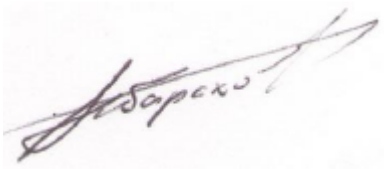
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ім. А. М. ПІДГОРНОГО

БАРАХОВ Костянтин Петрович



УДК 539.313: 539.384

# СТАТИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КЛЕЙОВИХ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2021

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Національному аерокосмічному університеті ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник**: доктор технічних наук, доцент
**Курєннов Сергій Сергійович**,
Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»
Міністерства освіти і науки України
професор кафедри вищої математика та системного аналізу.

**Офіційні опоненти**: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
**Угрімов Сергій Вікторович**,
Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
вібраційних і термоміцнісних досліджень;

доктор технічних наук
**Ткачук Микола Миколайович**,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»
Міністерства освіти і науки України,
старший науковий співробітник кафедри
інформаційних технологій та систем колісних
і гусеничних машин імені О. О. Морозова

Захист відбудеться « 7 » вересня 2021 р. о 14.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків-46, вул. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків-46, вул. Пожарського, 2/10.

Автореферат розіслано « 3 » серпня 2021 р.

Учений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 64.180.01

доктор технічних наук, професор О. О. Стрельнікова

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Розвиток технологій виробництва і поява нових композиційних матеріалів з унікальними властивостями зумовили їх широке застосування у сучасній аерокосмічній техніці. Застосування композитів у свою чергу ставить перед проектувальниками нові задачі з організації передачі зусиль між різними силовими елементами конструкції, конструювання високонавантажених з’єднань, а також розробки процедур їх ремонту. Одним з найбільш поширених типів з’єднань композитів є клейові з’єднання внапуск. Такий спосіб з’єднання забезпечує передання зусиль між елементами конструкції без порушення структури армування композитів. Крім того, клейові з’єднання мають такі важливі властивості як герметичність, мала маса, висока технологічність та аеродинамічна ефективність, що має особливе значення для авіаційної техніки. Цьому також сприяють поява високоміцних клеїв і розвиток технологічних процесів склеювання і контролю якості конструкції.

Для розрахунку напруженого стану з'єднань широко застосовується метод скінченних елементів (МСЕ). При складній геометрії або при нелінійній поведінці елементів з'єднання цей метод є найкращим або єдино можливим. Однак відмінність на кілька порядків товщини елементів, що склеюються, і товщини клею, шарувата структура КМ, високі градієнти напружень у з'єднанні потребують розбиття конструкції на велику кількість елементів, що ускладнює аналіз і проектування.

Відомо, що аналітичні моделі й методики розрахунку напруженого стану дають змогу детально визначити характер впливу на напружений стан з'єднань їх механічних і геометричних параметрів, пояснити механізми руйнування, провести параметричні дослідження та оптимізацію конструкції, виявити шляхи підвищення несної здатності з'єднань та ін. З огляду на механіку, клейові з’єднання можна віднести до класу тришарових конструкцій з тонким піддатливим з’єднувальним шаром. Але класичні моделі НДС тришарових пластин або оболонок побудовано із застосуванням гіпотези про жорсткість конструкції в поперечному напрямку, звідки випливає однаковість поперечних переміщень шарів. Очевидно, що для клейових з’єднань ця гіпотеза є неприйнятною, і тому необхідно застосовувати більш складні моделі деформування конструкції.

Таким чином, відомі моделі й відповідні аналітичні методики розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) з'єднань внапуск потребують певного вдосконалення й розвитку. Тому побудова нових моделей статичного НДС клейових з’єднань внапуск і розвиток аналітичних підходів до розв’язання нових задач є актуальною проблемою.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тема дисертаційної роботи пов’язана з виконанням держбюджетної теми № Д/Р 0119U002517 «Розвиток математичних методів дослідження прикладних задач».

**Мета й завдання дослідження.** *Метою дисертаційної роботи є* побудова уточнених моделей статичного НДС клейових з'єднань внапуск, які дають змогу отримати аналітичні розв’язки нових задач.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– провести аналіз наявних моделей статичного НДС клейових з’єднань внапуск;

– розвинути двовимірні моделі статичного НДС клейових з’єднань прямокутних пластин щодо розв’язання задач з новими крайовими умовами;

– вдосконалити моделі статичного НДС клейових з’єднань внапуск для розв’язання нових задач, таких як аналіз НДС з’єднання елементів конструкції циліндричної форми;

– побудувати нові моделі осесиметричного статичного НДС клейових з’єднань пластини з круглим отвором й концентричною накладкою;

– побудувати аналітичні розв’язки поставлених задач;

– провести верифікацію отриманих аналітичних розв’язків шляхом порівняння з результатами скінченно-елементного моделювання.

*Об'єкт дослідження* – статичні процеси деформування, що відбуваються в клейових з’єднаннях внаслідок силового навантаження різної фізичної природи.

*Предмет дослідження* – моделі напружено-деформованого стану клейових з'єднань внапуск балок, пластин та циліндричних оболонок, а також методи розв’язання відповідних задач механіки.

*Методи досліджень.* Класичні аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь. Задачі з визначення статичного НДС з'єднань у двовимірній постановці зведено до систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, які розв’язуються за методом Фур'є (методом відокремлення змінних), розвинення в ряди за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля. Задачі зі знаходження статичного НДС з’єднань круглих накладок над круглими отворами зведено до лінійних диференціальних рівнянь відносно напружень у клейовому шарі, які мають аналітичні розв’язки в циліндричних функціях Бесселя.

**Наукова новизна отриманих результатів полягає в такому:**

–двовимірну модель статичного НДС з’єднання прямокутних пластин розвинуто на нові граничні умови;

– уперше побудовано аналітичний розв’язок задачі про статичний НДС з’єднання внапуск циліндричних елементів конструкції, які мають нерівномірне силове навантаження по торцях;

– удосконалено одновимірну осесиметричну модель статичного НДС клейових з’єднань циліндричних оболонок;

– уперше побудовано аналітичний розв’язок задачі про осесиметричний статичний НДС з’єднання внапуск пластини з круглим отвором і концентричної круглої накладки.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблено моделі осесиметричного статичного НДС клейових з'єднань пластини з отвором і накладки, які можуть бути застосовано для аналізу міцності й розроблення процедур ремонту пошкоджень обшивки. Створено уточнені моделі статичного НДС з’єднань циліндричних конструкцій, що широко застосовуються в аерокосмічній техніці (відсіки ракет, з’єднання шпангоутів з обшивкою, структурні елементи композитних ферм тощо).

Основні результати й рекомендації дисертаційної роботи впроваджено на ДП «Антонов» та в навчальному процесі кафедри технології виробництва літальних апаратів, кафедри проектування літаків і вертольотів і кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету

ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», що підтверджується відповідними актами використання результатів.

**Особистий внесок здобувача.** Усі основні результати, які становлять суть дисертаційної роботи, автор отримав особисто. Вибір методу побудови розв'язків, формулювання наукових висновків, скінченно-елементне моделювання виконано спільно з науковим керівником.

У роботах, що написані у співавторстві, авторові належить таке: [1] – побудова аналітичного розв'язку, написання програми у середовищі Maple для числового аналізу задачі; [2] – постановка задачі, побудова аналітичного розв'язку та створення програми з розв'язання задачі; [3] – створення програми у середовищі Maple на основі розв'язку, побудованого Дворецькою Д.В., і аналіз результатів розрахунків; [6] – постановка задачі, побудова розв'язку і створення програми у середовищі Maple; [7] – постановка задачі, побудова аналітичного розв'язку і створення програми з числових розрахунків; [8] – побудова аналітичного розв'язку і створення програми з числових розрахунків; [9] – постановка задачі, побудова аналітичного розв'язку і створення програми з числових розрахунків; [10] – побудова аналітичного розв'язку, написання програми у середовищі Maple для числового аналізу задачі; [11] – постановка задачі, побудова розв'язку і створення програми у середовищі Maple; [12] – постановка задачі, побудова аналітичного розв'язку та створення програми з розв'язання задачі; [13] – постановка задачі, побудова аналітичного розв'язку, створення програми з числових розрахунків.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати досліджень доповідалися та отримали схвалення на таких міжнародних конференціях і наукових семінарах: Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2018), VI Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2019), International Scientific and Technical Conference «Integrated computer technologies in mechanical engineering» (Kharkiv, 2019), VII Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2020), II Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2020), International Scientific and Technical Conference «Integrated computer technologies in mechanical engineering» (Kharkiv, 2020).

У повному обсязі дисертація була апробована і схвалена на семінарі кафедри «Вищої математики та системного аналізу» Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», а також на засіданні науково-технічної проблемної ради «Математичне моделювання. Механіка деформівного твердого тіла. Динаміка та міцність машин» Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна.

**Публікації.** Матеріали дисертаційної роботи опубліковано в 13 наукових працях, серед яких 6 індексуються у базі SCOPUS, 6 статей у наукових виданнях України та іноземних держав та 7 публікацій у матеріалах міжнародних конференцій.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел зі 141 найменуваня на

16 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 139 сторінок, основний текст – 117 сторінок, 46 рисунків та два додатки на 4 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертації, а саме: проведено обґрунтування вибору теми дослідження, визначено мету, задачі й методи дослідження, подано наукову новизну отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію матеріалів дисертації, указано структуру й обсяг дисертації, а також практичне значення отриманих результатів.

У **першому розділі** проведено аналіз наявних моделей НДС клейових з’єднань внапуск, перелічено їх недоліки й обмеження і вказано шляхи розвитку моделей НДС клейових з’єднань внапуск.

Зазначено внесок науковців і фахівців авіабудівної галузі таких як А. Я. Александров, С. О. Амбарцумян, В. В. Болотін, Л. Е. Брюккер, В. В. Васильєв, В. Є. Гайдачук, К. З. Галімов, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, А. В. Дятлов, В. І. Корольов, Я. С. Карпов, Л. М. Куршин, В. Ф. Кутьінов, С. Г. Лехницький, Х. М. Муштарі, Ю. Н. Новічков, А. П. Прусаков, О. Р. Ржаніцин, Г. А. Тетера, С. П. Тимошенко, Н. Г. Ченцов, А. П. Чулков, О. М. Шупіков, R. D. Adams, E. Carrera, L. M. Habip, H. Matsunaga, J. Mayers, E. J. Plantemma, J. N. Reddy, E. Reissner, J. Solvey, K. P. Soldatos, M. Stein, C. T. Wang та багатьох інших, які зробили значні внески в розвиток теорії шаруватих елементів конструкцій.

На практиці найчастіше використовуються тришарові конструкції з двома несними шарами і м'яким заповнювачем між ними. НДС таких конструкцій визначається або чисельно з допомогою МСЕ, або аналітично, шляхом зведення тривимірних задач теорії пружності до дво- або одновимірних.

Найбільш відомими одновимірними моделями є моделі Фолькерсена та Голанда – Рейсснера.

Згідно з моделлю Фолькерсена несні шари розглядаються як стрижні, що працюють тільки на розтяг-стиск по довжині з'єднання, а клей працює тільки на зсув. Напруження в клеї і в несних шарах вважаються рівномірно розподіленими за товщиною. У моделі Голанда – Рейсснера несні шари моделюються балками Бернуллі, а клейовий шар – пружною основою Вінклера, яка працює на зсув та відрив. Дотичні й нормальні напруження в клеї покладено постійними за товщиною клейового шару. На відміну від моделі Фолькерсена, в моделі Голанда – Рейсснера враховуються вигин з'єднання, вплив вигину шарів на дотичні напруження та пружна взаємодія несних шарів у трансверсальному напрямку.

Наведені моделі є фундаментом для подальшого розвитку теорії клейових з'єднань внапуск. Напрями розвитку цих моделей, яким присвячено дисертаційну роботу, полягають в такому:

- розвиток спрощеної двовимірної моделі клейового з’єднання двох пластин прямокутної форми для розв’язання задач з новими крайовими умовами;
- розвиток двовимірної моделі клейового з’єднання на нову геометрію – для визначення статичного НДС клейового з’єднання циліндричної

форми з урахуванням нерівномірності напруженого стану за коловою координатою;

– вдосконалення моделі статичного НДС клейового з’єднання циліндричних оболонок;
– узагальнення моделей Фолькерсена і Голанда – Рейсснера на радіальну симетрію і дослідження НДС пластин з круглими отворами та концентричними накладками.

У **другому розділі** надано розвиток двовимірної моделі статичного НДС клейового з’єднання внапуск двох прямокутних пластин. Розв’язано задачу про напружений стан з’єднання з некласичними крайовими умовами, а саме з’єднання, в якому один несний шар навантажено поздовжніми зусиллями, а інший – має жорстке закріплення вздовж бічної сторони (рис. 1, *а*), і задачу про НДС клейового з’єднання внапуск, в якому один несний шар навантажено дотичними зусиллями зсуву, а інший – має жорстке закріплення вздовж бічної сторони (рис. 1, *б*).

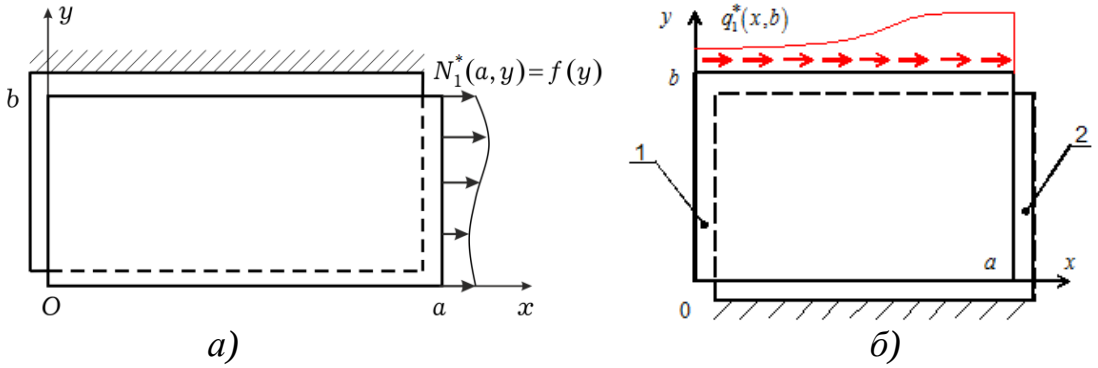



Рис. 1. Схеми з'єднання

Для обох задач рівняння рівноваги елементів несних шарів мають вигляд

$$\tau+\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}=0,\ -\tau+\frac{\partial N_2}{\partial x}+\frac{\partial q_2}{\partial y}=0,$$

де $N_m$, $q_m$ – нормальні (у поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі $m$, $m=1,2$; $\tau$ – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку.

Напруження в клейовому прошарку є пропорційними різниці переміщень шарів

$$\tau=\frac{G_0}{\delta_0}\left(U_2-U_1\right),$$

де $G_0$ – модуль зсуву клею; $\delta_0$ – товщина клейового прошарку; $U_m\left(x,y\right)$ – повздовжні переміщення шару $m$.

Зусилля в пластинах за умови рівності нулю поперечних переміщень мають вигляд

$$N_m=\delta_m E_m\frac{\partial U_m}{\partial x},\quad q_m=\delta_m G_m\frac{\partial U_m}{\partial y},\quad m=1,2.$$

Рівняння рівноваги зведено до системи диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\mu_1\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)-U_1+U_2=0; \\ \alpha_2\left(\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\mu_2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right)+U_1-U_2=0. \end{cases}$$

*У першій задачі* крайові умови $\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\partial U_2}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=b}=0$, $U_2(x,b)=0$ реалізуються при жорсткому защемленні або якщо дотичні напруження дорівнюють нулю, а умови $N_1(a,y)=E_1\delta_1\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=a}=f(y)$, $\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=a}=0$ – коли задано зусилля на торці першого шару і вільні від навантаження сторони.

Задачу зведено до диференціального рівняння четвертого порядку

$$\beta_1\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}+\beta_2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_3\frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4}-\beta_4\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\beta_5\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=0.$$

Розв’язки задачі отримано у вигляді $U_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\dfrac{\cosh\lambda_n x}{\lambda_n\sinh\lambda_n a}\cdot Y_n^{(m)}(y)$,

де $B_n$ – коефіцієнти, які визначаються з крайових умов на торцях обох пластин; $\lambda_n\sinh\lambda_n a$ – нормувальний множник; $Y_n^{(m)}(y)$ – нормовані функції, що автоматично задовольняють граничним умовам на бічних сторонах.

Нормальні (у поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі $m$, $m=1,2$ записуємо у вигляді

$$N_m=E_m\delta_m\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\sinh\lambda_n x}{\sinh\lambda_n a}Y_n^{(m)}(y),\ q_m=G_m\delta_m\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\cosh\lambda_n x}{\lambda_n\cosh\lambda_n a}Z_n^{(m)}(y),\ Z_n^{(m)}=\frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Системи функцій $Y_n^{(1)}(y)$ і $Y_n^{(2)}(y)$ на відрізку $y\in[0;b]$ не є ортогональними. Для пошуку невідомих коефіцієнтів $B_n$ застосовано метод найменших квадратів. Доведено збіжність розв’язку.

Для верифікації результатів розв’язано модельну задачу. Навантаження рівномірно розподілено за шириною з’єднання: $f(y)=P=\text{const}$. Результати розрахунків було порівняно з даними, отриманими за допомогою скінченно-елементного моделювання. На рис. 2 наведено графіки розподілу дотичних напружень у клеї, які обчислено за запропонованою моделлю (суцільна лінія) і за методом скінченних елементів (МСЕ) у середині товщини клейового шару (штрихова лінія) уздовж закріпленої сторони $y=b$ і вздовж середини шарів, що склеюються $y=0.5b$. Порівняння показує узгодженість результатів розрахунків, що підтверджує адекватність запропонованої моделі. Встановлено, що максимальні результівні напруження лише на 6 % перевищують такі напруження в поздовжньому напрямку.

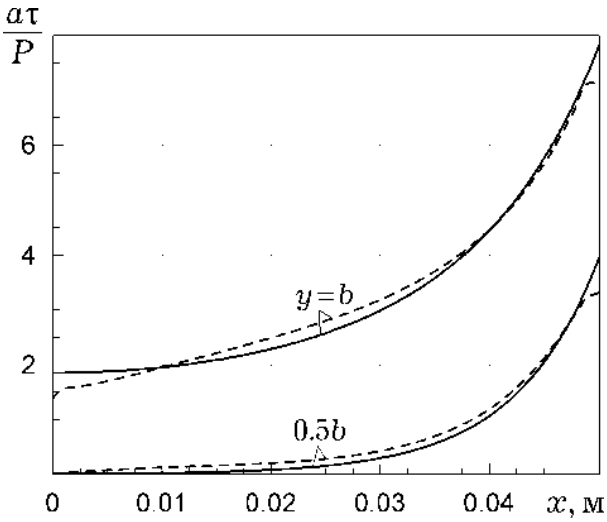



Рис. 2. Розподіл дотичних напружень у клеї

*У другій задачі* крайові умови на торцях мають вигляд $q_k(0,y)=q_k(a,y)=0$, тобто

$$\left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=a}=0.$$

На бічних сторонах задано або переміщення

$$U_k\big|_{y=0}=v_k^{(1)}(x);\;\; U_k\big|_{y=b}=v_k^{(2)}(x),$$

або дотичні зусилля

$$q_k\big|_{y=0}=G_k\delta_k\left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=0}=Q_k^{(1)}(x);\; q_k\big|_{y=b}=G_k\delta_k\left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=b}=Q_k^{(2)}(x).$$

Тобто розглянуто задачу про статичний НДС клейового з’єднання, навантаженого дотичними зусиллями. Задачу також зведено до диференціального рівняння четвертого порядку

$$\beta_1\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}+\beta_2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_3\frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4}-\beta_4\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\beta_5\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=0.$$

Розв’язок отримано у вигляді

$$U_k(x,y)=C_0y+D_0+d_k\Big(A_0\cosh(\xi_0y)+B_0\cosh\big(\xi_0(y-b)\big)\Big)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi nx}{a}\Big[C_n\cosh(\chi_ny)+D_n\cosh\big(\chi_n(y-b)\big)+$$

$$+d_k\Big(A_n\cosh(\xi_ny)+B_n\cosh\big(\xi_n(y-b)\big)\Big)\Big].$$

Для верифікації розв’язано модельну задачу, й результати розрахунків порівняно з результатами скінченно-елементного моделювання.

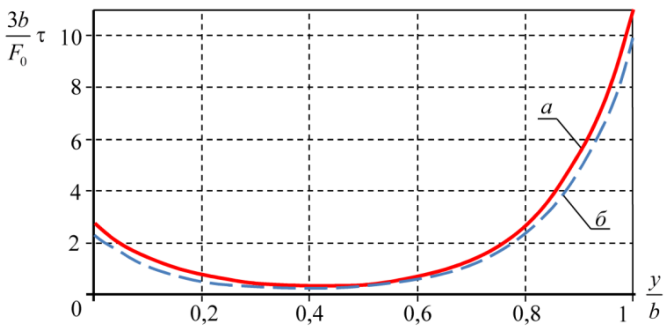



Рис. 3. Дотичні напруження в клеї уздовж прямої $x = a/2$: *а* – розрахунок за запропонованою методикою; *б* – МСЕ

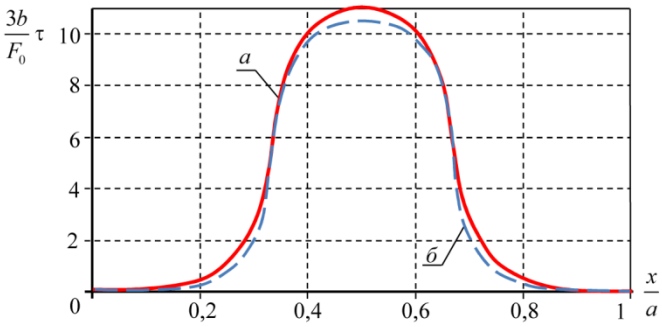



Рис. 4. Дотичні напруження в клеї уздовж прямої $y = b$: *а* – розрахунок за запропонованою методикою; *б* – МСЕ

З графіків видно, що дотичні напруження в клеї, обчислені за допомогою запропонованої моделі, дещо перевищують напруження, обчислені за допомогою МСЕ (рис. 3, 4). Це зумовлено такими припущеннями в моделі, як робота на зсув лише клейового шару і рівномірний розподіл напружень по товщині несних шарів. Ці припущення спрощують модель статичного НДС з’єднання і дають змогу отримати аналітичний розв’язок задачі. Крім того, дещо завищені значення критичних напружень є допустимими в задачах проектування конструкцій.

У **третьому розділі** наведено спрощені двовимірні моделі статичного НДС клейових з'єднань циліндричних оболонок. Побудовано аналітичний розв’язок задачі зі знаходження статичного НДС клейового з’єднання внапуск двох товстостінних циліндрів, радіальним вигином яких можна знехтувати, і задачі зі знаходження статичного НДС клейового з’єднання двох коаксіальних циліндричних оболонок у осесиметричній постановці. При розв’язанні другої задачі застосовано вдосконалену модель розподілу нормальних напружень у клейовому шарі та враховано вплив закінцівок з’єднання, тобто вплив частин з’єднуваних оболонок, що виступають за межі з’єднання.

*У першій задачі* вважаємо, що елементи несних шарів можуть переміщатися лише вздовж осі з'єднання, клейовий шар працює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені по товщині шарів (рис. 5).

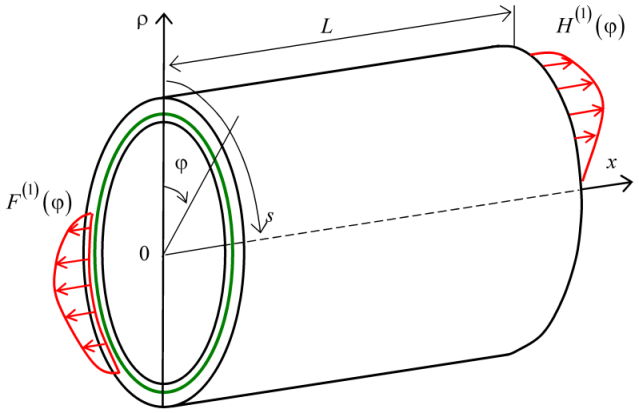



Рис. 5. Схема конструкції

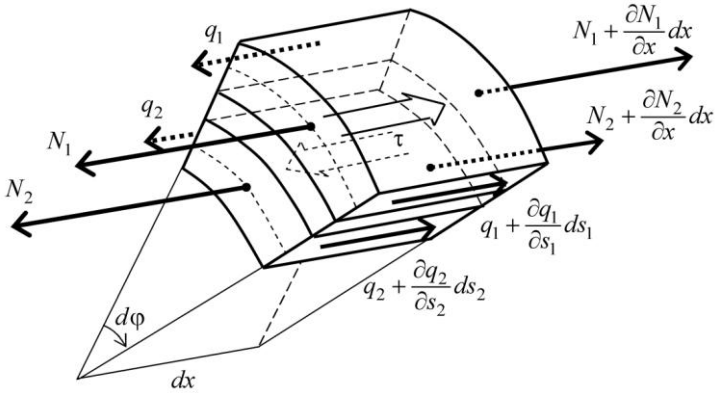



Рис. 6. Диференціальний елемент з'єднання

Диференціальні елементи з'єднання й діючі зусилля показано на рис. 6.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання мають такий вигляд:

$$\tau+\frac{R_1}{R_0}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}=0;\quad -\tau+\frac{R_2}{R_0}\frac{\partial N_2}{\partial x}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial q_2}{\partial\varphi}=0.$$

Крайові умови мають вигляд

$$N_1\big|_{x=0}=E_1\delta_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}=F^{(1)}(\varphi),\quad N_m\big|_{x=L}=E_m\delta_m\frac{\partial U_m}{\partial x}\bigg|_{x=L}=H^{(m)}(\varphi),\quad U_2\big|_{x=0}=u^{(2)}(\varphi).$$

На переміщення накладається умова періодичності

$$U_m(x,\varphi)=U_m(x,\varphi+2\pi n).$$

Задачу зведено до диференціального рівняння четвертого порядку

$$\frac{\partial^4U_1}{\partial x^4}+\beta_1^2\frac{\partial^4U_1}{\partial x^2\partial\varphi^2}+\beta_2^2\frac{\partial^4U_1}{\partial\varphi^4}-\beta_3^2\frac{\partial^2U_1}{\partial x^2}-\beta_4^2\frac{\partial^2U_1}{\partial\varphi^2}=0.$$

Розв’язок отримано у такому вигляді:

$$U_m(x,\varphi)=A_0+A_1x+\gamma_0^{(m)}\left[A_3\operatorname{ch}(\beta_3x)+A_4\operatorname{sh}(\beta_3x)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}}\left(a_{1,n}\frac{\operatorname{ch}k_{1,n}x}{\operatorname{sh}k_{1,n}L}+a_{2,n}\frac{\operatorname{sh}k_{1,n}x}{\operatorname{ch}k_{1,n}L}\right)+\frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}}\left(a_{3,n}\frac{\operatorname{ch}k_{2,n}x}{\operatorname{sh}k_{2,n}L}+a_{4,n}\frac{\operatorname{sh}k_{2,n}x}{\operatorname{ch}k_{2,n}L}\right)\right]\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}}\left(b_{1,n}\frac{\operatorname{ch}k_{1,n}x}{\operatorname{sh}k_{1,n}L}+b_{2,n}\frac{\operatorname{sh}k_{1,n}x}{\operatorname{ch}k_{1,n}L}\right)+\frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}}\left(b_{3,n}\frac{\operatorname{ch}k_{2,n}x}{\operatorname{sh}k_{2,n}L}+b_{4,n}\frac{\operatorname{sh}k_{2,n}x}{\operatorname{ch}k_{2,n}L}\right)\right]\sin n\varphi.$$

Для верифікації розв’язку розглянуто клейове з'єднання двох трубчастих стрижнів. Граничні умови на торцях склеєних труб мають вигляд

$$U_2\big|_{x=0}=u^{(2)}(\varphi)=0,\ F^{(1)}(\varphi)=0,\ H^{(2)}(\varphi)=0,$$

$$H^{(1)}(\varphi)=\begin{cases}F_0, -\frac{\pi}{8}\le\varphi<\frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8}\le\varphi<\frac{5\pi}{8};\ \frac{7\pi}{8}\le\varphi<\frac{9\pi}{8};\ \frac{11\pi}{8}\le\varphi<\frac{13\pi}{8};\\ 0,\quad \frac{\pi}{8}\le\varphi<\frac{3\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8}\le\varphi<\frac{7\pi}{8};\ \frac{9\pi}{8}\le\varphi<\frac{11\pi}{8};\ \frac{13\pi}{8}\le\varphi<\frac{15\pi}{8}.\end{cases}$$

Більш наочною є схема прикладання навантаження на рис. 7, де показано торці розглянутої склеєної конструкції й позначено навантажені ділянки.

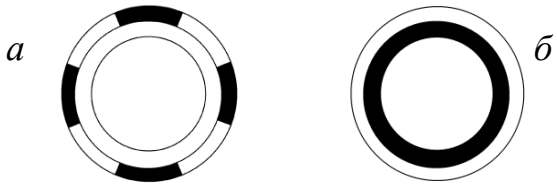



Рис. 7. Крайові умови при $x=L$ (*а*) і $x=0$ (*б*)

Графік дотичних напружень $\tau(\varphi,x)$ у вигляді поверхні в координатах $(\varphi,x)$ наведено на рис. 8. З огляду на симетрію задачі, на рисунку показано напруження на одній восьмій частині кола, $\varphi\in[0;\pi/4]$.

Графіки напружень показано в безрозмірній формі як відношення діючих напружень до гіпотетичних, які були б при умові рівномірного розподілу навантаження по всьому клейовому шару (рис. 8).

Максимальних значень напруження набувають у середині навантажених ділянок. А на опертому торці напружений стан є практично рівномірним за коловою координатою. Це добре ілюструє властивості знайденого розв'язку – самозрівноважені зусилля експоненціально зменшуються при віддаленні від краю з'єднання, і в глибині склейки НДС наближається до одновимірного. Ця особливість розв'язку цілком узгоджується з емпіричним принципом Сен-Венана, що непрямо підтверджує обґрунтованість зроблених припущень.

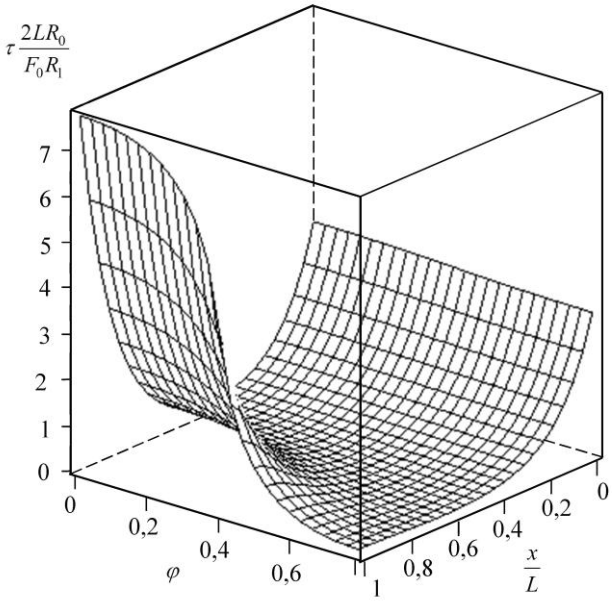



Рис. 8. Напруження в клейовому шарі

Для оцінювання точності запропонованої моделі проведено розрахунок напруженого стану досліджуваної конструкції за МСЕ у тривимірній постановці.

Розподіл напружень у клеї по довжині з'єднання при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi / 4$ показано на рис. 9. Крім того, графік дотичних напружень у середині клейового шару при $\varphi = 0$ отримано за допомогою методу скінченних елементів.

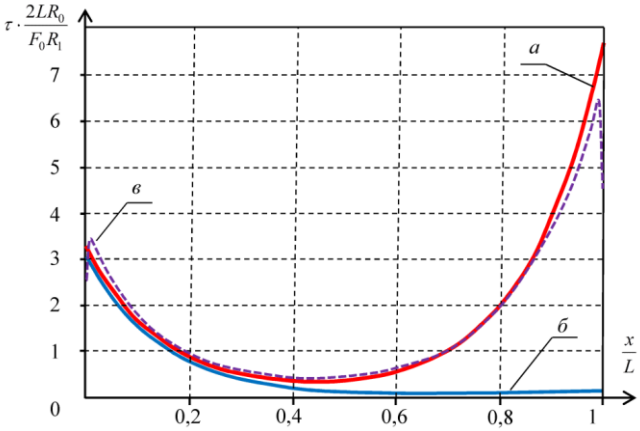



Рис. 9. Напруження в клейовому шарі, обчислені за запропонованою методикою при $\varphi = 0$ – *а*, $\varphi = \pi/4$ – *б* і з допомогою МСЕ – *в* ($\varphi = 0$)

Порівняння показує узгодженість результатів розрахунків за обома моделями, що підтверджує адекватність запропонованої моделі. Значення напружень відрізняються лише біля країв склейки, де клейове з'єднання має складний напружений стан.

*У другій задачі* розглянуто осесиметричний статичний НДС клейового з'єднання двох циліндричних оболонок, навантажених осьовим зусиллям (рис. 10).

Для виключення суперечності в рівновазі шарів, що має місце у відомих моделях, було взято припущення про те, що дотичні напруження в клейовому шарі діють у серединній поверхні, а нормальні напруження лінійно змінюються за радіальною координатою.

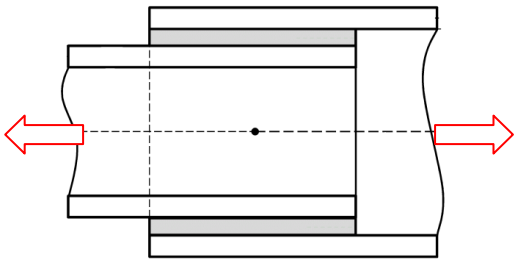


Рис. 10. Схема з’єднання

Диференціальні елементи з'єднання й діючі зусилля показано на рис. 11.

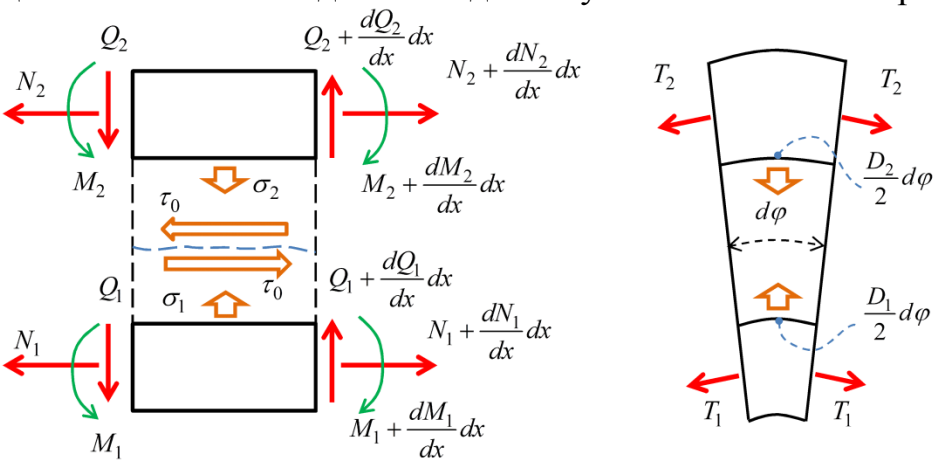



Рис. 11. Рівновага диференціального елемента з'єднання

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання мають вигляд

$$R_1\frac{dN_1}{dx}+R_0\tau_0=0;\quad R_2\frac{dN_2}{dx}-R_0\tau_0=0,\quad R_1\frac{dQ_1}{dx}+\frac{D_1}{2}\sigma_1-T_1=0;\quad R_2\frac{dQ_2}{dx}-\frac{D_2}{2}\sigma_2-T_2=0,$$

$$R_1\frac{dM_1}{dx}-R_1Q_1+R_0\left(s_1+\frac{\delta_0}{2}\right)\tau_0=0;\quad R_2\frac{dM_2}{dx}-R_2Q_2+R_0\left(s_2+\frac{\delta_0}{2}\right)\tau_0=0.$$

Задачу зведено до системи чотирьох диференціальних рівнянь відносно поздовжніх і поперечних (радіальних) переміщень несних шарів, яка в матричній формі має вигляд

$$\mathbf{A}_4\frac{d^4\vec{\mathbf{V}}}{dx^4}+\mathbf{A}_2\frac{d^2\vec{\mathbf{V}}}{dx^2}+\mathbf{A}_1\frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dx}+\mathbf{A}_0\vec{\mathbf{V}}=0,$$

де $\vec{\mathbf{V}}=\left(u_1;\quad u_2;\quad w_1;\quad w_2\right)^T$ - вектор-функція переміщень шарів.

Систему диференціальних рівнянь розв’язано матричним способом. Загальний розв’язок має вигляд

$$\vec{\mathbf{V}}=\sum_{k=1}^{10}C_k\vec{\mathbf{h}}_k\,\mathrm{e}^{\lambda_k x}+\vec{\mathbf{H}}_0+\vec{\mathbf{H}}_1 x,$$

де $\vec{\mathbf{H}}_0$ і $\vec{\mathbf{H}}_1$ - власні вектори, що відповідають $\lambda=0$; $\vec{\mathbf{h}}_k$ - власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda\neq 0$. Вектори $\vec{\mathbf{h}}_k$ визначаються з рівняння $\mathbf{A}_s\vec{\mathbf{h}}=0$ з точністю до довільного множника $C_k$.

У формули для переміщень входять дванадцять констант $C_k$. Поза межами області склеювання елементи конструкції, наведеної на рис. 10, розглядаємо як циліндричні оболонки. Крайові умови й умови спряження мають такий вигляд:

$$u_3\big|_{x=-L-L_1} = \frac{dw_3}{dx}\bigg|_{x=-L-L_1} = Q_3\big|_{x=-L-L_1} = 0; \quad N_2\big|_{x=-L} = Q_2\big|_{x=-L} = M_2\big|_{x=-L} = 0; \quad u_3\big|_{x=-L} = u_1\big|_{x=-L};$$

$$w_3\big|_{x=-L} = w_1\big|_{x=-L}; \quad \frac{dw_3}{dx}\bigg|_{x=-L} = \frac{dw_1}{dx}\bigg|_{x=-L}; \quad N_3\big|_{x=-L} = N_1\big|_{x=-L}; \quad Q_3\big|_{x=-L} = Q_1\big|_{x=-L};$$

$$M_3\big|_{x=-L} = M_1\big|_{x=-L}; \quad N_4\big|_{x=L} = N_2\big|_{x=L};$$

$$N_1\big|_{x=L} = Q_1\big|_{x=L} = M_1\big|_{x=L} = 0; \quad u_4\big|_{x=L} = u_2\big|_{x=L}; \quad w_4\big|_{x=L} = w_2\big|_{x=L}; \quad \frac{dw_4}{dx}\bigg|_{x=L} = \frac{dw_2}{dx}\bigg|_{x=L};$$

$$Q_4\big|_{x=L} = Q_2\big|_{x=L}; \quad M_4\big|_{x=L} = M_2\big|_{x=L}; \quad Q_4\big|_{x=L+L_2} = M_4\big|_{x=L+L_2} = 0.$$

Крайові умови приводять до системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $C_k$ і коефіцієнтів, що виникають при інтегруванні диференціальних рівнянь.

Для верифікації розрахункової моделі проведено розрахунок напруженого стану досліджуваної конструкції за допомогою МСЕ. Скінченно-елементну модель конструкції доповнено врахуванням напливу клею в обох кінцях шва у формі чверті круга. На рис. 12 подано напруження біля одного з країв шва. Безперервними лініями показано графіки дотичних (*a*) і нормальних (*b*) напружень у серединній поверхні клейового шару, обчислених за запропонованою моделлю. Пунктирними лініями та точками показано графіки напружень $\tau_0$, $\sigma_1$ і $\sigma_2$, обчислених за допомогою МСЕ. Стрибки напружень за межами області склеювання обумовлені змінами геометрії клейового шару, такими як фаска й наплив клею. Стрибки мають локальний характер і не перевищують значень біля краю клейового шару.

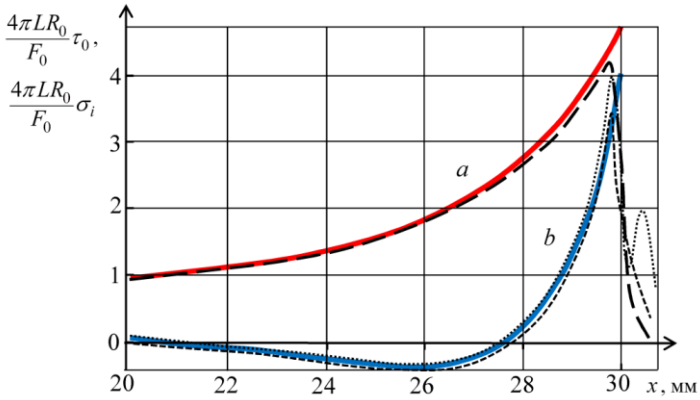



Рис. 12. Напруження в клейовому шарі біля краю шва

У **четвертому розділі** наведено осесиметричні моделі клейового з'єднання пластини, що має круглий отвір, з концентричною накладкою. Уперше розглянуто задачу з визначення статичного НДС клейового з’єднання пластини, що має круглий отвір і коаксіальної накладки внапуск в умовах осесиметричного статичного НДС. Задачу розглянуто у двох постановках – без урахування вигину й поперечних переміщень та з їх урахуванням. Створені моделі статичного НДС з’єднання можна

розглядати як розвинення класичних одновимірних моделей статичного НДС з’єднання Фолькерсена та Голанда – Рейсснера на конструкції з радіальною симетрією.

В обох задачах розглядається клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини (рис. 13). *В першій задачі* основна пластина навантажена симетричним двовісним розтягом, вигін не враховується. Диференціальні елементи з'єднання й діючі зусилля показано на рис. 14.

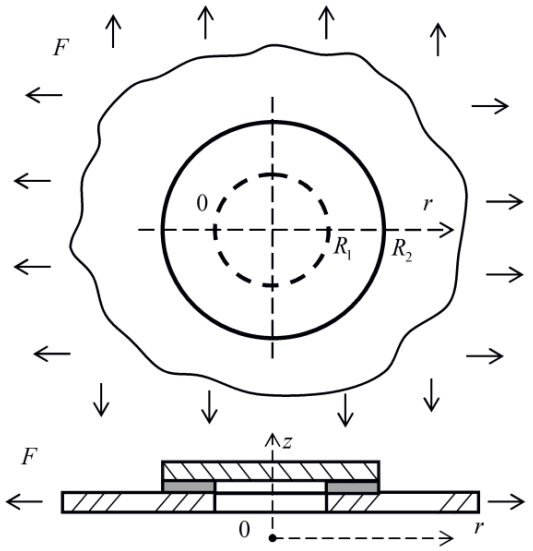



Рис. 13. Схема клейового з'єднання пластини з накладкою

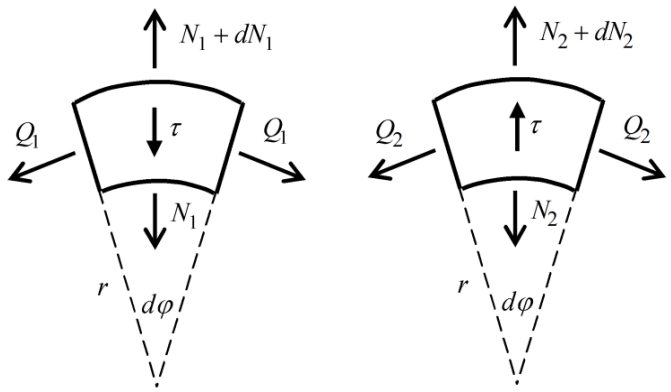



Рис. 14. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Рівняння рівноваги елементів несних шарів мають вигляд

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0.$$

Задачу зведено до двох лінійних диференціальних неоднорідних рівнянь Ейлера

$$\frac{d^2U_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} = -\frac{C_1}{B_i} I_1(\lambda r) - \frac{C_2}{B_i} K_1(\lambda r),$$

де $i = 1, 2$.

Загальні розв’язки цих рівнянь мають вигляд

$$U_1(r) = -C_1 g_{1,1}(r) - C_2 g_{2,1}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad U_2(r) = C_1 g_{1,2}(r) + C_2 g_{2,2}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$

де $g_{1,k}(r) = \dfrac{I_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}$, $g_{2,k}(r) = \dfrac{K_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}$.

Переміщення у внутрішній області ($r < R_1$) і в зовнішній області ($r > R_2$), тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями деформації круглих пластин

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0.$$

Радіальні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання $U_3$ та радіальні переміщення основної пластини за межами з'єднання $U_4$ знайдено у

вигляді рівнянь

$$U_3(r)=c_1r+\frac{c_2}{r},U_4(r)=c_3r+\frac{c_4}{r}.$$

Покладемо, що основна пластина має радіус $R_3$. Крайові умови на зовнішній межі основної пластини мають вигляд

$$N_4(R_3)=F;\ U_1(R_2)-U_4(R_2)=0;\ N_1(R_2)-N_4(R_2)=0;\ N_2(R_2)=0,$$

$$U_2(R_1)-U_3(R_1)=0;\ N_2(R_1)-N_3(R_1)=0;\ N_1(R_1)=0.$$

Ще одна стала визначається з умов рівності нулю поздовжніх переміщень накладки на початку координат $(r=0)$. Отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих сталих $C_1,C_2,C_3,C_4$ і $c_1,c_3,c_4$.

Розглянуто модельну задачу. При завданні геометрії області вважається, що основна пластина має великий $R_3>3R_1$.

На рис. 15 наведено графіки дотичних напружень у клейовому шарі, які розраховано за запропонованою моделлю (*a*), а також за допомогою методу скінченних елементів (*b*).

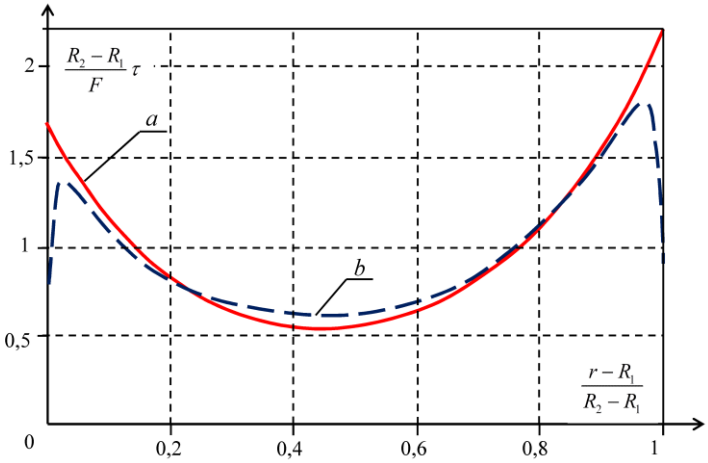



Рис. 15. Дотичні напруження в клеї

Обчислення показали, що напруження, розраховані за допомогою запропонованої моделі і за допомогою МСЕ, збігаються майже у всій області склеювання. Відмінності спостерігаються лише в невеликих областях біля країв клейового шва, причому довжина цієї області – порядку товщини клейового шару. Виявлені відмінності не перевищують кількох відсотків, і на графіках результати практично збігаються.

*В другій задачі* враховано вигін конструкції. Диференціальні елементи з'єднання й діючі зусилля наведено на рис. 16.

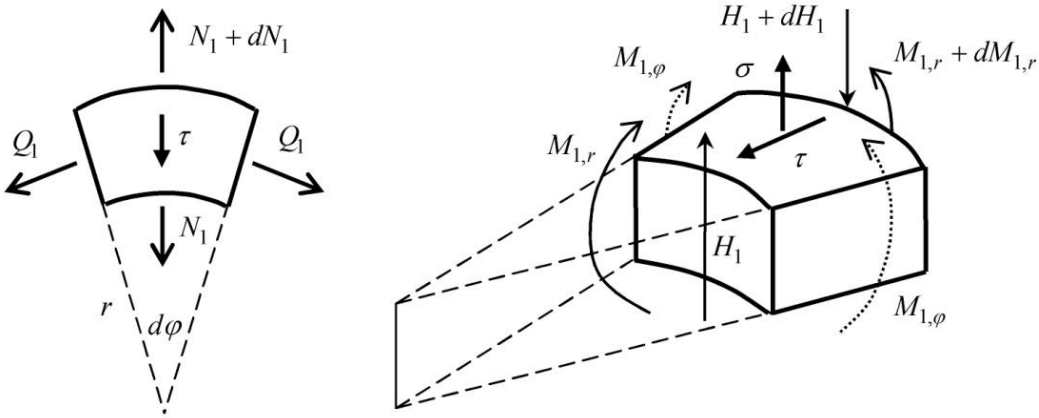



Рис. 16. Диференціальний елемент з'єднання

Розглянуто з’єднання однакових за товщиною й механічними властивостями обшивки з круглим отвором і круглої накладки. Рівняння рівноваги елементів несних шарів мають вигляд

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0,$$

$$\frac{M_{1,r} - M_{1,\varphi}}{r} + \frac{dM_{1,r}}{dr} - H_1 + \tau\frac{\delta}{2} = 0, \quad \frac{M_{2,r} - M_{2,\varphi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \tau\frac{\delta}{2} = 0,$$

$$-\sigma + \frac{H_1}{r} + \frac{dH_1}{dr} = 0, \quad \sigma + \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} = 0.$$

Задачу зведено до двох рівнянь відносно напружень у клейовому шарі

$$\frac{d^3\tau}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\tau}{dr^2} - \left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D}\right)\right)\tau = 0,$$

$$\frac{d^4\sigma}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{2K}{D}\sigma = 0.$$

Ці рівняння мають аналітичні розв’язки

$$\tau = \frac{C_1}{r} + C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r), \qquad \sigma = S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r).$$

Рівняння відносно поздовжніх переміщень мають вигляд

$$\frac{d^2U_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} - \frac{\tau}{B} = 0, \quad \frac{d^2U_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{\tau}{B} = 0.$$

Їх розв’язок знайдено у вигляді

$$U_1(r) = \sum_{j=1}^{3} g_j(r) C_j + C_4 r + \frac{C_5}{r}, \qquad U_2(r) = -\sum_{j=1}^{3} g_j(r) C_j + C_6 r + \frac{C_7}{r},$$

де

$$g_1(r) = \frac{r(2\ln r - 1)}{4B}; \qquad g_2(r) = \frac{I_1(\beta r)}{\beta^2 B}; \quad g_3(r) = \frac{K_1(\beta r)}{\beta^2 B}.$$

Поперечні переміщення пластин в області склеювання записано в такому вигляді:

$$W_1(r) = C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) + C_3 f_3(r) + (C_4 - C_6)\frac{r^2}{2\delta} + (C_5 - C_7)\frac{\ln r}{\delta} +$$
$$+ C_8 - S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K} - S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K} - S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K} - S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K},$$

$$W_2(r) = C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) + C_3 f_3(r) + (C_4 - C_6)\frac{r^2}{2\delta} + (C_5 - C_7)\frac{\ln r}{\delta} +$$
$$+ C_8 + S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K} + S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K} + S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K} + S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K}.$$

Переміщення у внутрішній області ($r < R_1$) і в зовнішній області ($r > R_2$), тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями згину круглих пластин при відсутності зрізувальних сил

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0, \quad \frac{d^3W}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dW}{dr} = 0,$$

які мають розв'язки

$$U_3 = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \; U_4 = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \; W_3 = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2, \; W_4 = s_4 + s_5 \ln r + s_6 r^2,$$

де $U_3$ і $W_3$ радіальні й поперечні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання (над отвором), $U_4$ і $W_4$ – переміщення основної пластини за межами області склеювання.

Константи $C_1, C_2, ..., C_8$, $S_1, ..., S_4$ і $c_1, ..., c_4$ $s_1, ..., s_6$ знайдено з крайових умов, а також з умов спряження переміщень і зусиль на межах областей.

Будемо вважати, що основна пластина має зовнішній радіус $R_3$. Крайові умови на зовнішній межі основної пластини мають такий вигляд:

$$N_4(R_3) = F; \quad W_4(R_3) = 0; \quad \left.\frac{dW_4}{dr}\right|_{r=R_3} = 0; \quad U_1(R_2) - U_4(R_2) = 0;$$

$$W_1(R_2) - W_4(R_2) = 0; \quad \left.\left(\frac{dW_1}{dr} - \frac{dW_4}{dr}\right)\right|_{r=R_2} = 0; \quad M_{1,r}(R_2) - M_{4,r}(R_2) = 0;$$

$$N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0; \quad H_2(R_2) = 0; \quad M_{2,r}(R_2) = 0; \quad N_2(R_2) = 0;$$

$$U_2(R_1) - U_3(R_1) = 0; \quad W_2(R_1) - W_3(R_1) = 0; \quad \left.\left(\frac{dW_2}{dr} - \frac{dW_3}{dr}\right)\right|_{r=R_1} = 0;$$

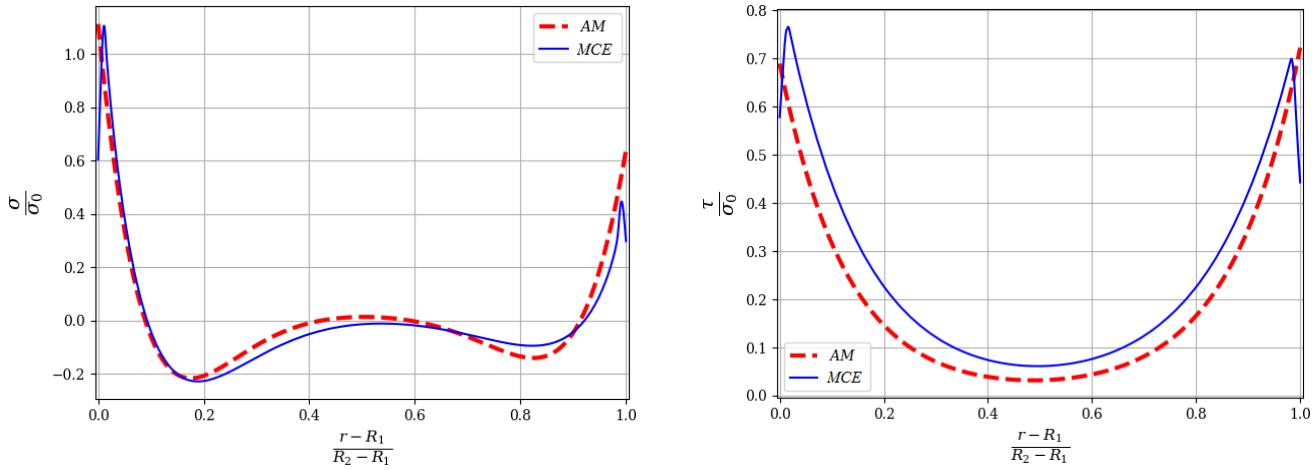
$$M_{2,r}(R_1) - M_{3,r}(R_1) = 0; \quad N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \quad H_2(R_1) = 0;$$

$$H_1(R_1) = 0; \quad M_{1,r}(R_1) = 0; \quad N_1(R_1) = 0.$$

З умов рівності нулю радіальних переміщень накладки і скінченної кількості її поперечних переміщень при $r = 0$ випливає, що $c_2 = 0$, $s_2 = 0$. Таким чином, маємо систему із двадцяти лінійних рівнянь відносно двадцяти невідомих констант $C_1, ..., C_8, S_1, ..., S_4, c_1, c_3, c_4, s_1, s_3, ..., s_6$.

Розглянуто модельну задачу. При завданні геометрії області вважаємо, що основна пластина має великий радіус $R_3 > 3R_1$.

На рис. 17, *а*, *б* наведено графіки нормальних і дотичних напружень у клейовому шарі, які розраховано за допомогою створеної аналітичної моделі (АМ) і скінченно-елементної моделі (МСЕ)




*а* *б*

Рис. 17. Дотичні напруження у клейовому шарі

Графіки показано в безрозмірній формі, у формі відношення до рівномірно розподілених по шву напружень навантаження.

Із рисунків видно, що дотичні й нормальні напруження в клеї є максимальними на межі області склеювання. Ця особливість НДС клейових з'єднань, як бачимо, існує також і при передачі зусиль з пластини на круглу накладку. Порівняння показує узгодженість результатів розрахунків, що підтверджує адекватність запропонованої моделі.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі наведено результати вирішення актуальної науково-технічної задачі з дослідження НДС клейових з'єднань внапуск. Проведено удосконалення існуючих та побудовані нові одно- та двовимірні моделі статичного НДС клейових з'єднань, розроблено аналітичні методи розв'язання ряду нових задач з клейовими з'єднаннями, а також проведено оцінку характеру НДС у цих практично важливих з'єднаннях. Результати отримані за запропонованими моделями та методами верифіковано аналізом збіжності результатів та порівнянням результатів оцінки НДС з'єднань з даними, які отримано скінченно-елементним моделюванням.

Найбільш важливі наукові і практичні результати роботи:

1. Розвинуто двовимірні моделі статичного НДС клейових з'єднань прямокутних пластин, які на відміну від класичної моделі Фолькерсена враховують нерівномірний розподіл дотичних напружень за шириною з'єднання, що дозволило отримати аналітичний розв'язок задач з новими, не властивими для моделі Фолькерсена, крайовими умовами, а саме коли зовнішнє навантаження зсувом прикладається до бічної сторони однієї пластини в умовах жорсткого закріплення протилежної сторони іншої пластини.

2. Створено нові моделі статичного НДС з'єднань циліндричних труб, які дозволили врахувати нерівномірний характер силового навантаження за коловою координатою та отримати аналітичний розв'язок цих задач.

3. Створено нові моделі статичного НДС з'єднань циліндричних оболонок, які дозволяють уникнути існуючих протиріч класичних моделей, що виникають внаслідок різних радіусів кривизни з'єднувальних поверхонь, а також отримано

аналітичні розв’язки цих задач. Запропонована модель з’єднання враховує осереднені за товщиною зсувні напруження у клеї та нормальні напруження, які лінійно змінюються за радіальною координатою.

4. Уперше створено дві моделі осесиметричного статичного НДС з’єднання пластини, що має круглий отвір і концентричної круглої накладки. Отримано аналітичні розв’язки відповідних задач. Створені моделі можна розглядати як узагальнення класичних одновимірних моделей з’єднання Фолькерсена та Голанда – Рейсснера на конструкції з радіальною симетрією.

5. На основі розв’язання модельних задач здійснено порівняння отриманих результатів з даними скінченно-елементного моделювання. Це довело, що запропоновані моделі механічної поведінки клейових з’єднань внапуск й відповідні аналітичні розв’язки є адекватними і з високою точністю описують напружений стан досліджуваних конструкцій. Однією з переваг запропонованої в роботі методики є дуже малий, на відміну від МСЕ, час роботи програми з числових розрахунків (в десятки разів швидше ніж за МСЕ).

6. Проведено дослідження характеру НДС клейових з’єднань досліджених конструкцій, яке дозволило виявити істотно нерівномірний характер розподілу зсувних напружень за шириною та довжиною клейового з’єднання, підтвердити значну відмінність середніх та максимальних значень зсувних напружень по площадці з’єднання, наявність локальних максимумів напружень за границею області склеювання, які обумовлено змінами геометрії клейового шару, такими як фаска й наплив клею.

7. Основні результати й рекомендації дисертаційної роботи впроваджено на ДП «Антонов» та в навчальному процесі кафедри технології виробництва літальних апаратів, кафедри проектування літаків і вертольотів і кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Куреннов С. С., Поляков А. Г., Барахов К. П. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* – 2018. – Т. 61. – № 3. – С. 132 – 138.

Kurennov S. S., Polyakov O. G., Barakhov K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. Journal of Mathematical Sciences. 2021 Vol. 254. P. 156–163. (SCOPUS, квартиль Q3)

2. Kurennov S. S., Barakhov K. P. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model. *PNRPU Mechanics Bulletin.* – 2019, no. 3. – PP. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16. (SCOPUS, квартиль Q2).

3. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. *Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue* 1(57). – 2019. P. 5 – 13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

4. Барахов К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії. *Открытые информационные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т».* Харьков, 2020. – Вып. 90. – С. 78-89.

5. Барахов К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2021. – № 2 (170). – С. 12 – 19.
6. Курєннов С. С., Барахов К. П. Напруження в клейовому з'єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель. *Вісник Запорізького національного університету.* – 2019. – № 2. – С. 81 – 89.
7. Kurennov S.S., Barakhov K.P., Poliakov A.G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. *Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum* Vol. 968 P. 519 – 527. (SCOPUS, квартиль Q4)
8. Kurennov S. S., Poliakov A. G., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2019): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019.* Cham (Switzerland), 2020. P. 75 – 85 (Advances in Intelligent Systems and Computing; Vol. 1113). (SCOPUS, квартиль Q4)
9. Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020.* P. 310 – 319 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188). (SCOPUS, квартиль Q4)
10. Барахов К., Курєннов С. Напружений стан клейового з'єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*. – 2018. Т. 1. – С. 224.
11. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V., Chubukina O. V. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load. *VI Міжнародна конференція Актуальні проблеми інженерної механіки. Тези доповідей. Одеса, 12 – 15 травня 2020*, С. 209 – 212.
12. Куреннов С. С., Барахов К. П. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції 5 – 8 жовтня 2020.* Харків. С. 350 – 352.
13. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020.* P. 389 – 400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188). (SCOPUS, квартиль Q4)

## АНОТАЦІЯ

Барахов К. П. Статичний напружено-деформований стан клейових з'єднань внапуск. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено побудові нових моделей статичного НДС клейових з'єднань внапуск, які дають змогу отримати аналітичні розв'язки нових

задач. Вибір мети зумовлено потребою виробників визначити вплив на напружений стан з'єднань механічних і геометричних параметрів з'єднань, з'ясувати механізми руйнування з'єднань, виявити шляхи підвищення несної здатності з'єднань та ін., що у кінцевому результаті сприятиме підвищенню конкурентоспроможності аерокосмічної продукції України.

Побудовано нові й розвинуто наявні моделі статичного НДС клейових з'єднань внапуск. Отримано аналітичні розв'язки нових задач, що наведено в роботі. Одержані аналітичні розв'язки було порівняно з числовими розв'язками цих задач, знайденими за допомогою методу скінченних елементів, підтверджено високу ефективність та адекватність запропонованих у роботі моделей статичного НДС.

Результати дисертаційної роботи впроваджено на ДП «Антонов» та в навчальному процесі в Національному аерокосмічному університеті ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

Ключові слова: клейове з'єднання, статичний напружено-деформований стан, модель Фолькерсена, модель Голанда – Рейсснера, прямокутна пластина, кругла пластина, циліндричні осесиметричні оболонки, осесиметрична модель, двовимірна модель, аналітичний розв'язок, відокремлення змінних.

## АННОТАЦИЯ

Барахов К. П. Статическое напряженно-деформированное состояние клеевых соединений внахлест. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2021.

Диссертационная работа посвящена построению новых моделей статического НДС клеевых соединений внахлест, которые позволяют получить аналитические решения новых задач. Выбор цели обусловлен потребностью производителей определить влияние на напряженное состояние соединений механических и геометрических параметров соединений, выяснить механизмы разрушения соединений, выявить пути повышения несущей способности соединений и др., что приведет в конечном счете к повышению конкурентоспособности аэрокосмической продукции Украины.

Построены новые и развиты существующие модели статического НДС клеевых соединений внахлест.

Решены такие задачи:

– задача о статическом НДС клеевого соединения внахлест двух пластин прямоугольной формы, одна из которых нагружена продольными усилиями, а другая – жестко закреплена вдоль противоположной боковой стороны;

– задача о статическом НДС клеевого соединения внахлест двух пластин прямоугольной формы, одна из которых нагружена сдвиговыми усилиями, а другая – жестко закреплена вдоль противоположной боковой стороны;

– задача о статическом НДС двух склеенных внахлест коаксиальных труб при неравномерной осевой нагрузке;

– задача о статическом НДС клеевого соединения внахлест двух цилиндрических оболочек при осевом растяжении;

– задача о статическом НДС клеевого соединения пластины имеющей круглое отверстие и концентрической накладки при отсутствии изгиба и поперечных перемещений конструкции;

– задача о статическом НДС клеевого соединения пластины имеющей круглое отверстие и концентрической накладки в случае учета изгиба и поперечных перемещений конструкции.

Приведены аналитические решения новых задач. Полученные аналитические решения сопоставлены с численными решениями этих задач, которые получены с помощью метода конечных элементов, подтверждена высокая эффективность и адекватность предложенных в работе моделей.

Результаты диссертационной работы внедрены на ГП «Антонов» и в учебном процессе в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт».

Ключевые слова: клеевое соединение, статическое напряженно-деформированное состояние, модель Фолькерсена, модель Голанда – Рейсснера, прямоугольная пластина, круглая пластина, цилиндрические осесимметричные оболочки, осесимметричная модель, двумерная модель, аналитическое решение, разделение переменных.

## ABSTRACT

Barakhov |K. P. Static stress-stain state of lap adhesive joints. – Manuscript.

Thesis for getting scientific degree of candidate of science by specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solid. – A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2021.

The thesis is devoted to composing of novel models of static stress-strain of lap adhesive joints. These models allow to get new analytical solutions of engineering problems. Selection of goal is stipulated by demand of manufacturers to determine influence of mechanical and geometrical parameters of joints on their stress state, to clarify mechanism of joints failure, to reveal ways of joints load-carrying ability increasing etc, that finally leads to improving of Ukrainian aerospace products competitiveness.

Novel models of static stress-strain state of adhesive joints are composed and current models are developed. Analytical solutions of novel problems analyzed in the paper are obtained. Analytical solutions got were compared with numerical solutions o these problems by means of finite elements method. High efficiency and adequacy of suggested in the paper models of static stress-strain state are proved.

Results of the thesis were implemented in State Enterprise «Antonov» and in educational process of National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute".

Key words: adhesive joint, static stress-strain-state, Volkersen model, Holland-Reisner model, rectangular plate, round plate, cylindrical axis symmetrical shell, two-dimensional model, analytical solution, separation of variables.