності транспозицій.

Дві транспозиції  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$  є комутативними, якщо для будь-якої перестановки  $p \in P_n$ , виконується  $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_i(\sigma_j(p)) = \sigma_j(\sigma_i(p)) = \sigma_j \circ \sigma_i$  [217].

Суперпозицію  $k$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  будемо позначати наступним чином  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$ .

Суперпозиції транспозицій  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$  поставимо у відповідність підмножину породжуючих елементів

$$\bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\} = \{i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1, \dots, i_k, i_k + 1\} \subset A.$$

Назвемо суперпозицію транспозицій  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$  і транспозицію  $\sigma_j$  такими що не перетинаються, якщо підмножини  $\bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\} = \{i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1, \dots, i_k, i_k + 1\}$  і  $\{j, j + 1\}$ , відповідні їм, не перетинаються. Якщо підмножини  $\bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\}$  і  $\{j, j + 1\}$ , перетинаються і  $j \subset \bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\}$  або  $j + 1 \subset \bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\}$ , то  $\Sigma_k$  і  $\sigma_j$  будемо називати такими, що перетинаються. Якщо обидва елементи транспозиції  $\sigma_j$  належать підмножині суперпозиції  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$ , тобто  $\{j, j + 1\} \subset \bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\}$ , але жодна з транспозицій  $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}$  не дорівнює транспозиції  $\sigma_j$ , то транспозицію  $\sigma_j$  будемо називати вкладеною по відношенню до суперпозиції  $\Sigma_k$ .

Якщо обидва елементи транспозиції  $\sigma_j$  належать підмножині суперпозиції  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$ , тобто  $\{j, j + 1\} \subset \bigcup_{j=1}^k \{i_j, i_j + 1\}$ , і  $\sigma_j$  дорівнює одній з транспозицій  $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}$ , що беруть участь в композиції  $\Sigma_k$ , то транспозицію  $\sigma_j$  будемо називати кратною для композиції  $\Sigma_k$ .

Позначимо  $P_{\Sigma_k(p)} = \{p_i \in P_n \mid p_i = \Sigma_k(p), p \in P_n\}$ ,  $i \in J_{k!}$  – множину перестановок, що є результатом застосування до деякої перестановки  $p \in P_n$  композиції  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ . З множини

$\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  можна скласти  $P_k = k!$  різних послідовностей транспозицій, які можуть бути застосовані до вихідної перестановки.

### 2.3.2 Вплив транспозицій суміжності на довільну перестановку

Розглянемо перестановку  $p \in P_n$ , що містить, в загальному випадку, кілька циклів. За аналогією з [129] розглянемо наступні поняття.

**Визначення 2.3.** Для будь-якої вершини  $v \in \text{vert } \Pi_n$  транспозицію  $\sigma_i$  виду (2.12) елементів  $\{i, i+1\}$ , що належать одному циклу довжини  $k$ ,  $k \leq n$ , відповідної перестановки  $p \in P_n$ , будемо називати транспозицією суміжності «розриву» (break adjacency transposition). Будемо позначати таку транспозицію  $\sigma_i^B$ .

**Визначення 2.4.** Для будь-якої вершини  $v \in \text{vert } \Pi_n$  транспозицію  $\sigma_i$  виду (2.12) елементів  $\{i, i+1\}$ , що належать двом різним циклам довжини  $k_1$  і  $k_2$  відповідної перестановки  $p \in P_n$ , будемо називати транспозицією суміжності «з'єднання» (union adjacency transposition). Будемо позначати таку транспозицію  $\sigma_i^U$ .

Назви для цих двох типів транспозицій пов'язані з їх впливом на циклічну структуру вихідної перестановки. Відповідно до цього транспозиція суміжності «розриву» робить з одного циклу два, розриваючи його, а транспозиція суміжності «з'єднання» з двох циклів становить один, з'єднуючи їх.

Доведемо відповідні леми про вплив транспозицій суміжності на циклічну структуру перестановки.

**Лема 2.1.** Нехай вершина  $v \in \text{vert } \Pi_n$ , відповідна перестановці  $p \in P_n$ , містить цикл довжини  $k$ ,  $k \leq n$ . Транспозиція суміжності «розриву» для елементів циклу призведе до утворення суміжній з  $v$  вершини

$v_1 \in \text{vert } \Pi_n$ , для якої відповідна перестановка  $p_1 \in P_n$  містить, принаймні, два циклу довжини  $k_1$  і  $k_2$ ,  $k_1 + k_2 = k$ .

**Доведення.** Проведемо доведення від протилежного. Припустимо, що існує такий цикл довжини  $k$ ,  $\pi^k(i) = x$ ,  $k \leq n$ , якому належать елементи  $i$  і  $i+1$ . Розглянемо ланцюжок, утворений елементами  $i$  і  $i+1$ . Елементи  $i$  і  $i+1$  пов'язані наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_1}(i) & \pi^{k_2}(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \\ i & i+1 & x \end{pmatrix}.$$

Тут елемент  $x \in A$  – елемент породжуючої множини, відображенням якого є елемент  $i$ , значення якого може бути довільним. Зробимо транспозицію елементів  $i$  і  $i+1$

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_2}(i+1) & \pi^{k_1}(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i+1 & x & i \end{pmatrix}.$$

Отримаємо  $\pi^{k_1}(i) = i$ ,  $\pi^{k_2}(i+1) = i+1$ ,  $k_1 + k_2 = k$ , два циклу довжини  $k_1$  і  $k_2$ .

Лема доведена.

На рис. 2.4 наведено приклад транспозицій суміжності «розриву» для перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .



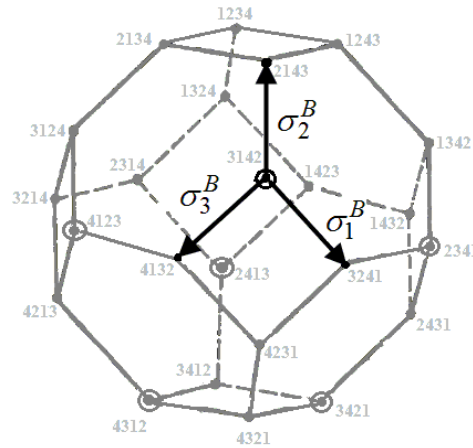


Рисунок 2.4. Транспозиції суміжності «розриву»

**Лема 2.2.** Нехай вершина  $v \in \text{vert } \Pi_n$ , відповідна перестановці  $p \in P_n$ , містить два цикли, що мають довжини  $k_1, k_2, k_1 + k_2 = k \leq n$ . Транспозиція суміжності «з'єднання» для елементів циклу призведе до утворення суміжної з  $v$  вершини  $v_1 \in \text{vert } \Pi_n$ , для якої відповідна перестановка  $p_1 \in P_n$  містить, принаймні, один цикл довжини  $k_1 + k_2 = k$ .

**Доведення.** Вихідна перестановка  $p \in P_n \setminus P_n^C$  складається, принаймні, з двох циклів довжини  $k_1, k_2, k_1 + k_2 \leq n$ . Існує елемент  $i$ , такий що  $i = \pi^1(x)$ , отже, можна записати послідовність  $(x, i, \pi^2(x), \dots, \pi^{k_1-1}(x), x)$ ,  $i \in J_n$ , і елемент  $i+1 \in (y, \pi(y), \pi^2(y), \dots, \pi^{k_2-1}(y))$ , причому  $\exists b \in J_n, b < k_2 - 2$ , і  $i+1 = \pi^{b+1}(y)$ .

Стартовий ланцюжок

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_1-2}(i) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_2-b-2}(y) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & x & \pi(y) & i+1 & y \end{pmatrix}.$$

Є два цикли, довжини яких можуть бути обчислені

$$\left. \begin{array}{l} x = \pi^{k_1-1}(i) \\ i = \pi^1(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pi^{k_1-1}(\pi^1(x)) = \pi^{k_1-1+1}(x) = \pi^{k_1}(x),$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \pi^{k_2-b-1}(i+1) \\ i+1 = \pi^{b+1}(y) \end{array} \right\} \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow y = \pi^{k_2-b-1}(\pi^{b+1}(y)) = \pi^{k_2-b-1+b+1}(y) = \pi^{k_2}(y).$$

Зробимо транспозицію елементів  $i$  і  $i+1$ ,  $i \in J_{n-1}$

$$\left( \begin{array}{ccccc} x & \pi^{k_1-2}(i) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_2-b-2}(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & x & \pi(y) & i+1 & y \end{array} \right) \xRightarrow{i \leftrightarrow i+1}$$

$$\xRightarrow{i \leftrightarrow i+1} \left( \begin{array}{ccccc} x & \pi^{k_2-b-2}(i+1) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_1-2}(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i+1 & y & \pi(y) & i & x \end{array} \right).$$

В результаті після транспозиції  $i \leftrightarrow i+1$  отримаємо єдиний цикл довжини

$$\left. \begin{array}{l} x = \pi^{k_1-1}(i) \\ i+1 = \pi^1(x) \\ y = \pi^{k_2-b-1}(i+1) \\ i = \pi^{b+1}(y) \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pi^{k_1-1+b+1+k_2-b-1+1}(x) = \pi^{k_1+k_2}(x).$$

Лема доведена.

На рис. 2.5 наведено приклад транспозиції суміжності «з'єднання» для перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

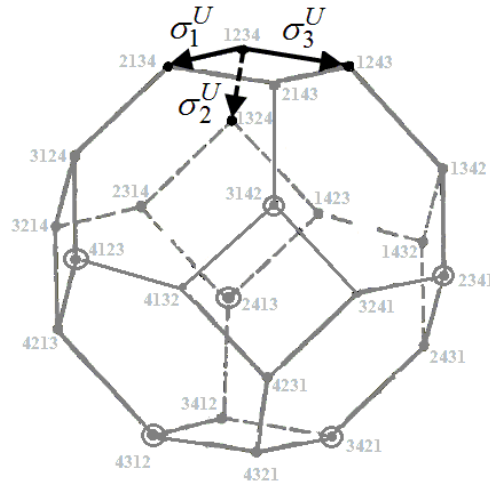


Рисунок 2.5. Транспозиції суміжності «з'єднання»

**Властивість 2.1.** Нехай  $p \in P_n$  – довільна перестановка,  $i, j$  – елементи перестановки, які не належать одному циклу. Не більше ніж за  $n-1$  транспозицію суміжності «з'єднання» з  $p \in P_n$  можна отримати перестановку  $p_1 \in P_n$ , що містить цикл, в який входять обидва елементи  $i, j$ .

**Доведення.** Розглянемо спочатку випадок, коли для побудови циклу потрібно виконати максимальну кількість транспозицій суміжності «з'єднання». Для цього необхідно, щоб перестановка  $p \in P_n$  не мала жодного циклу і складалася з  $n$  нерухомих точок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Найбільше число транспозицій суміжності «з'єднання» в такому випадку необхідно буде провести для того щоб об'єднати в один цикл елементи 1 і  $n$ .

Для цього необхідно здійснити наступні транспозиції суміжності «з'єднання»

$$\left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \hline & \underbrace{\hspace{1cm}}_{TC} & & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{TC} & \\ \hline & \underbrace{\hspace{2cm}}_{TC} & & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{TC} & & \end{array} \right).$$

Якщо  $n$  – парне, то необхідно здійснити мінімум  $\frac{n}{2}-1$  транспозицію суміжності «з'єднання» з одного напрямку і  $\frac{n}{2}-1$  транспозицію суміжності «з'єднання» з іншого, отримавши, таким чином, два циклу довжини  $\frac{n}{2}$ .

Всього буде здійснена  $(\frac{n}{2}-1)+(\frac{n}{2}-1)=n-2$  транспозиція суміжності «з'єднання». І останньою транспозицією суміжності «з'єднання» необхідно об'єднати два циклу довжини  $\frac{n}{2}$ . Разом буде здійснено  $(n-2)+1=n-1$  транспозицій суміжності «з'єднання».

Розглянемо випадок, коли  $n$  – непарне

$$\left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & (n+1)/2 & n-2 & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & (n+1)/2 & n-2 & n-1 & n \\ \hline \text{TC} & & & & & \text{TC} & \\ \hline \text{TC} & & & & & \text{TC} & \end{array} \right).$$

За допомогою  $\frac{n-1}{2}-1$  транспозиції суміжності «з'єднання» буде отримано два циклу довжиною  $\frac{n-1}{2}$  і нерухома точка. Вони за допомогою двох транспозицій об'єднуються в один цикл. Разом виходить:

$$\left(\frac{n-1}{2}-1\right) + \left(\frac{n-1}{2}-1\right) + 2 = n-1.$$

Властивість доведено.

На рис. 2.6 наведено приклад, як з перестановки  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in P_n$ ,

що складається з чотирьох нерухомих точок, за  $n-1=3$  транспозицію суміжності «з'єднання» отримано циклічну перестановку

$$p_{3,2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in P_n^C.$$

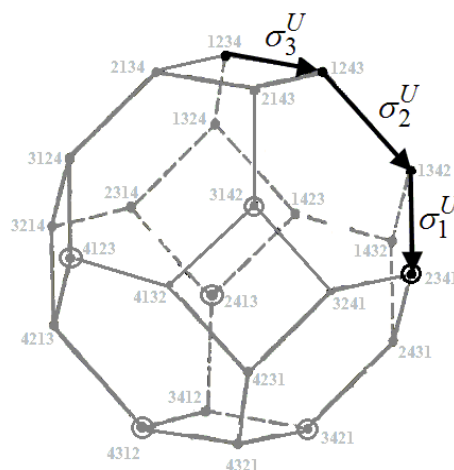


Рисунок 2.6. Отримання циклічної перестановки з  $n$  нерухомих точок

Оцінимо кількість транспозицій суміжності «з'єднання» і транспозицій суміжності «розриву», які можливо зробити для деякого циклу, якщо стартова перестановка  $p \in P_n$  містить кілька циклів різної довжини. Так як будь-який породжуючий елемент, крім першого і останнього, має два елементи сусідніх за значенням, отже, з кожним елементом  $i$  циклу можна зробити 2 транспозиції суміжності – одну з елементом  $i-1$  і одну з елементом  $i+1$ . При цьому, якщо, елементи, які беруть участь в транспозиції, належать різним циклам, це буде транспозиція суміжності «з'єднання», якщо одному, то транспозиція суміжності «розриву».

**Твердження 2.3.** Розглянемо деяку перестановку  $p \in P_n$ , що складається з декількох циклів довільної довжини. Припустимо, що один з цих циклів  $C_j$ ,  $j \in J_n$  довжини  $m$ , тоді кількість транспозицій суміжності, виду (2.12), які можна здійснити з використанням елементів даного циклу, дорівнює  $T = 2m - l - g$ , де  $m$  – кількість елементів в аналізованому циклі,  $l$  – кількість пар елементів рівних  $i, i+1$ , що належать  $C_j$ ,  $g$  – величина, яка приймає такі значення:

$$g = \begin{cases} 0 & | \quad \{1, n\} \notin C_j \\ 1 & | \quad 1 \in C_j \vee n \in C_j \\ 2 & | \quad \{1, n\} \in C_j \end{cases}$$

**Доведення.** Розглянемо вихідний цикл  $C_j$ ,  $j \in J_n$  довжини  $m$ .

Так як будь-який породжуючий елемент має два елементи, сусідніх за значенням, отже, з кожним елементом  $i$  циклу можна зробити 2 транспозиції – одну з елементом  $i-1$  і одну з елементом  $i+1$  – разом  $2m$  транспозиція.

Необхідно врахувати, що якщо пара  $i$  і  $i + 1$ ,  $i \in J_{n-1}$ , належать одному циклу, то їх транспозиція буде врахована двічі. Таким чином, необхідно від величини  $2m$  відняти  $l$  – кількість пар елементів  $i, i + 1$ ,  $i \in J_{n-1}$ , що належать  $C_j$ ,  $j \in J_n$ .

Також необхідно відзначити, що існують два породжуючих елемента, у яких є один сусід замість двох – це  $1$  і  $n$ . Відповідно, якщо вони обидва належать циклу  $C_j$  – для отримання кінцевого результату необхідно відняти

2. Якщо один з елементів  $1$  або  $n$  належать циклу – необхідно відняти 1.

Таким чином, отримуємо величину  $g$ , що приймає наступні значення:

$$g = \begin{cases} 0 & | \quad \{1, n\} \notin C_j \\ 1 & | \quad 1 \in C_j \vee n \in C_j \\ 2 & | \quad \{1, n\} \in C_j \end{cases}.$$

Разом кількість унікальних транспозицій суміжності  $i$  і  $i + 1$ ,  $i \in J_{n-1}$ , які можна зробити з використанням елементів даного циклу, дорівнює  $T = 2m - l - g$ .

Що і потрібно було довести.

**Наслідок 2.1.** Розглянемо деяку перестановку  $p \in P_n$ , що складається з декількох циклів довільної довжини. Припустимо, що один з цих циклів  $C_j$ ,  $j \in J_n$ , довжини  $m$ , тоді кількість транспозицій суміжності «з'єднання», які можна зробити з використанням елементів даного циклу, дорівнює  $T_C = T - l$ , де  $T$  – загальна кількість транспозицій, відповідно до твердження 2.4,  $l$  – кількість пар елементів рівних  $i, i + 1$  що належать  $C_j$ ,  $j \in J_n$ .

**Доведення.** Якщо із загальної кількості транспозицій суміжності відняти ті, в яких обидва елементи належать циклу  $C_j$ , залишаться тільки транспозиції, в яких один з елементів належить розглянутому циклу  $C_j$ , а

другий – довільному, відмінному від  $C_j$ , циклу в перестановці  $p \in P_n$ . Згідно з визначенням, всі ці транспозиції будуть транспозиція суміжності «з'єднання».

Наслідок доведено.

**Наслідок 2.2.** Розглянемо деяку перестановку  $p \in P_n$ , що складається з декількох циклів довільної довжини. Припустимо, що один з цих циклів  $C_j$ ,  $j \in J_n$  довжини  $m$ , тоді кількість транспозицій суміжності «розриву», які можна зробити з використанням елементів даного циклу, дорівнює  $T_p = T - T_C = l$ , де  $T$  – загальна кількість транспозицій, відповідно до твердження 2.4,  $T_C$  – кількість транспозицій суміжності «з'єднання», згідно наслідку 2.1,  $l$  – кількість пар елементів рівних  $i, i+1$ , що належать  $C_j$ ,  $j \in J_n$ .

**Доведення.** Так як  $l$  – кількість пар елементів рівних  $i, i+1$ ,  $i \in J_n$ , що належать  $C_j$ , а згідно з визначенням транспозицій суміжності елементів, що належать одному циклу, є транспозицією суміжності «розриву», отже, кількість відповідних пар і  $T_p$  збігається.

Так як будь-яка транспозиція суміжності, виду (2.12), може бути або транспозицією суміжності «розриву» або транспозицією суміжності «з'єднання», отже, так само можна обчислити  $T_p$  шляхом вирахування із загальної кількості транспозицій  $T_C$ .

Наслідок доведено.

### 2.3.3 Вплив транспозицій суміжності на циклічну перестановку

Розглянемо питання впливу транспозицій суміжності на циклічні перестановки. Зокрема застосування до деякої перестановки  $p \in P_n^C$  двох транспозицій суміжності  $\sigma_i, \sigma_j$ . В такому випадку можливо два варіанти:



- транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$  не перетинаються;
- транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$  перетинаються.

В залежності від транспозицій  $\sigma_i, \sigma_j$  їх вплив на перестановку  $p \in P_n^C$  та на її циклічну структуру буде відрізнятися. Розглянемо ці два випадки окремо.

**2.3.3.1 Вплив на циклічну перестановку транспозицій суміжності, що не перетинаються**

Розглянемо, чи можливе збереження циклічної структури перестановки при застосуванні двох транспозицій  $\sigma_i, \sigma_j$ , виду (2.12), елементів  $\{i, i+1\}$  і  $\{j, j+1\}$ ,  $i, j \in J_{n-1}, j \neq i$ . Розглянемо випадок, коли в двох транспозиціях суміжності задіяно чотири елемента.

**Твердження 2.4.** Якщо до деякої перестановки  $p \in P_n^C$  застосувати послідовно 2 транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$ , що не перетинаються, з елементів  $\{i, i+1\}$  і  $\{j, j+1\}$ ,  $i, j \in J_{n-1}, j \neq i$ , то отримана при цьому перестановка  $p_{ij} \in P_n$ , буде циклічною, якщо елементи  $i, j$  у вихідній перестановці  $p \in P_n^C$  росташовані в послідовності, відповідно до I або II типу.

**Доведення.** Розглянемо застосування транспозицій  $\sigma_i, \sigma_j$  для всіх шести типів перестановок і покажемо, які з типів зберігають циклічність. Для всіх шести типів:  $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}$

Тип I:  $j, i+1, j+1$ . Стартовий ланцюжок має наступний вигляд:

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j) & \pi^\gamma(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & j & i+1 & j+1 \end{array} \right).$$

Застосуємо послідовно дві транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$ . І переставимо елементи ланцюжка, без зміни зв'язків, для зручності візуального сприйняття. Отримаємо

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j) & \pi^\gamma(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i & j & i+1 & j+1 \end{array} \right) \xRightarrow[i \leftrightarrow j+1]{i \leftrightarrow i+1} \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\gamma(i+1) & \pi^\beta(j) & \pi^\alpha(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i+1 & j & i & j+1 \end{array} \right).$$

Тип II:  $j+1, i+1, j$ . Стартовий ланцюжок

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j+1) & \pi^\gamma(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i & j+1 & i+1 & j \end{array} \right).$$

Застосуємо послідовно дві транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$ . Тоді результат буде таким:

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j+1) & \pi^\gamma(i+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i & j+1 & i+1 & j \end{array} \right) \xRightarrow[j \leftrightarrow j+1]{i \leftrightarrow i+1} \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\gamma(i+1) & \pi^\beta(j+1) & \pi^\alpha(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i+1 & j+1 & i & j \end{array} \right).$$

Тип III:  $i+1, j, j+1$ . Стартова перестановка має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(i+1) & \pi^\gamma(j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & i+1 & j & j+1 \end{pmatrix}.$$

застосуємо транспозиції  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$ . Розглянемо результат

$$\begin{pmatrix} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(i+1) & \pi^\gamma(j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & i+1 & j & j+1 \end{pmatrix} \xRightarrow[i \leftrightarrow i+1]{j \leftrightarrow j+1} \begin{pmatrix} x & \pi^\beta(i+1) & \pi^\alpha(i) & \pi^\gamma(j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i+1 & j+1 & i & j \end{pmatrix}$$

Тип IV:  $j+1, j, i+1$ . Стартовий ланцюжок виглядає наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j+1) & \pi^\gamma(j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & j+1 & j & i+1 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо дві транспозиції  $\sigma_i, \sigma_j$ . В результаті

$$\begin{pmatrix} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j+1) & \pi^\gamma(j) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & j+1 & j & i+1 \end{pmatrix} \xRightarrow[i \leftrightarrow i+1]{j \leftrightarrow j+1} \begin{pmatrix} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\gamma(j) & \pi^\beta(j+1) \\ \downarrow & \downarrow & \nearrow \nwarrow & \downarrow \\ i+1 & j & i & j+1 \end{pmatrix}.$$

Тип V:  $i+1, j+1, j$ . Розглянемо стартовий ланцюжок

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(i+1) & \pi^\gamma(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i+1 & j+1 & j \end{array} \right).$$

І застосуємо послідовно транспозиції  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$ . Тоді результат буде таким:

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(i+1) & \pi^\gamma(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i+1 & j+1 & j \end{array} \right) \xRightarrow{i \leftrightarrow i+1, j \leftrightarrow j+1} \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\beta(i+1) & \pi^\alpha(i) & \pi^\gamma(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i+1 & j & i & j+1 \end{array} \right).$$

Тип VI:  $j, j+1, i+1$ . Розглянемо ланцюжок даного типу

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j) & \pi^\gamma(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & j & j+1 & i+1 \end{array} \right),$$

застосуємо  $\sigma_i, \sigma_j$

$$\left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\beta(j) & \pi^\gamma(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & j & j+1 & i+1 \end{array} \right) \xRightarrow{i \leftrightarrow i+1, j \leftrightarrow j+1} \left( \begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(i) & \pi^\gamma(j+1) & \pi^\beta(j) \\ \downarrow & \downarrow \nearrow \nwarrow & \downarrow \updownarrow & \updownarrow \\ i+1 & j+1 & i & j \end{array} \right).$$

Після застосування послідовно двох транспозицій  $\sigma_i, \sigma_j$ , до перестановки  $p \in P_n^C$ , отримана перестановка  $p_{ij}$ , належить множині циклічних перестановок  $P_n^C$ , у випадку якщо стартове розташування елементів в ланцюжку відповідає I або II типу. Якщо ж вихідне розташування елементів в ланцюжку відповідає III–VI типу, отримана перестановка  $p_{i,j}$  не належить множині циклічних перестановок  $P_n^C$ . В такому випадку транспозиції суміжності  $\sigma_i, \sigma_j$  призводять до виникнення в циклічній структурі перестановки  $p_{ij}$  циклів довжини менше  $n$ :  $\pi^k(z) = z$ ,  $k < n$ ,  $z \in \{i, i+1, j, j+1\}$ .

Розглянемо на прикладі перестановки

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо розташування елементів  $i=1, j=3$  в ній. В даному випадку розташування  $\{i, i+1, j, j+1\}$  буде по типу II

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & \pi(4) & \pi^2(2) \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & i & \pi(j+1) & \pi^2(i+1) \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ i & j+1 & i+1 & j \end{pmatrix}.$$

Це означає, що перестановка  $\sigma_1(\sigma_3(p)) = \sigma_3(\sigma_1(p)) = p_{13} \in P_n^C$

$$p_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 & 8 & 4 & 6 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 8 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

для елементів  $i=1, j=4$  розташування  $\{i, i+1, j, j+1\}$  буде по типу I

$$\begin{pmatrix} \pi^3(5) & 1 & \pi(4) & 2 \\ \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & i & \pi(j) & i+1 \\ \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \\ i & j & i+1 & j+1 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що перестановка  $\sigma_1(\sigma_4(p)) = \sigma_4(\sigma_1(p)) = p_{14} \in P_n^C$

$$p_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 3 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow & \nearrow \downarrow \\ 5 & 8 & 3 & 7 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Покажемо на прикладі що якщо стартове розташування елементів в ланцюжку відповідає III–VI типу, отримана перестановка  $p_{i,j}$  не належатиме множині циклічних перестановок  $P_n^C$ . Для цього розглянемо для елементів  $i=1, j=7$  розташування  $\{i, i+1, j, j+1\}$

$$\begin{pmatrix} 7 & \pi^2(1) & \pi(2) & \pi(8) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \pi^2(i) & \pi(i+1) & \pi(j+1) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ i & i+1 & j+1 & j \end{pmatrix}.$$

Це означає, що перестановка  $\sigma_1(\sigma_7(p)) = \sigma_7(\sigma_1(p)) = p_{17} \notin P_n^C$

$$p_{1,7} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 7 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 7 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2.3.3.2 Вплив на циклічну перестановку транспозицій суміжності, що перетинаються

Розглянемо вплив транспозицій суміжності  $\sigma_{i_1}$  і  $\sigma_{i_1+1}$ , яким відповідає множина елементів  $\{i_1, i_1+1, i_1+2\}$ , на довільну циклічну перестановку  $p \in P_n^C$ .

**Твердження 2.5.** Якщо до деякої перестановки  $p \in P_n^C$  застосувати послідовно 2 транспозиції суміжності, що перетинаються, тобто  $i_1 + 1 = i_2, \forall i_1 \in J_{n-2}$ , буде отримано дві перестановки  $p_{i_1 i_2} \neq p_{i_2 i_1}$ , тільки одна з яких буде циклічною.

**Доведення:** При скоєнні двох транспозицій суміжності, виду (2.12), таких що  $i_1 + 1 = i_2, \forall i_1, i_2 \in J_{n-1}$ , відбувається або транспозиція елементів  $i_1 \leftrightarrow i_1 + 1$ , потім транспозиція  $i_1 + 1 \leftrightarrow i_1 + 2$ , або транспозиція  $i_1 + 1 \leftrightarrow i_1 + 2$  і після неї транспозиція  $i_1 \leftrightarrow i_1 + 1$ .

Розглянемо послідовності, утворені елементами  $i_1, i_1 + 1, i_1 + 2$  в довільній перестановці  $p \in P_n^C$ . Необхідно знайти послідовність відображень породжуваних елементів мінімальної довжини, що з'єднує елемент  $i$  і один з елементів  $i_1 + 1, i_1 + 2$ . Так як початковий елемент  $i_1$  в даному випадку єдиний, позначимо його як  $i$ . позначимо через  $i' \in \{i_1 + 1, i_1 + 2\}$  один з елементів, для якого виконується

$$\pi^l(i) = i', l = \min\{k, m < n \mid \pi^k(i) = i_1 + 1, \pi^m(i) = i_1 + 2\},$$

і  $i'' \in \{i_1 + 1, i_1 + 2\}, i'' \neq i'$  – другий елемент, для якого

$$\pi^s(i) = i'' \Leftrightarrow \pi^{s-l}(i') = i'', s = \max\{k, m < n \mid \pi^k(i) = i_1 + 1, \pi^m(i) = i_1 + 2\}.$$

Використовуючи введені позначення, зв'язок між елементами  $i_1, i_1 + 1, i_1 + 2$ , можна представити в наступному вигляді:

$$p = \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix}.$$

**Варіант 1** послідовності транспозицій  $i_1 + 1 \leftrightarrow i_1 + 2$ ,  $i_1 \leftrightarrow i_1 + 1$ .

Так як невідомо, яке з позначень,  $i'$  або  $i''$  відповідає  $i_1 + 1$ , будемо враховувати обидві можливості.

Стартова перестановка

$$p = \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix}.$$

Припущення:  $i' = i_1 + 1$ . Результат застосування транспозицій:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix} \xRightarrow{i' \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i & i'' & i' \end{pmatrix} \xRightarrow{i \leftrightarrow i'} \begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i' & i & i'' \end{pmatrix}.$$

Альтернативне припущення:  $i'' = i_1 + 1$ . Результат:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix} \xRightarrow{i' \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i & i'' & i' \end{pmatrix} \xRightarrow{i \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i'' & i & i' \end{pmatrix}.$$

**Варіант 2** послідовності транспозицій  $i_1 \leftrightarrow i_1 + 1$ ,  $i_1 + 1 \leftrightarrow i_1 + 2$ .

Так як невідомо,  $i'$  або  $i''$  дорівнює  $i_1 + 1$ , розглянемо обидва варіанти.

Тоді стартова перестановка



$$p = \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix}.$$

Припущення  $i' = i_1 + 1$ . Результат:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix} \xRightarrow{i \leftrightarrow i'} \begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i' & i'' & i \end{pmatrix} \xRightarrow{i' \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i'' & i' & i \end{pmatrix}.$$

Альтернативне припущення  $i'' = i_1 + 1$ . Результат:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ i & i' & i'' \end{pmatrix} \xRightarrow{i \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \updownarrow & \downarrow \nearrow & \updownarrow \\ i'' & i' & i \end{pmatrix} \xRightarrow{i' \leftrightarrow i''} \begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \updownarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \updownarrow \\ i' & i & i'' \end{pmatrix}.$$

З наведеного вище сформульовано такий висновок. В незалежності від росташування елементів  $i_1, i_1 + 1, i_1 + 2$  у перестановці  $p \in P_n^C$  один із способів застосування двох транспозицій суміжності, що перетинаються, призводить до отримання циклічної перестановки, а другий до отримання перестановки з декількох циклів.

На рис. 2.7 наведено приклад застосування двох транспозицій  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , Яким відповідає множина елементів  $\{1, 2, 3\}$ , до циклічної перестановки

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in P_n^C. \text{ Відповідно до твердження 2.5 в результаті}$$

застосування  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  породжуються дві різних перестановки

$$\sigma_1(\sigma_2(p)) = p_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in P_n^C,$$

$$\sigma_2(\sigma_1(p)) = p_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in P_n \setminus P_n^C.$$

Дослідження впливу двох транспозицій суміжності на циклічні перестановки на цьому будемо вважати закінченим.

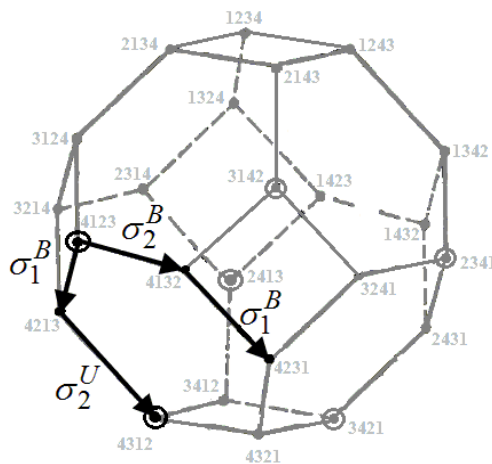


Рисунок 2.7. Застосування двох транспозицій з трьох елементів

### 2.3.3.3 Вплив на циклічну перестановку трьох транспозицій суміжності

Розглянемо вплив трьох транспозицій суміжності на циклічні перестановки.

**Твердження 2.6.** Якщо в довільній циклічній перестановці  $p \in P_n^C$  послідовно здійснити три транспозиції суміжності, виду (2.12), з використанням будь-яких елементів, то всі перестановки, отримані в результаті, не будуть циклічними незалежно від послідовності виконання транспозицій.

**Доведення:** Охарактеризуємо три транспозиції суміжності в термінах «розривів» і «з'єднань». Так як стартова перестановка має єдиний цикл довжини  $n$ , то перша транспозиція може бути тільки «розривом №1» [4].

Наступні дві транспозиції суміжності можуть бути такими:

– «розрив №2», «розрив №3»;

- «розрив №2», «з'єднання №1»;
- «з'єднання №1», «розрив №2»;
- «з'єднання №1», «з'єднання №2».

Розглянемо всі випадки окремо. У кожному разі після транспозиції «розриву №1» маємо в якості вихідної перестановку з двома циклами.

– «розрив №2», «розрив №3»: «розрив №2» розриває один з циклів на два. Отримуємо перестановку з трьома циклами. «Розрив №3» розриває один з циклів на два. Таким чином, буде отримана перестановка  $p \in P_n \setminus P_n^C$ , що складається з чотирьох циклів.

– «розрив №2», «з'єднання №1»: «розрив №2» розриває один з циклів на два. Отримуємо перестановку з трьома циклами. «З'єднання №1» об'єднує два з трьох наявних циклів. Разом буде отримана перестановка  $p \in P_n \setminus P_n^C$ , що складається з двох циклів.

– «з'єднання №1», «розрив №2»: «з'єднання №1» об'єднує два циклу, з яких складається перестановка, утворюючи циклічну перестановку. Після цього «розрив №2» розриває єдиний цикл циклічної перестановки на два різних циклу. Разом буде отримана перестановка  $p \in P_n \setminus P_n^C$ , що складається з двох циклів.

– «з'єднання №1», «з'єднання №2»: «з'єднання №1» об'єднує два циклу, з яких складається перестановка, утворюючи циклічну перестановку. Після цього третя транспозиція не може бути «з'єднанням №2», так як було доведено вище, що будь-яка транспозиція суміжності в циклічній перестановці є транспозицією суміжності «розриву».

Отже, розглянуті всі варіанти для трьох послідовних транспозицій суміжності і у всіх випадках кінцева перестановка  $p \in P_n \setminus P_n^C$ , що і потрібно було довести.

На рис. 2.8 наведено приклад застосування трьох транспозицій суміжності до циклічної перестановки  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in P_n^C$ . Всі, отримані

в результаті перестановки, не належать множині циклічних, відповідно до твердження 2.6.

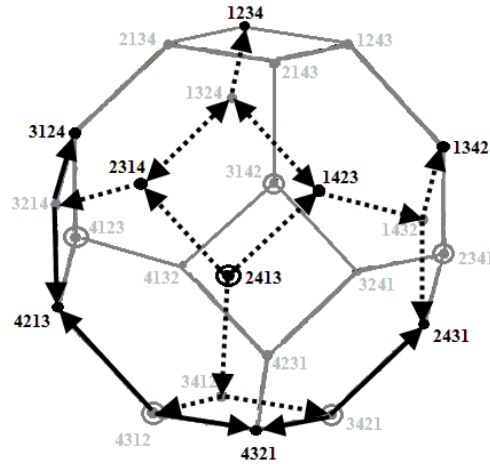


Рисунок 2.8. Застосування трьох транспозицій суміжності до циклічної перестановки

## 2.4 Вплив суперпозицій транспозицій суміжності на довільну перестановку

У підрозділі 2.3 було розглянуто вплив обмеженої кількості транспозицій суміжності, виду (2.12), на довільні перестановки і на перестановки із заданою циклічною структурою. Тепер розглянемо результат впливу композиції транспозицій  $\Sigma_k$  на деяку перестановку  $p \in P_n$ , в залежності від властивостей заданих транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  і від їх порядку в композиції.

**Лема 2.3.** Суперпозиція  $\Sigma_n = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_n}$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}\}$ , що не перетинаються, така, що для будь-яких двох транспозицій  $\sigma_{i_x}, \sigma_{i_y} \in \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}\}$ , виконується правило комутативності

$$\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_x} \circ \dots \circ \sigma_{i_y} \circ \dots \circ \sigma_{i_n} = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_y} \circ \dots \circ \sigma_{i_x} \circ \dots \circ \sigma_{i_n}.$$

**Доведення** проведемо по індукції.

Для  $n = 1$  це тривіальний випадок з однією транспозицією.

Для  $n = 2$  розглянемо композицію з двох транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}\}$ , що не перетинаються, і покажемо, що для цього окремого випадку комутативність виконується.

Для доведення розглянемо вихідну перестановку  $p \in P_n$ , та розглянемо іншу перестановку  $p \in P_4$ , породжену множиною  $A = \{i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1\}$ , таку що у ній порядок елементів відповідає порядку елементів у  $p \in P_n$ . Таким чином ми нехтуємо тими елементами перестановки, що не беруть участі у транспозиціях  $\sigma_{i_1}$  та  $\sigma_{i_2}$ , адже згідно до визначення транспозиції суміжності ці елементи залишаються на своїх місцях. Відомо що кількість перестановок  $p$  дорівнює 24-м. Продемонструємо вплив композиції транспозицій  $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2}$  на одну із них. Доведення для інших 23-х проводиться аналогічно.

Розглянемо застосування композиції  $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2}$

$$\begin{aligned}\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} : \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(p)) &= \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1)) = \sigma_{i_1}(i_1, i_1 + 1, i_2 + 1, i_2) \\ &= (i_1 + 1, i_1, i_2 + 1, i_2),\end{aligned}$$

застосування композиції  $\sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1}$

$$\begin{aligned}\sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1} : \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(p)) &= \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1)) = \sigma_{i_2}(i_1 + 1, i_1, i_2, i_2 + 1) \\ &= (i_1 + 1, i_1, i_2 + 1, i_2)\end{aligned}$$

Таким чином,  $\sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(p)) = \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(p))$ , тобто  $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} = \sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1}$ .

Припустимо, що для  $n=k$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , що не перетинаються, дана лема виконується і доведемо, що тоді вона виконується і для  $n=k+1$ . Для цього розглянемо суперпозицію  $\Sigma_{k+1} = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k} \circ \sigma_{i_{k+1}}$ , і доведемо, що  $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \circ \sigma_{i_{k+1}} = \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_k = \Sigma_s \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l, \forall s, l: s+l=k$ .

Композиція  $\Sigma_k$  з  $k$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  є бієктивним відображенням, і для нього виконується умова комутативності, що випливає з індуктивного припущення. Так як всі транспозиції  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}, \sigma_{i_{k+1}}\}$  не перетинаються, отже, підмножини елементів  $A = J_n$ , відповідні  $\Sigma_k$  і  $\sigma_{i_{k+1}}$ , не перетинаються. Таким чином, композицію транспозиції  $\sigma_{i_{k+1}}$  і суперпозиції  $\Sigma_k$  можна розглядати як композицію двох бієкцій. А для двох транспозицій доведено, що  $\sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_k = \Sigma_k \circ \sigma_{i_{k+1}}$ .

Тепер розглянемо  $\Sigma_{k+1} = \Sigma_s \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l, \forall s, l: s+l=k$ . Так як  $s$  і  $l$  менше  $k$ , отже, виходячи з індуктивного припущення,  $\Sigma_s$  і  $\Sigma_l$  комутативні. Врахуємо, що  $\Sigma_s$  і  $\Sigma_l$  є бієкція, так як вони – композиції бієкцій. Виходячи з того, що всі транспозиції  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}, \sigma_{i_{k+1}}\}$  не перетинаються, підмножини відповідні  $\Sigma_s, \Sigma_l$  і  $\sigma_{i_{k+1}}$ , не перетинаються. Таким чином,  $\Sigma_{k+1} = \Sigma_s \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l$  є композицією трьох бієкцій, для яких лема 2.3 вірна, виходячи з індуктивного припущення.

Так як твердження доведено для  $n=k+1$ , отже, відповідно до принципу математичної індукції, воно вірно і для будь-якої кількості транспозицій, що не перетинаються.

Композиція бієктивних відображень – асоціативна і, як було доведено в лемі 2.3, композиція транспозицій, що не перетинаються, комутативна для будь-яких елементів композиції. Виходячи з цього, кількість композицій з транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , що не перетинаються, дорівнює кількості

перестановок з  $k$  елементів; результат застосування всіх композицій до довільної перестановки однаковий.

**Наслідок 2.3.** Якщо до деякої перестановки  $p \in P_n$  застосувати композицію транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ ,  $0 \leq k < n/2$ , що не перетинаються, то в незалежності від послідовності застосування транспозицій буде отримана одна і та сама перестановка  $P_{\Sigma_k(p)} = \{p_i \in P_n \mid p_i = \Sigma_k(p), p \in P_n\}$ ,  $i = 1$ .

Розглянемо композицію двох транспозицій, що перетинаються.

**Лема 2.4.** Дві транспозицій, що перетинаються,  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$  не комутативні, тобто  $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$ .

**Доведення:** Розглянемо композицію з двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ , що перетинаються, і покажемо, що комутативність не виконується.

Для доведення розглянемо вихідну перестановку  $p \in P_n$ , та розглянемо іншу перестановку  $p \in P_3$ , породжену множиною  $A = \{i, i+1, i+2\}$ , таку що у ній порядок елементів відповідає порядку елементів у  $p \in P_n$ . Таким чином ми нехтуємо тими елементами перестановки, що не беруть участі у транспозиціях  $\sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ , адже згідно до визначення транспозиції суміжності ці елементи залишаються на своїх місцях. Відомо що кількість альтернативних перестановок  $p \in P_3$  дорівнює 6-ти. Продemonструємо вплив композиції транспозицій  $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2}$  на одну із них. Доведення для інших 5-ти проводиться аналогічно.

Розглянемо застосування композиції  $\sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ .

$$\sigma_i \circ \sigma_{i+1}: \sigma_i(\sigma_{i+1}(p)) = \sigma_i(\sigma_{i+1}(i, i+1, i+2)) = \sigma_i(i, i+2, i+1) = (i+1, i+2, i).$$

Змінимо порядок порядок транспозицій у композиції:  $\sigma_{i+1} \circ \sigma_i$ .

$$\sigma_{i+1} \circ \sigma_i: \sigma_{i+1}(\sigma_i(p)) = \sigma_{i+1}(\sigma_i(i, i+1, i+2)) = \sigma_{i+1}(i+1, i, i+2) = (i+2, i, i+1).$$

Так як,  $\sigma_i(\sigma_{i+1}(p)) \neq \sigma_{i+1}(\sigma_i(p))$ , то й  $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$ .

**Наслідок 2.4.** Якщо до деякої перестановки  $p \in P_n$  застосувати композицію двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ , що перетинаються, то в результаті застосування даних транспозицій в різному порядку будуть отримані дві перестановки  $P_{\Sigma_2} = \{p_i \in P_n \mid p_i = \Sigma_2(p), p \in P_n\}$ ,  $i = 2$ , такі що  $p_1 \neq p_2$ . Позначимо композиції з різним порядком транспозицій  $\Sigma'_2(p) \neq \Sigma''_2(p)$ , де  $\Sigma'_2(p) = \sigma_i \circ \sigma_{i+1}(p)$  і  $\Sigma''_2(p) = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i(p)$ .

Далі розглянемо комбінацію транспозицій, що перетинаються та що не перетинаються і їх суперпозиції.

**Лема 2.5.** Нехай є композиція двох транспозицій  $\Sigma_2 = \{\sigma_i, \sigma_j\}$ , така, що транспозиції у ній не перетинаються, і одна транспозиція  $\sigma_{i+1}$ , така що  $\{j, j+1\} \cap \{i, i+1, i+2\} = \emptyset$ . Тоді при застосуванні композиції  $\Sigma_3(p)$  всіх трьох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_j\}$  до довільної перестановки, кількість породжуваних перестановок зросте в два рази в порівнянні з кількістю перестановок, що можуть бути породжені з довільної перестановки застосуванням композиції  $\Sigma_2(p)$  двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ .

**Доведення.** Доведення даної леми може бути проведено на підставі леми 2.3 і 2.4. Розглянемо композицію двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ , що не перетинаються. Згідно лемі 2.3 композиція  $\Sigma_2 = \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$  даних перестановок буде породжувати множину перестановок, що складається з однієї перестановки:  $|P_{\Sigma_2}(p)| = 1$ .

Додамо до композиції транспозицію  $\sigma_{i+1}$ . Тоді, відповідно до леми 2.4 дві транспозиції даної композиції будуть перетинатися, і різний порядок їх застосування в композиції буде породжувати дві перестановки. В такому



випадку композицію трьох транспозицій можна розглядати як композицію двох транспозицій, що не перетинаються, одна з яких складається з двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ , що перетинаються:  $\Sigma'_2 = \sigma_i \circ \sigma_{i+1}$  і  $\Sigma''_2 = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$ .

Підсумкова кількість перестановок, породжуваних композицією трьох транспозицій збільшиться вдвічі:  $P_{\Sigma_3} = P_{\Sigma'_2 \circ \sigma_j} \cup P_{\Sigma''_2 \circ \sigma_j}$ ,

$$|P_{\Sigma_3}(p)| = 2 \times |P_{\Sigma'_2}(p)| = 2 \times |P_{\Sigma''_2}(p)|.$$

**Твердження 2.7.** Нехай є композиція  $\Sigma_n$   $n$  довільних транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}\}$ . Дана композиція  $\Sigma_n$  породжує  $S$  перестановок:  $|P_{\Sigma_n}(p)| = S$ . Нехай існує одна транспозиція  $\sigma_j \notin \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}\}$ , така що  $|\{j, j+1\} \cap \{i_m, i_m+1\}| = 1, m \in J_n$ . Тоді застосування композиції  $\Sigma_{n+1}$  транспозицій  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}, \sigma_j\}$ , збільшить кількість породжуваних перестановок вдвічі:  $|P_{\Sigma_{n+1}}(p)| = 2S$ .

**Доведення.** для  $n=1$  і  $n=2$  справедливості твердження впливає з лем 2.4 та 2.5. Подальше доведення можна провести за аналогією до леми 2.3 за принципом математичної індукції. Припустимо що дане твердження справедливо для  $n=k$  і доведемо його для  $n=k+1$ .

Розглянемо композицію двох транспозицій  $\{\sigma_j, \sigma_m\}$ , що перетинаються. Згідно зі наслідком 2.4, їх композиція породжує 2 різних перестановки. Замінімо в стартовій композиції транспозицій  $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}$  транспозицію  $\sigma_m$  на складну функцію  $\Sigma_2$ .

Тоді замість будь-якої з  $S$  перестановок, породжуваних композицією  $\Sigma_k$ , буде отримано 2 нових перестановки, в залежності від того, буде замінена  $\sigma_m$  на функцію  $\Sigma'_2 = \sigma_j \circ \sigma_m$  або на  $\Sigma''_2 = \sigma_m \circ \sigma_j$ . Отже, потужність множини перестановок, одержуваних з довільної перестановки  $p$

при застосуванні до неї композиції транспозицій  $\Sigma_{k+1}$ , буде дорівнювати  $|P_{\Sigma_{n+1}}(p)| = 2S$ , що і потрібно було довести.

**Наслідок 2.5.** Нехай є композиція  $\Sigma_2$  двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+2}\}$ , що не перетинаються, і транспозиція  $\sigma_{i+1}$ , вкладена по відношенню до композиції  $\Sigma_2$ . Тоді при застосуванні композиції  $\Sigma_3$  трьох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}\}$ , кількість породжуваних перестановок зростає в чотири рази в порівнянні з кількістю перестановок породжуваних композицією  $\Sigma_2$  двох транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+2}\}$ .

**Доведення.** Доведення цього наслідку може бути проведено на підставі леми 2.3, наслідку 2.4 і твердження 2.7. Розглянемо кількість перестановок, породжуваних даними транспозиціями.

Згідно лемі 2.3, так як транспозиції  $\{\sigma_i, \sigma_{i+2}\}$  не перетинаються – їх композиція породжує одну перестановку незалежно від порядку застосування.

Розглянемо композицію  $\Sigma_2$  транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ . Згідно зі наслідком 2.4 їх композиція породжує дві перестановки. Тобто,  $|P_{\Sigma_2}(p)| = 2$ .

Додамо до композиції  $\Sigma_2$  третю перестановку  $\sigma_{i+2}$ , отримавши таким чином композицію трьох перестановок  $\Sigma_3$ . Даний випадок описаний в утвердженні 2.7. Отже,  $|P_{\Sigma_3}(p)| = 2 \times |P_{\Sigma_2}(p)| = 4$ .

**Наслідок 2.6.** З транспозицій  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}\}$  можна отримати такі композиції:

$$\Sigma'_3 = \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_{i+2},$$

$$\Sigma''_3 = \sigma_i \circ \sigma_{i+2} \circ \sigma_{i+1} = \sigma_{i+2} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1},$$

$$\Sigma'''_3 = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+2} = \sigma_{i+1} \circ \sigma_{i+2} \circ \sigma_i,$$

$$\Sigma^{IV}_3 = \sigma_{i+2} \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i,$$

$$\text{де } P_{\Sigma'_3} \neq P_{\Sigma''_3} \neq P_{\Sigma'''_3} \neq P_{\Sigma^{IV}_3}.$$

## 2.5 Висновки по другому розділу

У підрозділі 2.1 наведені постановки задач оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок без обмежень і з додатковими обмеженнями. Описано занурення множини перестановок в евклідов простір. Наведено основні комбінаторні властивості перестановочного багатогранника і описаний спеціальний клас транспозицій суміжності, що характеризується відповідністю критерію суміжності вершин в перестановочному багатограннику. Описано підхід до розв'язання задач лінійної оптимізації на циклічних перестановках, заснований на переборі вершин опуклого багатогранника в багатовимірному просторі, комбінаторних властивостях перестановочного багатогранника і обмеженнях на множину застосування вихідної задачі для розв'язання поставлених задач.

Підрозділ 2.2 присвячений множині циклічних перестановок, і особливостям циклічної структури перестановок. Наведено визначення циклу, описані різні варіанти подання циклічної структури перестановки. Описано поняття часткової перестановки і доведено твердження про її циклічну структуру. Описано особливості структури перестановок, а саме, особливості розташування довільних породжуючих елементів в циклічних перестановках. Виділено 6 типів перестановок в залежності від особливостей розташування елементів в перестановці.

У підрозділі 2.3 описані властивості транспозицій суміжності, введені поняття транспозицій, що перетинаються та що не перетинаються, кратних і комутативних транспозицій, введено поняття суперпозиції транспозицій суміжності.

Доведено твердження про вплив транспозицій суміжності на довільну перестановку і на циклічну перестановку. На базі відомого критерію суміжності вершин перестановочного багатогранника  $\Pi_n$ , введені визначення двох типів транспозицій елементів перестановки. Досліджено

зміни в циклічній структурі перестановок при застосуванні транспозицій кожного з типів.

На підставі введених визначень сформульовані леми про вплив різних типів транспозицій на циклічну структуру перестановок, суміжних з даною перестановкою.

Використовуючи доведені леми про циклічну структуру суміжних перестановок, доводиться твердження про оцінку кількості транспозицій кожного типу для довільної перестановки  $p \in P_n$ .

Підрозділ 2.4 присвячений результатам впливу композиції транспозицій суміжності на деяку перестановку, в залежності від властивостей заданих транспозицій і від їх порядку в композиції. Доведено твердження про кількість перестановок, породжуваних в разі впливу на деяку перестановку різних композицій транспозицій суміжності.

Результати розділу опубліковано в роботах [1–7, 10–20].

### РОЗДІЛ 3

## МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ

Даний розділ присвячено методам оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках. В рамках розділу розглядаються різні методи як для розв'язування задач з додатковими лінійними обмеженнями, так і для задач без додаткових обмежень. Запропоновано методи, засновані на класичних схемах оптимізації, таких як метод гілок та меж, метод випадкового пошуку. Дані класичні алгоритми були змінені відповідно до особливостей постановки вихідної задачі. При розв'язанні враховувалися циклічні властивості і властивості суміжності циклічних перестановок.

Результати розділу опубліковано в роботах [1, 5, 7, 10–11, 13, 17, 19].

### 3.1 Властивості лінійних функцій на циклічних перестановках при впливі транспозицій суміжності на змінні

Розглянемо деяку перестановку  $p \in P_n$  і значення функції

$$L(p) = \sum_{i=1}^n c_i p_i \text{ для даної перестановки в задачі (2.3) – (2.4). З тверджень і}$$

властивостей, доведених в розділі 2, відомо, як застосування транспозицій суміжності виду (2.12) впливає на довільну перестановку  $p \in P_n$ . Дослідимо зміну значення функції  $L(p)$  в результаті застосування транспозицій суміжності виду (2.12) до довільної перестановки  $p \in P_n$ .

Будь-яка транспозиція суміжності виду (2.12) змінює значення цільової функції в такий спосіб: якщо буде здійснена довільна транспозиція  $\sigma_j$  у перестановці  $p(\dots, p_r, \dots, p_m, \dots)$ ,  $\{p_r, p_m\} = \{j, j+1\}$ , то значення цільової

функції  $L(p) = \sum_{i=1}^n c_i p_i$  зміниться на величину  $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$ ,

$r, m \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Будь-яка  $\delta_{rm}$  може або збільшити, або зменшити значення функції мети. Позначимо множину всіх  $\delta_{rm}$  через  $\Delta$ , і відзначимо, що потужність даної множини дорівнює  $n-1$ .

**Лема 3.1.** Якщо до деякої перестановки  $p \in P_n$  застосовується композиція  $\Sigma_k$  не кратних транспозицій суміжності  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , тобто  $\sigma_{i_j} \neq \sigma_{i_r}, \forall j, r \in \{1, \dots, k\}$ , то будь-яка  $\delta_{rm}, r, m \in J_n$ , змінить значення цільової функції один і тільки один раз.

**Доведення.** Розглянемо вихідну перестановку  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n$ . Виберемо з елементів перестановки  $p(\dots, p_r, \dots, p_m, \dots)$  пару  $\{p_r, p_m\} = \{j, j+1\}$  і зробимо їх транспозицію. Тоді значення цільової функції зміниться на  $\delta_{rm} = c_r - c_m$ . Для того, щоб в подальшому значення цільової функції ще раз змінилося на таку ж величину  $\delta_{rm} = c_r - c_m$  необхідно, щоб на місці породжуючого елемента  $p_m = j$  шляхом транспозиції виду (2.12) виявився елемент  $j+2$ . Це неможливо, так як в разі, якщо транспозиції не повторюються, елемент  $j$  може бути задіяний в транспозиції тільки з елементом  $j-1$ .

**Лема 3.2.** Якщо до перестановки  $p^* \in P_n$ ,  $p^* = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^n c_j p_j$ , застосувати композицію  $\Sigma_k$  транспозицій суміжності  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , таку що  $\sigma_{i_z} \neq \sigma_{i_y}, \forall z, y \in \{1, \dots, k\}$ , то  $\forall \delta_{rm} \in \Delta, r, m \in J_n$ , відповідна транспозиції суміжності з множини  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , буде збільшувати значення цільової функції.

**Доведення.** Вихідна перестановка  $p^* \in P_n$  є точкою мінімуму функції  $L(p)$ . Отже [26–27, 228], елементи перестановки  $p^* \in P_n$

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = \arg \min_{p \in P_{nk}} \sum_{j=1}^n c_j p_j, \quad c_j \in R^1, \quad p_{m_j}^* = j, \quad \text{а послідовність}$$

$\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  така, що  $c_{m_1} \geq c_{m_2} \geq \dots \geq c_{m_n}$ .

Проведемо доведення від протилежного. Припустимо, що в результаті застосування деяких транспозицій з множини  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$  була отримана проміжна перестановка  $p \in P_n$ . І припустимо, що при застосуванні ще однієї транспозиції  $\sigma_j \in \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ , що не застосовувалася раніше, буде отримана така перестановка  $p_j = \sigma_j(p)$ , що  $L(p_j) - L(p) < 0$ .

Розглянемо  $p_j = \sigma_j(p)$ , і врахуємо, що раніше, до перестановки  $p$  були застосовані довільні транспозиції з множини  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}\}$ . Отже, в перестановці  $p$  породжуючі елементи  $\{j, j+1\}$ , які беруть участь в транспозиції  $\sigma_j$ , відповідають довільним коефіцієнтам  $c_a, c_b$ . Розглянемо різницю  $L(p_j) - L(p)$

$$= ((j+1) \cdot c_a + j \cdot c_b) - (j \cdot c_a + (j+1) \cdot c_b) = ((j+1) \cdot c_a - j \cdot c_a) + (j \cdot c_b - (j+1) \cdot c_b) = c_a - c_b.$$

Виходячи з припущення, що  $L(p_j) - L(p) < 0$  різниця коефіцієнтів підпорядковується наступній нерівності  $c_a - c_b < 0$ . Тоді  $c_a < c_b$ .

Врахуємо, що елементи  $\{j, j+1\}$  в перестановці  $p^* \in P_n$  були розташовані таким чином, що елементу  $j$  відповідав коефіцієнт  $c_j$ , а  $j+1$  –  $c_{j+1}$ , при чому, виходячи з правила побудови  $p^* \in P_n$   $c_j \geq c_{j+1}$ .

Але в перестановці  $p \in P_n$  елементи  $\{j, j+1\}$  були розташовані таким чином, що елементу  $j$  відповідав коефіцієнт  $c_a$ , а  $j+1$  –  $c_b$ , При чому,  $c_a < c_b$ .

Співвідношення коефіцієнтів  $c_a < c_b$  неможливо, так як елемент  $j$  при генерації перестановки  $p$  міг бути задіяний в транспозиція суміжності

тільки з породжуючими елементами, менше його, отже, міг відповідати тільки коефіцієнту  $c_{j-w}$ , такому що  $c_{j-w} \geq c_j$ , де  $w \in \{1, 2, \dots, j\}$ .

Аналогічно елемент  $j+1$  міг бути задіяний в транспозиція суміжності тільки з породжуючими елементами, більше його, і відповідати коефіцієнту  $c_{j+u}$ , такому що  $c_{j+1} \geq c_{j+u}$ , де  $u \in \{1, 2, \dots, n-j\}$ . Тоді для всіх розглянутих вище коефіцієнтів справедливо наступне співвідношення:  $c_a = c_{j-w} \geq c_j \geq c_{j+1} \geq c_{j+u} = c_b$ , що суперечить вихідному припущенню  $c_a < c_b$  і доводить твердження.

Грунтуючись на лемах 3.1 і 3.2, можна сформулювати твердження про оцінку мінімуму лінійної функції на циклічних перестановках.

Нехай відома точка мінімуму функції  $L(p)$  на множині перестановок  $P_n$ :  $p^* \in P_n$ ,  $p^* = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^n c_j p_j$ , і його циклічна структура складається з  $k$  циклів. Нехай  $\Delta$  – множина всіх  $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$ ,  $r, m \in J_n$ . Впорядкуємо елементи множини  $\Delta$  по зростанню:  $\delta^1 \leq \delta^2 \leq \dots \leq \delta^N$ , де  $N = n-1$ , і позначимо через  $\sum_{i=1}^k \delta^i$  суму  $k$  перших елементів з упорядкованих елементів  $\delta^1 \leq \delta^2 \leq \dots \leq \delta^N$ . І нехай  $p^{*C} \in P_n^C$  – точка мінімуму функції  $L(p)$  на множині циклічних перестановок:  $p^{*C} = \arg \min_{p \in P_n^C} \sum_{j=1}^n c_j p_j$ .

**Твердження 3.1.** Для мінімуму лінійної функції  $L(p)$  виду (2.1) на множині циклічних перестановок  $P_n^C$  справедлива наступна оцінка:

$$\min_{p \in P_n^C} L(p) \geq L(p^*) + \sum_{i=1}^k \delta^i.$$



**Доведення.** якщо перестановка  $p^* \in P_n$ ,  $p^* = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{i=1}^n c_i p_i$ ,

складається з  $k$  циклів, то для того щоб з  $p^*$  отримати циклічну перестановку, необхідно застосувати мінімум  $k$  транспозицій суміжності «з'єднання» виду (2.12).

Згідно леми 3.1 і 3.2 всі  $k$  транспозицій суміжності будуть збільшувати значення цільової функції, але будь-яка  $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$ ,  $r, m \in J_n$  бере участь в збільшенні тільки один раз. Отже, якщо будуть обрані  $k$  мінімальних значень з усієї множини  $\Delta$ , то їх сума буде мінімальним значенням, на яке необхідно буде збільшити  $p^* \in P_n$ . Це доводить справедливості оцінки.

### 3.2 Оптимізація лінійної функції на циклічних перестановках без додаткових обмежень

#### 3.2.1 Реалізація методу гілок та меж

Для отримання точного розв'язку задачі (2.1) – (2.2) застосуємо метод гілок та меж. Основними складовими стратегії методу гілок та меж є правило розгалуження і правило вибору [22].

При розв'язанні задачі (2.1) – (2.2) розгалуження на кожному кроці алгоритму, тобто генерація дочірніх вершин, заснована на фіксації різних породжуючих елементів з числа ще не зайнятих щодо  $i$ -ого коефіцієнта  $c_i$  цільової функції  $L(x)$ , який відповідає даному рівню дерева.

Побудова оцінки для кожної вершини складається з двох етапів. Перший етап – підрахунок результату множення уже зафіксованих породжуючих елементів на відповідні коефіцієнти вихідної функції

$$L_1(x) = \sum_{i=1}^k a_{l_i} \cdot c_i ,$$

де  $c_i$  – коефіцієнти  $L(x)$ ,  $a_{l_i}$  – такі що  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n^C$ ,  $x_j = a_{l_j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $k < n$  елементи  $y^k = (a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k})$ .

При цьому використовуються всі вершини, для яких дана вершина є дочірньою. Другий етап – підрахунок залишку. Вільні породжуючі елементи перемножуються з рештою коефіцієнтів вихідної функції згідно з правилом пошуку мінімуму лінійної функції на множині  $P_n$

$$L_2(x) = \sum_{i=k}^n a_{l_i} \cdot c_i,$$

де  $c_i$  – коефіцієнти  $L(x)$ ,  $a_{l_i}$  такі що  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n^C$ ,  $x_j = a_{l_j}$ ,  $j = k+1, \dots, n$ ,  $k < n$ , причому  $c_{k+1} \geq c_{k+2} \geq \dots \geq c_n$ ,  $a_{l_k} < a_{l_{k+1}} < \dots < a_{l_n}$

Таким чином, оцінка вершини

$$L_E(x) = L_1(x) + L_2(x).$$

При побудові дочірніх вершин новий елемент не повинен утворювати циклу довжини менше  $n$ , в тому числі нерухомої точки – циклу довжини 1. Щоб циклів не виникало, перевіряються сформульовані в 2.2.1 умови.

Після отримання будь-якого проміжного розв'язку задачі (рекорду) відбувається перевірка, чи є поточний розв'язок задачі (значення рекорду) оптимальним. Якщо існує хоча б одна "висяча" вершина, тобто вершина, що не породила ще дочірніх, з кращою оцінкою, то вона приймається як поточна і алгоритм продовжує побудову дерева. Робота алгоритму закінчується, якщо отриманий розв'язок (рекорд) для кінцевої вершини найкращій з наявних.

За допомогою цього алгоритму можливо отримати точний розв'язок вихідної задачі. Але з огляду на те, що потужність множини циклічних

перестановок дорівнює  $(n-1)!$ , знаходження точного розв'язку стає важко здійсненим, а іноді і неможливим в кінцевих часових проміжках.

Таким чином, актуальним стає питання про знаходження наближеного розв'язку або розв'язку із застосуванням евристики для задачі комбінаторної оптимізації в наведеній вище постановці.

### 3.2.2 Комбінація методу гілок та меж і евристики

Пошук розв'язку задачі із застосуванням евристики складається з двох етапів. Перший етап – побудова всіх часткових перестановок довжини  $k$ . В результаті цього виходить дерево часткових перестановок з  $k$  рівнями, кожним листом якого є часткова перестановка  $y^k$ .

Потім на підставі заданого евристичного правила з усіх часткових перестановок вибирається деяка кількість «кращих», тобто перестановок з кращим значенням оцінки цільової функції. Евристичні правила можуть бути, наприклад, такими:

1. вибір в якості «кращих» перших  $p\%$  перестановок с кращими значеннями оцінок;
2. вибір всіх перестановок, оцінка яких відхиляється від  $L_{opt}$  не більше ніж на задану величину  $q$ .

$L_{opt} = L_{\min} \vee L_{\max}$  в залежності від вихідної задачі, де  $L_{\min}$  і  $L_{\max}$  – відповідно мінімальна та максимальна оцінки, отримані для всіх розглянутих перестановок.

3. Вибір всіх перестановок, оцінка яких відхиляється від  $L_{opt}$  не більше ніж на задану частку  $0 \leq v < 1$  від усього динамічного діапазону оцінок, тобто перестановок з оцінкою  $L(x)$  такий, що  $L(x) - L_{\min} \leq v \cdot (L_{\max} - L_{\min})$ , де  $L_{\min}$  і  $L_{\max}$  – відповідно мінімальна та максимальна оцінки, отримані для всіх розглянутих перестановок.

Всі перестановки, що не відповідають обраному правилу, виключаються з подальшого розгляду.

Другий етап розв'язку полягає в тому, що для кожної із вершин дерева, що залишилися у розгляді, будуються дочірні вершини, на підставі тверджень 2.1 і 2.2. Таким чином, виходить дерево часткових перестановок довжини  $k+1$ . З цих перестановок знову вибирається деяка кількість «кращих», а всі інші відкидаються. Процес триває, поки перестановки не досягнуть довжини  $n$ . Якщо в кінці ітерацій залишилося кілька перестановок, в якості кінцевого розв'язку вибирається перестановка з кращим значенням цільової функції. Якщо на певному етапі алгоритму залишиться лише одна перестановка, вона добудовується до довжини  $n$  і вибирається в якості рішення.

Таким чином, буде отримано деякий евристичний розв'язок задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках. Ступінь точності такого розв'язку залежить від розмірності задачі  $n$ ; рівня  $k$ , на якому відбувається зупинка (при  $k=n$  виходить точний розв'язок); евристичного правила вибору «кращих» перестановок і коефіцієнтів цільової функції.

В рамках проведених досліджень, описані вище точні та евристичні методи були покладені в основу обчислювальної програми. Далі у розділі 5 дисертаційної роботи наведено результати обчислювальних експериментів із використання даної програми для розв'язання до задач виду (2.1) – (2.2) і (2.4) – (2.5).

### 3.2.3 Метод транспозицій суміжності

Доведені, в пункті 2.4 твердження складають основу наступної стратегії розв'язання задач виду (2.1) – (2.2) і (2.4) – (2.5).

1. Знаходження  $p^* \in P_n$ , такого що,  $p^* = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{i=1}^n c_i p_i$ .

2. Якщо  $p^* \in P_n^C$  – розв’язок задачі (2.4) – (2.5) знайдено. Інакше, розбиття перестановки  $p^* \in P_n$ , в твір циклів. Підрахунок  $k$  – кількості циклів, з яких складається вихідна перестановка.

3. Вибір з усіх можливих  $n-1$  транспозицій суміжності виду (2.12),  $k-1$  транспозицію суміжності «з’єднання», таких щоб з їх допомогою можна було об’єднати всі  $k$  циклів.

4. Підрахунок кількості  $M = |P_{\Sigma_{k-1}}(p)|$  різних перестановок, які можна породити за допомогою композиції  $\Sigma_{k-1}$   $k-1$  транспозиції суміжності, відповідно до твердження 2.7.

5. Генерація перестановок, шляхом застосування до перестановки  $p^* \in P_n$  композиції  $\Sigma_{k-1}$ , з огляду на співвідношення перетинаючихся і неперетинаючихся транспозицій суміжності в композиції, відповідно до твердження 2.7.

6. Підрахунок значення функції цілі відповідно до леми 3.1 і 3.2 на всіх породжених в п.5 перестановках. Перестановка з мінімальним значенням цільової функції приймається як наближений розв’язок вихідної задачі.

7. Оцінка отриманого розв’язку, заснована на твердженні 3.1.

В рамках проведених досліджень, описані вище кроки були покладені в основу обчислювальної програми. Далі у розділі 5 дисертаційної роботи наведено результати обчислювальних експериментів із використання даної програми для розв’язання до задач виду (2.1) – (2.2) і (2.4) – (2.5).

### **3.3 Розв’язання задач оптимізації лінійної функції з лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок**

Для розв’язання задач оптимізації виду (2.6) – (2.8), (2.9) – (2.11) і (2.13) – (2.16) на множині циклічних перестановок пропонується метод, заснований на ідеології випадкового пошуку, використанні властивостей

циклічних перестановок і аналітичному розв'язку систем лінійних нерівностей як обмежень на змінні.

### 3.3.1 Метод на основі випадкового пошуку

Підхід на основі випадкового пошуку з використанням аналітичного розв'язку систем лінійних нерівностей як обмежень на змінні раніше було застосовано для розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на множині перестановок  $P_n$  з лінійними обмеженнями в [225].

Здійснимо модифікацію цього підходу для розв'язання задачі виду (2.6) – (2.8), (2.9) – (2.11) і (2.13) – (2.16) на циклічних перестановках.

Розглянемо загальну стратегію розв'язання задачі [228]. Дотримуючись ідеології випадкового пошуку, задамо кілька серій випробувань  $M$ , і кількість випробувань в кожній серії  $m$ .

У кожному випробуванні в рамках однієї серії знаходиться розв'язок системи лінійних обмежень-нерівностей. Згідно [234], загальна формула невід'ємних розв'язків системи (2.14) – (2.15) визначається виразом

$$z = \frac{\xi_1 z^1 + \xi_2 z^2 + \dots + \xi_l z^l}{\xi_1 z_{N+1}^1 + \xi_2 z_{N+1}^2 + \dots + \xi_l z_{N+1}^l},$$

де  $z^1, z^2, \dots, z^l$  – знайдені фундаментальні розв'язки наступної допоміжної системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} W^0 x - v^0 x_{n+1} \leq 0, \\ -x_i \leq 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

де  $z_{n+1}^1, z_{n+1}^2, \dots, z_{n+1}^l$  – їх останні координати,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$  – довільні дійсні числа, що задовольняють умові

$$\xi_1 z_{n+1}^1 + \xi_2 z_{n+1}^2 + \dots + \xi_l z_{n+1}^l \geq 0.$$

Далі випадковим чином генеруються значення дійсних чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ , що задовольняють умові  $\xi_1 z_{n+1}^1 + \xi_2 z_{n+1}^2 + \dots + \xi_l z_{n+1}^l \geq 0$ . Виходячи з написаного вище, отримаємо  $z(i)$  – розв’язок, який задовольняє системі (3.1). Знайдемо точку множини  $E_n^C$ , найближчу до отриманого розв’язку  $z(i)$ . Для цього визначимо

$$x_i = \arg \min_{x \in E_n^C} \|x - z(i)\|^2, \quad (3.2)$$

якщо  $x_i \in E_n^C$  не задовольняє системі нерівностей (3.1), переходимо до наступного випробування.

В іншому випадку  $x_i$  порівнюється з попередніми наближеннями до розв’язку задачі (2.13) – (2.16) і в разі, якщо в точці  $x_i$  функція цілі приймає значення краще, ніж в попередніх випробуваннях, вважаємо  $x_i$  новим наближенням до розв’язку задачі (2.13) – (2.16).

Позначимо  $\bar{x} = x_i$ . Будемо вважати  $\bar{x}$  поточним наближенням до розв’язку, а  $L(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i$  – верхньої оцінкою розв’язку задачі (2.13) – (2.16).

Додамо до системи (2.16) лінійну нерівність:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \leq \bar{d}, \quad (3.3)$$

$$\text{де } \bar{d} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i.$$

В результаті отримаємо систему лінійних нерівностей  $W^1 x \leq v^1$ . Знайдемо в системі  $W^1 x \leq v^1$  нерівність з такою ж, як в (3.3) лівою частиною:

$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq \tilde{d}$ . Порівняємо  $\tilde{d}$  і  $\bar{d}$ . Якщо  $\tilde{d} < \bar{d}$ , замінимо в системі  $W^1x \leq v^1$  нерівність новою нерівністю (3.3). Це призведе до скорочення області, описуваної системою нерівностей. Позначимо  $\bar{d} = \tilde{d}$ . Продовжимо процес розв'язання.

### 3.3.2 Розв'язання допоміжної задачі на множині циклічних перестановок

Розглянемо розв'язання допоміжної задачі (3.2).

Для множини перестановок розв'язання даної задачі зводиться до знаходження безумовного мінімуму лінійної функції і має наступний вигляд [26–27, 228]:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \arg \min_{x \in E_n} \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (3.4)$$

де  $c_j \in R^1$ ,  $\forall j \in J_n$ ,  $x_{m_i}^* = a_i$ ,  $\forall i \in J_n$ , а послідовність  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  така, що  $c_{m_1} \geq c_{m_2} \geq \dots \geq c_{m_n}$ .

Оскільки множина циклічних перестановок є підмножиною множини перестановок, то для будь-якого  $x \in E_n^C$  задача (3.2) зводиться до оптимізації лінійної функції.

Для множини  $E_n^C$  задача знаходження  $\min_{x \in E_n^C} \left( \sum_{j=1}^n x_j z(i)_j \right)$  не може бути

розв'язана на основі впорядкування елементів, і для її розв'язання можна використовувати точні, наближені та евристичні методи, описані в даній роботі у підрозділі 3.2.



За допомогою методу гілок та меж можливе отримання точного розв'язку задачі. Але так як при розв'язанні задачі (2.13) – (2.16) допоміжну задачу необхідно розв'язувати багато раз в рамках кожної серії експериментів, для економії обчислювальних ресурсів пропонується використання евристичного підходу, який використовує деякі кроки методу гілок та меж або наближеного методу на основі транспозицій суміжності.

### 3.3.3 Використання розпаралелювання в методах оптимізації на циклічних перестановках

Описана стратегія оптимізації лінійної функції з лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок добре працює для розв'язання задач малих розмірностей. Але з ростом розмірності  $n$  вихідної задачі, спостерігаються значні витрати часу, необхідні для розв'язання. Особливості прийнятої стратегії розв'язок задачі дають можливість виконати розпаралелювання обчислень.

При розв'язанні задачі (2.13) – (2.16) обчислення можна прискорити шляхом паралельного розв'язку допоміжних задач виду (3.2) для випадково згенерованих точок в рамках кожної серії випробувань. Кількість випробувань  $m$  в кожній серії можна вибрати пропорційною до кількості процесорів.

Таким чином, стратегія розв'язання задачі (2.13) – (2.16) з використанням паралельних обчислень виглядає наступним чином:

1. Побудова симплекса, що містить в собі перестановочний багатогранник.
2. Формування системи обмежень, з урахуванням вихідних даних.
3. Одночасна генерація кількох точок всередині області рішень.
4. Паралельне знаходження для кожної згенерованої точки найближчої вершини перестановочного багатогранника за допомогою методу гілок та меж.

5. Вибір з отриманих розв'язків найкращого, оновлення системи обмежень.

При оцінці ефективності паралельних обчислень використовують закони Амдала і Густафсона, для того щоб розрахувати максимальне можливе прискорення паралельного виконання програми в порівнянні з послідовним [235].

Розглянемо  $S$  – прискорення, яке може бути отримано на комп'ютері при даних значеннях. Для прискорення, відповідно до закону Амдала, існує наступна оцінка:

$$S < \frac{1}{f + \frac{(1-f)}{p}},$$

де  $f$  – частка операцій, які потрібно виконати послідовно,  $p$  – число процесорів.

Так само можна розраховувати  $f$  у відсотках, як кількість серійного коду, яке може бути виконана паралельно. У такому випадку оцінка  $S$  може бути не настільки точна, але її розрахунок зазнає суттєвого спрощення.

Аналіз запропонованої стратегії розв'язання показує, що при використанні паралельних обчислень частка серійного коду, який необхідно виконати послідовно, становитиме приблизно 75%.

Тоді прискорення  $S$  можна оцінити таким чином:

$$S < \frac{1}{0,75 + \frac{(1-0,75)}{4}} = \frac{1}{0,75 + 0,0625} = 1,23.$$

В рамках проведених досліджень, описані вище принцип паралельного обчислення був реалізований в рамках обчислювальної програми. Далі у розділі 5 дисертаційної роботи наведено результати обчислювальних експериментів

із використання даної програми для розв'язання до задач виду (2.4) – (2.5) і (2.13) – (2.16).

### 3.3.4 Розв'язання допоміжної задачі на множині циклічних перестановок з використанням транспозицій суміжності

Використання методу гілок та меж для допоміжної задачі має свої недоліки. Даний метод істотно залежить від вхідних даних і при розв'язанні задач розмірності більше 20 вимагає задіяння суттєвих обчислювальних ресурсів.

У пункті 3.2.3 даної роботи для розв'язання допоміжної задачі виду (3.2) була запропонована стратегія на основі властивостей транспозицій виду (2.12). Даний алгоритм дозволяє отримувати наближений розв'язок задачі, але при цьому не вимагає істотних обчислювальних ресурсів.

Для цього знаходимо перестановку  $p^* \in P_n$ , таку що  $p^* = \arg \min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^n c_j p_j$ . Тоді, якщо  $p^* \in P_n^C$ , то розв'язок задачі (3.2) знайдено. В іншому випадку – необхідно розбиття даної перестановки в твір циклів. Для цього проводиться підрахунок кількості циклів  $k$ , з яких складається вхідна перестановка. Далі вибираються з усіх можливих  $n-1$  транспозицій виду (2.12),  $k-1$  транспозиція «з'єднання», таких щоб з їх допомогою можна було об'єднати всі  $k$  циклів.

Підрахунок різних перестановок, які можна породити за допомогою даних транспозицій, шляхом застосування до перестановки  $p^* \in P_n$  обраних транспозицій, враховуючи співвідношення тих що перетинаються та тих що не перетинаються. Далі відбувається генерація перестановок і підрахунок значення функції цілі. Як наближений розв'язок вихідної задачі приймається перестановка з мінімальним значенням цільової функції. В якості останнього етапу розв'язку вихідної задачі здійснюється оцінка отриманого розв'язку. В

рамках проведених досліджень, описані вище принцип розв'язання допоміжної задачі був реалізован в рамках обчислювальної програми. Далі у розділі 5 дисертаційної роботи наведено результати обчислювальних експериментів із використання даної програми для розв'язання до задач виду (2.13) – (2.16).

### 3.4 Генерація циклічних перестановок за допомогою транспозицій

#### 3.4.1 Генерація суміжних циклічних перестановок за допомогою двох транспозицій

У ряді математичних моделей при розв'язанні деяких комбінаторних задач можуть знадобитися усі циклічні перестановки, породжені деякою множиною. Ґрунтуючись на досліджених властивостях циклічних перестановок і на доведених в розділі 2 твердженнях можна здійснювати генерацію всіх циклічних перестановок, які знаходяться від стартової на відстані двократного застосування транспозиції суміжності.

Розглянемо наступну задачу: для циклічної перестановки  $p \in P_n^C$  необхідно здійснити генерацію всіх циклічних перестановок, послідовно застосовуючи усі можливі композиції з двох транспозицій суміжності виду (2.12). Необхідно розглянути всі можливі варіанти комбінацій елементів в транспозиціях, не використовуючі ті комбінації елементів та композиції транспозицій, що призводять до однакових результатів, тобто уникаючи надмірності.

Розв'язання даної задачі може бути засновано на доведених твердженнях. Для цього необхідно розглянути всі пари елементів  $i, j$ , такі що  $i \in \{3, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, i-2\}$ . Це дозволяє виключити з розгляду випадки надмірності дослідження перестановки, тобто, якщо відомий тип перестановки для пари  $i, j$ , то пара  $j, i$  розглядатися не буде.

Після дослідження всіх наборів елементів  $i, j$ ,  $i \in \{3, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, i-2\}$  можна вказати кількість різних перестановок, які можуть бути згенеровані за допомогою двох транспозицій для даної вихідної перестановки. Вона дорівнює кількості пар елементів, для яких тип перестановки I або II, плюс  $n-2$  перестановки, отриманих з вихідної шляхом двох транспозицій, що перетинаються, відповідно до твердження 2.5.

Генерація перестановок у околі стартової складається з наступних кроків:

**Крок 1.** Зовнішній цикл з лічильником  $i=3, \dots, n-1$ , вкладений цикл з лічильником  $j=1, \dots, i-2$ . При кожному повторенні циклу відбувається аналіз відповідної пари  $i, j$  для знаходження пар типу I і II.

При виявленні пари відповідного типу проводиться генерація циклічної перестановки за допомогою двох транспозицій суміжності:  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$ , і запис отриманої перестановки в масив результатів.

**Крок 2.** Один цикл з лічильником  $i=1, \dots, n-1$ ,  $j=i+1$ . Для кожної пари  $i, j$  здійснюється генерація двох перестановок шляхом застосування транспозицій суміжності  $\sigma_i$  і  $\sigma_j$  в різній послідовності. Отримані перестановки записуються в тимчасовий масив. Знаходження серед двох отриманих перестановок циклічної і її запис в масив результатів. Обнулення тимчасового масиву.

### 3.4.2 Оцінка обчислювальної складності алгоритму генерації

Для оцінки складності алгоритму необхідно проаналізувати всі пари елементів  $i, j$ ,  $i \in \{3, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, i-2\}$  і знайти ті з них, розташування яких

відповідає типу I і II. Всього пар елементів буде  $\sum_{i=3}^{n-1} (i-2)$ . Позначимо

кількість пар типу I і II через  $m, m \leq \sum_{i=3}^{n-1} (i-2)$ .

Тоді підсумкова кількість циклічних перестановок, які можуть бути отримані з вихідної за допомогою двох транспозицій суміжності дорівнює:  $(n-2)$  перестановки, отримані в результаті двох транспозицій суміжності з використанням трьох елементів, плюс  $m$  перестановок, отриманих в результаті двох транспозицій суміжності з використанням чотирьох різних елементів.

Для того щоб згенерувати одну перестановку, необхідно зробити дві транспозиції сусідніх за значенням елементів, отже, кількість дій, необхідних для генерації всіх перестановок, потрібно помножити на два.

Отже, кількість елементарних операцій, що здійснюються алгоритмом дорівнює:  $2((n-2) + m)$ ,

де  $n$  – розмірність задачі,  $m$  – кількість пар елементів, послідовність росташування яких у стартовій перестановці відповідає типам I та II.

Складність аналізу дорівнює  $O\left(\sum_{i=3}^{n-1} (i-2)\right)$ , а складність генерації  $2((n-2) + m)$ .

Складність алгоритму дорівнює:  $O\left(\sum_{i=3}^{n-1} (i-2)\right) + 2((n-2) + m)$ .

### 3.5 Висновки по третьому розділу

Пункт 3.1 присвячений властивостям транспозицій суміжності, а саме оцінці впливу транспозицій суміжності на значення функції при застосуванні

до аргументу лінійної функції. Доведені леми і твердження про оцінку мінімуму лінійної функції на циклічних перестановках.

У пункті 3.2 описаний ряд методів, що дозволяють отримувати точний, наближений та евристичний розв'язок задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках. Для знаходження точного розв'язку даної задачі використовується класичний метод гілок та меж. Описано правило розгалужень і правило вибору. Але так як, потужність множини циклічних перестановок дорівнює  $(n-1)!$ , знаходження точного розв'язку на великих розмірностях задачі стає важко здійсненним, а іноді і неможливим в кінцевих часових проміжках.

Для цього в підпунктах 3.2.2 і 3.2.3 описані методи і стратегії знаходження наближеного розв'язку та розв'язку із застосуванням евристики для даної задачі комбінаторної оптимізації в наведеній вище постановці.

В 3.2.2 пропонується модифікація методу гілок та меж з використанням евристики і пошуку в глибину. У роботі описаний ряд евристик, одна з яких була реалізована програмно і результати її застосування наведені в розділі 5. Основною перевагою запропонованого підходу до розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках з використанням даної евристики є можливість балансування між точністю одержуваного розв'язку і часом роботи алгоритму, шляхом зміни величини  $k$  – рівня розгалуження дерева на якому зупиняється застосування методу гілок та меж і починається застосування евристики.

В 3.2.3 описана стратегія знаходження та оцінки наближеного розв'язку задач виду (2.1) – (2.2) і (2.4) – (2.5). Дана стратегія базується на використанні транспозицій суміжності, описаних в розділі 2. Знаходження наближеного розв'язку засноване на твердженнях, доведених в розділі 2, оцінка розв'язку проводиться на підставі тверджень, доведених в пункті 3.1. Дана стратегія була реалізована програмно, результати її застосування для розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок наведені в розділі 5.

У пункті 3.3 наведені методи розв'язання задачі оптимізації лінійної функції з додатковими лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок. Для розв'язання цієї задачі пропонується метод, заснований на ідеології випадкового пошуку, використанні властивостей циклічних перестановок і аналітичному розв'язанні систем лінійних нерівностей як обмежень на змінні.

При розв'язанні даної задачі, на одному з етапів, існує необхідність в багаторазовому розв'язанні допоміжної задачі оптимізації по знаходженню безумовного мінімуму лінійної функції виду (3.4). Для розв'язання допоміжної задачі можна використовувати методи, описані в пункті 3.2.

Перевагою описаної стратегії розв'язання задачі є можливість виконати розпаралелювання обчислень. При розв'язанні задачі оптимізації лінійної функції з додатковими лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок обчислення можна прискорити шляхом паралельного розв'язання допоміжних задач по знаходженню безумовного мінімуму лінійної функції. Для оцінки ефективності паралельних обчислень за законом Амдала розраховане максимально можливе прискорення паралельного виконання програми в порівнянні з послідовним.

У пункті 3.5 описаний алгоритм генерації циклічних перестановок з деякої циклічної перестановки  $p \in P_n^C$  за допомогою двох транспозицій суміжності, заснований на твердженнях з розділу 2. Оцінено складність отриманого алгоритму.

Результати розділу опубліковано в роботах [1, 5, 7, 10–11, 13, 17, 19].



## **РОЗДІЛ 4**

### **ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ**

Даний розділ присвячений застосуванню циклічних перестановок в методах комбінаторної оптимізації на основі теорії циклічних трансферів. В рамках розділу розглядається застосування циклічних перестановок для формування циклічних трансферів від'ємної вартості. Наведена загальна стратегія розв'язання задач комбінаторної оптимізації на вхідних даних, щодо яких застосовується кластеризація. Наведено приклад застосування загальної стратегії покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації за допомогою теорій циклічних трансферів для задачі транспортної маршрутизації. А саме до задачі доставки вантажів від багатьох відправників багатьом отримувачам, з додатковими обмеженнями на завантаження транспортних засобів.

Результати розділу опубліковано в роботах[8–9, 20].

#### **4.1 Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів**

Циклічні перестановки, завдяки своїм властивостям знайшли застосування в теорії циклічних трансферів при розв'язанні різних класів задач комбінаторної оптимізації. Дамо огляд основних, необхідних для подальшого викладу, результатів з теорії циклічних трансферів, відповідно до робіт Thompson, Orlin і Thompson, Psaraftis [94, 165]. Використання циклічних трансферів найбільш ефективно при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації з деякими загальними характеристиками. Це задачі у яких для отримання розв'язку може бути використане розбиття комбінаторної множини на кластери, що не перетинаються, і для отримання розв'язків на цих кластерах використовуються наближені методи або методи на основі евристик. В таких випадках циклічні трансфери використовуються

для отримання кращих розв'язків у деякому околі стартового розв'язку. Розглянемо докладніше стадії отримання розв'язку в методах комбінаторної оптимізації за допомогою циклічних трансферів. Перша стадія – це початкове розбиття комбінаторної множини на кластери, що не перетинаються [236], для пошуку стартового розв'язку задачі комбінаторної оптимізації. Початкове розбиття може визначатися в залежності від обмежень задачі, наприклад, від кількості транспортних засобів в задачах маршрутизації VRP або PDP. Ефективність стартового розв'язку оцінюється за допомогою цільової функції задачі комбінаторної оптимізації. В рамках теорії циклічних трансферів в якості показника ефективності розглядається вартість розв'язку, яка мінімізується. Друга стадія – використання циклічних трансферів з метою поліпшення стартового розв'язку. Циклічний трансфер – це циклічна перестановка деяких обраних елементів між кластерами, як наведено на рис. 4.1.

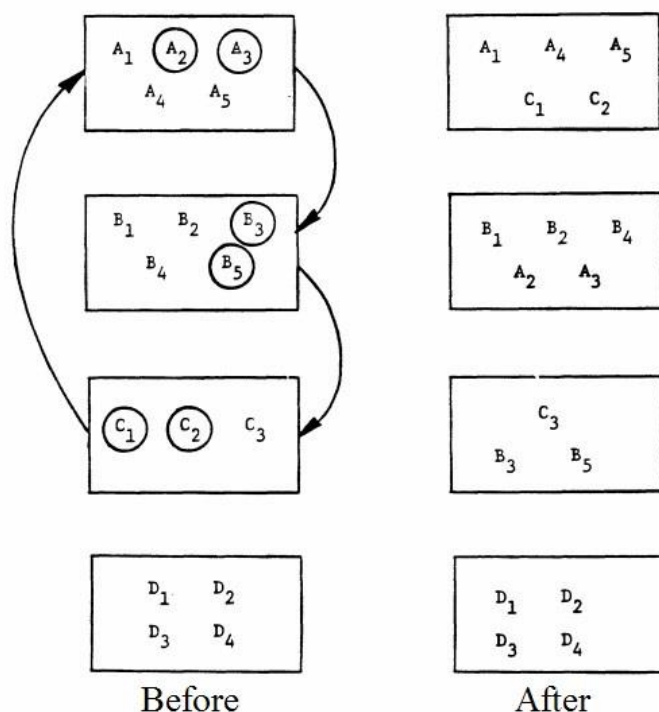


Рисунок 4.1. Загальна схема застосування циклічних трансферів

Нетривіальною задачею є вибір елементів кластерів, які будуть елементами циклічної перестановки (формування циклічного трансферу). Різниця між ефективністю стартового розв'язку і ефективністю розв'язку, отриманого після застосування циклічного трансферу, називається вартістю циклічного трансферу. Якщо новий розв'язок має меншу вартість, то трансфер, за допомогою якого він був отриманий, називають циклічним трансфером від'ємної вартості. Застосування циклічного трансферу від'ємної вартості відповідає переміщенню елементів між кластерами, що, в свою чергу, призводить до поліпшення стартового розв'язку. Thompson і Orlin [165] розробили загальний метод пошуку в околі за допомогою циклічних трансферів. Він заснований на заміні пошуку циклічного трансферу від'ємної вартості на пошук допустимого циклу від'ємної вартості в допоміжному графі [94]. Допоміжний граф формується з елементів вихідних даних, які утворюють вершини графа. Ребра допоміжного графа з'єднують вершини, відповідні елементам, що належать різним кластерам в початковому розбитті. Вартість кожного ребра графа  $(i, j)$  визначається зміною вартості розв'язку при видаленні елемента  $i$  з відповідного кластера і додаванні в цей кластер елемента  $j$ . Допустимий цикл від'ємної вартості, знайдений в допоміжному графі, відповідає переходу від поточного рішення до сусіднього рішенням. Вартість циклічного трансферу дорівнює вартості відповідного допустимого циклу в допоміжному графі. У деяких випадках оцінити вартість ребер і циклів в допоміжному графі, і як наслідок, вартість відповідних циклічних трансферів, неможливо.

У випадках, коли знаходження циклічного трансферу від'ємної вартості за допомогою допоміжного графа неможливо, пропонується альтернативний підхід. Альтернативна побудова циклічних трансферів ґрунтується не на використанні допоміжного графа, а на використанні множини циклічних перестановок і його властивостей для отримання циклічних трансферів від'ємної вартості. Циклічні трансфери від'ємної

вартості, побудовані на базі циклічних перестановок, дають можливість знаходження кращого розв'язку в деякому околі стартового рішення.

#### 4.1.1 Застосування циклічних перестановок для формування циклічних трансферів

Опишемо основну ідею альтернативної побудови циклічних трансферів для використання у розв'язанні різних класів задач комбінаторної оптимізації. На підставі попереднього аналізу даних вхідної задачі в кожному з визначених кластерів вибирають по одному елементу для переміщення в інші кластери. Вибрані елементи кластерів будуть породжуючими елементами множини циклічних перестановок. Кожна циклічна перестановка відповідає циклічному трансферу. Множина циклічних перестановок описує всі можливі циклічні трансфери для обраних елементів.

Отримані циклічні трансфери застосовуються до початкового розбиття на кластери. В околі стартового розв'язку отримуємо новий розв'язок вихідної задачі для кожного циклічного трансферу.

Задача розв'язується для нового розбиття на кластери. Після цього оцінюється зміна вартості рішення в бік збільшення або зменшення. Таким чином, отримуємо множину нових розв'язків. Кількість цих розв'язків відповідає потужності множини циклічних перестановок. На кожному кроці ітераційного процесу з нових розв'язків вибирається краще. Воно приймається в якості стартового розбиття для наступного кроку ітераційного процесу. Зупинка процесу відбувається відповідно до критерію, наприклад, обмеження на час роботи алгоритму, досягнення певної точності рішення, досягнення певної ефективності.

#### 4.1.2 Стратегія розв'язання задачі за допомогою циклічних трансферів

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in D \subset E}, \quad (4.1)$$

де  $E$  – комбінаторна множина в деякому комбінаторному просторі  $Y$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$ ,  $F: E \rightarrow R^1$ , а множина  $D$  формується за допомогою системи обмежень на змінні  $x \in E$ .

Для розв’язання задачі (4.1) можна застосувати стратегію з використанням циклічних трансферів. Множина  $E = \bigcup_i E_i$ ,  $E_i \subset E$ ,  $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , де  $E_i \cap E_j = \emptyset$ , для  $i < j \in J_n$ .

Сформуємо множину  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i \in E_i$ ,  $i \in J_n$ . Використаємо множину  $A$  в якості множини породжуючих елементів для множини циклічних перестановок  $P_n^C(A)$ ,  $p_i \in P_n^C$ ,  $p_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ , де  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  – впорядкування індексів множини  $J_n$ .

На першому етапі розв’язання задачі формується початкове розбиття множини  $E$  на кластери  $E^0 = \bigcup_i E_i^0$ . Нехай отримано допустимий стартовий розв’язок  $x^0$  задачі (4.1) за умови початкового розбиття  $E^0$ . Оцінка ефективності розв’язку дорівнює  $F(x^0 | E^0)$ .

Далі формуємо множину породжуючих елементів  $A^0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  для множини циклічних перестановок  $P_n^C(A)$ , таку що  $a_i \in E_i^0$ ,  $i \in J_n$ . Вибір елементів множини  $A^0$  залежить від особливостей задачі (4.1). Деякі евристичні правила для вибору елементів множини  $A^0$  пропонуються і обговорюються в підпункті 4.1.3 для задачі One-to-One PDP з 3D обмеженнями на завантаження. Кожен елемент множини  $p_i \in P_n^C(A^0)$  – це одна циклічна перестановка, яка описує, які елементи і між якими кластерами будуть переміщені в стартовому розбитті.

Після застосування циклічної перестановки  $p_i \in P_n^C$  до стартового розбиття  $E^0$ , отримуємо розбиття  $E^1(p_i)$ . Задача (4.1) набуває виду

$$F(x|E^1(p_i)) \rightarrow \min_{x \in D \subseteq E}. \quad (4.2)$$

Задача (4.2) розв'язується відповідним методом комбінаторної оптимізації, наприклад, з [115]. Процес зміни стартового розбиття і розв'язку задачі (4.2) з використанням циклічних перестановок на новому розбитті може бути повторений.

Для того щоб знайти циклічну перестановку  $p_i$  з множини  $P_n^C(A)$ , таку що відповідний циклічний трансфер забезпечить оптимізацію розв'язку, знайденого на розбитті  $E^1(p_i)$ , сформулюємо задачу комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках

$$F(x|E^1(p_i)) \rightarrow \min_{p_i \in P_n^C(A^0)}. \quad (4.3)$$

Розв'язок задачі (4.3) заснований на властивостях множини циклічних перестановок, які були вивчені в [3, 6, 121]. Методи розв'язання задачі (4.3) досліджені в [1, 5, 7] для лінійної функції  $F(x|E^1(p_i))$ .

На  $k$ -ому кроці процедури буде розв'язуватись задача комбінаторної оптимізації

$$F(x|E^k(p_i^*)) \rightarrow \min_{x \in D \subseteq E}, \quad (4.4)$$

де  $p_i^*$  це розв'язок задачі

$$F(x|E^k(p_i)) \rightarrow \min_{p_i \in P_n^C(A^{k-1})},$$

$k=1,2,...,M$ , де  $M$  – задано заздалегідь, ґрунтуючись на кількості кластерів  $n$  і потужності множини вхідних даних задачі.

Розв'язок задачі (4.4) залежить від особливостей і властивостей задачі (4.2) і властивостей множини циклічних перестановок, які були досліджені в роботах [1–7]. У разі, якщо функція  $F(x|E^j(p))$  – лінійна, в роботах [1, 5, 7]

описані і реалізовані методи пошуку точного, наближеного і евристичного розв'язку задачі (4.4). Для розв'язання задачі (4.4) з лінійною функцією цілі пропонується використовувати метод гілок та меж і його модифікації, випадковий пошук, і його модифікацію на основі властивостей циклічних перестановок.

Запропонована модифікація стратегії Thompson і Orlin є досить загальною, особливості її імплементації для конкретної задачі комбінаторної оптимізації залежать від особливостей розв'язуваної задачі в конкретній предметній області. У класі задач комбінаторної оптимізації на кластерних даних, розглянемо задачу One-to-One PDP з 3D обмеженнями на завантаження для демонстрації ефективності стратегії поліпшення розв'язку задачі за допомогою циклічних трансферів.

#### 4.1.3 Підвищення ефективності розв'язання задачі PDP за допомогою циклічних трансферів

Математична модель задачі One-to-One PDP с 3D обмеженнями на завантаження може бути описана таким чином [8, 9, 140, 156]:

$$\min_{U \in W} \kappa(U), \quad (4.5)$$

де

$$\kappa(U) = \sum_{j=1}^N \left[ c(0, i_1^j) + \sum_{k=1}^{2n_j-1} c(i_k^j, i_{k+1}^j) + c(i_{2n_j}^j, 2n+1) \right],$$

$W$  – це допустима область, визначена наступною системою обмежень:

$$Q(i_k^j) = \sum_{k=1}^s f(i_k^j) \leq Q_j, \quad \forall s \in J_{2n_j}, \quad j \in J_N, \quad (4.6)$$

$$\Phi_{ik}^j(u_i^j, u_k^j, v_i^j, v_k^j) \geq 0, \quad i, k \in J_n, i < k, \quad \Phi_{0k}^j(u_k^j, v_k^j) \geq 0, \quad k \in J_n, \quad j \in J_N. \quad (4.7)$$

У задачі (4.5) – (4.7)  $c(0, i_1^j)$  позначає відстань між депо (фіктивна вершина 0) і першою вершиною в маршруті транспортного засобу  $j$ ,  $c(i_{2n_j}^j, 2n+1)$  позначає відстань між останньою вершиною в маршруті транспортного засобу і депо (фіктивна вершина  $2n+1$ ). Фіктивні вершини 0 і  $2n+1$  відповідають одному і тому ж депо; в (4.6)  $Q(i_k^j)$  – поточне завантаження транспортного засобу  $j$  в момент прибуття в вершину  $i_k^j$ ,  $k \in J_{2n_j}$ ;  $f(i_k^j) = q_{i_k^j}$ , якщо  $i_k^j \leq n$ , тобто вершина  $i_k^j$  – це пункт відправки;  $f(i_k^j) = -q_{i_k^j}$ , якщо  $i_k^j > n$ , тобто вершина  $i_k^j$  – це пункт доставки;  $Q_j$  – вантажопідйомність транспортного засобу  $j$ ; в (4.7)  $\Phi_{ik}^j(u_i^j, u_k^j, v_i^j, v_k^j)$  – це  $\Phi$ -функція, що використовується для описання відсутності перетину вантажу  $\lambda_i(u_i^j, v_i^j)$  і вантажу  $\lambda_k(u_k^j, v_k^j)$ ;  $\Phi_{0k}^j(u_k^j, v_k^j)$  –  $\Phi$ -функція що описує розташування вантажу  $\lambda_k(u_k^j, v_k^j)$  всередині вантажного відсіку  $\Lambda_j(u_0^j)$  транспортного засобу  $j$ . Нерівність  $\Phi_{ik}^j(u_i^j, u_k^j, v_i^j, v_k^j) \geq 0$  забезпечує відсутність перетину вантажів  $\lambda_i(u_i^j, v_i^j)$  і  $\lambda_k(u_k^j, v_k^j)$  для  $i < k \in J_n$ ,  $j \in J_N$ . Нерівність  $\Phi_{0k}^j(u_k^j, v_k^j) \geq 0$  забезпечує розташування кожного вантажу  $\lambda_k(u_k^j, v_k^j)$  повністю всередині вантажного відсіку  $\Lambda_j(u_0^j)$  транспортного засобу для  $k \in J_n$ ,  $j \in J_N$ .

У роботах [140, 156] пропонується стратегія розв'язання задачі (4.5) – (4.7) One-to-One PDP з 3D обмеженнями на завантаження, що складається з двох взаємопов'язаних стадій. Перша стадія складається з двох рівнів: кластеризація множини точок відправки-доставки відповідно до множини транспортних засобів (верхній рівень), розв'язання задачі PDP з 3D



обмеженнями на завантаження для кожного транспортного засобу в відповідному кластері (нижній рівень). На другій стадії, розв'язання, знайдене на першій стадії, покращується за допомогою підходу, заснованого на теорії циклічних трансферів. На другій стадії використовуються циклічні перестановки.

Верхній рівень – кластеризація множини пунктів відправки-доставки відповідно до множини транспортних засобів. На верхньому рівні множина  $S$  розділяється на  $N$  кластерів  $C_1, C_2, \dots, C_N$  з допомогою алгоритму  $k$ -середніх [236].

Кожен кластер  $C_j$  складається з пар  $(p_i, d_i)$  які будуть обслужені транспортним засобом  $j$ . Для того щоб сформувати кластери  $C_j$ ,  $j \in J_N$ , кожна пара пунктів  $(p_i, d_i)$  замінюється на одну точку  $k_i(x_{k_i}, y_{k_i})$ , яка є серединою відрізка між  $p_i(x_{p_i}, y_{p_i})$  і  $d_i(x_{d_i}, y_{d_i})$ :  $x_{k_i} = \frac{x_{p_i} + x_{d_i}}{2}$ ,  $y_{k_i} = \frac{y_{p_i} + y_{d_i}}{2}$ . Таким чином, кожній парі  $(p_i, d_i)$  кластера  $C_j$  відповідає точка  $k_i(x_{k_i}, y_{k_i})$  для  $i = 1, \dots, n_j$ ,  $j \in J_N$ .

Нижній рівень – побудова маршруту найменшої вартості для кожного автомобіля з допомогою евристики променевого пошуку на етапі розширення рекурсивного дерева. У роботах [140, 156] було розроблене програмне забезпечення для отримання точного та евристичного розв'язків задачі (4.5) – (4.7).

Особливістю реалізації описаної дворівневої стратегії [140, 156] є вибір в якості методу кластеризації простого, але не завжди ефективного методу  $k$ -середніх. Цей метод не завжди дозволяє отримати хороше розбиття на кластери. Тому джерелом покращення реалізованої стратегії розв'язання є використання інших методів і алгоритмів кластеризації, або покращення кластеризації, отриманої за допомогою методу  $k$ -середніх.

Застосуємо до досліджуваної задачі PDP запропоновану стратегію розв'язання задач комбінаторної оптимізації за допомогою циклічних трансферів. Позначимо  $E$  – множину пар пунктів відправки і доставки в задачі PDP. Застосуємо підхід, заснований на використанні циклічних трансферів до задачі (4.5) – (4.7).

Алгоритм складається з наступних кроків:

**Крок 1:** Кластеризація множини  $E$  пунктів відправлення і доставки за допомогою алгоритму  $k$  –середніх [220],  $E^0 = \bigcup E_i^0$ ,  $E_i^0 \subset E$ ,  $i \in J_n$ .

**Крок 2:** Отримання початкового розв'язку  $x^0$  з  $F(x^0 | E^0)$ ,  
 $F^* = F(x^0 | E^0)$ ,  $x^* = x^0$ .

**Крок 3:** Приймаємо  $k = 0$ .

**Крок 4:** Вибираємо пару пунктів відправки-доставки  $a_i^k \in E_i^k$ ,  
 $a_i^k = (p_i^k, d_i^k)$  з кожного кластера  $E_i^k \subset E$ ,  $i \in J_n$ .

**Крок 5:** Формуємо множину породжуючих елементів  
 $A^k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$  для циклічних перестановок  $P_n^C(A^k)$ ,  $a_i^k \in E_i^k$ ,  $i \in J_n$ .

**Крок 6:** Встановлюємо  $k = k + 1$ .

**Крок 7:** Вибираємо елемент  $p_i \in P_n^C(A^{k-1})$ .

**Крок 8:** Для обраних пар пунктів відправки-доставки здійснюємо циклічний трансфер між кластерами, описуваний циклічною перестановкою  $p_i$  і отримуємо нове розбиття  $E^k(p_i) = \bigcup_i E_i^k(p_i)$ .

**Крок 9:** Розв'язуємо задачу  $\min_{x \in D \subset E} F(x | E(p_i))$ , знаходимо  $x(p_i)$ .

**Крок 10:** Якщо  $F(x(p_i)) < F(x^k | E^k)$  то  $F^* = F(x(p_i))$  і  $x^* = x(p_i)$ .

**Крок 11:** Якщо дозволяють обчислювальні ресурси і не досягнуто критерію зупинки – перехід до кроку 6. В іншому випадку – перехід до кроку 12.

**Крок 12:** Приймаємо  $x^*$ ,  $F^*$  в якості розв'язку задачі.

Наведемо дві евристики для вибору пар відправки-доставки  $(p_i, d_i)$  з кластеру  $C_i$ .

*Евристика 1.* вибирається елемент  $a_i$  з множини породжуючих елементів  $A$ , такий що:

$$a_j = (p_{i*}^j, d_{i*}^j) = \arg \max_i [\rho(g_j, p_i) + \rho(g_j, d_i)],$$

де  $(p_i, d_i) \in C_j$ ,  $i \in \{1, \dots, n_j\}$ ,  $\max \rho(g_j, d_i)$

$\rho(x, y)$  – евклідова відстань між двома точками  $x, y \in R^2$ ,  $g_j = (x_j, y_j)$  – центр кластера  $C_j$ ,

$$x_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (p_{ix}^j + d_{ix}^j), \quad y_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (p_{iy}^j + d_{iy}^j),$$

$$n_j = \text{Card}C_j, \quad j \in J_N, \quad \sum_{j=1}^N n_j = n.$$

Приклад вибору пари пунктів відправки-доставки згідно евристиці номер один, приведено на рис. 4.2.

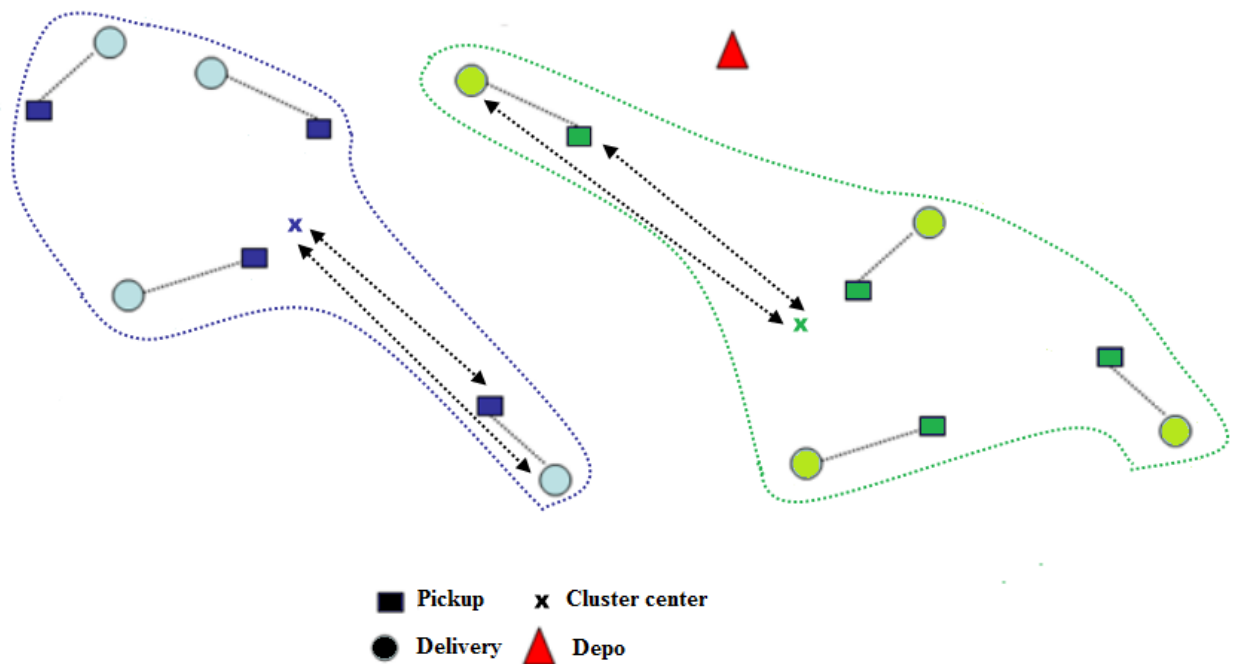


Рисунок 4.2. Вибір пари пунктів відповідно до евристики 1

*Евристика 2.* Евристика враховує відстань між пунктами відправлення-доставки з різних кластерів  $C_j$ ,  $j \in J_N$  і  $C_k$ ,  $k \in J_V$ ,  $k \neq j$ . Вибирається елемент  $a_i$  з множини породжуючих елементів  $A$ , такий що:

$$a_j = (p_{i*}^j, d_{i*}^j) = \arg \min_{i,k} [\sum_{l=1}^{n_k} \rho(p_l^j, \alpha_l^k) + \rho(d_l^j, \alpha_l^k)],$$

де  $(p_i, d_i) \in C_j$ ,  $i \in \{1, \dots, n_j\}$ ,  $\alpha_l^k \in C_k$ ,  $k \in J_V$ ,  $k \neq j$ .

Нижче наведені результати обчислювальних експериментів з використанням другої евристики.

Приклад вибору пари пунктів відправки-доставки згідно евристиці номер один, приведено на рис. 4.3.

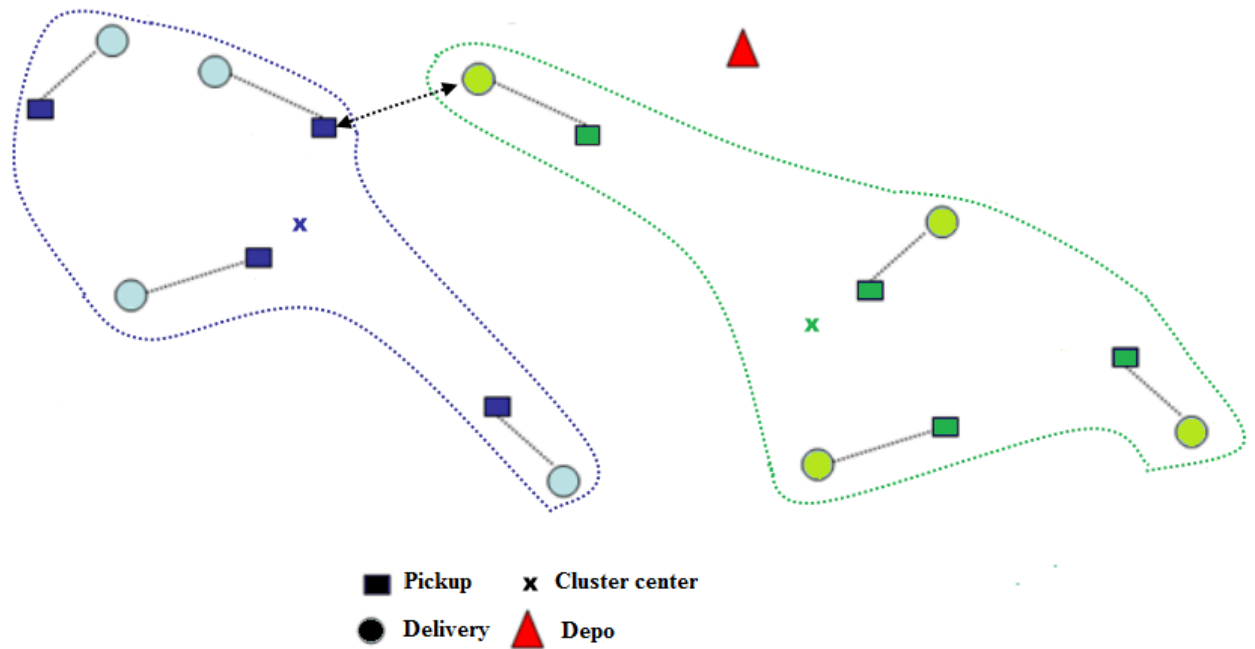


Рисунок 4.3. Вибір пари пунктів відповідно до евристики 2

## 4.2 Розв'язання задачі PDP з використанням циклічних трансферів

Для покращення розв'язку задачі PDP алгоритм для зміни початкового розбиття вхідних даних в задачі PDP за допомогою циклічних трансферів був впроваджений в пакет програмного забезпечення, розроблений в [140, 156].

Наведемо приклад роботи програмного пакета. Для прикладу обрана задача PDP з наступними вихідними даними: 15 пар точок відправки-доставки повинні обслужити 3 транспортних засоби. Координати точок відправки, доставки і депо генеруються випадковим чином. Стартова кластеризація приведена на рис. 4.4.

Разом із розв'язком задачі кластеризації відбувається вибір «гірших» представників в кожному кластері, згідно евристиці номер два, наведеної в підпункті 4.1.3. Ці пари точок відправки-доставки братимуть участь в циклічному трансфері. В даному випадку в якості «гірших» були обрані: в першому кластері (позначений білим кольором) пара точок (5; 20); у другому кластері (позначений зеленим кольором) пара точок (2; 17); в третьому кластері (позначений жовтим кольором) пара точок (14; 29).

На заданій стартовій кластеризації розв'язується задача побудови маршруту, як було описано в роботі [140, 156]. Стартовий маршрут задачі PDP з евристичної процедурою перевірки тривимірних обмежень на завантаження наведено на рис. 4.5.

Вартість стартового розв'язку задачі PDP при даній стартовій кластеризації і при побудованих маршрутах об'їзду точок відправки-доставки дорівнює 4862,798.

Як вже було зазначено вище, в кожному кластері були обрані «гірші» представники, згідно евристиці. У програмний продукт була додана можливість здійснювати циклічну перестановку пар пунктів відправки-доставки між кластерами.

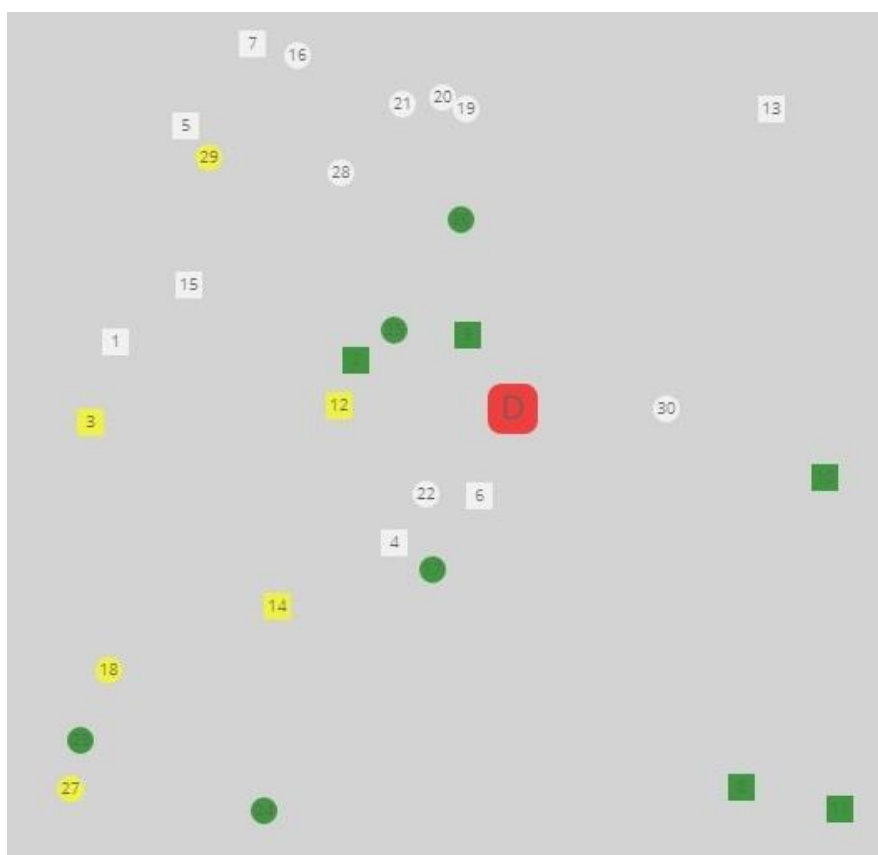


Рисунок 4.4. Стартова кластеризація в задачі PDP

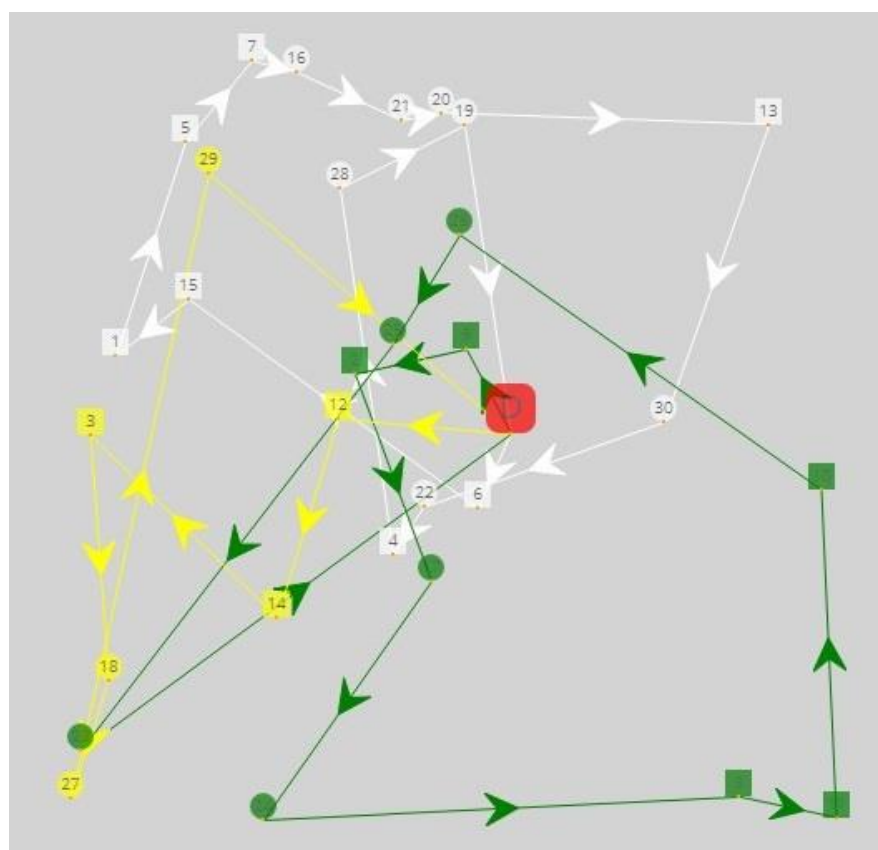


Рисунок 4.5. Стартовий розв'язок задачі PDP

В даному випадку пара точок (5; 20) була переміщена з першого кластера в другій. Пара точок (2; 17) з другого кластера в третій. Пара точок (14; 29) з третього кластера в перший. Кластеризація після циклічного трансферу зображена на рис. 4.6.

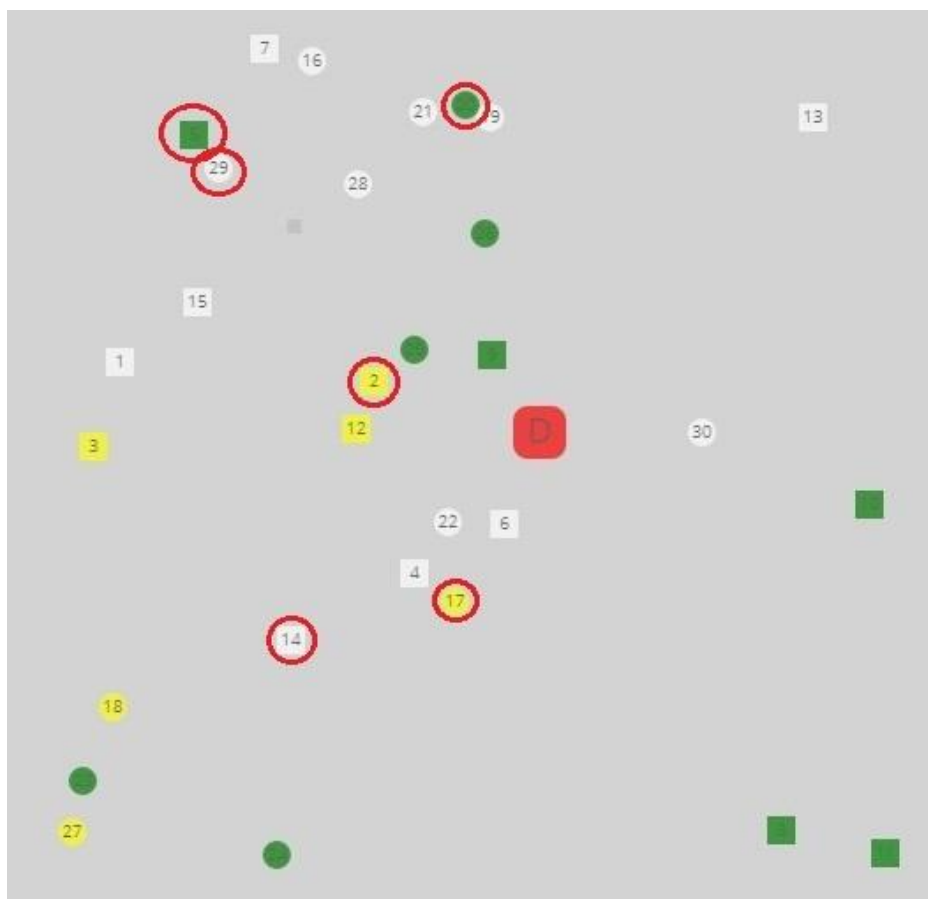


Рисунок 4.6. Кластеризація після застосування циклічного трансферу

Пари точок відправки-доставки, що брали участь в циклічному трансфері обведені. Для даної кластеризації оптимальні маршрути розвезення вантажів для трьох транспортних засобів були розраховані знову. На рис. 4.7 наведені побудовані маршрути.

Вартість розв'язку задачі PDP після застосування циклічного трансферу дорівнює 4778,965.

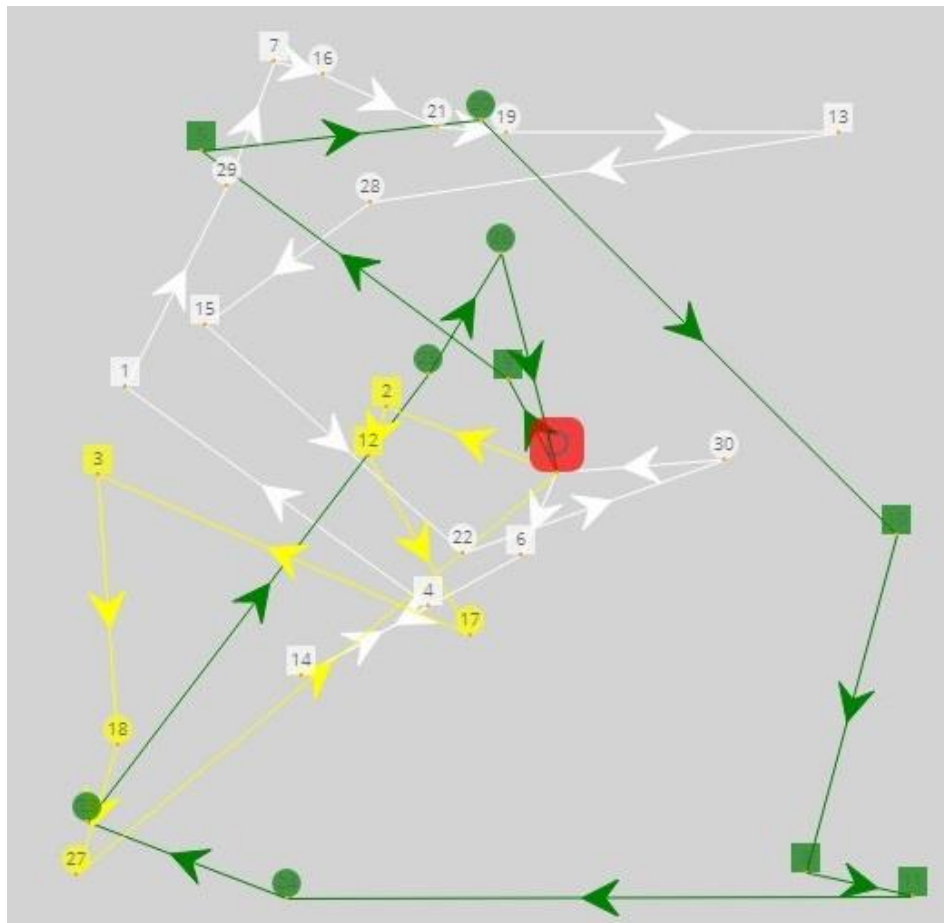


Рисунок 4.7. Розв'язок задачі PDP після застосування циклічного трансферу

Для покращення розв'язку задачі PDP за допомогою циклічних трансферів в програмний пакет з роботи [140, 156] були додані наступні функції: вибір елементів, які будуть переміщені між кластерами; генерація породжуючої множини для циклічних перестановок; послідовне застосування циклічних трансферів, відповідно до елементів множини циклічних перестановок; розв'язання задачі PDP на альтернативних розбиттях; знаходження кращого значення функції цілі на різних розбиттях. Проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованого підходу.

Експерименти були реалізовані для  $N = 3, 4, 5$  кластерів. Кількість пар відправки-доставки варіювався від 15 до 50. Для малої кількості пунктів і для  $N = 3, 4$  кластерам, ширина пошукового променя – 5% у евристичному алгоритмі для нижнього рівня. Збільшення розмірності розв'язуваної задачі



призводить до різкого зростання навантаження на CPU, для компенсації якої ширина пошукового променя зменшена до 1%.

У таблицях 4.1–4.3 наведені результати обчислювальних експериментів. Використовуються такі позначення:  $n$  – розмірність задачі, тобто кількість пар пунктів відправки-доставки; SR (success rate) – відсоток задач для яких застосування циклічних трансферів призвело до зменшення значення цільової функції; AVG (Cost) – середнє значення функції цілі, в рамках однієї розмірності в випадках коли застосування циклічних трансферів призвело до зменшення значення функції мети; AVG (Benefit) – середнє значення зменшення цільової функції; Benefit% – AVG (Benefit) в процентах по відношенню до AVG (Cost); RWB. – ширина променя пошуку.

Таблиця 4.1

#### Результати для $N = 3$ кластерів

| $n$ | SR  | AVG (Cost) | AVG (Benefit) | Benefit |
|-----|-----|------------|---------------|---------|
| 15  | 45% | 5 084,549  | 306,270       | 6%      |
| 20  | 40% | 6095,300   | 529,092       | 8,6%    |
| 30  | 55% | 8057,091   | 583,622       | 7,2%    |
| 40  | 60% | 8885,765   | 434,511       | 4,8%    |

Таблиця 4.2

#### Результати для $N = 4$ кластерів

| $n$ | SR  | RWB | AVG (Cost) | AVG (Benefit) | Benefit |
|-----|-----|-----|------------|---------------|---------|
| 20  | 35% | 5%  | 6 582,775  | 514,715       | 7,8%    |
| 30  | 45% | 5%  | 8 396,427  | 657,150       | 7,8%    |
| 40  | 55% | 1%  | 9 637,011  | 687,679       | 7,1%    |
| 50  | 70% | 1%  | 11 218,095 | 809,446       | 7,2%    |

Таблиця 4.3

**Результати для  $N = 5$  кластерів**

| $n$ | SR  | RWB | AVG (Cost) | AVG (Benefit) | Benefit% |
|-----|-----|-----|------------|---------------|----------|
| 40  | 60% | 1%  | 10 540,754 | 887,174       | 8,4%     |
| 50  | 70% | 1%  | 11 905,301 | 1 067,554     | 9%       |

Для задач розмірністю від 15 до 50 отримано покращення значення функції цілі на 5–9%.

**4.3 Висновки до четвертого розділу**

У розділі 4 описана загальна стратегія покращення розв’язків задач комбінаторної оптимізації на даних, що піддаються кластеризації, з використанням циклічних трансферів у випадках, коли неможливо побудувати допоміжний граф. Запропонований алгоритм використовує циклічні перестановки для формування циклічних трансферів і пошуку циклічного трансферу мінімальної вартості. Розроблена альтернативна стратегія формування циклічних трансферів від’ємної вартості, заснована на властивостях множини циклічних перестановок. Описано евристичні правила вибору елементів для переміщення між кластерами. В якості прикладу обрано задачу One-to-One PDP з 3D обмеженнями на завантаження.

В рамках стратегії покращення розв’язків задачі PDP за допомогою циклічних трансферів пропонуються наступні процедури: вибір елементів, які будуть переміщені між кластерами; генерація породжуючої множини для циклічних перестановок; застосування циклічних трансферів, відповідно до елементів множини циклічних перестановок; розв’язок задачі PDP на альтернативних розбиттях; знаходження кращого значення функції цілі

Підрозділ 4.2 присвячений покращенню розв’язку задачі One-to-One Pickup and Delivery Problem з 3D обмеженнями на завантаження з використанням комбінаторних конфігурацій замість булевих змінних,

використовуваних в більшості математичних моделей. Запропонований алгоритм дозволяє знаходити баланс між завантаженням CPU і якістю розв'язку. Зміна підходу до формування множини  $F^i$  і шляхи побудови гілок дерева розв'язків дозволяє легко адаптувати запропонований алгоритм для застосування у розв'язанні різних задач комбінаторної оптимізації.

Запропонована стратегія реалізована для розв'язання задачі PDP. Результати обчислювальних експериментів підтвердили ефективність запропонованої стратегії.

Результати розділу опубліковано в роботах[8–9, 20].

## РОЗДІЛ 5

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

В даному розділі наведені результати роботи методів, описаних в розділі 3. Наведено результати обчислювальних експериментів, з різними вхідними даними. Наведені приклади точних, наближених і евристичних розв'язків задач комбінаторної оптимізації, описаних в розділі 2. Описано розв'язання задачі комбінаторної генерації підмножини множини перестановок на прикладі множини циклічних перестановок.

#### 5.1 Задача оптимізації на циклічних перестановках. Метод гілок та меж

Розв'язання задачі (2.1) – (2.2), а саме оптимізація лінійних функцій на циклічних перестановках без обмежень методом гілок та меж і модифікацією методу з використанням евристики була реалізована програмно, проведені обчислювальні експерименти.

Методом гілок та меж розв'язано по 20–25 задач розмірностей  $n$  від 20 до 40. У процесі розв'язання були колекціовані такі дані для подальшого аналізу:  $T$  – час роботи методу гілок та меж в мілісекундах,  $M$  – кількість вершин в побудованому дереві. Розглянемо приклад розв'язання задачі оптимізації лінійної функції:  $L(x) = 6.125x_1 + 9x_2 - 23x_3 + 4.6x_4 - 13x_5$ , на множині циклічних перестановок, отриманих за допомогою породжуючої множини  $A = \{1, 2, 4, 7, 9\}$ , наведений на рис 5.1. Коренем дерева у такому

випадку буде перестановка  $p^* = \min_{x \in P_n}(L(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ . Ця

перестановка містить два цикли:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ \downarrow \nearrow \downarrow & \downarrow \nwarrow \downarrow \nwarrow \downarrow & \end{pmatrix}$ .

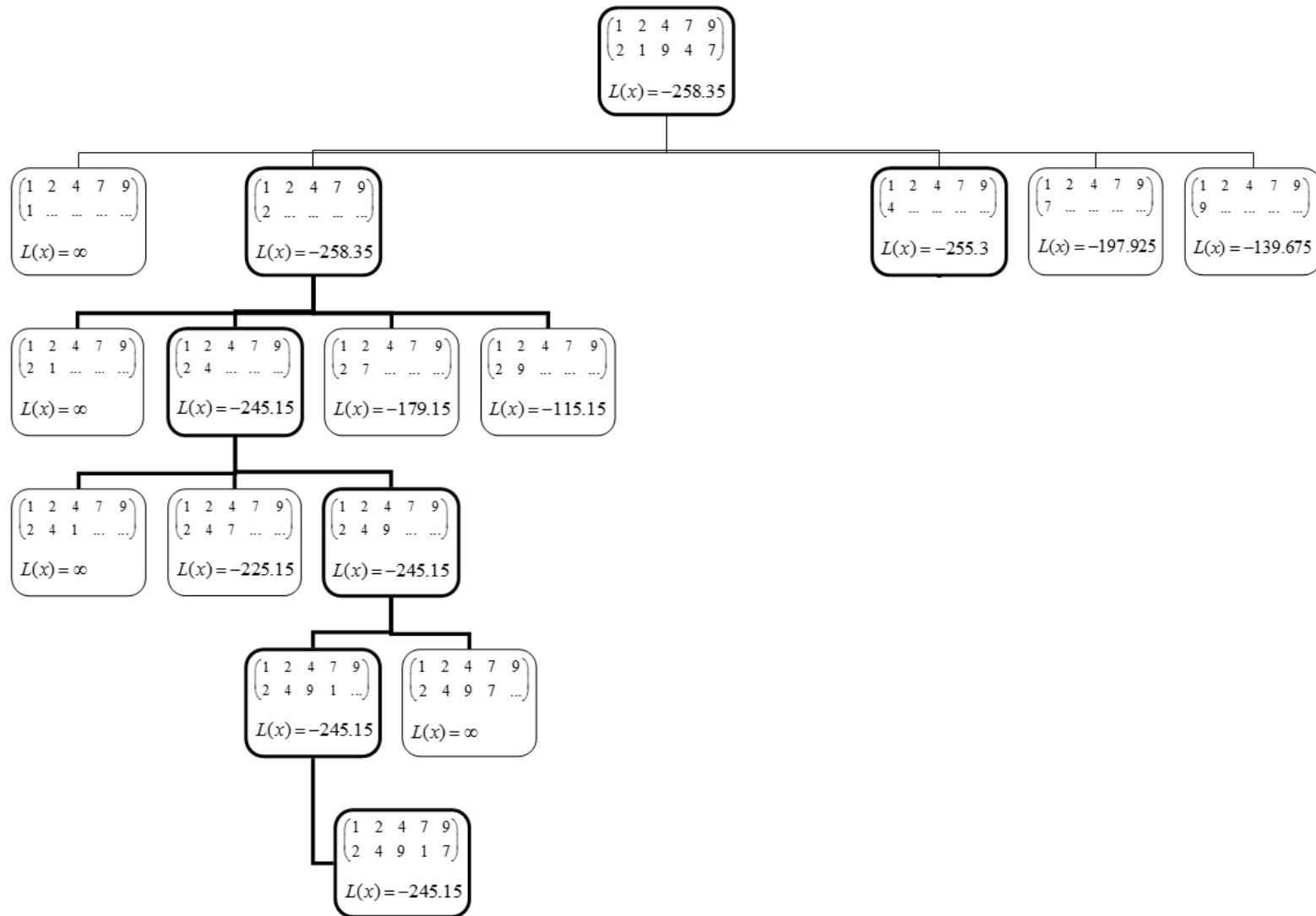


Рисунок 5.1. Дерево розв'язків

Було розгалужено гілку дерева розв'язків, яка відповідає підмножині перестановок с елементом  $\pi(1) = 2$ .

Отримана таким чином циклічна перестановка  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in P_n^C$ , має значення функції цілі  $L = -245.15$ . Далі

виконуємо дослідження дерева, на предмет наявності вершин, що не розгалужувалися, зі значенням функції цілі менше ніж  $L = -245.15$ . Така вершина є і вона відповідає підмножині перестановок с елементом  $\pi(1) = 4$ . Розгалужуючи її отримаємо дерево розв'язків, що приведено на рис. 5.2.

Отримана таким чином циклічна перестановка  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in P_n^C$  має значення функції цілі  $L = -255.3$ . Виконуємо дослідження дерева, на предмет наявності вершин, що не розгалужувалися, зі значенням функції цілі менше ніж  $L = -255.3$ . Так як таких вершин не знайдено, перестановка  $p_2 = p^* = \min_{x \in P_n^C} (L(x))$  приймається як розв'язок задачі.

Результати роботи програми по знаходженню точного розв'язку вихідної задачі з різними коефіцієнтами цільової функції наведено в таблиці 5.1, де  $n$  – розмірність задач,  $AVG(T)$  – середній час роботи алгоритму для кожної розмірності, в секундах,  $AVG(M)$  – середня кількість побудованих вершин,  $card(P_n^C)$  – потужність множини циклічних перестановок для розмірності  $n$ ,  $card(tree)$  – кількість вершин в повному дереві рішень для розмірності  $n$ . Коефіцієнти лінійних функції в експериментах генерувалися випадково в діапазоні  $[-30; 30]$ .

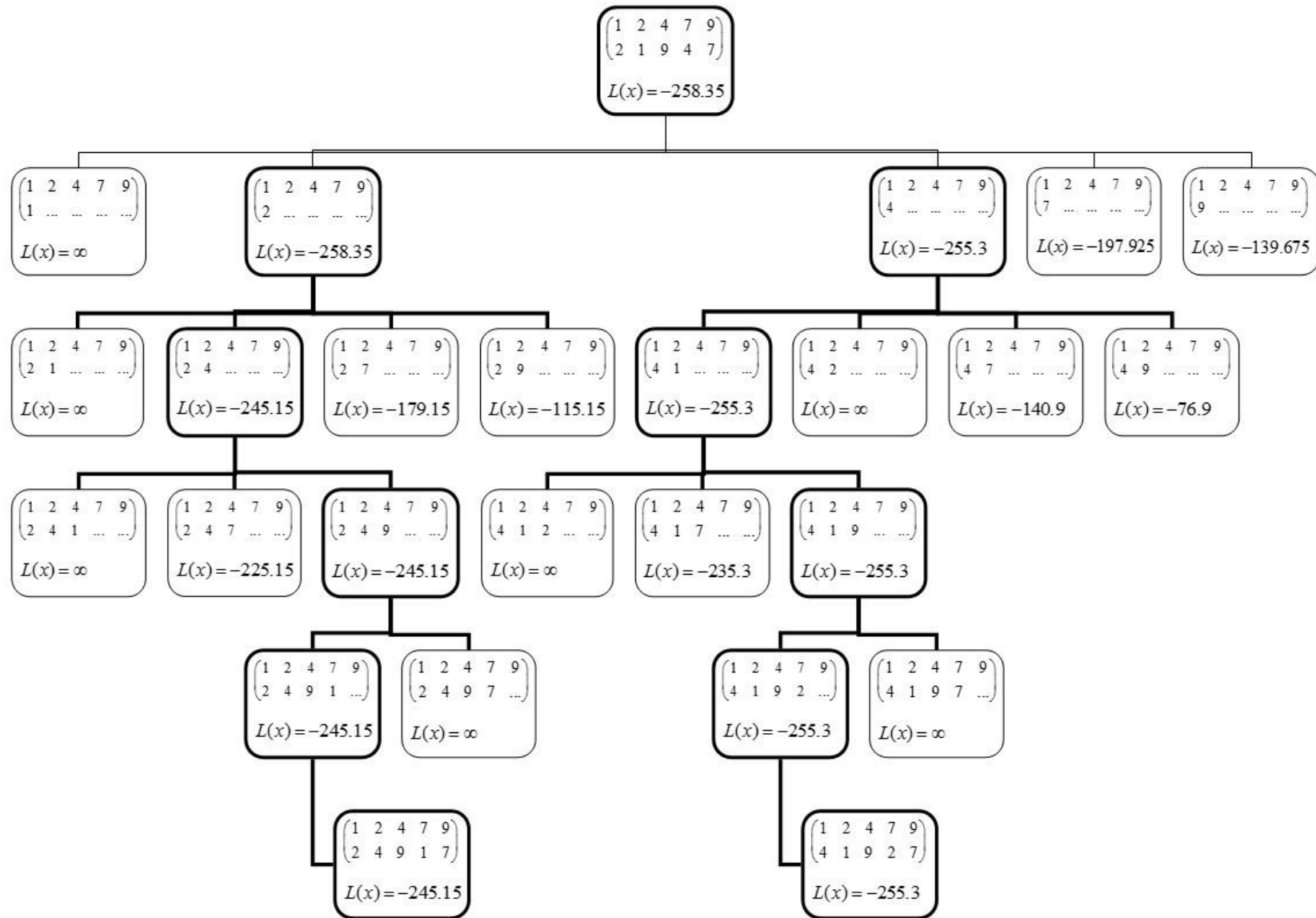


Рисунок 5.2. Дерево розв'язків після другого розгалуження

Таблиця 5.1

## Результати розв'язку задачі (2.1) – (2.2) методом гілок та меж

| $n$ | $AVG(T)$ | $AVG(M)$ | $card(P_n^C)$ | $card(tree)$ | $\frac{AVG(M)}{card(P_n^C)}$ | $\frac{AVG(M)}{card(tree)}$ |
|-----|----------|----------|---------------|--------------|------------------------------|-----------------------------|
| 20  | 3,32     | 825,9    | $1,2E + 17$   | $6,6E + 18$  | $6,80E-15$                   | $1,25E-16$                  |
| 30  | 19,17    | 3665,2   | $8,84E + 30$  | $7,20E + 32$ | $4,15E-28$                   | $5,08E-30$                  |
| 40  | 30,25    | 7659,2   | $2,04E + 46$  | $2,22E + 48$ | $3,75E-43$                   | $3,45E-45$                  |

Необхідно відзначити що з ростом розмірності задачі зростання  $card(P_n^C)$  і  $card(tree)$  експоненціальне. Завдяки коректно обраним правилам розгалуження і оцінки в методі гілок та меж для розв'язання даної задачі, реальна кількість побудованих вершин на багато порядків менше. Це дозволяє отримувати точний розв'язок задачі навіть для розмірності  $n = 40$  за прийнятний час близько 30 секунд. В ході обчислювальних експериментів по застосуванню точного методу розв'язання задачі була виявлена значна залежність швидкості отримання розв'язку від коефіцієнтів цільової функції, зокрема, від їх дисперсії. При дисперсії коефіцієнтів  $Var(c_i) < 15$  оцінки всіх вершин слабо відрізняються один від одного і для знаходження точного розв'язку алгоритму необхідно перебрати тим більше вершин, чим менше дисперсія.

У подальших обчислювальних експериментах була перевірена ефективність запропонованої евристики з використанням методу гілок та меж. Для прикладу роботи евристичного алгоритму була розв'язана задача оптимізації лінійної функції:

$$L(x) = 9x_1 + 8.4x_2 + 7x_3 + 5.95x_4 + 3.8x_5 + 11x_6 + 4.5x_7 + 1.1x_8,$$

на множині циклічних перестановок, отриманих за допомогою породжуючої множини  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . За допомогою методу гілок та меж без використання евристики було знайдено точний розв'язок даної



задачі. Це перестановка  $p_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ , функція цілі у якій приймає значення  $L(p_1^*) = 177.05$ . Надалі будемо порівнювати наближений та евристичний розв'язки з  $p_1^*$ .

При отриманні евристичного розв'язку розгалуження дерева зупинялося на рівні  $k = 3$ , евристичне правило вибору складалося у виборі в якості «кращих» тих перестановок, оцінка яких перевищує мінімальну не більше, ніж на  $v = 10\%$  від усього динамічного діапазону оцінок. Коренем дерева у такому випадку буде перестановка

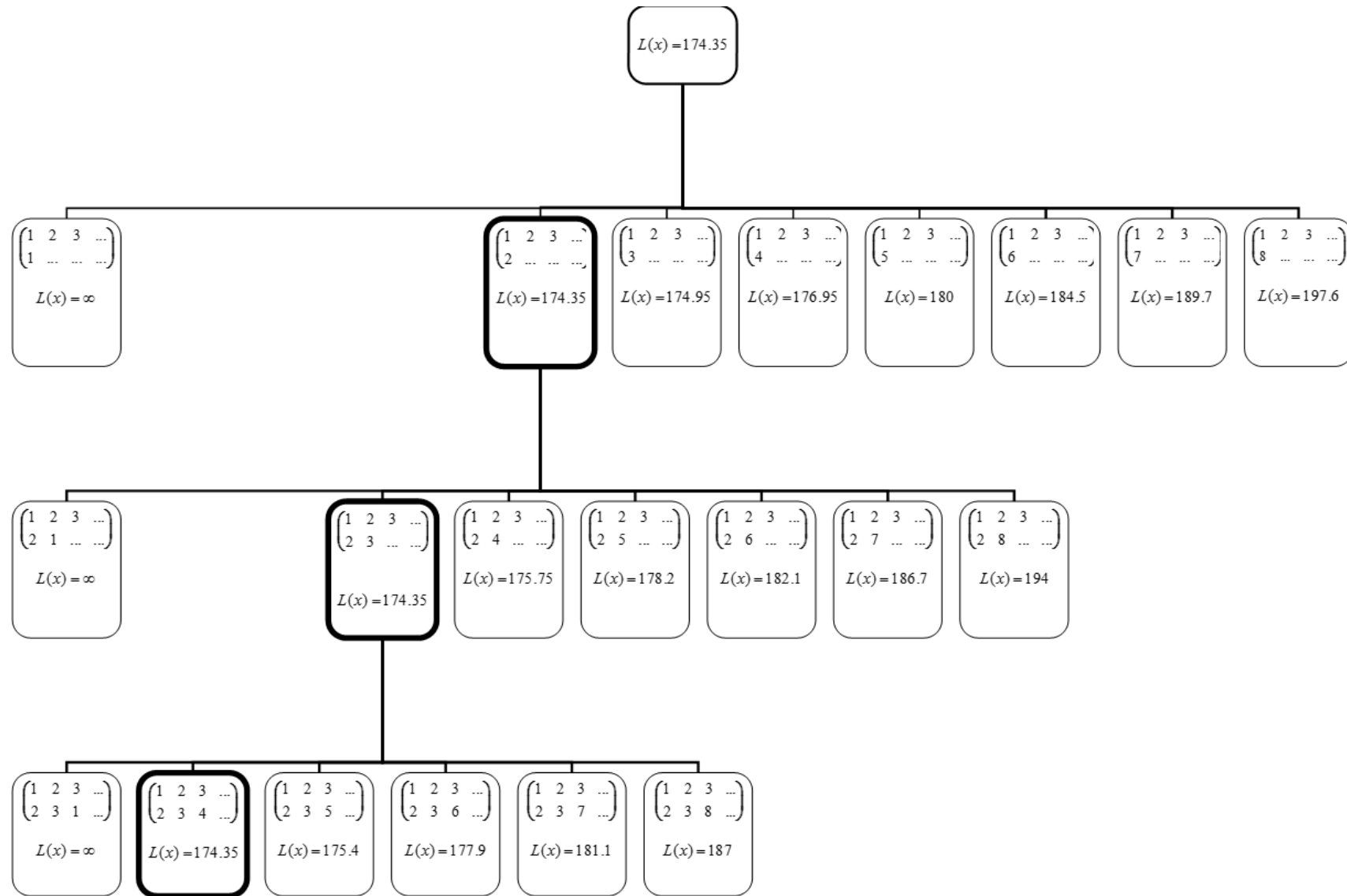
$$p_1^* = \min_{x \in P_n} (L(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ця перестановка містить два цикли

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

В процесі розв'язання до рівня  $k = 3$  було розгалужено гілку дерева розв'язків, яка відповідає підмножині перестановок с елементом  $\pi(1) = 2$ . Отримане таким чином дерево розв'язків приведено на рис. 5.3.

Далі застосуємо евристичне правило вибору «кращих» перестановок, оцінка яких перевищує мінімальну не більше, ніж на  $v = 10\%$  від усього динамічного діапазону оцінок. На даному етапі динамічний діапазон оцінок дорівнює інтервалу  $[174.35; 197.6]$ . Отримаємо:  $|174.35 - 197.6| * 0.1 = 2.325$ . Динамічний діапазон:  $[174.35; 176.675]$ . На рис. 5.4 додатково виділені вершини дерева що не розгалужувалися та належать до отриманого діапазону.

Рисунок 5.3. Розгалуження дерева розв'язків до рівня  $k = 3$

Виконуємо аналіз дерева, на предмет наявності вершин, що не розгалужувалися, зі значенням функції цілі менше ніж  $L = 174.35$ . Таких вершин не знайдено, тому часткова перестановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$  приймається як стартова для побудови до розв'язку задачі, отриманого за допомогою евристики. Згідно до доведених тверджень, з часткової перестановки отримуємо таку циклічну перестановку  $p_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in P_n^C$ , яку приймаємо в якості евристичного розв'язку. Значення функції цілі для цієї перестановки дорівнює  $L_H(p_2^*) = 181.15$ . Відносна похибка розв'язку отриманого за допомогою евристики становить  $\Theta = \frac{L_H(p_2^*) - L(p_1^*)}{L(p_1^*)} = 0.039002$ .

Для перевірки ефективності евристичного алгоритму було розв'язано ряд задач розмірністю  $n$  від 20 до 40. Результати порівняння роботи програм наведено в таблиці 5.2. Для розрахунків були використані однакові обчислювальні потужності, тому коректним було також включати в порівняння час роботи програм. У таблиці 5.2  $L_E(x^*)$  – значення цільової функції при  $x^*$ , де  $x^*$  – точний розв'язок,  $M_E$  – потужність множини побудованих вершин дерева в методі гілок та меж,  $T_E$  – час знаходження точного рішення задачі. Крім цього,  $L_H(x^*)$  – значення цільової функції при  $x^*$ , де  $x^*$  – розв'язок, отриманий з застосуванням евристики,  $M_H$  – потужність множини побудованих вершин дерева при використанні евристики з використанням методу гілок та меж,  $T_H$  – час знаходження розв'язку задачі із застосуванням евристики,  $\Theta = \frac{L_H(x^*) - L_E(x^*)}{L_E(x^*)}$  – відносна похибка розв'язку отриманого за допомогою евристики.

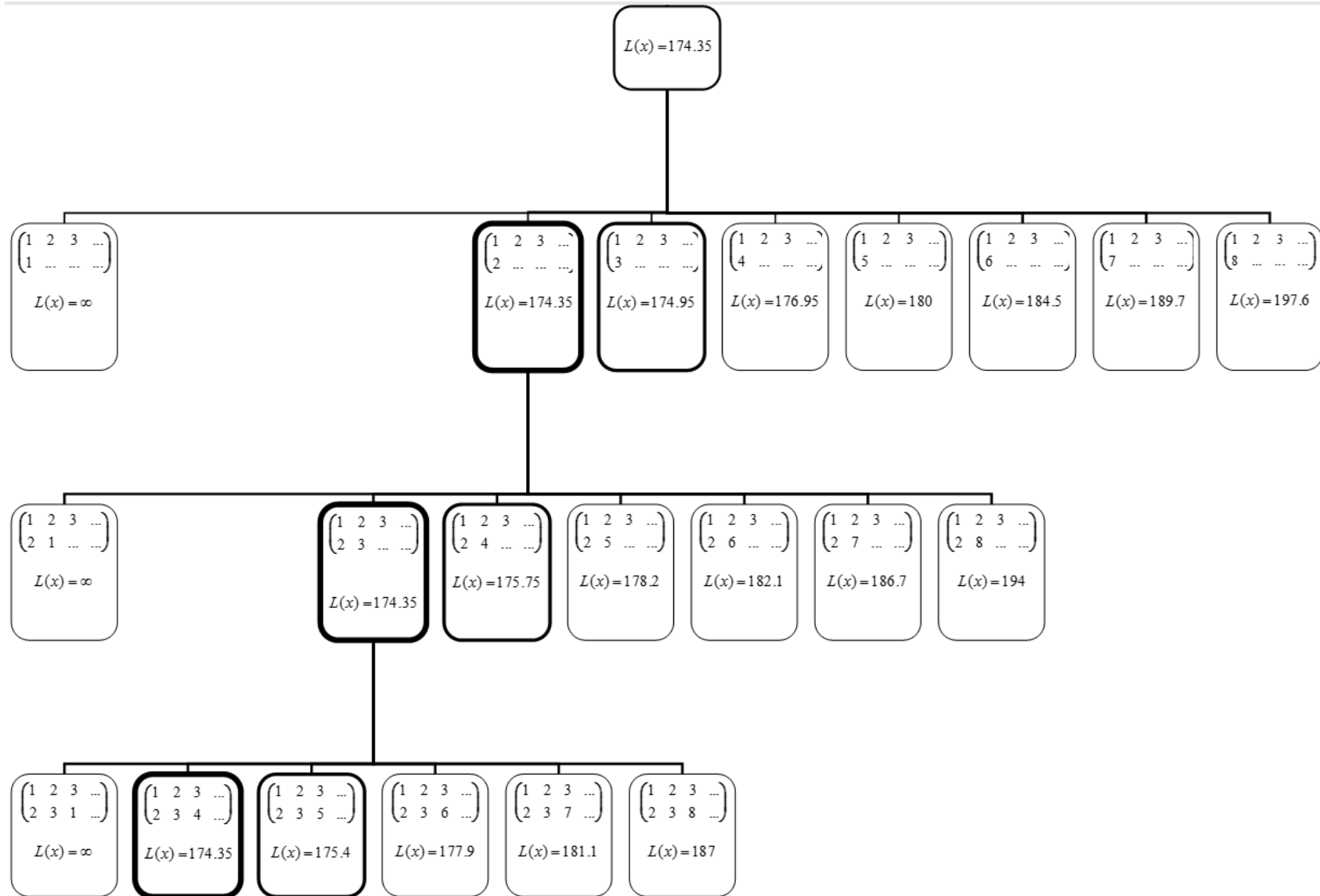


Рисунок 5.4. Вершини що належать діапазону

Таблиця 5.2

**Порівняння точного і евристичного розв'язків задачі (2.4) – (2.5)**

| $n$ | Точний розв'язок |         |                 | Евристичний розв'язок |       |              | $\frac{M_H}{M_E}$ | $\Theta$ |
|-----|------------------|---------|-----------------|-----------------------|-------|--------------|-------------------|----------|
|     | $L_E(x^*)$       | $M_E$   | $T_E$ ,<br>сек. | $L_H(x^*)$            | $M_H$ | $T_H$ , сек. |                   |          |
| 10  | 169,2            | 12290   | 6               | 172                   | 1782  | 0,016        | 0,145             | 0,016    |
| 15  | 309,3            | 33990   | 12              | 319,3                 | 4642  | 0,047        | 0,137             | 0,03     |
| 20  | 525,2            | 523760  | 102             | 571,3                 | 3817  | 0,062        | 0,007             | 0,08     |
| 30  | 804,5            | 1600350 | 244             | 915,8                 | 21540 | 0,5          | 0,013             | 0,14     |
| 40  | 1621,1           | 6105360 | 1074            | 1889,2                | 6662  | 0,2          | 0,001             | 0,16     |

Відзначимо що використання евристики із застосуванням методу гілок та меж дозволяє істотно знизити часові витрати на розв'язання задач великої розмірності при одночасній втраті в точності рішення.

У задачах, результати розв'язання яких подано в таблиці 5.1 дисперсія коефіцієнтів цільової функції  $Var(c_i)=7$ , тому використання евристики дозволило отримати рішення з малою відносною похибкою при малих тимчасових затратах.

Евристика з використанням методу гілок та меж була використана для розв'язання задач (2.4) – (2.5) розмірністю 10–100 елементів. Були проведені обчислювальні експерименти, спостереження за якими дозволяє зробити певні висновки про можливості калібрування використання обчислювальних витрат при реалізації методу в залежності від розмірності задачі. Для розв'язання задач (2.4) – (2.5) евристикою з використанням методу гілок та меж випадковим чином в інтервалі  $[-200; 200]$  генерувалися коефіцієнти функції цілі. Для кожної розмірності і для кожного рівня зупинки побудови дерева пошуку було проведено  $\sim 30$  експериментів. У таблиці 5.3 наведені результати обчислювальних експериментів і використані наступні позначення:  $n$  – розмірність задач,  $k$  – рівень на якому зупиняється

розгалуження дерева,  $AVG(T)$  – середній час роботи алгоритму, MF – відсоток завдань, для яких не було отримано розв'язку.

Таблиця 5.3

**Результати розв'язання задачі (2.4) – (2.5) методом гілок та меж з використанням евристики**

| $n$ | $k$ | $AVG(T)$ , сек | MF, % |
|-----|-----|----------------|-------|
| 10  | 5   | 0,64           | 0     |
| 20  | 5   | 1,05           | 0     |
|     | 10  | 1,17           | 0     |
| 30  | 10  | 1,56           | 0     |
|     | 20  | 2,68           | 0     |
| 40  | 20  | 3,86           | 0     |
|     | 30  | 3,84           | 5,4   |
| 50  | 20  | 3,89           | 3,2   |
|     | 30  | 4,70           | 3,4   |
|     | 40  | 4,46           | 16,7  |
| 60  | 30  | 5,39           | 3,4   |
|     | 40  | 7,79           | 16,7  |
| 70  | 30  | 9,20           | 3,4   |
|     | 40  | 7,29           | 12,9  |
|     | 50  | 12,01          | 13,3  |
| 80  | 30  | 7,59           | 13,3  |
|     | 40  | 22,25          | 20    |
|     | 50  | 9,67           | 23,3  |
| 90  | 30  | 18,27          | 10    |
|     | 40  | 9,70           | 13,8  |
|     | 50  | 16,57          | 23,3  |
|     | 60  | 22,21          | 27,6  |
| 100 | 30  | 16,72          | 9     |
|     | 40  | 21,92          | 10,9  |
|     | 50  | 32,27          | 13,5  |
|     | 60  | 16,22          | 32,5  |

Аналіз результатів з таблиці 5.3 дозволяє зробити ряд наступних висновків. Використання евристичного підходу в комплексі з методом гілок

та меж дозволяє розширити можливість застосування методу гілок та меж на задачі з більшою розмірністю. Відомо, що метод гілок та меж дозволяє отримувати точний розв'язок задач оптимізації, але одним з істотних його недоліків є експоненціальне зростання трудомісткості. В рамках даної роботи, застосування методу гілок та меж для отримання точного розв'язку задачі (2.4) – (2.5) було можливо для задач розмірності до 40. Евристичний підхід з використанням методу гілок та меж дозволив підвищити розмірність вирішуваних задач більш ніж в 2 рази, з 40 до 100. До недоліків методу, описаного в даній роботі необхідно віднести помилку переповнення пам'яті. В рамках методу гілок та меж відбувається побудова дерева пошуку, кількість вузлів в якому – величина, що експоненціально росте в залежності від рівня дерева. Дерево пошуку, в рамках розв'язання однієї задачі необхідно зберігати в оперативній пам'яті, так як в процесі відбувається постійне звернення до даних, що зберігаються в ньому. Через це при розв'язанні задач розмірності 40 і вище деякий відсоток задач не було розв'язано, тому що програма не завершувала роботу коректно, а видавала помилку переповнення пам'яті (`java.lang.OutOfMemoryError: Java heap space`). З переповненням пам'яті так само пов'язаний немонотонне зростання середнього часу розв'язання задач в рамках однієї розмірності при зростанні рівня зупинки розгалуження. Так наприклад, при розв'язанні задачі розмірності 80 при зупинці розгалуження дерева пошуку на рівні 40 середній час розв'язання становить близько 22 секунд, а відсоток помилок переповнення пам'яті – 20. При збільшенні рівня зупинки розгалуження дерева пошуку до 50, середній час розв'язання однієї задачі істотно знижується, до 9 секунд при одночасному зростанні відсотка помилок переповнення пам'яті до 23,3. З цього зроблено висновок що при розв'язанні задач розмірності 80\50 більша кількість випадків потребують побудови великого дерева пошуку та як наслідок більшого часу роботи. І у цих випадках робота програми просто не завершується успішно. Але при наявності більших обчислювальних можливостей, або при зміні формату

зберігання дерева пошуку, можливо даний алгоритм дозволить отримати розв'язки і для задач більшої розмірності у прийнятних часових проміжках.

При проведенні обчислювальних експериментів по застосуванню методу гілок та меж проявляються такі тенденції:

1. Експоненціальне зростання трудомісткості при збільшенні розмірності задач.
2. Істотна залежність трудомісткості рішення, як від способу розгалуження, так і від способу обчислення оцінок.

Якщо знаходження точного розв'язку задачі з будь-яких причин неможливо, пропонується алгоритм побудови евристичного рішення. Його перевага полягає в можливості регулювання трудомісткості отримання результатів і їх точності за допомогою застосування різних евристичних правил вибору «кращих» перестановок.

Дані алгоритми показали свою працездатність в процесі проведення обчислювальних експериментів. При невеликій дисперсії коефіцієнтів цільової функції евристичний алгоритм дозволяє отримувати рішення задачі з малою відносною похибкою при малих тимчасових витратах, при більшій дисперсії доцільніше застосовувати точний алгоритм. Запропонований евристичний алгоритм може бути поліпшений за допомогою нових евристичних правил вибору «кращих» перестановок або застосуванням іншого правила побудови або розгалуження дерева.

## **5.2 Оптимізація на циклічних перестановках на основі властивостей транспозицій суміжності**

Розглянемо викладену в підрозділі 3.2.3 стратегію розв'язання задачі (2.1) – (2.2) оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках без додаткових обмежень з використанням транспозицій суміжності. Для прикладу розглянемо лінійну функцію:

$$L(x) = 9x_1 + 8.4x_2 + 7x_3 + 5.95x_4 + 3.8x_5 + 11x_6 + 4.5x_7 + 1.1x_8,$$



на множині циклічних перестановок, отриманих за допомогою породжуючої множини  $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ . Ця функція вже була оптимізована за допомогою методу гілок та меж без використання евристики, та було знайдено її точний розв'язок. Це перестановка  $p_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ , функція цілі у якій приймає значення  $L(p_1^*)=177.05$ .

Також в 5.1 за допомогою модифікації методу гілок та меж з використанням евристики було знайдено циклічну перестановку  $p_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in P_n^C$ , яку було прийнято в якості евристичного розв'язку. Значення функції цілі для цієї перестановки дорівнює  $L_H(p_2^*)=181.15$ .

Розглянемо знаходження наближеного розв'язку даної функції за допомогою транспозицій суміжності. У відповідності до кроків, описаних у 3.2.3:

1. Маємо  $p^* \in P_n$ , таку що,

$$p^* = \min_{x \in P_n} (L(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Так як  $p^* \notin P_n^C$  необхідно зробити розбиття перестановки  $p^*$ , в твір циклів

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

та провести підрахунок  $k$  – кількості циклів, з яких складається вихідна перестановка. В даному випадку  $k=2$ .

3. Один з циклів перестановки  $p^*$  – це нерухома точка з елементом 8. До того ж відмітимо що цей елемент дорівнює розмірності задачі, тобто

$n=8$ , тому цей елемент перестановки може бути задіяний у транспозиції суміжності тільки з одним елементом  $i=7$ . Так як  $k-1=1$ , то з усіх можливих  $n-1$  транспозицій суміжності, в цьому випадку для об'єднання всіх  $k$  циклів можна використати тільки одну транспозицію суміжності «з'єднання», а саме  $\sigma_i(p^*)$ ,  $i=7$ .

4. Кількість  $M = |\sigma_i(p^*)|$  різних перестановок, які можна породити за допомогою  $k-1=1$  транспозиції суміжності  $\sigma_i(p^*)$  дорівнює 1.

5. Генеруємо  $\sigma_7(p^*)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином  $p_3^* = \sigma_7(p^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = p_1^*$ , а значення

функції цілі  $L(p_3^*) = L(p_1^*) = 177.05$ .

Дана стратегія була реалізована програмно, проведені обчислювальні експерименти. Випадковим чином в інтервалі  $[-200; 200]$  генерувалися коефіцієнти функції цілі задач. Експерименти проводилися в два етапи. На першому етапі розв'язувалось по 20 задач розмірності  $n$  до 8 змінних, їх розв'язок порівнювався з розв'язками, отриманими повним перебором. В рамках кожної розмірності були розраховані середні значення кількості циклів  $k$  в перестановці  $p^* \in P_n$  і середня потужність  $M$  множини породжуваних циклічних перестановок. Середній час розв'язання задач в рамках кожної розмірності позначимо через  $AVG(T)$ . Отримані результати наведено в таблиці 5.4.

Таблиця 5.4

**Наближений розв’язок задачі малої розмірності на основі властивостей  
транспозицій і порівняння з точним розв’язком**

| $n$ | Відсоток розв’язків що збіглися | $k$  | $M$  | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|---------------------------------|------|------|-----------------|
| 3   | 100%                            | 1,9  | 0,9  | 0,0018          |
| 4   | 95%                             | 2,2  | 1,1  | 0,0049          |
| 5   | 95%                             | 2,1  | 0,95 | 0,0095          |
| 6   | 95%                             | 2,2  | 1    | 0,0186          |
| 7   | 85%                             | 2,35 | 1,05 | 0,0295          |
| 8   | 100%                            | 2,85 | 1,3  | 0,0508          |

З наведених даних зроблено наступні висновки: при малій розмірності задач наближені розв’язки, отримані за допомогою транспозицій спеціального виду, в переважній більшості випадків (85–100%) збігаються з точним розв’язком. З ростом розмірності задач спостерігається збільшення середнього значення кількості циклів, з яких складається перестановка  $p^* \in P_n$ . При цьому завдяки дослідженням властивостей транспозицій спеціального виду, наведених в пункті 2.3.2, кількість циклічних перестановок, які можуть бути породжені з перестановки  $p^* \in P_n$  росте несуттєво, що в більшості випадків дозволяє отримати єдине рішення задачі, що збігається з точним.

На другому етапі обчислювальних експериментів розв’язувались задачі більшої розмірності. Для кожної розмірності було розв’язано 20 задач з випадковими початковими даними. На підставі твердження 3.1 отримані наближені розв’язки задачі (2.1) – (2.2) були оцінені в такий спосіб. Для кожної задачі в рамках однієї розмірності елементи множини  $\Delta$  були впорядковані по зростанню:  $\delta^1 \leq \delta^2 \leq \dots \delta^N$  і отримано значення  $\sum_{i=1}^k \delta^i$ , після чого в рамках однієї розмірності було обчислено середнє значення цих сум:

$AVG\left(\sum_{i=1}^k \delta^i\right) = \Delta_A$ . Обчислювалася різниця між мінімумом функції на

перестановках і отриманим наближеним розв'язком задачі (2.1) – (2.2)

$L(p^{*C}) - L(p^*)$  для кожної задачі, і було знайдено середнє від усіх цих

значень в рамках кожної розмірності:  $AVG\left(L(p^{*C}) - L(p^*)\right) = L_A$ .

Величини  $\Delta_A$  і  $L_A$  підкоряються наступній нерівності:  $\Delta_A \leq L_A$ , що підтверджується наведеними даними. Отримані результати наведено в таблиці 5.5.

Таблиця 5.5

**Наближений розв'язок задач більшої розмірності на основі властивостей  
транспозицій і побудова оцінок**

| $n$ | $\Delta_A$ | $L_A$ | $k$  | $M$ | $AVG(T)$ , сек. | $T_E$ , сек. |
|-----|------------|-------|------|-----|-----------------|--------------|
| 20  | 4,9        | 5,1   | 3,5  | 1,4 | 0,91            | 1,17         |
| 30  | 2,6        | 2,7   | 3,4  | 1   | 2,31            | 2,68         |
| 40  | 2,5        | 2,5   | 4,3  | 1   | 9,98            | 3,86         |
| 50  | 1,6        | 1,6   | 3,9  | 1   | 11,54           | 4,70         |
| 60  | 0,7        | 0,7   | 3,9  | 1   | 20,74           | 7,78         |
| 70  | 1,2        | 1,2   | 5,6  | 1,3 | 90,75           | 12,01        |
| 80  | 2          | 2,05  | 5,05 | 1,1 | 105,42          | 22,25        |
| 100 | 2,8        | 2,8   | 5,8  | 1,1 | 235,77          | 32,27        |

Порівняємо результати експериментів по розв'язанню задачі (2.1) – (2.2) наближеним методом з використанням транспозицій спеціального виду із евристичним підходом в комплексі з методом гілок та меж. В рамках даної роботи всі експерименти проводилися на одних і тих же обчислювальних потужностях, таким чином коректно і показово буде порівняння часу розв'язання задач однієї розмірності. У таблиці 5.5 наведені результати наближеного розв'язку задачі (2.1) – (2.2) і крім цього в останньому

стовпчику наведено час евристичного розв'язку задачі (2.1) – (2.2) на аналогічній розмірності.

Можна відзначити що на розмірностях менше 40 час роботи наближеного алгоритму менше ніж час роботи евристичного, але, як було показано в пункті 5.1 в деяких випадках застосування евристичного алгоритму може бути краще, так як на розмірностях менше 40 евристичний алгоритм дає нульовий відсоток помилки переповнення пам'яті. При цьому для евристичного алгоритму на розмірностях до 40 можлива настройка алгоритму за допомогою зміни рівня зупинки побудови дерева, для отримання розв'язку близького до точного. При розв'язанні задач розмірності 40 і більше, час роботи наближеного алгоритму зростає істотно в порівнянні з часом роботи евристики, як показано на рис. 5.5. Проте застосування наближеного алгоритму на даних розмірностях більш ніж виправдано, так як цей алгоритм дозволяє отримати розв'язки задачі на будь-яких вихідних даних, в той час як евристичний алгоритм стикається з проблемою переповнення пам'яті.

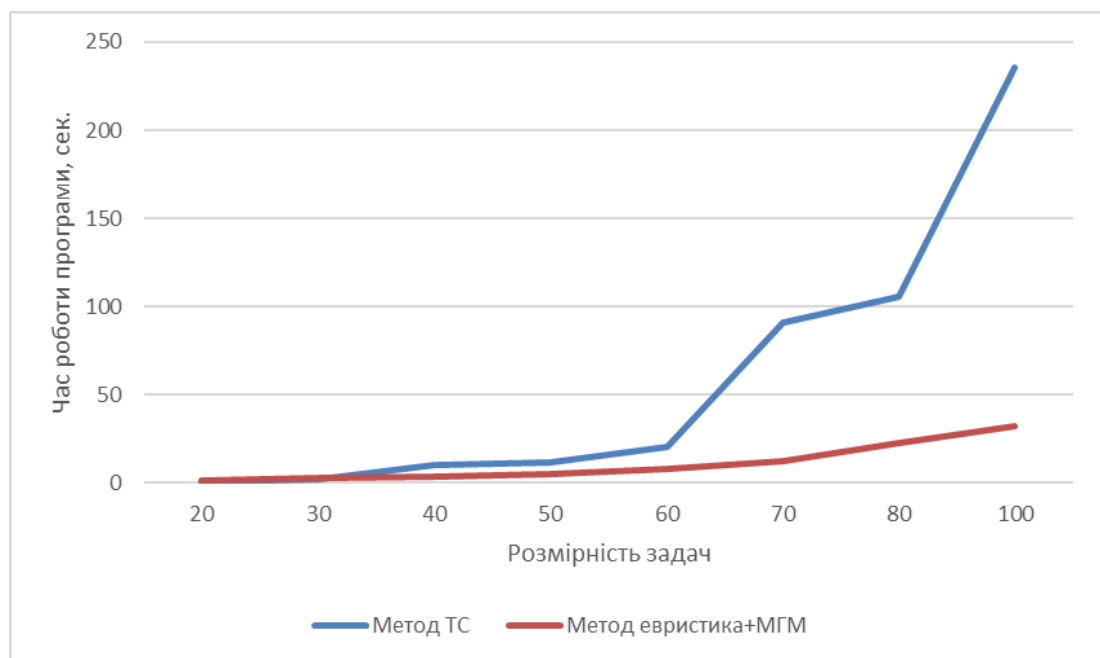


Рисунок 5.5. Залежність часу виконання програми від методу

### 5.3 Оптимізація на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку

Викладений в пункті 3.3 метод розв'язання задачі (2.9) – (2.11) оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках з лінійними обмеженнями методом випадкового пошуку реалізований програмно. Для розв'язання допоміжної задачі оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках без додаткових обмежень реалізовані програмно метод гілок та меж, евристика з використанням методу гілок та меж і наближені методи розв'язання задачі з використанням властивостей транспозицій суміжності.

#### 5.3.1 Розв'язання допоміжної задачі методом гілок та меж

Випадковим чином генерувалися вихідні дані задач: коефіцієнти функції цілі і обмежень. Експерименти проводилися в два етапи. На першому етапі розв'язувались задачі розмірності до 8 змінних комбінацією методу випадкового пошуку і методу гілок та меж. Отримані результати порівнювалися з розв'язками, отриманими методом повного перебору. Випадковим чином генерувалися коефіцієнти двох лінійних обмежень, і коефіцієнти цільової функції.

Наведемо приклад роботи алгоритму. На рис. 5.6 зображений багатогранник перестановок. Червоним кольором відзначені вершини багатогранника перестановок, відповідні циклічним перестановкам. Так само на рис. 5.6 виділена область, описувана додатковими обмеженнями виду (2.16).

В рамках першої серії випробувань в межах області, описаної обмеженнями (2.16) генеруються 10 експериментальних точок. Точки, згенеровані в першій серії експериментів наведені на рис. 5.7.

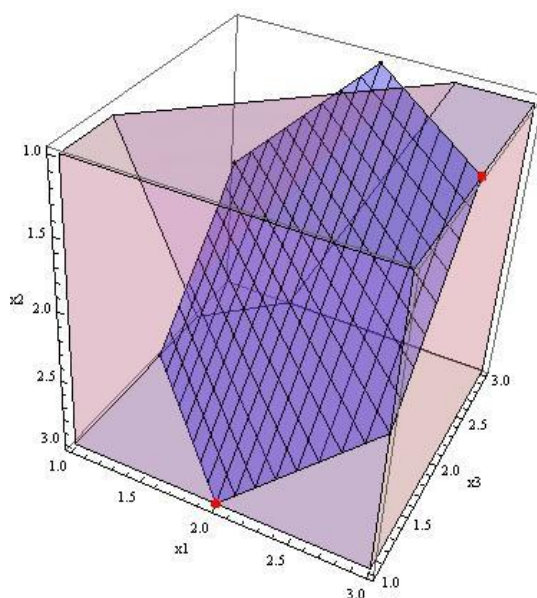


Рисунок 5.6. Геометрична інтерпретація задачі виду (2.16) – (2.18)

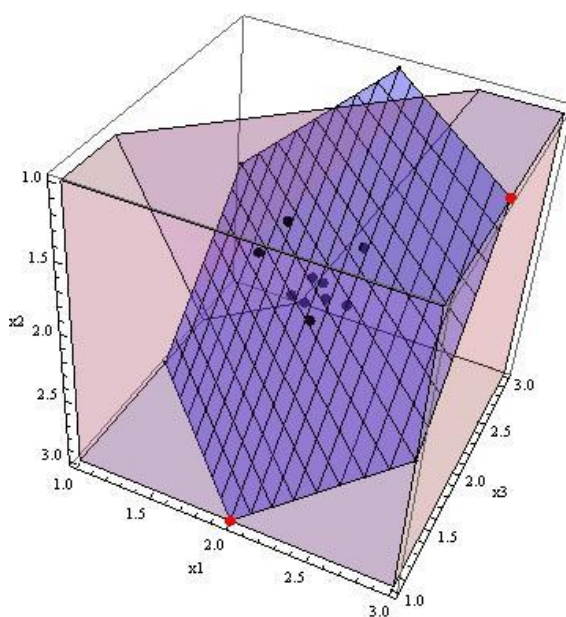


Рисунок 5.7. Перша серія з 10 експериментальних точок

Для кожної з експериментальних точок розв'язується допоміжна задача виду (3.2), таким чином отримуємо  $x_i$  – перше наближення до розв'язку. Точка  $\bar{x} = x_i$ , приймається поточним наближенням до розв'язку задачі (2.13) – (2.16). Поточне наближення до розв'язку виділено на рис. 5.8.

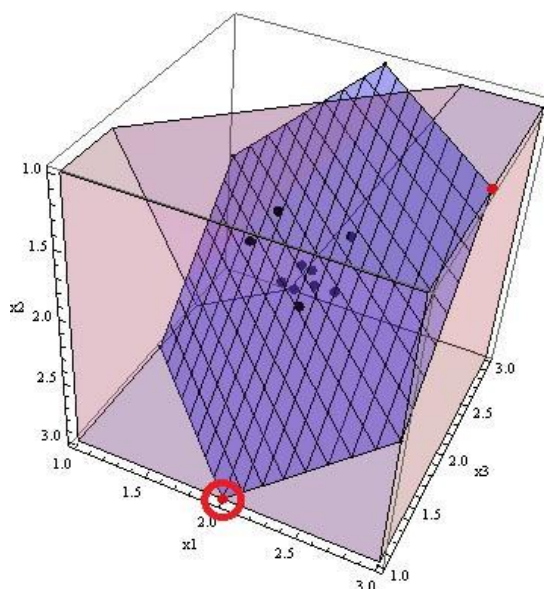


Рисунок 5.8. Поточне наближення до розв'язку задачі (2.13) – (2.16).

Приймаємо  $L(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i$  – верхньою оцінкою розв'язку задачі (2.13) –

(2.16). До системи обмежень виду (2.16) додаємо лінійну нерівність виду (3.3), що призводить до скорочення області, описуваної системою нерівностей. Нова область приведена на рис. 5.9.

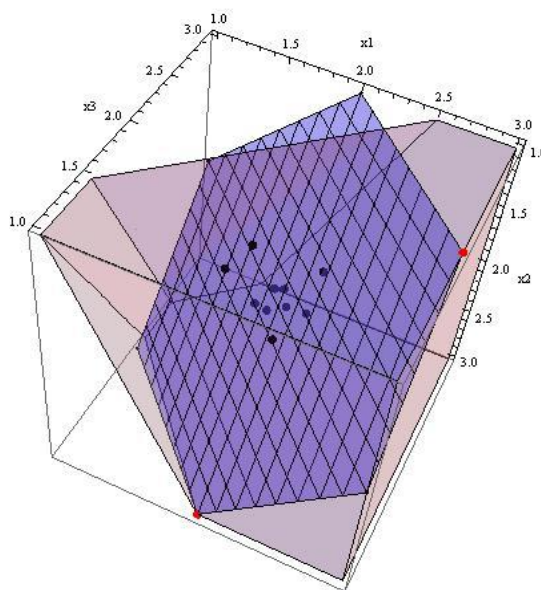


Рисунок 5.9. Нова система лінійних обмежень.



Переходимо до другої серії випробувань. На рис. 5.10 зеленим кольором виділені 10 експериментальних точок, згенерованих в рамках другої серії.

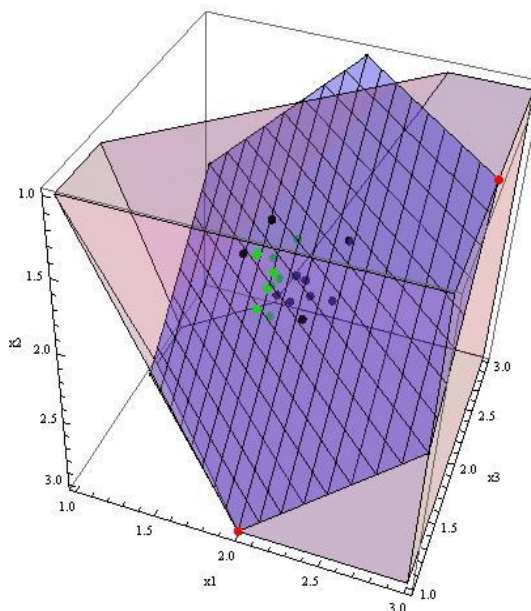


Рисунок 5.10. Друга серія випробувань

Для кожної з експериментальних точок розв’язується допоміжна задача виду (3.2). Таким чином знаходимо  $x_i$  – нове наближення до розв’язку. Воно порівнюється з  $\bar{x}$  – попереднім наближенням до розв’язку задачі (2.13) – (2.16) і в разі, якщо в точці  $x_i$  функція цілі приймає значення краще, ніж в попередніх випробуваннях, вважаємо  $x_i$  новим наближенням до розв’язку задачі (2.13) – (2.16).

У програмній реалізації алгоритму для знаходження розв’язку використовувалося кількість серій, що дорівнює 5, кожна серія складалася з 10 експериментальних точок. Розраховувалася середня відносна похибка  $AVG(\Delta)$  для задач, в яких результати розв’язання розробленим методом та методом повного перебору не збігаються. Отримані результати наведено в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6

**Розв’язання задач малої розмірності на циклічних перестановках на  
основі випадкового пошуку**

| $n$ | Відсоток розв’язків що збіглися | $AVG(\Delta)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|---------------------------------|---------------|-----------------|
| 3   | 100%                            | 0             | 0,14            |
| 4   | 50%                             | 0,077         | 0,269           |
| 5   | 30%                             | 0,128         | 0,439           |
| 6   | 40%                             | 0,072         | 0,734           |
| 7   | 30%                             | 0,084         | 1,527           |
| 8   | 0%                              | 0,134         | 3,402           |

На другому етапі розв’язувалися задачі більшої розмірності. У таких задачах для отримання нижньої оцінки мінімуму обчислювалася дві оцінки [1] такого виду:

$$E_1 = \left| \frac{Est - Rnd}{Rnd} \right|,$$

$$E_2 = \left| \frac{Est - Rnd}{Est} \right|,$$

де  $Est$  – мінімум функції цілі на циклічних перестановках без урахування лінійних обмежень;  $Rnd$  – результат розв’язку задачі методом випадкового пошуку. Результати відповідних обчислювальних експериментів наведені в таблиці 5.7.

Для задач розмірності вище 15 допоміжна задача (3.2) розв’язувалась за допомогою евристики з використанням методу гілок та меж. Для кожної розмірності задачі зазначений рівень дерева  $k$ , на якому зупинявся процес розгалуження.

Таблиця 5.7

**Розв'язання задач більшої розмірності на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку**

| $n$ | $k$ | Кількість задач | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|-----|-----------------|------------|------------|-----------------|
| 15  | 10  | 10              | 0,256      | 0,255      | 18,19           |
| 20  | 15  | 10              | 0,127      | 0,122      | 225,9           |
| 25  | 15  | 3               | 1,716      | 0,44       | 809,17          |

Для розв'язання задач, результати яких наведено в таблицях 5.6 і 5.7 використовувалося кількість серій рівна 5, в кожній із серій проводилося по 10 експериментів. Таким чином, для розв'язання однієї задачі пошуку мінімуму лінійної функції на множині циклічних перестановок з обмеженнями необхідно було розв'язати 50 допоміжних задач. Для скорочення часових і технічних ресурсів, необхідних для розв'язання однієї задачі були проведені експерименти, в яких кількість серій експериментів було зменшено до 2, а в кожній серії проводилося по 15 експериментів. Результати наведено в таблиці 5.8.

Таблиця 5.8

**Розв'язання задач з меншою кількістю експериментів**

| $n$ | $k$ | Кількість задач | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|-----|-----------------|------------|------------|-----------------|
| 25  | 15  | 7               | 0,1652     | 0,203      | 821,14          |
| 30  | 15  | 3               | 0,227      | 0,308      | 1805,86         |
| 35  | 15  | 1               | 0,219      | 0,2819     | 11215,516       |
| 40  | 20  | 1               | 0,305      | 0,379      | 33112,95        |

Так само були проведені експерименти по оцінці ефективності використання паралельних обчислень при розв'язанні задачі (2.13) – (2.16). Реальним прискоренням паралельного алгоритму буде ставлення часу виконання кращого послідовного алгоритму до часу виконання паралельного

алгоритму:  $S = \frac{T_1}{T_p}$ , де  $T_1$  – час виконання послідовного алгоритму,  $T_p$  – час виконання на  $p$  процесорах, що наведено на рис. 5.11. Для оцінки масштабованості паралельного алгоритму використовується поняття коефіцієнта ефективності розпаралелювання:  $E = \frac{S}{p}$  [235], що наведено в таблиці 5.9.

Таблиця 5.9

### Результати використання паралельних обчислень

| $n$ | $T_1$ , сек. | $T_p = T_4$ , сек. | $S = \frac{T_1}{T_p}$ | $E = \frac{S}{p}$ |
|-----|--------------|--------------------|-----------------------|-------------------|
| 15  | 493,7        | 281,5              | 1,75                  | 0,4375            |
| 20  | 4782,9       | 3297,5             | 1,45                  | 0,3625            |
| 25  | 62559,9      | 31688,3            | 1,97                  | 0,4925            |

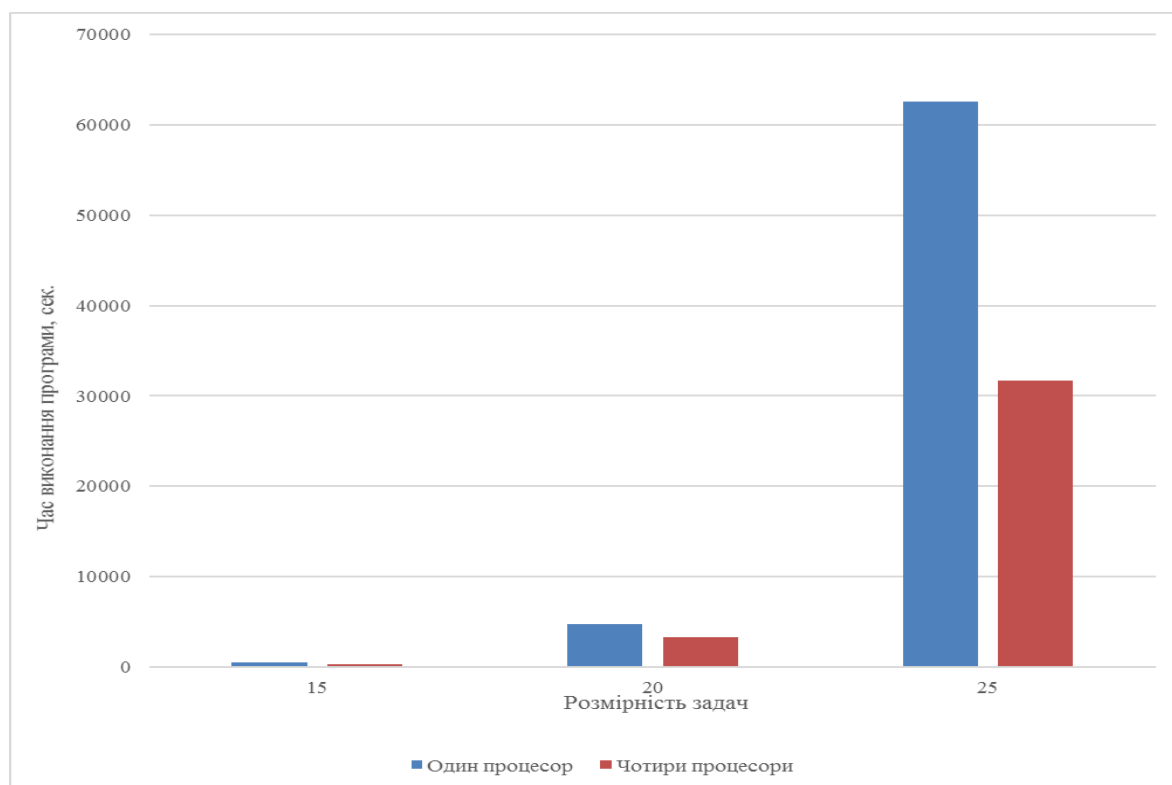


Рисунок 5.11. Залежність часу виконання програми від кількості паралельних потоків обчислення

Відзначимо, що реальне прискорення, отримане завдяки використанню паралельних обчислень, більше, ніж теоретична оцінка за законом Амдала. Це пов'язано з неточною грубою оцінкою  $f$ .

### 5.3.2 Розв'язання допоміжної задачі за допомогою транспозицій суміжності

Випадковим чином генерувалися вхідні дані задач: коефіцієнти функції цілі і обмежень, породжуючі елементи комбінаторної множини.

Експерименти проводилися в два етапи. На першому етапі розв'язувались задачі до 8 змінних, модифікацією методу випадкового пошуку при якій допоміжна задача розв'язувалась за допомогою транспозицій породжуючих елементів. Отримані наближені розв'язки задачі (2.13) – (2.16) порівнювалися з розв'язками, отриманими повним перебором. Випадковим чином генерувалися коефіцієнти двох лінійних обмежень, і коефіцієнти цільової функції. Коефіцієнти цільової функції генерувалися в інтервалі  $[-200, 200]$ .

У таблиці 5.9 використовуються наступні умовні позначення:

$n$  – розмірність задач,  $AVG(\Delta)$  – середнє значення відносної похибки

$$\Delta = \frac{L_E(x^*) - \bar{L}^*}{L_E(x^*)} \quad \text{для задач, в яких розв'язок } L_E(x^*) \text{ – отриманий за}$$

допомогою транспозицій суміжності і розв'язок  $\bar{L}^*$  – отриманий методом повного перебору не збігаються,  $AVG(T)$  – середній час роботи програми. Отримані результати наведено в таблиці 5.9.

Таблиця 5.9

**Розв’язання задач розмірності менше 8 на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку і транспозицій суміжності**

| $n$ | Відсоток розв’язків що збіглися | $AVG(\Delta)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|---------------------------------|---------------|-----------------|
| 3   | 90%                             | 0,125         | 0,173           |
| 4   | 100%                            | 0             | 0,331           |
| 5   | 90%                             | 0,750         | 0,989           |
| 6   | 100%                            | 0             | 1,326           |
| 7   | 50%                             | 0,714         | 3,512           |
| 8   | 50%                             | 0,833         | 4,898           |

На другому етапі розв’язувались задачі більшої розмірності. У таких задачах для отримання нижньої оцінки мінімуму обчислювалася дві оцінки виду:

$$E_1 = \left| \frac{Est - Rnd}{Rnd} \right|,$$

$$E_2 = \left| \frac{Est - Rnd}{Est} \right|,$$

де  $Est$  – мінімум функції цілі на циклічних перестановках без урахування лінійних обмежень;  $Rnd$  – результат розв’язку задачі методом випадкового пошуку в комбінації з використанням транспозицій суміжності. Результати відповідних обчислювальних експериментів наведені в таблиці 5.10. Для розмірності вище 15 було розв’язано  $k$  задач з випадковими вхідними даними.

Таблиця 5.10

**Розв'язання задач розмірності більше 8 на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку і транспозицій суміжності**

| $n$ | $k$ | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|-----|------------|------------|-----------------|
| 15  | 10  | 0,259      | 0,369      | 15,24           |
| 20  | 10  | 0,454      | 1,571      | 48,86           |
| 30  | 5   | 0,379      | 0,718      | 163,9           |

Відзначимо, що з ростом розмірності задачі при фіксованій кількості експериментів характеристики отриманого розв'язку погіршуються. Підвищення точності можна досягти шляхом збільшення кількості серій і числа експериментів в кожній серії.

Слід зазначити, що метод випадкового пошуку в комбінації з методом гілок та меж при поточних обчислювальних потужностях не дозволяє розв'язувати задачі розмірності більше 30, чого не можна сказати про модифікацію методу випадкового пошуку в комбінації з транспозиціями суміжності. Результати розв'язання задач відповідних розмірностей наведено в таблиці 5.11.

Таблиця 5.11

**Розв'язання окремих задач на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку і транспозицій суміжності**

| $n$ | $k$ | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T)$ , сек. |
|-----|-----|------------|------------|-----------------|
| 35  | 2   | 1,602      | 2,661      | 143,5           |
| 40  | 1   | 0,278      | 0,385      | 896,9           |
| 45  | 1   | 0,891      | 8,203      | 325,6           |

### 5.3.3 Порівняння методів розв'язання допоміжної задачі

Проведемо порівняння результатів обчислювальних експериментів по застосуванню методу випадкового пошуку в комбінації з методом гілок та меж ( $ВП + МГМ$ ) з результатами застосування методу випадкового пошуку в комбінації з використанням транспозицій суміжності ( $ВП + ТС$ ) для розв'язання задачі (2.9) – (2.11). Результати наведено в таблиці 5.12.

Таблиця 5.12

#### Порівняння результатів розв'язання задач розмірності менше 8

| $n$ | $ВП + МГМ$    |                 | $ВП + ТС$     |                 |
|-----|---------------|-----------------|---------------|-----------------|
|     | $AVG(\Delta)$ | $AVG(T)$ , сек. | $AVG(\Delta)$ | $AVG(T)$ , сек. |
| 3   | 0             | 0,14            | 0,125         | 0,173           |
| 4   | 0,077         | 0,269           | 0             | 0,331           |
| 5   | 0,128         | 0,439           | 0,750         | 0,989           |
| 6   | 0,072         | 0,734           | 0             | 1,326           |
| 7   | 0,084         | 1,527           | 0,714         | 3,512           |
| 8   | 0,134         | 3,402           | 0,833         | 4,898           |

Зобразимо графічно середній час отримання розв'язку для різних методів при розв'язанні задач розмірності менше 8.

Виходячи з результатів, наведених в таблиці 5.12 та на рис. 5.12, 5.13 можна зробити висновок що задачі оптимізації лінійної функції з додатковими обмеженнями на множині циклічних перестановок на розмірностях менше 8 краще розв'язувати методом випадкового пошуку в комбінації з методом гілок та меж. У такому випадку при незначному зростанні часу обчислень спостерігається так само незначне зростання похибки. У той час як застосування методу випадкового пошуку з



використанням транспозицій суміжності показує значно більшу відносну похибку (в 8–10 разів) при більшому часі, витраченому на обчислення.

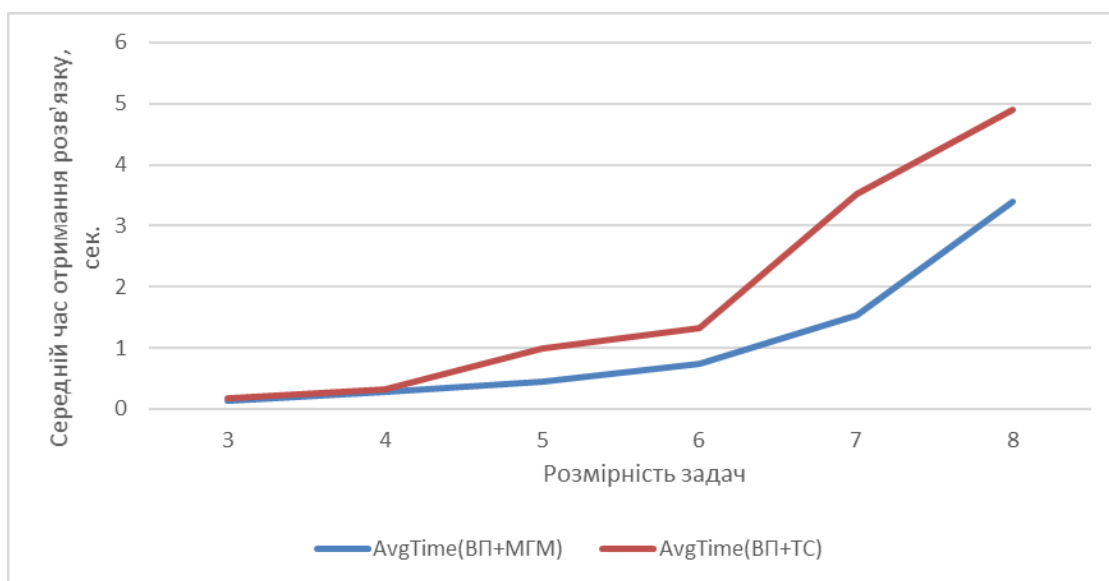


Рисунок 5.12. Залежність середнього часу отримання розв'язку різними методами для розмірностей менше 8

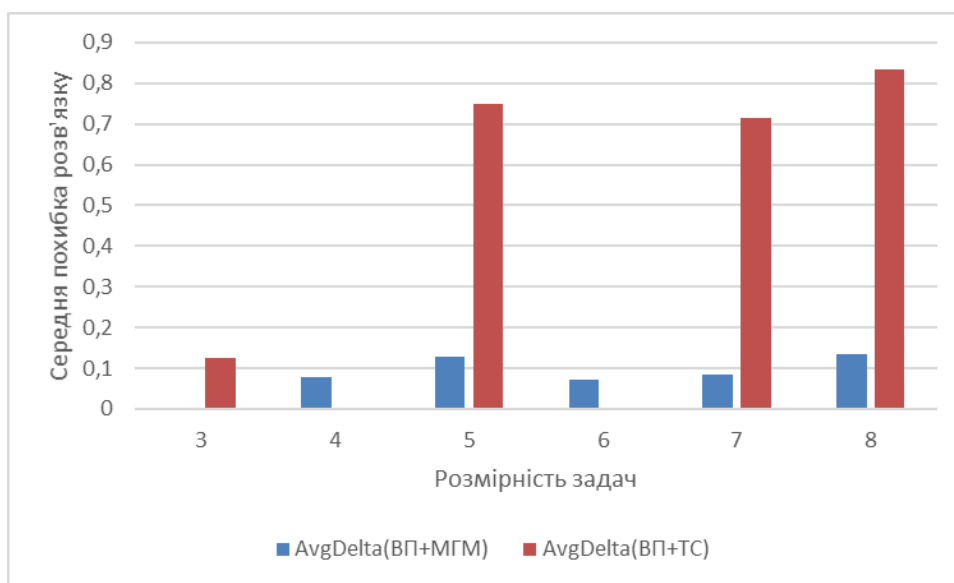


Рисунок 5.13. Залежність середньої похибки розв'язку різними методами у порівнянні з точним розв'язком для розмірностей менше 8

Порівняльна оцінка результатів, отриманих методом випадкового пошуку в комбінації з методом гілок та меж зі значеннями, отриманими

модифікацією методу випадкового пошуку на основі властивостей транспозицій на розмірностях більше 15 наведена в таблиці 5.13.

Таблиця 5.13

### Порівняння результатів розв'язання задач розмірності більше 15

| $n$ | $ВП + МГМ$ |            |                       | $ВП + ТС$  |            |                       |
|-----|------------|------------|-----------------------|------------|------------|-----------------------|
|     | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T), \text{сек.}$ | $AVG(E_1)$ | $AVG(E_2)$ | $AVG(T), \text{сек.}$ |
| 15  | 0,256      | 0,255      | 18,19                 | 0,259      | 0,369      | 15,24                 |
| 20  | 0,127      | 0,122      | 225,9                 | 0,454      | 1,571      | 48,86                 |
| 30  | 0,227      | 0,308      | 1805,86               | 0,379      | 0,718      | 163,9                 |

Для зручності також зобразимо результати з таблиці 5.13 у вигляді порівняльних графіків на рис. 5.14.

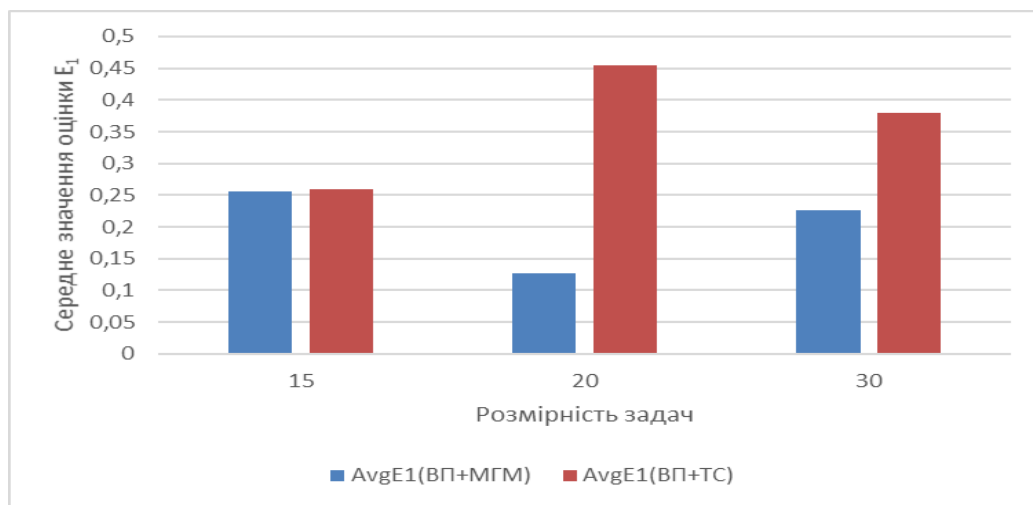


Рисунок 5.14. Залежність середнього значення оцінки  $E_1$  для методів ВП+МГМ та ВП+ТС

Виходячи з результатів, наведених в таблицях 5.12 – 5.13 та на рис. 5.14 – 5.16, зроблено висновок, що на малих розмірностях відносна похибка і середній час розв'язання задачі оптимізації лінійної функції з додатковими обмеженнями на множині циклічних перестановок модифікацією методу

випадкового пошуку на основі властивостей транспозицій більше, ніж комбінацією методу випадкового пошуку і методу гілок і меж.

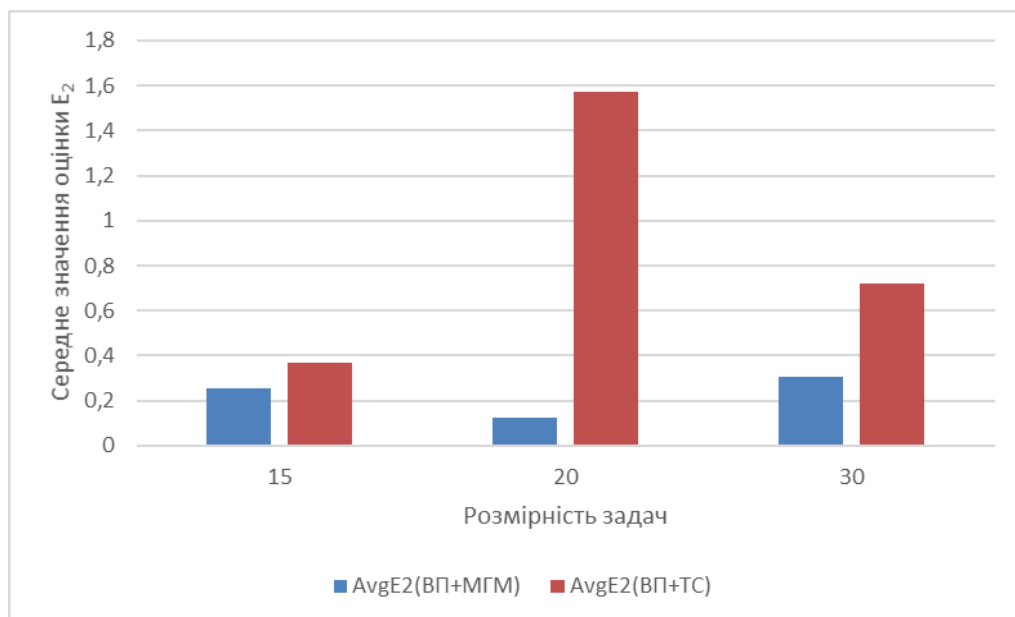


Рисунок 5.15. Залежність середнього значення оцінки  $E_2$  для методів ВП+МГМ та ВП+ТС.

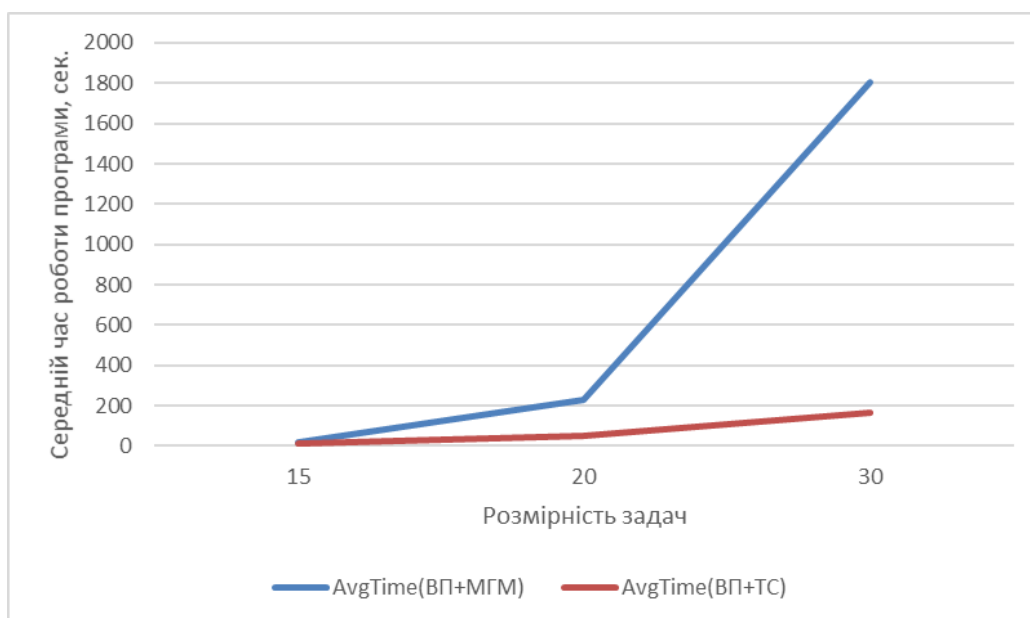


Рисунок 5.16. Залежність середнього часу роботи для методів ВП+МГМ та ВП+ТС.

На завданнях більшої розмірності, слід зазначити, протилежний результат. Це пов'язано з тим, що застосування методу гілок та меж

призводить до експоненціального зростання трудомісткості при збільшенні розмірності задачі. Крім того, спостерігається істотна залежність трудомісткості рішення, як від способу розгалуження, так і від способу обчислення оцінок.

#### 5.4 Генерація циклічних перестановок на основі транспозицій суміжності

Розглянемо приклад роботи алгоритму генерації циклічних перестановок з використанням транспозицій спеціального виду, описаного в пункті 3.4. В якості стартової виберемо циклічну перестановку:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведемо дослідження даної перестановки для елементів  $i, j$ ,  $i \in \{3, \dots, n-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, i-2\}$ . Знайдемо всі такі пари елементів  $i, j$ , для яких тип перестановки I або II:

$i = 4, j = 1$  та  $i = 5, j = 2$  тип I;  $i = 4, j = 2$  та  $i = 5, j = 1$  тип II.

Чотири набори елементів відповідають типам, яке зберігає циклічність, отже, в даному випадку  $m = 4$ . Тоді для вихідної перестановки кількість різних перестановок, які можливо отримати в результаті двох транспозицій, дорівнюватиме:  $(n-2) + m = (n-2) + 4 = (6-2) + 4 = 8$ .

Продемонструємо отримання циклічних перестановок з вихідної перестановки за допомогою двох транспозицій елементів, розташування яких в перестановці відповідає типам I і II. Як приклад розглянемо пару елементів  $i = 4, j = 1$ . Для трьох інших пар транспозиції здійснюються аналогічно з використанням відповідних елементів.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4(p) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(\sigma_4(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо отримання  $(n-2)$  циклічних перестановки, в результаті двох транспозицій з використанням трьох елементів. Так як не відомо, який саме порядок застосування транспозицій призводить до циклічної перестановки, відповідно необхідно перевіряти попарно всі набори елементів. Зробимо порівняння послідовності транспозицій з елементами  $i=1, j=2$  і транспозицій з елементами  $i=2, j=1$ . Порівняння для інших пар проводяться аналогічно.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1(p) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2(\sigma_1(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2(p) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(\sigma_2(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крім побудованих двох циклічних перестановок аналогічним шляхом з вихідної циклічної перестановки можуть бути отримані ще шість різних циклічних перестановок:

$$\sigma_2(\sigma_4(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\sigma_1(\sigma_5(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2(\sigma_5(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3(\sigma_2(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4(\sigma_3(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4(\sigma_5(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Даний приклад генерації циклічних перестановок схематично зображено на рис. 5.17. У центрі знаходиться стартова перестановка. Кожна стрілка переходу від однієї перестановки до іншої підписана, відповідно до того, які елементи задіяні у відповідній транспозиції суміжності. З множини перестановок, отриманих в результаті застосування до стартової перестановки двох транспозицій суміжності з використанням різних елементів, виділені циклічні перестановки. Їх кількість відповідає наведеній оцінці. При необхідності і наявності відповідних обчислювальних потужностей алгоритм генерації циклічних перестановок може бути продовжений. Застосування до кожної з восьми згенерованих циклічних перестановок аналогічних кроків алгоритму, описаного в пункті 3.4.

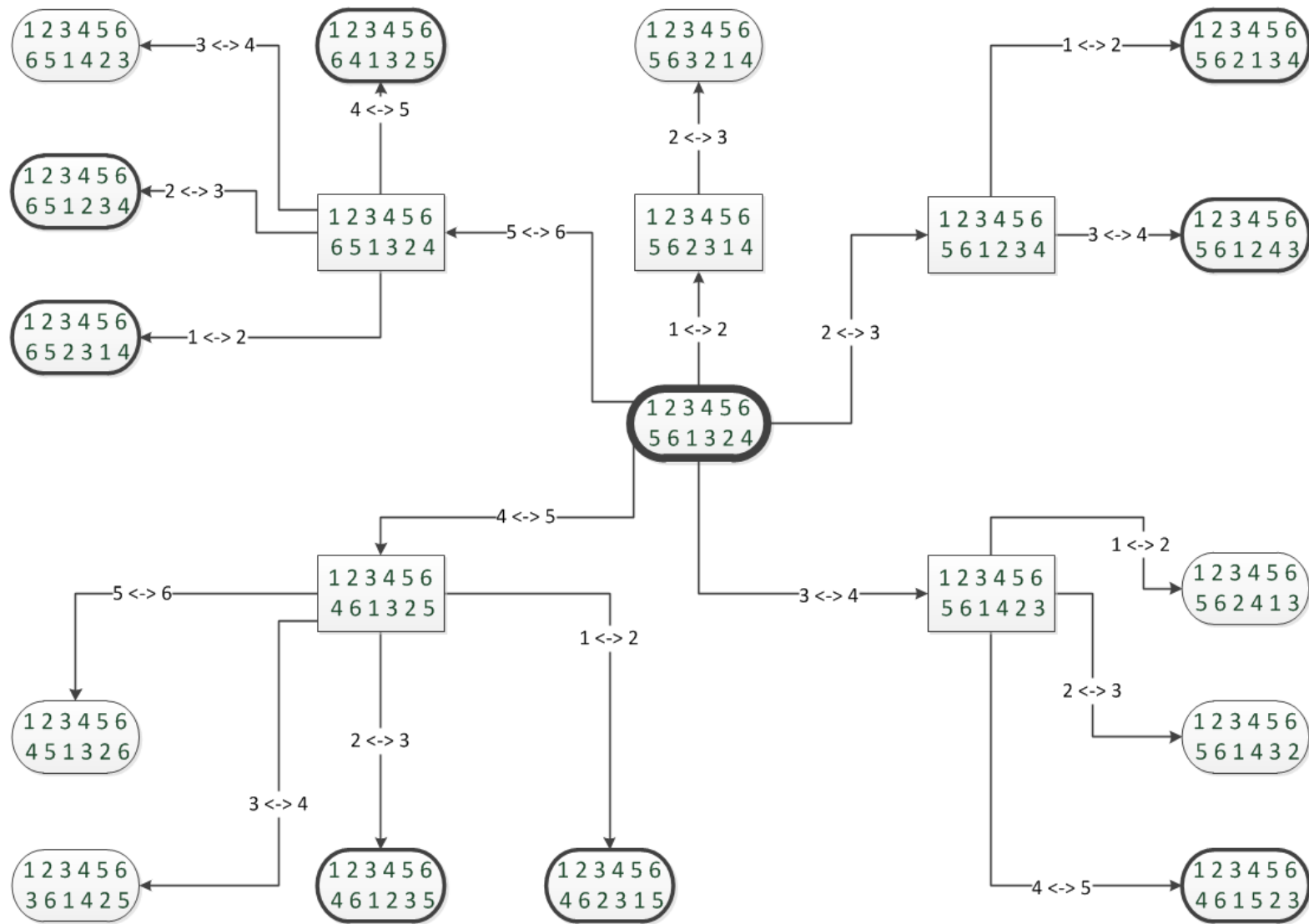


Рисунок 5.17. Приклад генерації циклічних перестановок з використанням транспозицій суміжності

## 5.5 Висновки до п'ятого розділу

Даний розділ присвячений результатам розв'язання задач комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках, описаних в розділі 2. Методи розв'язання задач, описані в розділі 3 реалізовані програмно, проведені обчислювальні експерименти, результати яких відображені у відповідних підрозділах даного розділу.

У підпункті 5.1 описані результати розв'язання задач комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок з використанням методу гілок та меж. Описано проблеми, що виникають при проведенні обчислювальних експериментів по застосуванню методу гілок та меж, пов'язані з ростом навантаження на CPU при збільшенні розмірностей задач. Відзначено що навантаження обчислювальних потужностей істотно залежить від способу розгалуження в методі гілок та меж і від способу обчислення оцінок.

Для розв'язання цих проблем пропонується алгоритм побудови евристичного розв'язку. Його перевага полягає в можливості регулювання навантаження на CPU за допомогою застосування різних евристик.

Подальша розробка запропонованих алгоритмів є актуальною. Перспективними напрямками для їх поліпшення є пошук альтернативних евристик, застосування альтернативних правил розгалуження дерева і побудови оцінок.

Підпункт 5.2 описує результати обчислювальних експериментів по реалізації алгоритму, описаного в 3.2.3. При розв'язанні задач малої розмірності  $n < 8$ , розв'язки отримані за допомогою транспозицій спеціального виду порівнювалися з точним розв'язком отриманим методом повного перебору. У випадках малої розмірності відсоток задач, для яких наближений розв'язок співпадав з точним коливається в межах 85–100%. При цьому час роботи наближеного алгоритму, запропонованого в даній роботі є



суттєво меншим за час роботи методом повного перебору і методом гілок та меж.

При розв'язанні задач більшої розмірності обчислювальні експерименти підтвердили вірність оцінки знизу, описаної в пункті 3.1. Відзначимо що, не дивлячись на зростання середньої кількості циклів в перестановці  $p^* \in P_n$ , твердження, доведені в розділі 2 дозволяють знизити потужність множини породжуваних циклічних перестановок до однієї циклічної перестановки.

Підпункт 5.3 присвячений результатам розв'язання задач комбінаторної оптимізації з лінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок. Програмна реалізація методу, описаного в розділі 3, що використовує схему випадкового пошуку, властивості циклічних перестановок, занурених в евклідов простір і аналітичний розв'язок систем лінійних нерівностей, що описують обмеження задачі, показала свою ефективність.

Розв'язання допоміжної задачі комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок без обмежень виконано з використанням методу гілок та меж. Для розв'язання проблем, пов'язаних з трудомісткістю розв'язання задач комбінаторної оптимізації запропонованим методом, були задіяні такі модифікації методу:

- модифікація з пошуком евристичного розв'язку допоміжної задачі про знаходження мінімуму норми різниці;
- модифікація з паралельним обчисленням допоміжної задачі для декількох точок з допустимої області.

Застосування модифікацій дозволяє знизити обчислювальні витрати при розв'язанні задач більшої розмірності. Ефективність запропонованих удосконалень продемонстрована проведеними обчислювальними експериментами.

У пункті 5.3 розглянуто результати обчислювальних експериментів із застосуванням третьої модифікації, при якій для допоміжної задачі

наближений розв'язок знаходиться на підставі властивостей транспозицій породжуючих елементів в перестановках і особливостей комбінаторної множини перестановок.

З результатів обчислювальних експериментів можна зробити висновок що розв'язок задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок за допомогою модифікації методу випадкового пошуку на основі властивостей транспозицій породжуючих елементів вигідно застосовувати для розв'язання задач розмірності  $n \geq 15$ . У такому випадку витрати часу на пошук розв'язку істотно нижче ніж при використанні комбінації методу випадкового пошуку і методу гілок та меж. А відносна похибка істотно не відрізняється. Модифікація методу випадкового пошуку на основі властивостей транспозицій суміжності при розв'язанні задач розмірності  $n > 30$  дозволяє отримати деяке наближене рішення, в той час як використання методу гілок та меж для розв'язання допоміжної задачі при наявних обчислювальних потужностях не дає змоги отримати розв'язання задач такої розмірності.

У підпункті 5.4 наведено приклад роботи алгоритму генерації циклічних перестановок з використанням транспозицій спеціального виду.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено моделі та методи комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках: вивчено властивості циклічних перестановок, розвинуто та запропоновано методи розв'язання задач оптимізації на циклічних перестановках, серед яких задачі транспортної маршрутизації.

1. Проведено аналіз публікацій, присвячених розв'язанню задач комбінаторної оптимізації на множині перестановок та її підмножинах, зокрема, на множині циклічних перестановок. На підставі аналізу зроблено такі висновки:

- розвиток моделей і методів комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок, є актуальною задачею;
- використання властивостей циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір дозволить підвищити ефективність методів комбінаторної оптимізації та генерації для задач на циклічних перестановках;
- використання властивостей циклічних перестановок при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації за допомогою теорії циклічних трансферів дозволить розширити клас розв'язуваних задач, зокрема, на задачі транспортної маршрутизації.

2. Побудовано математичні моделі задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок при наявності та за відсутності додаткових обмежень.

3. Здійснено відображення множини циклічних перестановок в евклідов простір та виділено множину відповідних вершин перестановочного багатогранника. Продовжено дослідження спеціального класу транспозицій для перестановок, що відповідають суміжним вершинам перестановочного

багатогранника (транспозицій суміжності). Отримано нові властивості транспозицій суміжності та їх композицій, як бієктивних відображень.

4. Досліджено властивості циклічної структури перестановок: запропоновано класифікацію циклічних перестановок в залежності від послідовності елементів у циклі; застосовано транспозиції суміжності та їх суперпозиції до довільних та циклічних перестановок, завдяки чому досліджено циклічну структуру суміжних вершин перестановочного багатогранника. Запропоновано використання транспозицій суміжності для генерації перестановок з різною циклічною структурою. Оцінено кількість згенерованих перестановок в залежності від виду композиції транспозицій суміжності.

5. Запропоновано методи розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок, зокрема, з додатковими лінійними обмеженнями, які базуються на досліджених властивостях транспозицій суміжності. Розроблено підходи на основі комбінацій методу гілок та меж, евристики, випадкового пошуку, в тому числі, із використанням транспозицій суміжності.

6. Розроблено модифікацію методу комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості за допомогою множини циклічних перестановок, у випадках, коли побудова допоміжного графу неможлива. Розроблену модифікацію застосовано для покращення розв'язків задач транспортної маршрутизації, отриманих за допомогою евристики, зокрема, задачі вивозу і доставки (Pickup and Delivery Problem).

7. Для розв'язання задач, досліджених в роботі, розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані моделі та методи комбінаторної оптимізації та здійснено обчислювальні експерименти.

8. Аналіз результатів обчислювальних експериментів з оптимізації лінійних функцій без додаткових обмежень на множині циклічних

перестановок показали що евристичний підхід в комплексі з методом гілок та меж дозволяє збільшити розмірність розв’язуваних задач.

Застосування методу оптимізації за допомогою транспозицій суміжності, завдяки дослідженням властивостей транспозицій суміжності, проведених в роботі, дозволяє в більшості випадків отримати наближений розв’язок задачі, що збігається з точним.

Розроблені методи розв’язання задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках дозволяє, в залежності від особливостей задачі, обирати оптимальний баланс між точністю розв’язку, використанням обчислювальних можливостей та часом роботи алгоритму при розв’язанні більш складних задач комбінаторної оптимізації, в рамках яких знаходження мінімуму лінійної функції є лише допоміжною задачею що розв’язується багато разів.

Альтернативна стратегія формування циклічних трансферів від’ємної вартості, заснована на властивостях множини циклічних перестановок, дозволила покращити розв’язки задачі One-to-One Pickup and Delivery Problem з 3D обмеженнями на завантаження на 5-9%.

9. Практичне значення результатів роботи підтверджується їх впровадженням в держбюджетні наукові дослідження, у виробництво та в навчальний процес Харківського національного університету радіоелектроніки, про що свідчать відповідні акти.

10. Можливі напрями продовження досліджень за тематикою дисертації:

- пошук альтернативних евристик та застосування альтернативних правил розгалуження дерева і побудови оцінок в комбінації методу гілок та меж з евристикою, що мають меншу обчислювальну складність порівняно із запропонованими у даній роботі;
- використання властивостей транспозицій суміжності для подальшого дослідження циклічної структури перестановок та

використання їх для розробки нових методів розв’язання задач оптимізації на перестановках із заданою циклічною структурою;

- створення більш ефективних методів розв’язання різних задач комбінаторної оптимізації, ґрунтуючись на застосуванні альтернативної стратегії формування циклічних трансферів від’ємної вартості, за допомогою властивостей множини циклічних перестановок.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта*. 2012. №2 (79). С. 8–12.
2. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов. *Бионика интеллекта*. 2014. №1 (82). С. 7–11.
3. Grebennik I.V., Chorna O.S. Influence of Certain Transpositions on the Cyclic Structure of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. № 6(51). P. 947–955. (Scopus)
4. Grebennik I.V., Chorna O.S. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2015. № 3(4). P. 33–38.
5. Grebennik I.V., Baranov A.V., Chorna O.S., Gorbacheva E.E. Optimization of linear functions on a cyclic permutation based on the random search *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2016. №3(5). P. 211–216.
6. Grebennik I.V., Chorna O.S. Special transpositions of permutation elements and properties of their composition *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 1(53). P. 67–77. (Scopus)
7. Гребеннік І.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2018. №3(49). С. 67-72.
8. Гребеннік І.В., Чорна О.С. Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів. *Біоніка інтелекту*. 2019. №2 (93). С. 28–34.
9. Dupas R., Grebennik I., Litvinchev I., Romanova T., Chorna O. Solution strategy for one-to-one pickup and delivery problem using the cyclic

transfer approach. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. №20 (27). P. 1–9. (Scopus)

10. Гребенник І.В., Тітова О.С. Розв'язання задачі мінімізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. *Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ: тези доповідей 14-ої всеукраїнської 9-ої міжнародної конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 5-6 травня 2011. С. 246–248.

11. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S., Titova O.S. Optimization of linear functions on cyclic permutations. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 20-ой международной конференции*. Брно, Чехия. 17-21 сентября 2012. С. 43-44.

12. Гребенник И.В., Титова О.С. Свойства смежности циклических перестановок, отображенных в евклидово пространство. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 22-ой международной конференции*. Ялта-Форос. 23-27 сентября 2013. С. 66.

13. Гребенник И.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезиси докладов 18-ого международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 14-16 апреля 2014. Т. 6. С. 333–334.

14. Grebennik I., Chorna O. Special transposition of the elements of permutations and properties of their composition. *4th International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE – 2014): тезиси докладов 4-ой международной конференции*. 24-25 вересня 2014. С. 178-187.

15. Гребенник И.В., Черная О.С. Влияние специальных классов транспозиций на элементы множества перестановок. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 25-ой международной конференции*. Схидныця. 11-15 травня 2015. С. 83.



16. Гребенник И.В., Черная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)*: тези доповідей 21-ої всеукраїнської наукової конференції. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 24-25 вересня 2015. С. 132–133.

17. Титов С.В., Черная О.С. Использование платформы FlyElephant для оптимизации линейных функций на циклических перестановках. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 318–321.

18. Гребенник И. В., Черная О. С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 256–259.

19. Черная О.С., Горбачева Е.Е. Оптимизация линейных функций на множестве циклических перестановок с линейными ограничениями. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів. Харків. Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного. 21-24 листопада 2016. С. 35.

20. Гребенник И.В., Черная О.С. Оптимізація маршрутів задачі PDP за допомогою циклічних трансферів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ: Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2019. С. 153–155.

21. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. *Київ: Наукова думка*. 2003. С. 262.

22. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. *Київ: Наукова думка*. 1988. С. 472.
23. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. *Київ: Наукова думка*. 1981. С. 288.
24. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З. Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложений. *Кибернетика*. 1981. № 4. С. 89-113.
25. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. *Москва: Наука*. 1986. С. 264.
26. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. *Київ: Наукова думка*. 1986. С. 268.
27. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. *Київ.: Інститут систем. досліджень освіти*. 1993. С. 188.
28. Журавлев Ю.И., Финкельштейн Ю.Ю. Сфера применения методов дискретного программирования. Применение исследования операций в экономике. *Москва: Экономика*. 1977. С. 26–69.
29. Леонтьев В.К. Дискретные экстремальные задачи. *Итоги науки и техники*. 1979. № 16. С. 38–101.
30. Корбут А.А., Сигал И.Х., Филькенштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений. *Math. Operationsforsch und Statist., Ser. Optimiz.* 1977. № 2(8). С. 253–280.
31. Bona M. Handbook of Enumerative Combinatorics. *CRC Press*. 2015. P. 1086.
32. Bona M. Combinatorics of Permutations. *CRC Press*. 2004. P. 383.
33. Bona M. A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory. *World Scientific*. 2011. P. 546.

34. Bergeron F., Labelle G., Leroux P. Combinatorial species and tree-like structures. *Cambridge University Press*. № 67. 1998. P. 480.
35. Bergeron F., Flajolet P., Salvy B. Varieties of increasing trees. *Springer Berlin Heidelberg, Colloquium on Trees in Algebra and Programming*. 1992. P. 24–48.
36. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. *CUP, Cambridge*. 2009. P. 810.
37. Stanley R.P. Enumerative combinatorics. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. № 49. 2011. P. 642.
38. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. *Москва: Наука*. 1981. С. 344.
39. Sergienko I.V., Hulianytskyi L.F., Sirenko S.I. Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. № 5(45). P. 732–741.
40. Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Определение и исследование комбинаторных пространств. *Теорія оптимальних рішень*. 2010. № 9. С. 17–24.
41. Sergienko, I.V., Shylo, V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. № 48(1). С. 15-24.
42. Липский В. Комбинаторика для программистов. *Москва: Мир*. 1988. С. 214.
43. Шилов В.П., Рощин В.О., Градинар И.П. Наближений алгоритм розв'язання задачі упаковки. *Компьютерная математика: сборник научных трудов*. 2013. №. 1. С. 110–116.
44. Kreher D.L., Stinson D.R., Combinatorial Algorithms: Generation Enumeration and Search. *CRC Press*. 1999. P. 329.
45. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Конфигурационное пространство геометрических объектов. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 5(54). С. 38–50.

46. Stoyan Yu., Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A. Optimized Packings in Space Engineering Applications: Part II. *Springer Optimization and its Applications*. 2019. P. 439–457.
47. Гребенник И.В., Коваленко А.А., Романова Т.Е., Урняева И.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. №2(54). С. 55–67.
48. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. *Киев: Наукова думка*. 1976. С. 248.
49. Yakovlev S. V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 5(53). P. 725–731.
50. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P., Balance layout problems: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies*. 2016. № 114. P. 369–400.
51. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T., Cutting and packing problems for irregular objects with continuous rotations: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Journal of Operational Research Society*. 2016. № 5(167). P. 786–800.
52. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Optimized Packings with Applications*. 2015. № 105. P. 265–293.
53. Романова Т.Е. Средства построения математических моделей оптимизационных задач размещения геометрических объектов и их применение. *Дис. д-ра техн. наук, 01.05.02, Харьков*. 2003. С. 324.
54. Гребенник И.В. Математические модели и методы комбинаторной оптимизации в геометрическом проектировании. *Дис. д-ра техн. наук, 01.05.02, Харьков*. 2006. С. 321.

55. Angel E., Thang N.K., Regnault D. Improved local search for universal facility location. *Journal of Combinatorial Optimization*. 2015. № 29. P. 237–246.
56. Klose A., Drexl A. Facility location models for distribution system design. *European Journal of Operational Research*. 2005. № 162(1). P. 4–29.
57. Julstrom B.A. A permutation coding with heuristics for the uncapacitated facility location problem. *Recent Advances in Evolutionary Computation for Combinatorial Optimization*. 2008. № 153. P. 295–301.
58. Гуляницький Л.Ф., Турінський В.В. Застосування метаевристичних алгоритмів для розв’язання одного класу задач розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці. *System Analysis and Information Technologies: тези доповідей 15-ої міжнародної конференції*. 2013. С. 262.
59. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5(46). С. 122–131.
60. Баранов А.В., Грицай Д.В., Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М. Размещение прямоугольных графических элементов в полиграфическом производстве. *Бионика интеллекта*. 2010. № 1(72). С. 29–32.
61. Гребенник И.В., Баранов А.В. Математическое моделирование и решение некоторых многокритериальных задач размещения параллелепипедов. *Сборник научных трудов ХУВС*. 2010. № 2(24). С. 49–55.
62. Grebennik I., Grytsay D., Misheryakov I., Basto-Fernandes V., Yevseyeva I. A multicriteria model for solving a real cutting layout problem in publishing industry. *Book of Industry papers, poster papers and abstracts of International Conference on Project MANagement*. 2015. P. 178–188.
63. Шило П.В. Повторяемый итерированный алгоритм табу для решения квадратичной задачи о назначениях. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 2(53). С. 163–167.

64. Гуляницький Л.Ф., Гобов Д.А. Использование Н-метода для решения задач комбинаторной оптимизации на перестановках. *System Research & Information Technologies*. 2007. № 2. С. 74-86
65. James T., Rego C., Glover F. A cooperative parallel tabu search algorithm for the quadratic assignment problem *European Journal of Operational Research*. 2009. № 3(195).P. 810–826.
66. Yagiura M., Yamaguchi T., Ibaraki T., A variable-depth search algorithm for the generalized assignment problem. *Metaheuristics: advances and trends in local search paradigms for optimization*. 1999. P. 459–471.
67. Yagiura M., Ibaraki T., Glover F.W. An ejection chain approach for the generalized assignment problem. *INFORMS Journal on Computing*. 2004. № 2(16). P. 133–151.
68. Rego C., James T.L., Glover F.W. An ejection chain algorithm for the quadratic assignment problem. *Networks*. 2010. № 3(56). P. 188–206.
69. Меламед, И.И.. Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории. *Автоматика и телемеханика*. 1989. № 9. С. 3–34.
70. Меламед, И.И.. Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы. *Автоматика и телемеханика*. 1989. № 10. С. 3–29.
71. Меламед, И.И.. Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы. *Автоматика и телемеханика*. 1989. № 11. С. 3–26.
72. Little J. D. C., Murly K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operation Reserch*. 1963. № 6(11). P. 972–989.
73. Bellman R. Dynamic programming treatment of traveling salesman problem. *J. Assoc. Comput. Math.* 1962. №1(9). P. 61–63.
74. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення. *Полтава: ПУЕТ*. 2011. С. 174.

75. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач. *Радиоелектроника и информатика*. 2006. №2. С. 39–41.
76. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Транспортні задачі комбінаторного типу. *Вестник Харьковського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2005. № 29. С. 162–164
77. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Оцінювання допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на перестановках, що розв'язується методом гілок і меж. *Research Bulletin of NTUU" Kyiv Polytechnic Institute"*. 2010. №1. С. 21–28.
78. Ємець О.О., Парфьонова Т.О., Ємець Є.М., Ольховський Д.М. Транспортні задачі на переставленнях та їх розв'язування другим методом комбінаторного відсікання. *Економіка: проблеми теорії та практики. Зб. наук. праць*. 2010. № 6(264). С. 1449–1457.
79. Pisinger D., Ropke S. A general heuristic for vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*. 2007. № 8(34). P. 2403–2435.
80. Renaud J., Boctor F.F., Ouenniche J. A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*. 2000. № 27. P. 905–916.
81. Ropke S., Cordeau J.-F. Branch-and-Cut-and-Price for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. *Transportation Science*. 2008. № 43(3). P. 267–286
82. Côté J.-F., Gendreau M., Potvin J.-Y. Large Neighborhood Search for the Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem with Multiple Stacks. *Wiley Periodicals, Inc. NETWORKS*. 2012. Vol. 60(1). P. 19-30.
83. Erdoğan G., Cordeau J.-F., Laporte G. The pickup and delivery traveling salesman problem with first-in-first-out loading. *Computers & Operations Research*. 2009. № 36. P. 1800-1808.
84. Malapert A., Guerét C., Jussien N., Langevin A., Rousseau L.-M. Two-dimensional pickup and delivery routing problem with loading constraints. *In*

*Proceedings of the First CPAIOR Workshop on Bin Packing and Placement Constraints (BPPC'08)*. Paris, France. 2008.

85. Zachariadis E.E., Tarantilis C.D., Kiranoudis C.T. The pallet-packing vehicle routing problem. *Transportation Science*. 2012. № 46. P. 341–358.

86. Fuellerer G., Doerner K.F., Hartl R.F., Iori M. Metaheuristics for vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*. 2010. № 201. P. 751–759.

87. Панишев А.В., Плечистый Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. *Житомир: ЖГТУ*. 2006. С. 300.

88. Панишев А.В., Морозов А.В. Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети. *Житомир: ЖДТУ*. 2014. С. 316.

89. Garashchenko I., Panishev A. Method of finding hamilton routes in transport network. *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2008. P. 43–48.

90. А.В. Морозов, А.В. Панишев Вершинно-рёберное преобразование в гамильтоновой задаче о сельском почтальоне. *Штучний інтелект*. 2009. № 4. С. 137–143.

91. Гуляницький Л.Ф., Павленко А.І. Динамічна задача пошуку найкоротшого шляху з додатковими умовами для задачі побудови маршруту авіаперельотів. *Математичне моделювання в економіці*. 2015. № 2 (3). С. 39–50.

92. Гуляницький Л.Ф. Проблема оптимизации маршрутов транспортных средств с временными окнами. *Компьютерная математика*. 2007. № 1. С. 122–132.

93. Toth P., Vigo D. Vehicle routing: problems, methods, and applications. Second Edition. *MOS-SIAM Series on Optimization*. 2014. №18. P. 463.

94. Thompson P.M., Psaraftis H.N. Cyclic transfer algorithms for multivehicle routing and scheduling problems. *European Journal of Operational Research*. № 41(5). 1993. P. 935–946.



95. Glover F. Ejection chains, reference structures, and alternating path algorithms for the traveling salesman problem. *Discrete Applied Mathematics*. 1996. № 65(1–3). P. 223–253.
96. Rego C. Relaxed tours and path ejections for the traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research*. 1998. № 106. P. 522–538.
97. Zachariasen M., Dam M. Tabu search on the geometric traveling salesman problem. *Meta-Heuristics: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers*. 1996. P. 571–587.
98. Johnson D.S., McGeoch L.A. The travelling salesman problem: a case study in local optimization. *Local Search in Combinatorial Optimization*. 1997. P. 215–310.
99. Mak K., Morton A. A modified Lin–Kernighan traveling salesman heuristic. *Operations Research Letters*. 1993. № 13(3). P. 127–132.
100. Pesch E., Glover F. TSP ejection chains. *Discrete Applied Mathematics*. 1997. № 76. P. 165–181.
101. Rego C., Roucairol C. A parallel tabu search algorithm using ejection chains for the vehicle routing problem. *Meta-Heuristics: Theory and Applications*. 1996. P. 661–675.
102. Rego C., A subpath ejection method for the vehicle routing problem, *Management Science*. 1998. № 44(10). P. 1447–1459.
103. Post G., Ahmadi S., Geertsema F. Cyclic transfers in school timetabling. *OR Spectrum*. 2012. № 1(34). P. 133–154.
104. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. *Москва: Дрофа*. 2011. С. 144.
105. Куцелап К.А., Вороненко В.П., Шалдов А.Э. Составление производственного расписания с использованием алгоритма направленного случайного поиска. *Известия ТулГУ. Технические науки*. 2015. № 12(1). С. 14–22.
106. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. *Москва: Мир*. 1982. С. 416.

107. Blazewicz J., Ecker K.H., Pesch E., Schmidt G., Weglarz J. Handbook on scheduling: from theory to application. *Springer*. 2019. P. 833.
108. Brucker P., Qu R., Burke E.K. Personnel scheduling: Models and complexity. *European Journal of Operational Research*. 2011. № 210(3). P. 467–473.
109. Lewis R. A survey of metaheuristics-based techniques for university timetabling. *OR Spectrum*. 2008. № 30(1). P. 167–190.
110. Januario T., Urrutia S., D. de Werra Sports scheduling search space connectivity: A riffle shuffle driven approach. *Discrete Applied Mathematics*. 2016. № 211. P. 113–120.
111. Pour S.M., Drake J.H., Burke E.K. A choice function hyper-heuristic framework for the allocation of maintenance tasks in Danish railway. *Computers & Operations Research*. 2018. № 93. P. 15–26.
112. Сипко Е.Н. Метод последовательного анализа вариантов решения задачи составления расписания занятий. *Искусственный интеллект*. 2011. № 1. С. 243–250.
113. Charalambides Ch.A. Enumerative combinatorics. *Chapman and Hall/CRC*. 2002. P. 632.
114. Berge C. Principes de combinatoire. *Paris: Dunod*. 1968. P. 146.
115. Papadimitriou C.H., Steiglitz K., Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. *Prentice-Hall*. 1982. P. 528.
116. Семенец В.В., Гребенник И.В., Листровой С.В., Минухин С.В., Овезгельдыев А.О. Модели и методы комбинаторной оптимизации в проектировании и управлении. *Киев: Наукова думка*. 2019. С. 176.
117. Stoyan Y.G., Grebennik I.V., Kalashnikov V.V., Lytvynenko O.S. Enumeration and generation of permutations with a partially fixed order of elements. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*. 2017. № 8(1). P.19–30.
118. Яковлев С.В., Пичугина О.С. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно

расположенных множествах. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2017. № 15. С. 152–158.

119. Яковлев С.В., Пичугина О.С. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2016. № 1(4). С. 27–38.

120. Яковлев С. В., Валуйская О. А. Оптимизация линейных функций на вершинах перестановочного многогранника с дополнительными линейными ограничениями. *Укр. мат. журн.* 2001. № 53(9). С. 1272–1280.

121. Гребенник И.В. Описание и генерация перестановок, содержащих циклы. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 6. С. 97–105.

122. Гребенник И.В., Литвиненко А.С. Генерация перестановок с частично определенным порядком следования элементов. *Бионика интеллекта*. 2017. № 2 (89). С. 26–30.

123. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ*. № 3. 2008. С. 158–172.

124. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка. 2009. С. 262.

125. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок. *Доповіді Національної академії наук України*. №2. 2009. С. 41–48.

126. Гуляницкий Л.Ф., Ходзинский А.Н. Два алгоритма решения задач оптимизации на перестановках. *Эффективная организация вычислений и численные методы*. 1983. С. 9-17.

127. Шило В. П., Коренкевич Д. Є., Ляшко В. І. Про оптимізаційну задачу на перестановках. *Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки*. 2008. № 86. С.21–24.

128. Butenko S., Pardalos P., Shylo V. Optimization Methods and Applications. *Springer Optimization and Its Applications*. Springer. 2017. № 130. P. 639.

129. Исаченко Я.А. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках. *Современные компьютерные информационные технологии*. 2008. № 2. С. 203–206.

130. Исаченко, А.Н., Исаченко, Я.А. Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках. *Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции*. 2011. С. 187-190.

131. Исаченко, А.Н., Исаченко, Я.А. Наследование гиперграней в задачах на перестановках. *International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies*. 2011. С. 279–282.

132. Kitaev S. Patterns in Permutations and Words. *Springer Science & Business Media*. 2011. P. 494.

133. Mendesa A., Remmel J. Permutations and words counted by consecutive patterns. *Advances in Applied Mathematics*. 2006. № 4(37). P. 443–480.

134. Linton S., Ruškuc N., Vatter V. Permutation Patterns. *Cambridge University Press*. 2010. P. 352.

135. Stoyan Y.G., Grebennik I.V. Description and Generation of Combinatorial Sets Having Special Characteristics. *International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences, Special Volume “Bilevel Programming, Optimization Methods, and Applications to Economics”*. 2013. №1(18). P. 83–88.

136. Bona M., Cory M. Cyclic permutations avoiding pairs of patterns of length three. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*. 2019. № 2(21).

137. Гребенник И.В., Литвиненко А.С. Генерация комбинаторных множеств с заданными свойствами. Кибернетика и системный анализ. 2012. № 6. С. 106–113.
138. Elizalde S. Descent sets of cyclic permutations. *Advances in Applied Mathematics*. 2011. № 4(47). P. 688–709.
139. Stoyan Y.G., Scheithauer G., Romanova T.  $\Phi$ -functions for primary 2D-objects. *Studia Informatica Universalis, Int. J. Informatics*. 2002. № 2. P.1–32.
140. Литвиненко О.С. Методи генерації комбінаторних конфігурацій та їх застосування в математичному і комп'ютерному моделюванні задач перевезення та обробки вантажів. Дис. канд. техн. наук, 01.05.02, Харків, 2018. С. 186.
141. Kozin I.V., Maksyshko N.K., Perepelitsa V.A. Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 6(53). P. 931–936.
142. Erdelić T., Carić T. A Survey on the Electric Vehicle Routing Problem: Variants and Solution Approaches. *Journal of Advanced Transportation*. 2019, P. 1–48.
143. Akhand M.A., Peya Z.J., Murase K. Capacitated Vehicle Routing Problem Solving using Adaptive Sweep and Velocity Tentative PSO. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2017. № 8(12). P. 288–295.
144. Nalepa J. Smart delivery systems solving complex vehicle routing problems. Elsevier. 2019. P. 290.
145. Golden B., Raghavan S., Wasil E. The Vehicle Routing Problem Latest Advances and New Challenges. Springer Science Business Media. 2008. № 43. P. 560.
146. Pillac V., Gendreau M., Guéret C. A review of dynamic vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*. 2013. № 225. P. 1–11.

147. Kumar, S. N., Panneerselvam, R. A Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants. *Intelligent Information Management*. 2012. № 4(3). P. 66–74.
148. Iori M., Martello S. Routing problems with loading constraints. *Top*. 2010. № 18(1). P. 4–27.
149. Pollaris, H., Braekers, K., Caris, A., Janssens, G. K., Limbourg, S. Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. *OR Spectrum*. 2014. № 37(2). P. 297– 330.
150. Parragh, S. N., Doerner, K. F., & Hartl, R. F. A survey on pickup and delivery problems. *Journal Für Betriebswirtschaft*. 2008. № 58(1). P. 21–51.
151. Berbeglia, G., Cordeau, J.-F., Gribkovskaia, I., Laporte, G. Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey. *Top*. 2007. № 15(1). P. 1–31.
152. Cordeau, J.-F., Laporte, G., Ropke, S. Recent Models and Algorithms for One-to-One Pickup and Delivery Problems. *Operations Research. Computer Science Interfaces The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*. 2008. P. 327–357.
153. Savelsbergh, M. W. P., Sol M. The General Pickup and Delivery Problem. *Transportation Science*. 1995. № 29(1). P. 17–29.
154. Ropke, S., Cordeau, J.-F., Laporte, G. Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. *Networks*. 2007. № 49(4). P. 258–272.
155. Sakakibara, K., H. Tamaki and I. Nishikawa. Autonomous distributed approaches for pickup and delivery problems with time windows. *SICE Annual Conference*. 2007. P 2639-2642.
156. Dupas R., Grebennik I., Lytvynenko O., Baranov O. An heuristic approach to solving the one-to-one pickup and delivery problem with three-dimensional loading constraints. *International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS)*. 2017. № 10(9). P.1-12.

157. Nanry W.P., Barnes J.W. Solving the pickup and delivery problem with time windows using reactive tabu search. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2000. № 34(2). P. 107–121.
158. Li H., Lim A. A Metaheuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. *International Journal on Artificial Intelligence Tools*. 2003. № 12(02). P. 173–186.
159. Lim H., Lim A., Rodrigues B. Solving the pickup and delivery problem with time windows using "Squeaky Wheel" optimization with local search. *American Conference on Information Systems AMCIS*. 2002. P. 2335–2344
160. Pankratz G. A Grouping Genetic Algorithm for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. *OR Spectrum*. 2005. № 27(1). P. 21–41.
161. Lu Q., Dessouky M.M. A new insertion-based construction heuristic for solving the pickup and delivery problem with time windows. *European Journal of Operational Research*. 2006. № 175(2). P. 672–687.
162. Bent R., Hentenryck P.V. A two-stage hybrid algorithm for pickup and delivery vehicle routing problems with time windows. *Computers & Operations Research*. 2006. № 33(4). P. 875–893.
163. Ropke S., Pisinger D. An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*. 2006. № 40(4). P. 455–472.
164. Nagata Y., Kobayashi Maru S. A memetic algorithm for the pickup and delivery problem with time windows using selective route exchange crossover. *Parallel Problem Solving from Nature, PPSN XI. PPSN 2010. Lecture Notes in Computer Science*. 2010. № 6238. P. 536–545.
165. Thompson P.M., Orlin J.B. The theory of cyclic transfers. *Massachusetts Institute of Technology, Operations Research Center*. 1989.
166. Sachkov V.N. Combinatorial Methods in Discrete Mathematics in Encyclopedia of Mathematics and its Applications (Book 55). *Cambridge University Press*. 2011. C. 322.

167. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. *Харьков: Константа*. 2017. С. 404.
168. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації: сучасний стан і перспективи. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. №3(56). С. 17–29.
169. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства. *Пробл. машиностроения*. 2005. № 3(8). С. 56–62.
170. Яковлев С.В., Пичугина О.С. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. № 17. С. 278–263.
171. Гребенник И.В. Свойства классов композиционных образов комбинаторных множеств, отображенных в евклидово пространство. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. № 1. С. 66–70.
172. Гребенник И.В. Экстремальные свойства функций на композиционных образах комбинаторных множеств. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. № 2. С. 36–44.
173. Гребенник И.В. Классы композиционных образов комбинаторных множеств в математических моделях задач геометрического проектирования. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. № 3. С. 69–73.
174. Семенова Н.В. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению. *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2008. С. 187–195.
175. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н. Многокритериальные задачи комбинаторной оптимизации на множестве полиразмещений: полиэдральный подход к решению. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 3(45). С. 118–126.
176. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. *Киев: Наукова думка*. 2008. С. 159.



177. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. *Полтава: РВЦ ПУСКУ*. 2005. С. 103.

178. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах. *Изв. вузов. Математика*. 1991. №11. С. 74–86.

179. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Поліедральний підхід до розв'язання одного класу векторних задач комбінаторної оптимізації. *Доповіді Національної академії наук України*. 2009. №6. С. 46–53.

180. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений. *Доповіді НАН України*. 2008. №10. С. 28–31.

181. Емец О.А., Емец А.О., Поляков И.М. Критерий ребра общего многогранника размещений. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 5(54). С. 128–138.

182. Яковлев С.В., Пичугина О.С. Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально сферических комбинаторных множествах. *Радиоэлектроника и информатика*. 2016. № 1. С. 18–26.

183. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике. *Доклады АН УССР*. 1988. Сер. А. С. 238–240

184. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации. *Доклады НАН Украины*. 2017. № 8. С. 20–26

185. Яковлев С.В., Валуйская О.А., Пичугина О.С. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения *Радиоэлектроника и информатика*. 2002. № 2 (15). С. 121–129

186. Гребенник И.В., Лапко Д.А. Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах. *Радиоэлектроника и информатика*. 2002. № 1. С. 109–113.

187. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М., Нагірна А.М. Багатокритеріальні задачі лексикографічної оптимізації на нечіткій множині альтернатив. *Доповіді НАН України*. 2010.
188. Гуляницький Л.Ф., Гложик Ю.С. Параллельный метод деформируемых многогранников для решения задач комбинаторной оптимизации. *Искусственный интеллект*. 2005. № 4. С.130–139.
189. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. *Київський університет: Київ*. 2016. С. 142.
190. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства. *Полт. инж.-строит. ин-т. Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.83, №616 - УкД83*. 1983. С.20.
191. Емец О.А., Емец А.О., Поляков И.М. Новое представление граней общего перестановочного многогранника. *Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю. Полтава: ПУЕТ*. 2016.
192. Bowman, V. J. Permutation Polyhedra. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1972. № 4(22). P. 580–589.
193. Donets G.P., Koliechkina L.M., Nahirna A.M. A Method to Solve Conditional Optimization Problems with Quadratic Objective Functions on the Set of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. № 6(56). P. 278–288.
194. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Локализация значений линейной функции, заданной на перестановках. *Радиоэлектроника и информатика*. 2009. №1. С. 34–38.
195. Донець Г.П., Нагірна А.М. Метод оптимізації лінійної функції на перестановках. *Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр.* 2018. № 17. С. 138–144.
196. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 1. С. 10 – 16.

197. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 2. С. 50 – 61.
198. Dantzig G.B., Ramser J.H. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*. 1959. № 1(6). P. 80–91.
199. Sergeev, S.I. Approximate algorithms for the traveling salesman problem. *Automation and Remote Control*. 2015. № 76. P. 472–479.
200. Nievergelt Y Ciphers, Combinatorics, and Probabilities. *Foundations of Logic and Mathematics*. 2002. P. 303–359.
201. Goots N., Izotov B., Moldovyan A., Moldovyan N. Modern Cryptography Protect your data with fast block CIPHERS. *БХВ-Петербург*. 2003. P. 400.
202. Bernstein D.J. et al. Gimli : A Cross-Platform Permutation. *Cryptographic Hardware and Embedded Systems. Lecture Notes in Computer Science*. 2017. № 10529. P. 299–320.
203. Gravel C., Panario D., Thomson D. Unicyclic strong permutations. *Cryptography and Communications*. 2019. № 6(11). P. 1211–1231.
204. Mischenko-Slatenkova T., Vasilieva A., Kucevalovs I., Freivalds R. Quantum Queries on Permutations. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015. № 9118.
205. Isdrailă T., Kusko C., Ionicioiu R. Cyclic permutations for qudits in d dimensions. *Scientific Reports* 9. 2019. № 6337.
206. Yalçinkaya İ., Gedik Z. Optimization and experimental realization of the quantum permutation algorithm. *PHYSICAL REVIEW*. 2017. № 96(6).
207. Zhang S., Li P., Wang B., Zeng Q., Zhang X. Implementation of quantum permutation algorithm with classical light. *Journal of Physics Communications*. 2019. № 1(3).
208. Feng X., Chitturi B., Sudborough H. Sorting Circular Permutations by Bounded Transpositions. *Advances in Experimental Medicine and Biology*. 2010. № 680. P. 725–736.

209. Oliveira, A.R., Fertin, G., Dias, U. et al. Sorting signed circular permutations by super short operations. *Algorithms for Molecular Biology*. 2018. № 13.
210. Bafna V., Pevzner P.A. Genome rearrangements and sorting by reversals. *SIAM Journal on Computing*. 1996. № 2(25) P. 272–289.
211. Bafna V., Pevzner P.A. Sorting by transpositions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 1998. № 2(11). P. 224–240.
212. Pevzner P.A., Sze S.H. Combinatorial approaches to finding subtle signals in DNA sequences. *International Conference on Intelligent Systems for Molecular Biology*. 2000. № 8. P. 269–278.
213. Alekseyev M.A., Pevzner P.A. Multi-break rearrangements and chromosomal evolution. *Theoretical Computer Science*. 2008. № 395(2-3). P. 193–202.
214. Listrovoy S., Minukhin S., Listrovaya E. Monitoring distributed computing systems on the basis of the determined shortest paths and shortest hamiltonian cycles in a graph. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2015. 6(4). P. 32-45
215. Kitaev A.Yu., Shen A.H., Vyalyi M.N., Classical and quantum computation. *American Mathematical Society*. 2002. P. 257.
216. Elizalde S., Troyka J.M. Exact and asymptotic enumeration of cyclic permutations according to descent set. *Journal of Combinatorial Theory*. 2019. № 165(A). P. 360–391.
217. Овчинников В.А. Систематизация точных методов дискретной оптимизации. *Машиностроение и компьютерные технологии*. 2015. № 6. С. 288–304.
218. Посыпкин М.А., Сигал И.Х., Галимьянова Н.Н. Алгоритмы параллельных вычислений для решения некоторых классов задач дискретной оптимизации. *М.: ВЦ РАН*. 2005.
219. Посыпкин М.А. Архитектура и программная реализация библиотеки для решения задач оптимизации методом ветвей и границ на

многопроцессорных вычислительных комплексах. Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические методы и оптимизация. *ИСА РАН. М.: КомКнига/URSS*. 2006. С. 18–25.

220. Lamas P., Demeulemeester E. A purely proactive scheduling procedure for the resource-constrained project scheduling problem with stochastic activity durations. *Journal of Scheduling*. 2016. № 4(19). P. 409–428.

221. Nikooa N., Babaeib M., Mohaymany A.S. Emergency transportation network design problem: Identification and evaluation of disaster response routes. *International Journal of Disaster Risk Reduction*. 2018. № 27. P. 7–20.

222. Côté J.-F., Gendreau, M., Potvin, J.-Y. An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*. 2014. № 5(62). P. 1126–1141.

223. Zabinsky Z.B. Random search algorithms. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*. 2010.

224. Neumann F., Wegener, I. Randomized local search, evolutionary algorithms, and the minimum spanning tree problem. *Theoretical Computer Science*. 2007. № 1(378). P. 32–40.

225. Гребенник И.В., Баранов А.В. Оптимизация линейных функций с линейными ограничениями на комбинаторных множествах на основе случайного поиска. *Искусств. интеллект*. 2007. № 1. С. 132–137.

226. Ahuja R.K. et al. A survey of very large-scale neighborhood search techniques. *Discrete Applied Mathematics*. 2002. № 123. P. 75–102

227. Ahuja R.K., Orlin J.B., Sharma D. Multi-exchange neighborhood structures for the capacitated minimum spanning tree. *Mathematical Programming*. 2001. № 1(91). P. 71–97.

228. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике. *ДАН УССР*. 1988. №3(А). С.238–240.

229. Верещагин Н. К., Шень А. Часть 1. Начала теории множеств. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. М.: МЦНМО. 2002. С. 128.
230. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Лань. 2008. С. 432.
231. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука. 1975. С. 480
232. Nguen N., Kovalev M.M., Isachenko A. N. Linearization of combinatorial optimization problems. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*. 1978. № 1(22). P. 869–872
233. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: пер. с англ. – В. Я. Алтаева. М.: Мир. 1986. С. 348.
234. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука. 1968. С. 488.
235. Quinn M.J. Parallel Programming in C with MPI and OpenMP. NY: McGraw-Hill. 2004. P. 480.
236. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Zhuravel S. V. Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. № 50(3). P. 1–20.

## ДОДАТОК А

### СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта*. 2012. №2 (79). С. 8–12.
2. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов. *Бионика интеллекта*. 2014. №1 (82). С. 7–11.
3. Grebennik I.V., Chorna O.S. Influence of Certain Transpositions on the Cyclic Structure of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. № 6(51). P. 947–955.
4. Grebennik I.V., Chorna O.S. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2015. № 3(4). P. 33–38.
5. Grebennik I.V., Baranov A.V., Chorna O.S., Gorbacheva E.E. Optimization of linear functions on a cyclic permutation based on the random search *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2016. №3(5). P. 211–216.
6. Гребенник И.В., Чёрная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 1(53). P. 79–90.
7. Гребеннік І.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2018. №3(49). С. 67-72.
8. Гребеннік І.В., Чорна О.С. Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів. *Бионика интеллекта*. 2019. №2 (93). С. 28–34.
9. Dupas R., Grebennik I., Litvinchev I., Romanova T., Chorna O. Solution strategy for one-to-one pickup and delivery problem using the cyclic

transfer approach. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. №20 (27). P. 1–9.

10. Гребенник И.В., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезисы докладов 15-ого юбилейного международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 18-20 апреля 2011. Т. 1. С. 87–88.

11. Гребенник І.В., Тітова О.С. Розв'язання задачі мінімізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. *Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ: тези доповідей 14-ої всеукраїнської 9-ої міжнародної конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 5-6 травня 2011. С. 246–248.

12. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S., Titova O.S. Optimization of linear functions on cyclic permutations. *Problems of decision making under uncertainties: тезисы докладов 20-ой международной конференции*. Брно, Чехия. 17-21 сентября 2012. С. 43-44.

13. Гребенник И.В., Титова О.С. Свойства смежности циклических перестановок, отображенных в евклидово пространство. *Problems of decision making under uncertainties: тезисы докладов 22-ой международной конференции*. Ялта-Форос. 23-27 сентября 2013. С. 66.

14. Гребенник И.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезисы докладов 18-ого международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 14-16 апреля 2014. Т. 6. С. 333–334.

15. Гребенник И.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Контроль и управление в сложных системах: тезисы докладов 12-ой международной конференции*. 14-16 октября 2014. С.34.



16. Grebennik I., Chorna O. Special transposition of the elements of permutations and properties of their composition. *4th International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE – 2014)*: тезиси докладов 4-ой международной конференции. 24-25 вересня 2014. С. 178-187.

17. Гребенник И.В., Черная О.С. Влияние специальных классов транспозиций на элементы множества перестановок. *Problems of decision making under uncertainties*: тезиси докладов 25-ой международной конференции. Схидныця. 11-15 травня 2015. С. 89.

18. Гребенник И.В., Черная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)*: тези доповідей 21-ої всеукраїнської наукової конференції. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 24-25 вересня 2015. С. 132–133.

19. Гребенник И.В., Черная О.С. Оптимізація маршрутів задачі PDP за допомогою циклічних трансферів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ: Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2019. С. 153–155.

20. Grebennik I.V., Chernaya O.S., Urniaieva I.A., Sereda Y.V. Special transpositions of elements of permutations, their properties and application in vehicle routing problems. *Problems of decision making under uncertainties*: тезиси докладов международной конференции. Брно, Чехия. 25-30 серпня 2016. С. 55.

**ДОДАТОК Б**  
**АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ**



В.Т. Завгородній

«06» травня 2020 р.

## АКТ

**про використання результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Чорної Ольги Сергіївни**

Комісія у складі голови комісії директора Приватного підприємства «Латона» Завгороднього В.Т., членів комісії заст. директора Завгородньої О.М. та адміністратора Жили О.О. склала даний акт про використання результатів дисертаційної роботи, виконаної Чорною Ольгою Сергіївною.

Методи, алгоритми та програмне забезпечення, запропоновані Чорною О.С., використовуються в ПП «ЛАТОНА» в програмному забезпеченні для розв'язання задач, пов'язаних з перевезенням вантажів, зокрема задачі вивозу та доставки вантажів (PickupandDeliveryProblem).

Програмне забезпечення, розроблене Чорною О.С., має дружній інтерфейс та є досить гнучким, що дозволяє використовувати його для рішення зазначених класів задач як у ситуаціях, коли найбільш важливою вимогою є швидкість отримання розв'язку, так і у ситуаціях, коли першим пріоритетом є його точність.

Голова комісії: Завгородній В.Т. Члени комісії: Завгородня О.М. Жила О.О. 



**АКТ**  
**про використання результатів дисертаційної роботи Чорної Ольги Сергіївни**  
**«Математичні моделі та методи оптимізації на циклічних перестановках і їх**  
**застосування»**

Ми, що нижче підписалися, начальник Навчального відділу ХНУРЕ Міхнова А.В., завідувач кафедри системотехніки професор Гребеннік І.В., професор кафедри системотехніки Іванов В.Г. склали цей акт про те, що результати кандидатської дисертаційної роботи Чорної Ольги Сергіївни, щодо математичного і комп'ютерного моделювання та методів розв'язання задач оптимізації на циклічних перестановках, впроваджені у навчальний процес на кафедрі системотехніки в дисципліні «Комбінаторні моделі і методи в проектуванні» (теми 2-3 модуля 3 робочої програми д.т.н., проф. І.В. Гребенніка), а також при підготовці атестаційних робіт. Комісія відзначає, що використання нових результатів в області комбінаторного моделювання забезпечує поглиблене вивчення перспективних напрямків комбінаторної оптимізації, а також знайомство студентів старших курсів з практичними аспектами застосування фундаментальних результатів при вирішенні прикладних та наукових задач.

Начальник навчального відділу

А.В. Міхнова

Завідувач кафедри системотехніки, проф. д.т.н.

І.В. Гребеннік

Професор кафедри системотехніки, к.т.н.

В.Г. Іванов

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
 Проректор з наукової роботи  
 Харківського національного  
 університету радіоелектроніки  
 М.В. Неофітний  
 «2» вересня 2020 р.

# АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи Чорної Ольги Сергіївни  
 «Математичні моделі та методи оптимізації на циклічних перестановках і їх  
 застосування» в НДР «Розробка методології і математичних моделей соціально-  
 економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку» (ДР №  
 0115U001522), що виконувалася відповідно до плану науково-дослідних робіт  
 Харківського національного університету радіоелектроніки

Комісія у складі:

**Голови:** завідувача кафедри системотехніки, наукового керівника ДР №  
 0115U001522 д.т.н, проф. Гребенніка І.В.,

**Членів комісії:** начальника наукового інформаційно-аналітичного відділу Хоменко  
 Н.Ю., доцента кафедри системотехніки Тітова С.В. встановила, що результати наукових  
 досліджень Чорної Ольги Сергіївни реалізовано у межах виконання держбюджетної  
 теми ДР № 0115U001522 Харківського національного університету радіоелектроніки.

В рамках робіт, що виконувались відповідно до плану НДР, автором проведено  
 дослідження властивостей циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір.  
 Дослідженні вершини, що відповідають циклічним перестановкам у перестановочному  
 багатограннику, введено клас спеціальних транспозицій суміжності перестановок різних  
 елементів, та запропонована класифікація циклічних перестановок. Запропоновані  
 модифікації існуючих методів для розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на  
 множині циклічних перестановок, зокрема, з додатковими лінійними обмеженнями, на  
 основі методів гілок та меж, випадкового пошуку, в тому числі, із використанням  
 транспозицій суміжності. Розроблені комбінаторні оптимізаційні методи дозволяють  
 підвищити ефективність рішення зазначених класів задач.

Завідувач кафедри системотехніки, проф. д.т.н.

І.В. Гребеннік

Начальник наукового  
 інформаційно-аналітичного відділу

Н.Ю. Хоменко

Доцент кафедри системотехніки, к.т.н.

С.В. Тітов