

Харківський національний університет радіоелектроніки
Міністерство освіти і науки України
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Морозова Анна Іванівна

УДК 517.95+518.517

ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ОБ'ЄКТІВ
АВІАЦІЙНОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ І МАШИНОБУДІВНИХ ДЕТАЛЕЙ ДЛЯ
РЕАЛІЗАЦІЇ НА 3D-ПРИНТЕРІ

01.05.02 - Математичне моделювання та обчислювальні методи
Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

А. І. Морозова

Науковий керівник
Максименко-Шейко Кирило Володимирович,
доктор технічних наук,
старший науковий співробітник

Харків - 2020

АНОТАЦІЯ

Морозова А.І. Математичне моделювання поверхонь об'єктів авіаційної промисловості і машинобудівних деталей для реалізації на 3D-принтері. – Кваліфікована наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи. Харківський національний університет радіоелектроніки МОН України. Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, Харків, 2020.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню методів моделювання тривимірних геометричних об'єктів, побудові математичних моделей машинобудівних деталей і об'єктів авіаційної промисловості за допомогою теорії R-функцій та реалізації побудованих рівнянь на 3D-принтері.

Актуальність теми дисертації зумовлена тим, що в період формування інформаційного суспільства 3D-моделювання та 3D-друк геометричних об'єктів знаходить застосування у всіх сферах промисловості. 3D-моделювання дозволяє створювати тривимірну модель будь-якого об'єкту на комп'ютері і за допомогою 3D-принтера отримати повноцінний фізичний об'єкт, який відповідає заданим параметрам. Переваги використання 3D-принтерів: зниження собівартості виготовлення продукції, скорочення часу на створення і термінів її появи на ринку, моделювання об'єктів будь-якої форми та складності, швидкість та висока точність виготовлення, можливість використання новітніх надміцних матеріалів.

Існують різні підходи до створення 3D-моделей: 3D-сканування наявного об'єкта, побудова 3D-моделі за допомогою достатньо широкого спектра програмних продуктів, які мають в арсеналі своїх бібліотек примітивні форми різного виду, а також створення 3D-моделі за допомогою математичного апарата аналітичної геометрії. У випадках, коли модельований об'єкт існує фізично, найбільш зручний спосіб одержання 3D-моделі — скористатися 3D-сканером. Однак у випадку, коли модельований

об'єкт має значні розміри або не існує зовсім, такий підхід є неможливим. У таких випадках створення 3D-моделей можна реалізувати, використовуючи програмні продукти. Але й цей метод має ряд недоліків, а саме: відсутність історії побудови моделі, обмежений набір примітивів у бібліотечних модулях програм, відсутність можливості аналітичного запису та ін.

Створення математичної моделі геометричного об'єкта (ГО) за допомогою апарата аналітичної геометрії є достатньо перспективним в області 3D-моделювання. У роботах Лісняка А. О., Чопорова С. В., Гоменюка С. І., Стояна Ю. Г., Шейко Т. І., Максименка-Шейка К. В., Толока О. В., Литвина О. М., Літвінової Ю. С. виконувалася побудова рівнянь ГО в 3D за допомогою R-функцій, однак їх реалізація на 3D-принтері вперше проводилася лише Літвіновою Ю. С. в експериментальному режимі.

Теорія R-функцій виявилася незамінною для побудови рівнянь ГО з симетрією трансляції уздовж прямої, з симетрією циклічного типу та ін. Аналітичний запис і можливість введення в логічну формулу буквених параметрів дозволяють оперативно і часом суттєво змінювати форму проєктованого об'єкта. Також зручним є й те, що процес створення моделі відбувається поетапно, і є можливість внести зміни в проєктовану конструкцію.

Таким чином, розширення області застосування апарата теорії R-функцій для створення математичних моделей машинобудівних деталей і об'єктів авіаційної промисловості і реалізація друку на 3D-принтері є актуальною науково-технічною задачею.

Метою досліджень дисертаційної роботи є аналітична ідентифікація об'єктів авіаційної промисловості і машинобудівних деталей для реалізації технології 3D-друку.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі необхідно розв'язати такі задачі:

1. Дослідити математичний апарат теорії R-функцій та застосувати його для створення тривимірних моделей машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації 3D-друку.

2. Розробити алгоритм поетапної побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів.

3. Дослідити можливості методу побудови нормалізованих рівнянь ГО, що мають трансляційний і циклічний типи симетрії, та застосувати його для побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації на 3D-принтері.

4. Розробити метод побудови рівнянь поверхонь безпілотного літаючого апарату (БПЛА) різних типів із застосуванням теорії R-функцій та блендінга на каркасі.

5. Розробити методи побудови рівнянь робочих колес відцентрових насосів та шнеків з перемінним кроком закрутки за допомогою теорії R-функцій.

6. Реалізувати побудовані математичні моделі машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів на 3D-принтері.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, 2 додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, відзначено її зв'язок з науково-дослідними роботами Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, де виконувалась робота. Сформульовано мету й задачі дослідження. Вказано об'єкт, предмет та методи дослідження, розкрито наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Наведено інформацію про публікації та апробацію викладеного в роботі матеріалу, а також відзначено особистий внесок здобувача.

Перший розділ дисертації містить чотири підрозділи. В першому з них наведено порівняльний аналіз 3D-друку з традиційними технологіями виробництва, такими як лиття, фрезерування, штампування, різання і т.д. Другий підрозділ присвячено вивченню сфер використання 3D-принтерів. У третьому підрозділі розглянуто питання впровадження тривимірного друку в розвиток авіабудівної галузі. Четвертий підрозділ присвячено пошуку нових задач дослідження з метою створення рівнянь тривимірних машинобудівних деталей, аерокосмічних об'єктів і БПЛА та реалізації 3D-друку.

Другий розділ дисертації присвячено викладенню основних положень моделювання геометричних об'єктів з використанням математичного апарату теорії R-функцій. Наводиться аналіз конструктивних засобів математичного моделювання геометричних об'єктів, визначення R-функцій. Наводяться основні достатньо повні системи R-функцій, їхні логічні, алгебраїчні і диференціальні властивості. Розглянуто нормалізовані рівняння ГО. Властивість нормалізованості використано в роботі для побудови рівнянь БПЛА та ГО заданої товщини. У роботі розглядаються і використовуються методи побудови ГО, що мають симетрію різного виду: трансляційну симетрію уздовж осі та точкову симетрію циклічного типу.

Третій розділ присвячений аналітичній ідентифікації деталей машин з симетрією гвинтового типу в 3D при реалізації на 3D-принтері. У роботі побудовано математичну і комп'ютерну модель шнека зі змінним і постійним кроком закрутки, шнекового завихрювача, труби з локальною закруткою, скрученої труби складного поперечного перерізу заданої товщини. Також побудовані математичні та комп'ютерні моделі відкритих робочих коліс відцентрових насосів з радіальними лопатками, з криволінійними лопатками і балансувальними отворами.

Четвертий розділ присвячений аналітичній ідентифікації поверхонь безпілотних літальних апаратів та аерокосмічних об'єктів для впровадження технології 3D-друку. Побудовано математичні та комп'ютерні моделі макетів БПЛА різних типів з використанням стандартних примітивів, блендінга на каркасі, схеми «літаюче крило». Побудовані рівняння сімейства макетів ракет-носіїв, призначених для виведення в космос вантажних транспортних кораблів, пілотованих транспортних кораблів з екіпажем на борту, а також макетів космічних кораблів.

Основні результати дисертаційної роботи полягають у такому.

На основі теорії R-функцій вперше сформульовані методи створення тривимірних геометричних об'єктів авіаційної промисловості для їх реалізації на 3D-принтері.

Розроблено за допомогою R-функцій алгоритми поетапної побудови математичних моделей машинобудівних об'єктів, серед яких шнеки з постійним і змінним кроком закрутки, шнекові завихрювачі, труби з локальною закруткою і скручені труби складного перерізу зі стінкою заданої товщини.

Досліджено метод побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають трансляційний і циклічний тип симетрії в 3D. Цей метод був використаний для побудови рівнянь відкритих і напівзакритих робочих коліс відцентрових насосів з радіальними і криволінійними лопатками.

Вперше за допомогою конструктивних засобів теорії R-функцій розроблено методи побудови рівнянь поверхонь БПЛА різних типів. При побудові рівнянь крил і поверхонь БПЛА застосовувався блендінг на каркасі. Вперше за допомогою методу R-функцій побудовано рівняння поверхонь РН і макета космічного корабля.

Побудовані математичні моделі машинобудівних деталей, БПЛА та аерокосмічних об'єктів реалізовані на 3D-принтері в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

Достовірність отриманих результатів, їх адекватність проєктованим об'єктам підтверджується візуалізацією як в умовах експлуатації програми RFPreview, так і реалізацією на 3D-принтері. Аналітичний запис проєктованих об'єктів дає можливість використовувати буквені геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, в свою чергу, дозволяє оперативно змінювати їх конструктивні елементи. Властивість додатності побудованих функцій у внутрішніх точках об'єкта є вельми зручною для реалізації 3D-друку.

Ключові слова: R-функції, математична модель, нормалізовані рівняння, машинобудівні деталі, шнеки, безпілотні літальні апарати (БПЛА), відцентрові насоси, симетрія, візуалізація, 3D-принтер.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 1. P. 60–66.
2. Sheyko T., Maksymenko-Sheyko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R.. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the implementation at a 3D printer. **Eastern-European Journal of Enterprise Technologies**. 2019, no. 1/2 (97). P. 48–56.
3. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Толоч А. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. **Информационные технологии в проектировании и производстве**. 2019, № 2 (174). С. 16–20.
4. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Sirenko V. M., Morozova A. I. R-functions in the Analytical Description of the Surface of a Flying Wing Unmanned Aerial Vehicle. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 4. P. 61–66.
5. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Using the R-Functions Theory Apparatus to Mathematically Model the Surface of the Soyuz-Appolo Spacecraft Mock-up for 3D Printing. **Journal of Mechanical Engineering**. 2020, vol. 23, no. 3. P. 55–60.
6. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Литвинова Ю. С., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование рабочих колес насосов для реализации на 3D-принтере. **Вісник Запорізького національного університету**. 2019, № 2. С. 166–176.
7. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Сиренко В. Н., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование поверхности беспилотных летательных аппаратов. Тезисы докладов научно-практической конференции «Современные расчетно-экспериментальные методы определения характеристик ракетно-космической техники». Днепр, 10–12 декабря 2019 г. С. 15.

8. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация деталей машин с винтовым типом симметрии для реализации технологии 3D-печати. Современные проблемы машиностроения. Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 120-летию со дня рождения академика НАН Украины А. П. Филиппова. Харьков, 15–18 апреля 2019 г. С. 15.

9. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 25–26 квітня 2019 р. С. 111.

10. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей VIII Міжнародної науково-технічної конференції "Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій". Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2020. Режим доступу: <https://drive.google.com/file/d/1-bisZmWtXD0yPFtu1mwm8q74V71yO7Xz/view>.

11. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. R–функции в моделировании поверхности макета космического корабля типа «Союз»-«Аполлон» с целью реализации на 3D-принтере. Тези доповідей II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 5-8 жовтня 2020 р. С. 307-309.

ABSTRACT

Morozova A. I. Mathematical modeling of aviation industry objects surfaces and machine-building parts for 3D-printer implementation. – Qualified scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for candidate of technical science on the specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computing Methods (technical sciences). – Kharkiv National University of Radio Electronics; A. Pidhorneyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, 2020.

The dissertation is devoted to research of methods of three-dimensional geometrical objects modeling, construction of mathematical models of machine-building details and the aviation industry objects by the R-functions theory tools and to realization of the constructed equations on the 3D-printer.

The relevance of the dissertation topic is stems from the fact that 3D-modeling and 3D-printing of geometric objects are used in all spheres of industry during the period of the information society formation. 3D-modeling allows you to create a three-dimensional model of any object on a computer and to get a full-fledged physical object that meets the specified parameters with the help of a 3D-printer. Advantages of using 3D-printers are: a reduction of production costs, a reduction of time for creation and terms of its appearance on the market, a modeling of objects of any shape and complexity, a speed and high accuracy of production, a possibility of use of the newest high-strength materials.

There are different approaches to creating 3D-models: 3D-scanning of an existing object, building a 3D-model using a wide range of software products that have in their libraries some primitive forms of various kinds, as well as creating a 3D-model using an analytical geometry mathematical apparatus. In cases where the simulated object exists physically the most convenient way to obtain a 3D-model is to use a 3D-scanner. However, in the case when the modeled object has significant dimensions or does not exist at all, such approach is impossible. In

such cases the creation of 3D-models can be implemented using software products. But this method also has a number of disadvantages, namely: the lack of history of model construction, a limited set of primitives in the library modules of programs, the lack of analytical recording and others.

Creating a mathematical model of a geometric object (GO) using the apparatus of analytical geometry is quite promising in the 3D-modeling field. In Lisnyak A. O., Choporov S. V., Gomenyuk S. I., Stoyan Yu. G., Sheiko T. I., Maksymenko-Sheiko K.V., Tolok O.V., Lytvyn O. M., Litvinova Yu. S. works the construction of GO equations in 3D using R-functions performed, but their implementation on a 3D-printer was first carried out only by Litvinova Yu. S. at the experimental mode.

The R-functions theory proved to be indispensable for constructing the equations of GO with symmetry of translation along a line, with symmetry of cyclic type and so on. Analytical record and the ability of introducing letter parameters into the logical formula allow you to quickly and sometimes significantly change the shape of the projected object. It is also convenient that the process of creating a model takes place in stages, and it is possible to make changes to the designed construction.

Thus, expanding the scope of the R-functions theory apparatus to create mathematical models of machine-building parts and the aviation industry objects, and the implementation of printing on a 3D-printer is an relevant scientific and technical task.

The purpose of research of the dissertation work is the analytical identification of the aviation industry objects and machine-building details for the 3D-printing technology realization.

To achieve this goal in the dissertation it is necessary to solve the following tasks:

1. Investigate the mathematical apparatus of R-functions theory and apply it to create the three-dimensional models of machine-building parts and aircraft objects and the 3D-printing implementation.

2. To develop an algorithm for the step-by-step construction of machine-building parts and aviation objects equations.

3. Investigate the possibilities of the method of GO normalized equations constructing, which have translational and cyclic symmetry, and apply it to construct the equations of machine-building parts and aircraft objects and implementation on a 3D-printer.

4. To develop a method for constructing surface equations of unmanned aerial vehicles (UAVs) of different types using the R-functions theory and blending on the frame.

5. To develop methods for constructing the equations of impellers of centrifugal pumps and augers with variable twisting pitch using the R-functions theory.

6. Implement the constructed mathematical models of machine-building parts and aircraft objects on a 3D-printer.

The introduction substantiates the relevance of the topic of the dissertation, its connection with the research work of the A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, where the work was performed. The purpose and tasks of the research are formulated. The object, subject and methods of research are indicated, scientific novelty and practical significance of the obtained results are revealed. Information on publications and approbation of the material presented in the work is given, as well as the personal contribution of the applicant is noted.

The first section of the dissertation contains four subsections. The first of them provides a comparative analysis of 3D-printing with traditional production technologies, such as casting, milling, stamping, cutting, etc. The second subsection is devoted to the study of the 3D-printers using. The third subsection discusses the introduction of three-dimensional printing in the development of the aircraft industry. The fourth subsection is devoted to the search for new research problems in order to create equations of three-dimensional machine-building parts, aerospace objects and UAVs and the implementation of 3D-printing.

The second section of the dissertation is devoted to the presentation of the main provisions of geometric objects modeling using the mathematical apparatus of the R-functions theory. The analysis of constructive tools of mathematical modeling of GO and R-functions definition are given. The basic rather complete systems of R-functions, their logical, algebraic and differential properties are given. The normalized equations of GO are considered. The property of normalization is used in the work to construct the equations of UAVs and GOs of a given thickness. The paper considers and uses methods for constructing GOs that have symmetry of different types: translational symmetry along the axis and the cyclic type point symmetry.

The third section is devoted to the analytical identification of machine parts with screw-type symmetry in 3D when implemented on a 3D-printer. The mathematical and computer model of the screw with variable and constant twisting step, screw swirler, pipe with local twist, twisted pipe of complex cross section of the set thickness is constructed in the work. Mathematical and computer models of open impellers of centrifugal pumps with radial blades, with curved blades and balancing holes are also built.

The fourth section is devoted to the analytical identification of the UAV and aerospace objects surfaces for the introduction of 3D-printing technology. Mathematical and computer models of UAV of different types with the use of standard primitives, blending on the frame, the scheme "flying wing" are built. The equations of the family of models of launch vehicles designed for space launch of cargo transport ships, manned transport ships with a crew on board, as well as models of spacecraft are constructed.

The main results of the dissertation are as follows.

The methods of creating three-dimensional geometric objects of the aviation industry for their implementation on a 3D-printer based on the R-functions theory were formulated for the first time.

Algorithms for step-by-step construction of mathematical models of machine-building objects, including augers with constant and variable twist pitch,

screw swirlers, pipes with local twist and twisted pipes of complex cross-section with a wall of a given thickness, were developed with the R-functions help.

The method of constructing equations of GO having translational and cyclic symmetry types in 3D is investigated. This method was used to construct the equations of open and semi-closed impellers of centrifugal pumps with radial and curved blades.

The methods of construction of UAV surfaces equations of different types are developed For the first time with the help of constructive tools of the R-functions theory. In constructing the equations of the wings and surfaces of the UAV blending on the frame was used. For the first time, the equation of the launch vehicle surfaces and the model of a spacecraft was constructed using the R-function method.

The constructed mathematical models of machine-building parts, UAVs and aerospace objects are implemented on a 3D-printer at the A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The reliability of the obtained results and their adequacy to the designed objects are confirmed by visualization both in the conditions of operation of the RFPreview program and implementation on the 3D-printer. Analytical recording of projected objects makes it possible to use letter geometric parameters, complex superpositions of functions, which allows you to quickly change their structural elements. The property of the positivity of the constructed functions in the internal points of the object is very convenient for the 3D-printing implementation.

Keywords: R-functions, mathematical model, normalized equations, machine-building details, augers, unmanned aerial vehicles (UAVs), centrifugal pumps, symmetry, visualization, 3D-printer.

LIST OF THE APPLICANT PUBLICATIONS

1. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 1. P. 60–66.
2. Sheyko T., Maksymenko-Sheyko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R.. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the implementation at a 3D printer. **Eastern-European Journal of Enterprise Technologies**. 2019, no. 1/2 (97). P. 48–56.
3. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Толоч А. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. **Информационные технологии в проектировании и производстве**. 2019, № 2 (174). С. 16–20.
4. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Sirenko V. M., Morozova A. I. R-functions in the Analytical Description of the Surface of a Flying Wing Unmanned Aerial Vehicle. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 4. P. 61–66.
5. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Using the R-Functions Theory Apparatus to Mathematically Model the Surface of the Soyuz-Appolo Spacecraft Mock-up for 3D Printing. **Journal of Mechanical Engineering**. 2020, vol. 23, no. 3. P. 55–60. <https://doi.org/10.15407/pmach2020.03.055>.
6. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Литвинова Ю. С., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование рабочих колес насосов для реализации на 3D-принтере. **Вісник Запорізького національного університету**. 2019, № 2. С. 166–176.
7. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Сиренко В. Н., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование поверхности беспилотных летательных аппаратов. Тезисы докладов научно-практической конференции «Современные расчетно-экспериментальные

методы определения характеристик ракетно-космической техники». Днепр, 10–12 декабря 2019 г. С. 15.

8. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация деталей машин с винтовым типом симметрии для реализации технологии 3D-печати. Современные проблемы машиностроения. Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 120-летию со дня рождения академика НАН Украины А. П. Филиппова. Харьков, 15–18 апреля 2019 г. С. 15.

9. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 25–26 квітня 2019 р. С. 111.

10. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей VIII Міжнародної науково-технічної конференції "Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій". Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2020. Режим доступу: <https://drive.google.com/file/d/1-bisZmWtXD0yPFtu1mwm8q74V71yO7Xz/view>.

11. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. R-функции в моделировании поверхности макета космического корабля типа «Союз»-«Аполлон» с целью реализации на 3D-принтере. Тези доповідей II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 5–8 жовтня 2020 р. С. 307–309.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 Огляд літератури і вибір напрямку досліджень	8
1.1 3D-друк і виробництво	8
1.2 Технології та матеріали	12
1.3 Переваги 3D-друку в авіабудуванні	14
1.4 Постановка нових задач дослідження	17
Висновки по 1 розділу	19
РОЗДІЛ 2 R-функції в математичному моделюванні геометричних об'єктів	20
2.1 Конструктивні засоби математичного моделювання геометричних об'єктів. R-функції	20
2.2 Основні достатньо повні системи R-функцій	25
2.3 Предикатне завдання складних геометричних об'єктів	34
2.4 Основна теорема теорії R-функцій. Побудова рівнянь границь геометричних об'єктів	44
2.5 Нормалізовані рівняння геометричних об'єктів	47
2.6 Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів	62
2.7 Методи побудови примітивів і блендінг на каркасі в 3D	73
Висновки по 2 розділу	82
РОЗДІЛ 3 Аналітична ідентифікація деталей машин в 3D	83
3.1 Гвинтовий тип симетрії в деталях машин і дизайні при реалізації на 3D-принтері	83
3.2 Математичне та комп'ютерне моделювання робочих коліс насосів для реалізації на 3D-принтері	90
Висновки по 3 розділу	99
РОЗДІЛ 4 Аналітична ідентифікація літальних апаратів в 3D	101
4.1 Аналітична ідентифікація поверхонь безпілотних літальних апаратів для реалізації на 3D-принтері	101
4.2 R-функції в аналітичному описанні поверхні безпілотного літального апарату, виконаної за схемою «літаюче крило»	112
4.3 Математичне і комп'ютерне моделювання аерокосмічних об'єктів для реалізації технології 3D-друку	115
Висновки по 4 розділу	124
ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ	125
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	128
Додаток А	136
Додаток Б	138

ВСТУП

Актуальність теми. Однією з нових технологій, що останнім часом отримує зростаючу популярність, став 3D-друк. 3D-друк дозволяє створювати об'ємні моделі будь-яких предметів за допомогою спеціального обладнання – 3D-принтера. Переваги використання сучасних 3D-принтерів такі: зниження собівартості виготовлення продукції і скорочення термінів її появи на ринку, моделювання об'єктів будь-якої форми і складності, швидкість і висока точність виготовлення, можливість використання різних матеріалів.

Виготовлення деталей машин з гвинтовим типом симетрії відбувається різними, часто досить складними способами. Це лиття з наступною токарною обробкою, способи гарячої деформації та ін. Досить перспективним виявляється їх виготовлення на 3D-принтері. Наприклад, світовий виробник відцентрових та інших видів насосів концерн KSB (Німеччина) став найбільшим у світі новатором в області застосування 3D-друку в їх виробництві. Компанія Airbus представила в рамках берлінського авіасалону надрукований на 3D-принтері безпілотник Thor. Інженери NASA будують ракету зі спеціального пластику, використовуючи 3D-принтер з технологією селективного лазерного спікання. Студенти Університету Саутгемптона створили перший у світі літак, названий Sulsa, надрукований на 3D-принтері. Велику увагу КБ «Південне» і Національна металургійна академія України приділяють питанням організації і розвитку дослідного виробництва та експериментальної бази, перспектив виготовлення деталей за допомогою 3D-друку.

Однак виникає проблема завдання інформації для друку, тобто створення математичної та комп'ютерної моделі об'єкта, що проектується. Одним з методів вирішення цієї проблеми є застосування теорії R-функцій, яка дозволяє описувати геометричні об'єкти (ГО) складної форми єдиним аналітичним виразом. Таким чином, розширення області застосування апарату теорії R-функцій для створення математичних моделей об'єктів авіаційної промисловості та машинобудівних деталей з подальшою реалізацією друку на 3D-принтері є актуа-

льною науково-технічною задачею. У роботах Лісняка А. О., Чопорова С. В., Гоменюка С. І., Стояна Ю. Г., Шейко Т. І., Максименка-Шейка К. В., Толока О. В., Литвина О. М., Літвінової Ю. С. виконувалася побудова рівнянь ГО в 3D за допомогою R-функцій, однак їх реалізація на 3D-принтері вперше проводилася лише Літвіною Ю. С. в експериментальному режимі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямам наукових досліджень відділу математичного моделювання й оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України і виконана в період з 2016 по 2020 рр. у рамках науково-дослідних робіт за темою «Розробка методів дослідження фізичних процесів в енергетичних установках на основі теорії R-функцій» (2016-2020 рр., № ДР 0115U001940).

Мета і задачі дослідження. Метою досліджень дисертаційної роботи є аналітична ідентифікація об'єктів авіаційної промисловості та машинобудівних деталей для реалізації технології 3D-друку.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі необхідно розв'язати такі задачі:

1. Дослідити математичний апарат теорії R-функцій та застосувати його для створення тривимірних моделей машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації 3D-друку.

2. Розробити алгоритм поетапної побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів.

3. Дослідити можливості методу побудови нормалізованих рівнянь ГО, що мають трансляційний і циклічний типи симетрії, та застосувати його для побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації на 3D-принтері.

4. Розробити метод побудови рівнянь поверхонь безпілотного літаючого апарату (БПЛА) різних типів із застосуванням теорії R-функцій та блендинга на каркасі.

5. Розробити методи побудови рівнянь робочих коліс відцентрових насосів та шнеків з перемінним кроком закрутки за допомогою теорії R-функцій.

6. Реалізувати побудовані математичні моделі машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів на 3D-принтері.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є реалізація технології 3D-друку машинобудівних деталей та авіаційних конструкцій.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є математичний апарат теорії R-функцій, методи побудови тривимірних математичних моделей машинобудівних деталей та авіаційних конструкцій.

Методи дослідження. У роботі використовувався метод R-функцій для побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів, у тому числі для побудови рівнянь границь ГО, що мають гвинтову симетрію, симетрію трансляційного і циклічного типу, а також для побудови нормалізованих рівнянь ГО.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати нові наукові результати:

1. Отримав подальший розвиток метод R-функцій для поетапної побудови рівнянь тривимірних машинобудівних деталей і авіаційних об'єктів.

2. Вперше за допомогою конструктивних засобів теорії R-функцій побудовані математичні моделі відкритих і напівзакритих робочих коліс відцентрових насосів з радіальними і криволінійними лопатками.

3. Досліджено метод побудови рівнянь ГО, які мають гвинтовий тип симетрії, і побудовано математичні моделі шнеків з постійним і змінним кроком закрутки, шнекових завихорювачів, труб з локальною закруткою і скручених труб складного поперечного перерізу зі стінкою заданої товщини.

4. Вперше за допомогою конструктивних засобів теорії R-функцій розроблено методи побудови рівнянь поверхонь БПЛА різних типів, і виконана їх реалізація на 3D-принтері.

5. Вперше при побудові рівнянь поверхонь БПЛА застосовувався блендінг на каркасі.

6. Вперше за допомогою методу R-функцій побудовано рівняння поверхонь ракет-носіїв, макета космічного корабля, і виконано їх реалізацію на 3D-принтері.

Практична значимість отриманих результатів. Розроблені в дисертаційній роботі методи побудови рівнянь коліс відцентрових насосів, шнеків, скручених труб зі стінкою заданої товщини, БПЛА, аерокосмічних об'єктів дозволяють реалізувати поетапну побудову зазначених рівнянь, а також виконати їх реалізацію на 3D-принтері. Результати побудови рівнянь машинобудівних об'єктів представляють практичний інтерес при інженерних розрахунках, створенні нових прототипів виробів, швидкої заміни зношених деталей.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано в роботах [1–11]. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належать такі результати: автором побудовано рівняння шнеків з перемінним і постійним кроком закрутки, шнекового завихорювача, труби з локальною закруткою, скрученої труби складного поперечного перерізу зі стінкою заданої товщини [1, 8], модифіковано методику блендінга на каркасі, побудовано рівняння поверхонь БПЛА різних типів, побудовано рівняння поверхонь ракети-носія і макета космічного корабля, поверхні БПЛА, виконаного за схемою «літаюче крило» [2–5, 7, 9–11], робочих коліс відцентрових насосів з радіальними і криволінійними лопатками [6] і виконано їх комп'ютерну реалізацію за допомогою системи візуалізації RFPreview. Дані об'єкти роздруковані на 3D-принтері.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на конференції молодих вчених і спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування», яка була присвячена 120-річчю від дня народження академіка НАН України А. П. Філіппова (Україна, Харків 15–18 квітня 2019 р.); Десятій Всеукраїнській, сімнадцятій Регіональній Науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Україна, Запоріжжя, ЗНУ, 25–26 квітня 2019 р.); науково-практичній конференції «Сучасні розрахунково-

експериментальні методи визначення характеристик ракетно-космічної техніки» (Україна, Дніпро, 10–12 грудня 2019 р.), VIII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Україна, Запоріжжя, ЗНУ, 2020 р.), II міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Україна, Харків, 2020 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертаційної роботи опубліковані в 11 друкованих працях, з яких 5 статей – у вітчизняних виданнях, затверджених ДАК МОН України за фахом, 1 стаття – в закордонному науковому періодичному виданні, 5 тез доповідей на наукових конференціях.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків. Загальний обсяг дисертації складає 139 сторінок, у тому числі 125 сторінок основного тексту з 55 рисунками, списку використаних джерел з 75 найменувань на 8 сторінках та 2 додатків на 4 сторінках.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 3D-друк і виробництво

3D-принтери активно використовуються в різних галузях промисловості та виробництві. За їх допомогою виготовляють зразки нової продукції, прототипи для тестування і перевірки збирання, окремі деталі, майстер-моделі для лиття. 3D-друк незамінний, коли потрібно швидко отримати точне фізичне втілення комп'ютерної CAD-моделі [12]. Якщо говорити про порівняння 3D-друку з традиційними технологіями виробництва, такими як лиття, фрезерування, штампування, різання і т. д., то можна виділити наступні категорії відмінностей:

- швидкість виробництва – вказує на витрачений час, від моделювання та до постобробки деталей;
- вартість виробництва – фінансові витрати на виробництво кожної конкретної деталі;
- якість продукції – говорить про точність виробництва щодо її відповідності підсумковому продукту до постобробки;
- точність копій – вказує на рівень ідентичності копій того ж продукту, що випускається;
- гнучкість виробництва – витрати часу і фінансів на перехід до виготовлення нового продукту або внесення змін в дизайн продукту, вже запущеного у виробництво;
- доступність – необхідність у фінансових витратах для придбання виробничих потужностей різного рівня складності.

Розглянемо їх конкретні відмінності за кожною категорією.

Швидкість 3D-друку, при виробництві прототипів і одиничних виробів, набагато перевершує терміни запуску у виробництво аналогічної деталі методами лиття та штампування, і порівняна з фрезеруванням на верстатах з

числовим програмним управлінням (ЧПУ). Порівняна, якщо мова йде про одну деталь, але 3D-принтер може надрукувати кілька деталей за той же час, що фрезер робитиме одну. При вже налагодженому великосерійному виробництві деталі, швидкість її створення традиційними методами перевершує 3D-друк. Відносно простих типових деталей це завжди буде так – їх можна відливати і штампувати мільйонами. А ось в роботі зі складнішими і цікавішими об'єктами 3D-друк вже обходить традиційні методи. Не варто забувати і про побутове застосування технології. Завдяки появі настільних 3D-принтерів, любителі і ентузіасти можуть створювати нескінченну різноманітність моделей. Це дійсно так, адже існує не так багато обмежень стосовно геометрії підсумкового продукту. Насправді, прихований потенціал 3D-друку настільки широкий, що обмежений тільки вашою фантазією. Таким чином, наприклад, можна швидко спроектувати і надрукувати пластикову шестерню для блендера або кухонного комбайна – таких запчастин часто немає ні в офіційних сервісних майстернях, ні на ринках, а замовлення у виробника може обійтися в половину вартості всього приладу, що ремонтується.

Розглянемо питання про вартість виробництва. 3D-друк вимагає набагато менше часу для виготовлення одного унікального компонента або прототипу, або малих дослідних серій, а для масового випуску продукції частіше застосовуються традиційні технології виробництва. Вартість виробництва одиничних і дрібносерійних виробів 3D-друком також перевершує традиційні методи, такі як лиття і штампування, тому що не вимагає дорогої оснастки (ливарних і штампувальних форм) і переобладнання виробничої лінії. При вже налагодженому великосерійному випуску тут відбувається те саме, що й зі швидкістю – собівартість деталі наближається до вартості сировини, і 3D-друк тут поки не може конкурувати, але стрімко наближається до цього. У порівнянні з виготовленням на фрезерних верстатах з ЧПУ, 3D-друк виграє за вартістю вже зараз.

Якість традиційної продукції, що випускається литтям, штампуванням і фрезеруванням подібна до кращих зразків 3D-друку, і тут у нього переваг немає. Але це стосується тільки традиційних простих форм – зі створенням

більш складних геометрично і конструктивно об'єктів 3D-друк справляється набагато краще, з його допомогою можна надрукувати часто цілком таку деталь, яку іншими методами створити неможливо в принципі, якщо тільки не виготовляти її по частинах і потім з'єднувати (що сильно здорожчує, ускладнює і збільшує терміни). Це унікальна перевага 3D-друку.

Як уже згадувалося, адитивне виробництво не вимагає підготовки обладнання та перепрофілювання виробничих потужностей. Вся необхідна підготовка до виготовлення нової деталі – це створення цифрової моделі. І тут адитивні технології значно перевершують лиття і штампування. Ще одна перевага 3D-принтерів полягає в здатності надрукувати практично все, що може поміститися в обсязі його області друку. Інші ж виробничі процеси (крім фрезерування) вимагають виготовлення нового інструменту, прес-форми або матриці для створення нового або зміни дизайну існуючого продукту. Переваги 3D-принтерів перед традиційними способами виробництва також яскраво виражені і в можливості друку рухомих частин і механізмів в зібраному стані. Це ж твердження справедливо і щодо простоти виробництва деталей з прихованими порожнинами і складною структурою заповнення матеріалом.

Скептики часто вказують на такий недолік технології, як обмеженість у виборі матеріалів для виробництва. Дане твердження справедливо, але на сьогоднішній день вже існують сотні різних матеріалів, з якими можуть працювати 3D-принтери, і цей перелік неухильно розширюється. Асортимент цих матеріалів не обмежується лише відмінностями в кольорі або механічних властивостях; існують ароматизовані, магнітні, струмопровідні, такі, що змінюють колір, і багато інших видів філаментів, порошків і фотополімерів для 3D-друку.

3D-принтери мають дуже широке цінове охоплення. Все залежить від якості приладу, його характеристик і технології друку, а також призначення. Таким чином системи 3D-друку доступніші широкому колу користувачів, ніж більш традиційні виробничі установки. Крім того, 3D-друк за замовчуванням майже повністю автоматизований. Для роботи, контролю і обслуго-

вування принтера практично не потрібен додатковий персонал. Це ще більше знижує поріг входу [13].

3D-принтери в промисловості відіграють важливу роль з кількох причин:

1. Можливість істотно знизити собівартість продукції.

2. Кастомізація готових виробів. Це означає, що замовник бере активну участь в процесі створення об'єктів. Він контролює процес ще на етапі моделювання.

3. Відкритість для вдосконалення виробів. Користувачі можуть пропонувати удосконалення для вже існуючих тривимірних моделей.

4. Можливість кардинальної зміни багатьох життєвих аспектів.

Найчастіше технологію 3D-друку в промисловості називають «адитивним виробництвом». Це повна протилежність класичному виробничому процесу, коли для створення продукції від сировини «відсікається» все зайве. Адитивне ж виробництво навпаки – «виросує» готову деталь методом пошарового наплавлення, роблячи її «на порожньому місці». Сучасний ринок пропонує багатий вибір техніки: промислові лазерні сканери 3D, і, звичайно ж, промислові 3D-принтери. Нижче наведено список найбільш популярних і вражаючих моделей [14]:

1. Cincinnati Incorporated's BAAM. The Big Area Additive Manufacturing – 3D-принтер для виробництва машин. Його можна використовувати для випуску авто Strati (Local Motors), Shelby Cobra або навіть автофургона.

2. Kamer Maker від Dutch DUS architects і Fiction Factory. Це великий 3D-принтер, який працює за технологією FFF. Застосовується, в тому числі, для створення повноцінного будинку в Амстердамі.

3. D-Shape. Головна особливість в тому, що він використовує пісок замість термопластика або полілактиду, в результаті чого він може друкувати споруди, наприклад, на Місяці.

4. WASP Big Delta. Ще один «гігант», що застосовується для спорудження будівель. Даний великоформатний принтер друкує не просто будинки, а абсолютно чисті з екологічної точки зору будівлі. Висота пристрою вражає –

12 метрів. При цьому він друкує глиняні циліндричні споруди до 10 метрів у висоту.

5. Bet Abram. Цей агрегат може створювати бетонні будинки. Випускаються різні розміри принтерів. Модель базової комплектації коштує близько 12 тисяч євро.

6. Sciaky's EBAM 300 – найбільший з промислових 3D-принтерів по металу. Працює за технологією електронно-променевої плавки. В результаті виходять високоякісні великі частини при мінімальних відходах металу. Відрізняється найбільшою платформою в порівнянні з іншими аналогами. Активно використовується у виробництві авіаційно-космічних деталей.

7. Materialise Mammoth. Найбільший представник агрегатів, що працюють за технологією лазерної стереолітографії. Ідеально підходить для автомобілебудування, де неприпустима збірка або склеювання елементів. Нанесення покриттів методом наливу істотно спрощує виробництво деталей.

8. Voxeljet VX4000. Найбільший за розмірами принтер, зроблений німецькими фахівцями. Підходить для економічного виготовлення дрібних деталей і великих партій форм для піску.

9. MASSIVit's GPD. Дуже добре справляється із завданням швидкого друку широкоформатних дисплеїв.

10. Concept Laser XLine 2000R. Найбільший тривимірний принтер, який працює за технологією лазерного спікання.

1.2. Технології та матеріали

Однією з нових технологій, яка останнім часом набула популярності, став 3D-друк. 3D-друк дозволяє створювати об'ємні моделі будь-яких предметів за допомогою спеціального обладнання – 3D-принтера. Це обладнання є високотехнологічним і вимагає певних знань і умінь для того, щоб ним скористатися.

Технологія 3D-друку заснована на технології пошарового «вирощування» твердих об'єктів з різних матеріалів. Об'ємні моделі друкуються з пластика, бетону, гідрогелю, дерева, металу, шоколаду та навіть з живих клітин. Процес друку на 3D-принтері складається з декількох етапів.

Перший етап – підготовчий. У процесі підготовки створюється комп'ютерна 3D-модель об'єкта, який буде друкуватися. Створення такої моделі можливо в програмі для 3D-моделювання. Після того, як віртуальна модель створена, необхідно перетворити її в набір інструкцій для принтера, тобто згенерувати G-код, а потім запустити сам друк. 3D-принтер дозволить надрукувати будь-який об'єкт.

У 1988 р Скотт Крамп винайшов технологію пошарового наплавлення FDM (Fused Deposition Modeling), що стала зараз найпоширенішою через відносно дешевизну як самих принтерів, так і витратних матеріалів. Технологія FDM – це технологія адитивного синтезу, яка будує функціональні прототипи і кінцеві вироби пошарово з термопластика інженерного класу [15].

У 2000 році була представлена технологія друку, названа PolyJet. Технологія PolyJet фірми Objet працює за принципом пошарового нанесення фотополімерних матеріалів ультратонким шаром. Кожен шар фотополімеру твердне завдяки ультрафіолету відразу після нанесення. Побудовані за допомогою цієї технології моделі не вимагають додаткового часу на затвердіння і можуть відразу використовуватися. Перевагами технології PolyJet є висока точність, міцність і швидкість побудови прототипів.

У 2010 році з'явилися харчові 3D-принтери, що одержали назву Cornucopia, здатні створити готову страву з харчових продуктів. А в наступному році принтери почали друкувати шоколадом.

У 2012 році з'явився перший принтер для домашнього використання, заснований на технології FDM.

Серед різноманітних матеріалів для друку на 3D-принтері особливо слід відзначити інженерний пластик, фотополімери, віск і металевий порошок.

Пластикові 3D-принтери використовують для отримання міцних, зносостійких виробів, які можна піддавати фізичному впливу, проводити тестування. Зазвичай із пластику друкують прототипи різних пристроїв, корпуси приладів, елементи конструкцій, деталі.

За допомогою фотополімерних матеріалів можна отримати дуже точний виріб з прекрасною якістю поверхні і високою деталізацією. Зазвичай такі матеріали використовують для 3D-друку ливарних майстер-моделей, виготовлення складних збірних конструкцій, прототипування високоточних деталей.

Воскові 3D-принтери використовуються для створення виплавлених восків. Основні користувачі такого обладнання зайняті в стоматології, ювелірному та ливарному виробництвах.

Металеві 3D-принтери застосовують у важкій промисловості, автомобілебудуванні, енергетиці, аерокосмічній галузі, наукових дослідженнях та інших сферах. Це незамінне обладнання для розробки нових вузлів і агрегатів, складних пристроїв. З їх допомогою розробляються і тестуються нові системи двигунів, механізмів, частин для літаків, автомобілів [16].

1.3 Переваги 3D-друку в авіабудуванні

Впровадження тривимірного друку – важливий етап у розвитку авіабудівної галузі. Традиційні технології, які використовуються в авіаційній промисловості, базуються на ручному зварюванні, застосуванні ЧПУ, фрезерувальних верстатів, ливарних форм. Такий підхід вимагає великих витрат праці, часу і сировини.

Метод селективного лазерного спікання, як і пошарове наплавлення, реалізується в автоматичному режимі, будучи більш швидким і економним. Обладнання може працювати цілодобово. При цьому кількість відходів на 70–95% менше. Готові деталі виходять легше, завдяки чому знижується вага машини.

У порівнянні з класичними методами, адитивний друк знімає виробничі обмеження – можна робити високоточні запчастини без попередньої підготовки виробничої лінії, спрощуючи етап прототипування.

Піонером галузі стала компанія GE Aviation. Виробник авіаційних двигунів звернув увагу на те, що використання різних сплавів в деталі істотно покращує її фізико-технічні властивості і дає можливість вивести льотні характеристики літака на принципово новий рівень. Традиційний метод лиття не дозволяє об'єднати різні матеріали у рамках одного технологічного процесу.

У GE Aviation почали працювати над удосконаленням форсунок. Для виробництва однієї деталі необхідно окремо виготовити 20 елементів, після чого з'єднати їх в одній запчастині. 3D принтер по металу дає можливість виготовити деталь із цільного шматка матеріалу, економлячи час і гроші. Дослідні зразки форсунок пройшли сертифікацію в 2016 році. Тепер виробник має намір випускати по 25000 деталей в рік, зроблених за допомогою принтера для тривимірного друку.

У науковій лабораторії Airbus пішли ще далі. Інженери з Гамбурга створили безпілотний літальний апарат, надрукований на 3D-принтері. Мова йде майже про всі елементи корпусу, крім модуля дистанційного керування і електронних пропелерів. Безпілотник назвали «Thor» [17].

Чотириметровий літак успішно піднявся в повітря і подолав 40 кілометровий маршрут з Гамбурга до Штада, де здійснив посадку на заводі компанії. Проект носить експериментальний характер. На ньому будуть тестувати різні конструкції фюзеляжу, планера, форми крила і інших елементів корпусу. На базі «Тора» зроблять літак з цільним корпусом, максимально наближений до серійних моделей.

3D друк вже використовується в серійних літаках Airbus. У широкофюзеляжних лайнерах A350 встановлюється надрукований кронштейн в складі пілона двигуна. Деталь виготовляється з титанового порошку. В експериментальних моделях A350 і вузькофюзеляжних A320neo тестуються більше 1000 деталей, зроблених методом лазерного спікання. Серед них переважно елементи інтер'єру.

Виробник авіадвигунів Safran Helicopter Engines в 2017 році представила лінійку газотурбінних двигунів Aneto. Компактний силовий агрегат на 30% могутніше, ніж установки аналогічних розмірів. При цьому пристрій залишається надійним і економічним. У процесі збірки використовуються компоненти, зроблені методом тривимірного друку — впускні напрямні лопатки і камера згоряння, що обертається. Компанія налітала 25 годин, 35 раз підняла машини в повітря, – проблем не виявлено!

У Росії над впровадженням адитивних технологій в авіапромисловості працюють Всеросійський науково-дослідний інститут авіаційних матеріалів і Томський політехнічний університет [18, 19].

Команда ВІАМ тестує 3D-друковані комплектуючі в двигунах для літаків МС-21. В процесі виробництва агрегату ПД-14 використовується захисний фронтальної пристрою камери згоряння, виготовлений за допомогою селективного лазерного спікання, що скорочує собівартість і час виробництва запчастини в 10 разів.

У Томському політехнічному університеті працюють над заміщенням литих титанових деталей літака на 3D-друковані. Дослідники відзначають, що частка титану в цивільних авіалайнерах досягає 15–20%. Якщо замінити лиття об'ємним друком, вийде знизити масу літака, а разом з нею і витрати на паливо, збірку і обслуговування. Фахівці зосередилися над роботою з порошками титанових сплавів ВТ6 і ВТ9. Завдання полягає в тому, щоб оптимізувати використання матеріалу і добитися високих тактико-технічних характеристик.

В американському «Боїнг» не відстають від європейських колег. Першою серійною моделлю, в якій будуть використовуватися надруковані металеві елементи, стане лайнер 787 [20]. Виробник уклав контракт з норвезькою Norsk Titanium на друк титанових запчастин в промислових масштабах. Собівартість титанових комплектуючих досягає 17 мільйонів доларів – вартість літака \$ 265 млн. Boeing заявляє, що в разі успіху, можна знизити вартість моделі на 2–3 мільйони доларів.

1.4 Постановка нових задач дослідження

3D-друк вже впливає на процеси створення прототипів, дрібносерійне виробництво й промисловий дизайн, дозволяючи багаторазово збільшити швидкість розробки нових виробів, зменшити виробничу собівартість і одержати готовий виріб згідно індивідуальних і специфічних запитів. Внаслідок цього можна припустити, що зростання ринку стимулює появу нових методів створення математичних моделей [21].

Візуалізація інформації – це процес подання абстрактних ділових або наукових даних у вигляді зображень, які можуть допомогти в розумінні змісту даних. Це поняття можна визначити як зіставлення дискретних даних і їх візуальне уявлення. Це визначення не охоплює всі аспекти візуалізації інформації, такі як статична, динамічна (анімація) і найбільш актуальна на сьогоднішній день інтерактивна візуалізація. Візуалізація дозволяє проникнути в будь-який світ і уявити собі те, що, здавалося б, уявити неможливо. Програмне забезпечення допомагає конструкторам і фахівцям цифрового маркетингу створювати візуальне зображення продукту, проекту або віртуальних прототипів у форматі 3D. Візуалізація надає розроблювачам інструменти, які можуть розширити передові виробничі можливості. Використання візуалізації для подання інформації - це не нове явище. Сьогодні візуалізація має асортимент додатків, що постійно розширюється в області науки, освіти, техніки, інтерактивних мультимедіа, медицини та багатьох інших [22].

Провівши аналіз програмних пакетів, що дозволяють створювати тривимірну графіку, тобто моделювати об'єкти віртуальної реальності й створювати на основі цих моделей зображення, ми виявили наступні недоліки:

- у програмі 3D StudioMax [23] – високі вимоги до системи, складний інтерфейс, висока вартість програми;

- у програмі Blender [24] – відсутність процесу моделювання на основі N-Gon і недостатній набір інструментів моделювання, обмежена сумісність із іншими 3D-форматами файлів;

– у програмі AutoCAD [25] недоліком є відсутність історії побудови моделі, що є досить істотним при проектуванні складних машинобудівних об'єктів, коли в процесі створення об'єкта виникає необхідність швидко змінювати конструктивні рішення;

– у програмі OpenSCAD – складно використовувати програму для побудови комбінаційних об'єктів, і об'єктів, що вимагають дотримання точних параметрів, обмежена кількість бібліотек базових моделей і т.д.;

– у програмі Autodesk 123D Design [26] – низька швидкість роботи програми, відсутність інструкцій для роботи із програмою;

– у програмі Google SketchUp – немає можливості створити об'єкт, що виглядає реалістично, тільки англomовний варіант інтерфейсу, важко створювати складні поверхні.

У ході проведеного аналізу методів математичного моделювання можна зробити висновок про те, що метод R-функцій є універсальним і зручним методом створення тривимірних моделей, тому в роботі ми будемо використовувати саме цей метод.

Виходячи з вищесказаного можна поставити нові задачі дослідження, а саме:

1. Дослідити математичний апарат теорії R-функцій та застосувати його для створення тривимірних моделей машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації 3D-друку.

2. Розробити алгоритм поетапної побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів.

3. Дослідити можливості методу побудови нормалізованих рівнянь ГО, що мають трансляційний і циклічний типи симетрії, та застосувати його для побудови рівнянь машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів і реалізації на 3D-принтері.

4. Розробити метод побудови рівнянь поверхонь БПЛА різних типів із застосуванням теорії R-функцій та блендинга на каркасі.

5. Розробити методи побудови рівнянь робочих колес відцентрових насосів та шнеків з перемінним кроком закрутки за допомогою теорії R-функцій.

6. Реалізувати побудовані математичні моделі машинобудівних деталей та авіаційних об'єктів на 3D-принтері.

Висновки по 1 розділу

У першому розділі виконаний аналіз літературних джерел, що дозволяє судити про стан проблеми за темою дисертаційної роботи й визначити напрямки досліджень. Розглянуті наступні питання: розвиток 3D-друку, технологія роботи 3D-принтера, сфери застосування й нові можливості 3D-друку. У цей час 3D-друк знаходить застосування у всіх областях промисловості. Переваги застосування 3D-друку очевидні – це виготовлення нестандартних моделей, скорочення часу на створення нових прототипів і скорочення часу ремонту, простота й значна дешевизна виробництва, використання новітніх надміцних матеріалів. У розділі представлений аналіз основних методів створення тривимірних моделей для здійснення 3D-друку. У ході дослідження були виявлені істотні недоліки наявних методів побудови тривимірних моделей, а саме: неможливо використовувати 3D-сканер для об'єктів великих розмірів. Побудова тривимірної моделі за допомогою програмних продуктів також має ряд недоліків: відсутність історії побудови об'єкта, обмежений набір примітивів у бібліотечних модулях програм, відсутність можливості аналітичного запису і т.д.

У результаті аналізу існуючих методів побудови тривимірних моделей, можна зробити висновок, що використання теорії R-функцій є зручним для побудови моделей для 3D-друку. Аналітичний запис і, отже, можливість введення в логічну формулу буквених параметрів дозволяють оперативно і часом істотно змінювати форму проєктованого геометричного об'єкта. Можливість поетапної реалізації процесу моделювання 3D-об'єкта дозволяє на будь-якому етапі створення моделі внести зміни. Властивість додатності побудованої функції у внутрішніх точках об'єкта вельми зручна для реалізації 3D-друку.

РОЗДІЛ 2

R-ФУНКЦІЇ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

2.1 Конструктивні засоби математичного моделювання геометричних об'єктів. R-функції

В період формування інформаційного суспільства математичне моделювання можна розглядати як один із методів пізнання реального світу, як інтелектуальне ядро інформаційних технологій, що швидко розвиваються [27]. У часи Декарта запас вивчених ліній і поверхонь мало відрізнявся від того, який мали в своєму розпорядженні математики стародавності. Метод координат дозволив безмежно збільшувати число вивчених ГО, тому що кожне нове рівняння давало й новий ГО. Це привело до того, що надалі основну увагу було приділено вивченню ГО, що описуються заданими рівняннями. Обернена ж задача розглядалась лише для найпростіших ГО: прямої, конічних перетинів, еліпсоїдів, параболоїдів і ін.

В аналітичній геометрії звичайно обмежуються системою $h_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a = \text{const } \forall a \in R\}$ операцій, що застосовуються для написання рівнянь, яка приводить до множини $M(h_0)$ цілих раціональних функцій (поліномів). Зауважимо [28], що множину усіх суперпозицій системи h називають множиною h -реалізованих функцій і позначають $M(h)$. Множині $M(h_0)$ відповідає множина $N(h_0)$ ГО, таких, що описуються рівняннями $\omega(x) = 0$, $\omega(x) \in M(h_0)$ й називаються алгебраїчними. Відповідна множині $M(h_0)$ множина $N(h_0)$ алгебраїчних ГО цілком визначається завданням базисної системи h_0 й в остаточному підсумку всі властивості алгебраїчних ГО визначаються властивостями системи h_0 .

Однак множина алгебраїчних ГО все ж таки досить «бідна». Вона не містить, наприклад, таких ГО, як прямокутник, двутавр і т.д. Щоправда, існує

принципова можливість апроксимації складних ГО алгебраїчними (це випливає з відомої теореми Вейерштрасса про наближення безперервних функцій поліномами [29]), але сама по собі реалізація її достатньо складна проблема. Те ж можна сказати й щодо відомої теореми про можливість наскільки завгодно гарної апроксимації замкнених кривих на площині лемніскатами (тобто також алгебраїчними кривими [30]). В ряді робіт використовується поняття напівалгебраїчної множини (напівалгебраїчного ГО). До напівалгебраїчних належать ГО, точки яких задовольняють скінченним системам алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а також об'єднанням кінцевого числа таких ГО. Множину напівалгебраїчних ГО позначають $N_{1/2}(h_0)$ [28].

Множина напівалгебраїчних ГО $N_{1/2}(h_0)$ суттєво більш широка, чим множина алгебраїчних. Наприклад, квадрат, ламана лінія, усічений конус і інші належать множині напівалгебраїчних ГО. Однак те, що при такому підході вони задаються не одним рівнянням виду $f(x, y) = 0$, а системами систем рівнянь і нерівностей – серйозний конструктивний недолік, що проявляється в тих випадках, коли потрібно враховувати геометричну інформацію єдиним аналітичним рівнянням. В. Л. Рвачов порушив питання: чи не можна й такі ГО, як напівалгебраїчні, задавати одним рівнянням, подібно тому, як це можна зробити для прямих, кіл, еліпсоїдів і інших ліній і поверхонь? Розв'язок цього питання він почав шукати на шляху розширення базисної системи $h_0 = \{x + y, xy, \text{const}\}$.

Іншою важливою множиною, більш широкою, чим множина $M\{h_0\}$ h_0 – реалізованих функцій, є множина елементарних функцій $M\{h_\epsilon\}$, де $h_\epsilon = \left\{ x \pm y, xy, \frac{x}{y}, \text{const} \in (-\infty, \infty), x^n, a^z, \log_a x, \sin x, \cos x, \text{tg} x, \text{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \text{arcctg} x \right\}$ – множина так званих основних елементарних функцій, арифметичних операцій і констант. Множину елементарних ГО позначають $N(h_\epsilon)$. За аналогією з множиною напівалгебраїчних ГО вводиться множина напівелементарних ГО $N_{1/2}(h_\epsilon)$, яка включає точкові множини, що задовольняють системи елемента-

рних рівнянь і нерівностей, і скінченні об'єднання таких множин [28]. На площині, наприклад, до числа напівелементарних належать не тільки ГО, складені зі шматків алгебраїчних кривих, але й із синусоїд, тангенсоїд, логарифмічних і будь-яких інших елементарних кривих.

Може здатися, що, за аналогією з множиною алгебраїчних ГО $N(h_0)$, для якої множина напівалгебраїчних ГО $N_{1/2}(h_0)$ виявилася суттєво більш широкою, множина напівелементарних ГО $N_{1/2}(h_\epsilon)$ також ширше множини елементарних ГО $N(h_\epsilon)$. У роботах В. Л. Рвачова і його учнів [27, 28, 30] показано, що це не так: *усякий напівелементарний ГО є елементарним*. Таким чином, $N_{1/2}(h_\epsilon) = N(h_\epsilon)$. Справа в тому, що множина $M\{h_\epsilon\}$ містить функції з «логічним зарядом», а саме R-функції, які й дозволили розв'язати обернену задачу аналітичної геометрії. Зокрема, це означає, що символів основних елементарних функцій, арифметичних операцій і констант достатньо для того, щоб написати, наприклад, рівняння поверхні настільної лампи або днища корабля, якщо вважати, що останні являють собою об'єднання шматків площин, сфер, конусів, циліндрів і інших елементарних поверхонь.

Визначення. Позначимо: $S_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$. Тоді функція

$f(x_1, \dots, x_m): E^m \rightarrow E$ називається R-функцією, якщо існує така булева функція $F(X_1, \dots, X_m)$, що $S_2(f(x_1, \dots, x_m)) \equiv F(S_2(x_1), \dots, S_2(x_m))$.

Якщо назвати $S_2(t)$ *булевым знаком* величини t , то можна дати й таке визначення R-функцій: функція $f(x_1, \dots, x_m)$ називається R-функцією, якщо булевий знак цієї функції дорівнює булевій функції булевих знаків аргументів $x_1, \dots, x_m$.

Звернемо увагу на те, що у формулі $S_2(f(x_1, \dots, x_m)) \equiv F(S_2(x_1), \dots, S_2(x_m))$ оператор S_2 , що застосовується до функції $f(x_1, \dots, x_m)$, немов би «проникає» у середину до її аргументів, змінюючи при цьому f на F .

Визначення. Множину R-функцій, що мають одну й ту саму супровідну, називають *гілкою* множини R-функцій.

Визначення. Система h називається достатньо повною системою R -функцій, якщо множина $M(h)$ має непусте перетинання з кожною гілкою множини R -функцій.

Теорема 2.1. Нехай $h = \{\varphi_i\}$ є система R -функцій, а $H = \{\Phi_i\}$ – система відповідних супровідних функцій. Тоді, якщо H – повна система булевих функцій, то h – досить повна система R -функцій (R -операцій) [28].

Введені вище R -функції є лише одним з незліченної безлічі можливих класів R -функцій (у загальному випадку – R -відображень [28]).

Рівняння $\omega(x, y) = 0$ може визначати ГО, що складається з елементів різної розмірності. Іноді намагаються пояснити таке явище недостатньою гладкістю функції ω . Так наприклад, у відомому курсі лекцій з аналітичної геометрії академіка П. С. Александрова наведено приклад ГО, який визначається на площині рівнянням $x + |x| = 0$. Очевидно, що це – уся ліва півплощина, а не лінія. Таке явище автор пояснює тим, що функція $x + |x|$ всього лише неперервна. Якщо ж розглядати функції, що диференціюються k раз, говорить П. С. Александров, то відповідна їм множина ГО буде більш вузькою. Насправді це твердження невірне. Якщо для деякого ГО можна написати безперервне рівняння $\sigma = 0$, то для нього можна написати й рівняння $\sigma = 0$, що нескінченно диференціюється. Цей результат отриманий ще в 1932 р. відомим математиком Х. Уїтні (H. Whitney). Теорема Уїтні в теорії диференційних різноманіть розглядається як добре відомий факт. Однак, незважаючи на принципове значення цих результатів, вони до останнього часу не були сприйняті багатьма математиками, що працюють в інших областях. Про це, зокрема, свідчать вище наведені міркування академіка П. С. Александрова. Відзначимо, що відомий математик М. Х. Шульц при формулюванні ряду своїх теорем вводить зайве припущення про те, що для розглянутих їм замкнених точкових множин існують рівняння, що нескінченно диференціюються. Водночас з теореми Уїтні випливає, що для будь-якої замкненої множини існує рівняння, що нескінченно диференціюється

й, таким чином, згадані теореми Шульца слід вважати більш сильними, чим припускає сам автор [27].

На перший погляд теорема Уїтні може здатися такою, що суперечить здоровому глузду, тому що уявлення про рівняння, що нескінченно диференціюються і таких ГО, як квадрат, ламана лінія, усічений конус, важко асоціюються. Щоб простіше представити виникаючу ситуацію, розглянемо рівняння $f(x, y) = 0$, що нескінченно диференціюється на площині xOy . Функції $z = f(x, y) \in C^\infty(R^2)$ в просторі $xOyz$ відповідає деяка нескінченно гладка поверхня Σ . ГО L , що описується рівнянням $f(x, y) = 0$, є результат перетинання цієї поверхні із площиною $z = 0$. Як пише В. Л. Рвачов [28], доводиться долати певний психологічний бар'єр, щоб представити, як у результаті перетинання нескінченно гладкої поверхні із площиною виходить така фігура, як, скажемо, квадрат. Відзначимо, що згідно з теоремою Уїтні в результаті такого перетинання може вийти взагалі будь-яка замкнена множина на площині. Таким чином, всупереч припущенням П. С. Александрова, на шляху звуження диференціальних класів аж до безлічі функцій, що нескінченно диференціюються, ми не зможемо піти від довільних замкнених точкових множин у ролі ГО.

Природне звуження множини функцій, що нескінченно диференціюються – множина аналітичних функцій, тобто, таких функцій, які в будь-якій точці можуть бути розкладені в ряд з ненульовим радіусом збіжності. Неважко, однак, показати, що відповідна до аналітичних рівнянь множина ГО надто вузька [28].

Є ще одна важлива обставина, яка впливає на вибір множини допустимих функцій: необхідно, щоб була можливість фактичної побудови рівнянь ГО, що розглядаються.

2.2 Основні достатньо повні системи R-функцій

Система $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$ є найбільш зручною й широко застосовуваною повною системою булевих функцій, тому природно, отримуємо систему R_0 [27, 28, 31, 32]:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases}, \quad (2.1)$$

де $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ – символи R-кон'юнкції, R-диз'юнкції й R-заперечення відповідно. Система R_0 є історично першою, конструктивно найбільш простою і тому найбільш часто використовуваною системою.

Більш загальною є система R_α [27, 28, 32]:

$$\begin{cases} x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \\ x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (2.2)$$

де $\alpha(x, y)$ – довільна функція, що задовольняє нерівностям $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$. До цих нерівностей для додання системі R_α симетрії щодо аргументів звичайно додають умови

$$\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(\bar{x}, y) \equiv \alpha(x, \bar{y}), \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}, \quad (2.3)$$

У формулах (2.2) додатні множники $\frac{1}{1+\alpha}$ не впливають на знаки відповідних функцій і, отже, не мають відносин до зв'язку між R-функціями й функціями алгебри логіки, які їх супроводжують. Нижче буде показано, що вони впливають лише на певні властивості конструктивно-диференціального характеру.

Присутність у формулах (2.2) довільної функції α , що задовольняє зазначеним вище обмеженням, означає, що цими формулами визначається пучок достатньо повних систем, з якого в різних додатках вибираються ті або

інші конкретні досить повні системи. Так, наприклад, при $\alpha = 0$ одержуємо систему R_0 , а при $\alpha = 1$ – систему R_1 [27, 28, 32]:

$$\begin{cases} x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y) \\ x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y) . \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (2.4)$$

Припустимо, що $\alpha = \alpha(x, y)$ задовольняють умовам (2.3). Тоді доречними є такі тотожності:

1. $\bar{\bar{x}} \equiv x$.
2. $x \wedge_\alpha y \equiv y \wedge_\alpha x$.
3. $x \vee_\alpha y \equiv y \vee_\alpha x$.
4. $\overline{x \wedge_\alpha y} \equiv \bar{x} \vee_\alpha \bar{y}$.
5. $\overline{x \vee_\alpha y} \equiv \bar{x} \wedge_\alpha \bar{y}$.
6. $x \wedge_\alpha y + x \vee_\alpha y \equiv \frac{2}{1 + \alpha}(x + y)$.
7. $(x \wedge_\alpha y)(x \vee_\alpha y) \equiv \frac{2}{1 + \alpha}xy$.
8. $x \wedge_\alpha y = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 0, y \geq 0$ або $y = 0, x \geq 0$.
9. $x \vee_\alpha y = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 0, y \leq 0$ або $y = 0, x \leq 0$.

Функції системи R_1 , додатково до властивостей 1–9, мають також властивості:

10. $x \wedge_1 x \equiv x$.
11. $x \vee_1 x \equiv x$.
12. $x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|$.
13. $x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|$.

$$14. x \wedge_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \wedge_1 z \equiv x \wedge_1 y \wedge_1 z.$$

$$15. x \vee_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \vee_1 z \equiv x \vee_1 y \vee_1 z.$$

$$16. x \wedge_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \vee_1 (x \wedge_1 z).$$

$$17. x \vee_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \wedge_1 (x \vee_1 z).$$

$$18. (x \wedge_1 y) \vee_1 x \equiv x.$$

$$19. (x \vee_1 y) \wedge_1 x \equiv x.$$

Переконаємося, наприклад, у справедливості властивості 17, яку, використовуючи (2.4), можемо записати у вигляді $\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z))$.

Для визначеності, спочатку покладемо $x > y > z$, тоді $x \equiv x$. Якщо $x < y < z$, тоді $y \equiv y$. При $y < z < x$ одержимо $x \equiv x$. Аналогічно можна розглянути й усі інші варіанти. Недолік системи (2.4) – недиференційовність двомісних операцій уздовж прямих $x = y$.

Доведемо теорему, яка дозволить здійснювати оцінки значень результатів застосування R-операцій з R_α .

Теорема [27, 28].

Справедливі нерівності $x \wedge_\alpha y \leq \min(x, y) = x \wedge_1 y$, $x \vee_\alpha y \geq \max(x, y) = x \vee_1 y$.

Доведення. Нехай $x < y$, тоді

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) = \frac{1}{1+\alpha} \left(x + \alpha x + y - \alpha x - \sqrt{(y - \alpha x)^2 + x^2(1 - \alpha^2)} \right).$$

Оскільки $|\alpha| \leq 1$, то $\sqrt{(y - \alpha x)^2 + x^2(1 - \alpha^2)} > y - \alpha x$, і ми одержуємо, що

$$x \wedge_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha} ((1+\alpha)x - \delta^2) < x,$$

$$\text{де } \delta^2 = \sqrt{(y - \alpha x)^2 + x^2(1 - \alpha^2)} - y + \alpha x.$$

Доведення нерівності $x \vee_\alpha y \geq \max(x, y)$ аналогічне попередньому.

Дотепер, говорячи про достатньо повні і інші системи R-операцій, ми звертали увагу лише на їхню належність до відповідних гілок, обумовлених заданими булевими функціями. При цьому, щоб скоротити в майбутньому обчислювальні витрати, прагнули до простоти одержуваних формул і зручності їх алгебраїчних властивостей. Однак не менш важливими є й диференціальні властивості R-операцій, що вводяться.

Згаданий вище множник $\frac{1}{1+\alpha}$ використовується при доведенні наступної теореми.

Теорема [27, 28].

Нехай $\sigma_1, \sigma_2 : E^2 \rightarrow E$ — диференційовані функції. Тоді, якщо $\alpha = \text{const}$, для будь-якого напрямку ℓ

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \wedge_{\alpha} \sigma_2) = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, & \text{при } \sigma_1 = 0, \sigma_2 > 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, & \text{при } \sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \vee_{\alpha} \sigma_2) = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, & \text{при } \sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, & \text{при } \sigma_2 = 0, \sigma_1 < 0 \end{cases}.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \wedge_{\alpha} \sigma_2) &= \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} - \frac{\sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} + \sigma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} - \alpha \left(\sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} + \sigma_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\alpha \sigma_1 \sigma_2}} \right) \Bigg|_{\substack{\sigma_1=0 \\ \sigma_2>0}} = \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} - \frac{\sigma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} - \alpha \sigma_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}}{|\sigma_2|} \right) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна отримати доведення другої частини теореми. Природно, ці результати справедливі й для часткового випадку, коли $\alpha \equiv 0$, тобто для системи R_0 . Теорему буде неодноразово використано надалі.

Слід зазначити, що система R_0 є однією з найпростіших, однак R-операції $\wedge_0, \vee_0$, що входять до неї, мають розриви похідних в точці $(0,0)$, що не у всіх ситуаціях є припустимим.

Дійсно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x \wedge_0 y) &= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x \wedge_0 y) = -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \\ \frac{\partial}{\partial y}(x \wedge_0 y) &= 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x \wedge_0 y) = -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \\ \nabla^2(x \wedge_0 y) &= 3 - \frac{2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \Delta(x \wedge_0 y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Якщо в цих формулах перейти до полярних координат $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$, то отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x \wedge_0 y) &= 1 - \cos \varphi; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x \wedge_0 y) = -\frac{\sin^2 \varphi}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial y}(x \wedge_0 y) = 1 - \sin \varphi; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x \wedge_0 y) = -\frac{\cos^2 \varphi}{r}. \\ \nabla^2(x \wedge_0 y) &= 3 - 2(\sin \varphi + \cos \varphi); \quad \Delta(x \wedge_0 y) = -\frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Аналогічні вирази отримаємо для $\vee_0$. Звідси видно характер поведінки похідних у точці (0,0). Цей недолік легко усунути, якщо скористатися тим, що при множенні на додатні множники R-операції не змінюють знак, і, отже, не виходять за межі відповідних гілок. Так, якщо помножити $x \wedge_0 y$ й $x \vee_0 y$ на $(x^2 + y^2)^{m/2}$, прийдемо до системи R_0^m [27, 28]:

$$\begin{cases} x \wedge_0^m y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{m/2} \\ x \vee_0^m y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{m/2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (2.5)$$

Якщо, наприклад, у формулі $x \wedge_0^m y$ перейти до полярних координат, то отримаємо $x \wedge_0^m y = r^{m+1}(\cos \varphi + \sin \varphi - 1)$, і при $r = 0$ частки похідні аж до порядку m будуть безперервними. Аналогічний результат отримаємо й для $x \vee_0^m y$. Поряд з наведеними вище, застосовуються й інші досить повні системи R-функцій. Перелічимо їх [27, 28]:

Система R_p :

$$\begin{cases} x \wedge_p y \equiv x + y - \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p} \\ x \vee_p y \equiv x + y + \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}, \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases}, \quad (2.6)$$

де $p > 1$. (Система R_p є узагальненням системи R_0 , тому що при $p = 2$ $R_p = R_0$. Система R_p використовувалася рідко, але представляється перспективною.) Ситуація, у якій система R_p має переваги в порівнянні з іншими наведеними вище системами, визначається наступною теоремою:

Теорема [27, 28].

Нехай $\sigma_1, \sigma_2 : E^n \rightarrow E, \sigma_1, \sigma_2 \in C^{m-1}(E^n)$, тоді, якщо

$$L_k = \sum_{|s|=0}^k a_s \frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, \quad s = (s_1, \dots, s_n), \quad |s| = s_1 + \dots + s_n \quad \text{є лінійний диференціальний опера-}$$

тор, то при $k < m$ вірними є рівності:

$$L_k(\sigma_1 \wedge_p \sigma_2) = \begin{cases} L_k(\sigma_1), \sigma_1 = 0, \sigma_2 > 0 \\ L_k(\sigma_2), \sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0 \end{cases}, \quad L_k(\sigma_1 \vee_p \sigma_2) = \begin{cases} L_k(\sigma_1), \sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0 \\ L_k(\sigma_2), \sigma_2 = 0, \sigma_1 < 0 \end{cases}.$$

Доведення. Розглянемо точку в якій $\sigma_1 = 0, \sigma_2 > 0$. Тоді в деякому околі цієї точки $|\sigma_1| < \sigma_2$. Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge_p \sigma_2 &\equiv \sigma_1 + \sigma_2 - \left(|\sigma_1|^p + |\sigma_2|^p\right)^{1/p} = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2 \left(1 + \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|^p\right)^{1/p} = \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2 \left(1 + \frac{1}{p} \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|^p + o\left(\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|^p\right)\right) = \sigma_1 + o(\sigma_1^p). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що всі похідні порядку нижче p при $\sigma_1 = 0$ дорівнюють відповідним похідним від σ_1 . Аналогічно доводимо відповідне твердження для $\sigma_1 \vee_p \sigma_2$.

Зауваження. Оскільки при $m = 2$ $R_p = R_0$, то з наведеної теореми випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \wedge_p \sigma_2) = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, \sigma_1 = 0, \sigma_2 > 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, \sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0 \end{cases};$$

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(\sigma_1 \vee_p \sigma_2) = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell}, \sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell}, \sigma_2 = 0, \sigma_1 < 0 \end{cases}.$$

Система R_p [27, 28].

$$\begin{cases} x \wedge_p y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{SR}{8\rho^2}(SR + |SR|)} \\ x \vee_p y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{SR}{8\rho^2}(SR + |SR|)}, \\ \bar{x} = -x & SR = \rho^2 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

де ρ — радіус заокруглення кутів.

Проведемо дослідження формули (2.7) для використання при сполученні двох прямих, що перетинаються, залежно від кута між ними. Нехай $f_1 = x \geq 0$ і $f_2 = y \geq 0$, тобто кут розчину – прямий. Тоді маємо

$$x \wedge_p y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{8\rho^2}(\rho^2 - x^2 - y^2)(|\rho^2 - x^2 - y^2| + \rho^2 - x^2 - y^2)}. \quad (2.8)$$

Після перетворень в околі сполучення (2.8), де $x^2 + y^2 < \rho^2$, отримаємо нормалізовану функцію, якій відповідає дуга окружності радіуса ρ із центром у точці (ρ, ρ) , яка сполучає розглянуті прямі. Дійсно,

$$\begin{aligned} & x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4\rho^2}(\rho^2 - x^2 - y^2)^2} = \\ & = x + y - \frac{1}{2\rho} \left[\sqrt{4\rho^2 x^2 + 4\rho^2 y^2 + \rho^4 + x^4 + y^4 - 2\rho^2 x^2 - 2\rho^2 y^2 + 2x^2 y^2} \right] = \\ & = x + y - \frac{1}{2\rho} \sqrt{(\rho^2 + x^2 + y^2)^2} = x + y - \frac{1}{2\rho} (\rho^2 + x^2 + y^2) = \\ & = \frac{1}{2\rho} [2\rho x + 2\rho y - \rho^2 - x^2 - y^2] = \frac{1}{2\rho} [\rho^2 - (x - \rho)^2 - (y - \rho)^2]. \end{aligned}$$

Покажемо, що при куті між розглянутими прямими $\neq 90^\circ$, сполучення за допомогою $\wedge_\rho$ дає дугу еліпса, симетричну відносно бісектриси кута розчину, а не дугу окружності, як можна було б припустити. Якщо $f_1^2 + f_2^2 \leq \rho^2$, і

$$f_1 = \frac{y - kx}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad f_2 = \frac{y + kx}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{то отримаємо}$$

$$\begin{aligned} f_1 \wedge_\rho f_2 &= f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \frac{1}{4\rho^2}(\rho^2 - f_1^2 - f_2^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2\rho} [\rho^2 - (f_1 - \rho)^2 - (f_2 - \rho)^2] = \frac{1}{2\rho} [\rho^2 - f_1^2 - \rho^2 + 2f_1\rho - f_2^2 - \rho^2 + 2f_2\rho] = \\ &= \frac{1}{2\rho} [-f_1^2 - f_2^2 - \rho^2 + 2f_1\rho + 2f_2\rho] = \frac{2y}{\sqrt{1 + k^2}} - \frac{\rho^2}{2\rho} - \frac{2y^2 + 2k^2x^2}{(1 + k^2)2\rho} = \\ &= \frac{1}{2\rho(k^2 + 1)} (4\rho y \sqrt{1 + k^2} - \rho^2(1 + k^2) - 2y^2 - 2k^2x^2) = \\ &= \frac{1}{\rho(k^2 + 1)} \left(-(y - R)^2 - k^2x^2 + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{2}{\rho(k^2 + 1)R^2k^2} \left(-\frac{(y - R)^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 1 \right), \end{aligned}$$

де $R = \rho\sqrt{1 + k^2}$.

Ми бачили, що булева рівнозначність може бути представлена формулою $X \sim Y = (X \wedge Y) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Y})$. R- функцію з гілки, що відповідає цій булевій функції, можна отримати, скориставшись будь-якою з досить повних систем. Однак навіть найпростіша з них приводить до досить громіздкої формули. Наприклад

$$(x \wedge_0 y) \vee_0 (\bar{x} \wedge_0 \bar{y}) = 2xy \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x + y - \sqrt{x^2 + y^2})^2} + (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})^2 \right)^{-1}.$$

Тому пропонується ввести для рівнозначності наступні формули:

$$\begin{aligned} x \overset{0}{\sim} y &= xy; & x \overset{1}{\sim} y &= \frac{xy}{|x| + |y|}; \\ x \overset{n}{\sim} y &= \frac{xy}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n}}}; & x \overset{n}{\sim}_\epsilon y &= \frac{xy}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n} + \epsilon(xy)^{2n}}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Перша із цих формул є найбільш простою, вона має прекрасні диференціальні властивості. Інші мають розриви похідних у точці $(0,0)$. Однак, на відміну від першої, вони мають і деякі корисні властивості. Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що всі операції рівнозначності є асоціативними.

Теорема. Всі операції рівнозначності (2.9) є асоціативними.

Доведення. Асоціативність першої формули з (2.9) очевидна. Проведемо доведення для останньої формули, більш загальної, ніж попередні

$$x \underset{\varepsilon}{\sim}^n y = \frac{xy}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n} + \varepsilon(xy)^{2n}}}.$$

$$\left(x \underset{\varepsilon}{\sim}^n y \right) \underset{\varepsilon}{\sim}^n z = \frac{\frac{xyz}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n} + \varepsilon(xy)^{2n}}}}{\sqrt[2n]{\left(\frac{xy}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n} + \varepsilon(xy)^{2n}}} \right)^{2n} + z^{2n} + \varepsilon \left(\frac{xyz}{\sqrt[2n]{x^{2n} + y^{2n} + \varepsilon(xy)^{2n}}} \right)^{2n}}} =$$

$$= \frac{xyz}{\sqrt[2n]{(xy)^{2n} + (xz)^{2n} + (yz)^{2n} + 2\varepsilon(xyz)^{2n}}} = x \underset{\varepsilon}{\sim}^n (y \underset{\varepsilon}{\sim}^n z);$$

Асоціативність операції $\underset{\varepsilon}{\sim}^n$ доведена.

Теорема. Нехай $\sigma_1, \sigma_2 : E^2 \rightarrow E$ – диференційовані функції. Тоді для будь-якого напрямку ℓ

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left(\sigma_1 \underset{\varepsilon}{\sim}^n \sigma_2 \right) = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} \text{sign } \sigma_2, & \text{якщо } \sigma_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} \text{sign } \sigma_2, & \text{якщо } \sigma_2 = 0. \end{cases}.$$

Доведення.

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left(\sigma_1 \underset{\varepsilon}{\sim}^n \sigma_2 \right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} \sigma_2 + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} \right) \sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} - \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} \right)}{\left(\sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} \right)^2} \Bigg|_{\sigma_1=0} =$$

$$= \frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} \text{sign } \sigma_2.$$

Аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\sigma_1 \underset{\varepsilon}{\sim}^n \sigma_2 \right) &= \\ &= \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \ell} \sigma_2 + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} \right) \sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon (\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} - \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon (\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} \right)}{\left(\sqrt[2n]{\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \varepsilon (\sigma_1 \sigma_2)^{2n}} \right)^2} \bigg|_{\sigma_2=0} = \\ &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial \ell} \operatorname{sign} \sigma_1, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

2.3 Предикатне завдання складних геометричних об'єктів

Діаграми Ейлера-Венна часто використовують для побудови складних ГО. Як вже відзначалось, деякі ГО розглядаються як прості (опорні) і задаються за допомогою характеристичних функцій, які за визначенням вважаються рівними одиниці в точках об'єкта й нулю поза ним. Нехай $\Sigma_i (i=1, m)$ – характеристичні функції ГО Σ_i (позначимо їх тією ж буквою), а $F(X_1, \dots, X_m)$ – деяка булева функція. Тоді рівняння

$$\Omega \equiv F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = 1, \quad (2.10)$$

яке називається предикатним рівнянням [28], визначає деякий об'єкт Ω , який називається складним. Завдання ГО у вигляді (2.10) називається предикатним. Дані прості об'єкти Σ_i відіграють роль будівельного матеріалу, а формула (2.10) визначає логіку побудови складного об'єкта Ω із простих. Зазначимо, що якщо функція F містить операцію заперечення $\bar{X}$, то Ω не обов'язково є замкненою множиною. Це видно, наприклад, з діаграм Ейлера-Венна для елементарних булевих функцій імплікації, рівнозначності, заперечення рівнозначності й операції Шеффера, представлених формулами, до яких входить операція заперечення. Якщо F – будь-яка із цих функцій, то предикатне рівняння $\Omega = [F(P) = 1]$ визначає множину, яка не є ні відкритою, ні замкненою

областю. Дійсно, вона не є замкненою, тому що їй не належать граничні ділянки, відзначені на діаграмах Ейлера-Венна пунктиром, і не є відкритою, тому що вона містить граничні ділянки, відзначені суцільною лінією.

Щоб взяти під контроль подібні ситуації і якимось чином врахувати, що при завданні безперервної функції σ виникають три замкнені ГО: $\sigma \geq 0$; $\sigma = 0$; $\sigma \leq 0$, необхідно внести деяке коригування в булеву алгебру, або, точніше, допустити можливість крім 0 і 1 існування й третього елемента. Позначимо його символом $\frac{1}{2}$. Для нас у першу чергу становить інтерес коригування для цього випадку діаграм Ейлера-Венна, оскільки саме вони використовуються при поданні складного об'єкта за допомогою простих.

Введемо оператор

$$S_2^{1/2}(\sigma) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}\sigma) = \begin{cases} 1, & \forall \sigma > 0 \\ \frac{1}{2}, & \forall \sigma = 0. \\ 0, & \forall \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Позначимо $X_i = S_2^{1/2}(\sigma_i)$. Очевидно, що X_i є дискретними величинами, які можуть набувати значень із множини $B_2^{1/2} = (0, \frac{1}{2}, 1)$, що складається з трьох елементів. Замість повної системи булевих операцій $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$ введемо систему

$$H^{1/2} = \{X \wedge_1 Y, X \vee_1 Y, \bar{X}\}, \quad (2.12)$$

яка визначається формулами

$$\begin{aligned} X_1 \wedge_1 X_2 &= \min(X_1, X_2); \\ X_1 \vee_1 X_2 &= \max(X_1, X_2); \\ \bar{X} &= 1 - X. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналоги інших елементарних булевих операцій визначаються формулами

$$\begin{aligned} X \rightarrow_1 Y &= \bar{X} \vee_1 Y; \\ X \sim_1 Y &= (\bar{X} \wedge_1 \bar{Y}) \vee_1 (X \wedge_1 Y); \\ X \approx_1 Y &= (X \vee_1 Y) \wedge_1 (\bar{X} \vee_1 \bar{Y}); \\ X /_1 Y &= \bar{X} \vee_1 \bar{Y}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Неважко переконатися, що для операцій (2.13) виконуються всі властивості 1–19, крім 12. $X \wedge \bar{X} = 0$; 13. $X \vee \bar{X} = 1$, які в цьому випадку мають вигляд

$$X \wedge_1 \bar{X} = 0 \text{ або } \frac{1}{2}; \quad X \vee_1 \bar{X} = 1 \text{ або } \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

Наведена нижче таблиця 2.1 дозволяє, наприклад, перевірити властивість 10. У ній наведені послідовно розташовані таблиці значень функцій, з яких складені ліва й права частини цієї властивості.

Аналогічні таблиці можна побудувати для перевірки всіх інших властивостей. Таким чином, якби у формулах (2.15) не було варіанта «або $\frac{1}{2}$ », то ми мали б для введених операцій (2.13) звичайну булеву алгебру. Інакше кажучи, якщо в таблиці якої-небудь функції $Y = F(X_1, \dots, X_m): (B_2^{1/2})^m \rightarrow B_2^{1/2}$, що належить $M(H^{1/2})$, викреслити рядки, що містять $\frac{1}{2}$, то одержимо таблицю звичайної булевої функції. Таке на перший погляд незначне відхилення від двозначної логіки ілюструє згаданий факт, що з безперервною функцією σ з'являються не два, а три ГО. При цьому ГО $\sigma = 0$ є частиною кожного з ГО $\sigma \geq 0$ або $\sigma \leq 0$, але не обов'язково є їхньою границею, навіть якщо функція σ нескінченне число раз диференційована.

Таблиця 2.1.

Перевірка справедливості властивості 10

X_1	X_2	$X_1 \wedge_1 X_2$	$\overline{X_1 \wedge_1 X_2}$	$\overline{X_1}$	$\overline{X_2}$	$\overline{X_1} \vee_1 \overline{X_2}$
0	0	0	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	1	1	0	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	0	0	0	0

Приклад. Нерівність $\left(|x^2 - 1| - x^2 + 1 \right)^m x \geq 0$ визначає на площині xOy півплощину $\Omega = (x \geq -1)$. Однак рівняння $\left(|x^2 - 1| - x^2 + 1 \right)^m x = 0$ (його ліва частина $m-1$ раз

неперервно диференційована!), визначає на $x \in \Sigma$ вертикальну смугу $\Sigma = \{1 - x^2 \geq 0\}$, що лежить між прямими $x \pm 1$, а не границю $\partial\Omega = (x + 1 = 0)$ області Ω .

Наведену вище алгебру назвемо розширеною булевою алгеброю, у якій система $H^{1/2}$ є повною системою, а множина $M(H^{1/2})$ всіх функцій цієї алгебри є замкненою відносно операцій суперпозиції.

Неважко переконатися, що не всі відображення виду $(B_2^{1/2})^m \rightarrow B_2^{1/2}$, що є функціями тризначної логіки, побудованої на елементах $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, можуть бути включені в розширену булеву алгебру. Це видно з наступного прикладу.

Приклад. Функції $F: B_2^{1/2} \rightarrow B_2^{1/2}$, яка визначається таблицею 2.2, не може відповідати ніяка неперервна функція $f(x)$.

Таблиця 2.2.

Булева функція, якій не відповідає ніяка неперервна функція

X	$f(X)$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	0

Дійсно, із цієї таблиці випливає, що в деякій області дійсної осі $(-\infty, \infty)$ функція $f(x)$ від'ємна, а в інших точках – додатна. Отже, вона має розрив.

Це означає, що множина всіх функцій розширеної булевої алгебри є замкненою підмножиною множини зазначених функцій тризначної логіки. Схематично цей факт зображений на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Множина функцій тризначної логіки та її підмножини

Тепер, після введення розширеної булевої алгебри, ми можемо замість предикатного рівняння (2.10), у якому використовується булева функція F , використовувати предикатну нерівність

$$\Omega \equiv F((\sigma_1 \geq 0), \dots, (\sigma_m \geq 0)) \geq \frac{1}{2}, \quad (2.16)$$

або предикатне рівняння виду

$$\Omega \equiv F((\sigma_1 \geq 0), \dots, (\sigma_m \geq 0)) = \frac{1}{2}. \quad (2.17)$$

Це значить, що ГО $\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0) (i=1, m)$, які визначаються предикатними нерівностями (2.16) або предикатними рівняннями (2.17), можна поставити у відповідність замкнені множини, які є множинами нулів неперервних функцій.

Розглянемо ситуації, що виникають при побудові ГО, відповідних до діаграм Ейлера-Венна в розширеній булевій алгебрі. Спочатку розглянемо такі ГО, для яких ГО $\partial \Sigma_i = (\sigma_i = 0)$ визначає границю областей $\sigma_i < 0$ і $\sigma_i > 0$. Подібна ситуація є типовою і найбільш часто зустрічається. Ці умови виконуються, наприклад, для функцій виду $\sigma = y - f(x)$, $\sigma = x - \phi(y)$, $\sigma = P_m(x, y)$, де $P_m(x, y)$ – ціла раціональна функція (ступеневий поліном), тригонометричний або експонентний поліном і т.п.

Припустимо, що ГО Σ_1 й Σ_2 розташовані так, що мають загальні внутрішні точки. Тоді діаграми Ейлера-Венна будуть мати звичайний вигляд. Відмінність полягає лише в тому, що значення $\frac{1}{2}$ набувається на границі всіх отриманих областей. (Раніше з деяких діаграм Ейлера-Венна «випадали» ділянки границі. Тепер їх слід представляти суцільною лінією, оскільки розглянуті предикатні нерівності (2.16) або предикатні рівняння (2.17) передбачають включення в ГО точок, яким відповідає значення $\frac{1}{2}$).

На рис. 2.2 наведені діаграми Ейлера-Венна для основних елементарних функцій (примітивів) розширеної булевої алгебри $M(H^{1/2})$.

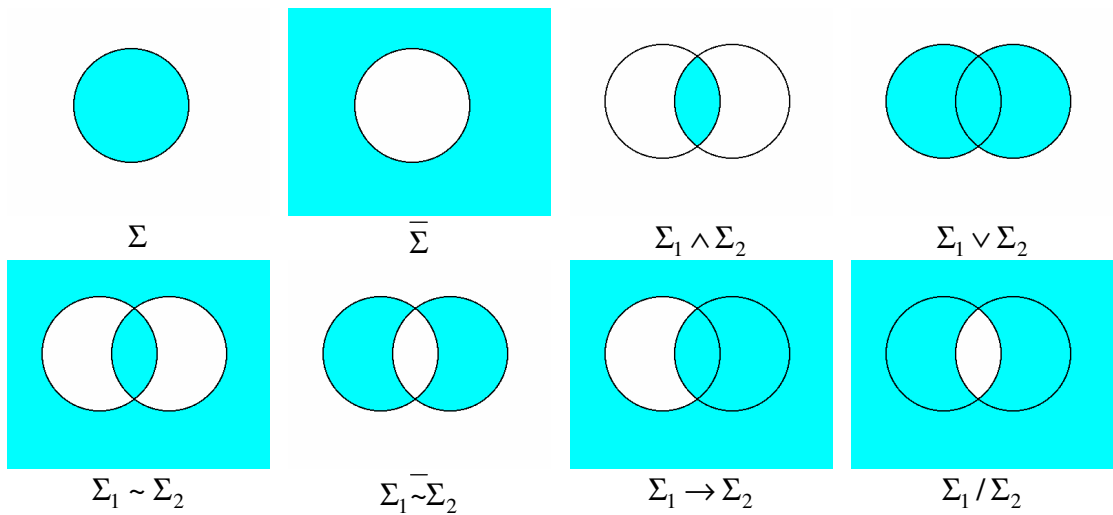


Рис. 2.2. Діаграми Ейлера-Венна для основних примітивів розширеної булевої алгебри

Завдання ускладнюється, якщо ГО $\Sigma_i (i=1, m)$, що беруть участь у формуванні Ω , складаються з ГО різної розмірності. Однак і в цьому випадку за допомогою предикатних нерівностей виду (2.16) або рівнянь виду (2.17) можна формувати ГО достатньо складного виду.

Тут будуть розглядатися такі ГО, які складаються зі скінченного числа ділянок ліній, поверхонь або областей.

Формування складної області Ω із простих областей Σ_i буде основною задачею в предикатному описі складних об'єктів. Після введення R-функцій ця задача стане відігравати роль стандартної допоміжної процедури, що передуватиме побудові рівнянь складних ГО в тому розумінні, яке прийнято в аналітичній геометрії. Вона буде використана не тільки для побудови рівнянь границь областей, але й для побудови ГО, що складаються з елементів різної розмірності.

Покажемо на конкретних прикладах деякі особливості розв'язання цієї задачі.

Приклад. Нехай дані прості (опорні) області:

$$\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0) \text{ – вертикальна смуга між прямими } x = \pm a,$$

$$\Sigma_2 = (b^2 - y^2 \geq 0) \text{ – горизонтальна смуга між прямими } y = \pm b,$$

$$\Sigma_3 = (c^2 - x^2 \geq 0) \text{ – вертикальна смуга між прямими } x = \pm c,$$

$$\Sigma_4 = (d^2 - y^2 \geq 0) \text{ – горизонтальна смуга між прямими } y = \pm d,$$

а складний ГО Ω визначається логічною формулою

$$\Omega = (\Sigma_1 \wedge_1 \Sigma_2) \wedge_1 (\Sigma_3 \vee_1 \Sigma_4) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

Неважко помітити, що цей ГО є хрестоподібною областю, зображеною на рис. 2.3, за умови, що $a > c$, $b > d$.

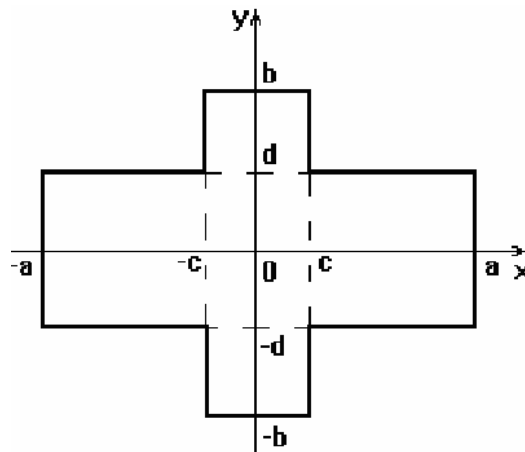


Рис. 2.3. Хрестоподібна область

Вище були задані опорні області й логічна формула, що визначає складний ГО. Однак частіше задача ставиться так: заданий складний ГО, треба вибрати опорні (прості) області й побудувати відповідну логічну формулу. У наведеному прикладі сама форма хрестоподібної області, якщо вважати її заздалегідь відомою, підказує, що в якості опорних областей треба вибрати смуги $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, а в якості логічної формули – (2.18). Однак це не завжди так. Задача вибору опорних ГО й логічної формули може виявитися значно складнішою. Розглянемо спочатку приклад.

Приклад. ГО на рис. 2.4 обмежений суцільною лінією. Треба вибрати опорні області й побудувати логічну формулу. На перший погляд все здається дуже простим.

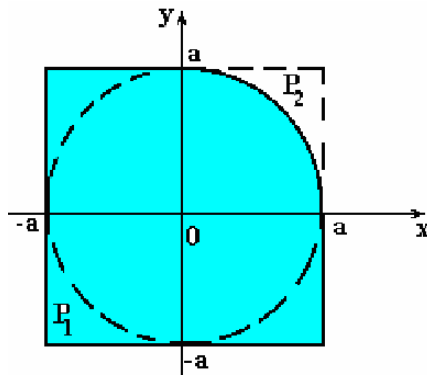


Рис. 2.4. ГО, для якого не існує булевої функції $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$

Дійсно, границя ГО складається з ділянок границь трьох ГО: $\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0)$; $\Sigma_2 = (a^2 - y^2 \geq 0)$; $\Sigma_3 = (a^2 - x^2 - y^2 \geq 0)$, тому логічним представляється обмежитися цими ГО. Виявляється, однак, що не існує такої булевої функції $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$, яка визначає ГО, що розглядається. Дійсно, точки P_1 і P_2 перебувають в однаковому логічному відношенні до ГО $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, а саме: першим двом з них вони належать, а третьому – ні. Отже, формула $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$, якби вона існувала для ГО Ω , в обох цих точках приймала б однакові значення, що неможливо. Отже, для побудови предиката зазначених опорних ГО недостатньо, і необхідно до них додати деякий ГО, що відокремлює точки типу P_1 від точок типу P_2 . Наприклад, у якості такого додаткового опорного ГО можна взяти напівплощину, розташовану лівіше прямої, яка визначається точками $(a, 0), (0, a)$:

$$\Sigma_4 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Можна також взяти ГО Σ_4 , розташований поза окружністю радіуса a із центром у точці (a, a) : $\Sigma_4 = [(x-a)^2 + (y-a)^2 - a^2] \geq 0$. І в одному, і в іншому випадках логічна формула буде мати вигляд $\Omega = ((\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \wedge \Sigma_4) \vee \Sigma_3 \geq \frac{1}{2}$. Тобто, фактично ми спочатку побудували область, зображену на рис. 2.5: а – у випа-

дку, коли Σ_4 – напівплощина; б – у випадку, коли Σ_4 – окружність, а потім «додали» Σ_3 .

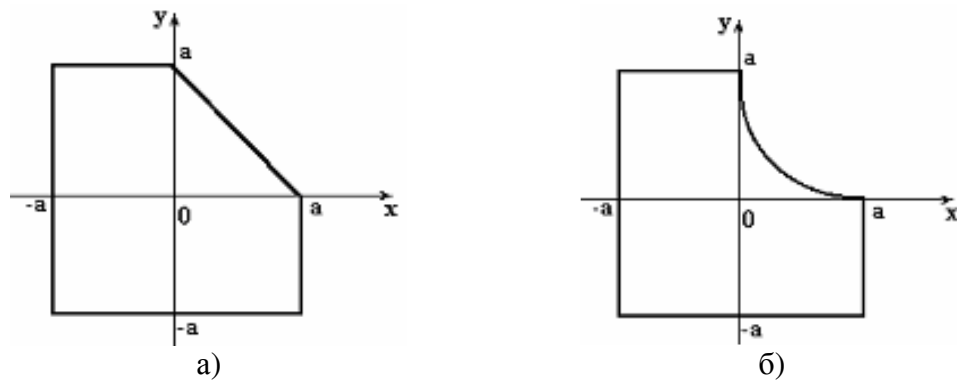


Рис. 2.5. Побудова ГО за участю опорної функції Σ_4

Приклад. Розглянемо область, обмежену дугами трьох окружностей, кожну з яких задано трьома точками (рис. 2.6). За цими даними одержимо три кола:

$$\Sigma_i = [\omega_i(x, y, x_1^i, y_1^i, x_2^i, y_2^i, x_3^i, y_3^i) \geq 0] (i = 1, 2, 3),$$

і побудуємо предикат

$$\Omega = \bigvee_i \Sigma_i, (i = 1, 2, 3). \quad (2.19)$$

Однак, якщо вхідні параметри (координати точок x_j^i, y_j^i) представлені буквами, то для деяких їх значень ця формула може не дати бажану область. Наприклад, при зазначеному на рис. 2.6 розташуванні кіл, маленький криволінійний трикутник, розташований в області Ω , не буде їй належати, оскільки його точки перебувають у такому ж логічному відношенні до області Ω , обумовленому формулою (2.19), як і зовнішні точки.

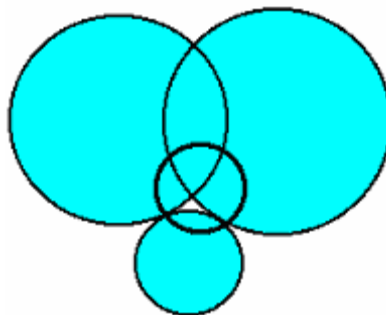


Рис. 2.6. Область, обмежена дугами трьох окружностей

Отже, необхідно ввести додаткову область Σ_4 (наприклад, таку, як позначена на рис. 2.6 жирною лінією), яка відокремлювала б точки цього трикутника від точок, зовнішніх по відношенню до Ω . Після цього предикат для Ω можна написати у вигляді

$$\Omega = \left(\bigvee_i \Sigma_i \right) \vee \Sigma_4, (i = 1, 2, 3).$$

Природно, якщо вхідна інформація буквена, то й Σ_4 треба задавати нерівністю в буквеному виді. Наприклад, можна взяти точки перетинання окружностей і в якості Σ_4 взяти трикутник з вершинами в точках перетинання розглянутих окружностей.

Приклад. Побудуємо в 3D ГО у вигляді шахової фігури – пішака, який подано на рис. 2.7, а.

Вибираємо такі опорні ГО:

$$\Sigma_1 = \left(\frac{7}{16} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 4 \right)^2 - z \geq 0 \right); \quad \Sigma_2 = (9 - x^2 - y^2 \geq 0); \quad \Sigma_3 = (z(7 - z) \geq 0);$$

$$\Sigma_4 = (1 - x^2 - y^2 - (7 - z)^2 \geq 0); \quad \Sigma_5 = (2 - x^2 - y^2 - 9(6 - z)^2 \geq 0).$$

Тут Σ_1 – ГО, отриманий при обертанні параболи навколо осі Oz , Σ_2 – циліндр, віссю якого є ось Oz , Σ_3 – шар, паралельний площині xOy , Σ_4 – сфера, а Σ_5 – еліпсоїд. Для предиката легко написати формулу

$$\Omega = (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3) \cup (\Sigma_4 \cup \Sigma_5).$$

На рис. 2.7, б представлена її візуалізація.

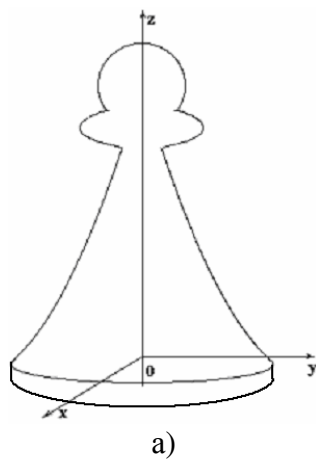


Рис. 2.7. ГО у вигляді пішака

2.4 Основна теорема теорії R-функцій. Побудова рівнянь границь геометричних об'єктів

Нехай є деяка система опорних областей

$$\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0) = S_2(\sigma_i), (i = \overline{1, m}), \quad (2.20)$$

які будемо вважати «простими» і використовувати для формування «складних» областей.

Теорема [27, 28]. Дані опорні області $\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0) (i = \overline{1, m})$ й $\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = 1$ – предикатне рівняння, що визначає складну область Ω , а $f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – R-функція, для якої $F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \in M(H)$ є супровідною. Тоді нерівність $f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \geq 0$ визначає область Ω , а рівняння $f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0$ – її границю.

Доведення. Дійсно,

$$S_2(f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)) = F(S_2(\sigma_1), \dots, S_2(\sigma_m)) = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = \Omega.$$

З іншого боку, згідно визначення оператора S_2 ,

$$S_2(f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)) = \begin{cases} 1, & f \geq 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}.$$

Таким чином,

$$\Omega = \begin{cases} 1, & f \geq 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Наслідок. Оскільки будь-яка функція $F(X_1, \dots, X_m) \in M(H)$ може бути представлена у вигляді суперпозиції функцій $\{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$, то побудова R-функції, для якої $F(X_1, \dots, X_m)$ є супровідною, легко здійснити простою заміною символів логічних операцій символами якої-небудь із досить повних систем R-функцій, а символів X_i , що приймають дискретні значення 0 або 1 – на символи x_i , що неперервно міняються на інтервалі $(-\infty, \infty)$. У результаті одержуємо

простий спосіб переходу від предикатного завдання складних областей до їхнього аналітичного завдання, прийнятого в аналітичній геометрії.

Вибір тієї або іншої досить повної системи залежить від додаткових вимог до одержуваного рівняння ГО, які можуть виникнути в додатках (наприклад, вимога диференційованості до заданого порядку, яка виникає в математичній фізиці, простоти обчислень, певного характеру поведінки на нескінченності і т.д.).

Приклад. Прямокутник з вершинами в точках $(\pm a, \pm b)$ можна представити у вигляді перетинання смуг

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2,$$

$\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0)$ – вертикальна смуга між прямими $x = \pm a$,

$\Sigma_2 = (b^2 - y^2 \geq 0)$ – горизонтальна смуга між прямими $y = \pm b$.

Скористаємося доведеною теоремою та R-кон'юнкцією $x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Підставляючи замість Σ_1, Σ_2 ліві частини відповідних нерівностей, одержимо

$$\omega \equiv (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0, \quad (2.21)$$

тобто елементарне рівняння розглянутого прямокутника. Сімейство екіпотенціалей (ліній рівня) функції $\omega(x, y)$, обумовлене рівнянням $\omega(x, y) = \text{const}$, розраховане для значень $a = 2, b = 1$, подано на рис. 2.8.

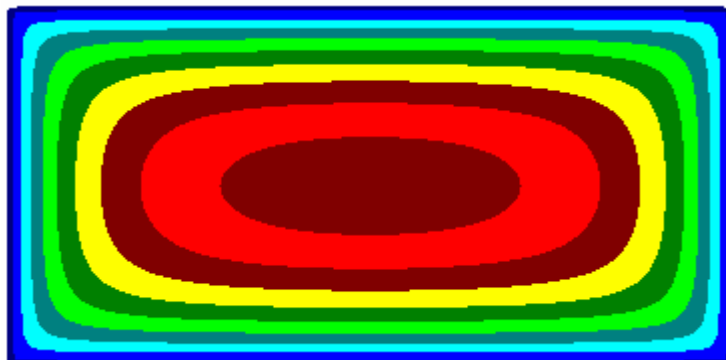


Рис. 2.8. Лінії рівня прямокутника

Зауваження. Може виникнути спокуса позбутися радикала в рівнянні (2.21). Розглянемо, що при цьому відбудеться. Переносячи корінь у праву частину рівняння й підносячи обидві частини останнього до квадрата, послідовно одержимо:

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 + b^2 - y^2 &= \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2}; \\ (a^2 - x^2 + b^2 - y^2)^2 &= (a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2; \\ 2(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Неважко переконатися в тому, що останнє рівняння є рівнянням двох пар паралельних прямих $x = \pm a$, $y = \pm b$, а не квадрата. Виникає питання: чому це відбулося? Відповідь досить проста: при піднесенні до квадрата з'явилися додаткові корені в рівнянні (2.21) – координати точок, що являють собою продовження сторін розглянутого прямокутника (рис. 2.9).

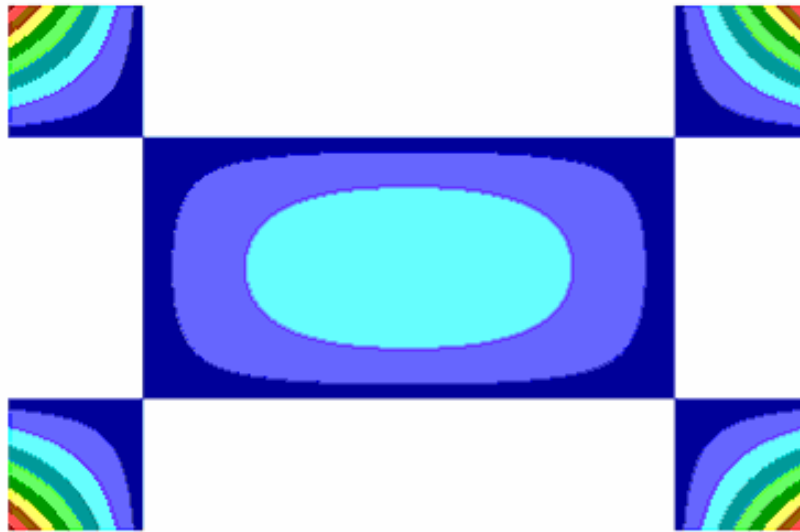


Рис. 2.9. Продовження сторін прямокутника

Приклад. Побудувати рівняння границі ГО, зображеного на рис. 2.10, а.

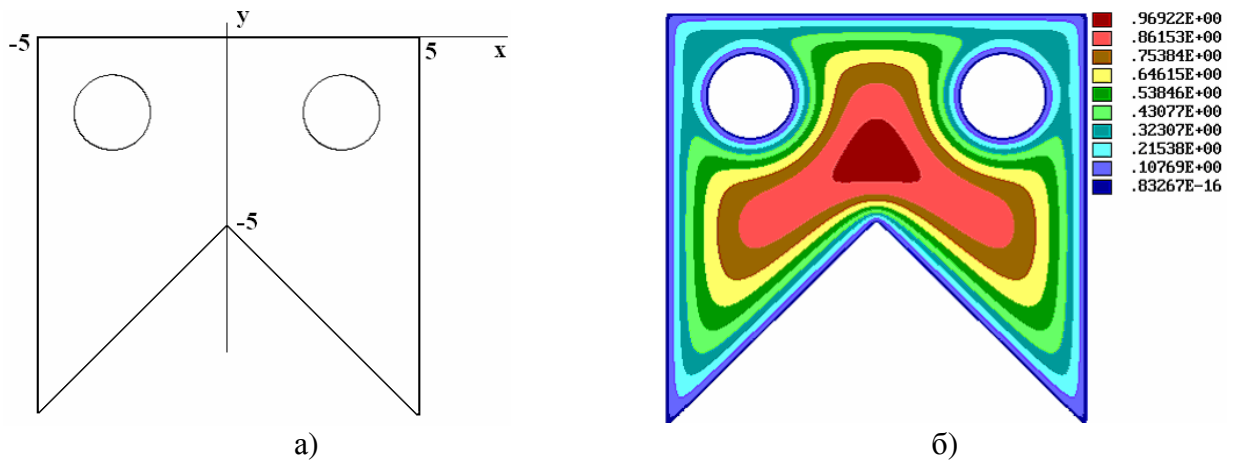


Рис. 2.10. Границя та лінії рівня ГО

Опорні функції для цього вибираємо у вигляді

$$f_1 = 1 - (x+3)^2 - (y+2)^2 \geq 0; \quad f_2 = 1 - (x-3)^2 - (y+2)^2 \geq 0;$$

$$f_3 = 5 + x + y \geq 0; \quad f_4 = 5 - x + y \geq 0; \quad f_5 = 25 - x^2 \geq 0; \quad f_6 = -y \geq 0.$$

Рівняння границі ГО має вигляд

$$\omega \equiv ((25 - x^2) \wedge_0 (-y)) \wedge_0 ((5 + x + y) \vee_0 (5 - x + y)) \wedge_0 \\ \wedge_0 \left(\left(1 - (x+3)^2 - (y+2)^2 \right) \wedge_0 \left(1 - (x-3)^2 - (y+2)^2 \right) \right) = 0.$$

Можна розкрити операції кон'юнкції та диз'юнкції й отримати довгий вираз, що раніше дослідники й робили. Зараз же процес розкриття операцій кон'юнкції та диз'юнкції виконує комп'ютер.

На рис. 2.10, б зображена картина ліній рівня функції $\omega(x, y)$.

2.5 Нормалізовані рівняння геометричних об'єктів

На відміну від класичного поняття нормалі, яке вводиться для гладких ГО, нам знадобиться узагальнення цього поняття, яке в принципі годиться для будь-якої замкненої множини [28].

Нехай $\partial\Omega \subset E^n$ – деяка замкнена множина, P – деяка точка на $\partial\Omega$, а $\{Q_i\}$ – множина найближчих точок до точки P . Із точок $\{Q_i\}$ проведемо одиничні

вектори в напрямку до точки P й назовемо їх нормаллями до $\partial\Omega$. Здійснимо таку побудову для будь-яких точок $P \in \partial\Omega$. У результаті одержуємо множину, яку назовемо множиною нормалей до $\partial\Omega$. Наприклад, для ГО, зображеного на рис. 2.11, ця множина має такий вигляд: для гладких ділянок ГО (точки A, B, E) це узагальнення нормалі збігається зі звичайним поняттям, а для деяких точок (для точки D й для внутрішніх точок зачерненої області) множина нормалей є порожньою. Кутовим точкам (C) відповідає ціле «віяло» нормалей, розмірність якого залежить від розмірності простору й розмірності ГО в околі розглянутої точки. Для цього віяла нормалей характерним є наступне: якщо $v_1, \dots, v_m$ – якісь із нормалей цього віяла, тоді й вектори $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m$, де $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i^2 = 1$, також належать цьому віялу. Очевидно, що віяло укладене у деякий конус, що міститься в E^n . Розмірність цього конуса дорівнює розмірності мінімального підпростору E^n , у який воно може бути укладене. Якщо точка належить гладкій ділянці ГО, який має розмірність m , то розмірність віяла нормалей дорівнює $n-m$, де n – розмірність простору. Розмірність границі елемента розмірності m не перевищує $m-1$. Наприклад, нехай у тривимірному просторі ГО являє собою поверхню куба плюс деяку ламану ABC . Тоді грань куба має розмірність 2, відповідне їй віяло нормалей для внутрішніх точок грані має розмірність 1. Розмірність ребра дорівнює 1, а віяла нормалей – 2. Для вершин куба, що мають розмірність 0, віяло нормалей має розмірність 3. Для внутрішніх точок куба віяло нормалей є порожньою множиною.

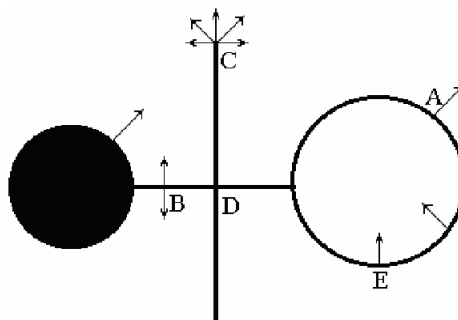


Рис. 2.11. Множина нормалей до ГО

У загальному випадку маємо рівність $n-m-t=0$, де t – розмірність віяла.

Використовуючи поняття нормалі, можна визначити такі характеристики ГО, як розмірність складових його частин і їх гладкість.

В аналітичній геометрії добре відомі нормальні рівняння прямої $x \cos \vartheta_1 + y \cos \vartheta_2 - p = 0$ і площини $x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 - p = 0$. Ці рівняння мають чудову властивість: результат підстановки в їхню ліву частину координат будь-якої точки дорівнює (з точністю до знака) відстаням від цієї точки до прямої або площини відповідно. Ця властивість наводить на думку ввести загальне поняття нормального рівняння ГО.

Визначення. Рівняння $f(P) = 0$ називається нормальним рівнянням ГО $\Omega \subset E^n$, якщо $f(P) = \inf_{Q \in \Omega} \|P - Q\|$, де $\|\dots\|$ – норма в E^n . Функцію $f(P)$ будемо називати нормальною функцією ГО Ω (слід зазначити, що $f(P)$ залежить від вибору норми).

Наведене вище визначення нормального рівняння трохи відрізняється від того, яке було дано нормальному рівнянню прямої. Дійсно, відповідно до даного визначення ми повинні будемо нормальним рівнянням прямої називати рівняння $|x \cos \alpha + y \sin \alpha - p| = 0$. У цьому є деяка незручність, оскільки раніше істотною характеристикою рівняння прямої була його лінійність. Однак це окупається придбаною перевагою – загальністю поняття нормального рівняння. Нормальне рівняння окружності радіуса R із центром у точці (a, b) має вигляд $\left| R - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right| = 0$.

До теперішнього часу багатьма авторами побудована велика кількість нормальних функцій ГО. Наприклад, нормальні рівняння відрізка прямої і дуги окружності в 2D були побудовані ще в 60-ті роки [31]. Зокрема, нормальне рівняння відрізка, що з'єднує точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ на площині, було отримано у вигляді

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{f_1^2}{\ell^2} + \frac{[\ell^2 - |f_2|]^2}{2\ell^2} \times \left[1 - \text{sign} \left(1 - \frac{f_2^2}{\ell^4} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

де $\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $f_1 = (2x - x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + (2y - y_1 - y_2)(x_2 - x_1)$,

$$f_2 = (2x - x_1 - x_2)(x_2 - x_1) + (2y - y_1 - y_2)(y_2 - y_1).$$

Нормальне рівняння дуги окружності з кінцями в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ і кутом θ між дотичною до дуги в точці (x_1, y_1) й хордою $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ має вигляд

$$\eta(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{2} [\xi(\bar{x}, \bar{y}) - \eta(\bar{x}, \bar{y})] [1 - \operatorname{sign} \zeta(\bar{x}, \bar{y})] = 0,$$

$$\text{де } \bar{x} = \frac{1}{2\ell} [(2x - x_1 - x_2)(x_2 - x_1) + (2y - y_1 - y_2)(y_2 - y_1)];$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2\ell} [(2x - x_1 - x_2)(y_2 - y_1) - (2y - y_1 - y_2)(x_2 - x_1)]; \quad \ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$\xi = \sqrt{\left(|x| - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}; \quad \eta = \left| \frac{\ell}{2 \sin \theta} - \frac{1}{2 \sin \theta} \sqrt{4x^2 \sin^2 \theta + (2y \sin \theta + \ell \cos \theta)^2} \right|;$$

$$\zeta = y \sin \theta + \left(\frac{\ell}{2} - |x| \right) \cos \theta.$$

Зазначимо, що при $\theta \rightarrow 0$ нормальна функція дуги переходить у нормальну функцію хорди, тому що при цьому $\eta \rightarrow |y|$; $\zeta \rightarrow \frac{\ell}{2} - |x|$, а величина ξ не залежить від θ . Тому отримуємо вираз, що тотожно збігається з наведеною вище нормальною функцією відрізка, а саме

$$|y| + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(|x| - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2} - |y| \right] \left[1 - \operatorname{sign} \left(\frac{\ell}{2} - |x| \right) \right] = 0.$$

Теорема. Якщо $f_i(x, y)$ – нормальні функції ГО Ω_i ($i = \overline{1, m}$), то функція $\varphi(x, y) = f_1(x, y) \wedge \dots \wedge f_m(x, y)$ є нормальною функцією з'єднання ГО Ω_i ($i = \overline{1, m}$).

Доведення. Дійсно, оскільки $x \wedge y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \min(x, y)$, маємо

$$\varphi(x, y) = \min(f_1, \dots, f_m) = \rho((x, y), \Omega), \text{ де } \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m.$$

За допомогою цієї теореми, маючи нормальні рівняння відрізка й дуги, неважко написати нормальне рівняння довільного ГО, що складається з дуг

окружностей і відрізків прямих. Природно, що цю процедуру легко автоматизувати.

Нехай потрібно написати формулу для визначення відстані від будь-якої точки площини xOy до ГО Ω , зображеного на рис. 2.12, а, який складається з осей координат, кола радіуса R із центром у початку координат і окружності того ж радіуса із центром у точці $(R,0)$.

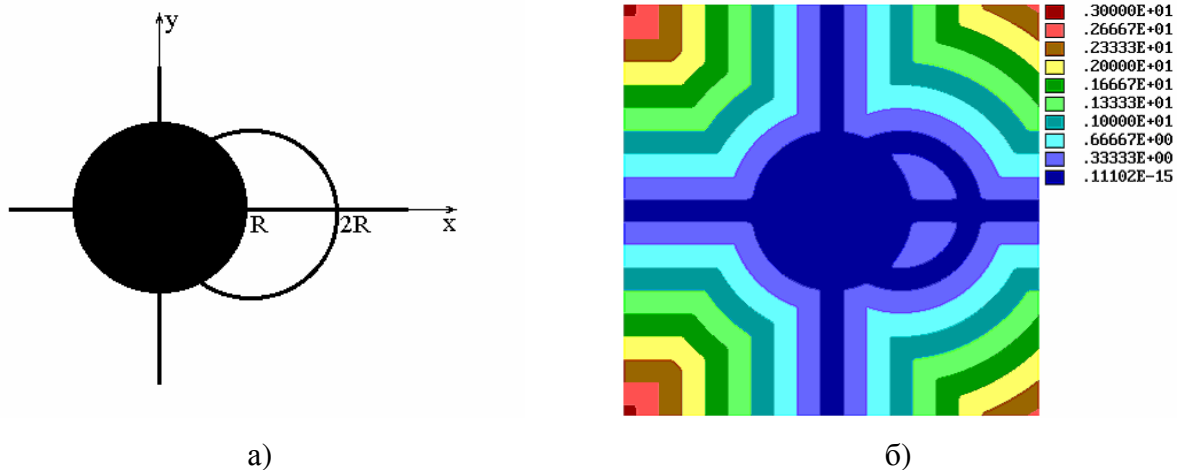


Рис. 2.12. ГО і візуалізація його нормального рівняння

Рівняння кола із центром у початку координат:

$$\frac{1}{2} \left(\left| R - \sqrt{x^2 + y^2} \right| - R + \sqrt{x^2 + y^2} \right) = 0. \text{ Рівняння окружності із центром у точці } (R,0):$$

$$\left| R - \sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right| = 0. \text{ Рівняння осей координат: } |x|=0, |y|=0. \text{ Тоді, згідно з}$$

теоремою, отримаємо таке нормальне рівняння ГО Ω :

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\left| R - \sqrt{x^2 + y^2} \right| - R + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \wedge_1 \left| R - \sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right| \wedge_1 |x| \wedge_1 |y| \right\} = 0.$$

Якщо в це рівняння підставити $R=1$ й координати будь-якої точки площини, то одержимо відстань від цієї точки до ГО Ω (рис. 2.12, б).

Якщо $f(P)$ – нормальна функція ГО Ω , то для неї справедливі рівності

$$f(P) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1, \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0, (k = 2, 3, \dots), \quad (2.22)$$

де ν – нормаль.

Визначення. Рівняння $\omega(P)=0$ границі ГО Ω називається нормалізованим до m -го порядку, якщо функція $\omega(P)$ задовольняє умовам

$$\omega(P) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1, \frac{\partial^k\omega}{\partial\nu^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0, (k = 2, 3, \dots, m). \quad (2.23)$$

Умови (2.23) означають, що уздовж нормалі, проведеної в точці $P_0 \in \partial\Omega$, функція $\omega(P)$ приблизно дорівнює відстані $r = r(P, \partial\Omega)$ від границі $\partial\Omega$ ГО до точок цієї нормалі. Дійсно, розкладаючи функцію ω в ряд в околі точки $P_0 \in \partial\Omega$ за напрямком нормалі ν , одержуємо

$$\omega(P) = r + \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}\omega(P_0 + \theta r\nu)}{\partial\nu^{n+1}} r^{n+1},$$

де $0 < \theta < 1, \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots), r = \|P_0 - P\|$. Очевидно, що нормальне рівняння границі ГО з урахуванням формул (2.22) є нормалізованим до будь-якого порядку. Однак недоліком нормального рівняння $f(P)=0$ є те, що функція $f(P)$ у внутрішніх точках ГО не завжди диференційована.

Методика побудови рівнянь границь ГО, яку описано у [33, 34], дозволяє забезпечити виконання умови

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} \neq 0. \quad (2.24)$$

Дійсно, якщо $\Sigma_i = [\sigma_i(x, y) \geq 0]$ і $\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i} \Big|_{\partial\Sigma_i} \neq 0$ (цю умову для опорних функцій зазвичай легко виконати), де ν_i – нормаль до $\partial\Sigma_i$, то при використанні достатньо повних систем R-функцій R_α, R_p у тих точках $\partial\Omega$, де одночасно $\omega=0$ і $\sigma_i=0$, одержуємо

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \pm \frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i} \Big|_{\partial\Omega} \neq 0. \quad (2.25)$$

Якщо прийняти, що нормаль ν спрямована в область, де $\omega > 0$, то умову (2.24) можна уточнити: $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} > 0$. Маючи рівняння $\omega_1=0$, таке, що $\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} > 0$, неважко побудувати рівняння $\partial\Omega \cap \omega=0$, нормалізоване до першого порядку.

Теорема. Якщо $\omega_1 \in C^m$ задовольняє умовам $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ і $\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} > 0$, то функція

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2}} \in C^{m-1} \quad (2.26)$$

задовольняє умовам нормалізованості до першого порядку у всіх точках елементів границі $\partial\Omega$ ГО, де визначено нормаль.

Доведення. З умови $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ випливає, що на $\partial\Omega$ функція ω зберігає постійне значення. Відомо, що градієнт функції спрямовано по нормалі до її еквіпотенціалей. Отже, в силу умови $\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} > 0$, нормаль ν має напрямок вектора $\text{grad } \omega_1$. Тому $\nu = \frac{\nabla\omega_1}{|\nabla\omega_1|}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} = |\nabla\omega_1|$. Диференціюючи (2.26), одержуємо

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} [\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2]^{-1/2} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial\nu} [\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2]^{-1/2} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} |\nabla\omega_1|^{-1} \Big|_{\partial\Omega} = 1.$$

З доведення цієї теореми випливає, що вираз в знаменнику у формулі (2.26) можна замінити будь-яким іншим виразом, що не дорівнює нулю, а на $\partial\Omega$ збігається з $|\nabla\omega_1|^{-1}$. Це дозволяє застосовувати також таку формулу:

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|_{\partial\Omega}}, \quad (2.27)$$

у припущенні, що $|\nabla\omega_1|_{\partial\Omega} \neq 0$ і є проста можливість продовжити $|\nabla\omega_1|_{\partial\Omega}$ усередину області Ω таким чином, що це продовження не дорівнюватиме нулю.

Наприклад, якщо $\omega_1 = y - \varphi(x)$, $|\nabla\omega_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$, то нормалізоване рівняння знаходимо за формулою

$$\omega = \frac{y - \varphi(x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}}. \quad (2.28)$$

Аналогічно, якщо $\omega_1 = x - \psi(y)$, $|\nabla\omega_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}$, можемо написати

$$\omega = \frac{x - \psi(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}}. \quad (2.29)$$

За цими формулами зручно приводити до нормалізованого виду функції, задані явно. Однак для функцій $\omega(x, y)$ складного виду безпосереднє застосування формул (2.26)–(2.27) сполучене зі значними обчислювальними труднощами. Тому на практиці частіше застосовується інший, більш заощадливий метод, що базується на властивостях деяких систем R-операцій, що дозволяє, нормалізувавши опорні функції (примітиви), перенести цю їхню властивість на рівняння відповідного складного ГО.

Для таких простих областей, як півплощина, смуга, шар, коло, сфера й багатьох інших, нормалізовані рівняння можна отримати шляхом введення простих нормувальних множників.

Наприклад, нормалізоване рівняння окружності можна записати одним із трьох способів:

$$\frac{R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} = 0, \quad \frac{R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{3R^2 + x^2 + y^2}} = 0. \quad (2.30)$$

Перше з цих рівнянь має розрив у початку координат, тому ми його розглядати не будемо. Друге з них дотепер застосовувалося найбільш часто. Однак при $R \rightarrow 0$ воно, всупереч очікуванням, не переходить у нормальне рівняння точки, яке має вигляд $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. І лише третє рівняння задовольняє всім умовам: неперервності, диференційованості, і переходить до нормального рівняння точки при $R \rightarrow 0$. Для горизонтальної смуги нормалізовані рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{b^2 - y^2}{2b} = 0, \quad \frac{b^2 - y^2}{\sqrt{3b^2 + y^2}} = 0. \quad (2.31)$$

Аналіз цих рівнянь аналогічний попередньому. Друге рівняння при $b \rightarrow 0$ переходить у нормальне рівняння $|y| = 0$ осі абсцис.

Теорема. Нехай $\{\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0)\}$ є деяка система ГО, рівняння границь яких $\sigma_i = 0$ нормалізовані до першого порядку: $\frac{\partial \sigma_i}{\partial v_i} = 1$ на $\partial \Sigma_i$. Тоді при використанні систем R-функцій R_α , R_p для побудови функції $\omega = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ буде виконуватися умова нормалізованості $\frac{\partial \omega}{\partial v} \Big|_{\partial \Omega} = 1$, де v – нормаль до $\partial \Omega$, спрямована в область $\Omega = (\omega \geq 0)$.

Доведення цієї теореми наведено в [28]. Таким чином, якщо рівняння $\sigma_i = 0$ опорних областей нормалізовані до першого порядку, то автоматично виявляється нормалізованим і рівняння $\omega(P) = 0$ границі складної області Ω . Більше того, якщо використовувати систему R_p при $p > m + 1$, то з нормалізованості опорних нерівностей $\sigma_i(P) \geq 0$ до порядку m випливає нормалізованість до порядку m також і рівняння $\omega(P) = 0$ [28].

Однак описаний алгоритм побудови нормалізованих рівнянь може не спрацювати в точках стику елементів, навіть якщо в цих точках границя є гладкою. При цьому у всіх інших точках ГО рівняння $\omega = 0$ буде нормалізованим. Простежимо це явище на наступному прикладі. Нехай $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$, де $\Sigma_1 = \left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \geq 0 \right)$ – область, розташована вище кубічної параболи, $\Sigma_2 = (y \geq 0)$ – верхня півплощина. Кожна з нерівностей нормалізована на границі відповідної їй області. Очевидно, що границя $\partial \Omega$ – гладка. Рівняння $\partial \Omega$ можна записати у вигляді

$$\omega \equiv \frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1 + \alpha} \left[\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} + y - \sqrt{\left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \right)^2 + y^2} - 2\alpha y \frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}} \right] = 0.$$

Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{2 - \sqrt{2 - 2\alpha}}{1 + \alpha}$. У такий спосіб похідна по нормалі до $\partial \Omega$ в

точці $(0,0)$ дорівнює одиниці, якщо $\alpha = 1$. Але якщо взяти $\alpha \neq 1$, то це буде означати, що ми вирішили скористатися R-операцією $x \wedge_1 y$, яка призводить до недиференційовності функції ω усередині розглянутої області. В інших же

точках $\partial\Omega$ умова $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=1$ виконується при будь-яких значеннях $\alpha < 1$. Для усунення цього недоліку виберемо функцію α , що задовольняє умові $|\alpha| < 1$, таким чином, щоб при $P \rightarrow (0,0)$ $\alpha \rightarrow 1$. Реалізувати це можна різними способами, наприклад, представивши α формулою $\alpha = \left(1 + \left(\frac{y - x^3}{\sqrt{1 + 9x^4}}\right)^2 + y^2\right)^{-1}$.

При такому підході величина α , що входить до системи

$$\{R_\alpha\} = \begin{cases} \omega_1 \wedge_\alpha \omega_2 = \frac{1}{1+\alpha} (\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}) \\ \omega_1 \vee_\alpha \omega_2 = \frac{1}{1+\alpha} (\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}) \end{cases},$$

залежить від опорних функцій. Це є особливо зручним в тих випадках, коли точки стику елементів границі заздалегідь невідомі або важко визначаються. Тобто, α можна вибирати у вигляді

$$\alpha = (1 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^{-1}. \quad (2.32)$$

Очевидно, що при такому виборі α умова $\alpha < 1$ виконується скрізь, за винятком точок стику елементів $\omega_1 = 0$ і $\omega_2 = 0$, де $\alpha = 1$.

Приклад. Написати нормалізоване у всіх регулярних точках границі рівняння ГО, зображеного на рис. 2.13.

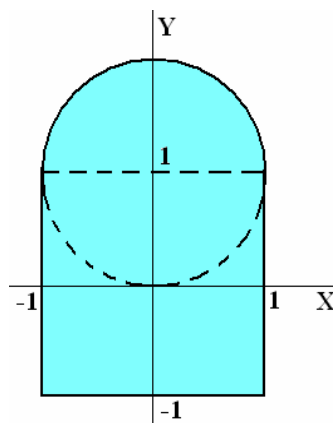


Рис. 2.13. ГО з прикладу

У якості опорних областей вибираємо

$$\Sigma_1 = \left[\frac{1-x^2}{2} \geq 0 \right], \quad \Sigma_2 = \left[\frac{1-y^2}{2} \geq 0 \right], \quad \Sigma_3 = \left[\frac{1-x^2 - (y-1)^2}{2} \geq 0 \right].$$

Усі наведені нерівності нормалізовані. Логічну формулу для ГО Ω будемо у вигляді $\Omega = (\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \vee \Sigma_3$. Якщо при побудові рівняння границі ГО замінити символи $\wedge, \vee$ на $\wedge_0, \vee_0$, то одержимо функцію ω , для якої умову нормалізованості в точках $(-1,1), (1,1)$ буде порушено, хоча в цих точках границя побудованої області є гладкою. Це явище достатньо яскраво видно як на картині ліній рівня функції ω (рис. 2.14, а), так і на картині ліній рівня $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$ (рис. 2.14, б). Якщо ж замінити символи $\wedge_0, \vee_0$ на $\wedge_\alpha, \vee_\alpha$, де $\alpha = \frac{1}{1 + \omega_1^2 + \omega_3^2}$, то одержимо результат, представлений на рис. 2.14, в, г, який ілюструє поведінку функції ω після усунення дефекту, пов'язаного з порушенням її нормалізованості в точках $(-1,1), (1,1)$.

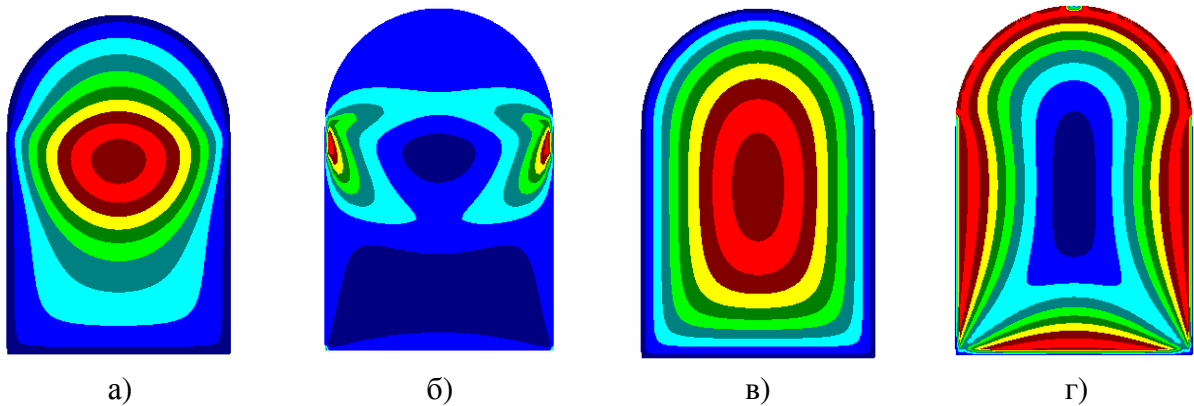


Рис. 2.14. Картина ліній рівня функції ω та квадрата її градієнта

Розглянемо питання про побудову нормалізованих до першого порядку рівнянь елементів границь.

Теорема. Якщо $\partial\Omega = (\omega = 0)$ — нормалізоване до першого порядку рівняння границі $\partial\Omega$, $\Sigma = (\sigma \geq 0)$ — деяка область, то рівняння

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 \tilde{\vee} \sigma} = 0, \quad (2.33)$$

де під символом $\tilde{\vee}$ мається на увазі символ однієї з R-диз'юнкцій $\vee_\alpha$ ($|\alpha| < 1$, $\alpha = \text{const}$), $\vee_p$ ($p \geq 2$), $\vee_m^0$ ($m > 1$), є нормалізованим рівнянням елемента

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cap \Sigma.$$

Доведення. Як показано в [28], рівняння (2.33) є рівняння $\partial\Omega_1$. Нехай для визначеності $\tilde{v} = v_\alpha$. Тоді при $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}\omega^2 v_\alpha \bar{\sigma} &= \frac{1}{1+\alpha} \left(\omega^2 - \sigma + \sqrt{\omega^4 + \sigma^2 + 2\alpha\omega^2\sigma} \right) = \frac{1}{1+\alpha} \left(\omega^2 - \sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{\omega^4 + 2\alpha\omega^2\sigma}{\sigma^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \left(\omega^2 - \sigma + \sigma \left[1 + \frac{2\alpha\omega^2}{\sigma} + o(\omega^2) \right] \right) = \omega^2 + o(\omega^2).\end{aligned}$$

Отже, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + o(\omega^2)} = |\omega| + o(\omega)$. Тому $\frac{\partial\omega_1}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial v} \text{sign}\omega + o(\omega)$. Таким чином, враховуючи, що $\omega > 0$ в області Ω , одержуємо $\frac{\partial\omega_1}{\partial v} \Big|_{\omega=+0} = \left| \frac{\partial\omega}{\partial v} \right| = 1$, що й було потрібно довести.

Однак залишилося недослідженим питання про поведінку функції ω_1 при $\omega \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$, тобто в кінцевих точках виділеного елемента границі. Для наочності розглянемо $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 v_0 \bar{\sigma}}$ у випадку, коли $\omega \equiv y \geq 0$; $\sigma \equiv -x \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{y^2 v_0 x} = \sqrt{y^2 + x + \sqrt{y^4 + x^2}} = \sqrt{r} \sqrt{r \sin^2 \theta + \cos \theta + \sqrt{r^2 \sin^4 \theta + \cos^2 \theta}}, \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sqrt{r \sin^2 \theta + \cos \theta + \sqrt{r^2 \sin^4 \theta + \cos^2 \theta}} + \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r \sin^2 \theta + \cos \theta + \sqrt{r^2 \sin^4 \theta + \cos^2 \theta}} \right), \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial r} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{r} \cos \theta + \sqrt{\sin^4 \theta + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty,\end{aligned}$$

тобто є коренева особливість, що залежить від кута θ (рис. 2.16, а, рис. 2.16, г – крива 1).

Зупинимось на одному з підходів, що стосуються повної нормалізації рівнянь ділянок границь ГО. Для цього в роботі [35] була проведена модифікація формули (2.33). Однак при цьому не були проведені ні доведення, ні обчислювальні експерименти.

Теорема. Нехай $f = 0$ – нормалізоване рівняння деякої кривої $\partial\Omega$, $\tilde{\phi} \geq 0$ – деяка область Ω_1 , що виділяє на кривій $\partial\Omega$ елемент $\partial\Omega_1$, функція $\tilde{\phi}$ також нормалізована (рис. 2.15). Тоді нормалізоване в узагальненому розумінні рівняння ділянки границі $\partial\Omega_1$ має вигляд

$$\omega_1 \equiv \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2 + f^2 \right]^{0.5} = 0, \quad (2.34)$$

де $\varphi = \tilde{\varphi} - f(\nabla f, \nabla \tilde{\varphi})$ [36].

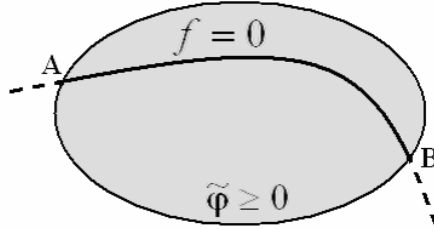


Рис. 2.15. До теореми про нормалізацію в узагальненому розумінні

Доведення. Побудова функції φ у вигляді $\varphi = \tilde{\varphi} - f(\nabla f, \nabla \tilde{\varphi})$ дозволяє забезпечити умову ортогональності кривих $f=0$ і $\varphi=0$ в кінцевих точках A і B виділеної ділянки кривої. Перевіримо виконання умови ортогональності $(\nabla f, \nabla \varphi)|_{f=0, \varphi=0} = 0$. Дійсно, оскільки $(\nabla f)^2|_{f=0} = 1$ в силу нормалізованості, одержимо

$$\begin{aligned} (\nabla f, \nabla \varphi)|_{f=0, \varphi=0} &= (\nabla f, \nabla \tilde{\varphi} - \nabla f(\nabla f, \nabla \tilde{\varphi}) - f \nabla(\nabla f, \nabla \tilde{\varphi}))|_{f=0, \varphi=0} = \\ &= (\nabla f, \nabla \varphi_i) - (\nabla f)^2(\nabla f, \nabla \varphi_i)|_{f=0, \varphi_i=0} = 0. \end{aligned}$$

Якщо $f, \varphi \in C^1(R^n)$, то похідна від ω_1 по довільному напрямку ℓ має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \ell} &= \frac{f \frac{\partial f}{\partial \ell} \sqrt{f^4 + \varphi^2} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right) \left(2f^3 \frac{\partial f}{\partial \ell} - \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right) \right)}{\sqrt{f^4 + \varphi^2} \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2 + f^2 \right]^{0.5}} = \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \ell} \left(f \sqrt{f^4 + \varphi^2} + f^3 \frac{1}{2} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right) \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2}{\sqrt{f^4 + \varphi^2} \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2 + f^2 \right]^{0.5}} = A \frac{\partial f}{\partial \ell} + B \frac{\partial \varphi}{\partial \ell}, \\ \text{де } A &= \frac{f \sqrt{f^4 + \varphi^2} + f^3 \frac{1}{2} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)}{\sqrt{f^4 + \varphi^2} \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2 + f^2 \right]^{0.5}}, \quad B = - \frac{\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2}{\sqrt{f^4 + \varphi^2} \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{f^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2 + f^2 \right]^{0.5}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial n} &= \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 = \left(A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(A \frac{\partial f}{\partial y} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \\ &= A^2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] + B^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + 2AB \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right],\end{aligned}$$

$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\substack{f=0 \\ \varphi=0}} = 0$, тому що функції f й φ – ортогональні в кінцевих точках,

а $\left. \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right|_{f=0} = 1$; $\left. \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right|_{\varphi=0} = 1$, тому що функції f й φ –

нормалізовані, крім того, уздовж нормалі функції f , φ приблизно дорівнюють відстані до границі. Тоді

$$A = \frac{r\sqrt{r^4+r^2} + r^3 \frac{1}{2}(\sqrt{r^4+r^2} + r)}{\sqrt{r^4+r^2} \left[\frac{1}{4}(\sqrt{r^4+r^2} + r)^2 + r^2 \right]^{0.5}}, \quad B = -\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{r^4+r^2} + r)^2}{\sqrt{r^4+r^2} \left[\frac{1}{4}(\sqrt{r^4+r^2} + r)^2 + r^2 \right]^{0.5}},$$

$A \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $B \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}}$ і $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 1$ в кінцевих точках. Теорему доведено.

На рис. 2.16, б подано лінії рівня функції ω при використанні формули (2.34) з виконанням умови ортогональності, а на рис. 2.16, в умова ортогональності не виконується. На рис. 2.16, г крива 2 також ілюструє нормалізованість при застосуванні формули (2.34).

Застосування R-операцій $\{R_1\}$ при побудові рівнянь границь ГО приводить до розривів похідних у розглянутій області, що неприпустимо при розв'язку крайових задач. Для побудови нормалізованих рівнянь границь ГО необхідно застосовувати операції $\{R_\alpha\}$, які зберігають нормалізованість, у тому числі й на гладкому стику ділянок границі. Виділення ділянок границі по формулі (2.33) приводить до кореневої особливості в кінцевих точках ділянки, у зв'язку із чим необхідно застосовувати формулу (2.34).

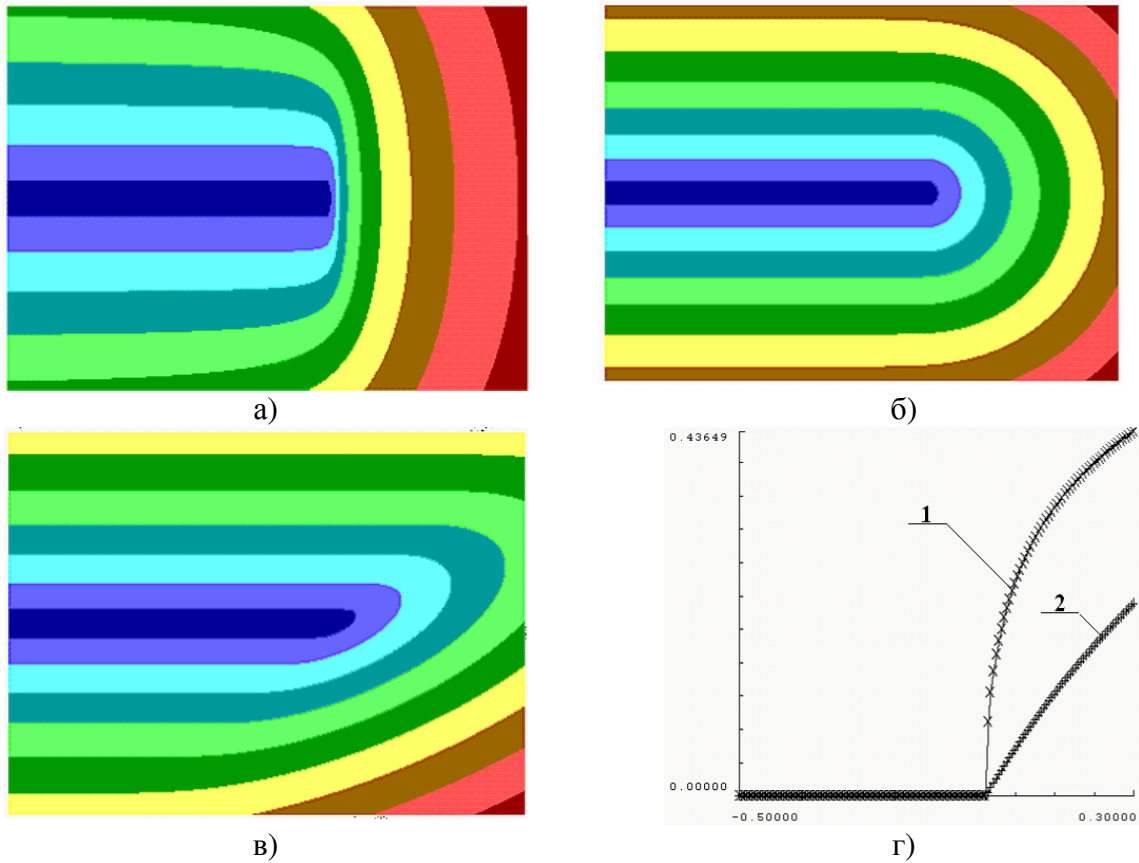


Рис. 2.16. Лінії рівня функції ω при використанні формули (2.34)

Зазначимо, що рівняння області $-\omega + |\omega| = 0$ не є нормалізованим. У середині області ліва частина цього рівняння тотожно дорівнює нулю, а поза нею – 2ω . Це пояснюється тим, що застосована для написання рівняння елемента ГО формула не зберігає нормалізованість на границі виділеного елемента. Очевидно, що рівняння стає нормалізованим поза областю Ω , якщо його розділити на два, тобто $\frac{1}{2}(-\omega + |\omega|) = 0$.

В роботі для побудови об'єкта заданої товщини δ використовувалося його нормалізоване рівняння $\omega(x, y, z) \geq 0, \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 1$. Добре відомо, що функція $\omega(x, y, z)$ в околі границі $\partial \Omega$ приблизно дорівнює відстані до $\partial \Omega$. Тоді функція $\omega(x, y, z) = \frac{\delta}{2} - |\omega(x, y, z)| \geq 0$ буде додатною тільки в паску шириною δ . Використання цього підходу в ряді випадків дозволяє суттєво скоротити кількість R-операцій, а, отже, і скоротити обчислювальний процес.

2.6 Побудова симетричних функцій для симетричних геометричних об'єктів

Метод R-функцій дозволяє будувати для складних геометричних об'єктів рівняння їх границь виду $\omega(x, y, z) = 0$, де $\{\omega(x, y, z)\}$ – елементарні функції, представлені єдиним аналітичним виразом. При цьому важливо, наскільки простими з обчислювальної точки зору виявляються формули $\omega(x, y, z)$. Цікавими в цьому аспекті є геометричні об'єкти, що мають симетрію [37, 38]. Так, у оберненій задачі аналітичної геометрії виникла проблема побудови рівнянь складних геометричних об'єктів (наприклад, [39]), що складаються з елементів, які багаторазово повторюються за тими або іншими законами симетрії.

Вважають, що ГО Ω має симетрію трансляційного типу в напрямку деякого вектора $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$, якщо при перетворенні

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

він переходить сам у себе. Легко навести приклади, коли ГО Ω має симетрію трансляційного типу в декількох напрямках, обумовлених векторами $\vec{h}^1, \dots, \vec{h}^m$. Розглянемо питання про побудову рівнянь ГО, що мають симетрію трансляційного типу. Спочатку опишемо загальний підхід, потім розглянемо деякі ситуації, що допускають можливість побудови симетричних рівнянь більш простим шляхом.

Розглянемо ГО Ω , що складається з системи ГО $\Sigma_i = (\sigma_i(x, y) \geq 0)$, де $\sigma_i(x, y) = \omega_0(x - hi, y)$, $i \in Z$, розташованих з періодом h ($h > 2r$) уздовж осі абсцис.

Класична схема застосування теорії R-функцій.

Нехай $\Sigma_1 = [\sigma_1 \equiv a^2 - x^2 \geq 0]$, $\Sigma_2 = [\sigma_2 \equiv b^2 - y^2 \geq 0]$ – вертикальна й горизонтальна нескінченні смуги, перетинання яких представляє заданий прямокутник, а отвори Σ_i визначаються як

$$\Sigma_i = \{\sigma_i \equiv r^2 - (x - hi)^2 - y^2 \geq 0\} \quad i = 3, \dots, m.$$

Отже, область Ω можна задати логічною формулою

$$\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \left(\bigcap_{i=3}^{i=m} \Sigma_i \right).$$

За допомогою R-функцій область, зображену на рис. 2.17, можна задати нерівністю

$$\Omega = \left[\omega \equiv (\sigma_1 \wedge_{\alpha} \sigma_2) \wedge_{\alpha} (\overline{\sigma_3} \wedge_{\alpha} \dots \wedge_{\alpha} \overline{\sigma_m}) \geq 0 \right]. \quad (2.35)$$

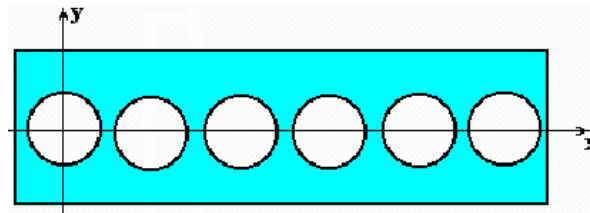


Рис. 2.17. Область з отворами

Таким чином, приходимо до громіздкої формули (2.35) з великою кількістю R-операцій, яка зростає із ростом числа отворів. Ще більш складні формули одержимо, дотримуючись описаного підходу, якщо отвори розташуємо періодично за двома або більшою кількістю прямих або окружностей. Тим часом, інформація про всю сукупність отворів цілком визначається рівнянням одного отвору й типом симетрії (трансляції заданого типу), а також формою тієї області, у яку вони укладені. Як урахувати цей фактор, щоб одержати якомога більш просте рівняння?

Перетворення координат для побудови рівнянь, що відповідають ГО із симетрією трансляції уздовж прямої. Вперше це питання було розглянуто в [28] для випадку трансляційної симетрії уздовж осі в припущенні, що області Σ_i можуть бути відділені одна від іншої якоюсь періодичною системою смуг (в 3D – шарів), перпендикулярних осі трансляції, а потім – для більш загальних випадків у роботах [40–45].

Теорема 1. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$) симетрична відносно осі Oy й може бути укладена у вертикальну смугу $-a < x < a$, а області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0]$, $i \in Z$ отримано в результаті перетво-

рення переносу області Σ_0 уздовж осі абсцис на величини, кратні $h > 2a$. Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y) = 0, \quad (2.36)$$

де

$$\mu(x, h) = \frac{h}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{\sin\left(\frac{x\pi}{h}\right) C_m(a, h) S_1(a, h)}{S_1(a, h) C_m(a, h) + [1 - S_1(a, h)] p^{m+1}(x, a, h)} \right\}, \quad (2.37)$$

$$S_1(a, h) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2h}\right), \quad C_m(a, h) = 2^{m+1} \cos^{2(m+1)}\left(\frac{a\pi}{h}\right),$$

$$p(x, a, h) = |S_2(x, a, h)| - S_2(x, a, h), \quad S_2(x, a, h) = \sin^2\left(\frac{a\pi}{h}\right) - \sin^2\left(\frac{x\pi}{h}\right).$$

Графік функції (2.37) при $h = 2$, $a = 0.5$ наведений на рис. 2.18.

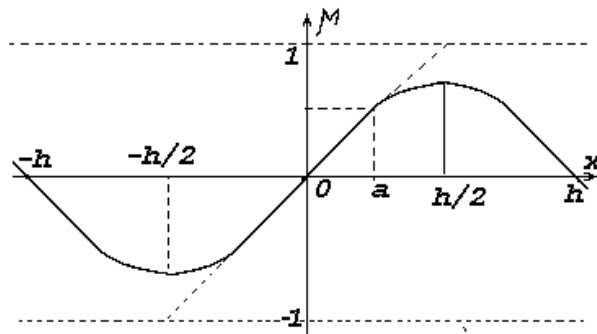


Рис. 2.18. Графік функції (2.37) при $h = 2$, $a = 0.5$

Доведення. Якщо $k = 2l$ ($l \in Z$), то при $x \in (2lh - a, 2lh + a)$ функція $\mu_n(x, h) \in$ лінійною. Функція $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(x - 2lh, y)$ на цих інтервалах має нулі, які утворюють границю трансльованої області Σ_{2l} ($l \in Z$). Якщо ж $k = 2l + 1$ ($l \in Z$), то при $x \in ((2l + 1)h - a, (2l + 1)h + a)$ функція $\omega(x, y)$ набуває вигляду $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(-x + (2l + 1)h, y)$, тобто є дзеркальним відбиттям трансляційної області $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) = 0]$. Оскільки $\sigma_0(-x, y) = \sigma_0(x, y)$, то функція $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(x - (2l + 1)h, y)$ і її нулі утворюють границю трансльованої області Σ_{2l+1} ($l \in Z$). При $x \in [kh + a, (k + 1)h - a]$ ($k \in Z$) функція $\omega(x, y)$ не має нулів, тому

що за припущенням $|\mu_n(x, h)| > a$. Таким чином, рівняння $\omega(x, y) = 0$ задовольняється лише в точках границі $\partial\Omega$ області Ω . Теорему доведено.

На практиці зручно замість функції (2.37) користуватися частковими

$$\text{сумами ряду Фур'є для функції } f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}, \\ h-x, & \frac{h}{2} \leq x \leq h, \\ -h-x, & -h \leq x \leq -\frac{h}{2}. \end{cases}$$

Тоді

$$\mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}. \quad (2.38)$$

При цьому, однак, необхідно пам'ятати, що використання цих часткових сум може привести до значних погрешностей при малому числі доданків.

У теоремі 1 передбачалося, що трансляційна область Σ_0 має симетрію щодо осі ординат. Якщо ця умова не виконується, то застосування формули (2.33) до несиметричної щодо осі ординат області приведе до появи дзеркально відбитих областей, які будуть відповідати ділянці кривої $\mu(x, h)$ з нахилом, паралельним « $-x$ », що еквівалентно заміні в рівнянні (2.36) x на $-x$.

Теорема 2. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$) несиметрична щодо осі Oy й може бути укладена у вертикальну смугу $-a < x < a$, а області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0]$, $i \in Z$ отримано в результаті перетворення переносу області Σ_0 уздовж осі абсцис на величини, кратні $h > 2a$. Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \left\{ \sigma_0(\mu(x, h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{x\pi}{h} \right\} \vee_{\alpha} \left\{ \sigma_0(\mu(x - h, h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{(x - h)\pi}{h} \right\} = 0. \quad (2.39)$$

Доведення. Скористаємося результатами доведення теореми 1. При цьому помітимо, що в перших фігурних дужках (2.39) стоїть вираз, нулі якого утворюють границю трансльованої області без дзеркальних елементів, а в других фігурних дужках – нулі тієї ж області, але зміщеної уздовж осі абсцис

на величину h , що й зайняла місце її дзеркального образу. Об'єднання цих виразів дає рівняння границі потрібної області Ω .

Однак описаний підхід побудови рівнянь границь ГО, що мають симетрію трансляційного типу, не завжди можливий, наприклад, коли сусідні області Σ_i, Σ_{i+1} ($i \in Z$) не можуть бути відділені одна від одної періодичною системою смуг, перпендикулярних осі трансляції. У цьому випадку можна скористатися наступною теоремою.

Теорема 3. Нехай області $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0]$, $i \in Z$ отримано в результаті перетворення переносу трансляційної області $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$) уздовж осі абсцис на величини, кратні h . Якщо сусідні області Σ_i, Σ_{i+1} ($i \in Z$) не можуть бути відділені вертикальними прямими ($h \leq 2a$), а області Σ_i, Σ_{i+2} ($i \in Z$) можна відокремити такими прямими, тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ має вигляд

$$\begin{aligned} \omega(x, y) \equiv & \left\{ \left[\sigma_0(\mu(x, 2h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{x\pi}{2h} \right] \vee_{\alpha} \left[\sigma_0(\mu(x - 2h, 2h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{(x - 2h)\pi}{2h} \right] \right\} \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} \left\{ \left[\sigma_0(\mu(x - h, 2h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{(x - h)\pi}{2h} \right] \vee_{\alpha} \left[\sigma_0(\mu(x - 3h, 2h), y) \wedge_{\alpha} \cos \frac{(x - 3h)\pi}{2h} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Доведення. Скористаємося результатами доведення теореми 1. При цьому помітимо, що в перших квадратних дужках (2.40) стоїть вираз, нулі якого утворюють границю трансльованої області без дзеркальних елементів і є кратними $4h$. У других квадратних дужках стоїть вираз, нулі якого утворюють границю зміщеної на величину $2h$ уздовж осі абсцис області, функція якої записана в перших квадратних дужках. Нулі виразу в третіх квадратних дужках утворюють границю області з перших квадратних дужок, але зміщену уздовж осі абсцис на величину h . Елементи зміщеної області зайняли місце дзеркальних елементів, кратних h . В останніх, четвертих, квадратних дужках стоїть вираз, що утворює нулі границі області з перших квадратних дужок, але зміщеної уздовж осі абсцис на величину $3h$. Цього разу вони зайня-

ли місце дзеркальних елементів, кратних $2h$. Об'єднання цих виразів і дає рівняння границі необхідної області Ω .

На рис. 2.19 подано картину ліній рівня функції $\omega(x, y)$, отриманої по формулі (2.40) для

$$\sigma_0(x, y) \equiv ((25 - x^2 - y^2) \vee_{\alpha} ((1 - y^2) \wedge_{\alpha} (5 + x)(1 - x))) \wedge_{\alpha} \left(\frac{y^2}{3} - x + 2 \right) = 0 \text{ при } h = 16.$$



Рис. 2.19. Картина ліній рівня функції $\omega(x, y)$, отриманої по формулі (2.40)

Перетворення координат для побудови рівнянь, що відповідають ГО, трансльованим скінченне число разів уздовж прямої. Наведені вище перетворення координат дозволяють по заданому рівнянню геометричного об'єкта $\Sigma_0 = (\sigma_0(x, y) = 0)$ й кроку h одержати рівняння границі області, що представляє собою нескінченну трансляцію Σ_0 уздовж осі абсцис. (Використовуючи перетворення повороту осей координат, легко одержати аналогічне рівняння для довільної прямої.) Однак часто буває необхідно побудувати рівняння границі області, отриманої в результаті трансляції Σ_0 на деякому відрізку прямої скінченне число разів.

Розглянемо перетворення координат (рис. 2.20) із заздалегідь заданим числом $n < \frac{l}{a} + 1$ трансльованих геометричних об'єктів, кожний з яких може бути укладений у вертикальну смугу шириною a на відрізку довжиною l :

$$\mu^*(x, h) = (x \wedge_1 \mu(x, h)) \wedge_1 (x - l). \quad (2.41)$$

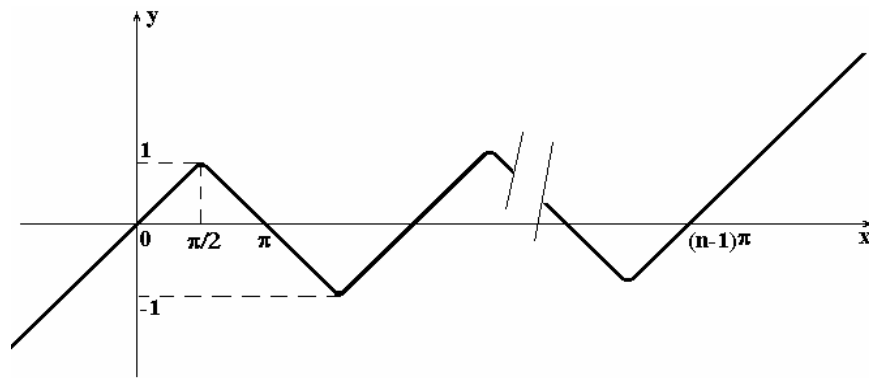


Рис. 2.20. Перетворення координат із заздалегідь заданим числом трансльованих ГО

У результаті одержуємо $\omega(x, y) = \sigma_0(\mu^*(x, h), y) = 0$. На рис. 2.21 наведені приклади перфорації отворів у вигляді кіл і прямокутників, де функція $\omega(x, y)$ побудована з використанням перетворення координат $\mu^*(x, h)$. При цьому $\omega \equiv ((4 - y^2) \wedge_0 (2 + x)(25 - x)) \wedge_0 \overline{\omega_1} \geq 0$.

Для кругових отворів $\omega_1 = 1 - (\mu^*(x, h))^2 - y^2 \geq 0$, $h = 3$, $l = 12$.

Для прямокутних отворів $\omega_1 = (0.25 - (\mu^*(x, h))^2) \wedge_0 (0.25 - y^2) \geq 0$,

$h = 2$, $l = 12$.

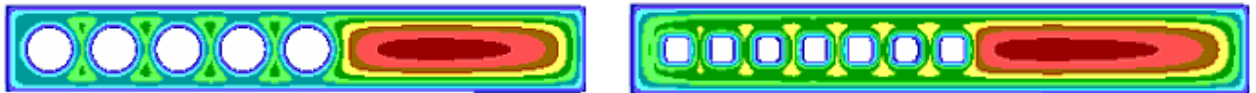


Рис. 2.21. Приклади перфорації отворів у вигляді кіл і прямокутників

Перетворення координат для побудови рівнянь, що відповідають ГО із точковою симетрією циклічного типу. Нехай $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ є деяка область. Тоді $\Sigma_1 = [\sigma_1(x, y) \equiv \sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ є результат зміщення цієї області на відстань r_0 уздовж осі абсцис. Поставимо задачу: написати рівняння $\omega(x, y) = 0$

границі $\partial\Omega$ ГО $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} \Sigma_k$, що є з'єднанням n областей Σ_i ($i = 1, \dots, n$), отриманих

у результаті повороту області Σ_1 відносно початку координат на кути

$$\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Теорема 4. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ симетрична щодо осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена усередині сектору $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - \frac{2\pi k}{n}) - r_0, r \sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})) \geq 0]$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ отримано в результаті повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n)) = 0, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \right), \quad (2.42)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_m(\theta, n) &= \frac{2}{n} \arcsin \left\{ \frac{\sin \frac{n\theta}{2} S_1(n, \alpha) C_m(n, \alpha)}{S_1(n, \alpha) C_m(n, \alpha) + [1 - S_1(n, \alpha)] p^{m+1}(\theta, n, \alpha)} \right\}, \\ S_1(n, \alpha) &= \sin \left(\frac{\pi + n\alpha}{4} \right), \quad C_m(n, \alpha) = 2^{m+1} \cos^{2(m+1)} \left(\frac{n\alpha}{2} \right) \\ p(\theta, n) &= |S_2(\theta, n)| - S_2(\theta, n), \\ S_2(\theta, n) &= \sin^2 \left(\frac{n\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{n\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Доведення. При $\theta \in \left(\left(\frac{2\pi k}{m} \right) - \alpha, \left(\frac{2\pi k}{m} \right) + \alpha \right)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) функція $\mu_n(\theta, m)$ є лінійною й рівняння (2.39) можна переписати у вигляді $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos((-1)^k(\theta - \frac{2\pi k}{m})) - r_0, r \sin((-1)^k(\theta - \frac{2\pi k}{m}))) = 0$. Оскільки область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ є симетричною щодо осі Ox , то рівняння (2.42) описує границю області Ω , отриманої в результаті перетворення повороту області Σ_0 навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{m}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). При $\theta \in \left(\left(\frac{2\pi k}{m} \right) + \alpha, \left(\frac{2\pi(k+1)}{m} \right) - \alpha \right)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) функція $\omega(x, y)$ виду (2.42) не має нулів, тому що згідно припущення $|\mu_n(\theta, m)| > \alpha$. Таким чином, рівняння (2.42) задовольняється лише в точках границі області Ω . Теорему доведено.

Зауваження. На практиці часто зручно замість функції $\mu(\theta, n)$ користуватися частковими сумами ряду Фур'є, як наближеннями функції

$$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Розглянемо випадок, коли трансляційна область Σ_0 несиметрична щодо осі абсцис. Застосування (2.42) до такої області приведе до появи дзеркально відбитих елементів, які відповідають ділянкам $\theta \in \left(\frac{2\pi k}{n} - \alpha, \frac{2\pi k}{n} + \alpha\right)$ функції $\mu(\theta n)$ при непарних k . У цих випадках можна скористатися наступною теоремою.

Теорема 5. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ несиметрична відносно осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена усередині сектору $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = \left[\sigma_0\left(r \cos\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right) - r_0, r \sin\left(\theta - \frac{2\pi k}{n}\right)\right) \geq 0 \right]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ отримані в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області

$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вигляд

$$\begin{aligned} \omega(x, y) \equiv & \left[\sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n)) \wedge_{\alpha} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right] \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} \left[\sigma_0\left(r \cos \mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right), n\right) - r_0, r \sin \mu\left(\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right), n\right)\right) \wedge_{\alpha} \cos\left(\frac{n}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Доведення. Скористаємося результатами доведення теореми 4. Зазначимо, що в перших квадратних дужках (2.43) стоїть вираз, нулі якого утворюють границю циклічно трансльованої області без дзеркальних елементів, а в других квадратних дужках – нулі тієї ж області, але після повороту на кут $\frac{2\pi}{n}$, що й зайняла місце її дзеркального образу. Об'єднання цих виразів і дає рівняння границі необхідної області Ω .

Теорема 6. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ несиметрична відносно осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена усередині сектору $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - \frac{2\pi k}{n}) - r_0, r \sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})) \geq 0]$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ отримані в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). При цьому сусідні області Σ_k, Σ_{k+1} ($k = 0, 1, \dots, n-1$) не можуть бути відокремлені одна від одної секторами $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$, але області Σ_k, Σ_{k+2} ($k = 0, 1, \dots, n-1$) можна відокремити такими секторами. Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вигляд

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \left\{ \left[\sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n)) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{4}\right) \right] \vee_\alpha \right. \\ & \vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r \cos \mu\left(\theta - \frac{4\pi}{n}, n\right) - r_0, r \sin \mu\left(\theta - \frac{4\pi}{n}, n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{4\pi}{n}\right)\right) \right] \vee_\alpha \\ & \vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r \cos \mu\left(\theta - \frac{2\pi}{n}, n\right) - r_0, r \sin \mu\left(\theta - \frac{2\pi}{n}, n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \right] \vee_\alpha \\ & \left. \vee_\alpha \left[\sigma_0\left(r \cos \mu\left(\theta - \frac{6\pi}{n}, n\right) - r_0, r \sin \mu\left(\theta - \frac{6\pi}{n}, n\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n}{4}\left(\theta - \frac{6\pi}{n}\right)\right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Зазначимо, що в отриманому виразі (2.44) функція $\mu(\theta, n)$ будувалася в припущенні, що $h = \frac{4\pi}{n}$.

Доведення. Скористаємося результатами доведення теореми 5. Зазначимо, що в перших квадратних дужках (2.44) стоїть вираз, що відповідає границі циклічно тиражованої області, елементи якої не містять дзеркальних елементів і є кратними куту повороту $\frac{8\pi}{n}$. У других квадратних дужках стоїть вираз, нулі якого утворюють границю області, записаної в перших квадратних дужках, після перетворення повороту на кут $\frac{4\pi}{n}$. Нулі виразу в третіх квадратних дужках утворюють границю циклічно тиражованої області, записаної в перших квадратних дужках, після перетворення повороту на кут $\frac{2\pi}{n}$. Елементи такої області зайняли місце дзеркальних елементів, кратних куту повороту $\frac{2\pi}{n}$. В останніх, четвертих, квадратних дужках стоїть вираз, що

утворює нулі границі області, записаної в перших квадратних дужках, після перетворення повороту на кут $\frac{6\pi}{n}$. Цього разу елементи області зайняли місце дзеркальних елементів, кратних куту повороту $\frac{4\pi}{n}$. Об'єднання цих виразів визначає область Ω .

Якщо область Σ_0 несиметрична щодо осі абсцис, але при циклічному тиражуванні необхідно зберегти її орієнтацію відносно декартової системи координат xOy , то можна скористатися наступною теоремою.

Теорема 7. Нехай трансляційна область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ несиметрична відносно осі абсцис ($\sigma_0(x, y) \in C^m(R^2)$), а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ може бути розміщена усередині сектору $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$.

Області $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - \frac{2\pi k}{n}) - r_0, r \sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})) \geq 0]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ отримано в результаті перетворення повороту області $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ навколо початку координат на кути $\frac{2\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) зі збереженням орієнтації відносно декартової системи координат xOy . Тоді рівняння границі $\partial\Omega$ області $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \left[\sigma_0(x', y') \wedge_{\alpha} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right] \vee_{\alpha} \left[\sigma_0(x'', y'') \wedge_{\alpha} \cos\left(\frac{n}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \right] = 0, \quad (2.45)$$

$$\text{де } \begin{cases} x' = (r \cos \mu(n\theta) - r_0) \cos \alpha_k - r \sin \mu(n\theta) \sin \alpha_k, \\ y' = (r \cos \mu(n\theta) - r_0) \sin \alpha_k + r \sin \mu(n\theta) \cos \alpha_k, \end{cases} \alpha_k = \theta - \mu(n\theta),$$

$$\begin{cases} x'' = \left(r \cos \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) - r_0 \right) \cos \alpha_k - r \sin \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \sin \alpha_k, \\ y'' = \left(r \cos \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) - r_0 \right) \sin \alpha_k + r \sin \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \cos \alpha_k \end{cases}, \beta_k = \theta - \mu\left(n\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Доведення. Скористаємося результатами доведення теореми 5. Зазначимо, що перетворення координат (2.45) зберігає орієнтацію трансляційної області $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ відносно декартової системи координат xOy .

Новий метод побудови рівнянь симетричних ГО легко адаптується до будь-якого програмного забезпечення. Його експериментальна експлуатація в системі ПОЛЕ підтвердила багаторазове скорочення тимчасових витрат.

2.7 Методи побудови примітивів і блендінг на каркасі в 3D

У роботах [28, 32, 43] наведені численні приклади побудови нормалізованих рівнянь границь ГО у двовимірному просторі, а в роботі [28], у тому числі, деякі підходи до побудови рівнянь поверхонь найпростіших ГО в тривимірному просторі, розвиток і спроба систематизації яких були виконані в [34]. Практичний досвід побудови нормалізованих рівнянь поверхонь ГО в 3D з використанням теорії R-функцій є незначним і вимагає певних математичних знань і навичок. У роботах В. Л. Рвачова [28, 32] відзначається, що принципових теоретичних труднощів при застосуванні R-функцій для побудови рівнянь поверхонь ГО в 3D немає. Однак на практиці питання виявилось досить складним і потребуючим додаткових досліджень, розробок нових підходів і конструктивних засобів для реалізації поставлених задач.

З методами побудови рівнянь ГО на основі RFM добре сполучаються класичні прийоми побудови рівнянь поверхонь тіл обертання, призматичних і конічних тіл, скручених циліндрів і зміювиків некласичного поперечного перерізу.

Розглянемо, насамперед, методи побудови нормалізованих рівнянь поверхонь тіл обертання. Нехай $\omega_0(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння границі області $\Omega_0 = (\omega_0(x, y) \geq 0)$. Тоді рівняння виду

$$\omega(x, y, z) \equiv \omega_0\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0 \quad (2.46)$$

є рівнянням ГО Ω , для якого вісь Ox є віссю симетрії. Цей добре відомий прийом аналітичної геометрії має дві особливості – позитивну й негативну.

Позитивна особливість полягає в тому, що якщо рівняння $\omega_0(x, y) = 0$ нормалізоване до деякого порядку, то нормалізованим до цього ж порядку є й рівняння $\omega(x, y, z) = 0$. Дійсно, нехай ν – нормаль до ГО Ω в деякій його точці, а ν_0 – відповідна нормаль до Ω_0 . Відповідність між ν і ν_0 розуміється в тому сенсі, що існує такий кут, при повороті на який навколо осі Ox нормаль ν_0 збігається з нормаллю ν . Оскільки значення функції $\omega(x, y, z)$ уздовж нормалі ν такі ж, як і значення функції $\omega_0(x, y)$ уздовж нормалі ν_0 , збігаються й усі їх похідні. Отже, згадане рівняння ГО Ω нормалізоване до того ж порядку, що й рівняння ГО Ω_0 .

Негативна ж особливість рівняння (2.46) полягає в тому, що навіть при «гарній» за своїми диференціальними властивостями функції $\omega_0(x, y)$, функція $\omega(x, y, z)$ в принципі може виявитися недиференційованою у точках осі обертання.

Нехай $\omega_0(x, y) = 0$ є рівняння ГО Ω_0 . Тоді $\omega_0(x, -y) = 0$ є рівнянням дзеркального відбиття Ω_0 щодо осі Ox . Очевидно, що обидва рівняння належать до того самого диференціального класу (наприклад, $C^m(R^2)$) і одночасно нормалізовані або не нормалізовані до того або іншого порядку. Нехай спочатку $\omega_0(x, y) = 0$ є границя області $\Omega_0 = (\omega_0(x, y) \geq 0)$. Тоді нерівність $\omega_0(x, -y) \geq 0$ визначає область Ω'_0 , що є дзеркальним відбиттям області Ω_0 щодо осі Ox . Нерівність $\omega_0^*(x, y) \equiv \omega_0(x, y) \vee_0 \omega_0(x, -y) \geq 0$ визначає з'єднання областей Ω_0 і Ω'_0 . Нехай область Ω_0 не перетинається з віссю Ox . Тоді неважко встановити, що функція $\omega_0^*(x, y)$ належить до того ж диференціального класу, що й функція $\omega_0(x, y)$. Застосувавши до $\omega_0^*(x, y) = 0$ формулу (2.46), рівняння розглянутої поверхні обертання одержимо у вигляді

$$\omega(x, y, z) \equiv \omega_0\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) \vee_0 \omega_0\left(x, -\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0. \quad (2.47)$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial \omega(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial \omega_0^*\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right)}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{y=z=0} = 0.$$

Аналогічно одержуємо, що й $\frac{\partial \omega(x,0,0)}{\partial z} = 0$. Таким чином, на відміну від рівняння (2.46), рівняння (2.47) не має на осі обертання розривів похідних. У той же час у силу відомих властивостей достатньо повної системи $\{R_0\}$ рівняння (2.47) нормалізоване до першого порядку, якщо нормалізоване рівняння $\omega_0(x, y) = 0$.

Один з корисних підходів до побудови ГО в 3D з 2D полягає у введенні функціональних параметрів, а саме, якщо в площині xOy границя ГО описується рівнянням

$$\omega_0(x, y, c_1, \dots, c_m) = 0, \quad (2.48)$$

де c_i – геометричні параметри, що визначають форму й розміри ГО Ω_0 і його елементів, то, вводячи функції $c_i(z)$ ($i=1, \dots, m$), за умови $c_i(0) = c_i$, одержуємо рівняння поверхні виду [46]

$$\omega(x, y, c_1(z), \dots, c_m(z)) = 0,$$

якому в перерізах $z = h = \text{const}$ будуть відповідати ГО із сімейства (2.48).

Наприклад, якщо відомо, що при $z = 0$ границя ГО має вигляд прямокутника зі сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$ й описується рівнянням $(a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = 0$, а при $z = H$ границя ГО – також прямокутник зі сторонами $x = \pm c$, $y = \pm d$, і описується рівнянням $(c^2 - x^2) \wedge_0 (d^2 - y^2) = 0$, то, слідуючи вищевикладеному, можна записати рівняння бічної поверхні с лінійною залежністю по z , що з'єднає прямокутники, у вигляді

$$\partial \Omega = \left(\left(\left[a \left(1 - \frac{z}{H} \right) + c \frac{z}{H} \right]^2 - x^2 \right) \wedge_0 \left(\left[b \left(1 - \frac{z}{H} \right) + d \frac{z}{H} \right]^2 - y^2 \right) = 0 \right).$$

Необхідно ще звернути увагу на той випадок, коли в нижньому, верхньому й усіх проміжних перерізах розташовані ГО, що мають властивість геометричної подібності. Якщо відомо побудоване за допомогою R-функцій рівняння границі ГО в площині xOy – $\omega(x, y) = 0$, то рівняння подібної фігури

має вигляд $\frac{1}{k}\omega(kx, ky)=0$, де k – коефіцієнт подібності. Тоді, задаючи $k=k(z)$, за умови $k(0)=1$, одержимо рівняння поверхні

$$\partial\Omega=\left(\frac{1}{k(z)}\omega(k(z)x, k(z)y)=0\right),$$

якому в перерізах $z=H=\text{const}$ будуть відповідати подібні ГО.

Відомо, що нормалізоване рівняння $\omega(x, y)=0$ є рівнянням нескінченної призми (або циліндра) в 3D. Заміна змінних $\begin{cases} x \Leftarrow x - \alpha z \\ y \Leftarrow y - \beta z \end{cases}$ дозволяє одержати рівняння $\omega(x - \alpha z, y - \beta z)=0$ похилої призми (або циліндра) з утворюючими, паралельними вектору $\vec{a}=(\alpha, \beta, 1)$, і напрямною, яка описується рівнянням $\omega(x, y)=0$. Тоді нормалізоване рівняння похилої призми (або циліндра) можна записати у вигляді

$$\omega_H \equiv \frac{\omega(x - \alpha z, y - \beta z)}{\sqrt{1 + F^2(x, y, z)}} = 0,$$

$$\text{де } F(x, y, z) = \alpha \frac{\partial \omega(x - \alpha z, y - \beta z)}{\partial x} + \beta \frac{\partial \omega(x - \alpha z, y - \beta z)}{\partial y}.$$

Зазначимо, що заміна змінних $\begin{cases} x \Leftarrow x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0} \\ y \Leftarrow y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0} \end{cases}$ дозволяє одержати рів-

няння $\omega\left(x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}, y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0}\right)=0$ конічної поверхні з вершиною в точці

$A(x_0, y_0, z_0)$ [28], для якої напрямна описується рівнянням $\omega(x, y)=0$.

Тепер розглянемо питання про побудову рівняння ГО, закрученого уздовж осі z за деяким законом $\varphi(z)$. Якщо в площині xOy границя $\partial\Omega_0$ ГО Ω_0 описується рівнянням $\omega(x, y)=0$, то заміна змінних

$\begin{cases} x \Leftarrow x \cos \varphi(z) + y \sin \varphi(z) + c_x(z) \\ y \Leftarrow y \cos \varphi(z) - x \sin \varphi(z) + c_y(z) \end{cases}$ дозволяє одержати рівняння

$$\omega(x \cos \varphi(z) + y \sin \varphi(z) + c_x(z), y \cos \varphi(z) - x \sin \varphi(z) + c_y(z))=0,$$

яке визначає в 3D такий ГО, що його перерізи площинами $z = H = \text{const}$ отримуються з ГО Ω_0 шляхом його обертання навколо осі Oz й зсуву всіх його точок у площині $z = H$ на вектор $\vec{c}(c_x(z), c_y(z))$. Нормалізацію отриманого рівняння поверхні скрученого циліндра в 3D можна проводити як за загальною методикою, описаною в [28, 34], за формулою $\omega_n(x, y, z) = \frac{\omega(x, y, z)}{\sqrt{(\nabla \omega(x, y, z))^2 + \omega^2(x, y, z)}}$, так і в такий спосіб: якщо $\vec{c}(c_1, c_2)$, де c_1, c_2 – константи, а $\varphi(z) = \alpha z$, то згідно формули

$$\omega_n(x, y, z) = \frac{\omega(x \cos \alpha z + y \sin \alpha z, y \cos \alpha z - x \sin \alpha z)}{\sqrt{(\nabla \omega(x \cos \alpha z + y \sin \alpha z, y \cos \alpha z - x \sin \alpha z))^2}}.$$

Якщо $\varphi(z)$ є лінійна функція виду $\varphi(z) = \alpha z$, а $c_x = c_y = 0$, то ГО Ω можна отримати з ГО Ω_0 шляхом руху Ω_0 уздовж гвинтової лінії з віссю Oz , а саме, шляхом обертання навколо осі Oz й рівномірного поступального руху уздовж неї (рис. 2.22, а) [47]. Нормалізованим в 3D у цьому випадку є рівняння

$$\frac{\omega(\hat{x}, \hat{y})}{\sqrt{1 + \alpha^2 \left(\hat{y} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} \right)^2}} = 0,$$

$$\text{де } \begin{cases} \hat{x} = x \cos \alpha z + y \sin \alpha z \\ \hat{y} = -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z \end{cases}.$$

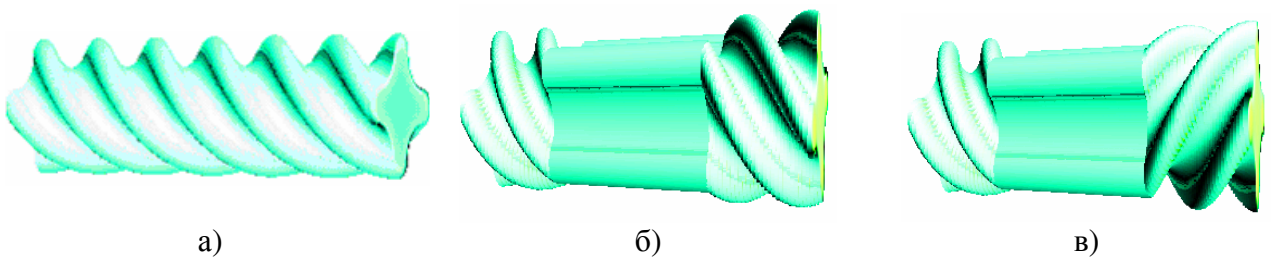


Рис. 2.22. Скручені циліндри

Рівняння границі поперечного перерізу $\omega(x, y) = 0$ (рис. 2.23) для вищевказаного скрученого циліндра задавалося за допомогою системи $\{R_\alpha\}$ у вигляді $\omega(x, y) \equiv (((f_1 \vee_\alpha f_5) \vee_\alpha f_{10}) \wedge_\alpha ((f_3 \vee_\alpha f_7) \vee_\alpha f_9)) \wedge_\alpha ((\bar{f}_4 \wedge_\alpha \bar{f}_8) \wedge_\alpha (\bar{f}_2 \wedge_\alpha \bar{f}_6))$, де опорними функціями були

$$\begin{aligned}
f_1 &\equiv \frac{r_1^2 - x^2 - (y-a)^2}{2r_1} \geq 0; \quad f_2 \equiv \frac{r_1^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2}{2r_2} \geq 0; \quad f_3 \equiv \frac{r_1^2 - (x-a)^2 - y^2}{2r_1} \geq 0; \\
f_4 &\equiv \frac{r_1^2 - (x-c)^2 - (y+d)^2}{2r_2} \geq 0; \quad f_5 \equiv \frac{r_1^2 - x^2 - (y+a)^2}{2r_1} \geq 0; \quad f_6 \equiv \frac{r_1^2 - (x+c)^2 - (y+d)^2}{2r_2} \geq 0; \\
f_7 &\equiv \frac{r_1^2 - (x+a)^2 - y^2}{2r_1} \geq 0; \quad f_8 \equiv \frac{r_1^2 - (x+c)^2 - (y-d)^2}{2r_2} \geq 0; \quad f_9 \equiv \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; \quad f_{10} \equiv \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0.
\end{aligned}$$

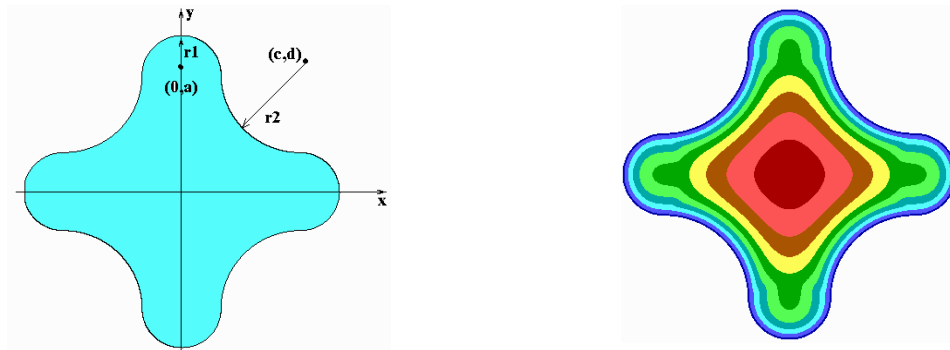


Рис. 2.23. Границя поперечного перерізу скрученого циліндра та лінії рівня її функції

Нехай функція $\varphi(z)$ задана за законом, зображеним на рис. 2.24, а.

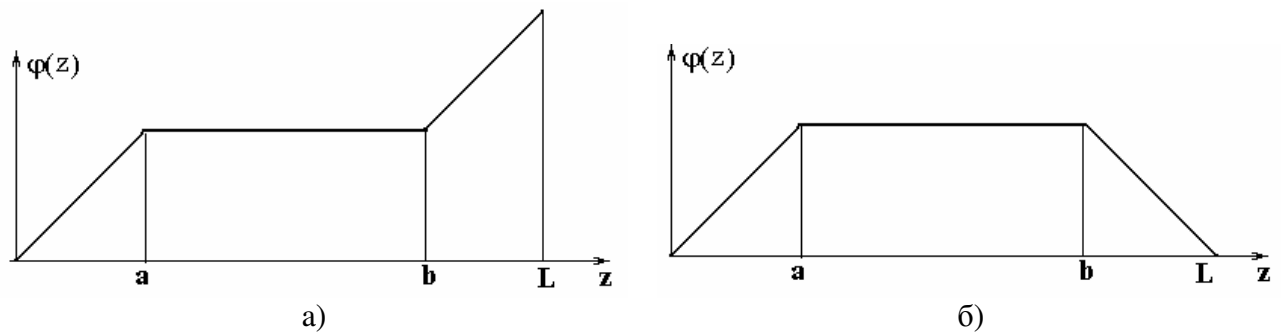


Рис. 2.24. Закони, за якими задано функцію $\varphi(z)$

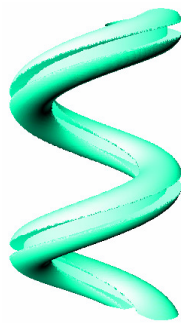
Тоді, використовуючи R-операції системи $\{R_1\}$, цей закон можна записати у вигляді $\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3$, де $\varphi_1 = \frac{2\pi}{h}z$; $\varphi_2 = \frac{2\pi}{h}a$; $\varphi_3 = \frac{2\pi}{h}(z-b+a)$. Після підстановки одержимо циліндр, скручений за годинниковою стрілкою лише на ділянках $(-\infty, a)$; (b, ∞) (рис. 2.22, б).

Нехай функція $\varphi(z)$ задана за законом, зображеним на рис. 2.24, б. Тоді, використовуючи R-операції системи $\{R_1\}$, цей закон можна записати у вигляді

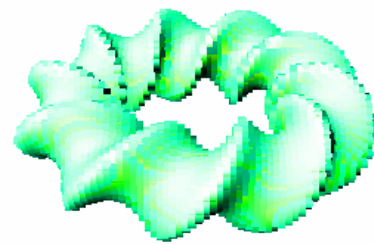
$\varphi(z) = (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2) \wedge_1 \varphi_3$, де $\varphi_1 = \frac{2\pi}{h}z$; $\varphi_2 = \frac{2\pi}{h}a$; $\varphi_3 = \frac{2\pi}{h}(L-z)$. Після підстановки одержимо циліндр, скручений за годинниковою стрілкою на ділянці $(-\infty, a)$, і проти годинникової стрілки на ділянці (b, ∞) (рис. 2.22, в).

Для побудови рівняння нескінченного змійовика розглянемо тор з перерізом, рівняння границі якого $\omega(\sqrt{x^2 + y^2} - c, z) = 0$. Передбачається, що функція $\omega(\sqrt{x^2 + y^2} - c, z)$ нормалізована.

Після підстановки $z \Leftarrow z - \alpha \arctg \frac{y}{x}$, де $\alpha = \frac{H}{2\pi}$, в $\omega(\sqrt{x^2 + y^2} - c, z) = 0$, одержимо рівняння $\omega_b(x, y, z) \equiv \omega\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c, z - \alpha \arctg \frac{y}{x}\right) = 0$ нескінченної поверхні $\partial\Omega_b$ (рис. 2.25, а), що обмежує область Ω_b змійовика, із кроком H і поперечним перерізом $\partial\Omega$.



а)



б)

Рис. 2.25. Нескінченний змійовик і тор складного перерізу

Рівняння границі поперечного перерізу (рис. 2.26) для вищевказаного змійовика $\omega(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ задавалося за допомогою системи $\{R_0\}$ у вигляді $w(x, z) \equiv f_1 \wedge_0 (f_2 \vee_0 f_3) = 0$, де опорними функціями були

$$f_1 \equiv \frac{R_0^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - z^2}{2R_0} \geq 0; \quad f_2 \equiv \frac{a^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}{2R} \geq 0; \quad f_3 \equiv \frac{z^2 - b^2}{2b} \geq 0.$$

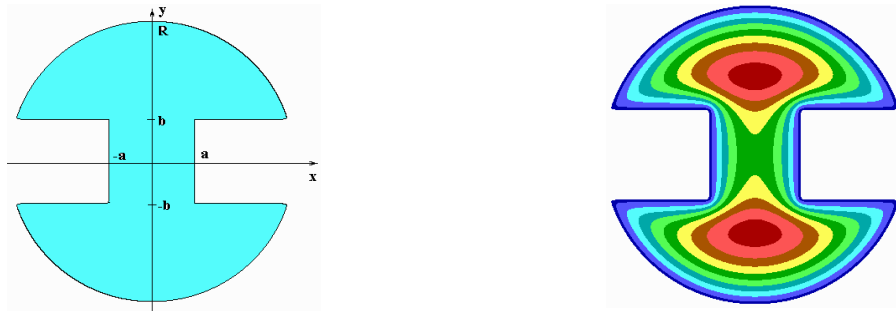


Рис. 2.26. Поперечний переріз змійовика та лінії рівня функції

Нормалізованим в 3D рівнянням поверхні змійовика буде

$$\frac{\omega(r, z_1)}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_1} \right)^2}} = 0, \text{ де } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z_1 = z - \alpha \arctg \frac{y}{x} \end{cases}. \text{ Зазначимо, що для змійовиків } r \neq 0 \text{ при}$$

$$\omega(r, z_1) \geq 0.$$

Для побудови рівняння скрученого тора розглянемо тор з перерізом, рівняння

$$\text{якого } \omega(x, z) = 0. \text{ Після підстановки } \begin{cases} x \Leftarrow (r - R) \cos \frac{R\varphi}{h} + z \sin \frac{R\varphi}{h}; \\ z \Leftarrow -(r - R) \sin \frac{R\varphi}{h} + z \cos \frac{R\varphi}{h}; \end{cases},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ в рівняння $\omega(x, z) = 0$, одержимо рівняння

$$\omega \left((r - R) \cos \frac{R\varphi}{h} + z \sin \frac{R\varphi}{h}, -(r - R) \sin \frac{R\varphi}{h} + z \cos \frac{R\varphi}{h} \right) = 0 \text{ поверхні (рис. 2.25, б), що}$$

обмежує область скрученого тора еліптичного перерізу, тобто

$$\omega(x, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}.$$

Відзначимо спільність методики побудови рівнянь геометричних об'єктів: у рівняннях напрямних і границь поперечних перерізів в 2D $\omega(x, y) = 0$ виконується заміна змінних

$$\begin{cases} x \Leftarrow \psi_1(x, y, z) \\ y \Leftarrow \psi_2(x, y, z) \end{cases}, \text{ і отримане рівняння}$$

$\omega(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$ є рівнянням необхідного ГО в 3D. Описані підходи добре сполучаються з методами побудови рівнянь ГО з геометричними сингулярностями й поверхнями подвійного шару.

Усі побудовані рівняння найпростіших тривимірних геометричних об'єктів можуть бути використані в якості стандартних примітивів з буквеними геометричними параметрами для подальшої автоматизації завдання геометричної інформації про складені з них ГО.

Розглянемо новий підхід до побудови математичних моделей поверхонь ГО в 3D методом R-функцій – блендінг на каркасі. Для наочності спочатку розглянемо випадок, коли каркасом є відрізок прямої.

$$f1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; \quad f11 = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad fff1 = \sqrt{\left(0.5\sqrt{f11^4 + f1^2} - f1\right)^2 + f11^2} \geq 0; \quad (2.49)$$

$$\omega = -fff1 + \frac{(a1 - x)(a2 + x)}{p1} + p2 \geq 0.$$

У результаті одержуємо тіло обертання (рис. 2.27, а) і чотири керовані параметри. Розглянемо також випадок, коли каркасом є дуга окружності.

$$f1 = \frac{R^2 - (x + R)^2 - y^2}{2R} \geq 0; \quad fi = \frac{y + x + R}{\sqrt{2}} \wedge_0 \frac{-y + x + R}{\sqrt{2}} \geq 0; \quad (2.50)$$

$$ff1 = \sqrt{\left(0.5\sqrt{f1^4 + fi^2} - fi\right)^2 + f1^2} \geq 0; \quad \omega = -ff1^2 + \left[\frac{(a1 + y)(a2 - y)}{par1} - par2 \right]^2 \geq 0.$$

У результаті одержуємо циліндричне тіло (рис. 2.27, б) з напрямною, подібною до профілю Жуковського, і чотири керовані параметри.

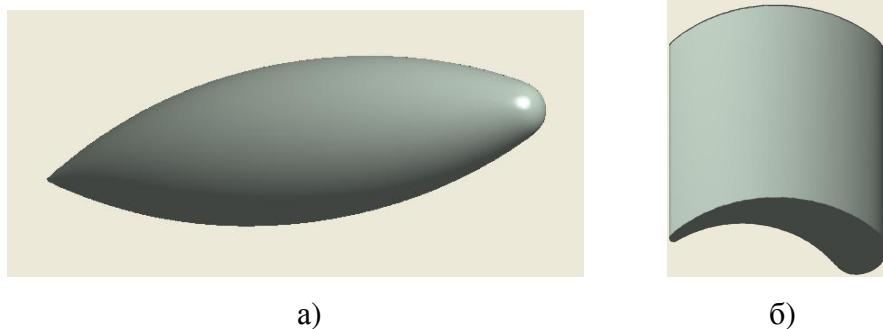


Рис. 2.27. Тіла, побудовані за допомогою блендінгу на каркасі

Слід зазначити, що в цьому випадку застосування R-операцій і повної нормалізації до першого порядку функцій $ff1$ [36] дозволили реалізувати методику блендінгу на каркасі.

Висновки по 2 розділу

У розділі показано, що застосування математичного апарата R-функцій дозволяє суттєво спростити процес аналітичного описання геометричних об'єктів практично будь-якої складності. При цьому метод R-функцій позбавлений більшості недоліків стандартних методів геометричного моделювання. Проведено аналіз конструктивних засобів математичного моделювання геометричних об'єктів за допомогою R-функцій.

Розглянуто основні достатньо повні системи R-функцій, їх логічні, алгебраїчні й диференціальні властивості, а також предикатне завдання складних геометричних об'єктів. На прикладах розглянуто формування складної області Ω із простих областей Σ_i . Після введення R-функцій ця задача стане відігравати роль стандартної допоміжної процедури, що передуює побудові рівнянь складних ГО в тому розумінні, яке прийнято в аналітичній геометрії. Вона може бути використана не тільки для побудови рівнянь границь областей, але й для побудови ГО, що полягають із елементів різної розмірності.

Також розглянуто поняття нормалізованого рівняння геометричного об'єкта. Розглянуто різні підходи до нормалізації рівнянь геометричних об'єктів. Розглянуто методи побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають симетрію, та новий підхід до побудови математичних моделей поверхонь ГО в 3D методом R-функцій – блендінг на каркасі.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН В 3D

3.1 Гвинтовий тип симетрії в деталях машин і дизайні при реалізації на 3D-принтері

Робочою деталлю багатьох механізмів для просування матеріалу уздовж гвинтової обертової поверхні є шнек. Шнек являє собою металевий стрижень із гвинтовою поверхнею. Область застосування шнеків достатньо широка. Вони використовуються замість коліс у деяких видах всюдиходів або комбайнів. Вони є незамінною деталлю в екструдерах і на бурових станціях. На великих підприємствах шнеки використовують як засіб транспортування сипучих речовин. Шнеки незамінні в харчовій промисловості, де вони входять до складу пресів для обробки продуктів і є складовою частиною будь-якої м'ясорубки. Крім того, шнеки використовуються в стрілецькій зброї, де деталь виконує роль магазину для патронів. Виготовлення шнеків відбувається різними, найчастіше достатньо складними способами. Це лиття з подальшою токарською обробкою, способи гарячої деформації та холодного вигину та ін. Досить перспективним може виявитися виготовлення шнеків на 3D-принтері. Для цього побудуємо математичну й комп'ютерну модель шнека зі змінним і постійним кроком закручення.

Нижче будуть використані R-операції (2.1) і гвинтова неортогональна система координат $\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$. При побудові рівнянь, що відповідають геометричним об'єктам із точковою симетрією циклічного типу, для скорочення кількості R-операцій будуть використані результати Теорема 4 (2.42). Крім того, для побудови об'єкта заданої товщини δ буде використано його нормалізоване рівняння $\omega(x, y, z) \geq 0, \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 1$.

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} z; \begin{cases} xx = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ yy = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}. \text{ При } N = \frac{10/z + 4/(10-z)}{1/z + 1/(10-z)} \text{ (рис. 3.1, а), при } N = 5$$

(рис. 3.1, б), при $N = 3$ (рис. 3.1, в).

$$f1 = \left(1 - \frac{xx^2}{0.8^2} - \frac{yy^2}{2.3^2}\right) \wedge_0 z(9-z) \geq 0; \quad fn1 = ((0.8^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 -z(z+4)) \vee_0 f1 \geq 0;$$

$$fn1 = (((2.3^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (4.3+z)(-z-4)) \vee_0 fn1) \wedge_0 (4 - x^2 - y^2) \geq 0;$$

$$fs = (x - 0.4) \wedge_0 (-z - 2)(z + 4) \geq 0; \quad fn = fn1 \wedge_0 -fs \geq 0;$$

$$fv = (0.3^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (11-z)(z-8) \geq 0; \quad f = fn \vee_0 fv \geq 0;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}; \quad no = 6; \quad ff = \theta \frac{no}{2}; \quad \mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$x1 = \rho \cos \mu; \quad f22 = (0.4 - x1) \wedge_0 (10-z)(z-8) \geq 0; \quad W = f \vee_0 f22 \geq 0.$$

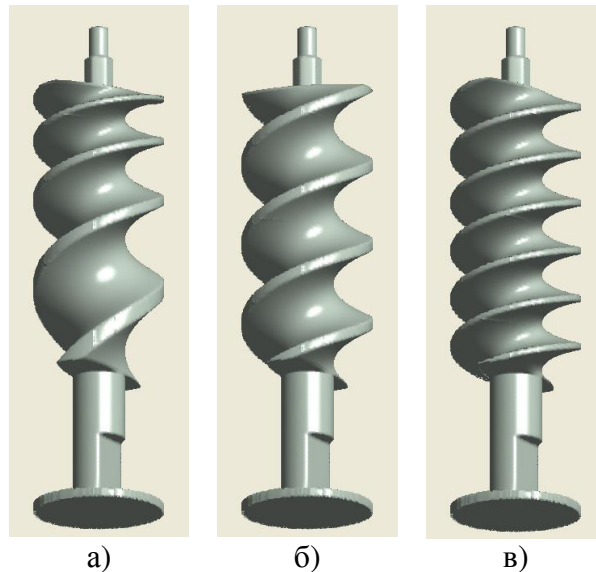


Рис. 3.1. Шнеки з різним кроком закрутки

У цьому випадку особливий інтерес представляє побудова змінного кроку закрутки у вигляді неперервної функції $N = f(z)$.

В енергетичних установках та іншому технічному обладнанні широко використовується закрутка потоку для організації й інтенсифікації різних процесів. Закрутка є ефективним засобом стабілізації полум'я в камерах згоряння газотурбінних двигунів, вона використовується для інтенсифікації тепло- і ма-

сообміну в каналах, у хімічній, нафтовій, газовій й інших галузях промисловості [48–51]. Використовувані на практиці завихорювачі відрізняються за способом і характером закрутки, за довжиною обладнання, що закручує. Розглянемо шнековий завихорювач, трубу з локальною закруткою і скручену трубу складного поперечного перерізу, які були запропоновані в роботі [48].

Шнековий завихорювач.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; zz = z - \frac{\theta h}{2\pi}; ff = \frac{\pi}{h} zz; \mu = \frac{4h}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2},$$

$$fp1 = (0.04 - (\rho - 0.8)^2 - \mu^2)/0.4 \geq 0; \quad fp2 = (1 - x^2 - y^2)/2 \geq 0; \quad fp3 = (0.36 - x^2 - y^2)/1.2 \geq 0;$$

$W = \overline{fp1 \vee_0 fp3} \geq 0$. При $h=1$ (рис. 3.2, а), при $h=2$ (рис. 3.2, б).

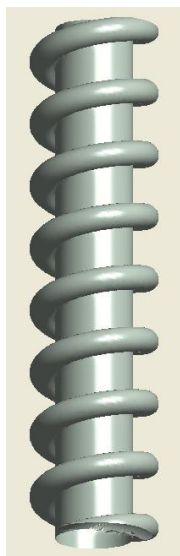
Труба з локальною закруткою.

$$a=1; b=5; l=1; fi1 = 2\pi \frac{z}{h}; fi2 = 2\pi \frac{l}{h}; fi3 = 2\pi \frac{z-b+a}{h};$$

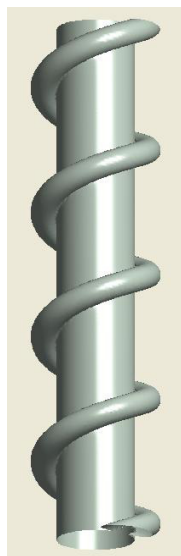
$$fi12 = (fi1 + fi2 - abs(fi1 - fi2))/2; \quad \alpha = (fi12 + fi3 + abs(fi12 - fi3))/2;$$

$$\begin{cases} xx = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ yy = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}; \quad \omega s1 = 1 - xx^2 - \frac{yy^2}{1.5^2} \geq 0; \quad \omega s = 0.2 - |\omega s1| \geq 0;$$

$W = \omega s \wedge_0 (10 - z)(z + 5) \geq 0$. При $h=7$ (рис. 3.3, а), при $h=5$ (рис. 3.3, б).



а)



б)

Рис. 3.2. Шнековий завихорювач



а)



б)

Рис. 3.3. Труба з локальною закруткою

Слід зазначити, що завдання інформації в аналітичному виді з використанням буквених параметрів дозволяє оперативно вносити зміни у форму досліджуваного об'єкту.

Труба складного поперечного перерізу.

$$\alpha = 0; (\alpha = \frac{\pi z}{40}; \alpha = \frac{\pi z}{30}; \alpha = \frac{\pi z}{20});$$

$$\begin{cases} xx = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ yy = -x \sin \alpha + y \cos \alpha; \end{cases}$$

$$fkv = \frac{10^2 - xx^2}{20} \wedge_0 \frac{10^2 - yy^2}{20} \geq 0; \quad f91 = \frac{16 - xx^2}{8} \geq 0; \quad f92 = \frac{16 - yy^2}{8} \geq 0;$$

$$fr = ro^2 - f91^2 - f92^2 \geq 0; \quad f9 = f91 + f92 + \sqrt{f91^2 + f92^2 + \frac{fr}{8ro^2}(|fr| + fr)} \geq 0;$$

$$f11 = f9 \wedge_0 fkv \geq 0;$$

$$f11o = \left(\frac{4^2 - (xx - 10)^2 - yy^2}{8} \right) \vee_0 \left(\frac{4^2 - (xx + 10)^2 - yy^2}{8} \right) \geq 0;$$

$$f12o = \left(\frac{4^2 - (yy - 10)^2 - xx^2}{8} \right) \vee_0 \left(\frac{4^2 - (yy + 10)^2 - xx^2}{8} \right) \geq 0;$$

$$f1o = f11o \vee_0 f12o \geq 0; \quad f1k = f11 \vee_0 f1o \geq 0; \quad f1 = ht - |f1k| \geq 0;$$

$$W = f1 \wedge_0 (L^2 - z^2) \geq 0 \quad (\text{рис. 3.4}).$$

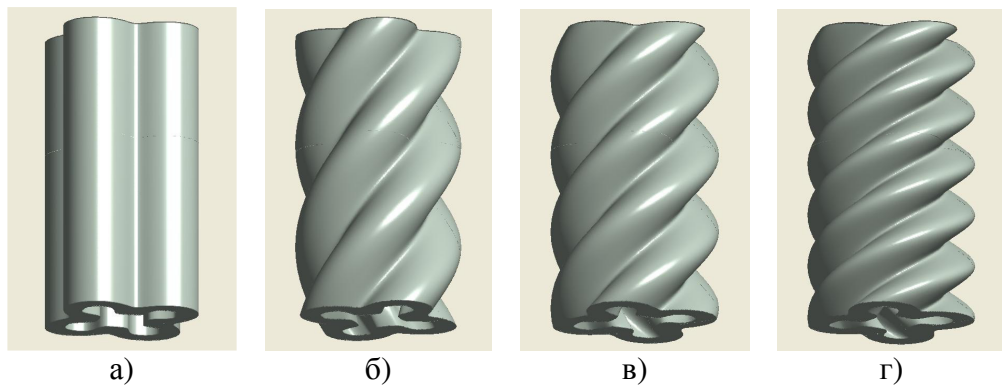


Рис. 3.4. Труба складного перерізу з різним кроком закрутки

Слід зазначити, що труба наведеного поперечного перерізу достатньо складна у виготовленні, особливо при необхідності зміни параметру закрутки. Тому доцільно процес виготовлення надати 3D-принтеру. Таким чином, змінюючи параметр α , ми одержуємо для 3D-реалізації трубу з потрібним кроком закрутки, а змінюючи параметри ht й L , одержимо трубу потрібної товщини й довжини.

Розглянемо процес побудови настільної лампи з дизайнерським оформленням. Лампа складається з підставки з отворами для електропроводів і абажура.

Підставка.

$$p = 10; xp = x / p; yp = y / p; zp = z / p; f1 = \frac{p}{19} (9.5^2 - xp^2 - yp^2 - (zp + 8)^2) \geq 0;$$

$$R = 4; N = 10; \alpha = \arctg \frac{yp}{xp}; X1 = \sqrt{xp^2 + yp^2} - R; f2 = zp; zn = f2 - 1;$$

$$\begin{cases} XX = X1 \cos \alpha + zn \sin \alpha \\ ZZ = -X1 \sin \alpha + zn \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} XX2 = X1 \cos \alpha - zn \sin \alpha \\ ZZ2 = X1 \sin \alpha + zn \cos \alpha \end{cases}$$

$$t1 = 1 - \frac{XX^2}{0.04} - \frac{ZZ^2}{0.25} \geq 0; t2 = 1 - \frac{XX2^2}{0.04} - \frac{ZZ2^2}{0.25} \geq 0; tor = t1 \vee_0 t2 \geq 0;$$

$$\omega podn = (f1 \wedge_0 f2) \vee_0 tor \geq 0 \text{ (рис. 3.5, а);}$$

$$\begin{cases} xx = xp \cos \alpha1 + yp \sin \alpha1 \\ yy = -xp \sin \alpha1 + yp \cos \alpha1 \end{cases} \quad \begin{cases} xx1 = xp \cos \alpha1 - yp \sin \alpha1 \\ yy1 = xp \sin \alpha1 + yp \cos \alpha1 \end{cases} \quad \alpha1 = \frac{\pi}{2} zp;$$

$$f31 = 1 - xx^2 - \frac{yy^2}{0.25} \geq 0; f32 = 1 - xx1^2 - \frac{yy1^2}{0.25} \geq 0; f3 = f31 \vee_0 f32 \geq 0; f4 = f2(7 - zp) \geq 0;$$

$$\omega n = f3 \wedge_0 f4 \geq 0; \quad \omega pod = \omega podn \vee_0 \omega n \geq 0 \text{ (рис. 3.5, б);}$$

$$stt = (0.4^2 - xp^2 - yp^2) \wedge_0 (8 - zp)(zp - 6) \geq 0; \omega shnur1 = (0.2^2 - xp^2 - zp^2) \wedge_0 (yp + 0.2) \geq 0;$$

$$\omega shnur = (xp^2 + yp^2 - 0.2^2) \wedge_0 -\omega shnur1 \geq 0;$$

$$\omega podst = (\omega pod \vee_0 stt) \vee_0 \omega shnur \geq 0 \text{ (рис. 3.5, в).}$$

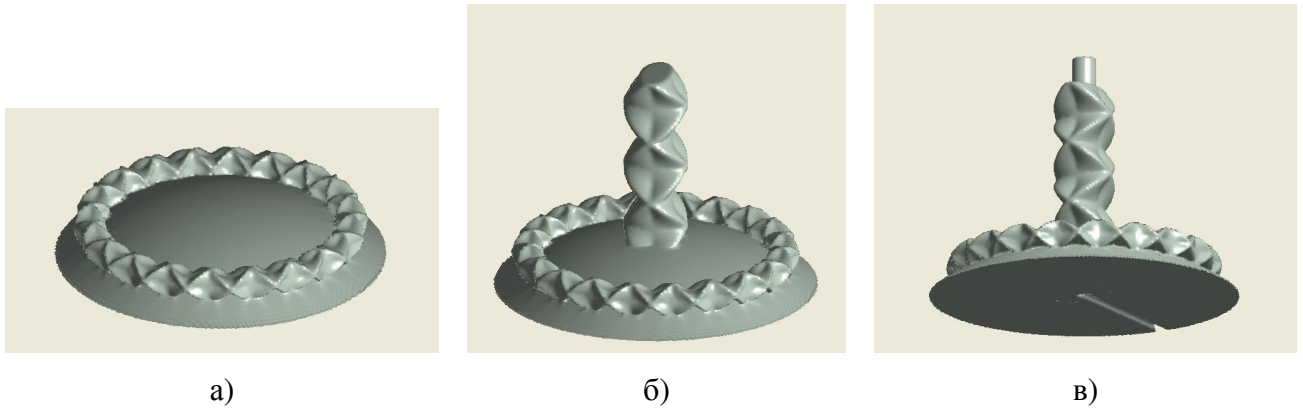


Рис. 3.5. Побудова підставки з отворами для електропроводів

Абажур.

$$f5 = 2 - \left| \frac{p}{9} (4.5^2) - xp^2 - yp^2 - (zp - 6.5)^2 \right| \geq 0; f6 = zp - 6.5 \geq 0; \omega aa = f5 \wedge_0 f6 \geq 0;$$

$$Ra = 4.8; Na = 10; \alpha a = \arctg \frac{yp}{xp}; X1a = \sqrt{xp^2 + yp^2} - Ra; za = zp - 7.3;$$

$$\begin{cases} XXa = X1a \cos \alpha a + za \sin \alpha a \\ ZZa = -X1a \sin \alpha a + za \cos \alpha a \end{cases} \quad \begin{cases} XX2a = X1a \cos \alpha a - za \sin \alpha a \\ ZZ2a = X1a \sin \alpha a + za \cos \alpha a \end{cases}$$

$$t1a = 1 - \frac{XXa^2}{0.04} - \frac{ZZa^2}{0.25} \geq 0; t2a = 1 - \frac{XX2a^2}{0.04} - \frac{ZZ2a^2}{0.25} \geq 0; tora = t1a \vee_0 t2a \geq 0;$$

$$\omega a = \omega aa \vee_0 tora \geq 0 \text{ (рис. 3.6, а);}$$

$$fd = (0.5^2 - xp^2) \vee_0 (0.5^2 - yp^2) \geq 0;$$

$$fbl = (0.1 - |7 - zp|) \wedge_0 \left(\frac{p}{9} (4.5^2 - xp^2 - yp^2 - (zp - 6.5)^2) \right) \geq 0;$$

$$\omega per = (fd \wedge_0 fbl) \wedge_0 (xp^2 + yp^2 - 0.5^2) \geq 0;$$

$$\omega abaj = \omega a \vee_0 \omega per \geq 0 \text{ (рис. 3.6, б);}$$

$$\omega lampa = \omega abaj \vee_0 \omega podst \geq 0 \text{ (рис. 3.6, в).}$$

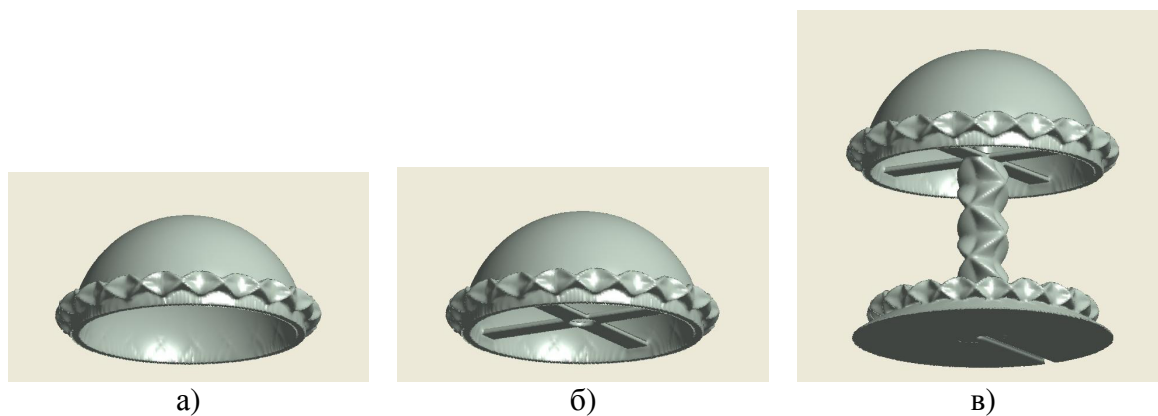


Рис. 3.6. Абажур і лампа у зборі

Змінивши значення буквених параметрів R, Ra, zn, za і поклавши $t2 = 0, t2a = 0, f32 = 0$, отримаємо оформлення лампи з візерунком, подане на рис. 3.7.

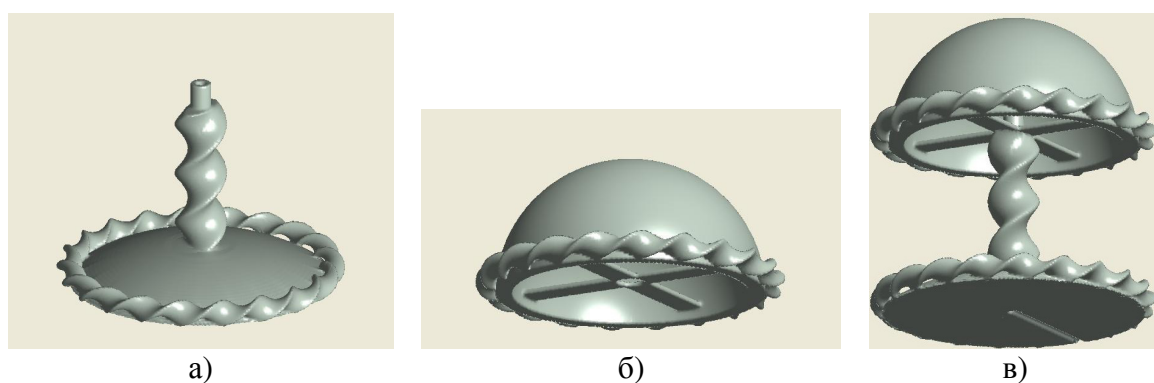


Рис. 3.7. Оформлення лампи з візерунком

Таким чином, можна змінювати будь-які розміри, що характеризують даний об'єкт.

На рис. 3.8 подано моделі, реалізовані на 3D-принтері.

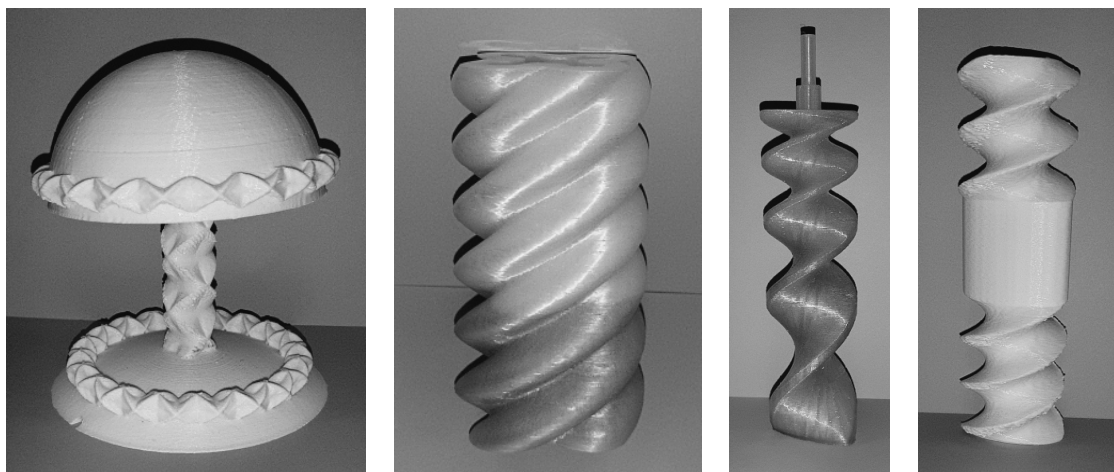


Рис. 3.8. Моделі, реалізовані на 3D-принтері

Побудовані математичні моделі реалізовані на 3D-принтері Anet A8, який працює за технологією FDM. Застосування інших, більш досконалих технологій 3D-друку, дозволить удосконалити зовнішній вигляд виробів.

3.2 Математичне та комп'ютерне моделювання робочих коліс насосів для реалізації на 3D-принтері

Відцентрові насоси є одними з найпоширеніших насосів у світі. Завдяки своїм конструкційним рішенням і стабільній роботі, цей тип насосів знайшов широке застосування як для розв'язання побутових задач, так і для основних технологічних процесів у різних галузях промисловості. Відцентрові насоси настільки універсальні у використанні, що застосовуються практично у всіх галузях промисловості (хімічна, гірничодобувна, харчова, енергетична та ін.). Вони застосовуються для перекачування різних рідин, починаючи з води й закінчуючи високоагресивними й абразивними суспензіями. Вибір матеріалів для основних елементів відцентрових насосів дуже широкий, і найчастіше він ґрунтується на стійкості даного матеріалу до властивостей рідини, що перекачується, і умовах роботи самого насоса.

Основними перевагами відцентрових насосів є проста конструкція, високий ККД і т.ін. Серед недоліків варто відзначити низьку зносостійкість ро-

бочого колеса, яке є основним елементом відцентрового насоса. Форма, розміри лопатки робочого колеса насоса визначаються завдяки трудомістким розрахункам. Робочі колеса насосів можна розділити на три категорії: відкриті, напівзакриті, закриті.

Зараз в насособудівництві робочі колеса відкритого типу практично не застосовуються через низький ККД, який становить менш 40%. Незважаючи на цей істотний недолік, відкритий тип робочих коліс має ряд беззаперечних переваг: ремонт їх дуже простий, насоси з робочим колесом відкритого типу набагато менше засмічуються, можна суттєво продовжити їхній термін служби за допомогою накладок зі зносостійкої сталі. Напівзакриті робочі колеса не застосовуються в великих ґрунтових насосах. Проте, частина виробників невеликих насосів, для яких тема засмічення досить актуальна, намагаються застосовувати саме напівзакриті колеса. Закриті робочі колеса насоса дозволяють досягти максимального ККД, що викликає найбільший інтерес з боку як виробників, так і споживачів. Перевагою такого типу робочих коліс є більш висока міцність. Але є й недоліки, а саме – більш складний ремонт і захист від зношування. На робочих колесах розташовані лопатки, кількість яких перебуває в межах від 2 до 6. На зовнішній поверхні дисків закритого робочого колеса часто роблять радіальні виступи. Їх іноді роблять не радіальними, а такими, що повторюють контур лопаток.

За технологічною схемою виготовлення робочих коліс обробку профілю диска з лопатками роблять на копіювально-фрезерному верстаті із програмним керуванням, покривний диск і диск із лопатками зварюють між собою аргонодуговим зварюванням, для зняття напруги після зварювання роблять термообробку колеса. Недоліками цього способу є труднощі забезпечення високої міцності колеса за допомогою тих зварених з'єднань, які можливі при зазначеному поділі колеса на частини, наприклад, таврового або у вигляді прорізних швів, а також необхідність термообробки всього колеса після зварювання. При цьому зварні шви, загалом кажучи, спотворюють форму міжлопаткових каналів.

Відомий спосіб виготовлення робочого колеса відцентрового насоса, згідно з яким робоче колесо виконують із двох частин, виготовляючи кожну лопатку за допомогою стикового зварного з'єднання двох елементів, один з яких виконують у вигляді виступу на основному диску як одне ціле з останнім, а другий – на покриваючому диску як одне ціле з останнім. Недоліками цього способу є технологічні труднощі, а в деяких випадках і неможливість одержання складної просторової форми міжлопаткових каналів для коліс невеликих розмірів. У закордонному й вітчизняному насособудуванні проводяться дослідження з пошуку оптимальних схем технологічного процесу виготовлення деталей з полімерів, що відповідають необхідним техніко-економічним вимогам.

До основних способів переробки виробів з пластмас відносяться пресування, лиття під тиском, екструзія, вакуум-формування, видування, штампування. У деяких випадках застосовується й механічна обробка із блоків матеріалу. Застосування полімерних композицій для виготовлення робочих коліс шахтних відцентрових насосів пов'язано зі значними технологічними труднощами. Колесо відцентрового насоса являє собою просторову конструкцію закритого типу. Закрите робоче колесо можна виготовляти з полімерних матеріалів двома шляхами – пресуванням і литтям під тиском. Результати дослідження зносостійкості й технологічності виготовлення показали переваги полімерних матеріалів перед традиційно застосовуваними сталевим і чавунним литтям. У виробничому відношенні виготовлення робочих коліс і інших деталей з термопластичних матеріалів значно простіше, чим із бронзи, чавуну або термореактивних пластмас. Наприклад, деталі з поліамідних смол дуже легко відливати в металеві форми на звичайних ливарних машинах. Збереження необхідних форм, точність розмірів і чистота поверхонь при цьому легко забезпечуються в потрібних межах.

Для швидкої заміни зношених деталей у сучасній промисловості використовують 3D-друк [52]. Світовий виробник різних видів насосів і арматури, концерн KSB (Німеччина), став найбільшим у світі новатором в області застосування 3D-друку в ливарному виробництві. За допомогою 3D-принтера

виготовляються майстер-моделі й запчастини до насосів, що дозволяє суттєво скоротити час ремонту або появи нових моделей на ринку.

Однак виникає проблема завдання інформації для друку, тобто створення математичної й комп'ютерної моделі проєктованого об'єкта. Одним з методів розв'язання цієї проблеми, як ми вже писали, є застосування теорії R-функцій, яка дозволяє описувати геометричні об'єкти складної форми єдиним аналітичним виразом [27, 28, 35].

При побудові математичних моделей методом R-функцій будуть використані як найпростіші R-операції (2.1), так і R-операції для згладжування гострих кромek і кутів (2.7). При побудові рівнянь, що відповідають геометричним об'єктам із точковою симетрією циклічного типу, для скорочення кількості R-операцій будуть використані результати Теорема 4 (2.42). Крім того, для побудови об'єкта заданої товщини δ буде використано його нормалізоване рівняння $\omega(x, y, z) \geq 0, \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 1$.

Побудуємо математичну модель відкритого робочого колеса відцентрового насоса з радіальними лопатками.

$$f1 = (10^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (0.5 - z)(0.1 + z) \geq 0; \quad f2 = (6^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f12 = (f1 \vee_0 f2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 4.5^2) \geq 0; \quad f123 = f12 \vee_0 f3 \geq 0 \text{ (рис. 3.9, а);}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}; \quad no = 24; \quad ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2}; \quad x1 = \rho \cos \mu; \quad y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fr = (((0.25 - |y1|) \wedge_0 z(1.9 - z)) \wedge_0 (10^2 - x1^2 - y1^2)) \wedge_0 (x1^2 + y1^2 - 5^2) \geq 0 \text{ (рис. 3.9, б);}$$

$$f4 = (4.5^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 3^2) \geq 0; \quad f5 = ((1 - x^2) \vee_0 (1 - y^2)) \wedge_0 z(1.93 - z) \geq 0;$$

$$f6 = f4 \wedge_0 f5 \geq 0; \quad f7 = (0.3^2 - x^2 - (y - 3.7)^2) \vee_0 (0.3^2 - x^2 - (y + 3.7)^2) \geq 0;$$

$$fv = f6 \wedge_0 -f7 \geq 0 \text{ (рис. 3.9, в);}$$

$$r2 = 0.4; \quad sr2 = r2^2 - fr^2 - f123^2; \quad fpr = fr + f123 + \sqrt{fr^2 + f123^2 + \frac{sr2}{8r2^2}(sr2 + |sr2|)} \geq 0;$$

$$W = fv \vee_0 fpr \geq 0 \text{ (рис. 3.9, r);}$$

$$fpas = (0.35^2 - y^2) \wedge_0 x(2 - x) \geq 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad nd = 8; \quad th = \frac{\varphi}{nd}; \quad t1 = \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}; \quad ft = \left(t1 - \frac{th}{2}\right) \frac{\pi}{th}; \quad \mu0 = \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ft]}{(2k-1)^2},$$

$$wl = 0.5 \left(t1 - \frac{th}{2} + \varphi - t1 - \frac{th}{2} - \text{abs} \left(t1 - \frac{th}{2} - \varphi + t1 + \frac{th}{2} \right) \right) \geq 0;$$

$$\mu z = 0.5(\mu0 + wl - \text{abs}(\mu0 - wl)) \geq 0; \quad \begin{cases} x1k = \rho \cos \mu z \\ y1k = \rho \sin \mu z \end{cases}; \quad \begin{cases} xkk = -\frac{0.8x1k}{z-0.8} \\ ykk = -\frac{0.8y1k}{z-0.8} \end{cases};$$

$$fk = (0.3^2 - xkk^2 - ykk^2) \wedge_0 (z - 0.8) \geq 0; \quad WKOL = (\omega \wedge_0 \overline{fk}) \wedge_0 \overline{fpas} \geq 0 \text{ (рис. 3.9, д).}$$

Змінюючи значення буквених параметрів no, nd та інших, можна в межах цієї ж програми одержувати колеса з іншими конструктивними параметрами.

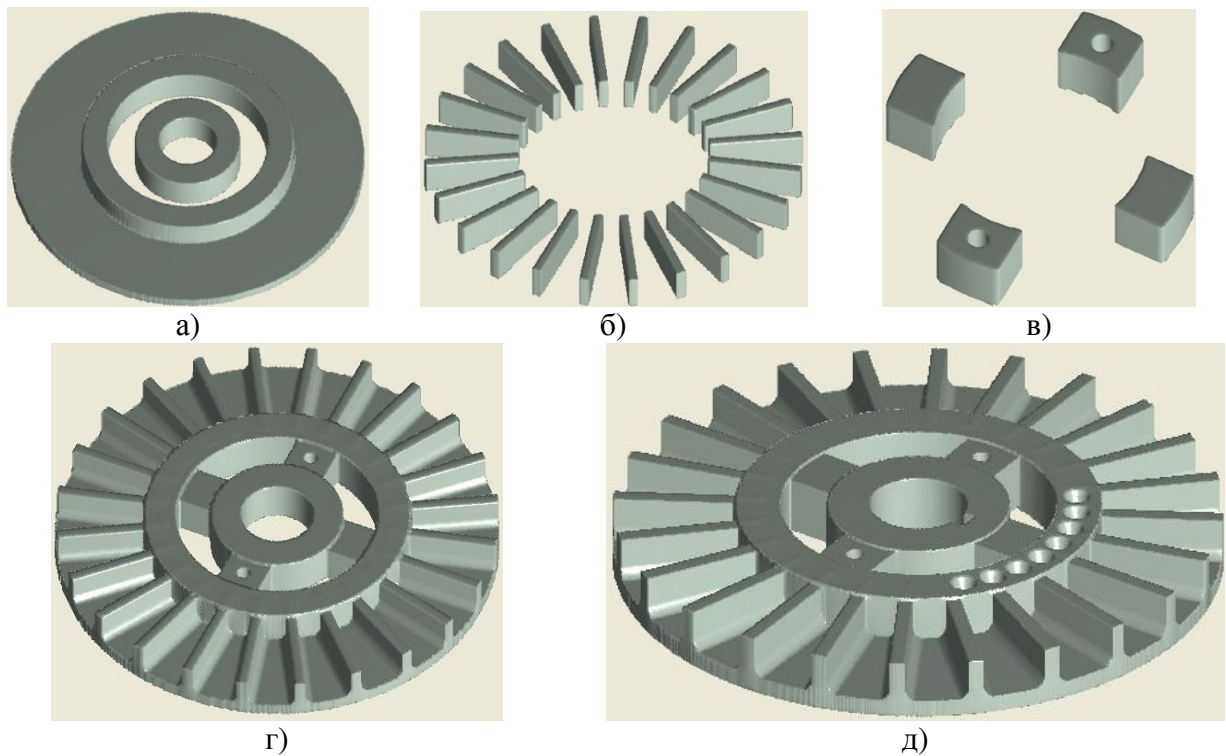


Рис. 3.9. Відкрите робоче колесо відцентрового насоса з радіальними лопатками

Побудуємо математичну модель відкритого робочого колеса відцентрового насоса із шістьма криволінійними лопатками й балансувальними отворами.

$$f_{01} = ((2.2^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 1)) \wedge_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f_0 = ((10^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (2 + z)(0.2 - z)) \vee_0 f_{01} \geq 0 \text{ (рис. 3.10, а);}$$

$$f_{11} = (0.5 - |(5^2 - (y - 5)^2 - x^2)/10|) \wedge_0 \bar{x} \geq 0;$$

$$x_1 = x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3}; \quad y_1 = -x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3}; \quad f_1 = (0.5 - |(5^2 - (y_1 - 5)^2 - x_1^2)/10|) \wedge_0 \bar{x}_1 \geq 0;$$

$$x_2 = x \cos \frac{2\pi}{3} + y \sin \frac{2\pi}{3}; \quad y_2 = -x \sin \frac{2\pi}{3} + y \cos \frac{2\pi}{3};$$

$$f_2 = (0.5 - |(5^2 - (y_2 - 5)^2 - x_2^2)/10|) \wedge_0 \bar{x}_2 \geq 0;$$

$$x_3 = x \cos \frac{3\pi}{3} + y \sin \frac{3\pi}{3}; \quad y_3 = -x \sin \frac{3\pi}{3} + y \cos \frac{3\pi}{3};$$

$$f_3 = (0.5 - |(5^2 - (y_3 - 5)^2 - x_3^2)/10|) \wedge_0 \bar{x}_3 \geq 0;$$

$$x_4 = x \cos \frac{4\pi}{3} + y \sin \frac{4\pi}{3}; \quad y_4 = -x \sin \frac{4\pi}{3} + y \cos \frac{4\pi}{3};$$

$$f_4 = (0.5 - |(5^2 - (y_4 - 5)^2 - x_4^2)/10|) \wedge_0 \bar{x}_4 \geq 0;$$

$$x_5 = x \cos \frac{5\pi}{3} + y \sin \frac{5\pi}{3}; \quad y_5 = -x \sin \frac{5\pi}{3} + y \cos \frac{5\pi}{3};$$

$$f_5 = (0.5 - |(5^2 - (y_5 - 5)^2 - x_5^2)/10|) \wedge_0 \bar{x}_5 \geq 0;$$

$$f_{1112345} = ((((((f_{11} \vee_0 f_1) \vee_0 f_2) \vee_0 f_3) \vee_0 f_4) \vee_0 f_5) \wedge_0 (2 - z)z) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 3^2)) \geq 0;$$

$$f_v = f_{1112345} \wedge_0 (9.7^2 - x^2 - y^2) \geq 0 \text{ (рис. 3.10, б);}$$

$$f_{i0} = f_0 \vee_0 f_v \geq 0 \text{ (рис. 3.10, в);}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad nd = 6; \quad th = \frac{\varphi}{nd}; \quad \theta = \arctg \frac{x}{y}; \quad t_1 = \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad ff = \left(t_1 - \frac{th}{2} \right) \frac{\pi}{th};$$

$$\mu = \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$e1 = t1 - \frac{th}{2}; \quad e2 = \varphi - t1 - \frac{th}{2}; \quad S = 0.5(e1 + e2 - |e1 - e2|) \geq 0; \quad \mu S = 0.5(\mu + S - |\mu - S|) \geq 0;$$

$$y11 = \rho \sin \mu S; \quad fb = \left((0.8^2 - (z+1)^2 - y11^2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 3^2) \right) \wedge_0 x \geq 0;$$

$$WKOL = fi0 \wedge_0 \overline{fb} \geq 0 \quad (\text{рис. 3.10, г}).$$

Змінюючи параметр nd , можна регулювати кількість балансувальних отворів.

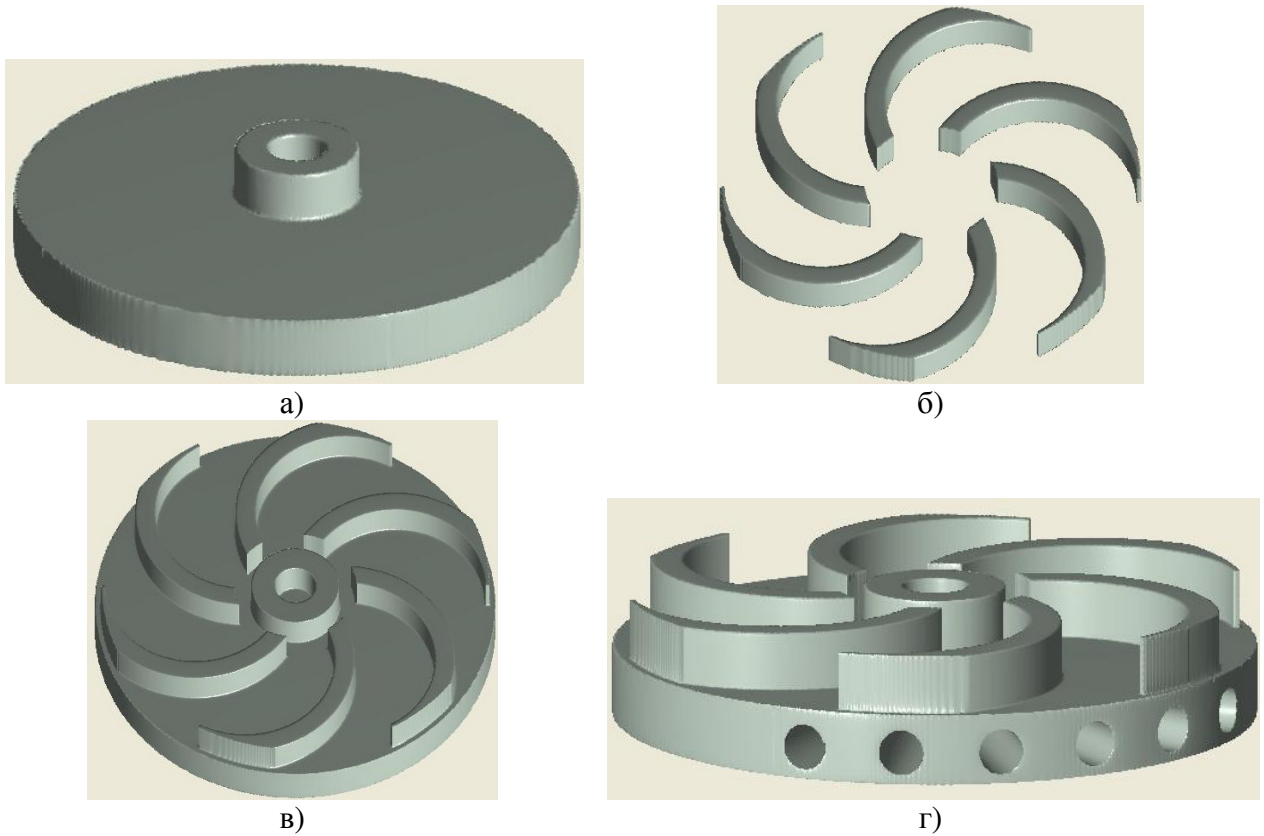


Рис. 3.10. Відкрите робоче колесо із криволінійними лопатками й балансувальними отворами

Побудуємо математичну модель відкритого робочого колеса відцентрового насоса з п'ятьма криволінійними лопатками.

$$f01 = \left((2.2^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 1.7^2) \right) \wedge_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f02 = \left((1.7^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 1.2^2) \right) \wedge_0 (1.5 - z)z \geq 0;$$

$$f001 = f01 \vee_0 f02 \geq 0; \quad f00 = \left((12.5^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (3 + z)(0.5 - z) \right) \vee_0 f001 \geq 0 \quad (\text{рис. 3.11, а});$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}; \quad no = 10; \quad ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)\mu]}{(2k-1)^2}; \quad x1 = \rho \cos \mu; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fn1 = ((1.2^2 - y1^2) \wedge_0 (-z - 2)) \wedge_0 (x^2 + y^2 - 8^2) \geq 0; \quad f0 = f00 \wedge_0 \overline{fn1} \geq 0 \quad (\text{рис. 3.11, б});$$

$$f11 = (0.5 - |(7^2 - x^2 - (y - 5)^2)/14|) \wedge_0 \overline{x} \geq 0;$$

$$x1 = x \cos \frac{2\pi}{5} + y \sin \frac{2\pi}{5}; \quad y1 = -x \sin \frac{2\pi}{5} + y \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$f1 = (0.5 - |(7^2 - x1^2 - (y1 - 5)^2)/14|) \wedge_0 \overline{x1} \geq 0;$$

$$x2 = x \cos \frac{4\pi}{5} + y \sin \frac{4\pi}{5}; \quad y2 = -x \sin \frac{4\pi}{5} + y \cos \frac{4\pi}{5};$$

$$f2 = (0.5 - |(7^2 - x2^2 - (y2 - 5)^2)/14|) \wedge_0 \overline{x2} \geq 0;$$

$$x3 = x \cos \frac{8\pi}{5} + y \sin \frac{8\pi}{5}; \quad y3 = -x \sin \frac{8\pi}{5} + y \cos \frac{8\pi}{5};$$

$$f3 = (0.5 - |(7^2 - x3^2 - (y3 - 5)^2)/14|) \wedge_0 \overline{x3} \geq 0;$$

$$x4 = x \cos \frac{16\pi}{5} + y \sin \frac{16\pi}{5}; \quad y4 = -x \sin \frac{16\pi}{5} + y \cos \frac{16\pi}{5};$$

$$f4 = (0.5 - |(7^2 - x4^2 - (y4 - 5)^2)/14|) \wedge_0 \overline{x4} \geq 0;$$

$$xk = -\frac{z_0 x}{z - z_0}; \quad yk = -\frac{z_0 y}{z - z_0}; \quad fk = xk^2 + yk^2 - r^2 \geq 0; \quad x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = -2; r = 2.2.$$

$$f111234 = (((((f11 \vee_0 f1) \vee_0 f2) \vee_0 f3) \vee_0 f4) \wedge_0 (2.5 - z)z) \wedge_0 fk \geq 0 \quad (\text{рис. 3.11, в});$$

$$WKOL = f111234 \vee_0 f0 \geq 0 \quad (\text{рис. 3.11, г}).$$

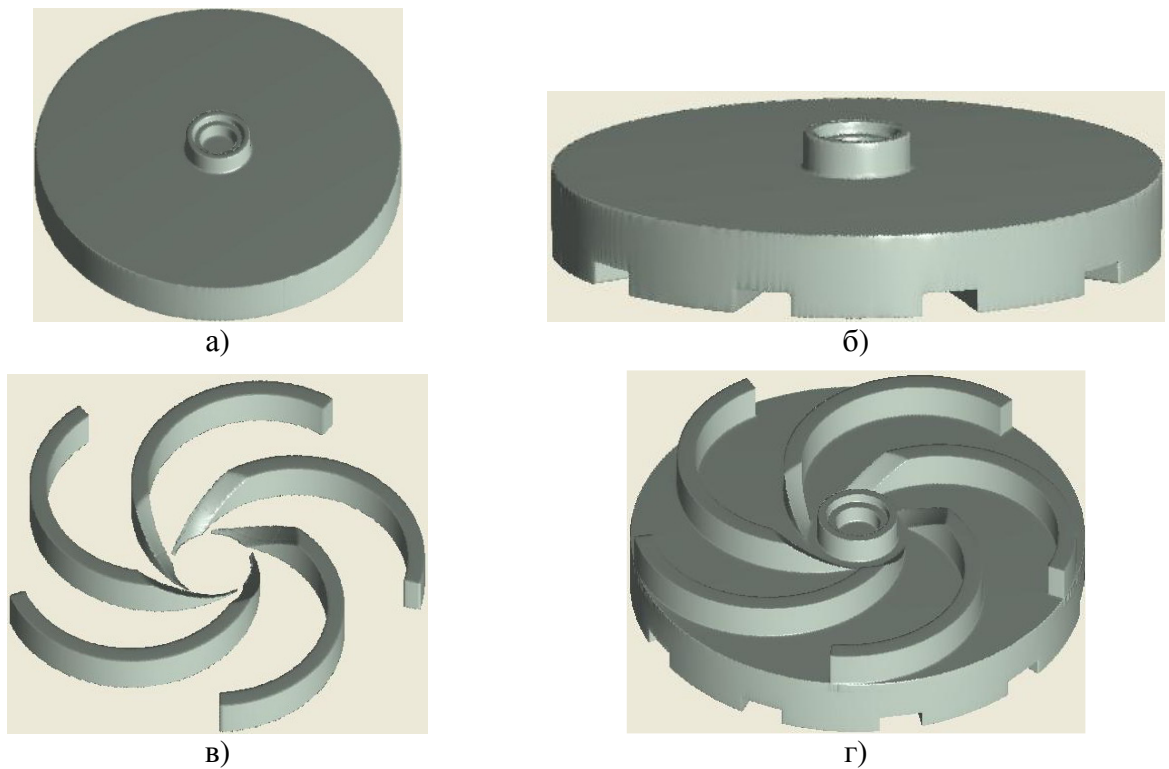


Рис. 3.11. Відкрите робоче колесо із криволінійними лопатками

Змінюючи значення z_0, r для конічної поверхні, можемо одержувати різні кути нахилу лопатки в центральній зоні.

Отримані рівняння моделей коліс візуалізовано за допомогою програми RFPreview [53], а їх реалізацію на 3D-принтері (рис. 3.12) виконано в ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України.

На основі розроблених алгоритмів побудовані математичні й комп'ютерні моделі напівзакритих робочих коліс відцентрових насосів, наведених на рис. 3.13.



Рис. 3.12. Моделі коліс, реалізовані на 3D-принтері

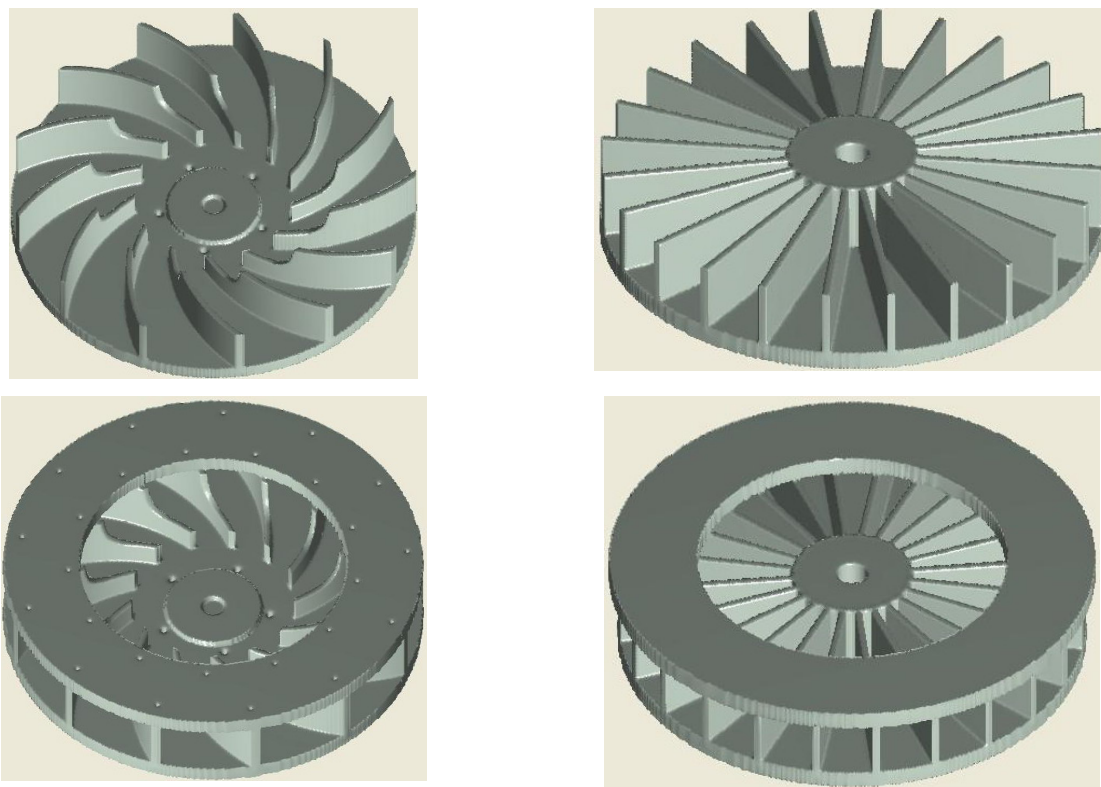


Рис. 3.13. Напівзакриті робочі колеса

Програмна реалізація побудованих рівнянь напівзакритих робочих коліс відцентрових насосів в умовах експлуатації комплексу RFPreview наведена в Додатку Б.

Висновки по 3 розділу

Створення математичних моделей для реалізації 3D-друку становить значний інтерес, який пов'язаний з активним впровадженням 3D-друку в різні галузі промисловості. Переваги застосування 3D-друку очевидні – це виготовлення нестандартних моделей, скорочення часу на створення нових прототипів і скорочення часу ремонту, простота й значна дешевизна виробництва, використання сучасних надміцних матеріалів. Розроблено загальний підхід до побудови математичних і комп'ютерних моделей геометричних об'єктів із гвинтовим типом симетрії на основі теорії R-функцій. Змінюючи закон закрутки, ми змінюємо лише вид функції α у відповідному перетворенні координат.

Метод побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають циклічний тип симетрії в 3D, був використаний для побудови рівняння відкритого робочого колеса відцентрового насоса з радіальними лопатками. А для побудови математичних моделей коліс відцентрових насосів із криволінійними лопатками був розроблений новий підхід на основі теорії R-функцій.

Вірогідність отриманих результатів, їх адекватність проєктованим об'єктам підтверджується візуалізацією як в умовах віртуальних експериментів при експлуатації програми RFPreview, так і реалізацією на 3D-принтері. Аналітичний запис проєктованих об'єктів дає можливість використовувати буквені геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, зі свого боку, дозволяє оперативно змінювати їхні конструктивні елементи.

Наукові результати 3 розділу опубліковано в роботах [1, 6, 8].

РОЗДІЛ 4

АНАЛІТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ В 3D

4.1 Аналітична ідентифікація поверхонь безпілотних літальних апаратів для реалізації на 3D-принтері

БПЛА з кожним днем мають все більший попит в усьому світі. Це обумовлено рядом переваг перед пілотованою авіацією, а саме, відсутністю екіпажу, відносно невеликою вартістю БПЛА при великій тривалості й дальності польоту. Характеристики конструкцій БПЛА різні, що позначається на сферах застосування. На відміну від легких, важкі БПЛА в основному беруть участь у воєнних діях – у якості розвідки або для знищення конкретних цілей. БПЛА наділені безліччю позитивних якостей, головна з яких – збереження життя пілота. Цивільне й комерційне застосування БПЛА ще недостатньо добре розвинене, хоча область потенційного використання БПЛА достатньо велика. Вона містить у собі доставку вантажів, моніторинг навколишнього середовища й лісових пожеж, патрулювання кордонів, повітряну розвідку й картографування, контроль дорожнього руху й ін. За типом БПЛА класифікують на літакові, вертолітні й конвертопланові.

Експерти впевнені, що основними технічними проблемами у створенні сучасних БПЛА є розробки системи дослідницького інтелекту, а також конструкції самих апаратів, їх форм, двигунів, аеродинаміки і т. ін. [54–57].

Однією з нових технологій у виготовленні БПЛА, яка останнім часом отримує зростаючу популярність, став 3D-друк.

Студенти Університету Саутгемптона створили перший в світі літак, названий Sulsa (Southampton University Laser Sintered Aircraft), надрукований на 3D-принтері [58], а Військово-морські сили Великобританії почали використовувати його для льодової розвідки в Антарктиді [59].

Компанія Airbus представила в рамках берлінського авіасалону Thor – надрукований на 3D-принтері безпілотник [17]. Його довжина становить

приблизно 4 м, розмах крил – такий самий, важить обладнання близько 25 кг. У компанії пояснюють, що новий безпілотник розроблявся для аеродинамічних досліджень, пов'язаних з високим ризиком – звідси й використання 3D-друку, який дозволяє створити апарат за кілька тижнів і з набагато меншими витратами.

Безпілотник, проте, не єдина інновація Airbus, пов'язана з 3D-друком. Компанія також випробовує у вітрових тунелях надруковані на 3D-принтері секції крил – у цьому випадку 3D-друк дозволив знизити термін виробництва на 90%, а вартість – на 75%. Крім того, Airbus планує почати установку надрукованих на 3D-принтері перегородок, що відокремлюють салон пасажирських літаків від кухні. За рахунок конструктивних особливостей і завдяки 3D-друку перегородка стане на 50% легше.

«Об'єднана приладобудівна корпорація», що входить до Держкорпорації «Ростех», продемонструвала на виставці «Іннопром-2016» перший в Росії безпілотний літальний апарат, повністю виготовлений за технологією 3D-друку. Він здатен нести на борту відеоапаратуру і виконувати різні завдання, пов'язані з розвідкою та моніторингом територій [60].

Наведені приклади вказують на те, що створення як моделей, так і реальних БПЛА на 3D-принтерах, є перспективним проектом, тому необхідна розробка відповідної підтримки у вигляді високотехнологічних комп'ютерних комплексів, що спираються на найпередовіші досягнення сучасної математики.

Проектування БПЛА й системи керування неможливо представити без математичного моделювання польоту БПЛА. Сучасний підхід до проектування припускає створення моделей, що максимально відбивають властивості й особливості поведінки реальних БПЛА. На етапі проектування може бути вирішено велику кількість задач, які ставляться перед дослідниками при використанні БПЛА. Для побудови математичних моделей у цей час створений значний технічний потенціал у вигляді швидкодіючих EOM і сучасних програмних засобів, наприклад, таких, як програмні комплекси SolidWorks,

Ansys CFX, POLYE і ін. У всіх програмних системах виникає й по-різному вирішується проблема завдання геометричної інформації для створення математичної й комп'ютерної моделі проектного БПЛА. Наприклад, у роботі [61] профіль поперечного перерізу крила задається стандартними засобами моделювання Ansys, що спричиняє побудову нової моделі при будь-якій найменшій зміні зовнішнього вигляду профілю. У роботі [62] використовуються стандартні профілі крила НАСА, задані точками. У роботі [63] також використовуються стандартні профілі Центрального аерогідродинамічного інституту імені професора М. Є. Жуковського (ЦАГІ).

У роботі [64] автори використовують чисельні CFD-методи типу LES, а також панельні методи й метод дискретних вихорів для аеродинамічного аналізу, а потім, базуючись на результатах, вносять зміни у форму літальних апаратів. По суті, таким чином, розв'язується обернена задача.

Автори роботи [65] скористалися готовим БПЛА для своїх досліджень. Однак цей БПЛА був сконструйований для звичайного використання. Можливо, якби автори могли вносити зміни у форму поверхні БПЛА, дослідження були б ефективніше.

Робота [66] присвячена коригуванню дії вітру на політ БПЛА. Для такого коригування пропонується спеціальний алгоритм керування. Однак цей алгоритм, можливо, був би простіше, якби вплив вітру враховувався на етапі проектування БПЛА. Для цього можна змінювати його форму, робити політ більш стійким.

У роботі [67] для складання компонентних рівнянь складної системи безпілотного авіаційного комплексу використовується теорія динамічних систем випадково мінливої структури, що найбільш повно відбиває випадковий стрибкоподібний характер впливів, до яких схильна система. Для зниження ступеня випадковості впливів потрібно коригувати форму поверхні БПЛА. Це дозволить зробити БПЛА більш стійким.

Наведені приклади показують, що форма поверхні БПЛА має істотне значення у всіх дослідженнях, і робота з нею вимагає постійного коригуван-

ня. А у використаних при цьому методах і підходах будь-яка найменша зміна зовнішнього вигляду форми поверхні спричиняє побудову нової моделі, у той час як параметричному завданню поверхонь БПЛА приділялося недостатньо уваги. Необхідно вміти будувати математичну модель поверхні, яка буде оперативно реагувати на зміну форми досліджуваного об'єкта.

Розрахункам і випробовуванням нових літальних апаратів повинно бути приділено значну увагу. І тут слід зазначити, що 3D-друк може надати в цьому велику допомогу.

При побудові математичних моделей методом R-функцій використовувалися як найпростіші R-операції (2.1), так і R-операції для згладжування гострих кромek і кутів (2.7). У роботі застосовувалася як добре відома методика стандартних примітивів [27, 35], так і новий підхід – блендінг на каркасі (2.49)–(2.50).

Побудовано математичну й комп'ютерну модель макета БПЛА, поданого на рис. 4.1. Для цього використовувалася як методика блендінгу на каркасі, так і відомі рівняння стандартних примітивів, а саме, рівняння циліндра, трикутної піраміди, еліпсоїда.

Основний корпус.

$$f11 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; \quad f11 = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad fff1 = \sqrt{\left(0.5\sqrt{f11^4 + f11^2} - f11\right)^2 + f11^2};$$

$$\omega p = -fff1 + \frac{(a1 - x)(a2 + x)}{p1} + p2; \quad \omega n = (\omega p \wedge_0 \delta^2 - z^2) \wedge_0 x + l1 \geq 0;$$

$$\omega c1 = \left(\left(\left(1 - \frac{z^2}{oz^2} - \frac{(x+1)^2}{ox^2} \right) \wedge_0 \left(1.25^2 - \frac{y^2}{oy^2} \right) \right) \wedge_0 (\delta - z) \right) \wedge_0 -xtg\lambda + z \geq 0;$$

$$\omega c2 = \left(\left(\left(\left(1 - \frac{z^2}{ozn^2} - \frac{(x+1)^2}{oxn^2} \right) \wedge_0 \left(0.95^2 - \frac{y^2}{oyn^2} \right) \right) \wedge_0 \left(\frac{\delta}{2} + z \right) \right) \wedge_0 (-x - 2\delta) \right) \wedge_0 -xtg\lambda - z \geq 0;$$

$$\omega c3 = \omega c2 \wedge_0 (x^2 - y^2) \geq 0; \quad \omega c = (\omega c1 \wedge_0 (he + z)) \vee_0 \omega c3 \geq 0;$$

$$\omega d = \left(\left(\frac{d^2}{4} - \left(y - \frac{lk1}{2} \right)^2 - (z - hz)^2 \right) \vee_0 \left(\frac{d^2}{4} - \left(y + \frac{lk1}{2} \right)^2 - (z - hz)^2 \right) \right) \wedge_0 (x + Lc)(-x - Lc + h) \geq 0;$$

$\omega l = \omega n \vee_0 \omega c \geq 0$; $\omega n l = ((-x + x_0 - ky^2) \wedge_0 (x + x_{nak})) \wedge_0 z(h_{nak} - z) \geq 0$ – накладка на носі,

$\omega \omega n = ((ab/2)^2 - y^2) \wedge_0 (z - hb) \wedge_0 (lb - x) \geq 0$ – виріз у підчерев'ї,

$rak1 = (rsh^2 - (x + x_{hr})^2 - y^2 - (z + z_r)^2) \vee_0 (rsh^2 - (x - x_{hr})^2 - y^2 - (z + z_r)^2) \geq 0$;

$rak = ((rsh^2 - y^2 - (z + z_r)^2) \wedge_0 ((x_{hr} + x)(x_{nr} - x))) \vee_0 rak1 \geq 0$ – тіло ракети із заокругленими кінцями,

$\omega kor = (((\omega l \vee_0 \omega d) \vee_0 \omega n l) \wedge_0 -\omega \omega n) \vee_0 rak \geq 0$ – основний корпус.

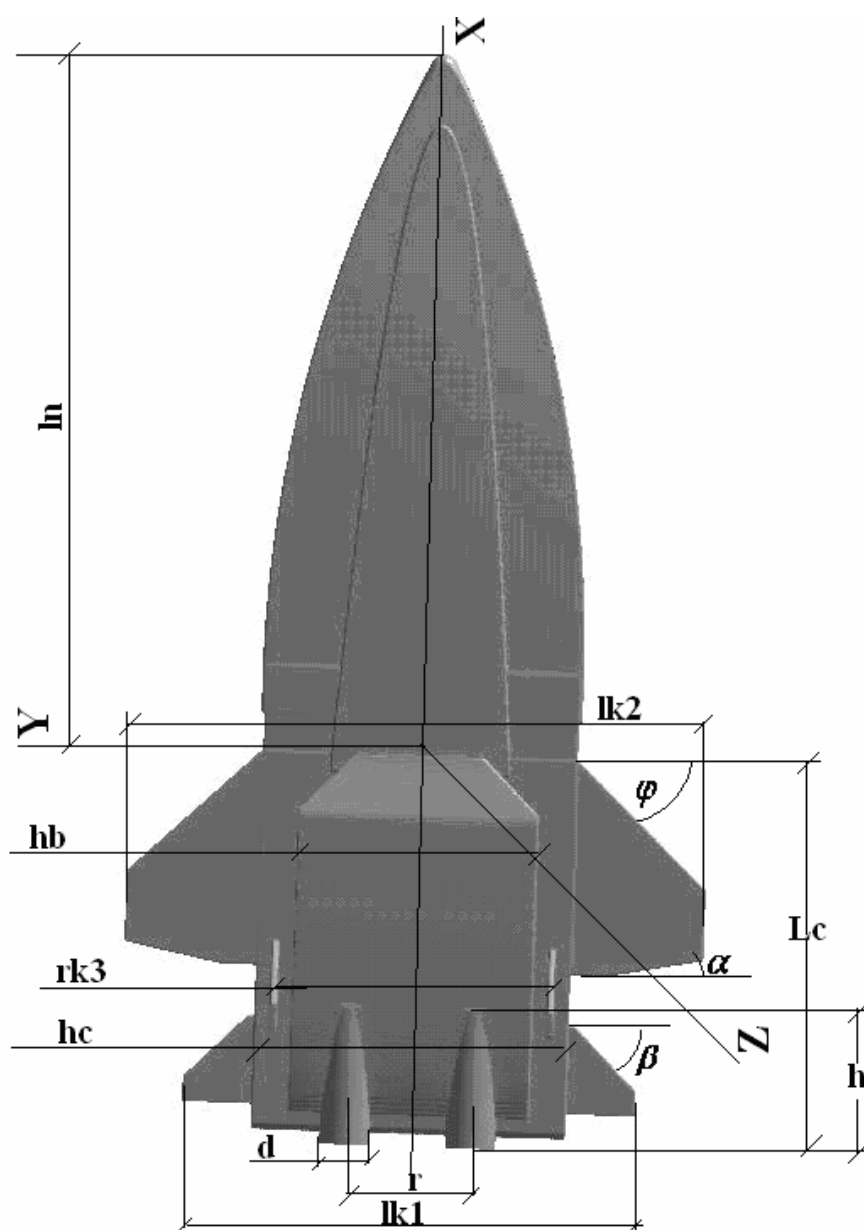


Рис. 4.1. Макет БПЛА

Обтічник перед ракетою в підчерев'ї.

$$y1 = -\frac{cpx \cdot y}{x - xpn - cpx}; \quad z1 = -\frac{cpx \cdot z}{x - xpn - cpx};$$

$\omega_{nizp} = (((z1 + zo)(zon - z1)) \wedge_0 (-4y^2 + (z1 + zo)^2)) \wedge_0 ((xp - x)(x - xpn)) \geq 0$ – трикутна піраміда;

$$\omega_{niz1} = ((z + zo)(zon - z)) \wedge_0 (-ko \cdot y^2 + (z + zo)^2) \geq 0; \quad \omega_{nizz} = \omega_{niz1} \vee_0 (lob - x) \geq 0;$$

$$\omega_{niz} = (\omega_{nizz} \wedge_0 (x - 0.2 + z)) \vee_0 \omega_{nizp} \geq 0 \text{ – обтічник.}$$

Крила.

$$\omega_{kr11} = ((\delta - |z + \delta/2|) \wedge_0 ((xnm + x)(-xbm - x))) \wedge_0 (lk1^2 - y^2) \geq 0;$$

$$\omega_{kr1} = \omega_{kr11} \wedge_0 ((-x0c - x)^2 - y^2) \geq 0 \text{ – малі горизонтальні крила,}$$

$$\omega_{kr22} = ((\delta - |z - \delta/2|) \wedge_0 ((xnb + x)(-xbb - x))) \wedge_0 (lk2^2 - y^2) \geq 0;$$

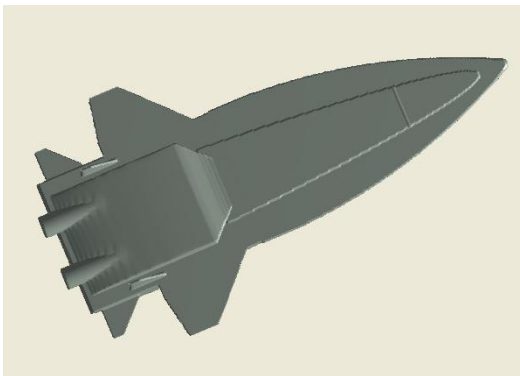
$\omega_{kr2} = (\omega_{kr22} \wedge_0 ((x00 - x)^2 - kky^2)) \wedge_0 (-y^2 + kk1(-x01 - x)^2) \geq 0$ – великі горизонтальні крила,

$$\omega_{kr33} = ((\delta - |y^2 - (rk3/2)^2|) \wedge_0 (z(hz - z))) \wedge_0 ((x11 + x)(-x22 - x)) \geq 0;$$

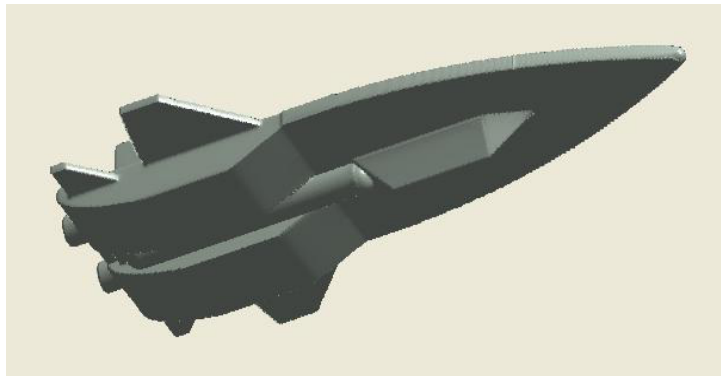
$$\omega_{kr3} = \omega_{kr33} \wedge_0 ((xx1 + x)^2 - z^2) \geq 0 \text{ – вертикальні крила (стабілізатори),}$$

$$\omega_{kr} = \omega_{kr1} \vee_0 \omega_{kr2} \vee_0 \omega_{kr3} \geq 0 \text{ – об'єднання крил,}$$

$$W = \omega_{kor} \vee_0 \omega_{kr} \vee_0 \omega_{niz} \geq 0 \text{ – повна збірка БПЛА, яку подано на рис. 4.2.}$$



а)



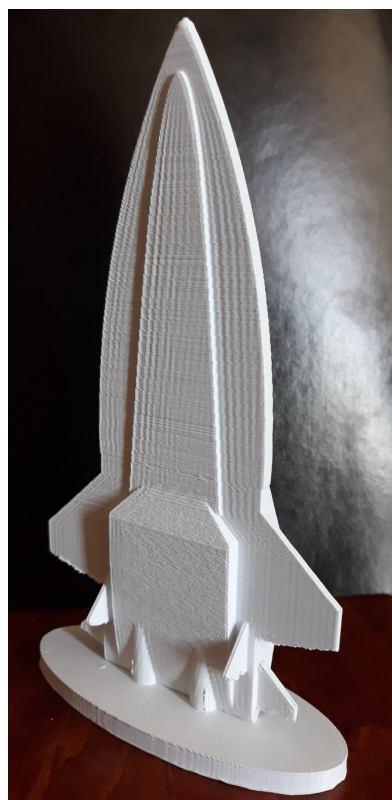
б)

Рис. 4.2. Повна збірка БПЛА

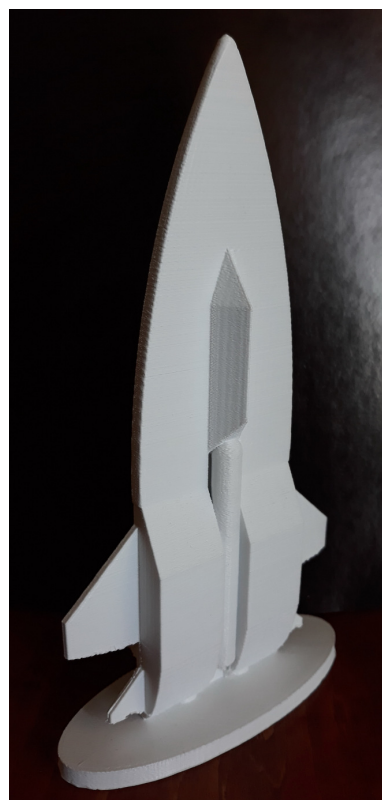
Результати, представлені на рис. 4.2, отримані при таких значеннях буквених параметрів: $a=5$; $p1=20$; $p2=0$; $a1=5.2$; $a2=5$; $\delta=0.1$; $l1=0.2$; $lk1=1$; $hz=0.05$; $Lc=4$; $h=1.5$; $lk1=1.8$; $lk2=2.3$; $rsh=0.2$; $oz=0.6$; $ox=2.5$; $oy=1$; $tg\lambda=0.5$; $ozn=0.3$; $oxn=2.5$; $oyn=1$; $tg\lambda1=0.3$; $he=0.5$; $hnak=0.15$; $x0=4.5$; $k=10$; $xnak=0.65$; $ab/2=0.21$; $hb=0.01$; $lb=2$; $zr=0.21$; $xhr=2.9$; $xnr=0.3$; $lob=2.2$; $xnm=3.3$; $xbm=2.6$; $xnb=2.2$; $xbb=0.5$; $x0c=1.3$; $hz=0.6$; $x11=2.7$; $x22=2$; $x00=0.7$; $kk=0.9$; $kk1=26$; $fk12 = fk1 \vee_0 fk2 \geq 0$; $\omega c = fk12 \vee_0 fc \geq 0$; $x01=2.5$; $xx1=1.9$; $ko=4$; $zo=0.6$; $zon=0.1$; $apy=0$; $bpz=0$; $cpx=0.8$; $xp=3$; $xpn=2.2$.

Для виконання експериментальної реалізації моделі побудованого БПЛА був використаний програмний комплекс **RFPreview** [53], на основі теорії R-функцій з буквеними параметрами, що дозволив написати програму, подану в Додатку Б, й одержати stl-файл для подальшої роботи на 3D-принтері.

У результаті роботи програми й 3D-принтера була отримана модель, подана на рис. 4.3.



а)



б)

Рис. 4.3. Реалізація макета БПЛА на 3D-принтері

Слід зазначити, що зі зміною будь-яких з 55 представлених буквених параметрів автоматично відбудеться зміна форм відповідних фрагментів БПЛА.

Побудовано рівняння виробу, зображеного на рис. 4.4. Для побудови рівняння фюзеляжу використано відомі рівняння стандартних примітивів, а саме, рівняння циліндра й рівняння двох конічних поверхонь.

Фюзеляж.

$$f1 = \frac{R^2 - xc_1^2 - z^2}{2R} \geq 0; \quad f2 = \frac{a^2 - yc_1}{2a} \geq 0; \quad fc = f1 \wedge_0 f2 \geq 0;$$

$$\text{де } xc_1 = x \frac{\sqrt{2}}{2} - y \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad yc_1 = x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$fk11 = \frac{R^2 - x_1^2 - z_1^2}{2R} \wedge_0 \frac{(a - y01 + yc_1)(-a - yc_1)}{|y01|} \geq 0; \quad fk1 = fk11 \wedge_0 (a - y01 - cv + yc_1) \geq 0,$$

$$\text{де } x_1 = x01 - y01 \frac{xc_1 - x01}{yc_1 + a - y01}; \quad z_1 = z01 - y01 \frac{z - z01}{yc_1 + a - y01};$$

$$fk2 = \frac{R^2 - x_2^2 - z_2^2}{2R} \wedge_0 \frac{(a + y02 + yc_1)(yc_1 - a)}{|y02|} \geq 0,$$

$$\text{де } x_2 = x02 - y02 \frac{xc_1 - x02}{yc_1 - a - y02}; \quad z_2 = z02 - y02 \frac{z - z02}{yc_1 - a - y02};$$

$$\omega_{cam} = \omega_{2kr} \vee_{\rho} \omega_c \geq 0, \quad \rho = r1s.$$

Побудови виконані при таких значеннях буквених параметрів: $a=10$; $R=3.5$; $x01=0$; $y01=-15$; $z01=2.2$; $x02=0$; $y02=10$; $z02=-R$; $cv=4$; $r1s=2$.

Розглянуто два варіанти конструкцій крила: з використанням стандартних примітивів і R-операції для згладжування гострих кромek, а також блендинга на каркасі у вигляді дуги окружності.

Варіант 1. Праве крило.

$$f1 = \frac{-z_1 + 0.1x}{\sqrt{1.01}} \geq 0; \quad f2 = \frac{z_1 + 0.1x}{\sqrt{1.01}} \geq 0; \quad f3 = 7 - x \geq 0; \quad z_1 = z + 2.5; \quad f4 = \frac{(3-y)(17+y)}{20} \geq 0;$$

$$\omega1 = f1 \wedge_{\rho} f2 \geq 0, \quad \rho = r1 = 0.3; \quad \omega k = \omega1 \wedge_{\rho} f3 \geq 0, \quad \rho = r2 = 0.5;$$

$$\omega\omega = \omega k \wedge_{\rho} f4 \geq 0, \quad \rho = r3 = 0.5.$$

Ліве крило.

$$xp = y; \quad yp = x; \quad zp = z_1;$$

$$f1p = \frac{-zp + 0.1xp}{\sqrt{1.01}} \geq 0; \quad f2p = \frac{zp + 0.1xp}{\sqrt{1.01}} \geq 0; \quad f3p = 7 - xp \geq 0; \quad f4p = \frac{(3 - yp)(17 + yp)}{20} \geq 0;$$

$$\omega1p = f1p \wedge_p f2p \geq 0, \quad \rho = r1 = 0.3; \quad \omega kp = \omega1p \wedge_p f3p \geq 0, \quad \rho = r2 = 0.5;$$

$$\omega\omega p = \omega kp \wedge_p f4p \geq 0, \quad \rho = r3 = 0.5; \quad \omega2kr = \omega\omega \vee_0 \omega\omega p \geq 0 \quad - \text{два крила.}$$

Варіант 2. Праве крило.

$$z1=z; \quad rk=6; \quad f1 = \frac{rk^2 - (z_1 + rk)^2 - y^2}{2rk} \geq 0; \quad fi = \frac{y + z_1 + rk}{\sqrt{2}} \wedge_0 \frac{-y + z_1 + rk}{\sqrt{2}} \geq 0;$$

$$ff1 = \sqrt{\left(0.5\sqrt{f1^4 + fi^2} - fi\right)^2 + f1^2}; \quad tt = \frac{(20 + y)(1.2 - y)}{par1} - par2; \quad par1 = 300; \quad par2 = 0.4;$$

$$\omega l = tt^2 - ff1^2; \quad \omega k = \omega l \wedge_0 (1 - x)(17 + x) \geq 0; \quad \omega\omega = \omega k \wedge_0 y - 4x + 2 \geq 0;$$

Ліве крило.

$$xp = y; \quad yp = x; \quad zp = z_1;$$

$$f1p = \frac{rk^2 - (zp + rk)^2 - yp^2}{2rk} \geq 0; \quad fi p = \frac{yp + zp + rk}{\sqrt{2}} \wedge_0 \frac{-yp + zp + rk}{\sqrt{2}} \geq 0;$$

$$ff1p = \sqrt{\left(0.5\sqrt{f1p^4 + fi p^2} - fi p\right)^2 + f1p^2};$$

$$ttp = \frac{(20 + yp)(1.2 - yp)}{par1} - par2; \quad par1 = 300; \quad par2 = 0.4;$$

$$\omega lp = ttp^2 - ff1p^2; \quad \omega kp = \omega lp \wedge_0 (1 - xp)(17 + xp) \geq 0; \quad \omega\omega p = \omega kp \wedge_0 yp - 4xp + 2 \geq 0;$$

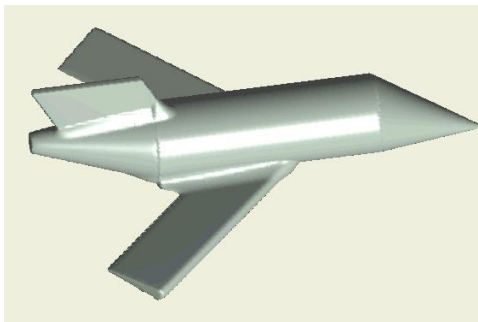
$$\omega2kr = \omega\omega \vee_0 \omega\omega p \geq 0.$$

Хвостове оперення.

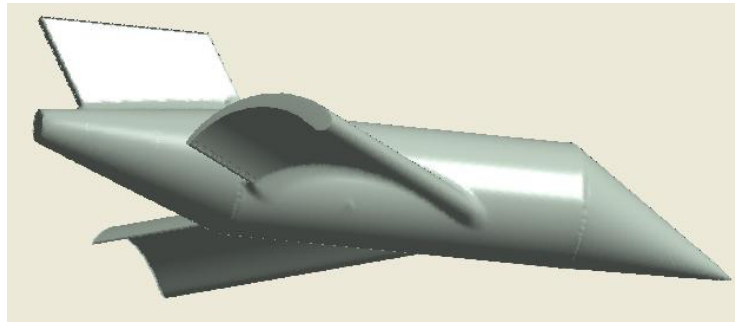
$$\omega f1 = \frac{-z - 2(yc_1 + 7)}{\sqrt{5}} \wedge_0 \frac{z + 2(yc_1 + 17)}{\sqrt{5}} \geq 0; \quad \omega f = \left(\omega f1 \wedge_0 \frac{0.3^2 - xc_1^2}{0.6} \right) \wedge_0 \frac{z(8 - z)}{8} \geq 0.$$

$$\text{Остаточного отримуємо } W = \omega f \wedge_p \omega sat \geq 0, \quad \rho = rxs = 2.$$

На рис. 4.4, а поданий макет БПЛА з крилами, побудованими за першим варіантом, а на рис. 4.4, б) – за другим варіантом.



а)



б)

Рис. 4.4. БПЛА з різними профілями крил

Побудовані за допомогою стандартних примітивів десятипараметричне рівняння фюзеляжу БПЛА із двома різними багатопараметричними рівняннями профілів крил дозволяють при зміні значень буквених параметрів оперативно змінювати форму БПЛА.

Побудоване рівняння фюзеляжу з використанням блендінга на каркасах у вигляді відрізків прямих, один з яких має довжину $2a$, а інший має довжину $2b$ й зміщений до носової частини на величину xc , після чого вони поєднуються за допомогою R-диз'юнкції.

$$x_1 = x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y_1 = -x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f_{i1} = \frac{a^2 - x_1^2}{2a} \geq 0; \quad f_{11} = \sqrt{y_1^2 + z^2};$$

$$fff_1 = \sqrt{\left(\left(\left(\sqrt{f_{11}^4 + f_{i1}^2} \right) - f_{i1} \right) / 2 \right)^2 + f_{11}^2} \geq 0;$$

$$\omega p = (fff_1 + (a_1 - x_1)(a_2 + x_1) / p_1 + p_2) \wedge_0 (2.5^2 - z^2 - y_1^2) \geq 0;$$

$$f_{ib1} = \frac{b^2 - (x_1 - xc)^2}{2b} \geq 0; \quad f_{b11} = \sqrt{y_1^2 + (z - 0.5)^2};$$

$$fffb1 = \sqrt{\left(\left(\left(\sqrt{f_{b11}^4 + f_{ib1}^2} \right) - f_{ib1} \right) / 2 \right)^2 + f_{b11}^2} \geq 0;$$

$$\omega_{pb} = fff b1 + (ba1 - x1 + xc)(ba2 + x1 - xc) / pb1 + pb2 \geq 0; \quad \omega_c = \omega_p \vee_0 \omega_{pb} \geq 0;$$

$$W = \omega_{2k} \vee_0 \omega_c \geq 0.$$

Параметри: $a=15$; $p1=60$; $p2=0$; $a1=15$; $a2=16$; $b=4$; $xc=7$; $pb1=8$; $pb2=0$; $ba1=7$; $ba2=4$.

На рис. 4.5 представлені макети БПЛА при різних значеннях буквенного параметра $p1$: а) $p1=40$; б) $p1=60$; в) $p1=80$; г) $p1=100$.

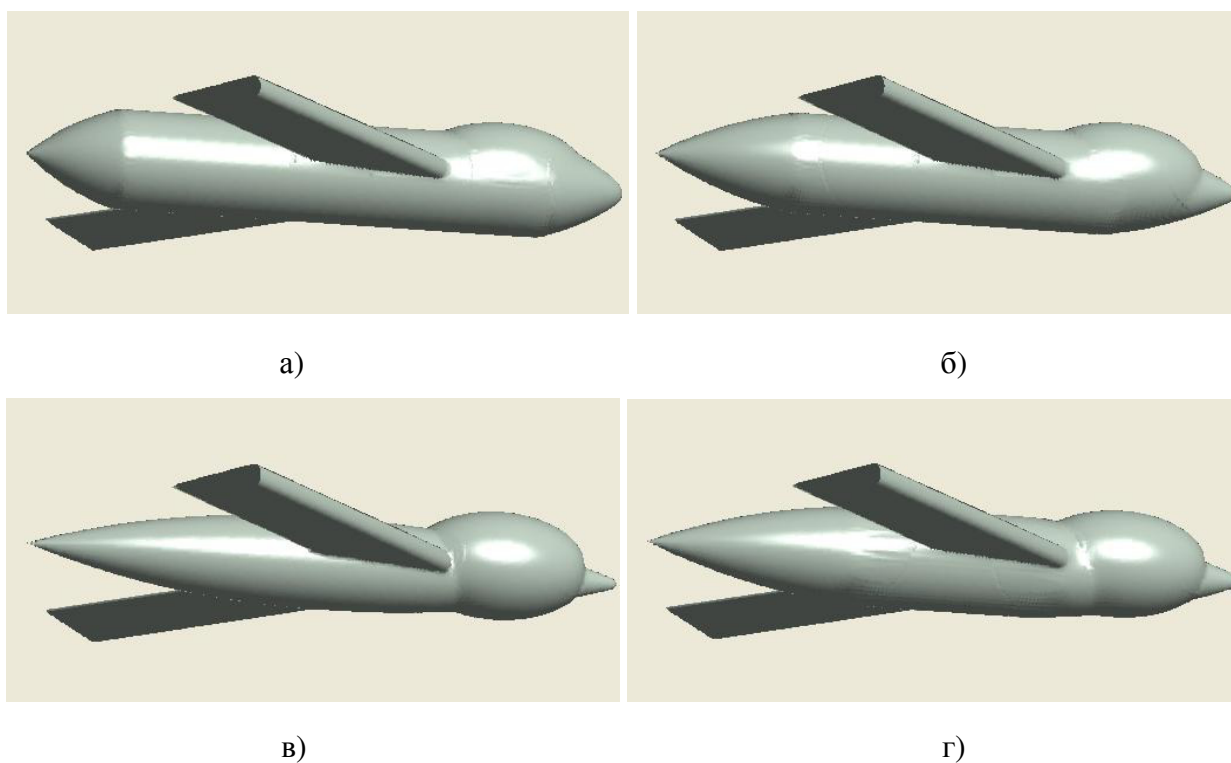
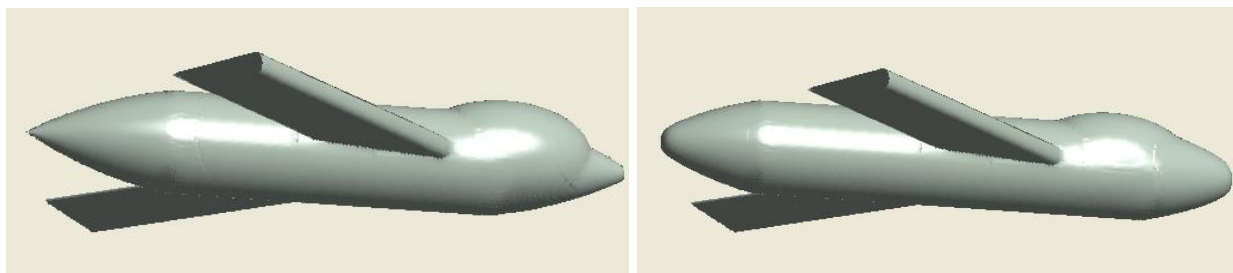


Рис. 4.5. Вид БПЛА при різних значеннях буквенного параметра $p1$

Таким чином, параметр $p1$ суттєво впливає на вид хвостової і головної частини фюзеляжу.

На рис. 4.6 представлений вплив значення параметра $p2$ на вигляд поверхні БПЛА: а) $p1=60$, $p2=0$; б) $p1=60$, $p2=1$.



а)

б)

Рис. 4.6. Вплив значення параметра $p2$ на вигляд поверхні БПЛА

Таким чином, параметр $p2$ впливає на заокруглення хвостової і головної частин фюзеляжу. Отримані рівняння моделей об'єктів візуалізовані за допомогою програми *RFPreview* [53].

4.2 R-функції в аналітичному описанні поверхні безпілотної літального апарату, виконаної за схемою «літаюче крило»

Нижче будуть використані R-операції (2.1) і рівняння конічної поверхні [28].

Крім того, для побудови об'єкта заданої товщини δ використовувалося його нормалізоване рівняння $\omega(x, y, z) \geq 0, \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 1$.

За допомогою площин $f1, f2, f3, fc1, fc2, fc3, fc4$, R-операцій і заміни змінних $x_1 \Leftarrow x, y_1 \Leftarrow y$ побудуємо рівняння основи «літаючого крила» із трьома буквеними параметрами: α – стріловидність крила, (x_0, y_0, z_0) – координати вершини конуса.

$$f1 = y_1 - x_1 \tan \alpha \geq 0; \quad f2 = y_1 + x_1 \tan \alpha \geq 0; \quad f3 = -y_1 + \frac{8.8}{\tan \frac{\pi}{5}} \geq 0; \quad f = (f1 \wedge_0 f2) \wedge_0 f3 \geq 0;$$

$$fc1 = y_1 - 9 - (x_1 - 2.5) \geq 0; \quad fc2 = y_1 - 9 + (x_1 - 2.5) \geq 0;$$

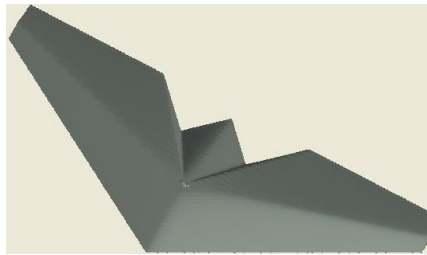
$$fc3 = y_1 - 9 - (x_1 + 2.5) \geq 0; \quad fc4 = y_1 - 9 + (x_1 + 2.5) \geq 0;$$

$$x_1 = x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}; \quad y_1 = y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0};$$

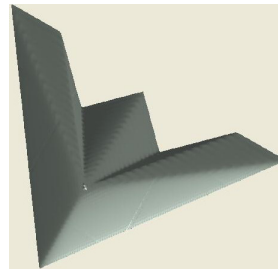
$$fcc1 = fc1 \wedge_0 fc2 \geq 0; \quad fcc2 = fc3 \wedge_0 fc4 \geq 0; \quad fcc = \overline{fcc1} \wedge_0 \overline{fcc2} \geq 0$$

$$fff = f \wedge_0 fcc \geq 0; \quad WK = fff \wedge_0 z(1.5 - z) \geq 0.$$

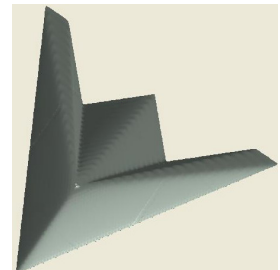
Змінюючи значення параметра α , при $x_0 = 0, y_0 = 5, z_0 = 1.5$, оперативно отримуємо результати, представлені на рис. 4.7.



$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$



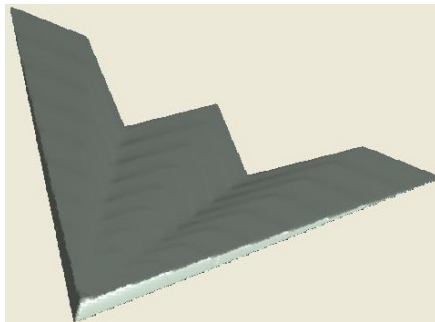
$$\alpha = \frac{3\pi}{10}$$



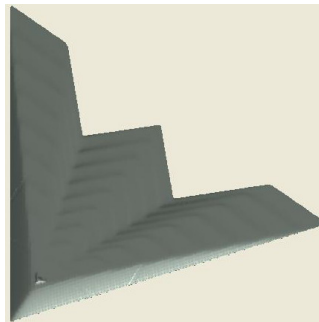
$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Рис. 4.7. БПЛА з різною стріловидністю крила

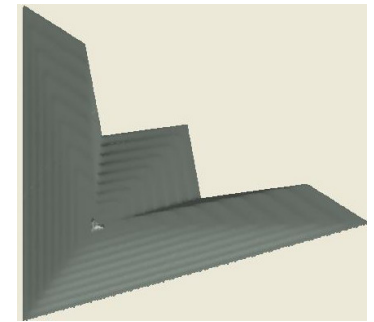
Змінюючи положення й величину (x_0, y_0, z_0) – координат вершини конуса, при $\alpha = \frac{3\pi}{10}$ оперативно отримуємо результати, представлені на рис. 4.8.



$$x_0 = 0, y_0 = 0.5, z_0 = 0.8;$$



$$x_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 0.8;$$



$$x_0 = 0, y_0 = 5, z_0 = 0.8;$$

Рис. 4.8. БПЛА при різних значеннях (x_0, y_0, z_0)

Побудуємо рівняння БПЛА з робочим відсіком у вигляді еліптичного циліндра (рис. 4.9, а)

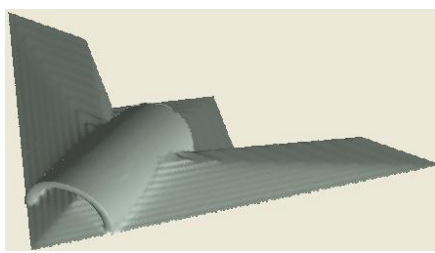
$$e1 = \frac{\delta}{2} - \left| 1 - \frac{x^2}{1.5^2} - \frac{(z - 0.2)^2}{1.01^2} \right|; \quad fe1 = (e1 \wedge_0 (y - 2.5)(10 - y)) \wedge_0 z \geq 0;$$

$$fe = fe1 \wedge_0 (10^2 - x^2 - y^2 - (z - 7)^2) \geq 0; \quad W = WK \vee_0 fe \geq 0,$$

і з робочим відсіком у вигляді конуса з еліптичною напрямною (рис. 4.9, б, в)

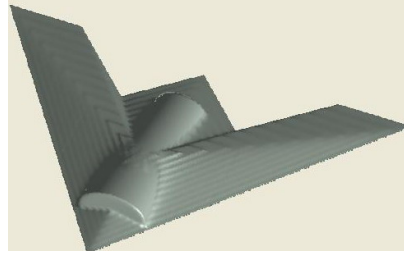
$$x_{12} = x_{02} - y_{02} \frac{x - x_{02}}{y - y_{02}}; \quad z_{12} = z_{02} - y_{02} \frac{z - z_{02}}{y - y_{02}};$$

$$fe = \left(\left(1 - \frac{x_{12}^2}{1.5^2} - \frac{(z_{12} - 0.3)^2}{1.01^2} \right) \wedge_0 (y - 2.5)(9 - y) \right) \wedge_0 z \geq 0; \quad W = WK \vee_0 fe \geq 0.$$



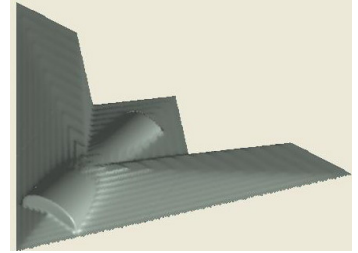
а)

$$\delta = 0.4$$



б)

$$x_{02} = 0, y_{02} = 25, z_{02} = 0$$



в)

$$x_{02} = 0, y_{02} = 20, z_{02} = 0$$

Рис. 4.9. БПЛА з різними робочими відсіками

Тут для наочності показано можливості дослідження впливу значень тільки трьох параметрів на вид поверхні БПЛА. У загальному випадку рівняння БПЛА з буквеними параметрами буде мати такий вигляд:

$$f1 = y_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha \geq 0; \quad f2 = y_1 + x_1 \operatorname{tg} \alpha \geq 0; \quad f3 = -y_1 + \frac{a}{\operatorname{tg} \beta} \geq 0; \quad f = (f1 \wedge_0 f2) \wedge_0 f3 \geq 0;$$

$$fc1 = y_1 - c - (x_1 - k) \geq 0; \quad fc2 = y_1 - c + (x_1 - k) \geq 0;$$

$$fc3 = y_1 - c - (x_1 + k) \geq 0; \quad fc4 = y_1 - c + (x_1 + k) \geq 0;$$

$$x_1 = x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}; \quad y_1 = y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0};$$

$$fcc1 = fc1 \wedge_0 fc2 \geq 0; \quad fcc2 = fc3 \wedge_0 fc4 \geq 0; \quad fcc = \overline{fcc1} \wedge_0 \overline{fcc2} \geq 0;$$

$$fff = f \wedge_0 fcc \geq 0; \quad WK = fff \wedge_0 z(h - z) \geq 0;$$

$$x_{12} = x_{02} - y_{02} \frac{x - x_{02}}{y - y_{02}}; \quad z_{12} = z_{02} - y_{02} \frac{z - z_{02}}{y - y_{02}};$$

$$fe = \left(\left(1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{(z - z_c)^2}{r_y^2} \right) \wedge_0 (y - y_d)(y_h - y) \right) \wedge_0 z \geq 0; \quad W = WK \vee_0 fe \geq 0;$$

$$a = 8.8, c = 9, k = 2.5, \beta = \frac{\pi}{5}, x_0 = 0, y_0 = 0.5, z_0 = 0.8, h = 1.5, x_{02} = 0, y_{02} = 25, z_{02} = 0, z_c = 0.3,$$

$$r_x = 1.5, r_y = 1.01, y_d = 2.5, y_h = 9.$$

Таким чином, отримуємо 16-параметричне сімейство поверхонь. Однак з урахуванням симетрії $x_0 = 0$ й $x_{02} = 0$ змінюватися не повинні, і, як результат, маємо 14-параметричне сімейство. Змінюючи значення буквених параметрів, можна оперативно досліджувати різні форми поверхонь БПЛА.

Отримані рівняння поверхні БПЛА візуалізовано за допомогою програми *RFPreview* [53].

В роботі не ставилася задача одержати ідеальні, відточені форми поверхні. Тут демонструються можливості побудови математичних моделей подібних поверхонь методом R-функцій.

4.3 Математичне і комп'ютерне моделювання аерокосмічних об'єктів для реалізації технології 3D-друку

Компанія 3D Systems Corporation оголосила про успішне випробування тривимірного принтера BFB-3000 в умовах невагомості. Випробування проводилися спільно з компанією MADE IN SPACE і свідчать про можливість виробництва складних вузлів і деталей в умовах космічного простору [68].

Виріб для доставки заданої кількості об'єктів в пункт призначення.

Побудуємо рівняння виробу, зображеного на рис. 4.10. Для цього використаємо відомі рівняння стандартних примітивів, а саме, нам будуть потрібні рівняння циліндрів довжиною L і l з радіусами R і r відповідно. Крім того, задамо рівняння еліпсоїда з півосями $(r, r, 3r)$ і конічної поверхні з вершиною в точці $(0; 0; 3 * R)$ і напрямною $R^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Тоді $\omega = f1 \vee_0 f2 \geq 0$, де $f1 = f11 \vee_0 f1k \geq 0$;

$$f11 = (R^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 z(L - z) \geq 0; f1k = (R^2 - x1k^2 - y1k^2) \wedge_0 (z - L)(L + 3R - z) \geq 0, \text{ де}$$

$$x1k = \frac{-3Rx}{z1 - 3R}; y1k = \frac{-3Ry}{z1 - 3R}; z1 = z - L; f22 = (r^2 - sx^2 - sy^2) \wedge_0 z(l - z) \geq 0;$$

$$sx = \rho \cos \mu - R - r; sy = \rho \sin \mu; \mu = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

$$f2 = f22 \vee_0 \left(1 - \frac{sx^2}{r^2} - \frac{sy^2}{r^2} - \frac{(z-l)^2}{(3r)^2} \right) \geq 0.$$

Зауважимо, що побудована фігура, що складається з циліндра і еліпсоїда, буде відтрансльована n разів уздовж окружності радіуса $r + R$. Буквені параметри: $R = 10$; $r = 2$; $L = 40$; $n = 15$; $l = 15$.

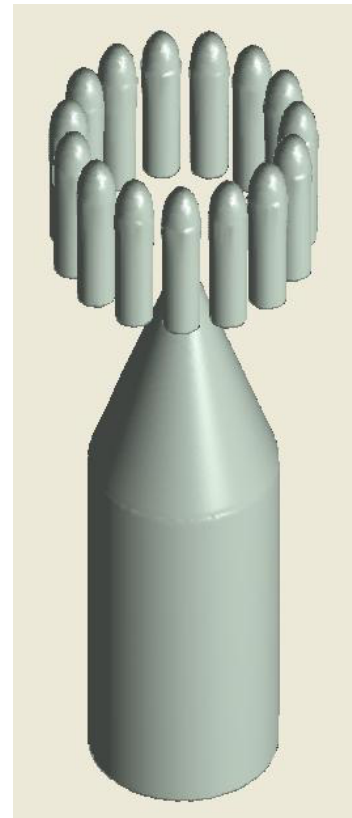
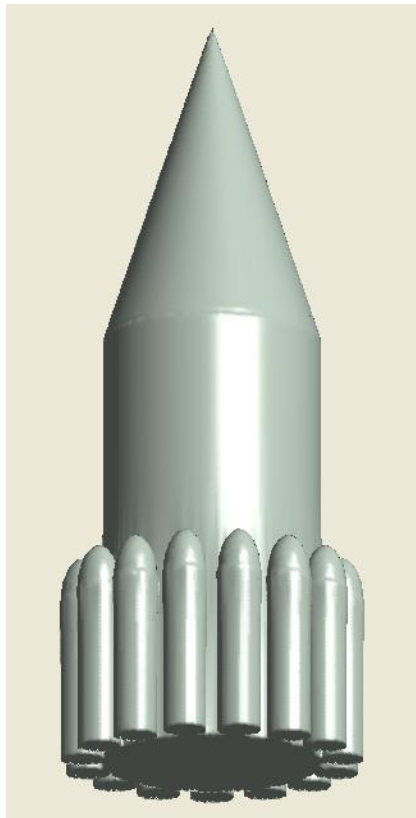


Рис. 4.10. Виріб для доставки заданої кількості об'єктів в пункт призначення

Виріб з доставки конічних об'єктів в пункт призначення.

Побудуємо рівняння виробу, зображеного на рис. 4.11. Для цього використовуємо відомі рівняння стандартних примітивів, а саме: рівняння циліндра $f1$ довжиною L з радіусом a . Крім того, задамо рівняння конічної поверхні $f2$ з вершиною в точці $(-1,8*r,0,L)$, для якої напрямна описується рівнянням $r^2 - x^2 - y^2 = 0$. Тоді $\omega = f1 \vee_0 f2 \geq 0$, де

$$f1 = (a^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 z(L - z) \geq 0; \quad f2 = (r^2 - x_1^2 - y_1^2) \wedge_0 sz(l - sz) \geq 0;$$

$$x_1 = -1.8r - L \frac{sx + 1.8r}{sz - L}; \quad y_1 = -L \frac{sy}{sz - L}; \quad sx = \rho \cos \mu - a + 1.5r; \quad sy = \rho \sin \mu; \quad sz = z - L;$$

$$\mu = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

Зауважимо, що побудовану конічну поверхню буде відтрансльовано n разів уздовж окружності радіуса $r + R$. Буквені параметри: $R = 10$; $r = 2$; $L = 40$; $n = 15$; $l = 15$.

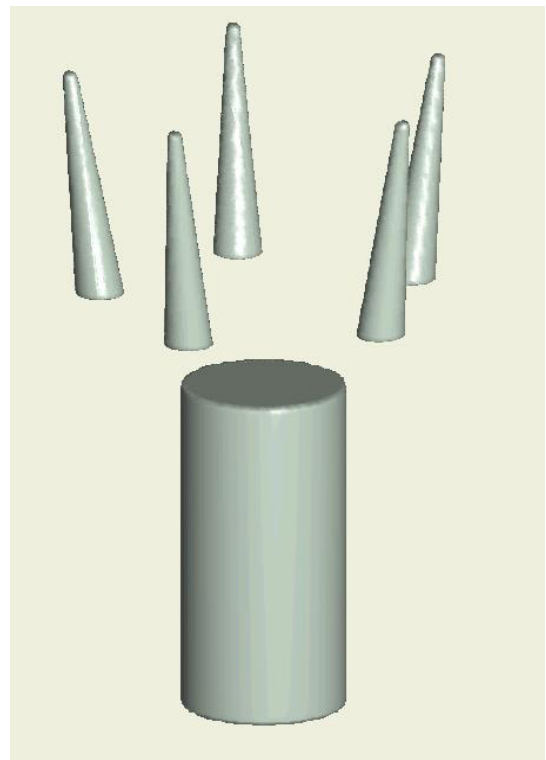
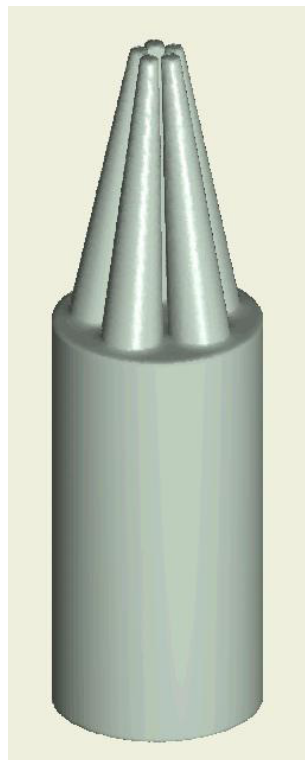


Рис. 4.11. Виріб з доставки конічних об'єктів в пункт призначення

Макети ракет-носіїв.

Побудовані рівняння стандартних примітивів і періодичні функції μ , що дозволяють транслювати побудовані об'єкти задану кількість разів, дають можливість записувати рівняння макетів ракет-носіїв, призначених для виведення в космос вантажних транспортних кораблів, пілотованих транспортних кораблів з екіпажем на борту та ін. (рис. 4.12).

$$f11 = (R^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 z(L - z) \geq 0 \text{ – центральний циліндр};$$

$$f1 = \left(1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} - \frac{(z - L)^2}{(4R)^2} \right) \vee_0 f11 \geq 0 \text{ – центральний циліндр з верхнім еліпсоїдом};$$

$$fs = ((R + e)^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 z(Le - z) \geq 0 \text{ – циліндричне кріплення};$$

$$f1n = f1 \vee_0 fs \geq 0 \text{ – центральна ракета з кріпленням};$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; ff = \frac{\theta no}{2}; \mu = \frac{8}{\pi no} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{no\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2};$$

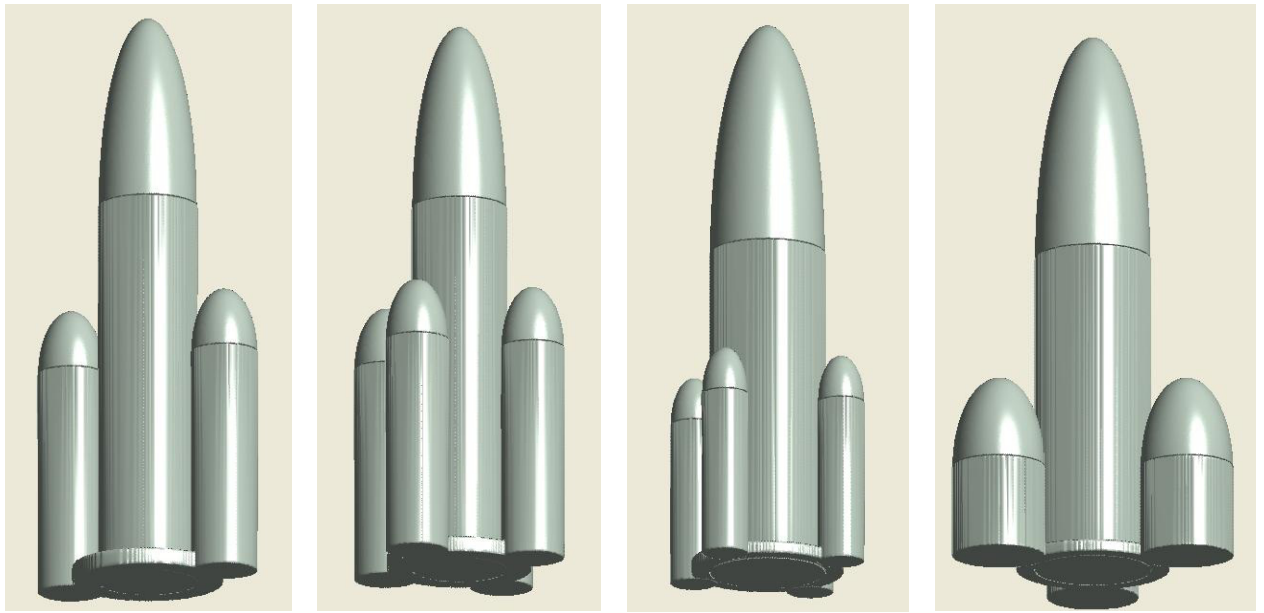
$$x1 = \rho \cos \mu - R - rn - e/4; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$f22 = (rn^2 - x1^2 - y1^2) \wedge_0 z(ln - z) \geq 0 \text{ – бічні циліндри};$$

$$f2 = \left(1 - \frac{x1^2}{rn^2} - \frac{y1^2}{rn^2} - \frac{(z - ln)^2}{(2rn)^2} \right) \vee_0 f22 \geq 0 \text{ – бічні циліндри з верхніми еліпсоїдами};$$

$$W = f1n \vee_0 f2 \geq 0 \text{ – загальне рівняння макета ракети-носія}.$$

Змінюючи значення буквених параметрів, отримаємо сімейство ракет-носіїв, наведених на рис. 4.12. При цьому даний алгоритм дозволяє автоматично перераховувати всі необхідні для побудови константи.



$R=15; no=2; rn=10;$

$L=120; ln=70; e=8;$

$Le=5$

$R=15; no=4; rn=10;$

$L=120; ln=70; e=8;$

$Le=5$

$R=25; no=4; rn=10;$

$L=140; ln=70; e=8;$

$Le=5$

$R=25; no=3; rn=20;$

$L=140; ln=40; e=8;$

$Le=5$

Рис. 4.12. Сімейство ракет-носіїв

Макет космічного корабля.

Як і раніше, використовуючи рівняння стандартних примітивів, запишемо рівняння макета космічного корабля.

$f1 = h1^2 - x^2 \geq 0; f2 = h2^2 - y^2 \geq 0; f3 = z(L - z) \geq 0; \omega1 = f1 \wedge_{\rho} f2 \geq 0, \rho = ro$ – відсік корисного навантаження (корпус корабля);

$$xk = x0 - z0 \frac{x - x0}{zk - z0}; yk = y0 - z0 \frac{y - y0}{zk - z0}; zk = z - L;$$

$$f1kk = h1^2 - xk^2 \geq 0; f2kk = h2^2 - yk^2 \geq 0; f3kk = zk(4R - zk) \geq 0;$$

$$\omega1k = f1kk \wedge_{\rho} f2kk \geq 0, \rho = ro; \omega2k = \omega1k \wedge_0 f3kk \geq 0,$$

$$\omega\omega = \omega1 \wedge_0 \omega2k \geq 0 \text{ – корпус з носовим конусом};$$

$$fg = -z + \frac{1}{|x/8|} \geq 0; fg1 = 0.01 - (y - h1 + 0.3)^2 \geq 0; f1k = fg \wedge_{\rho} fg1 \geq 0, \rho = rk;$$

$$f2k = z(8 - z) \geq 0; \omega k1 = f1k \wedge_{\rho} f2k \geq 0, \rho = rks;$$

$$f5 = 25 - x^2 \geq 0; \omega k = \omega k1 \wedge_{\rho} f5 \geq 0, \rho = rks \text{ – крила};$$

$$kab = 1 - \frac{x^2}{h1^2} - \frac{(y + h1/4)^2}{h2^2} - \frac{(z - L)^2}{h1^2} \geq 0 \text{ – кабіна екіпажу};$$

$$e1 = 1 - \frac{(x - 0.6)^2}{0.5^2} - \frac{(y + 1)^2}{0.5^2} - \frac{z^2}{1.5^2} \geq 0; \quad e2 = 1 - \frac{(x + 0.6)^2}{0.5^2} - \frac{(y + 1)^2}{0.5^2} - \frac{z^2}{1.5^2} \geq 0;$$

$$dv = (e1 \vee_0 e2) \wedge_0 (z + 0.2) \geq 0 \text{ – блок двигунів};$$

$$\omega\omega\omega = ((\omega\omega \vee_0 \omega k) \vee_0 kab) \wedge_0 (y + h1 - 0.1) \geq 0 \text{ – збірка};$$

$$hv = ((0.1 - |x|) \wedge_0 z(-5z + 4y + 25)) \wedge_0 -y(5 + y) \geq 0 \text{ – вертикальний стабілізатор};$$

$$W = (\omega\omega\omega \vee_0 dv) \vee_0 hv \geq 0 \text{ – загальне рівняння макета космічного корабля.}$$

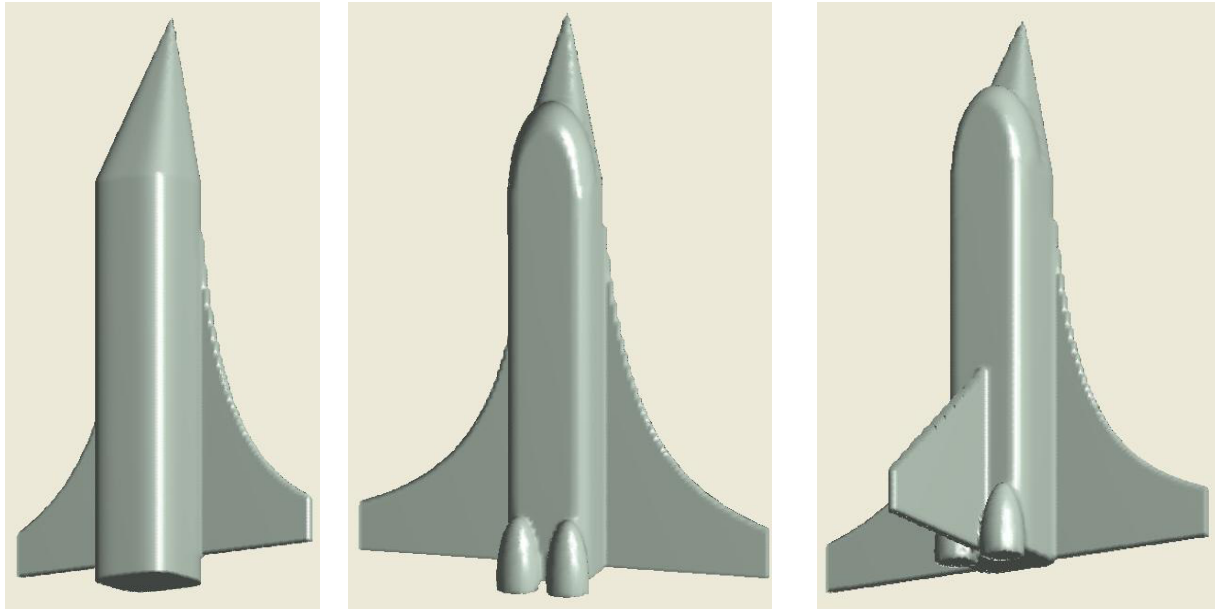


Рис. 4.13. Макет космічного корабля

Всі побудови виконані при наступних значеннях буквених параметрів:
 $L = 9; R = 1; h1 = 1; h2 = 1; ro = 1; rk = 0.5; e = 0.5; rks = 0.5; x0 = 0; y0 = h1; z0 = 4R.$

Отримані рівняння моделей об'єктів візуалізовані за допомогою програм **Ранок** и **RFPreview** [53, 69], а їх реалізацію на 3D-принтері (рис. 4.14) виконано в ІПМаш НАН України.

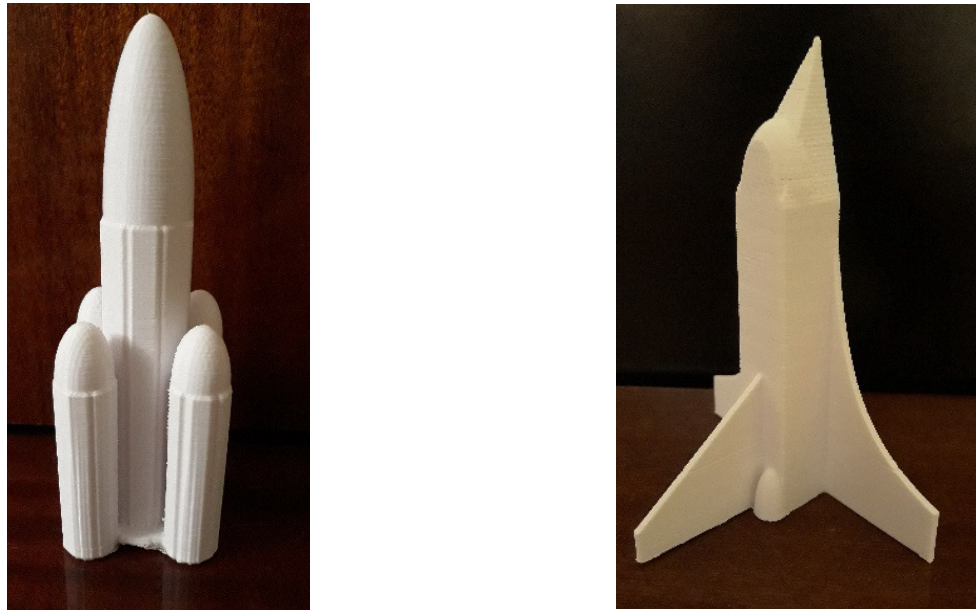


Рис. 4.14. Макети ракети-носія і космічного корабля, реалізовані на 3D-принтері

Властивість додатності побудованих функцій у внутрішніх точках об'єкта є вельми зручною для реалізації 3D друку.

Макет космічного корабля типу «Союз-Аполлон».

Побудуємо математичну модель поверхні макета космічного корабля типу «Союз-Аполлон», з використанням циліндричних, сферичних, еліпсоїдальних, конусоїдальних опорних функцій. Низку опорних функцій нормалізуємо за загальною формулою $\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (\nabla \omega)^2}}$, що дає можливість ще раз

проілюструвати новий підхід до побудови тривимірних рівнянь поверхонь заданої товщини $W = \delta - |\omega| \geq 0$, де 2δ – товщина стінки. Побудуємо рівняння поверхні основної частини корабля «Союз», використовуючи в якості опорних функцій нормалізовані циліндричні поверхні f_1, f_2 , еліпсоїд f_e , сферу f_{31} , що обрізані відповідними площинами.

$$f_1 = (r_1^2 - x^2 - y^2)/2r_1 \wedge_0 z(25 - z)/25 \geq 0; \quad f_2 = (r_2^2 - x^2 - y^2)/2r_2 \wedge_0 z(4 - z)/4 \geq 0;$$

$$f_e = 1 - \left(\frac{x}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{z-25}{30}\right)^2 \geq 0; \quad f_{en} = \frac{f_e}{\sqrt{f_e^2 + g_{fe}}};$$

$$f_{12} = ((f_1 \vee_0 f_2) \vee_0 f_{en}) \wedge_0 z(50 - z)/50 \geq 0;$$

$$f31 = (r3^2 - x^2 - y^2 - (z - 60)^2) / 2r3 \wedge_0 65 - z \geq 0; \quad f32 = f12 \vee_0 f31 \geq 0 \quad (\text{рис. 4.15, а}).$$

Побудуємо рівняння поверхні внутрішньої частини корабля «Союз», використовуючи нормалізованість опорних функцій.

$$ff = \left(f1 \vee_0 1 - \left(\frac{x}{r1} \right)^2 - \left(\frac{y}{r1} \right)^2 - \left(\frac{z - 25}{30} \right)^2 \right) \wedge_0 z(50 - z) / 50 \geq 0;$$

$$ff32 = ff \vee_0 f31 \geq 0; \quad fp = ((1 - \text{abs}(ff32)) \vee_0 f2) \wedge_0 y \geq 0 \quad (\text{рис. 4.15, б}).$$

Побудуємо рівняння поверхні корабля «Союз» з конічним стикувальним блоком $f33$, який переходить в циліндричний $f4$.

$$x3 = -\frac{85x}{z - 85}; \quad y3 = -\frac{85y}{z - 85}; \quad f33 = (r4^2 - x3^2 - y3^2) / 2r4 \wedge_0 (75 - z)(z - 65) / 10 \geq 0;$$

$$f3 = f32 \vee_0 f33 \geq 0; \quad f4 = (r5^2 - x^2 - y^2) / 2r5 \wedge_0 (100 - z)(z - 66) / 34 \geq 0;$$

$$f34 = f3 \vee_0 f4 \geq 0 \quad (\text{рис. 4.15, в}).$$

Запишемо рівняння поверхні сонячних батарей.

$$fa = ((1 - |y|) \wedge_0 (25 - z)(z - 10) / 15) \wedge_0 (45^2 - x^2) / 90 \geq 0; \quad f5 = fa \vee_0 f34 \geq 0 \quad (\text{рис. 4.15, г}).$$

Розташуємо основну частину блоку циліндричної поверхні корабля «Аполлон».

$$f6 = (r6^2 - x^2 - y^2) / 2r6 \wedge_0 (150 - z)(z - 115) / 35 \geq 0; \quad f56 = f5 \vee_0 f6 \geq 0 \quad (\text{рис. 4.15, д}).$$

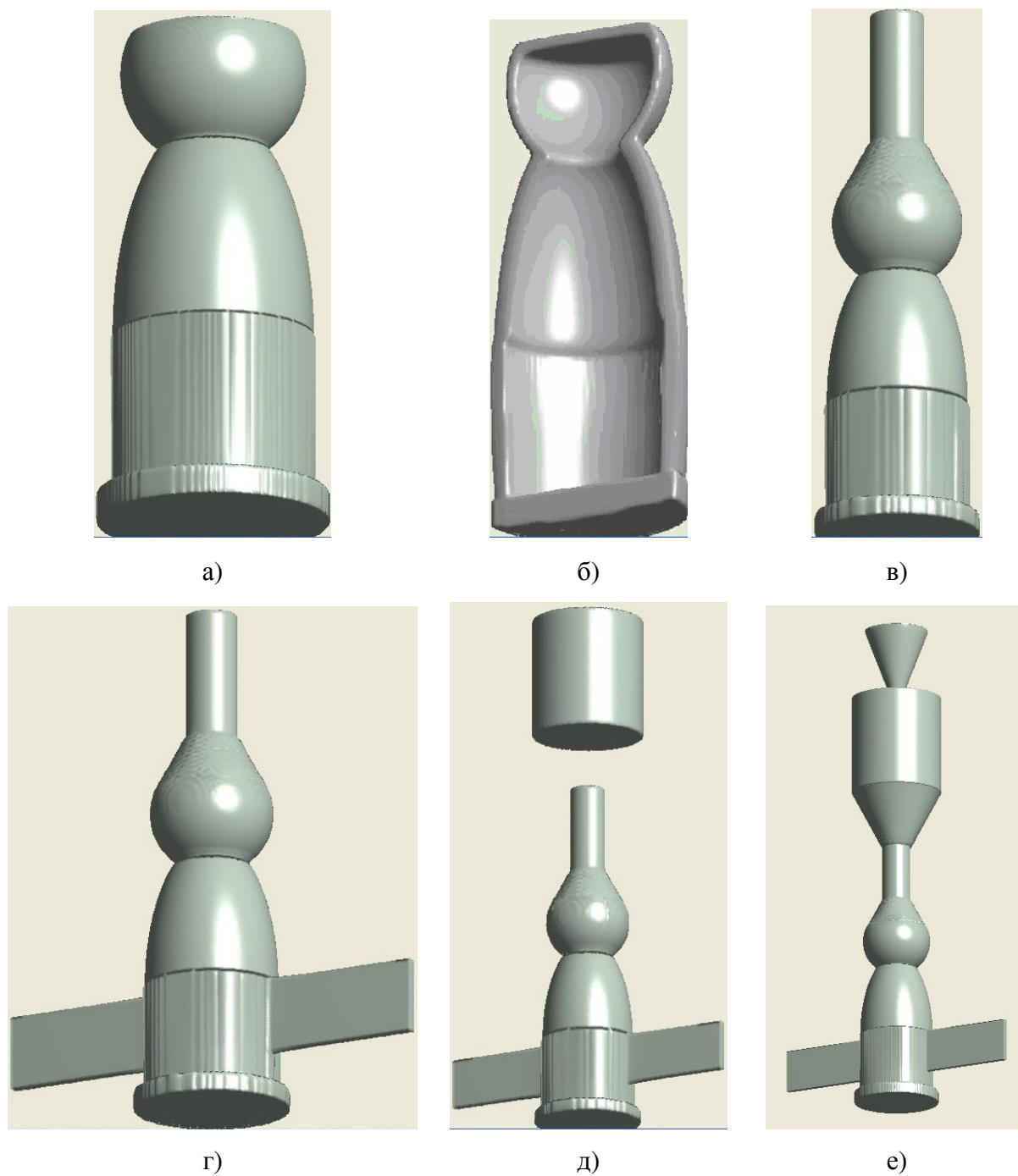


Рис. 4.15. Поетапна побудова макета космічного корабля «Союз-Аполлон»

Побудуємо загальне рівняння поверхні корабля «Союз-Аполлон», використовуючи дві конічні поверхні і дві півплощини.

$$x1 = -\frac{145x}{z-145}; \quad y1 = -\frac{145y}{z-145}; \quad fk1 = (r7^2 - x1^2 - y1^2) / 2r7 \wedge_0 (175 - z)(z - 150) / 25 \geq 0;$$

$$x2 = -\frac{85x}{z-85}; \quad y2 = -\frac{85y}{z-85}; \quad fk2 = (r8^2 - x2^2 - y2^2) / 2r8 \wedge_0 (115 - z)(z - 95) / 20 \geq 0;$$

$$fk = fk1 \vee_0 fk2 \geq 0; \quad WSA = f56 \vee_0 fk \geq 0 \text{ (рис. 4.15, e).}$$

Значення буквених параметрів: $r_1=13$; $r_2=15$; $r_3=12$; $r_4=45$; $r_5=5$; $r_6=16$; $r_7=55$; $r_8=45$.

Слід зазначити, що зі зміною будь-яких з представлених буквених параметрів автоматично відбудеться зміна форм відповідних фрагментів корабля.

Висновки по 4 розділу

Достовірність отриманих результатів, їх адекватність проєктованим об'єктам підтверджується візуалізацією як в умовах експлуатації програми RFPreview, так і реалізацією на 3D-принтері. Аналітичний запис проєктованих об'єктів дає можливість використовувати буквені геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, в свою чергу, дозволяє оперативно змінювати їх конструктивні елементи.

В роботі вперше, завдяки теорії R-функцій, побудовано рівняння поверхні БПЛА, виконаного за схемою «літаюче крило», у вигляді єдиного аналітичного виразу з буквеними параметрами. Побудовані також рівняння макетів космічних кораблів та ракет-носіїв.

Ці рівняння можуть бути використані як при розв'язанні міцнісних і аерогідродинамічних задач, так і при проєктуванні і виготовленні самого виробу [70–75], наприклад, на 3D-принтері.

Наукові результати 4 розділу опубліковано в роботах [2–5, 7, 9–11].

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

Створення математичних моделей для реалізації 3D-друку являє собою значний інтерес, який пов'язаний з активним впровадженням 3D-друку в різні галузі промисловості. Переваги застосування 3D-друку очевидні – це виготовлення нестандартних моделей, скорочення часу на створення нових прототипів і скорочення часу ремонту, простота і значна дешевизна виробництва, використання сучасних надміцних матеріалів. У даній роботі застосовується теорія R-функцій для математичного та комп'ютерного моделювання об'єктів авіаційної промисловості і машинобудівних деталей при реалізації технології 3D-друку.

Важливим питанням цієї технології є побудова математичних моделей геометричних об'єктів. Побудова математичної моделі – це центральний етап дослідження або проектування будь-якої системи. Від якості моделі залежить весь подальший аналіз об'єкта. Модель повинна бути достатньо точною, адекватною і повинна бути зручною для використання. Теорія R-функцій може виявитися незамінною для побудови рівнянь геометричних об'єктів з симетрією трансляції вздовж прямої, уздовж відрізка прямої, з різними варіантами симетрії циклічного типу та ін. Аналітичний запис і, отже, можливість введення в логічну формулу буквених параметрів дозволяють оперативно і часом істотно змінювати форму проєктованого геометричного об'єкта. Запропонований метод завдання форми виробів за допомогою обмеженого числа параметрів може істотно скоротити трудомісткість робіт в CAD-системах в тих випадках, коли потрібно переглянути велику кількість варіантів конструкції в пошуках оптимального рішення. Це може дати великий ефект щодо зниження трудомісткості при побудові розрахункових моделей для визначення аерогазодинамічних і міцнісних характеристик. Так, процес побудови області течії біля літального апарату складної форми може займати від декількох робочих днів до тижнів. При цьому в процесі проектування потрібно переглянути послідовно велику кількість варіантів конструкції з метою оптимізації її характеристик. Після прийняття рішення про форму літального

апарату визначення характеристик також часто пов'язане з необхідністю врахування зміни його форми, наприклад, якщо літальний апарат має органи управління, які змінюють свою форму в процесі польоту. Це призводить до того, що визначення аеродинамічних характеристик тільки за рахунок необхідності побудови великого числа розрахункових моделей для врахування цього фактора збільшує тривалість робіт на місяці. При параметричному заданні зміна розрахункових областей проводиться практично миттєво.

Підводячи підсумок, слід сказати, що в роботі вперше, завдяки теорії R-функцій, побудовані рівняння поверхонь у вигляді єдиних аналітичних виразів з буквеними параметрами, які можуть бути використані як при розв'язанні міцнісних і аерогідродинамічних задач, так і при проектуванні і виготовленні самого виробу, в даному випадку – на 3D-принтері.

За допомогою R-функцій розроблено та реалізовано алгоритм поетапної побудови рівнянь, який дозволяє перевіряти і вносити корективи в модель на кожному етапі її побудови. Метод стандартних примітивів може застосовуватися тільки в разі повноти бази стандартних примітивів. В іншому випадку необхідно розробляти методи побудови поверхонь, засновані на інших підходах. В якості одного з можливих підходів можна назвати використаний в роботі блендінг на каркасі.

Основні результати дисертаційної роботи полягають у такому.

На основі теорії R-функцій уперше сформульовано методи створення тривимірних геометричних об'єктів авіаційної промисловості для їх реалізації на 3D-принтері.

Розроблено за допомогою R-функцій алгоритми поетапної побудови математичних моделей машинобудівних об'єктів, серед яких шнеки з постійним і змінним кроком закрутки, шнекові завихорювачі, труби з локальною закрутою і скручені труби складного перерізу зі стінкою заданої товщини.

Досліджено метод побудови рівнянь геометричних об'єктів, що мають трансляційний та циклічний типи симетрії в 3D. Цей метод використано для

побудови рівнянь відкритих і напівзакритих робочих коліс відцентрових насосів з радіальними і криволінійними лопатками.

Уперше за допомогою конструктивних засобів теорії R-функцій розроблено методи побудови рівнянь поверхонь БПЛА різних типів. При побудові рівнянь крил і поверхонь БПЛА застосовано блендінг на каркасі. Уперше за допомогою методу R-функцій побудовано рівняння поверхонь ракет-носіїв і макета космічного корабля.

Побудовані математичні моделі машинобудівних деталей, БПЛА та аерокосмічних об'єктів реалізовано на 3D-принтері в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

Достовірність отриманих результатів, їх адекватність проєктованим об'єктам підтверджено візуалізацією як в умовах віртуальних експериментів при експлуатації програми RFPreview, так і реалізацією на 3D-принтері. Аналітичний запис проєктованих об'єктів дає можливість використовувати буквені геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, зі свого боку, дозволяє оперативно змінювати їх конструктивні елементи. Властивість додатності побудованих функцій у внутрішніх точках об'єкта є вельми зручною для реалізації 3D-друку.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 60–66.
2. Sheyko T., Maksymenko-Sheyko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R.. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the implementation at a 3D printer. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No. ½ (97). P. 48–56.
3. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Информационные технологии в проектировании и производстве. 2019. № 2 (174). С. 16–20.
4. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Sirenko V. M., Morozova A. I. R-functions in the Analytical Description of the Surface of a Flying Wing Unmanned Aerial Vehicle. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 61–66.
5. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheyko K. V., Morozova A. I. Using the R-Functions Theory Apparatus to Mathematically Model the Surface of the Soyuz-Appolo Spacecraft Mock-up for 3D Printing. *Journal of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 23. No. 3. P. 55–60.
6. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Литвинова Ю. С., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование рабочих колес насосов для реализации на 3D-принтере. Вісник Запорізького національного університету. 2019. № 2. С. 166–176.
7. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Сиренко В. Н., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование поверхности беспилотных летательных аппаратов. Тезисы докладов научно-практической конференции «Современные расчетно-экспериментальные

методы определения характеристик ракетно-космической техники». Днепр, 10–12 декабря 2019 г. С. 15.

8. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация деталей машин с винтовым типом симметрии для реализации технологии 3D-печати. Современные проблемы машиностроения. Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 120-летию со дня рождения академика НАН Украины А. П. Филиппова. Харьков, 15–18 апреля 2019 г. С. 15.

9. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 25–26 квітня 2019 р. С. 111.

10. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тезисы докладов VIII Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций». Запорожский национальный университет, Запорожье, 2020. URL: <https://drive.google.com/file/d/1-bisZmWtXD0yPFtu1mwm8q74V71yO7Xz/view>.

11. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. R–функции в моделировании поверхности макета космического корабля типа «Союз»–«Аполлон» с целью реализации на 3D-принтере. Тезисы докладов II международной научно-технической конференции «Динамика, прочность и моделирование в машиностроении». Харьков, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 5–8 октября 2020 г. С. 307–309.

12. 3D-принтеры в различных сферах производства. Globatek.3D: официальный сайт, 2020. URL: <http://3d.globatek.ru/3d-printers/factory/>.

13. Плюсы и минусы применения 3D-печати. Top 3D Shop: официальный сайт, 2020. URL: <https://top3dshop.ru/blog/3D-printers-pro-e-contra-review.html>.
14. 3D печати в авиастроении. Make-3D: официальный сайт, 2020. URL: <https://make-3d.ru/articles/3d-pechat-v-aviastroenii/>.
15. Канесса Э., Фонда К., Зеннаро М. Доступная 3D-печать для науки, образования и устойчивого развития. МЦТФ, 2013. 192 с.
16. Область применения и перспективы 3D-принтеров. Fotokomok: официальный сайт, 2020. URL: <http://www.fotokomok.ru/oblast-primeneniya-i-perspektivy-3d-printerov>.
17. AIRBUS представляет THOR – напечатанный на 3D-принтере беспилотник. 3D pulse: официальный сайт, 2020. URL: <http://www.3dpulse.ru/news/promyshlennost/airbus-predstavlyaet-thor-napechatannyi-na-3d-printere-bespilotnik/>.
18. Soyuz User's Manual. Issue 3, revision 0, April 2001. StarSem: official site, 2001. 204 с. URL: http://www.starsem.com/services/images/soyuz_users_manual_190401.pdf.
19. Soyuz User's Manual. Issue 2, revision 1, May, 2018. Arianespace: official site, 2018. 248 с. URL: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/10/Soyuz-UsersManuel-issue2-Revision1-May18.pdf>.
20. Proton Launch System Mission Planner's Guide. Revision 7, October, 2009. International Launch Services (ILS): official site, 2019. URL: <https://www.ilslaunch.com/launch-services/proton-mission-planners-guide/>.
21. 3D-печать – технологии на службе вашего бизнеса. REFU: официальный сайт, 2019. URL: <https://refu.ru/oborudovanie/3d-pechat-tehnologii-na-sluzhbe-vashego-biznesa.html>.
22. Что такое визуализация, как она работает. FB.ru: официальный сайт, 2020. URL: <http://fb.ru/article/251951/что-такое-визуализatsiya-kak-ona-rabotaet>.
23. 3D Studio MAX: первые шаги. Компьютер Пресс: официальный сайт, 2020. URL: <http://compress.ru/article.aspx?id=15050>.

24. Blender – редактор 3D: возможности. Pro Spo: официальный сайт, 2020. URL: <http://pro-spo.ru/information-required-to-install/3163-blender-redaktor-3d-vozmozhnosti>.

25. Autodesk AutoCAD. Программа для проектирования и черчения. SOFTREW: официальный сайт, 2020. URL: <http://www.softrew.ru/obzory/raznoe/513-autodesk-autocad-programma-dlya-proektirovaniya-i-chercheniya.html>

26. Autodesk 123D Design: бесплатная программа для 3D-моделирования. Pro Spo: официальный сайт, 2020. URL: <http://pro-spo.ru/-cad-cam-windows/3987-autodesk-123d-design-besplatnaya-programma-dlya-3d-modelirovaniya>.

27. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2009. 306 с.

28. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

29. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.

30. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.

31. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев, Техника, 1967. 212 с.

32. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. К.: Наукова думка, 1974. 259 с.

33. Максименко-Шейко К. В., Мацевитый А. М., Толок А. В., Шейко Т. И. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве. Информационные технологии. 2007. № 10. С. 23–32.

34. Максименко-Шейко К. В., Мацевитый А. М., Шейко Т. И. Конструктивные средства метода R-функций для построения примитивов в 3D. Пробл. машиностроения. 2005. Т. 8. № 1. С. 59–65.

35. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-functions in boundary value problems in

mechanics. Appl. Mech. Rev. 1995. Vol. 48. No. 4. P. 151–188.

36. Максименко-Шейко К. В. Нормальные и нормализованные уравнения геометрических объектов в методе R-функций. Вестник Харьк. нац. ун-та № 847. Серия: «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». Харьков, 2009. Вып. 11. С. 251–265.

37. Узоры симметрии. Под ред. М. Сенешаль и Дж. Флека. М.: Мир, 1980. 272 с.

38. Вейль Г. Симметрия. М.: Наука, 1968. 144 с.

39. Fang Q. R., Zhu G. S., Jin Z., Ji Y. Y., Xue M., Yang H., Qiu S. L. Mesoporous metal-organic framework with rare etb topology for hydrogen storage and dye assembly. Angew. Chem. Int. Ed. 2007. Vol. 46. P. 1–6.

40. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией. Кибернетика и системн. анализ. 2008. № 6. С. 75–83.

41. Максименко-Шейко К. В., Толоч А. В., Шейко Т. И. R-функции и аналитическое описание геометрических объектов, обладающих симметрией. Информационные технологии. 2009. № 7. С. 57–62.

42. Рвачев В. Л., Шейко Т. И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. № 1. С. 146–159.

43. Рвачев В. Л., Шапиро В., Шейко Т. И. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией. Электромагнитные волны и электронные системы. 1999. Т. 4. № 4. С. 4–20.

44. Семерич Ю. С., Толоч А. В., Шейко Т. И. Построение симметричных функций для симметричных чертежей. Вестн. Запорожского гос. ун-та. 2001. № 2. С. 83–98.

45. Rvachev V. L., Sheiko T. I., Shapiro V. The R-function method in boundary value problems with geometric and physical symmetry. Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 97. Iss. 1. P. 3888–3899.

46. Рвачев В. Л., Уваров Р. А., Шейко Т. И. Построение уравнений локусов в 3D с помощью R-функций. Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 3. С. 158–164.

47. Рвачев В. Л., Толок А. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью теории R-функций. Вестн. Запорожского гос. ун-та. 2000. № 2. С. 119–130.

48. Халатов А. А., Авраменко А. А., Шевчук И. В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. В 4-х т. Т. 3: Закрученные потоки. К.: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2000. 476 с.

49. Халатов А. А. Теория и практика закрученных потоков. К.: Наукова думка, 1989. 192 с.

50. Волшаник В. В., Зуйнов А. Л., Мордасов А. П. Закрученные потоки в гидротехнических сооружениях. М.: Энергоиздат, 1990. 280 с.

51. Гупта А., Лили Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.

52. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И., Толок А. В. Аналитическая идентификация машиностроительных деталей с помощью R-функций. Информационные технологии в проектировании и производстве. 2016. № 1 (161), С. 38–44.

53. Лисин Д. А., Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Шейко Т. И. R-функции в компьютерном моделировании дизайна 3D-поверхности автомобиля. Прикладная информатика. 2011. № 6 (36). С. 78–85.

54. Федоров С. И., Хаустов А. В., Крамаренко Т. М., Долгих В. С. Классификация БПЛА и системы их интеллектуального управления. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. 2016. № 74. С. 12–21.

55. Austin R. Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment. A John Wiley and Sons, Ltd. Publication, 2010. 332 p. (AIAA Education Series).

56. Arjomandi M., Agostino Sh., Mammone M., Nelson M., Zhou T. Classification of unmanned aerial vehicles. Australia: The University of Adelaide, 2011. 49 p.
57. Unmanned Aircraft System Operation in UK. Airspace – Guidance. CAP 722. Civil Aviation Authority, 2020. 238 p.
58. Sulsa – первый в мире самолет, напечатанный на принтере. Novate: официальный сайт, 2020. URL: <http://www.novate.ru/blogs/030811/18344/>.
59. Напечатанный на 3D-принтере самолёт принят на службу в Антарктиде. 3D-News: официальный сайт, 2020. URL: <https://3dnews.ru/931573>.
60. Напечатанный на 3D-принтере беспилотник показали на "Иннопроме". Интерфакс: официальный сайт, 2016. URL: <http://www.interfax.ru/russia/517842>.
61. Prisacariu V. CFD analysis of UAV flying wing. Incas Bulletin. 2016. Vol. 8. Iss. 3. P. 65–72.
62. Xie C., An C., Liu Y., Yang C. Static aeroelastic analysis including geometric nonlinearities based on reduced order model. Chinese Journal of Aeronautic. 2017. Vol. 30. Iss. 2. P. 638–650.
63. Погребная Т. В., Шипилов С. Д. Методика расчета нестационарного отрывного обтекания системы профилей, движущихся вблизи неподвижного экрана. Научный вестник МГТУ ГА. 2017. № 20 (2). С. 46–56.
64. Булат П. В., Минин О. П. О современном подходе к проектированию беспилотных летательных аппаратов самолетного типа с коротким взлетом и посадкой. Часть III. Численное моделирование вихревой аэродинамики летательного аппарата методом дискретных вихрей. Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 2. С. 169–190.
65. Wildmann N., Hofsäß M., Weimer F., Joos A., Bange J.: MASC – a small remotely piloted aircraft (RPA) for wind energy research. Adv. Sci. Res. 2014. No. 11. P. 55–61.

66. Selecký M., Váňa P., Rollo M., Meiser T. Wind correction in flight path planning. International Journal of Advanced Robotic Systems. 2013. Vol. 10. Iss. 5. <https://doi.org/10.5772/56455>.

67. Абуфанас А. С., Лобатый А. А. Беспилотный авиационный комплекс как сложная мультиструктурная система. Системный анализ и прикладная информатика. 2015. № 1. С. 4–9.

68. 3D-принтер будет «печатать» детали прямо в космосе. Nano News Net: официальный сайт, 2020. URL: <http://www.nanonewsnet.ru/news/2011/3d-printer-budet-pechatat-detali-priamo-v-kosmose>.

69. Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Шейко Т. И. R-функции в аналитическом проектировании с применением системы «РАНОК». Вестник МГТУ «Станкин». 2010. № 4 (12). С. 139–151.

70. Стоян Ю. Г., Проценко В. С., Манько Г. П. и др. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. К.: Наукова думка, 1986. 264 с.

71. Чопоров С. В. Дискретные модели форм технических объектов. Херсон: Запорожский национальный университет, 2018. 324 с.

72. Лисняк А. А., Чопоров С. В., Гоменюк С. И. Методика визуализации геометрических объектов, описанных с помощью R-функций. Вестник Запорожского национального университета. 2010. № 1. С. 88–97.

73. Чопоров С. В., Гоменюк С. И., Лисняк А. А., Аль-Омари М. А. В., Алатамнех Х. Х. Триангуляция поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении. Вестник Херсонского национального технического университета. 2016. № 3 (58). С. 542–549.

74. Толок А. В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании / Под ред. акад. РАН С.Н. Васильева. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2016. 112 с.

75. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Першина Ю. І., Ткаченко О. В., Черняк О. О. Чисельна реалізація задачі відновлення поверхні 3D тіла. Пробл. машинобудування. 2011. Т. 14. № 1. С. 52–56.

ДОДАТОК А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Morozova A. I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 1. P. 60–66.
2. Sheyko T., Maksymenko-Sheiko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R.. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the implementation at a 3D printer. **Eastern-European Journal of Enterprise Technologies**. 2019, no. 1/2 (97). P. 48–56.
3. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Толоч А. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. **Информационные технологии в проектировании и производстве**. 2019, № 2 (174). С. 16–20.
4. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Sirenko V. M., Morozova A. I. R-functions in the Analytical Description of the Surface of a Flying Wing Unmanned Aerial Vehicle. **Journal of Mechanical Engineering**. 2019, vol. 22, no. 4. P. 61–66.
5. Sheiko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Morozova A. I. Using the R-Functions Theory Apparatus to Mathematically Model the Surface of the Soyuz-Apollo Spacecraft Mock-up for 3D Printing. **Journal of Mechanical Engineering**. 2020, vol. 23, no. 3. P. 55–60.
6. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Литвинова Ю. С., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование рабочих колес насосов для реализации на 3D-принтере. **Вісник Запорізького національного університету**. 2019, № 2. С. 166–176.
7. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Сиренко В. Н., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование поверхности беспилотных летательных аппаратов. Тезисы докладов научно-практической конференции «Современные расчетно-экспериментальные

методы определения характеристик ракетно-космической техники». Днепр, 10–12 декабря 2019 г. С. 15.

8. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация деталей машин с винтовым типом симметрии для реализации технологии 3D-печати. Современные проблемы машиностроения. Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 120-летию со дня рождения академика НАН Украины А. П. Филиппова. Харьков, 15–18 апреля 2019 г. С. 15.

9. Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Аналитическая идентификация аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 25–26 квітня 2019 р. С. 111.

10. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. Тези доповідей VIII Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій». Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2020. Режим доступу: <https://drive.google.com/file/d/1-bisZmWtXD0yPFtu1mwm8q74V71yO7Xz/view>.

11. Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Морозова А. И. R–функции в моделировании поверхности макета космического корабля типа «Союз»-«Аполлон» с целью реализации на 3D-принтере. Тези доповідей II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні». Харків, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 5-8 жовтня 2020 р. С. 307-309.

ДОДАТОК Б

Програма у програмному комплексі RFPreview для виконання експериментальної реалізації напівзакритого робочого колеса відцентрового насосу (рис. 3.13)

```

p=1;xp=x/p;yp=y/p;zp=z/p;pi=3.1415;
f01=rfAND(rfAND(3.2^2-xp^2-yp^2,xp^2+yp^2-0.8^2),(4-zp)*zp);
f0=rfOR(rfAND(12.5^2-xp^2-yp^2,(0.5+zp)*(0.5-zp)),f01);
ro=sqrt(xp^2+yp^2);
tet=atan2(yp,xp); no=24;
ff=tet*no/2;
mu=8/pi/no*(sin(ff)-sin(3*ff)/9+sin(5*ff)/25-sin(7*ff)/49);
x1=ro*cos(mu);y1=ro*sin(mu);
f1=rfAND(rfAND(0.2-abs(y1),12.5^2-x1^2-y1^2),x1^2+y1^2-3^2);
f112345=rfAND(f1,(4-zp)*zp);
fv=f112345;
fkr=rfAND(rfAND(13^2-xp^2-yp^2,x^2+y^2-8.2^2),(5-z)*(z-4));
fi0=rfOR(rfOR(fv,f0),fkr);
res=fi0;
%res=fv;

```

Програма у програмному комплексі RFPreview для виконання експериментальної реалізації моделі БПЛА (рис. 4.1)

```

n=1;a=5*n;
fi1=(a^2-x^2)/2/a;
f11=sqrt(y^2+z^2);
fff1=sqrt(((sqrt(f11^4+fi1^2)-fi1)/2)^2+f11^2);
p1=20*n;p2=0; a1=5.2*n;a2=5*n;
wp=-fff1+(a1-x)*(a2+x)/p1+p2;
wn=rfAND(rfAND(wp,(0.1*n)^2-z*z),x+0.2*n);
wc1=rfAND(rfAND(rfAND(1-z^2/(0.6*n)^2-(x+1*n)^2/(2.5*n)^2,(1.25*n)^2-y^2),0.1*n-z),-
0.5*x+z);
wc2=rfAND(rfAND(rfAND(rfAND(1-z^2/(0.3*n)^2-(x+1*n)^2/(2.5*n)^2,(0.95*n)^2-
y^2),0.05*n+z),-x-0.2*n),-0.3*x-z);
wc3=rfAND(wc2,x^2-y^2);
wc=rfOR(rfAND(wc1,0.5*n+z),wc3);
wd=rfAND(rfOR(((0.2*n)^2-(y-0.5*n)^2-(z-0.05*n)^2,(0.2*n)^2-(y+0.5*n)^2-(z-
0.05*n)^2),(x+4*n)*(-x-2.5*n)));
w1=rfOR(wn,wc);
wn1=rfAND(rfAND(-x+4.5*n-10*n*y^2,x+0.65*n),z*(0.15*n-z));
wwn=rfAND(rfAND((0.21*n)^2-y^2,-z-0.01*n),2*n-x);

```



```

rak1=rfOR((0.2*n)^2-(x+2.9*n)^2-y^2-(z+0.21*n)^2,(0.2*n)^2-(x-0.3*n)^2-y^2-(z+0.21*n)^2);
rak=rfOR(rfAND((0.2*n)^2-y^2-(z+0.21*n)^2,(2.9*n+x)*(0.3*n-x)),rak1);
%OBTEKATEL;
y1=-0.8*n*y/(x-2.2*n-0.8*n);z1=-0.8*n*z/(x-2.2*n-0.8*n);
wnizp=rfAND(rfAND((z1+0.6*n)*(0.1*n-z1),-4*n*y1^2+(z1+0.6*n)^2),(3*n-x)*(x-2.2*n));
wniz1=rfAND((z+0.6*n)*(0.1*n-z),-4*n*y^2+(z+0.6*n)^2);
wnizz=rfAND(wniz1,2.2*n-x);
wniz=rfOR(rfAND(wnizz,x-0.2*n+z),wnizp);
wkor=rfOR(rfAND(rfOR(rfOR(w1,wd),wn1),-wwn),rak);
%KRILA;
wkr11=rfAND(rfAND(0.05*n-abs(z+0.05*n),(3.3*n+x)*(-2.6*n-x)),(1.8*n)^2-y^2);
wkr1=rfAND(wkr11,(-1.3*n-x)^2-y^2);
wkr22=rfAND(rfAND(0.05*n-abs(z-0.05*n),(2.2*n+x)*(-0.5*n-x)),(2.3*n)^2-y^2);
wkr2=rfAND(rfAND(wkr22,(0.7*n-x)^2-0.9*n*y^2),-y^2+26*n*(-2.5*n-x)^2);
wkr33=rfAND(rfAND(0.07*n-abs(y^2-(1.1*n)^2),z*(0.6*n-z)),(2.7*n+x)*
(-2*n-x));
wkr3=rfAND(wkr33,(1.9*n+x)^2-z^2);
wkr=rfOR(rfOR(wkr1,wkr2),wkr3);
wfin1=rfOR(rfOR(wkor,wkr),wniz);
wfin=rfAND(wfin1,x+3.7*n);
niz=rfAND(1-y*y/(2.5*n)^2-z*z/(n^2),(x+3.8*n)*(-3.5*n-x));
%res=rfOR(wfin,niz);
res=wfin;

```