Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БАРАХОВ КОСТЯНТИН ПЕТРОВИЧ

УДК 539.313: 539.384.

ДИСЕРТАЦІЯ

СТАТИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КЛЕЙОВИХ З’ЄДНАНЬ ВНАПУСК

01.02.04 – механіка де формівного твердого тіла
технічні науки
Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

__________________К. П. Барахов

Науковий керівник
доктор технічних наук, доцент
Курєннов Сергій Сергійович,

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

Барахов К. П. Статичний напружено-деформований стан клейових з'єднань внапуск. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла.

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Міністерство освіти і науки України, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, Харків.

Дисертаційну роботу присвячено побудові нових моделей статичного напружено-деформованого стану (НДС) клейових з'єднань внапуск, які дають змогу отримати аналітичні розв'язки нових задач. Вибір мети зумовлено потребою виробників визначити вплив на напружений стан з'єднань механічних і геометричних параметрів з'єднань, з'ясувати механізми руйнування з'єднань, виявити шляхи підвищення несної здатності з'єднань та ін., що у кінцевому результаті сприятиме підвищенню конкурентоспроможності аерокосмічної продукції України.

Тема дисертаційної роботи пов'язана з виконанням держбюджетної теми № Д/Р 0119U002517 "Розвиток математичних методів дослідження прикладних задач".

Побудовано нові й розвинуто наявні моделі статичного НДС клейових з'єднань внапуск. Отримано аналітичні розв'язки нових задач, що наведено в роботі. Одержані аналітичні розв'язки було порівняно з числовими розв'язками цих задач, знайденими за допомогою методу скінченних елементів, підтверджено високу ефективність та адекватність запропонованих у роботі моделей статичного НДС.

Подано загальну характеристику дисертації, а саме: проведено обґрунтування вибору теми дослідження, визначено мету, задачі та методи дослідження, представлена наукова новизна отриманих результатів, особистий

внесок здобувача та апробація матеріалів дисертації, вказана структура та обсяг дисертації, а також практичне значення отриманих результатів.

Проведено аналіз наявних моделей статичного НДС клейових з’єднань внапуск, перелічено їх недоліки та обмеження, і вказано шляхи розвитку моделей статично НДС клейових з’єднань внапуск.

Наведено розвиток існуючих двовимірних моделей з'єднань внапуск в напрямку побудови аналітичних розв’язків нових типів задач, які раніше не розглядалися.

Отримано аналітичний розв'язок задачі про двовимірний напружений стан клейового з'єднання двох прямокутних пластин, одну з яких навантажено поздовжніми зусиллями, а іншу – закріплено вздовж бічної сторони. Для побудови розв’язку використана гіпотеза про високу жорсткість несних шарів в поперечному напрямку.

У цьому ж розділі запропоновано модель статичного НДС клейового з'єднання внапуск двох прямокутних пластин, які навантажено дотичними зусиллями. Отримано аналітичний розв'язок задачі і обґрунтовано його збіжність. Розв’язано модельну задачу.

Розглянуто моделі статичного НДС з'єднань циліндричних оболонок.

Запропоновано модель статичного НДС клейового з'єднання внапуск двох коаксіальних циліндричних труб. На відміну від відомих розв’язків розглядається задача у неосесиметричній постановці. Тобто крайові умови – умови навантаження по торцях, можуть бути довільними. Побудовано аналітичний розв'язок задачі по визначенню НДС даної конструкції. Задачу зведено до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних щодо поздовжніх переміщень несних шарів. Розв’язок отримано в аналітичній формі за допомогою класичного методу відокремлення змінних. Розв’язано модельну задачу.

Запропоновано модель осесиметричного статичного НДС клейового з'єднання внапуск двох коаксіальних циліндричних оболонок. Застосовано уточнену модель розподілу нормальних напружень у клейовому шарі (лінійний розподіл за товщиною). Задачу зведено до системи лінійних диференційних рівнянь відносно переміщень шарів. Розв'язок отримано в аналітичній формі. Розв'язано модельну задачу.

Розглянуто осесиметричні моделі статичного НДС з'єднання пластин з круглим отвором і концентричної круглої накладки.

Запропоновано модель осесиметричного статичного НДС пластини з круглим отвором та концентричною накладкою, яка є розвитком відомої моделі Фолькерсена. Тобто вважається, що конструкція не зазнає вигину, а згинальні моменти з'єднання не впливають на НДС конструкції. Задача зведена до лінійного диференціального рівняння щодо дотичних напружень в клейовому шарі. Розв'язок отримано в аналітичній формі у функціях Бесселя. Розв'язано модельну задачу.

Розглянуто таку ж саму конструкцію у більш загальній постановці. А саме враховано вплив згинальних моментів, поперечних переміщень та відривних напружень у клейовому шарі на НДС конструкції Задачу зведено до лінійних диференційних рівнянь відносно дотичних і нормальних напружень в клейовому шарі. Розв'язок отримано в аналітичній формі у функціях Бесселя. Розв'язана модельна задача.

Ключові слова: клейове з'єднання, статичний напружено-деформований стан, модель Фолькерсена, модель Голанда-Рейсснера, прямокутна пластина, кругла пластина, циліндричні осесиметричні оболонки, осесиметрична модель, двовимірна модель, аналітичний розв'язок, відокремлення змінних.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Куреннов С. С., Поляков А. Г., Барахов К. П. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2018. – 61. № 3. С. 132 – 138.

Kurennov S. S., Polyakov O. G., Barakhov K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. Journal of Mathematical Sciences. 2021 Vol. 254. P. 156–163.

2. Kurennov S. S., Barakhov K. P. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model. PNRPU Mechanics Bulletin, 2019, no. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

3. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue 1(57). 2019. P. 5 – 13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

4. Барахов К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії. Открытые информационные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2020. Вып. 90. С. 78-89.

5. Барахов К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2021. – № 2 (170). – С. 12 – 19.

6. Курєннов С. С., Барахов К. П. Напруження в клейовому з'єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель. Вісник Запорізького національного університету. Запоріжжя. 2019. № 2. С. 81 – 89.

7. Kurennov S.S., Barakhov K.P., Poliakov A.G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum Vol. 968 P. 519 – 527.

8. Kurennov S. S., Poliakov A. G., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2019) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019. Cham (Switzerland), 2020. P. 75 – 85 (Advances in Intelligent Systems and Computing ; Vol. 1113).

9. Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020) : Intern. Sci. and

Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 310 – 319 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

10. Барахов К., Курєннов С. Напружений стан клейового з’єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель. Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. Т. 1. – С. 224.

11. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V., Chubukina O. V. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load. VI Міжнародна конференція Актуальні проблеми інженерної механіки. Тези доповідей. Одеса, 12 – 15 травня 2020, С. 209 – 212.

12. Куреннов С. С., Барахов К. П. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой. Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції 5 – 8 жовтня 2020. Харків. С. 350 – 352.

13. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM’2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 389 – 400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

ABSTRACT

Barakhov K. P. Static stress-strain state of lap adhesive joints. – Qualification scientific paper. Manuscript.

Thesis for getting scientific degree of candidate of technical science by specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solid.

National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Ministry of Education and Science of Ukraine, A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of National Academy of Science of Ukraine, Kharkiv.

The thesis is devoted to composing of novel models of static stress-strain state of lap adhesive joints, which allow to get analytical solution of novel problems. Selection of a goal is stipulated by requirements of manufacturers to determine influence of joint mechanical and geometrical parameters on joint stress, to analyze joint failure mechanism, to reveal ways of joints load carrying ability increasing etc. That as a consequence will prone to increasing of competitiveness of Ukrainian aerospace industry products.

The topic of the thesis relates to fulfilling of state budget research paper № 0119U002517 "Development of mathematical methods for applied problems solving".

Novel models are composed, and currents ones are developed for analysis of static stress-strain state of lap adhesive joints. Analytical solutions of novel problems are obtained in the paper. Analytical solutions got was compared with numerical ones analyzed by numerical methods, calculated by finite elements methods. High efficiency and adequacy of suggested models of static stress-strain state are proved.

Generalized characteristic of the thesis is considered, i.e. selection the topic of research is conducted, the goal is formulated, scientific novelty is shown, personal input and thesis results approbation are represented, arrangement and volume of the thesis and practical importance of obtained results are designated.

Analysis of existent models of static stress-strain state for lap adhesive joints is conducted, their advantages and drawback are considered. Main ways of models of static stress-strain state for lap adhesive joints development is shown.

Development of existent two-dimensional models of overlapped joints in frames of composing of analytical solution of novel problems type not considered before is shown.

Analytical solution of the problem about two-dimensional stress state of adhesive joint of two rectangular plates is obtained. One plate is loaded with longitudinal forces but another one – is clamped along side edge. Hypothesis about rigidity of load-carrying layers in lateral direction is used for composing of the solution.

Model of static stress-strain state of lap joint of two rectangular plates loaded with shear force are suggested in the same chapter. Analytical solution of the problem is obtained and convergency of solution is proved. Model problem is solved.

Model of static stress-strain state for cylindrical shells joints is considered.

The model of static stress-strain state of lap joint of two co-axial tubes is suggested. The problem is considered for case of non-symmetrical analysis that differs this solution from existed ones. I.e. boundary conditions – loading of edges can be arbitrary. Analytical solution of the problem for determination of stress-strain state of above-mentioned structure is composed. The problem is narrowed to two differential equations in partial derivatives for longitudinal translations of load-carrying layers. Solution is obtained in analytical form by means of classical method of variables separation. Model problem is solved.

The model of axis-symmetrical static stress-strain state of lap adhesive joint of two co-axial shells is suggested. More precise model of normal stress distribution inside adhesive layer (liner distribution by thickness) is used. The problem is derived to the system of linear equations with respect to laters translations. The solution is got in analytical form. Model problem is solved.

Axis-symmetrical models of static stress-strain state of plates with round opening and concentrical round doubler is considered.

The model of axis-symmetrical static stress-strain state of a plate with round opening and concentrical doubler which is the development of Volkersen model is suggested. Thus. it is assumed that structure doesn't withstand bending and bending moment don't influence structure stress-strain state.

The problem is derived to linear differential equation in terms of shear stress in adhesive joints. The solution is obtained in form of Bessel functions. Model problem is solved.

The same structure in generalized formulation is considered. I.e. influence of total bending moments, lateral translations and tear-out stress in adhesive joint on structure stress-state is taken into consideration. The problem is derived to linear differential equations in terms of shear and normal stress in adhesive joint. The solution is obtained in analytical form with Bessel functions. Model problem is solved.

Key words: adhesive joint, static stress-strain state, Volkersen model, Holland-Reisner model, rectangular plate, round plate, cylindrical axis-symmetrical shell, axis-symmetrical model, two-dimensional model, analytical solution, separation of variables.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Куреннов С. С., Поляков А. Г., Барахов К. П. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2018. – 61. № 3. С. 132 – 138.

Kurennov S. S., Polyakov O. G., Barakhov K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. Journal of Mathematical Sciences. 2021 Vol. 254. P. 156–163.

2. Kurennov S. S., Barakhov K. P. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model. PNRPU Mechanics Bulletin, 2019, no. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

3. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue 1(57). 2019. P. 5 – 13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

4. Барахов К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії. Открытые информационные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2020. Вып. 90. С. 78-89.

5. Барахов К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2021. – № 2 (170). – С. 12 – 19.

6. Курєннов С. С., Барахов К. П. Напруження в клейовому з’єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель. Вісник Запорізького національного університету. Запоріжжя. 2019. № 2. С. 81 – 89.

7. Kurennov S.S., Barakhov K.P., Poliakov A.G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum Vol. 968 P. 519 – 527.

8. Kurennov S. S., Poliakov A. G., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM’2019) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019. Cham (Switzerland), 2020. P. 75 – 85 (Advances in Intelligent Systems and Computing ; Vol. 1113).

9. Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM’2020) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 310 – 319 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

10. Барахов К., Курєннов С. Напружений стан клейового з’єднання

коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель. Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. Т. 1. – С. 224.

11. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V., Chubukina O. V. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load. VI Міжнародна конференція Актуальні проблеми інженерної механіки. Тези доповідей. Одеса, 12 – 15 травня 2020, С. 209 – 212.

12. Куреннов С. С., Барахов К. П. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой. Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції 5 – 8 жовтня 2020. Харків. С. 350 – 352.

13. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 389 – 400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Широке застосування полімерних композиційних матеріалів (КМ) в авіаційній техніці вимагає нових підходів до проектування агрегатів і елементів конструкцій, а також з'єднань. КМ мають ряд переваг в порівнянні з металами і конструкційними сплавами, і, незважаючи на те, що обсяги їх застосування постійно розширюються, особливо в авіації і космонавтиці, залишається актуальною проблема розрахунку з'єднань як деталей з композиційних матеріалів між собою, так і з'єднань КМ з металевими деталями. Складність організації раціонального з’єднання різнорідних матеріалів викликана істотними відмінностями їх фізико-механічних властивостей і структури. Такі особливості КМ, як анізотропія пружних і міцносних властивостей, мала міцність на зминання, труднощі обробки різанням, неоднорідність структури, чутливість до нерівномірності геометрії деталей та ін. обумовлюють широке застосування клейових з'єднань внапуск.

Відомий факт, що клейові з'єднання не тільки добре передають навантаження від однієї частини конструкції до іншої, а й різко знижують концентрацію напружень в порівнянні з заклепковими або зварними з'єднаннями. У підсумку, з застосуванням клейових з'єднань істотно зростає термін служби виробів.

Цьому також сприяють появі високоміцних клеїв і розвиток технологічних процесів склеювання і контролю якості склеювання. Клейові з'єднання в аерокосмічній техніці мають наступні переваги в порівнянні з традиційними типами з'єднань:

– можливість з'єднання деталей з різнорідних матеріалів;

– можливість з'єднання тонких елементів конструкцій;

– герметичність, корозійна стійкість і бензомаслостійкість з'єднання;

– значно менша, ніж при зварюванні, концентрація напружень;

– виключення ослаблення міцності конструкції отворами в порівнянні з заклепковими і болтовими з'єднаннями;

– віброізоляція і демпфірування вібрацій;

– висока аеродинамічна ефективність;

– висока технологічність;

– мала маса з'єднань;

– швидкий і економічний спосіб збірки;

– низька собівартість і простота технології; відсутність необхідності у використанні додаткового обладнання.

Для розрахунку напруженого стану з'єднань, як і інших елементів конструкції, широко застосовується метод скінченних елементів (МСЕ). При складній геометрії з'єднання або при нелінійній поведінці елементів з'єднання даний метод є найкращим або єдино можливим. Однак відмінність на кілька порядків товщини елементів, що склеюються і товщини клею, шарувата структура КМ, високі градієнти напружень в з'єднанні тощо потребують розбиття конструкції на велику кількість елементів, що ускладнює, або взагалі унеможливлює аналіз та проектування.

Відомо, що аналітичні моделі й методики розрахунку напруженого стану дають змогу детально визначити вплив на напружений стан з'єднань механічних і геометричних параметрів з'єднань, пояснити механізми руйнування, провести параметричні дослідження, створити методики проектування й оптимізації, виявити шляхи підвищення несної здатності з'єднань та ін.

З огляду на механіку, клейові з’єднання можна віднести до класу тришарових конструкцій з піддатливим з’єднувальним шаром. Але класичні моделі НДС тришарових пластин або оболонок побудовано із застосуванням гіпотези про жорсткість з’єднувального шару в поперечному напрямку, звідки випливає однаковість поперечних переміщень шарів. Очевидно, що для клейових з’єднань ця гіпотеза є неприпустимою, і тому необхідно застосовувати більш складні моделі деформування конструкції.

Однак відомі моделі й відповідні аналітичні методики розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) з'єднань внапуск потребують певного вдосконалення й розвитку, тому що:

– майже всі аналітичні моделі НДС з'єднань містять гіпотезу про рівномірний розподіл напружень за шириною з'єднання, що не завжди відповідає крайовим умовам;
– моделі статичного НДС клейових з’єднань циліндричних оболонок, які поширені в аерокосмічній техніці, містять протиріччя рівнянням рівноваги або певні гіпотези про розподіл напружень, які потребують обґрунтування;
– недостатньо уваги приділено дослідженню температурних напружень, які виникають в процесі виробництва та експлуатації конструкцій, розподіл яких у з’єднанні також часто неможливо дослідити за одновимірними моделями;
– відсутні дослідження напруженого стану напускних з’єднань накладок (в т.ч. ремонтних) на круглі отвори в обшивці, що потребує застосування полярної системи координат.

Тому побудова нових моделей статичного НДС клейових з’єднань внапуск і розвиток наявних підходів до розв’язання нових задач є актуальною проблемою.

Метою дослідження є побудова нових моделей статичного НДС клейових з'єднань внапуск, які дають змогу отримати аналітичні розв’язки нових задач.

Відповідно до поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– розвинути двовимірні моделі статичного НДС клейових з’єднань прямокутних пластин на розв’язання задач з новими крайовими умовами;

– вдосконалити моделі статичного НДС клейових з’єднань внапуск для розв’язання нових задач, таких як з’єднання елементів конструкції циліндричної форми;

– побудувати нові моделі осесиметричного статичного НДС клейових з’єднань пластини з круглим отвором й концентричною накладкою;

– побудувати аналітичні розв’язки поставлених задач;

– провести верифікацію отриманих розв’язків шляхом порівняння з результатами скінченно-елементного моделювання, визначити межі застосування створених моделей.

Об'єктом дослідження є статичний напружено-деформований стан клейових з’єднань внапуск, який зумовлено дією зовнішніх навантажень.

Предметом дослідження є моделі напружено-деформованого стану клейових з'єднань внапуск балок, пластин та циліндричних оболонок, а також методи розв’язання відповідних задач механіки.

Методи досліджень. Класичні аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь. Задачі з визначення статичного НДС з'єднань у двовимірній постановці зведено до систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, які розв’язуються за методом Фур'є (методом відокремлення змінних), розвинення в ряди за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля. Задачі зі знаходження статичного НДС з’єднань круглих накладок над круглими отворами зведено до лінійних диференціальних рівнянь відносно напружень у клейовому шарі, які мають аналітичні розв’язки в циліндричних функціях Бесселя.

Наукова новизна отриманих результатів. Найбільш вагомими елементами наукової новизни результатів є такі:

– двовимірну модель статичного НДС з’єднання прямокутних пластин розвинуто на нові граничні умови;

– уперше побудовано аналітичний розв’язок задачі про статичний НДС з’єднання внапуск циліндричних елементів конструкції, які мають нерівномірне навантаження по торцях;

– удосконалено одновимірну осесиметричну модель статичного НДС клейових з’єднань циліндричних оболонок;

– уперше побудовано аналітичний розв’язок задачі про осесиметричний статичний НДС з’єднання внапуск пластини з круглим отвором і концентричної круглої накладки.

Практичне значення отриманих результатів:

– розвинуто модель двовимірного НДС клейових з’єднань внапуск на задачі з некласичними крайовими умовами які зустрічаються у з’єднанні силових елементів конструкції аерокосмічної техніки;

– розроблено моделі осесиметричного статичного НДС клейових з'єднань пластини з отвором і накладки, що може бути застосовано для аналізу міцності і розроблення процедур ремонту пошкоджень обшивки;

– створено моделі статичного НДС з’єднань циліндричних конструкцій, що широко застосовуються у аерокосмічній техніці (відсіки ракет, з’єднання шпангоутів з обшивкою, структурні елементи композитних ферм тощо).

Використання результатів роботи. Основні результати й рекомендації дисертаційної роботи впроваджено на ДП «Антонов» та в навчальному процесі кафедри технології виробництва літальних апаратів, кафедри проектування літаків і вертольотів і кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати, які становлять суть дисертаційної роботи, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методу побудови розв’язку, формулювання наукових висновків, скінчено-елементне моделювання виконані спільно з науковим керівником.

У роботах, що написані у співавторстві, авторові належить таке: [133] – побудова аналітичного розв’язку, написання програми у середовищі Maple для числового аналізу задачі; [50] – постановка задачі, побудова аналітичного розв’язку та створення програми з розв’язання задачі; [53] – створення програми у середовищі Maple на основі розв’язку, побудованого Дворецькой Д.В., і аналіз результатів розрахунків; [136] – постановка задачі, побудова розв’язку і створення програми у середовищі Maple; [55] – постановка задачі, побудова аналітичного розв’язку і створення програми з числових розрахунків; [52] – побудова аналітичного розв’язку і створення програми з числових розрахунків; [11] – постановка задачі про осесиметричний напружений стан з’єднання пластинки з круглим отвором і концентричною накладкою, побудова аналітичного розв’язку і створення програми з числових розрахунків; [121] – побудова аналітичного розв’язку, написання програми у середовищі Maple для числового аналізу задачі; [51] – постановка задачі, побудова розв’язку і створення програми у середовищі Maple; [132] – постановка задачі, побудова аналітичного розв’язку та створення програми з розв’язання задачі; [54] – постановка задачі, побудова аналітичного розв’язку, створення програми з числових розрахунків.

Апробація результатів роботи. Основні результати досліджень доповідалися та дістали схвалення на таких міжнародних конференціях і наукових семінарах: Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2018), VI Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2019), International Scientific and Technical Conference «Integrated computer technologies in mechanical engineering» (Kharkiv, 2019), VII Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2020), II Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2020), International Scientific and Technical Conference «Integrated computer technologies in mechanical engineering» (Kharkiv, 2020).

У повному обсязі дисертація доповідалася на семінарі кафедри «Вищої математики та системного аналізу» Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», а також на засіданні науково-технічної проблемної ради «Математичне моделювання. Механіка деформівного твердого тіла. Динаміка та міцність машин» Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 13 наукових працях серед яких 6 індексуються у базі SCOPUS, 6 статей [133, 50, 53, 120, 119, 136] у наукових виданнях України та іноземних держав та 7 публікацій у матеріалах міжнародних конференцій [55, 52, 11, 121, 51, 132, 54].

Структура і обсяг дисертації Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел зі 141 найменування на 16 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 139 сторінок, основний текст – 117 сторінок, 46 рисунків та два додатки на 4 сторінках.

РОЗДІЛ 1
СТАН ПРОБЛЕМИ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ ВНАПУСК

1.1 Класифікація моделей і методів розрахунку напруженого стану клейових з'єднань

Клейові з'єднання внапуск відносяться до класу багатошарових конструкцій, які складаються з двох або більше несних (жорстких) шарів, розділених м'якими шарами, що їх сполучають. Несні шари з матеріалів високої міцності і жорсткості призначені для сприйняття механічного навантаження, сполучні шари служать для передачі зусиль з одного шару на інший або перерозподілу зусиль між несними шарами [22, 44, 108].

Теорія шаруватих елементів конструкцій інтенсивно почала розвиватися наприкінці 40-х років XX століття. Істотний внесок в її розвиток внесли А. Я. Александров, С. О. Амбарцумян, В. В. Болотін, Л. Е. Брюккер, В. В. Васильєв, В. Є. Гайдачук, К. З. Галімов, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, А. В. Дятлов, В. І. Корольов, Я. С. Карпов, Л. М. Куршин, В. Ф. Кутьінов, С. Г. Лехницький, Х. М. Муштарі, Ю. Н. Новічков, А. П. Прусаков, О. Р. Ржаніцин, Г. А. Тетера, С. П. Тимошенко, Н. Г. Ченцов, А. П. Чулков, О. М. Шупіков, R. D. Adams, E. Carrera, L. M. Habip, H. Matsunaga, J. Mayers, E. J. Plantemma, J. N. Reddy, E. Reissner, J. Solvey, K. P. Soldatos, M. Stein, C. T. Wang і багато інших.

На практиці найчастіше використовуються тришарові конструкції з двома несними шарами і м'яким заповнювачем між ними. Найбільш точним методом визначення напруженого стану конструкції, безумовно, є розв’язання відповідної нелінійної тривимірної задачі теорії пружності. Однак розв’язання таких задач пов'язано зі значними труднощами, тому замість тривимірних моделей для опису оболонок, пластин і балок розглядають моделі меншої розмірності. Згідно І.І. Воровичу [125], методи зведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних розпадаються на три групи – метод гіпотез, аналітичний метод і асимптотичний метод.

Метод гіпотез характеризується фізичною наочністю і полягає в тому, що постулюються деякі гіпотези про деформування, закони розподілу напружень по товщині і т.п., які дозволяють спростити задачу, зменшивши її розмірність без істотної втрати точності.

Можна виділити такі два основних типи моделей НДС

– несні шари набагато тонші ніж заповнювач,
– з'єднувальний шар набагато тонший ніж несні шари.

Модель першого типу використовується для аналізу напруженого стану оболонок і панелей з легким заповнювачем (сандвічеві конструкції), таким як стільники, пінопласт і т.п. При цьому для опису несних шарів, зважаючи на їх відносно малу товщину, використовують, як правило, безмоментну теорію оболонок.

Модель другого типу використовується для опису багатошарових композитів, будівельних конструкцій (підкріплених залізобетонних балок), і в т.ч. клейових з'єднань. В цьому випадку несні шари розглядаються як балки або як моментні оболонки і панелі.

Для опису з'єднувального шару в клейових з'єднаннях вводиться одна з таких гіпотез:

– з'єднувальний шар – абсолютно жорсткий в трансверсальному напрямку і пружно податливий при поздовжньому зсуві, дотичні напруження в шарі – постійні за товщиною і пропорційні різниці поздовжніх переміщень внутрішніх сторін несних шарів,
– з'єднувальний шар – абсолютно податливий на поздовжній зсув і пружно податливий в трансверсальному напрямку, нормальні напруження в шарі – постійні за товщиною і пропорційні різниці поперечних переміщень несних шарів,

– з'єднувальний шар – пружно податливий на зсув і розтяг-стиск в трансверсальному напрямку, напруження в шарі обчислюються описаним вище способом,
– дотичні або нормальні напруження розподілені за товщиною шва за деяким законом (лінійний, параболічний і т.п.).

Для опису напруженого стану з'єднувального шару тришарових панелей вводяться складніші моделі, що враховують вплив обтиску несних шарів на дотичні напруження, постулюються різні закони розподілу напружень по товщині і т.д.

За кількістю просторових вимірів статичні моделі з'єднань можна поділити на

– одновимірні;
– двовимірні за товщиною;
– двовимірні за шириною;
– тривимірні.

На сьогоднішній час, в тривимірній постановці, розглянуті задачі майже неможливо розв’язати аналітичними методами, тому тривимірні моделі з'єднань використовуються тільки для побудови розв’язків числовими методами, наприклад методом скінченних елементів (МСЕ). У переважній більшості робіт, присвячених теорії клейових з'єднань, розглядаються одновимірні моделі з'єднань, що пояснюється відносною простотою розв’язання і можливістю параметричного аналізу результатів. Одновимірні моделі охоплюють дві групи задач: плоскі з'єднання і трубчасті з'єднання.

Крім того, математичні моделі НДС з’єднань можна класифікувати за ознакою впливу сил інерції на напружений стан як статичні та динамічні, а також за ознакою характеру математичних моделей як лінійні та нелінійні. У подальшому в даній роботі будуть розглядатися лише лінійні статичні моделі НДС з’єднань.

1.2 Одновимірні моделі

Першими роботами, що лежать в основі теорії клейових з'єднань, є стаття Фолькерсена, і робота Голанда і Рейсснера. Порівняльний аналіз цих моделей наведено в оглядах [23, 117, 97, 108].

Згідно з моделлю Фолькерсена, несні шари розглядаються як стрижні, що працюють тільки на розтяг-стиск по довжині з'єднання, а клей – працює тільки на зсув. Напруження в клеї і в несних шарах покладаються рівномірно розподіленими по товщині.

У більш загальній моделі Голанда і Рейсснера несні шари моделюються балками Бернуллі, а клейовий шар – основою Вінклера. Дотичні і нормальні напруження в клеї покладаються постійними по товщині клейового шару. На відміну від моделі Фолькерсена, модель Голанда і Рейсснера враховує вигин з'єднання, вплив вигину шарів на дотичні напруження та пружню взаємодію несних шарів у трансверсальному напрямку.

Зусилля, що діють в елементах з'єднання, показані на рис. 1.1.

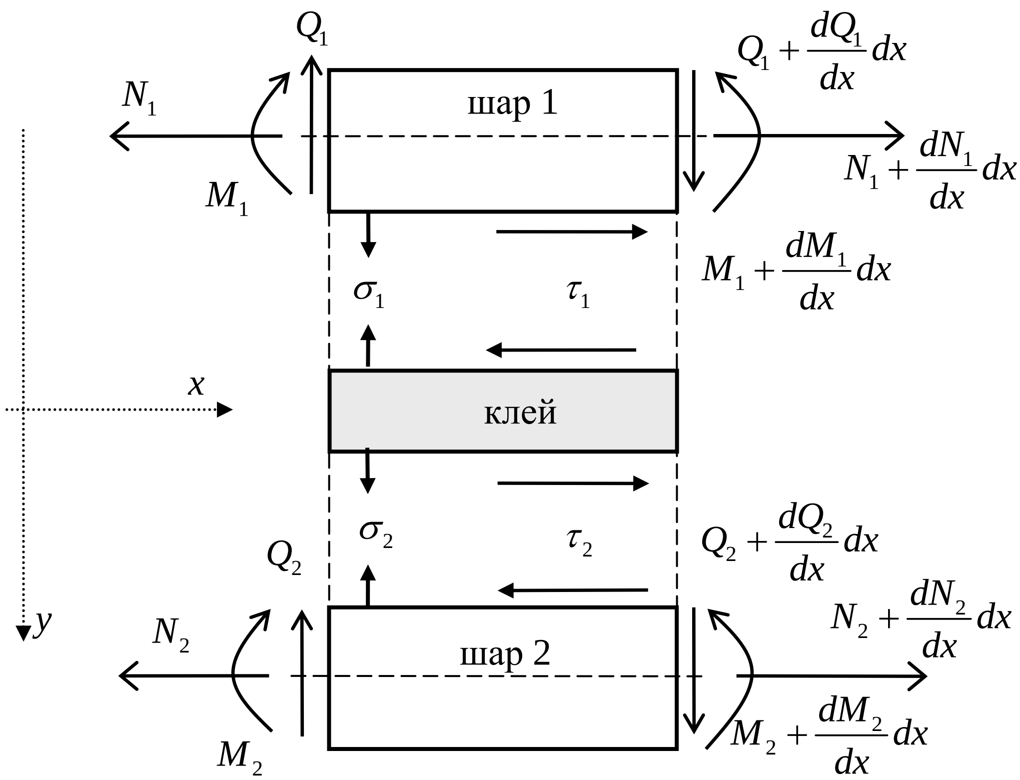

Рисунок 1.1. Рівновага елементів з'єднання

Рівняння рівноваги несних шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{dN_k}{dx} + (-1)^{k-1}\tau_k = 0; \quad \frac{dQ_k}{dx} + (-1)^{k-1}\sigma_k = 0; \\ &\frac{dM_k}{dx} + \frac{\delta_k}{2}\tau_k - Q_k = 0; \; k = 1, 2; \end{aligned} \tag{1.1}$$

де N_k, Q_k, M_k – відповідно поздовжні, поперечні зусилля і момент що вигинає в шарі k; τ – дотичні напруження в клейовому шарі ; σ – нормальні напруження в клейовому шарі.

Співвідношення теорії пружності для балок

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{N_k}{B_k}; \quad D_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = -M_k, \tag{1.2}$$

де u_k – повздовжні переміщення несних шарів; w_k – поперечні переміщення; B_k, D_k – жорсткості балки на розтяг-стиск і вигин, для однорідних шарів $B_k = E_k\delta_k$, $D_k = \delta_k^3 E_k / 12$, де E_k – модуль пружності відповідного шару, δ_k – товщина несного шару k.

У моделі з'єднання Голанда – Рейсснера напруження в клеї покладаються рівномірно розподіленими за товщиною і пропорційними різниці переміщень внутрішніх сторін шарів, що з'єднуються

$$\begin{aligned} &\tau_1 = \tau_2 = \tau = \frac{1}{P_c}\left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2}\frac{dw_1}{dx} - \frac{\delta_2}{2}\frac{dw_2}{dx}\right), \\ &\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = K\left(w_2 - w_1\right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

де P_c – піддатливість з’єднувального шару, яка приблизно дорівнює $P_c \approx \frac{\delta_0}{G_0}$; K – жорсткість з’єднувального шару на розтяг-стиск в трансверсальному напрямі, $K = \frac{E_0}{\delta_0\left(1-\mu_0^2\right)}$; δ_0, G_0, E_0 и μ_0 – відповідно товщина, модуль зсуву, модуль пружності і коефіцієнт Пуассона клейового шару.

Модель з’єднання Фолькерсена враховує тільки повздовжні зміщення з’єднаних стрижнів і описується системою рівнянь

$$\frac{dN_k}{dx} + \left(-1\right)^{k-1} \tau = 0; \tau = \frac{u_1 - u_2}{P_c};$$
$$\frac{du_k}{dx} = \frac{N_k}{B_k}; \quad k = 1, 2.$$

Незважаючи на свою простоту, підхід Фолькерсена виправданий для розрахунку напруженого стану клейових з'єднань елементів конструкції з високою згинальної жорсткістю, що мають підкріплення у вигляді ребер жорсткості, і т.п., а також для розрахунку симетричних, так званих двозрізних з’єднань, які складаються з двох симетричних накладок з обох сторін основної конструкції. Таке конструктивне рішення забезпечує мінімальні згинальні моменти у накладках, хоча і не може зовсім позбавити них.

Моделі Фолькерсена і Голанда – Рейсснера служать фундаментом для розвитку теорії з'єднань внапуск. Подальший розвиток моделей з'єднань направлено на уточнення описаного підходу. Можна виділити такі напрямки розвитку даних моделей, яким присвячена дисертаційна робота:

- навантажування з'єднання зсувом та іншими некласичними видами навантаження;
- побудова розв’язків для з’єднань циліндричної форми з урахуванням нерівномірності напруженого стану за окружною координатою;
- узагальнення моделей на радіальну симетрію і перехід до полярної системи координат.

1.2.1 Моделі напружено-деформованого стану клейового шару

З експериментів і досвіду експлуатації відомо, що в більшості випадків руйнування з'єднання відбувається шляхом руйнування клейового шару. Тому вивчення напруженого стану клею є першочерговою задачею для проектування з'єднань, випробувань на міцність, вироблення критеріїв руйнування клею і т.д.

У більшості моделей з'єднань для обчислення податливості з'єднувального шару вплив несних шарів не враховується. Більш точний підхід передбачає врахування зсувних деформацій несних шарів і їх податливості в трансверсальному напрямку в деякій зоні, прилеглій до клейового шару. Таке коригування податливостей не впливає на модель НДС і полягає лише в уточненні значень коефіцієнтів податливості з'єднувального шару.

У моделі Голанда і Рейсснера дотичні і нормальні напруження покладаються постійними по товщині клейового шару, а нормальні напруження в напрямку довжини з'єднання – рівними нулю. Найпростіше уточнення напруженого стану в клеї в тому, що дотичні напруження в клеї на краях клейового шару покладаються відмінними один від одного. У роботах [110, 16] в формулу (1.3) вводиться поправка на зсув, який обумовлений нахилом несного шару, тобто

$$\tau_k = \frac{1}{P_c}\left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2}\frac{dw_1}{dx} - \frac{\delta_2}{2}\frac{dw_2}{dx}\right) + G_0\frac{dw_k}{dx}. \tag{1.4}$$

У цьому випадку середні дотичні напруження в клейовому шарі дорівнюють

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}.$$

Оскільки дотичні напруження на краях клейового шару і несних шарів покладаються різними, то відповідним чином змінені рівняння (1.1).

Дотичні напруження в клеї, відповідно до теорії Голанда і Рейсснера і описаної її модифікацій, досягають максимуму на краях з'єднання, що часто фізично неможливо, оскільки зовнішній край з'єднувального шару може бути вільний. Щоб виключити дане протиріччя із законом парності дотичних напружень, в роботі [116] вперше до системи рівнянь (1.1), (1.2) додано диференціальне рівняння рівноваги клею

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}. \tag{1.5}$$

Крім того, запропоновано вважати нормальні напруження в клеї розподіленими лінійно по товщині шва, а дотичні напруження – постійними по товщині клею (рівними). Отримаємо співвідношення

$$\sigma(x,y) = \sigma_0(x) - y\frac{d\tau}{dx}; \;\; \sigma_0 = K(w_2 - w_1), \tag{1.6}$$

де $-\frac{\delta_0}{2} \le y \le \frac{\delta_0}{2}$; σ_0 – напруження посередині товщини клейового шва.

Нормальні напруження на межі клею і елементів конструкції, що склеюються, тобто при $y = \pm\frac{\delta_0}{2}$ складають

$$\sigma_k = \sigma_0(x) + (-1)^k \frac{\delta_0}{2}\frac{d\tau}{dx}.$$

Дещо інший підхід запропонований в роботі [107], де для моделювання напруженого стану клейового шару використовується трипараметрична модель пружної основи в інтерпретації Філоненка-Бородича (модель «пружнього дивану»). Тобто клейовий шар моделюється мембраною і пружними елементами між нею і несними шарами. Тобто замість одної основи Вінклера для моделювання клею використовується дві вінклеровскі основи, розділені мембраною. Переміщення мембрани позначається w_0. У цьому випадку напруження на краю клейового шару описуються формулами

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}\left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2}\varphi_1 - \frac{\delta_2}{2}\varphi_2\right) + G_0\frac{dw_0}{dx}, \tag{1.7}$$

$$\sigma_1 = k_1(w_1 - w_0); \;\; \sigma_2 = k_1(w_0 - w_2), \tag{1.8}$$

де φ_k – кут повороту розрізу несного шару, для балок Бернуллі $\varphi = \frac{dw_k}{dx}$; коефіцієнт жорсткості $k_1 = \frac{2E_0}{\delta_0(1-\mu_0^2)}$.

Помітимо, що формула (1.7) аналогічна формулі (1.3), якщо покласти $w_0 = 0,5(w_1 + w_2)$. Однак в цьому випадку w_0 зв'язано з переміщеннями w_1 і w_2 співвідношеннями (1.8).

В роботі [134] було запропоновано замість моделі пружної основи Вінклера в (1.8) використовувати двопараметричну модель пружної основи Пастернака. В цьому випадку нормальні напруження на краю клейового шару описуються співвідношеннями

$$\sigma_k = (-1)^k k_1 (w_0 - w_k) - (-1)^k k_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \right),$$

де $k_2 = \dfrac{E_0 \delta_0}{12(1+\mu_0)}$ – другий коефіцієнт ліжка.

Цю ж модель було застосовано у роботі [59] для дослідження напускних з'єднань на міцність.

Згідно з усіма описаними вище моделями напруженого стану клейового шару нормальні напруження в клеї – максимальні на кінцях з'єднання, а дотичні напруження досягають максимуму в околі кінців з'єднання, на відстані порядку товщини клейового шару (і дорівнюють нулю на кінцях з'єднання). При цьому нормальні напруження σ_1 і σ_2 в околі кінців з'єднання можуть відрізнятися навіть знаком, але при віддаленні від кінця з'єднання на величину порядку декількох товщин клейового шару, напруження σ_1 і σ_2 стають близькими і на графіках вже не відрізняються. Можна відзначити, що середнє арифметичне напружень σ_1 і σ_2 являє собою напруження σ моделі Голанда і Рейсснера (або її відповідної модифікацій).

Високі вимоги до визначення напруженого стану клею ставлять задачі випробувань на міцність з'єднань і задачі проектування. Оскільки в більшості випадків руйнування з'єднання відбувається саме по клею, то для визначення характеристик міцності властивостей клею і проектування з'єднань необхідно знати напружений стан в клеї з максимально високою точністю. З іншого боку, підвищення порядку точності моделі ускладнює її і обчислення, і параметричний аналіз. Крім того, описані вище моделі засновано на деяких гіпотезах про закон розподілу дотичних або нормальних напружень в клейовому шві, які мають потребу в обґрунтуванні і перевірці. Для даної мети використовуються числові методи, зокрема метод скінченних елементів. Розрахунки показують, що на більшій частині з'єднання аналітичні методи дають хороше наближення. Проблемними зонами є краї клейового шва. Однак в цій зоні напружений стан клею в значній мірі залежить від форми залишків клею, що видавилися [59].

1.2.2 Моделі напруженого стану несних шарів

У роботах [26, 13, 74, 81] запропоновано враховувати товщину клейового шару при складанні моментних рівнянь рівноваги несних шарів. При цьому вважається, що напруження в клеї зосереджені в серединній площині клею. Третє рівняння системи (1.1) набуває вигляду

$$\frac{\partial M_k}{\partial x} + \frac{\delta_k + \delta_0}{2}\tau - Q_k = 0;\; k = 1, 2.$$

Іншими очевидними уточненнями теорії Голанда–Рейсснера є застосування більш точної моделі балок для моделювання несних шарів, а саме балки Тимошенка. Даний підхід виправданий, в першу чергу, для з'єднань виробів з композиційних матеріалів, що мають, в силу шаруватої структури, малий модуль зсуву.

У цьому випадку залежності (1.2) набувають наступний вигляд:

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{N_k}{B_k};\;\; D_k\frac{d\varphi_k}{dx} = M_k;\;\; \frac{dw_k}{dx} + \varphi_k = \frac{Q_k}{H_k},$$

де φ_k – кут повороту розрізу k-го несного шару; H_k – жорсткість на зсув, для однорідних шарів $H_k = \frac{5}{6}G_k\delta_k$.

Модель балки Тимошенка для моделювання несних шарів використано у вже вище згаданих роботах [116, 22, 107, 74, 102].

У ряді робіт, наприклад, [114, 113] для опису напружено-деформованого стану несних шарів і клейового шару автори розв’язують двовимірну по товщині задачу теорії пружності, інтегруючи диференціальні рівняння рівноваги двовимірної теорії пружності в припущенні про лінійність зміни по товщині напружень σ_x в шарах (гіпотеза плоских перерізів). При цьому залежність σ_x від товщини (в т.ч. і для клейового шару) визначається за допомогою класичної теорії балок Бернуллі. У цьому випадку розподіл дотичних напружень по товщині клейового шару і несних шарів визначається по квадратичних залежностях, які є узагальненням формули Журавського.

У роботах С.Ю. Короткової [129, 130, 131] напружений стан несних шарів вивчається за допомогою диференційно-різницевого методу (метод прямих) інтегрування двовимірних рівнянь рівноваги суцільного середовища. Слідуючи цьому методу, несні шари розбиваються системою прямих, переміщення уздовж яких покладаються неперервними функціями, а похідні по поперечній координаті замінюються відповідними диференційно-різницевими виразами. Задача зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно поздовжніх і поперечних переміщень точок на даних прямих.

1.2.3 Видавлені надлишки клею по краях з'єднання

При склеюванні частина надлишків клею може видавлюватися за межі з'єднання, з яких можна сформувати горбок або косу кромку клею за торцем деталей, що склеюються (або однієї з них). Напружений стан у кінців з'єднань, тобто в зонах, де напруження в клеї досягають максимуму, змінюється. Обумовлено це двома причинами: з одного боку, частину навантаження з торця деталі що склеюється сприймають видавлені надлишки клею, а з іншого боку, оскільки кромка клею винесена за межі деталей, що з'єднуються, не виконується умова про рівність нулю дотичних напружень на кінцях з'єднання. Крім цього, дане конструктивне рішення полегшує візуальний контроль цілісності з'єднання, оскільки в разі руйнування клею (що відбувається, в першу чергу, у кінці з'єднання) тріщина в клеї виходить на видиму поверхню клейового куточка і може бути легко виявлена при огляді. Деякі схеми таких кромок показано на рис 1.2. Більш повний огляд конструктивних рішень дано в оглядових роботах [42, 10].

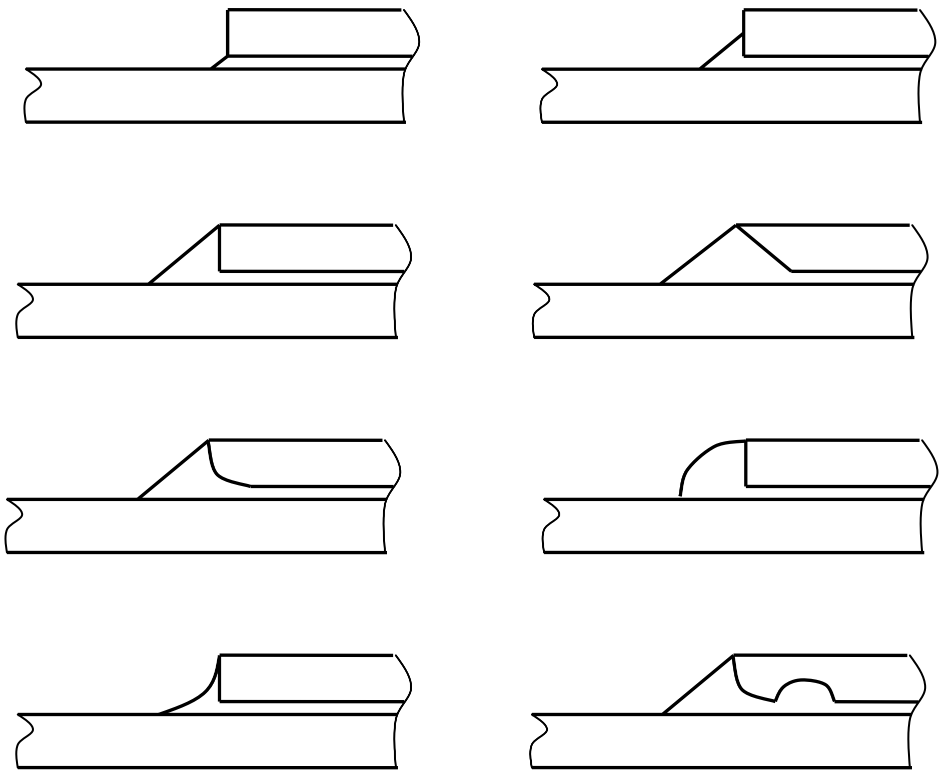

Рисунок 1.2. Деякі схеми оформлення кромок з'єднання

Дослідженню впливу на напружений стан з'єднання даної структури присвячено значну кількість робіт. Очевидно, що основну кількість робіт присвячено числовим методам, оскільки немає надійних і зручних для розрахунків аналітичних моделей опису напруженого стану в трикутній або близькою до неї за формою області [82, 41, 42, 61, 75, 77]. Дослідження показують, що наявність косої кромки видавленого клею знижує максимальні напруження в клеї, що позитивно відображається на міцності з'єднання.

Даній тематиці присвячено і експериментальні дослідження [98, 99, 115].

У вже згадуваній роботі [33] розглядається технологічне рішення, згідно з яким видавлений клей утворює фаску і моделюється стрижнем, розташованим під кутом 45^0 до осі з'єднання. В роботі показано, що збільшення розміру клейової смужки за торцем з'єднання зменшує максимальні напруження в клеї.

Слід зауважити, що конструктивні рішення, наведені на рис. 1.2., мають такі недоліки: труднощі забезпечення адгезії видавленого клею до торця деталі, що склеюється, зважаючи на малий притиск клею, неоднорідність параметрів за шириною з'єднання, можливість порушення цілісності клею при механообробці торця і т.д.

1.2.4 Багатозрізні з'єднання внапуск

Одним із способів підвищення несної здатності з'єднань внапуск є застосування багатозрізних з'єднань [127, 104]. В цьому випадку в модель входить три (або більше) несні шарів, що з'єднуються двома (або більше) клейовими шарами. Ще одною перевагою з'єднань цього типу є те, що поперечні і кутові переміщення середнього шару, обумовлені вигином, в разі симетричного з'єднання можна вважати рівними нулю. Це значно знижує нормальні напруження в клеї і дозволяє використовувати для розрахунку більш прості моделі НДС з'єднань, по крайній мірі, для центрального несного шару. Такі задачі розв’язані, наприклад, у роботах [100, 3, 37, 67, 20, 35].

Вплив непроклею або інших порушень суцільності одного з клейових шарів на напружений стан двозрізного з'єднання розглянуто в роботі [84].

Експериментальні дослідження напруженого стану з'єднань даного типу наведено в роботі [82, 109],

Роботу [93] присвячено дослідженню впливу на напружений стан з'єднання різниці в довжинах накладок. Розрахунки проведено за допомогою методу скінченних елементів, і також проведено порівняння з результатами експерименту.

В роботі [118] розглянуто з'єднання двох стрижнів внапуск за допомогою накладок з двох сторін і досліджено вплив товщини накладок на напружений стан з'єднання. Для цього використано модель з'єднання Голанда – Рейсснера, а отримана система диференціальних рівнянь розв’язується числовим методом.

Узагальнення моделі Голанда-Рейсснера на довільне число шарів зроблено в роботах [60, 118].

1.2.5 Трубчасті з'єднання

Дослідження напруженого стану клейових з'єднань циліндричних труб внапуск є окремим класом задач, якому присвячено великий обсяг літератури. Цей інтерес обумовлений, мабуть, двома причинами: з одного боку, з'єднання такого типу є досить поширеними в техніці, а з іншого боку, осьова симетрія з'єднання дозволяє створювати одновимірні моделі НДС з'єднань такого типу.

Трубчасті конструкції і їх з’єднання мають велике поширення у аерокосмічній техніці. Приклади таких з’єднань наведено на рис.1.3.– 1.5.

Рисунок 1.3. Клейове з'єднання композитних труб з алюмінієвими закінцівками

Рисунок 1.4. Закінцівкі (втулки) всередині композитної труби та з двох боків стрижня

Рисунок 1.5. Композитна ферма (клейове з'єднання композита з алюмінієм)

Одновимірні моделі можуть з достатньою точністю описати напружений стан такого з'єднання в тих випадках, якщо воно навантажено або обертовим моментом, або осьовою силою.

Одна з перших робіт, присвячених теоретичному дослідженню з'єднань такого типу, належить Фолькерсену, Любкіну і Рейсснеру [64], роботи яких є класичними за даним типом задач.

Подальший розвиток теорії трубчастих з’єднань, як і плоских з'єднань, направлено на більшу кількість шарів, що з'єднуються [63], більш точні моделі напруженого стану клейового шару (лінійний розподіл нормальних напружень за товщиною) [70, 69]. В роботі [79] розв’язано задачу оптимізації величини фасок на трубах, що склеюються, які знижують максимальні напруження на кінцях з'єднання.

Задачу визначення в аналітичній формі НДС з'єднань циліндричних труб в загальній постановці ще не розв’язано. Для опису в аналітичній формі НДС з'єднань коаксіальних труб використовують найчастіше осесиметричні моделі. Розглядають з'єднання, що передають крутний момент [2] або поздовжнє навантаження [28]. Математичні моделі напруженого стану з'єднань, що передають поздовжнє навантаження, можна розділити на два типи. У першому випадку труби, що з'єднуються, розглядаються як тонкостінні циліндричні оболонки. При цьому розподіл напружень за товщиною шарів задається апріорно, і в несних шарах розподіл напружень покладається лінійним, а в клейовому шарі – рівномірним за товщиною шару [85, 64]. Моделі другого типу розглядають з'єднання товстостінних труб, місцевим вигином яких можна знехтувати. Щоб отримати можливість побудувати аналітичний розв’язок, в роботах [79, 70] вважається, що нормальні напруження в осьовому напрямку в трубах, що з'єднуються, – постійні за товщиною, а нормальні напруження в радіальному напрямку дорівнюють нулю.

Безумовно, для дослідження НДС клейових з'єднань коаксіальних труб також застосовується метод скінченних елементів (МСЕ), як наприклад, в роботах [28, 30, 19, 31, 72, 125, 123, 122, 124] і експерименти [12, 119, 121]. Даний підхід дозволяє досліджувати широкий спектр задач, проте ускладнює параметричні дослідження, розв’язання задач для складних конструкцій, розв’язання задач проектування та оптимізації, і т.д. Порівняння результатів числових розрахунків, виконаних за допомогою МСЕ, з аналітичними моделями показало, що для тонкостінних оболонок аналітична модель [63, 84] дає хороші результати.

1.3 Двовимірні за шириною моделі з'єднань

У ряді випадків при розрахунку напруженого стану необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Це має місце для з’єднань великої протяжності, а також для з’єднань, які мають двовісне навантаження. Дану задачу описано в огляді [23]. Треба відзначити, що аналітичний розв’язок цієї задачі в загальній постановці досі не відомий.

На рис. 1.6. схематично зображено деформації, що виникають під впливом навантаження, і графіки відповідних поперечних зусиль в несних шарах і дотичних напружень в клейовому шарі. У несних шарах виникає тривимірний напружено-деформований стан, однак, якщо вважати розподіл напружень по товщині несних шарів рівномірним, то напружений стан зовнішніх шарів можна вважати двовимірним.

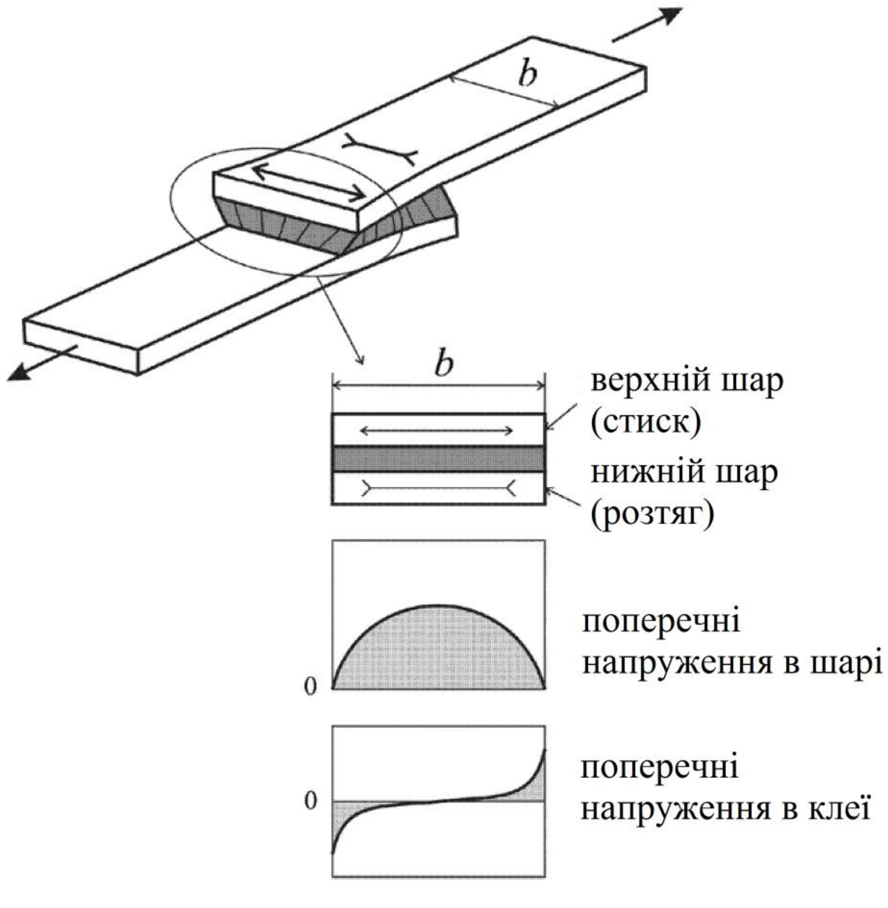

Рисунок 1.6. Схема деформацій з’єднання при повздовжньому розтягуванні

Для розв’язання поставленої задачі був запропонований ряд наближених підходів, в основі яких лежить умова рівномірності прикладеного навантаження на всі боки з'єднання. Найпростішою є квазідвовимірна методика [126, 127], яка полягає в послідовному розв'язанні одновимірних рівнянь рівноваги в поздовжньому і поперечному напрямку. В основі даної методики лежить припущення про рівність нулю коефіцієнтів Пуассона несних шарів в поперечному напрямку, що обмежує область її застосування. Авторами роботи [1] було запропоновано вважати дотичні напруження в несних шарах, що виникають при деформації, рівними нулю. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати похідними від дотичних напружень в рівняннях рівноваги і звести задачу до розв’язання системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі. Фізичної інтерпретацією цього є рівність нулю модулів зсуву матеріалів несних шарів. Загальний розв’язок задачі в роботі [1] не отримано. В роботі [65] отримано розв’язок зазначеної системи диференціальних рівнянь за допомогою напіваналітичного методу, у вигляді подвійних рядів Фур'є. Необхідно відзначити, що методика розкладання в подвійний ряд Фур'є досить громіздка, і вводиться в перерахованих вище роботах без строгого математичного обґрунтування. В роботі [57] наведено розв’язок даної задачі, отриманий за допомогою класичного методу відокремлення змінних, а також доведено збіжність методу.

Дослідження впливу поперечних деформацій несних шарів на напружений стан з'єднання проводилося також числовими методами багатьма дослідниками, наприклад, у роботах [9, 36, 67, 15, 68, 76, 78]. З численних методів можна виділити два основних напрямки: тривимірний МСЕ і числове інтегрування двовимірних рівнянь рівноваги, яке реалізується або за допомогою методу скінченних різниць, або багатоточечного методу Рунге-Кутта.

До цієї проблеми відносяться задачі про напружений стан клейового з'єднання ремонтної накладки з обшивкою літака [29, 45]. В даному випадку актуальні напруження викликані різницею температури формування та експлуатації, оскільки зовнішня обшивка авіаційної техніки в ході експлуатації піддається температурним перепадом в сотні градусів Цельсія.

1.4 Числові методи дослідження напруженого стану з'єднань

Оскільки з’єднання внапуск є невід'ємними конструктивними елементами авіаційних, автомобільних, корабельних та інших конструкцій, значну увагу інженерів і вчених присвячено дослідженню напруженого стану з'єднань за допомогою різних числових методів і моделей. Безумовно, основною методикою дослідження є метод скінченних елементів (МСЕ). При цьому використовуються двовимірні та тривимірні моделі, лінійні і нелінійні, динамічні і статичні і т.п. Цьому сприяє універсальність методу, а також наявність досконалих програмних середовищ, доступність ЕОМ, що дозволяють досліджувати напружений стан широкого класу об'єктів.

Великий інтерес у дослідників викликає напружений стан клею у кінців з'єднання, наприклад роботи [32, 8, 14, 36, 40, 43, 61, 86, 87, 101, 83, 79, 89, 128], а також безліч інших робіт.

Вплив поперечних деформацій, обумовлених коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються, досліджено в роботах [46, 73].

Напружений стан ремонтних накладок, а також з'єднань обшивки з силовими елементами конструкції досліджується, зокрема, в роботах [71, 6, 92].

Механізми руйнування з'єднань досліджуються, наприклад, в роботах [7, 38].

Спеціальні типи скінченних елементів, розроблені для дослідження клейових з'єднань внапуск, запропоновано в роботах [7, 21, 94, 95].

Роботи [25, 106] присвячено дослідженню напруженого стану з'єднань з отворами наскрізь під заклепки.

1.5 Формування мети і завдань дослідження

Огляд і аналіз літературі дозволяє сформулювати мету дослідження, якою є побудова нових моделей статичного НДС клейових з'єднань внапуск, які дозволяють отримати аналітичні розв’язки задач, які досі не мали розв’язку.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– провести аналіз наявних моделей статичного НДС клейових з’єднань внапуск;

– розвинути двовимірні моделі статичного НДС клейових з’єднань прямокутних пластин на розв’язання задач з новими крайовими умовами;

– вдосконалити моделі статичного НДС клейових з’єднань внапуск для розв’язання нових задач, таких як з’єднання елементів конструкції циліндричної форми;

– побудувати нові моделі осесиметричного статичного НДС клейових з’єднань пластини з круглим отвором й концентричною накладкою;

– побудувати аналітичні розв’язки поставлених задач;

– провести верифікацію отриманих розв’язків шляхом порівняння з результатами скінченно-елементного моделювання, визначити межі застосування створених моделей.

РОЗДІЛ 2
РОЗВИТОК ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК

У ряді випадків при розрахунку напруженого стану з'єднань необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються, або нерівномірністю прикладення навантаження до з'єднання. Приклади таких конструкцій наведено, наприклад, в роботах [48, 17]. Побудова аналітичного розв’язку задачі про двовимірний напружений стан з'єднання в загальній постановці є надзвичайно складною проблемою, оскільки навіть для одного шару розв’язання плоскої задачі теорії пружності має вельми громіздкий вигляд [103]. В з в'язку з цім для розв’язання поставлених задач було запропоновано два підходи, що дозволяють отримати аналітичний розв'язок задач. 1) Для побудови розв’язку задачі про вплив поперечних деформацій, обумовлених коефіцієнтами Пуассона на напружений стан з'єднання, дотичні напруження і похідні від них покладаються такими, що дорівнюють нулю. Наслідком цього є те, що прикладене навантаження повинно бути рівномірно розподіленим по сторонам з'єднання. Фізичної інтерпретацією такої гіпотези є нульова зсувна жорсткість несних шарів. 2) Для розв’язання задачі про напружений стан з'єднання при нерівномірно прикладеному навантаженні (наприклад, прикладеному локально до склеєної пластині великої ширини) переміщення несних шарів в поперечному напрямку покладаються такими, що дорівнюють нулю, і враховуються тільки дотичні напруження в несних шарах. Фізичною інтерпретацією такої гіпотези є висока жорсткість несних шарів в напрямку, поперечному до прикладеного до шарів поздовжнього навантаження.

2.1 Напускне з’єднання двох прямокутних пластин. Некласичні крайові умови

Розглянемо симетричне клейове з'єднання двох прямокутних пластин, що мають розміри $a \times b$ (рис. 2.1). Щоб зменшити вплив вигину на напруження в несних шарах в площині з'єднання, вважаємо, що, $a > b$. Поздовжнє навантаження прикладено до сторони $x = a$ першої пластини (першого несного шару). Друга (другий несний шар) – жорстко закріплена уздовж бічної сторони $y = 0$.

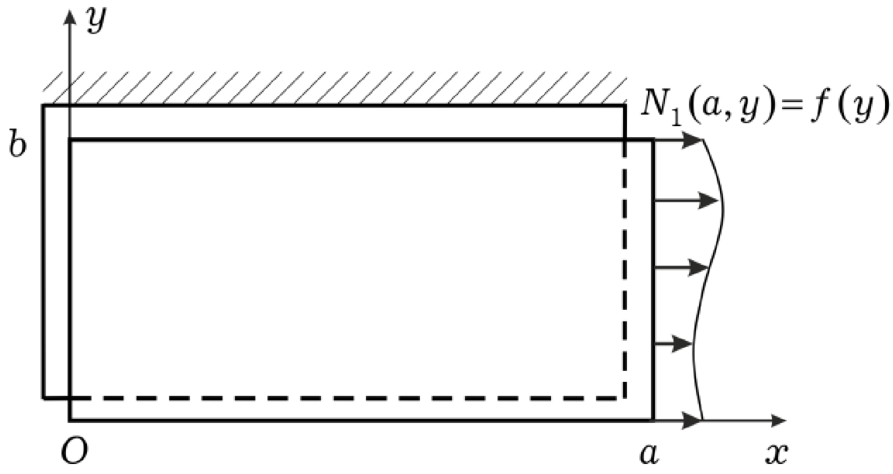

Рисунок 2.1. Схема з'єднання

Розв’язок задачі базується на наступних гіпотезах:

– напруження рівномірно розподілені по товщині шарів;

– клейовий прошарок працює тільки на зсув;

– вигин – відсутній;

– поперечні переміщення – відсутні, тобто несні шари абсолютно жорсткі в напрямку координатної осі.

Рівняння рівноваги елементів несних шарів мають вигляд [57]

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \; -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

де, N_m, q_m – нормальні (в поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі m, $m = 1,2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку.

Напруження в клейовому прошарку вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів (модель Фолькерсена [105, 23])

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}\left(U_2 - U_1\right), \tag{2.2}$$

де G_0 – модуль зсуву клею; δ_0 – товщина клейового прошарку; $U_m\left(x, y\right)$ – повздовжні переміщення шару m.

Зусилля в пластинах за умови рівності нулю поперечних переміщень обчислюємо так:

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x},\ q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y},\ m = 1{,}2, \tag{2.3}$$

де δ_m, E_m и G_m – відповідно товщина, модуль пружності та модуль зсуву шару m.

Таким чином, рівняння рівноваги (2.1) можна звести до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) - U_1 + U_2 = 0; \\ \alpha_2\left(\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $\alpha_m = E_m \delta_m \dfrac{\delta_0}{G_0}$, $\mu_m = \dfrac{G_m}{E_m}$.

Крайові умови мають вигляд

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,\ U_2\left(x, b\right) = 0, \tag{2.5}$$

$$N_1\left(a, y\right) = E_1 \delta_1 \left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=a} = f\left(y\right), \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=a} = 0. \tag{2.7}$$

Умови (2.5) існують на бічних сторонах пластин при жорсткому закладенні або коли дотичні напруження дорівнюють нулю, а умови (2.6) і (2.7)

– на торцях пластин, коли задано зусилля на торці першого шару (2.6) і вільні від навантаження сторони (2.7).

З першого рівняння системи (2.4) випливає

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \tag{2.8}$$

Підставивши (2.8) у друге рівняння системи (2.4), отримаємо

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \tag{2.9}$$

де $\beta_1 = \alpha_1\alpha_2$, $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2)\alpha_1\alpha_2$, $\beta_3 = \mu_1\mu_2\alpha_1\alpha_2$, $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_5 = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$.

В роботі [56] рівняння (2.9) розв’язували за допомогою методу відокремлення змінних за умови $\mu_1 = \mu_2$ та рівності нулю дотичних напружень на бічних сторонах пластин. Воно має вигляд $U_m = W_m(x) + V_m(x, y)$, де $W_m(x)$ – класичний одновимірний розв’язок Фолькерсена [105, 23], а $V_m(x, y)$ – функціональний ряд, що складається з частинних розв’язків (2.9), які можна записати у вигляді лінійних комбінацій функцій вигляду $\mathrm{e}^{\pm\lambda x}\sin ky$ або $\mathrm{e}^{\pm\lambda x}\cos ky$.

З умови рівності нулю поздовжніх переміщень уздовж однієї з бічних сторін однієї з пластин (2.5) випливає, що $W_2(x) = 0$. Із системи (2.4) маємо, що і $W_1(x) = 0$. Частинні розв’язки рівняння (2.9) шукаємо також у вигляді $\mathrm{e}^{\pm\lambda x}\sin ky$ (або $\mathrm{e}^{\pm\lambda x}\cos ky$). Підставивши цей вираз в (2.9), отримаємо алгебраїчне рівняння, яке пов'язує λ і k

$$\beta_3 k^4 + \left(\beta_5 - \beta_2\lambda^2\right)k^2 + \beta_1\lambda^4 - \beta_4\lambda^2 = 0. \tag{2.10}$$

З нього випливає, що кожному значенню $\pm\lambda$ відповідають чотири значення k, які можна записати у формі $\pm k_1(\lambda)$ і $\pm k_2(\lambda)$. Отже, частинний розв’язок (2.9), що відповідає, наприклад, додатному λ, має вигляд

$$U_1^* = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y\right),$$

де C_m, S_m – довільні сталі.

Зі співвідношення (2.8) знаходимо

$$U_2^* = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(S_1\gamma_1 \sin k_1 y + C_1\gamma_1 \cos k_1 y + S_2\gamma_2 \sin k_2 y + C_2\gamma_2 \cos k_2 y\right),$$

де $\gamma_m = 1 - \alpha_1\left(\lambda^2 - \mu_1 k_m^2(\lambda)\right)$, $m = 1.2$.

Частинні розв’язки повинні задовольняти однорідним крайовим умовам (2.5). З умови рівності нулю дотичних напружень в обох пластинах на сторонах $y = 0$ випливає, що $S_1 = S_2 = 0$. Частинні розв’язки справедливі і для від’ємних значень λ. Тому можемо записати

$$U_m^* = X^{(m)}(x) Y^{(m)}(y),$$

де

$$X^{(m)}(x) = \cosh \lambda x + C \sinh \lambda x,$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y,\ Y^{(2)}(y) = C_1\gamma_1 \cos k_1 y + C_2\gamma_2 \cos k_2 y,$$

де C, C_1, C_2 – довільні сталі.

Покладемо, що крайові умови на сторонах $x = 0$ виконуються точно. Тоді $C = 0$. Крім того, вважаємо, що на сторонах $y = b$ вони також виконуються точно. Таким чином,

$$\left.\frac{dY^{(2)}}{dy}\right|_{y=b} = 0,\ \ Y^{(2)}(b) = 0.$$

Ці умови призводять до однорідної системи лінійних рівнянь

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 0, \tag{2.11}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k_1 \sin k_1 b & k_2 \sin k_2 b \\ \gamma_1 \cos k_1 b & \gamma_2 \cos k_2 b \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Система (2.11) має нетривіальний розв’язок, якщо

$$\det(\mathbf{A}) = 0. \tag{2.12}$$

Рівняння (2.12) містить нескінченну безліч коренів λ_n. Позначимо $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$, $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$. Із системи (2.11) знаходимо коефіцієнти $C_{1,n}$ і, $C_{2,n}$, що відповідають числам λ_n. Їх, а також функції $Y_n^{(m)}$ визначимо з точністю до довільного множника. Для полегшення аналізу збіжності отриманого розв’язку введемо умову нормування

$$\int_0^b \left[Y_n^{(1)}\right]^2 dx + \int_0^b \left[Y_n^{(2)}\right]^2 dx = 1. \tag{2.13}$$

Таким чином,

$$U_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \tag{2.14}$$

де B_n – коефіцієнти, які визначаються з крайових умов на сторонах $x = a$ обох пластин; $\lambda_n \sinh \lambda_n a$ – нормуючий множник; $Y_n^{(m)}$ – нормовані функції, в яких коефіцієнти $C_{1,n}$ і $C_{2,n}$ задовольняють рівнянням (2.11) і (2.13).

З формул (2.3) маємо

$$N_m = E_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \tag{2.15}$$

$$q_m = G_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \cosh \lambda_n a} \cdot Z_n^{(m)}, \quad Z_n^{(m)} = \frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Крайові умови на сторонах $x = a$ такі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = \frac{f(y)}{E_1 \delta_1}, \; \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = 0.$$

Системи функцій $Y_n^{(1)}$ і $Y_n^{(2)}$ на відрізку $y \in [0; b]$ не є ортогональними. Для пошуку невідомих коефіцієнтів B_n використовуємо метод найменших квадратів, тобто мінімізуємо середньоквадратичне відхилення зусиль (2.15) на сторонах $x=a$ від заданих крайових умов (2.6) і (2.7). Додавання обмежимо деяким числом доданків N

$$J=\int_0^b\left[\left(\sum_{n=1}^N B_nY_n^{(1)}\left(y\right)-\frac{f\left(y\right)}{E_1\delta_1}\right)^2+\left(\sum_{n=1}^N B_nY_n^{(2)}\right)^2\right]dy\to\min .$$

З умов екстремуму $\dfrac{\partial J}{\partial B_n}$ прийдемо до системи лінійних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N B_n\int_0^b\left(Y_n^{(1)}Y_j^{(1)}+Y_n^{(2)}Y_j^{(2)}\right)dy=\int_0^b\frac{f\left(y\right)}{E_1\delta_1}Y_n^{(1)}dy,\quad j=1,..,N. \qquad (2.16)$$

Після нормування (2.13) діагональні коефіцієнти матриці системи (2.11) дорівнюють одиниці, а позадіагональні – зменшуються при віддаленні від головної діагоналі. Доведено, що дані коефіцієнти системи прямують до нуля при необмеженому зростанні одного з індексів.

Наведемо модельну задачу. Розглянемо клейове з'єднання двох пластин з такими параметрами: $a=50\,мм$, $b=30\,мм$, $\delta_1=2\,мм$, $\delta_2=3\,мм$, $E_1=E_2=70\,ГПа$, $G_1=G_2=25\,ГПа$. Параметри клейового шару: $\delta_0=0{,}3\,мм$, $G_0=0{,}5\,ГПа$. Навантаження прикладене рівномірно за шириною з’єднання $f\left(y\right)=P=\text{const}$.

Нормовані власні функції $Y_n^{(1)}\left(y\right)$ і $Y_n^{(2)}\left(y\right)$ мають вигляд, показаний на рис. 2.2. і рис. 2.3.

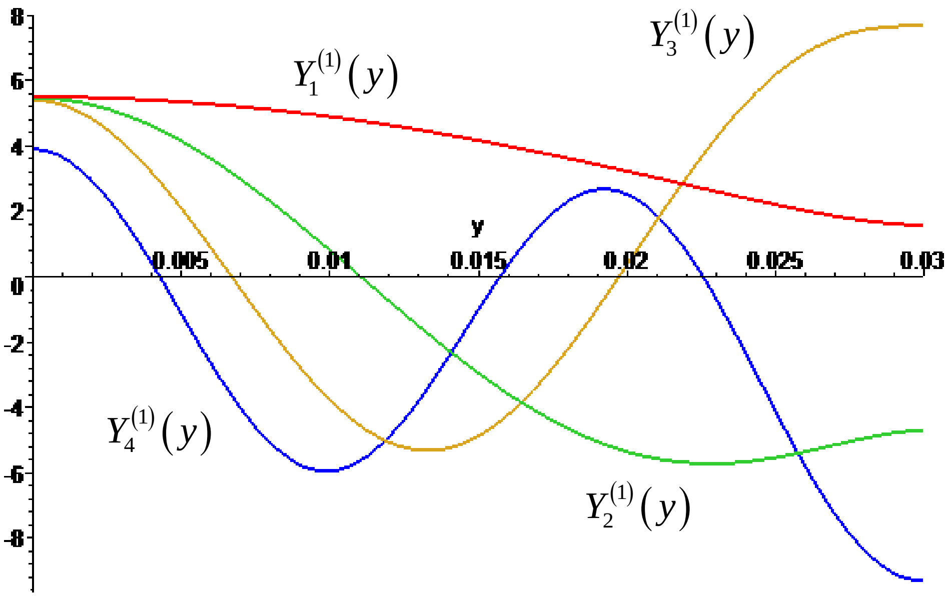

Рисунок 2.2. Функції $Y_1^{(1)}(y),..,Y_4^{(1)}(y)$

Як бачимо, кількість коренів функцій $Y_n^{(1)}(y)$ дорівнює $n-1$. Похідна від функцій на кінцях інтервалу дорівнює нулю.

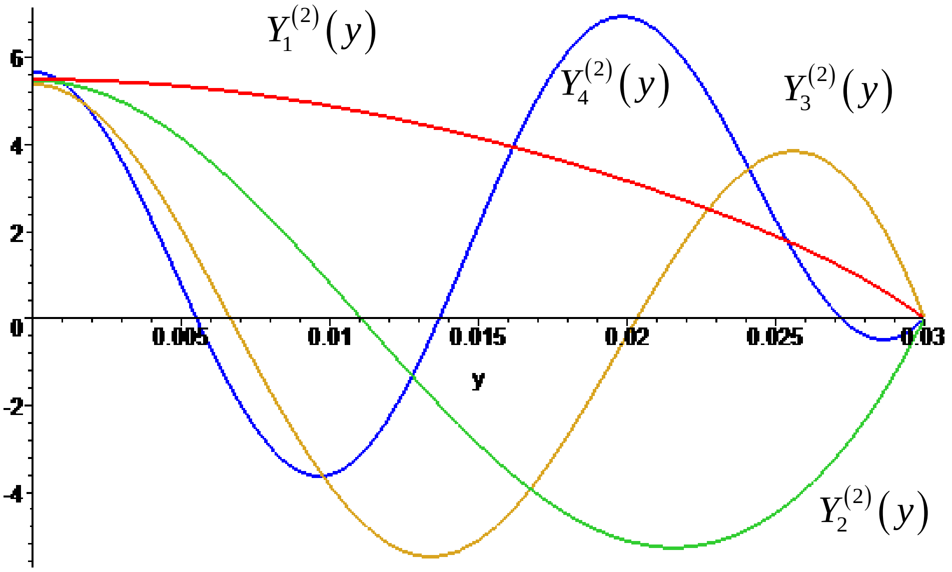

Рисунок 2.3. Функції $Y_1^{(2)}(y),..,Y_4^{(2)}(y)$

Графік дотичних напружень у клейовому шарі показаний на рис 2.4. Напруження наведено у безрозмірній формі як відношення діючих напружень до гіпотетичних, які б існували у з’єднанні за рівномірного розподілу по шару доданого навантаження.

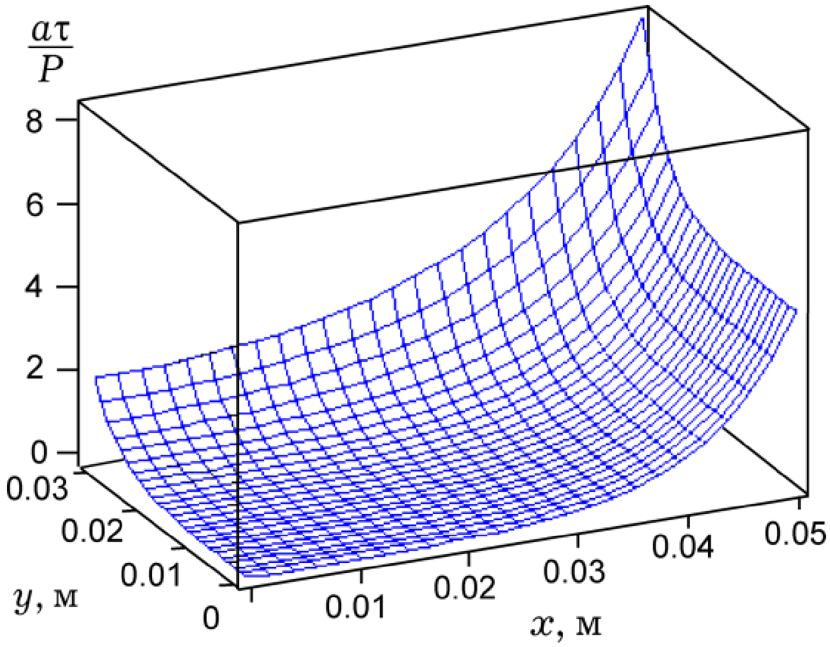

Рисунок 2.4. Розподіл дотичних напружень (2.2) в клейовому шарі

Як бачимо, дотичні напруження досягають максимуму в кутовій точці на перетині жорстко закріпленої сторони і тієї сторони, до якої прикладене навантаження. На рис. 2.5. наведено розподіл напружень у клейовому шарі у вигляді ліній рівня.

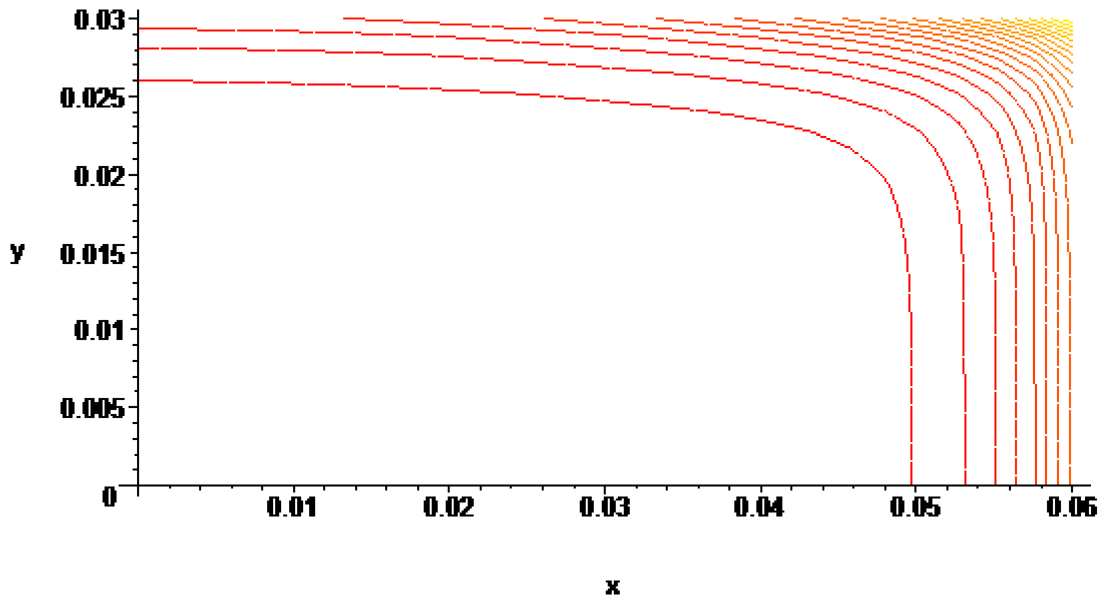

Рисунок 2.5. Розподіл напружень у клейовому шарі

Для верифікації знайденого розв’язку порівняно результати розрахунку, отримані за допомогою наведеної моделі та отримані за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). На рис. 2.6. побудовано графіки розподілу дотичних напружень в клеї, обчислені за запропонованою моделлю (суцільна лінія) і МСЕ в середині товщини клейового шару (штрихова лінія) уздовж закріпленої сторони $y = b$ і вздовж середини шарів, що склеюються $y = 0.5b$.

Виявлено, що в обох випадках вони дуже близькі. Розрахунки також свідчать про те, що дотичні напруження в серединній площині клейового шару в напрямку осі y, які запропонована модель не враховує, не перевищують 30% від напружень в поздовжньому напрямку. Отже, максимальні результуючі напруження лише на 6% перевищують такі в поздовжньому напрямку. Однак модель дає дещо завищені значення дотичних напружень в околі краю шва, оскільки не враховує крайові умови на торці клейового шару [33]. Тому максимальні напруження, обчислені МСЕ і за допомогою запропонованої моделі, відрізняються лише на кілька відсотків.

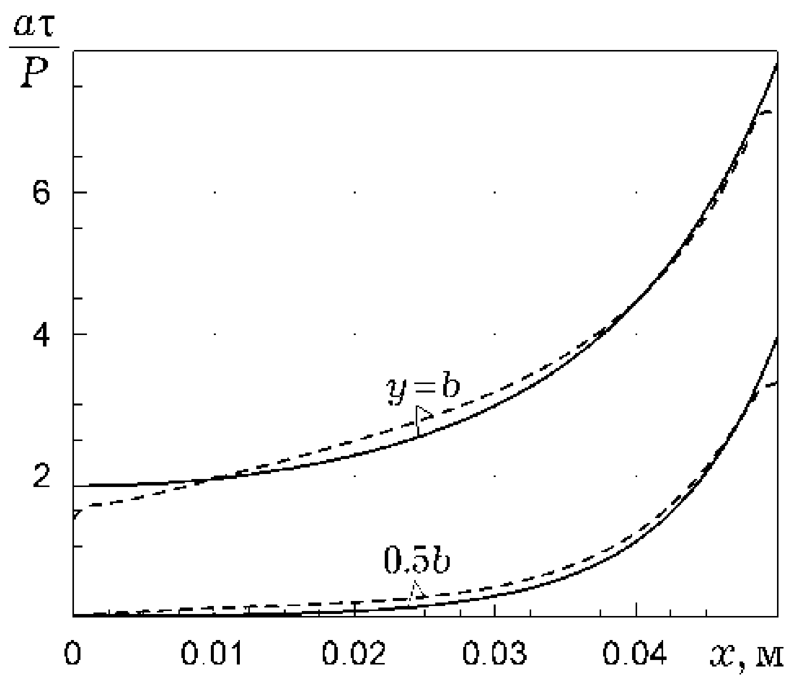

Рисунок 2.6. Розподіл дотичних напружень в клеї

Отримано аналітичний розв'язок задачі про двовимірний напружений стан клейового з'єднання двох прямокутних пластин, одна з яких навантажена поздовжніми зусиллями, а інша – закріплена за бічною стороною. Ці крайові умови розглянуто вперше. Для побудови розв’язку використано гіпотезу про високу жорсткість несних шарів в поперечному напрямку.

Розв’язано модельну задачу. Порівнянням розрахунків, отриманих за допомогою запропонованої моделі та МСЕ, встановлено, що модель має високу точність і придатна для розв’язання задач при проектуванні і оптимізації з'єднань. Запропонований підхід можна використовувати при побудові аналітичних розв’язків задач про напружений стан пластин з ремонтними накладками, з'єднань стрингерів з обшивкою і т.д.

2.2 Навантаження зсувом

Під час експлуатації виникають випадки, коли авіаційні конструкції працюють на зсув. На рис. 2.7 наведено приклад такої конструкції. Крило літака навантажене розподіленим тиском по обшивці, який зводиться у перерізи крила до перерізуючої сили, згинального та крутного моментів. Це зумовлює виникнення у обшивці та стінках конструкції дотичних зусиль. Передача зусиль між різними силовими елементами зорганізується за допомогою накладок та з’єднань. Крім того, розподіл дотичних напружень у поясі лонжерона в загальному випадку нерівномірний за шириною, тому в даному підрозділі наведено розвиток відомої моделі із рівномірним розподілом дотичного навантаження за шириною на випадок нерівномірного розподілу дотичного навантаження за шириною.

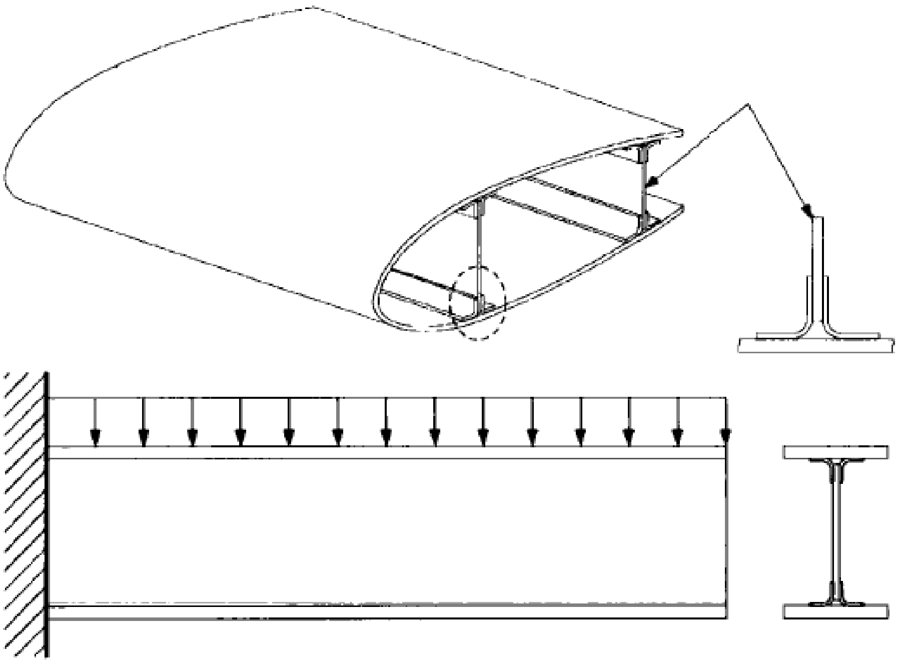

Рисунок 2.7. Крило, що працює на зсув

Розглянемо клейове з'єднання двох прямокутних пластин $(a \times b)$, показане на рис. 2.8. До протилежних бічних сторін $y = 0$ і $y = b$ прикладене зсувне навантаження. Торці $x = 0$ і $x = a$ – вільні від навантаження. Позначимо товщини першого і другого несних шарів δ_1 і δ_2 відповідно. Товщину з'єднувального шару позначимо δ_0. Вважаємо, що несні шари деформуються тільки в площині з'єднання (площині $x0y$), клейовий шар працює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів.

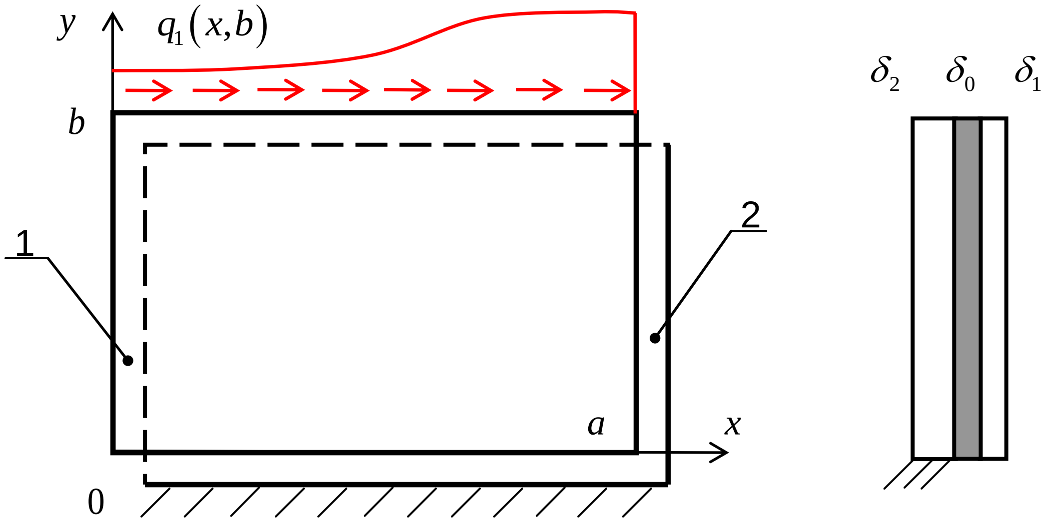

Рисунок 2.8. Схема з’єднання

Вважаємо, що $a > b$, і вигином пластин в площині з'єднання можна знехтувати.

Оскільки поперечні (в напрямку осі y) переміщення несних шарів вважаємо рівними нулю, зусилля в поперечному напрямку і відповідні дотичні напруження в клеї також дорівнюватимуть нулю. Рівняння рівноваги елементів несних шарів в даному випадку будуть мати вигляд [56, 80]

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \; -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \tag{2.17}$$

де N_k, q_k – нормальні (в повздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі k, $k = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в повздовжньому напрямку.

Співвідношення Коші за умови рівності нулю поперечних переміщень мають вигляд

$$N_k = \delta_k E_k \frac{\partial U_k}{\partial x}, \; q_k = \delta_k G_k \frac{\partial U_k}{\partial y}, \; k = 1, 2, \tag{2.18}$$

де U_k – повздовжні переміщення шару k.

Напруження в клейовому прошарку вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}\left(U_2 - U_1\right), \tag{2.19}$$

де G_0 – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення в рівняння (2.17), отримаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) - U_1 + U_2 = 0 \\ \alpha_2\left(\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2^2 \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

де $\alpha_k = \dfrac{E_k \delta_k \delta_0}{G_0}$; $\mu_k = \sqrt{\dfrac{G_k}{E_k}}$; $k = 1,2$.

Крайові умови на торцях мають вигляд $q_k(0,y) = q_k(a,y) = 0$, тобто

$$\left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=a} = 0. \tag{2.21}$$

На бічних сторонах задані або переміщення

$$U_k\big|_{y=0} = v_k^{(1)}(x); \quad U_k\big|_{y=b} = v_k^{(2)}(x), \tag{2.22}$$

або дотичні зусилля

$$q_k\big|_{y=0} = G_k \delta_k \left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=0} = Q_k^{(1)}(x); \quad q_k\big|_{y=b} = G_k \delta_k \left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=b} = Q_k^{(2)}(x). \tag{2.23}$$

Крім того, на одних сторонах можуть бути задані переміщення, а на інших – дотичні зусилля. Умова (2.21) є умовою рівності нулю нормальних напружень в несних шарах на торцях $x = 0$ і $x = a$.

З першого рівняння системи (2.20) випливає, що

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \tag{2.24}$$

Підставивши (2.24) у друге рівняння системи (2.20), знайдемо

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \tag{2.25}$$

де $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 \alpha_2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 \right)$, $\beta_3 = \alpha_1 \alpha_2 \mu_1^2 \mu_2^2$, $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_2 \mu_2^2$.

Позначимо

$$\Phi = \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \tag{2.26}$$

і визначимо, при яких значеннях коефіцієнтів c_1 і c_2, рівняння

$$c_1^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\Phi=0 \qquad (2.27)$$

еквівалентно рівнянню (2.25). Підставимо (2.26) в (2.27) і прирівняємо коефіцієнти при похідних в отриманому рівнянні коефіцієнтам рівняння (2.26), отримаємо залежності $c_1^2=\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$, $c_2^2=\dfrac{\alpha_1\alpha_2\mu_1^2\mu_2^2}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}$, а також $\mu_1=\mu_2$ ($\dfrac{G_1}{E_1}=\dfrac{G_2}{E_2}$). Остання умова, очевидно, обмежує сферу застосування запропонованого методу розв’язання. Однак, якщо матеріали, що з'єднуються, – однакові (що характерно для сендвіч-панелей і ремонтних накладок) або ж мають близькі коефіцієнти Пуассона, то запропонований підхід – виправданий. Позначимо $\mu_1=\mu_2=\mu$. В такому випадку отримаємо $c_2=\mu c_1$. Вираз (2.26) можна подати у вигляді

$$\Phi=\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\mu^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right). \qquad (2.28)$$

Переміщення другого шару (2.24) відповідно подамо у вигляді

$$U_2=U_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\Phi. \qquad (2.29)$$

Враховуючи крайові умови (2.21), зі співвідношення (2.29) випливає, що

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=a}=0. \qquad (2.30)$$

Рівняння (2.27) розв’яжемо методом відокремлення змінних. Частинні розв’язки рівняння будемо шукати у вигляді $\Phi\left(x,y\right)=X\left(x\right)Y\left(y\right)$. Після підстановки в рівняння (2.27) і задоволення граничних умов (2.30) отримаємо

$$\frac{c_1^2X''}{X}=-\frac{c_2^2Y''-Y}{Y};$$

$$X'\left(0\right)=0;\ X'\left(a\right)=0.$$

Оскільки обидві частини рівності залежать від різних змінних, то отримана рівність можлива тільки в разі, коли обидві її частини – сталі.

$$\frac{c_1^2 X''}{X} = -\frac{c_2^2 Y'' - Y}{Y} = -\tilde{\lambda}. \tag{2.31}$$

В результаті отримуємо спектральну задачу

$$\begin{cases} X'' + \dfrac{\tilde{\lambda}}{c_1^2} X = 0; & (2.32) \\ X'(0) = 0;\ X'(a) = 0. & (2.33) \end{cases}$$

Знайдемо власні значення спектральної задачі.

Нехай $\tilde{\lambda} = 0$. Тоді загальний розв'язок диференційного рівняння (2.32) буде мати вигляд $X(x) = Ax + B$. Підставляючи його в крайові умови (2.33), одержуємо рівняння $A = 0$, а сталу B з цих крайових умов визначити неможливо. Тобто у випадку $\tilde{\lambda} = 0$ спектральна задача (2.32), (2.33) буде мати розв'язок

$$X(x) = B. \tag{2.34}$$

Нехай $\tilde{\lambda} = -\lambda^2 < 0$. Тоді загальний розв'язок диференційного рівняння (2.32) буде мати вигляд $X(x) = Ae^{\frac{\lambda x}{c_1}} + Be^{-\frac{\lambda x}{c_1}}$. Підставляючи його в крайові умови (2.33), одержуємо систему рівнянь для визначення сталих A і B

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{c_1} A - \dfrac{\lambda}{c_1} B = 0, \\ \dfrac{\lambda}{c_1} A e^{\frac{\lambda a}{c_1}} - \dfrac{\lambda}{c_1} B e^{-\frac{\lambda a}{c_1}} = 0. \end{cases}$$

Звідси $B = A$, $A\left(e^{\frac{\lambda a}{c_1}} - e^{-\frac{\lambda a}{c_1}}\right) = 2Ash\dfrac{\lambda a}{c_1} = 0$. У даному випадку $\lambda \neq 0$ і тому $A = 0$, $B = 0$. Отже для будь-якого значення $\tilde{\lambda} = -\lambda^2 < 0$ задача (2.32), (2.33) має тільки тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$.

Нехай, нарешті, $\tilde{\lambda} = \lambda^2 > 0$. У цьому випадку загальний розв'язок диференційного рівняння (2.32) буде мати вигляд $X(x) = A\cos\frac{\lambda x}{c_1} + B\sin\frac{\lambda x}{c_1}$.

Підставляючи його в крайові умови (2.33), одержуємо систему рівнянь для визначення сталих A і B

$$\begin{cases} \frac{B\lambda}{c_1} = 0, \\ -\frac{A\lambda}{c_1}\sin\frac{\lambda a}{c_1} + \frac{B\lambda}{c_1}\cos\frac{\lambda a}{c_1} = 0. \end{cases}$$

Звідси, оскільки $\lambda \neq 0$, отримуємо $B = 0$, $-\frac{A\lambda}{c_1}\sin\frac{\lambda a}{c_1} = 0$. Якщо покласти $A = 0$, то знову одержимо тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому вважаємо, що $\sin\frac{\lambda a}{c_1} = 0$. Розв'язавши це рівняння, отримуємо $\lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a}$, при цьому власні значення спектральної задачі будуть мати вигляд $\tilde{\lambda} = \left(\frac{\pi n c_1}{a}\right)^2$, а система власних функцій задачі (2.32), (2.33) буде мати вигляд

$$X_n(x) = \cos\frac{\lambda_n x}{c_1}, \text{ де } \lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Враховуючи (2.34), маємо

$$X_n(x) = \cos\frac{\lambda_n x}{c_1}, \text{ де } \lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

З другої частини рівності (2.31), враховуючи, що $\tilde{\lambda} = \lambda_n^2$, одержимо рівняння $Y_n'' - \frac{(1+\lambda_n^2)}{c_2^2} Y_n = 0$, розв'язком якого є сімейство функцій

$$Y_n(y) = A_n \cosh\left(\frac{\sqrt{1+\lambda_n^2}}{c_2} y\right) + B_n \cosh\left(\frac{\sqrt{1+\lambda_n^2}}{c_2}(y-b)\right).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2.27) можна подати у вигляді

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cosh\left(\xi_n y\right)+B_n\cosh\left(\xi_n\left(y-b\right)\right)\right]\cos\frac{\pi nx}{a},\qquad(2.35)$$

де $\xi_n=\dfrac{\sqrt{1+\lambda_n^2}}{c_2}$; A_n, B_n – сімейства довільних коефіцієнтів.

На наступному етапі побудови розв’язку необхідно знайти спільний розв’язок рівняння (2.28). Розв’язок будемо шукати у вигляді лінійної суперпозиції розв’язків V і W

$$U_1=V+W,\qquad(2.36)$$

де V є загальним розв’язком однорідного рівняння (2.28) з однорідними граничними умовами (2.21)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\mu^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.\qquad(2.37)$$

Функція W є частинним розв’язком неоднорідного рівняння (2.28), що відповідає заданої функції (2.35).

Розв’язок рівняння (2.37) також будемо шукати методом відокремлення змінних. Шукану функцію подамо у вигляді добутку $V(x;y)=X(x)Y(y)$. Операція відокремлення змінних призводить до рівнянь

$$X''+\Lambda^2X=0,\qquad Y''-\frac{\Lambda^2}{\mu^2}Y=0,\qquad(2.38)$$

де $-\Lambda^2$ $(\Lambda\geq 0)$ – параметр відокремлення змінних.

Загальний розв’язок першого рівняння (2.38) за умови $\Lambda>0$ має вигляд

$$X(x)=C_3\sin\Lambda x+C_4\cos\Lambda x.$$

Функція $X(x)$ задовольняє однорідним граничним умовам (2.21) і не дорівнює нулю тотожно тільки при $\Lambda_n=\dfrac{\pi n}{a}$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Таким чином, отримаємо $X(x)=\cos\dfrac{\pi nx}{a}$.

Розв’язок другого рівняння (2.38) при $\Lambda = \Lambda_n$ має вигляд

$$Y_n(y) = C_n \cosh\frac{\Lambda_n y}{\mu} + D_n \cosh\frac{\Lambda_n (y-b)}{\mu}.$$

Якщо ж параметр відокремлення змінних Λ дорівнює нулю, то загальними розв’язками рівняння (2.37) є лінійні функції від координат x і y. Однорідні крайові умови (2.21) в цьому випадку будуть задовільнено, якщо $X(x) = const$. Отже, розв’язок рівняння (2.36), який задовольняє крайові умови (2.21), можна записати у вигляді

$$V = C_0 y + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh\big(\chi_n (y-b)\big)\Big)\cos\frac{\pi n x}{a},$$

де $\chi_n = \dfrac{\pi n}{\mu a}$; C_n, D_n – сімейства довільних коефіцієнтів.

Функція Φ в рівнянні (2.28) має вигляд (2.35), після деяких перетворень частинний розв’язок (2.28) можна подати у вигляді

$$W = \frac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{a}x\Big[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh\big(\xi_n (y-b)\big)\Big].$$

На підставі (2.28) і (2.35) отримаємо

$$\begin{aligned} U_k = {} & C_0 y + D_0 + d_k\Big(A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh\big(\xi_0 (y-b)\big)\Big) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n x}{a}\Big[C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh\big(\chi_n (y-b)\big) + \\ & + d_k\Big(A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh\big(\xi_n (y-b)\big)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{2.39}$$

де $k = 1, 2$; $d_1 = \dfrac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $d_2 = \dfrac{c_1^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Дотичні зусилля в несних шарах (2.18) мають вигляд

$$q_k = \delta_k G_k\Big[C_0 + d_k \xi_0\Big(A_0 \sinh(\xi_0 y) + B_0 \sinh\big(\xi_0 (y-b)\big)\Big)\Big] +$$

$$+\delta_k G_k \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{a}\Big[\chi_n\Big(C_n \sinh\left(\chi_n y\right) + D_n \sinh\left(\chi_n\left(y-b\right)\right)\Big) +$$

$$+d_k \xi_n\Big(A_n \sinh\left(\xi_n y\right) + B_n \sinh\left(\xi_n\left(y-b\right)\right)\Big)\Big]. \qquad (2.40)$$

Крайові умови (2.23) розкладемо в ряд Фур'є за власними функціями задачі (2.32), (2.33) на інтервалі $\left(0;a\right)$, отримаємо

$$Q_1^{(1)}\left(x\right) = 0\,,\; Q_1^{(2)}\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{a}\,,$$

$$U_2\left(x,0\right) = 0\,, \quad Q_2^2\left(x\right) = 0\,, \qquad (2.41)$$

де $a_0 = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a Q_1^{(2)}\left(x\right)dx\,,\;\; a_n = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a Q_1^{(2)}\left(x\right)\cos\frac{\pi n x}{a}\,dx.$

Задовольнивши крайові умови (2.23), отримаємо системи лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n.

$$\begin{cases} C_0 - d_1\xi_0 B_0 \sinh\left(\xi_0 b\right) = 0; \\ C_0 + d_1\xi_0 A_0 \sinh\left(\xi_0 b\right) = \dfrac{a_0}{2\delta_1 G_1}; \\ D_0 + d_2\left(A_0 + B_0\cosh\left(\xi_0 b\right)\right) = 0; \\ C_0 + d_2\xi_0 A_0 \sinh\left(\xi_0 b\right) = 0. \end{cases} \qquad (2.42)$$

$$\begin{cases} \chi_n D_n \sinh\left(\chi_n b\right) + d_1\xi_n B_n \sinh\left(\xi_n b\right) = 0; \\ \chi_n C_n \sinh\left(\chi_n b\right) + d_1\xi_n A_n \sinh\left(\xi_n b\right) = \dfrac{a_n}{\delta_1 G_1}; \\ C_n + D_n\cosh\left(\chi_n b\right) + d_2\left(A_n + B_n\cosh\left(\xi_n b\right)\right) = 0; \\ \chi_n C_n \sinh\left(\chi_n b\right) + d_2\xi_n A_n \sinh\left(\xi_n b\right) = 0. \end{cases} \qquad (2.43)$$

Розв’язок систем (2.42) і (2.43) запишемо у вигляді

$$A_0 = -\frac{1}{2}\frac{a_0}{\xi_0\delta_1 G_1\left(d_2 - d_1\right)\sinh\left(\xi_0 b\right)};\; B_0 = \frac{1}{2}\frac{d_2}{d_1}\frac{a_0}{\xi_0\delta_1 G_1\left(d_2 - d_1\right)\sinh\left(\xi_0 b\right)};$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\frac{a_0 d_2}{\delta_1 G_1 (d_2 - d_1)};\; D_0 = -\frac{1}{2}\frac{d_2}{d_1}\frac{a_0 (d_2 \cosh(\xi_0 b) - d_1)}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1)\sinh(\xi_0 b)}.$$

$$A_n = \frac{a_n}{\xi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2)\sinh(\xi_0 b)};\; C_n = -\frac{a_n \xi_n d_2}{\chi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2)\sinh(\chi_n b)};$$

$$B_n = \frac{d_1 d_2 a_n}{\xi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2)\left[d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b)\cosh(\xi_n b) - d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b)\cosh(\chi_n b)\right]};$$

$$D_n = -\frac{d_2 a_n \sinh(\chi_n b)}{\delta_1 G_1 (d_1 - d_2)\sinh(\xi_n b)\left[d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b)\cosh(\xi_n b) - d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b)\cosh(\chi_n b)\right]}.$$

З наведених формул випливає, що $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \dfrac{H[a_n]}{nR(\xi_n;\, \chi_n)}$, де $H[a_n]$ – деякі лінійні вирази з постійними коефіцієнтами, що залежать від a_n (2.40), а $R(\xi_n;\, \chi_n) = \{\sinh(\xi_n b); \sinh(\chi_n b)\}$. Отже $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \dfrac{1}{n^s R(\xi_n;\, \chi_n)}$, де $s \geq 2$. Таким чином гіперболічні функції $\dfrac{\cosh(\chi_n y)}{\sinh(\chi_n b)}$, $\dfrac{\cosh(\chi_n (y-h))}{\sinh(\chi_n b)}$, $\dfrac{\cosh(\xi_n y)}{\sinh(\xi_n b)}$ та ін. на інтервалі $y \in (0; b)$ обмежені і, зі зростанням n, експоненційно прямують до нуля. З огляду на сказане вище, можна зробити висновок про те, що всередині даної області ряди Фур'є (2.39) двічі диференціюються і задовольняють рівнянням (2.20). А ряди (2.39) і (2.40) на відрізку $y \in [0; b]$ збігаються рівномірно.

Дотичні напруження в клеї (2.19) можна подати у вигляді

$$\tau = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\frac{G_0}{\delta_0}\left[A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh(\xi_0 (y - b))\right] -$$
$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\frac{G_0}{\delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n x}{a}\left[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y - b))\right].$$

Можна відзначити, що в даній формулі доданки, що стоять поза знаком суми, є відомим одновимірним розв’язком [126], і описують напруження в клейовому шарі при рівномірному дотичному навантаженні. При цьому складові, що стоять під знаком суми, описують напруження в клеї, що викликані самоврівноваженим навантаженням, оскільки $\int_0^a \cos\frac{\pi n x}{a}dx = 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Можна показати, що в глибині області, при видаленні від країв $y = 0$ і $y = b$ складові, що стоять під знаком суми, експоненційно зменшуються, що збігається з принципом Сен-Венана. Тобто, якщо пластини, що з'єднуються, будуть досить великі, то на віддаленні від краю напружений стан з'єднання буде мало залежати від конкретного розподілу навантаження по краю, і буде визначатися лише сумарною величиною навантаження $a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a Q_k^{(2)}(x)dx$.

Наведемо модельну задачу. Розглянемо клейове з'єднання двох алюмінієвих пластинок, що мають розміри $a = 6\,см$, $b = 2\,см$, $\delta_1 = 3\,мм$, $\delta_2 = 2\,мм$. Товщина клейового прошарку $\delta_0 = 0{,}1\,мм$. Пружні характеристики матеріалів з'єднання такі: $E_1 = E_2 = 70\,ГПа$, $G_1 = G_2 = 27\,ГПа$, $G_0 = 0{,}5\,ГПа$. Геометрію моделі показано на рис. 2.9.

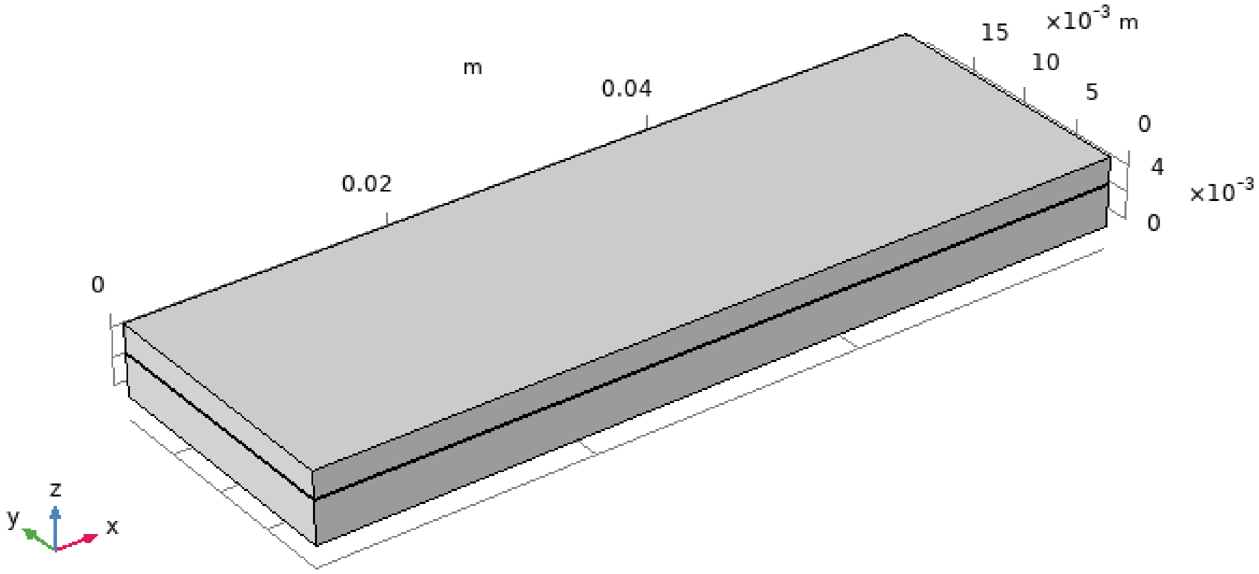

Рисунок 2.9. Геометрія склеєної конструкції

Задамо такі крайові умови на бічних сторонах пластин, що склеюються:

$$q_1(x,b)=F(x),\quad q_1(x,0)=q_2(x,b)=0;\quad U_2(x,0)=0,$$

де

$$F(x)=\begin{cases} F_0, \quad x\in\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3}\right); \\ 0,\ x\in\left(0;\dfrac{a}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2a}{3};a\right). \end{cases}$$

Графік дотичних напружень в клейовому шарі наведено на рис. 2.10. Напруження на рисунку показані в безрозмірному вигляді як відношення діючих напружень τ до гіпотетичних напружень τ_0, які виникли б при рівномірному розподілі навантаження по всій площині клейового шва, тобто як відношення τ до напружень $\tau_0=F_0\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{1}{ab}=\dfrac{F_0}{3b}$.

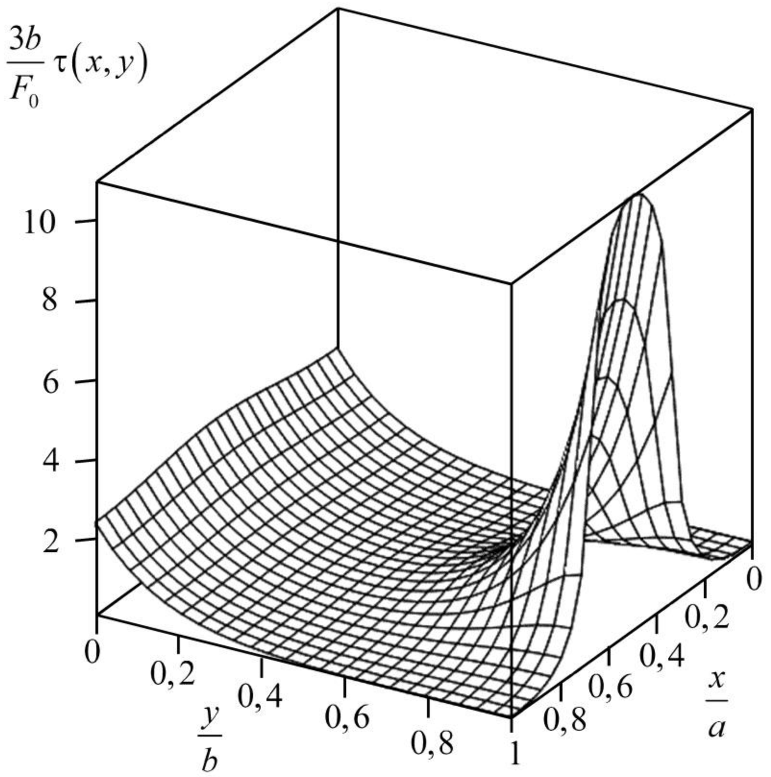

Рисунок 2.10. Дотичні напруження в клейовому шарі

Для верифікації запропонованої методики проведено розрахунок напруженого стану з'єднання за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Для розрахунку використано тривимірну модель, генерація сітки –

автоматична, характерний розмір елемента дорівнює 0,03 мм.

На рис. 2.11 наведено розподіл дотичних напружень τ_{xz} в середині товщини клейового шару, що обчислені за допомогою МСЕ. Напруження також подано у безрозмірній формі. З наведеного рисунку видно, що найбільш навантаженою областю є область біля границі, де додане зовнішнє навантаження.

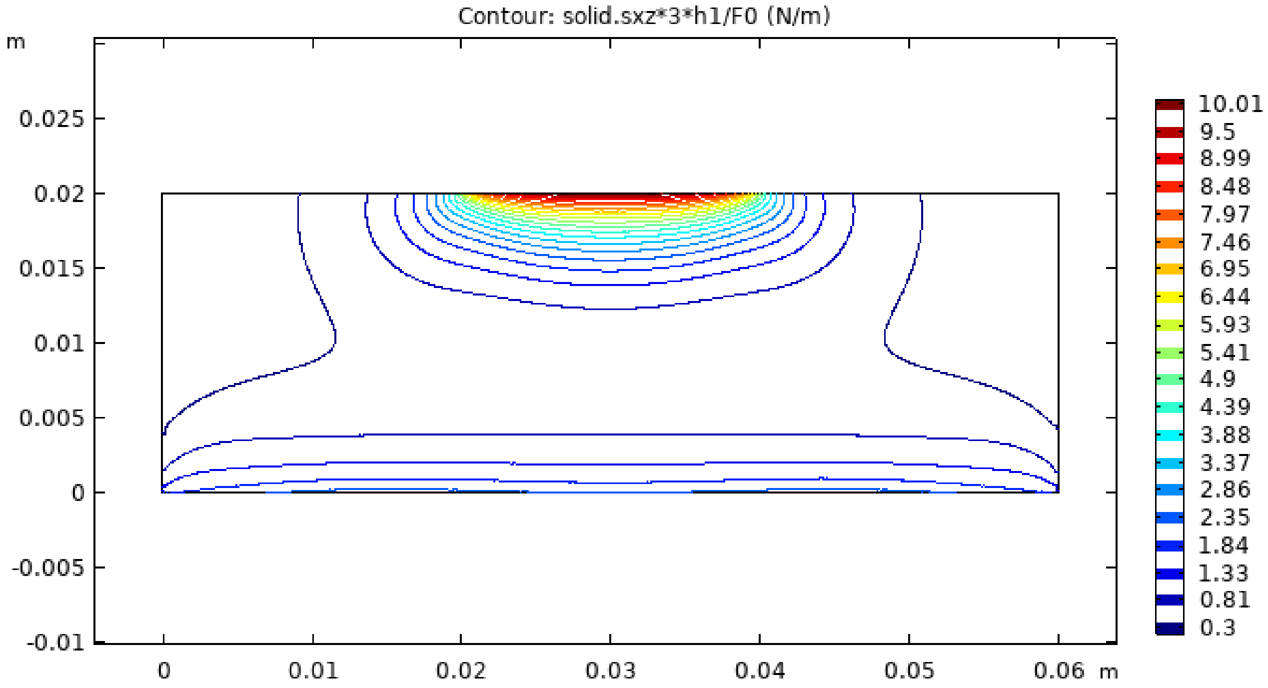

Рисунок 2.11. Розподіл дотичних напружень τ_{xz} у клеї. МСЕ.

На рис. 2.12 наведено графіки дотичних напружень в середині товщини клейового шару уздовж осі симетрії з'єднання ($x = a/2$), що обчислені за допомогою запропонованої методики (а), і МСЕ (б).

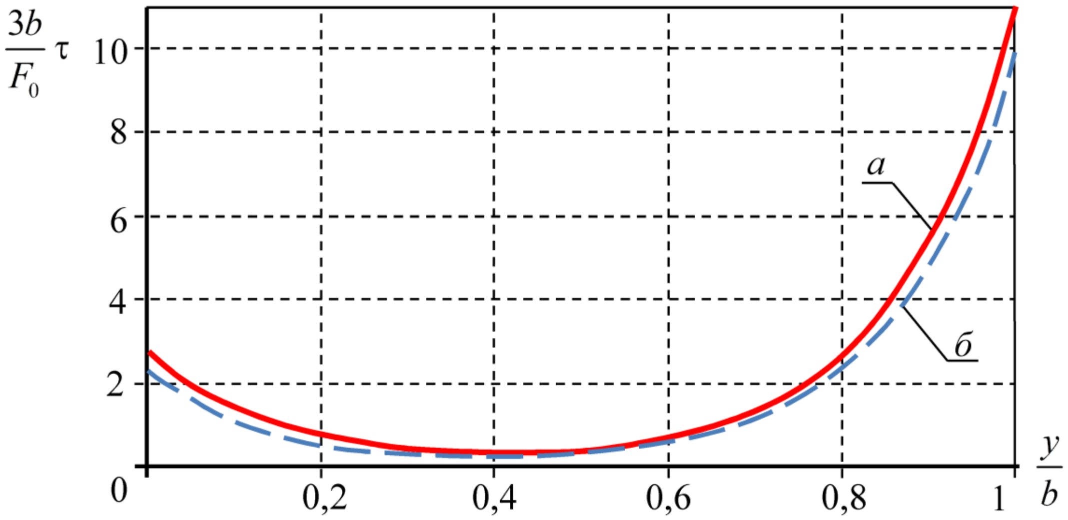

Рисунок 2.12. Дотичні напруження в клеї уздовж прямої $x = a/2$,

(а) – розрахунок за запропонованою методикою; (б) – МСЕ

На рис. 2.13 наведено графіки дотичних напружень в серединній площині клейового шару уздовж краю $y = b$, що обчислені за допомогою запропонованої методики (а), і МСЕ (б).

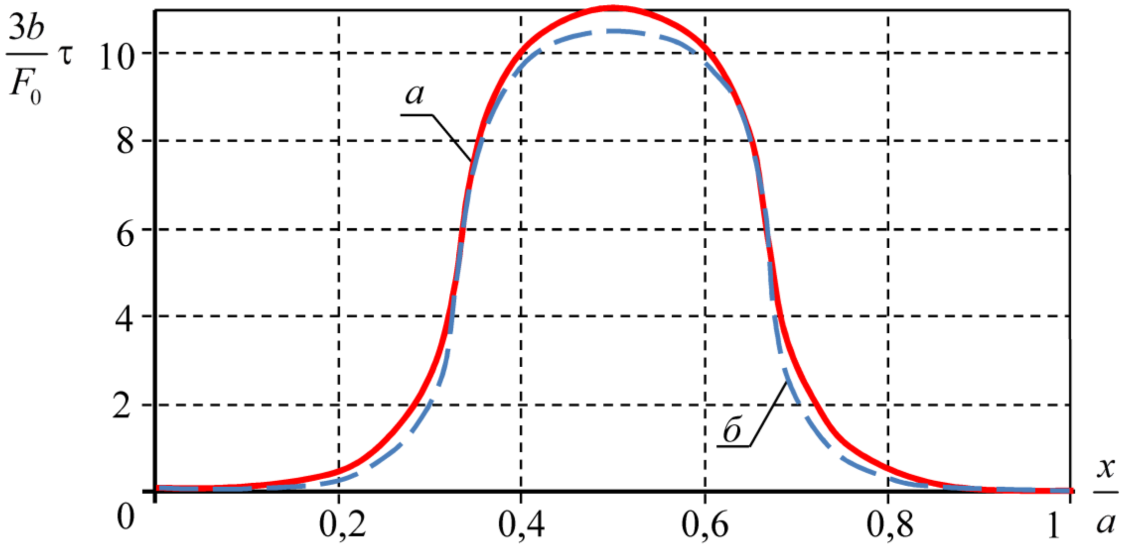

Рисунок 2.13. Дотичні напруження в клеї уздовж прямої $y = b$,

(а) – розрахунок за запропонованою методикою; (б) – МСЕ

З графіків видно, що дотичні напруження в клеї, обчислені за допомогою запропонованої моделі, дещо перевищують напруження, обчислені за допомогою МСЕ. Це явище добре відомо дослідникам і зумовлено такими припущеннями моделі як робота на зсув лише клейового шару і рівномірний розподіл напружень за товщиною несних шарів. Ці припущення спрощують модель статичного НДС і дозволяють отримати аналітичний розв'язок. Крім того, дещо завищені значення критичних напружень є припустимим у задачах проектування конструкцій, тому що це не пливає на зниження несної здатності конструкції і працює «в запас міцності».

Запропонована модель не враховує переміщення несних шарів у поперечному напрямку (у напрямку вісі y), і необхідно дослідити, наскільки це припущення впливає на адекватність моделі. На рис. 2.14 наведено розподіл напружень τ_{yz} у серединній площині клейового шару.

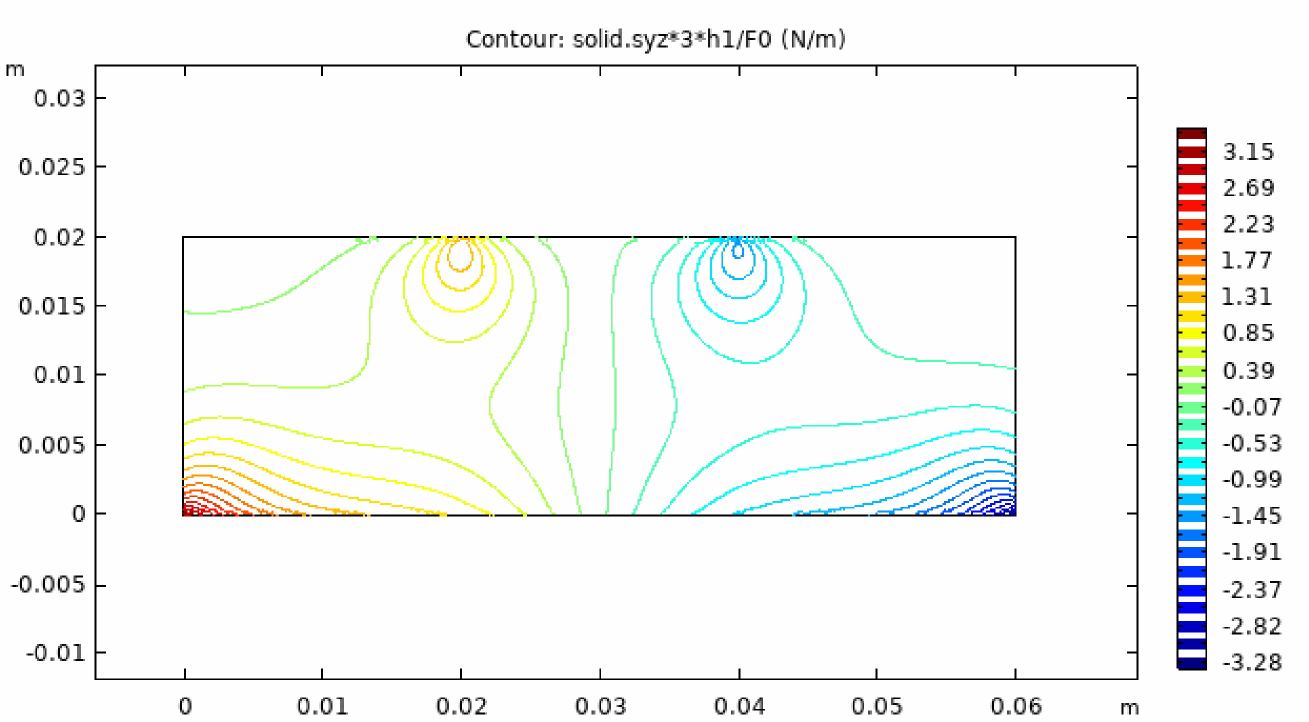

Рисунок 2.14. Розподіл дотичних напружень τ_{yz} у клеї. МСЕ.

Як бачимо, максимальні напруження τ_{yz}, якими ми нехтували у аналітичній моделі, у тричі менші за максимальні напруження τ_{xz}. Але τ_{yz} досягають максимуму біля жорсткого закріплення пластини, тобто у тій зоні, де напруження τ_{xz} – незначні. Максимальні напруження τ_{yz} у зоні навантаження – незначні і не перевищують 9% від максимальних дотичних напружень в поздовжньому напрямку.

Запропоновано спрощену модель клейового з'єднання, яка дозволяє знаходити напружений стан з'єднання при довільному навантаженні пластин, що з'єднуються дотичними зусиллями на бічних сторонах. Отримано аналітичний розв'язок задачі і обґрунтовано його збіжність. Розв’язано модельну задачу.

Розрахунки показали, що точність запропонованої наближеною методики – достатня для розв’язання багатьох інженерних задач. Даний підхід може бути використаний для побудови аналітичних розв'язків задач про напружений стан клейових з'єднань деталей різної ширини; з'єднань силових елементів конструкції з обшивкою; з'єднань, які мають дефекти в клейовому шарі; з'єднань ремонтних накладок з обшивкою і інших задач, де потрібно знати двовимірний напружений стан клейового з'єднання.

2.3 Висновки за розділом

У розділі дано розвиток двовимірної моделі НДС клейового з’єднання двох прямокутних пластин та отримано такі результати:

1. Знайдено аналітичний розв’язок задачі про напружений стан з’єднання з некласичними крайовими умовами, а саме з’єднання, у якому один несний шар навантажений повздовжніми зусиллями, а інший несний шар має жорстке закріплення вздовж бічної сторони.

2. Побудовано аналітичний розв’язок задачі про напружений стан з’єднання, в якому несні шари навантажено дотичними зусиллями зсуву. Відомі розв’язки даної задачі [127] були одновимірними, тобто покладали рівномірний розподіл напружень вздовж з’єднання, що обмежує застосування даної методики і не дозволяє проводити розрахунок дискретно навантажених з’єднань.

3. В обох розв’язаних задачах математично доведено збіжність розв’язків.

4. Проведено порівняння НДС модельних задач з розрахунками, виконаними за допомогою МСЄ, та проілюстровано адекватність розроблених моделей та їхню достатню для інженерних задач точність.

Результати розділу опубліковано в роботах [133, 50, 52].

РОЗДІЛ 3
СПРОЩЕНІ ДВОВИМІРНІ МОДЕЛІ З'ЄДНАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Задачу визначення напружено-деформованого стану (НДС) з'єднань циліндричних труб в аналітичній формі в загальній постановці ще не розв’язано. Тому для окремих випадків навантаження або особливостей конструкції створено окремі математичні моделі.

Для розв’язання задач зі знаходження НДС трубчастих склеєних конструкцій запропоновано дві нові моделі НДС з’єднань.

У першій запропонованій моделі ігнорується вплив поздовжніх (в осьовому напрямку) деформацій на поперечні (тангенціальні) деформації. Тобто передбачається, що всі елементи з'єднання можуть переміщуватися лише в поздовжньому напрямку. Розподіл напружень по товщині шарів вважається рівномірним, а за коловою координатою – ні. На відміну від класичних одновимірних розв’язків навантаження або переміщення можуть бути розподіленими нерівномірно по окружній координаті. Ця модель є розвитком двовимірної моделі прямокутного з’єднання.

У другій запропонованій в роботі осесиметричній моделі НДС з’єднання з’єднувальні шари розглядаються як циліндричні оболонки. Але на відміну від класичних моделей з’єднань розподіл нормальних напружень у клейовому шарі вважається нерівномірним за товщиною.

3.1 Напружений стан двох склеєних коаксіальних труб при нерівномірному осьовому навантаженні

Постановка задачі. Схему з'єднання показано на рис. 3.1. Позначимо товщини зовнішньої і внутрішньої труб δ_1 і δ_2 відповідно. Товщину клейового шару позначимо δ_0. Припустимо, що елементи несних шарів можуть переміщатися лише вздовж осі з'єднання, клейовий шар працює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені по товщині шарів.

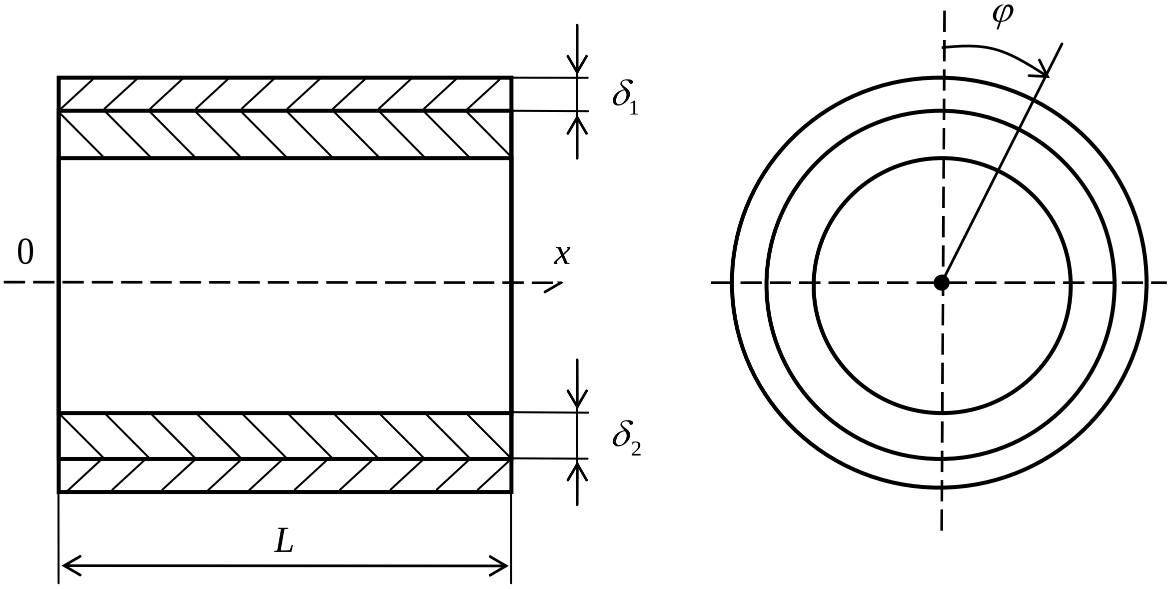

Рисунок 3.1. Схема з'єднання

Диференціальні елементи з'єднання та діючі зусилля показано на рис. 3.2.

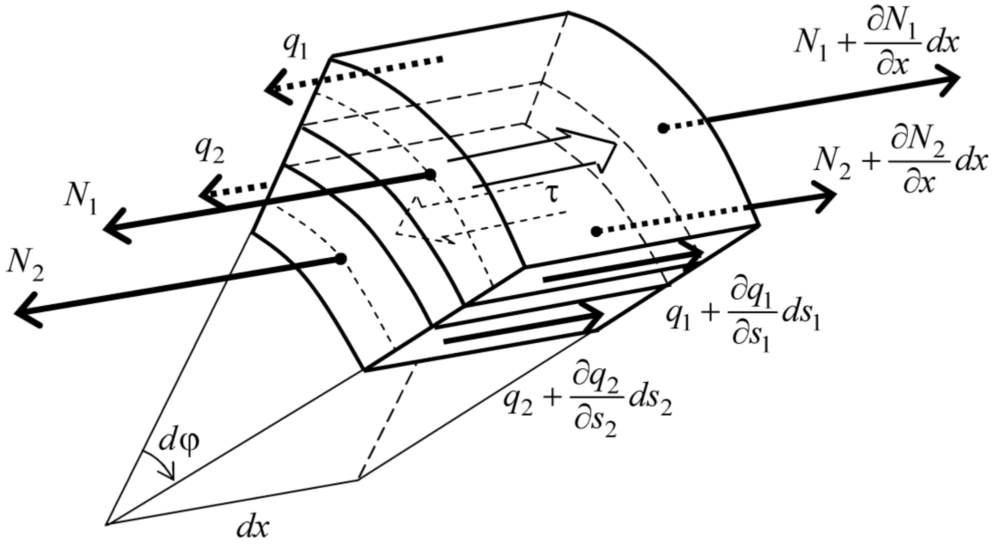

Рисунок 3.2. Диференціальний елемент з'єднання

На рисунку: N_m, q_m – нормальні (в поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі m, ($m=1, 2$), які є добутками відповідних напружень на товщину шару, $N_m = \delta_m \sigma_x^{(m)}$, $q_m = \delta_m \tau^{(m)}$; τ_0 – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку. Крім того, x – осьова координата; окружні криволінійні координати $s_1 = R_1 d\varphi$, $s_2 = R_2 d\varphi$, $s_0 = R_0 d\varphi$; φ – кутова координата, що відраховується від деякої площини, R_m – радіус серединної поверхні шару m, R_0 – радіус серединної поверхні клейового шару. Тобто вважаємо, що дотичні напруження в клейовому шарі діють в його серединній поверхні радіуса R_0.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання мають вигляд

$$\tau_0 + \frac{R_1}{R_0}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R_0}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = 0\,.; \quad -\tau_0 + \frac{R_2}{R_0}\frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{1}{R_0}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{3.1}$$

Зі співвідношень Коші за умови рівності нулю поперечних переміщень і закону Гука випливає, що

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial s_m} = \frac{\delta_m G_m}{R_m}\frac{\partial U_m}{\partial \varphi}, \tag{3.2}$$

де U_m – повздовжні переміщення шару m.

Дотичні напруження в клейовому шарі вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів

$$\tau_0 = P\cdot\left(U_2 - U_1\right), \tag{3.3}$$

де P – жорсткість клейового шару на зсув.

Підставивши наведені співвідношення в рівняння (3.1), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_1\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2}\right) - \left(U_1 - U_2\right) = 0; \\ &\alpha_2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_2^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2}\right) + \left(U_1 - U_2\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $\alpha_m = \delta_m \dfrac{E_m}{P}\dfrac{R_m}{R_0}$; $\mu_m = \dfrac{1}{R_m}\sqrt{\dfrac{G_m}{E_m}}$; $m = 1,2$.

Крайові умови

$$N_1\big|_{x=0} = E_1\delta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = F^{(1)}(\varphi),$$

$$N_m\Big|_{x=L} = E_m\delta_m \frac{\partial U_m}{\partial x}\Big|_{x=L} = H^{(m)}(\varphi),\; U_2\Big|_{x=0} = u^{(2)}(\varphi). \qquad (3.5)$$

Крім того, на переміщення накладається умова періодичності

$$U_m(x,\varphi) = U_m(x,\varphi + 2\pi n). \qquad (3.6)$$

Жорсткість клейового шару, яка введена в співвідношенні (3.3), може бути задана декількома способами. За класичним підходом зсув зосереджено виключно в клейовому шарі. В цьому випадку $P = G_0\delta_0^{-1}$, де G_0 – модуль зсуву клею, δ_0 – товщина клейового прошарку. Однак такий підхід дає дещо завищені значення напружень в клеї. Для плоских з'єднань задовільне наближення показує модель лінійного розподілу дотичних напружень по товщині з'єднувальних деталей [135]. Лінійний розподіл напружень за товщиною з'єднувальних шарів спостерігається в регулярній зоні, вдалині від країв склейки. Тоді як напруження в клеї – максимальні саме у країв з'єднання. Тому питання про вибір ефективних залежностей розрахунку податливості клейового шару на зсув, особливо в разі відносно великої товщини шарів, що з'єднуються, не можна вважати остаточно закритим.

Ці ж міркування можуть бути застосовані і в даному випадку. Якщо труби – відносно тонкі, то уточнена жорсткість клейового шару може бути розрахована так само, як і для плоских з'єднань: $P = \left(\frac{\delta_0}{G_0} + \frac{\delta_1}{2G_1} + \frac{\delta_2}{2G_2}\right)^{-1}$.

Розподіл дотичних напружень по товщині відносно товстих труб буде відрізнятися від лінійного, тому формула може бути трансформована, наприклад таким чином:

$$P = \left(\frac{\delta_0}{G_0} + \frac{\delta_1}{K_1G_1} + \frac{\delta_2}{K_2G_2}\right)^{-1},$$

де $1 < K_m < 2$. Вибір значень коефіцієнтів K є відкритим.

З першого рівняння системи (3.4) отримаємо

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right), \tag{3.7}$$

Підставивши в друге рівняння системи (3.4), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_1^2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial \varphi^4} - \beta_3^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_4^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{3.8}$$

де $\beta_1^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$, $\beta_2^2 = \mu_1^2 \mu_2^2$, $\beta_3^2 = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$, $\beta_4^2 = \frac{\mu_1^2}{\alpha_2} + \frac{\mu_2^2}{\alpha_1}$.

Частинний розв’язок рівняння (3.8) будемо шукати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від кутової координати, а інша – тільки від лінійної координати

$$U_1^* = \Phi(\varphi) X(x).$$

В силу фізичного сенсу, кожен частинний розв’язок U_1^* повинен бути 2π періодичною функцією. Таким чином, функції $\Phi(\varphi)$ – періодичні, з періодом 2π. Будь-яка безперервна періодична функція з періодом 2π може бути розкладена в ряд Фур'є. Припустимо, що функції $\Phi(\varphi)$ в частинних розв’язках (3.8) приймають значення $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}$. Знайдемо відповідні функції $X_n(x)$.

1) Якщо $\Phi(\varphi) = const$, то, підставивши $U_1^* = \Phi_0(\varphi) X_0(x)$ в рівняння (3.8), за умови, що $\frac{\partial^2 U_1^*}{\partial \varphi^2} = 0$, $\frac{\partial^4 U_1^*}{\partial \varphi^4} = 0$, отримаємо $\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} - \beta_3^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = 0$, або

$$\frac{d}{dx^2} \left[\frac{d^2 X_0(x)}{dx^2} - \beta_3^2 X_0(x) \right] = 0. \tag{3.9}$$

Розв’яжемо отримане рівняння. Для цього двічі інтегруємо обидві його частини за змінною x. Отримаємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною

$$\frac{d^2X_0(x)}{dx^2}-\beta_3^2X_0(x)=\tilde{A}_1x+\tilde{A}_0. \tag{3.10}$$

Розв’яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\frac{d^2X_0(x)}{dx^2}-\beta_3^2X_0(x)=0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд $\vartheta^2-\beta_3^2=0$. Корні цього характеристичного рівняння – $\vartheta=\pm\beta_3$. Отже загальний однорідний розв’язок рівняння (3.10) запишемо у вигляді

$$X_0^{з.о.}(x)=A_3ch(\beta_3x)+A_4sh(\beta_3x).$$

Частинний розв’язок рівняння (3.10) запишемо у вигляді

$$X_0^{ч.н.}(x)=A_0+A_1x.$$

Тоді загальній розв’язок рівняння (3.10), а отже і рівняння (3.9) буде мати вигляд

$$X_0=A_0+A_1x+A_3\,\mathrm{ch}(\beta_3x)+A_4\,\mathrm{sh}(\beta_3x).$$

2) Якщо $\Phi_n(\varphi)=\sin n\varphi$ або $\Phi_n(\varphi)=\cos n\varphi$, то, підставивши частинні розв’язки $U_n^*=\Phi_n(\varphi)X_n(x)$ в рівняння (3.8), за умови, що $\frac{\partial^2U_1^*}{\partial\varphi^2}=-n^2\tilde{\Phi}_n(\varphi)X_n(x)$, $\frac{\partial^4U_1^*}{\partial\varphi^4}=n^4\tilde{\Phi}_n(\varphi)X_n(x)$ та $\frac{\partial^4U_1^*}{\partial x^2\partial\varphi^2}=-n^2\tilde{\Phi}_n(\varphi)X_n''(x)$, де $\tilde{\Phi}_n(\varphi)=\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}$, отримаємо

$$\tilde{\Phi}_n(\varphi)\frac{d^4X_n(x)}{dx^4}-\beta_1^2n^2\tilde{\Phi}_n(\varphi)\frac{d^2X_n(x)}{dx^2}+\beta_2^2n^4\tilde{\Phi}_n(\varphi)X_n(x)-$$

$$-\beta_3^2\tilde{\Phi}_n(\varphi)\frac{d^2X_n(x)}{dx^2}+\beta_4^2n^2\tilde{\Phi}_n(\varphi)X_n(x)=0,$$

після групування маємо

$$\frac{d^4X_n}{dx^4}-\left(\beta_1^2n^2+\beta_3^2\right)\frac{d^2X_n}{dx^2}+\left(\beta_2^2n^4+\beta_4^2n^2\right)X_n=0,$$

тобто звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$k^4-\left(\beta_1^2n^2+\beta_3^2\right)\cdot k^2+\left(\beta_2^2n^4+\beta_4^2n^2\right)=0.$$

Корні цього характеристичного рівняння мають вигляд $\pm k_{1,n}$ і $\pm k_{2,n}$, де

$$k_{m,n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1^2n^2+\beta_3^2+(-1)^m\cdot\sqrt{\left(\beta_1^2n^2+\beta_3^2\right)^2-4\left(\beta_2^2n^4+\beta_4^2n^2\right)}}.$$

При $n\to\infty$ залежність $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ від n прямує до лінійної.

Доведемо, що $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ є дійсними числами.

Перш за все, відзначимо, що вирази під основним коренем – додатні. Оскільки навіть у виразі для $k_{1,n}$ додатний доданок $\beta_1 n^2+\beta_3$ більший, ніж від'ємний доданок $\sqrt{\left(\beta_1 n^2+\beta_3\right)^2-4\left(\beta_2 n^4+\beta_4 n^2\right)}$ для будь-якого $n>0$.

Розглянемо докладніше вираз під внутрішнім коренем. Підставивши значення коефіцієнтів, отримаємо

$$\left(\beta_1 n^2+\beta_3\right)^2-4\left(\beta_2 n^4+\beta_4 n^2\right)=\left(\frac{G_1}{R_1^2E_1}-\frac{G_2}{R_2^2E_2}\right)^2t^2+$$
$$+\frac{2G_0R_0}{\delta_0}\left(\frac{G_1}{R_1^3E_1^2\delta_1}+\frac{G_2}{R_2^3E_2^2\delta_2}-\frac{G_2}{R_1^2E_1E_2R_2\delta_2}-\frac{G_1}{R_1^2E_1E_2R_2\delta_2}\right)t+$$
$$+\frac{G_0^2R_0^2}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{\delta_1E_1R_1}+\frac{1}{\delta_2E_2R_2}\right)^2,$$

де $t=n^2$.

Для того, щоб цей вираз був додатним при будь-якому $n>0$ (тобто також при $t>0$) необхідно, по-перше, щоб коефіцієнт при t^2 був додатним. Ця умова виконується, оскільки коефіцієнт є квадратом різниці. По-друге, необхідно, щоб дискримінант виразу був від'ємний.

Неважко переконається, що

$$\left(\frac{2G_0R_0}{\delta_0}\right)^2\left(\frac{G_1}{R_1^3E_1^2\delta_1}+\frac{G_2}{R_2^3E_2^2\delta_2}-\frac{G_2}{R_1^2E_1E_2R_2\delta_2}-\frac{G_1}{R_1^2E_1E_2R_2\delta_2}\right)^2-$$

$$-4\left(\frac{G_1}{R_1^2E_1}-\frac{G_2}{R_2^2E_2}\right)^2\frac{G_0^2R_0^2}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{\delta_1E_1R_1}+\frac{1}{\delta_2E_2R_2}\right)^2=-16\frac{G_0^2R_0^2\left(G_1E_1R_2^2-G_2E_2R_1^2\right)^2}{\delta_1\delta_2\delta_0^2E_1^3E_2^3R_1^5R_2^5}.$$

Очевидно, що дискримінант – від'ємний.

Отже, коефіцієнти $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ в загальному випадку є дійсними числами для будь-яких значень $n>0$.

З огляду на вищесказане, подамо переміщення U_1 у вигляді суперпозиції відповідних частинних розв'язків U_1^*. Потім, використовуючи співвідношення (3.7), знайдемо переміщення U_2. Провівши відповідні дії, отримаємо

$$U_m=A_0+A_1x+\gamma_0^{(m)}\left[A_3\operatorname{ch}\left(\beta_3x\right)+A_4\operatorname{sh}\left(\beta_3x\right)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}}\left(a_{1,n}\frac{\operatorname{ch}k_{1,n}x}{\operatorname{sh}k_{1,n}L}+a_{2,n}\frac{\operatorname{sh}k_{1,n}x}{\operatorname{ch}k_{1,n}L}\right)+\frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}}\left(a_{3,n}\frac{\operatorname{ch}k_{2,n}x}{\operatorname{sh}k_{2,n}L}+a_{4,n}\frac{\operatorname{sh}k_{2,n}x}{\operatorname{ch}k_{2,n}L}\right)\right]\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}}\left(b_{1,n}\frac{\operatorname{ch}k_{1,n}x}{\operatorname{sh}k_{1,n}L}+b_{2,n}\frac{\operatorname{sh}k_{1,n}x}{\operatorname{ch}k_{1,n}L}\right)+\frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}}\left(b_{3,n}\frac{\operatorname{ch}k_{2,n}x}{\operatorname{sh}k_{2,n}L}+b_{4,n}\frac{\operatorname{sh}k_{2,n}x}{\operatorname{ch}k_{2,n}L}\right)\right]\sin n\varphi,$$

де $A_1,...,A_4$, $a_{1,n},...,a_{4,n}$ і $b_{1,n},...,b_{4,n}$ - невідомі коефіцієнти, що знаходяться із граничних умов; множники $k_{m,n}\operatorname{sh}k_{m,n}L$ і $k_{m,n}\operatorname{ch}k_{m,n}L$ в знаменнику використовуються для нормування та полегшення аналізу збіжності розв'язку; коефіцієнти $\gamma_0^{(1)}=\gamma_{1,n}^{(1)}=\gamma_{2,n}^{(1)}=1$, $\gamma_0^{(2)}=1-\alpha_1\beta_3^2$, $\gamma_{1,n}^{(2)}=1-\alpha_1\left(k_{1,n}^2-n^2\mu_1^2\right)$, $\gamma_{2,n}^{(2)}=1-\alpha_1\left(k_{2,n}^2-n^2\mu_1^2\right)$.

Відзначимо, що в формулах для переміщень U_1 і U_2 перші доданки, що стоять поза знаком суми, є класичним одновимірний розв'язком Фолькерсена [22], які описують переміщення, що викликані результуючими рівномірними зусиллями. А складові, що стоять під знаками сум, які описують напруження, що викликані самоврівноважуючими зусиллями, - експоненційно спадають при віддаленні від краю з'єднання вглиб області склейки. Те ж саме можна сказати і про зусилля (3.2). Дана властивість розв’язку повністю відповідає принципу Сен-Венана.

Покладемо, що поздовжнє навантаження прикладене до зовнішньої труби по правому торцю $x = L$, на лівому торці внутрішньої труби $x = 0$ задані переміщення (3.5).

Тоді поздовжні зусилля в несних шарах (3.2) можна записати у вигляді

$$N_m = E_m \delta_m \Big\{ A_1 + \gamma_0^{(m)} \left[A_3 \beta_3 \operatorname{sh}(\beta_3 x) + A_4 \beta_3 \operatorname{ch}(\beta_3 x) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{1,n}^{(m)} \left(a_{1,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \gamma_{2,n}^{(m)} \left(a_{3,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \cos n\varphi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{1,n}^{(m)} \left(b_{1,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \gamma_{2,n}^{(m)} \left(b_{3,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi \Big\}.$$

Зусилля і переміщення на торцях (3.5) розкладемо в ряди Фур'є

$$u^{(2)}(\varphi) = \frac{c_0^{(2)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(2)} \cos n\varphi + s_n^{(2)} \sin n\varphi \right),$$

$$F^{(1)}(\varphi) = \frac{c_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \cos n\varphi + s_n^{(1)} \sin n\varphi \right),$$

$$H^{(m)}(\varphi) = \frac{C_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{(m)} \cos n\varphi + S_n^{(m)} \sin n\varphi \right),$$

де $c_0^{(2)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) d\varphi$, $c_n^{(2)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$, $s_n^{(2)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$,

$c_0^{(1)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) d\varphi$, $c_n^{(1)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$, $s_n^{(1)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$,

$C_0^{(m)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) d\varphi$, $C_n^{(m)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$, $S_n^{(m)} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$.

Задовольнивши крайові умови, отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів $A_1,...,A_4$, $a_{1,n},...,a_{4,n}$ і $b_{1,n},...,b_{4,n}$.

$$\begin{cases} A_1+\gamma_0^{(1)}A_4\beta_3=\dfrac{c_0^{(1)}}{2E_2\delta_2}, \\ A_1+\gamma_0^{(1)}\left[A_3\beta_3\,\mathrm{sh}\left(\beta_3L\right)+A_4\beta_3c\,\mathrm{h}\left(\beta_3L\right)\right]=\dfrac{C_0^{(1)}}{2E_1\delta_1}, \\ A_1+\gamma_0^{(2)}\left[A_3\beta_3\,\mathrm{sh}\left(\beta_3L\right)+A_4\beta_3\,\mathrm{ch}\left(\beta_3L\right)\right]=\dfrac{C_0^{(2)}}{2E_2\delta_2}, \\ A_0+\gamma_0^{(2)}A_3=\dfrac{c_0^{(2)}}{2}; \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma_{1,n}^{(1)}a_{2,n}}{\mathrm{ch}\,k_{1,n}L}+\dfrac{\gamma_{2,n}^{(1)}a_{4,n}}{\mathrm{ch}\,k_{2,n}L}=\dfrac{c_n^{(1)}}{E_1\delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(1)}\left(a_{1,n}+a_{2,n}\right)+\gamma_{2,n}^{(1)}\left(a_{3,n}+a_{4,n}\right)=\dfrac{C_n^{(1)}}{E_1\delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)}\left(a_{1,n}+a_{2,n}\right)+\gamma_{2,n}^{(2)}\left(a_{3,n}+a_{4,n}\right)=\dfrac{C_n^{(2)}}{E_2\delta_2}, \\ \dfrac{\gamma_{1,n}^{(2)}}{k_{1,n}}\dfrac{a_{1,n}}{\mathrm{sh}\,k_{1,n}L}+\dfrac{\gamma_{2,n}^{(2)}}{k_{2,n}}\dfrac{a_{3,n}}{\mathrm{sh}\,k_{2,n}L}=c_n^{(2)}; \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma_{1,n}^{(1)}b_{2,n}}{\mathrm{ch}\,k_{1,n}L}+\dfrac{\gamma_{2,n}^{(m)}b_{4,n}}{\mathrm{ch}\,k_{2,n}L}=\dfrac{s_n^{(1)}}{E_1\delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(1)}\left(b_{1,n}+b_{2,n}\right)+\gamma_{2,n}^{(1)}\left(b_{3,n}+b_{4,n}\right)=\dfrac{S_n^{(1)}}{E_1\delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)}\left(b_{1,n}+b_{2,n}\right)+\gamma_{2,n}^{(2)}\left(b_{3,n}+b_{4,n}\right)=\dfrac{S_n^{(2)}}{E_2\delta_2}, \\ \dfrac{\gamma_{1,n}^{(2)}}{k_{1,n}}\dfrac{b_{1,n}}{\mathrm{sh}\,k_{1,n}L}+\dfrac{\gamma_{2,n}^{(2)}}{k_{2,n}}\dfrac{b_{3,n}}{\mathrm{sh}\,k_{2,n}L}=s_n^{(2)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Розв’язавши ці системи, знаходимо $A_1,...,A_4$, $a_{1,n},...,a_{4,n}$ і $b_{1,n},...,b_{4,n}$.

Можна показати, що швидкість спадання коефіцієнтів $a_{1,n},...,a_{4,n}$ та $b_{1,n},...,b_{4,n}$ перевищує швидкість спадання коефіцієнтів $c_n^{(m)}$, $C_n^{(m)}$, $s_n^{(m)}$, $S_n^{(m)}$, які пропорційні $n^{-\theta}$, де $\theta \geq 1$.

Розглянемо клейове з'єднання двох труб довжиною $L = 50$ мм з зовнішніми радіусами $R_2 = 30$ мм, $R_1 = 33$ мм, товщиною $\delta_2 = 4$ мм, $\delta_1 = 2{,}9$ мм. Товщина клейового шару $\delta_0 = 0{,}1$ мм. Пружні характеристики матеріалів з'єднання – $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 27$ ГПа, $G_0 = 0{,}34$ ГПа. Задамо граничні умови на торцях труб, що склеєні

$$U_2\big|_{x=0} = u^{(2)}(\varphi) = 0,\; F^{(1)}(\varphi) = 0,\; H^{(2)}(\varphi) = 0,$$

$$H^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} F_0, -\dfrac{\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{\pi}{8};\; \dfrac{3\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{5\pi}{8};\; \dfrac{7\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{9\pi}{8};\; \dfrac{11\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{13\pi}{8}; \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{3\pi}{8};\; \dfrac{5\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{7\pi}{8};\; \dfrac{9\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{11\pi}{8};\; \dfrac{13\pi}{8} \leq \varphi < \dfrac{15\pi}{8}. \end{cases}$$

Більш наочно схема прикладання навантаження показана на рис. 3.3, де подано торці розглянутої склеєної конструкції.

а *б*

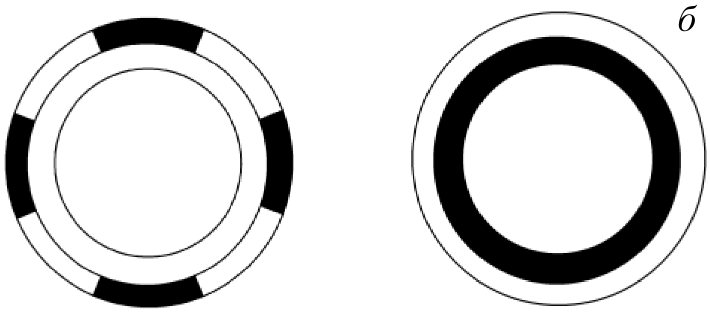

Рисунок 3.3. Крайові умови при $x = L$ (а), і при $x = 0$ (б)

Навантажені ділянки виділені чорним кольором. Ділянки без навантаження – білі. Зусилля, що прикладені на чотирьох секторах до зовнішньої трубі, передаються через клейовий шар до внутрішньої труби, жорстко закріпленої по всьому торцю. На рис. 3.4 наведено графік дотичних напружень $\tau_0(\varphi, x)$ (3.3) у вигляді поверхні в координатах (φ, x).

З огляду на симетрію задачі, на рисунку показано напруження на одній восьмій частині окружності, $\varphi \in [0; \pi/4]$. Графіки напружень наведено в безрозмірній формі як відношення діючих дотичних напружень τ до гіпотетичних напружень $T_0 = \dfrac{F_0 R_1}{2LR_0}$, які виникли б у клейовому шарі при рівномірному розподілі прикладеного навантаження по довжині з'єднання. Двійка в знаменнику обумовлена тим, що навантаження F_0 прикладено лише на половині довжини окружності зовнішньої труби (див. рис. 3.3, а).

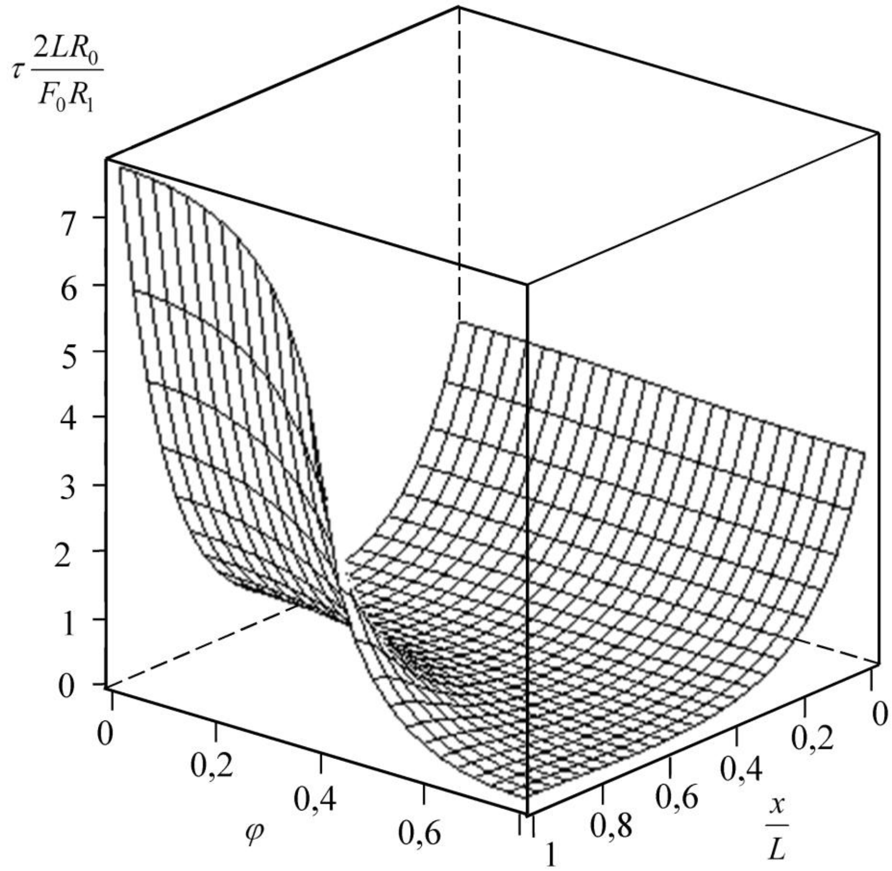

Рисунок 3.4. Напруження в клейовому шарі

З наведеного рисунка видно, що максимальних значень напруження досягають в середині навантажених ділянок. А на опертому торці напружений стан практично рівномірний за окружною координатою. При розрахунках жорсткість клейового шару обчислювалася як $P = \left(\dfrac{\delta_0}{G_0} + \dfrac{\delta_1}{2G_1} + \dfrac{\delta_2}{2G_2} \right)^{-1}$. Для оцінки точності запропонованої моделі був проведений розрахунок напруженого стану розглянутої конструкції за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) в тривимірній постановці. Крайові умови дозволяють розглянути сектор з крайовими умовами типу «roller» на бічних сторонах. Зусилля на торці заміняються еквівалентними нормальними напруженнями. На рис. 3.5. показано розподіл дотичних напружень в серединній поверхні клейового шару (також в безрозмірній формі).

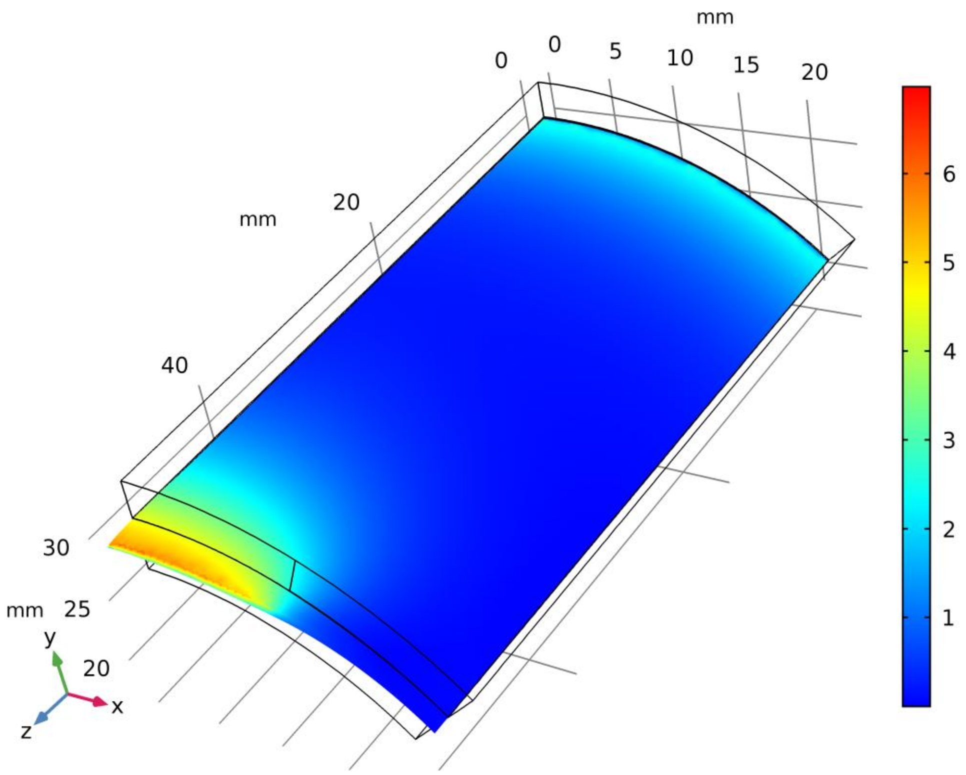

Рисунок 3.5. Напруження в клейовому шарі, розраховані за допомогою МСЕ

Для розрахунку НДС було створено тривимірну скінчено-елементну модель. Для наочного порівняння результатів наведемо на одному графіку напруження у клейовому шарі, які розраховані за запропонованою методикою і за допомогою МСЕ. Розглянемо розподіл напружень по довжині з'єднання. На рис. 3.6. показані напруження в клеї при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi / 4$. Крім того, показаний графік дотичних напружень в середині клейового шару при $\varphi = 0$, отриманий за допомогою методу скінченних елементів.

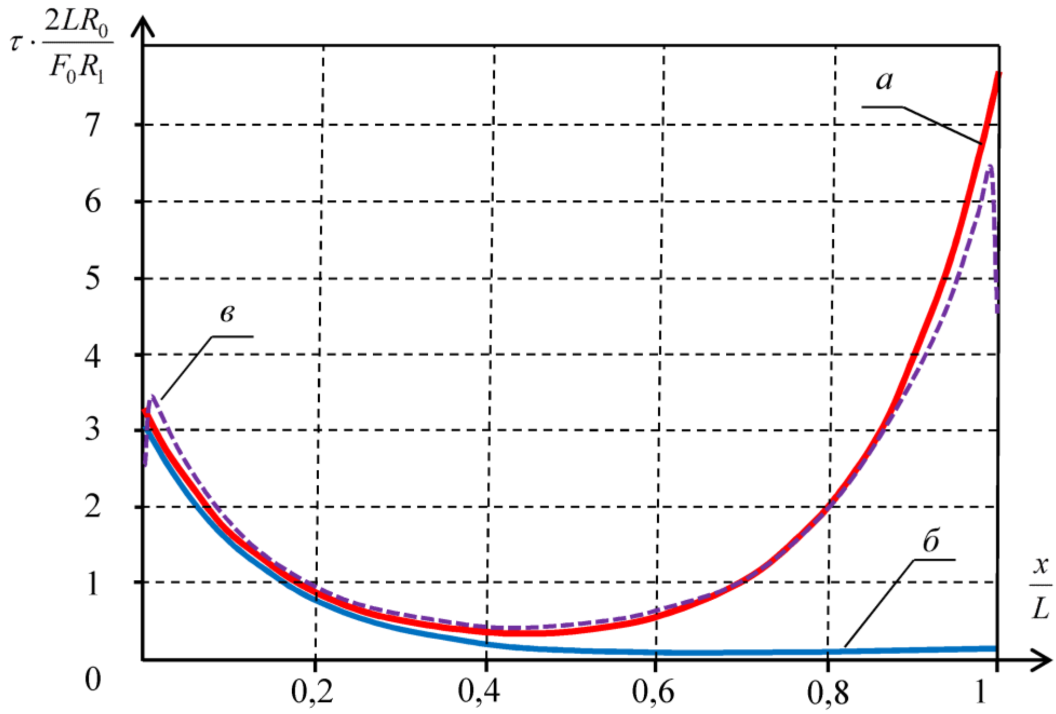

Рисунок 3.6. Напруження в клейовому шарі, обчислені за запропонованою методикою при $\varphi = 0$ – а, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ – б і розраховані за допомогою МСЕ в ($\varphi = 0$)

Як бачимо, криві ***а*** і ***в*** практично збігаються, відрізняючись лише у країв склейки, де клей знаходиться в умовах складного напруженого стану. Відповідно до моделі напруженого стану клею (3.3) дотичні напруження – максимальні у країв склейки, що суперечить закону парності дотичних напружень, оскільки зовнішній край клейового шару вільний від навантаження. Ця властивість моделі (3.3) добре відома, і для виключення зазначеного протиріччя створено уточнені одновимірні моделі напруженого стану з'єднань [4, 107, 134, 59]. Однак застосування таких моделей напруженого стану клейового шару в двовимірних моделях з'єднань поки невідомо.

Запропоновано модель напружено-деформованого стану клейового з'єднання двох коаксіальних циліндричних труб. Побудовано аналітичний розв'язок задачі по визначенню НДС даної конструкції. Основним припущенням, яке дозволяє спростити задачу, є припущення про малість поперечних деформацій і переміщень елементів, що з'єднуються. Задачу зведено до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних щодо поздовжніх переміщень несних шарів. Модельна задача, що розв'язана, показала, що запропонована модель має точність, достатню для задач проектування.

3.2 Осесиметричний напружений стан клейового з'єднання двох циліндричних оболонок при осевому розтягу

Розглянемо схему з'єднання, основні розміри якого показано на рис.3.7.

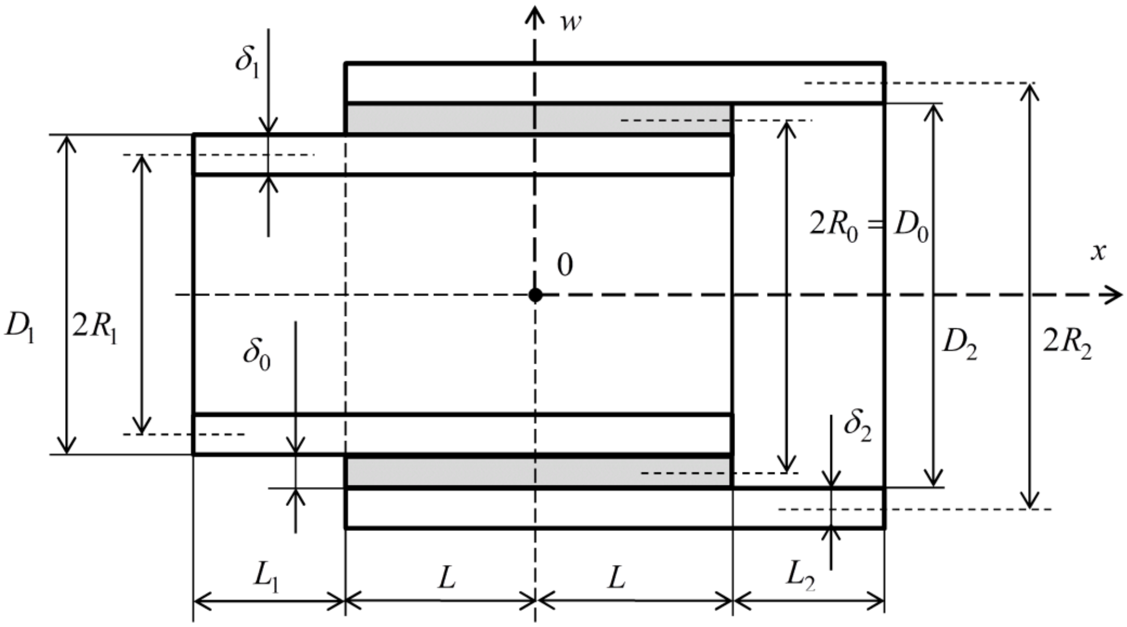

Рисунок 3.7. Схема з'єднання

Початок координат помістимо в середину області склейки. Радіуси серединних поверхонь циліндричних оболонок позначимо R_1 і R_2 відповідно. Зовнішній і внутрішній діаметри труб, що звернені до клейового шару, – D_1 і D_2. Радіус серединної поверхні клейового шару – R_0. Товщини несних шарів і клейового шару позначимо δ_1, δ_2 і δ_0.

Розглянемо більш докладно область склейки. Диференціальні елементи з'єднання та діючі зусилля показано на рис. 3.8.

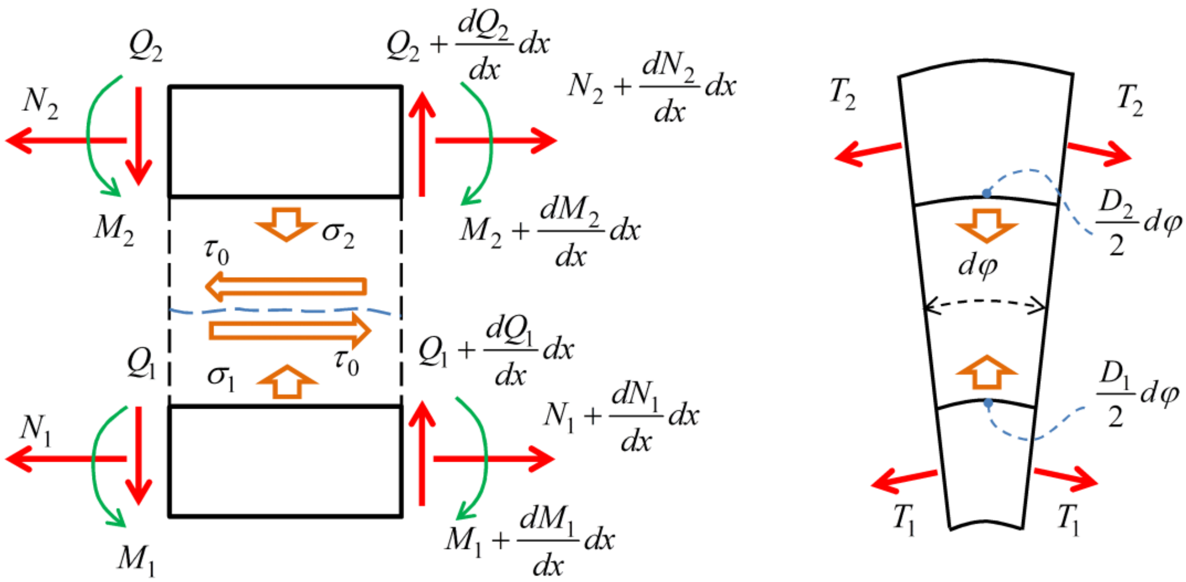

Рисунок 3.8. Рівновага диференціального елемента з'єднання

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання мають вигляд

$$R_1\frac{dN_1}{dx}+R_0\tau_0=0;\;\; R_2\frac{dN_2}{dx}-R_0\tau_0=0, \tag{3.14}$$

$$R_1\frac{dQ_1}{dx}+\frac{D_1}{2}\sigma_1-T_1=0;\;\; R_2\frac{dQ_2}{dx}-\frac{D_2}{2}\sigma_2-T_2=0, \tag{3.15}$$

$$R_1\frac{dM_1}{dx}-R_1Q_1+R_0\left(s_1+\frac{\delta_0}{2}\right)\tau_0=0;\;\; R_2\frac{dM_2}{dx}-R_2Q_2+R_0\left(s_2+\frac{\delta_0}{2}\right)\tau_0=0, \tag{3.16}$$

де величини s_1, s_2 - відстані від нейтральної осі при згині до зверненої до клейового шару зовнішньої поверхні шару, що несе. У разі симетричних (однорідних) шарів дана відстань дорівнює половині товщини шару, що несе.

Рівняння фізичного закону

$$N_i=B_x^{(i)}\cdot\frac{du_i}{dx}+B_y^{(i)}\mu_{yx}^{(i)}\cdot\frac{w_i}{R_i};\;\; T_i=B_y^{(i)}\cdot\frac{w_i}{R_i}+B_x^{(i)}\mu_{xy}^{(i)}\cdot\frac{du_i}{dx}, \tag{3.17}$$

де $i=1,\ 2$; $B_x^{(i)}=\dfrac{E_x^{(i)}\delta_i}{1-\mu_{xy}^{(i)}\mu_{yx}^{(i)}}$, $B_y^{(i)}=\dfrac{E_y^{(i)}\delta_i}{1-\mu_{xy}^{(i)}\mu_{yx}^{(i)}}$ - мембранні жорсткості несних шарів в поздовжньому і окружному напрямках; $E_x^{(i)}$ і $E_y^{(i)}$ - модулі пружності несного шару з номером $i=1,\ 2$ у відповідному напрямку.

В даному випадку вважаємо, що матеріали циліндричних оболонок, що з'єднуються – ортотропні;

Рівняння вигину оболонок

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = -\frac{M_i}{J_i}, \tag{3.18}$$

де в разі однорідних несних шарів згинальна жорсткість $J_i = \dfrac{E_x^{(i)}}{1-\mu_{xy}^{(i)}\mu_{yx}^{(i)}} I_i$, і де, в свою чергу, $I_i = \delta_i^3/12$ - момент інерції відповідного несного шару.

Рівняння рівноваги диференціального елемента клею в радіальному напрямку має вигляд

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{D_2\sigma_2 - D_1\sigma_1}{\delta_0 D_0}. \tag{3.19}$$

Нормальні напруження в клеї подамо у вигляді

$$\sigma_2 = \frac{D_0}{D_2}\left(\sigma_0 + \frac{\delta_0}{2}\frac{d\tau_0}{dx}\right);\ \ \sigma_1 = \frac{D_0}{D_1}\left(\sigma_0 - \frac{\delta_0}{2}\frac{d\tau_0}{dx}\right). \tag{3.20}$$

Така форма дозволяє обернути рівняння рівноваги (3.19) в тотожність. При цьому напруження будемо вважати пропорційними різниці поперечних переміщень несних шарів

$$\sigma_0 = K\left(w_2 - w_1\right), \tag{3.21}$$

де $K = E_0\delta_0^{-1}$ - жорсткість клейового шару на розтяг-стиск в трансверсальному напрямку.

Дотичні напруження в клеї будемо вважати пропорційними різниці поздовжніх переміщень внутрішніх, звернених до клейового шару, сторін несних шарів.

$$\tau_0 = P\left(u_2 - u_1 + s_2\frac{dw_2}{dx} + s_1\frac{dw_1}{dx}\right), \tag{3.22}$$

де $P=\left(\frac{\delta_0}{G_0}+\frac{\delta_1}{2G_1}+\frac{\delta_2}{2G_2}\right)^{-1}$ - уточнена жорсткість клейового шару на зсув [135].

Система рівнянь (3.14) – (3.22) може бути зведена до системи чотирьох диференціальних рівнянь щодо поздовжніх і поперечних (радіальних) переміщень несних шарів, яку в матричної формі можна записати в такий спосіб:

$$\mathbf{A}_4\frac{d^4\vec{\mathbf{V}}}{dx^4}+\mathbf{A}_2\frac{d^2\vec{\mathbf{V}}}{dx^2}+\mathbf{A}_1\frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dx}+\mathbf{A}_0\vec{\mathbf{V}}=0, \qquad (3.23)$$

де $\vec{\mathbf{V}}=\left(u_1;\quad u_2;\quad w_1;\quad w_2\right)^T$ – вектор-функція переміщень шарів.

$$\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} \frac{R_1B_x^{(1)}}{R_0P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2B_x^{(2)}}{R_0P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1^2 & -s_1s_2 \\ 0 & 0 & -s_1s_2 & -s_2^2 \end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_0=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_y^{(1)}}{R_0R_1P}+\frac{K}{P} & -\frac{K}{P} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{P} & \frac{B_y^{(2)}}{R_0R_2P}+\frac{K}{P} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{yx}^{(1)}+s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & -s_1 & \beta_{yx}^{(2)}-s_2 \\ \beta_{xy}^{(1)}+s_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & \beta_{xy}^{(2)}-s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1J_1}{R_0P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_2J_2}{R_0P} \end{pmatrix},$$

де $\beta_{yx}^{(i)}=\frac{\mu_{yx}^{(i)}}{R_0}\frac{B_y^{(i)}}{P}$; $\beta_{xy}^{(i)}=\frac{\mu_{xy}^{(i)}}{R_0}\frac{B_x^{(i)}}{P}$. Відповідно до теорії пружності ортотропного тіла має місце співвідношення $\mu_{xy}E_x=\mu_{yx}E_y$. Отже, матриці рівняння (3.23) – симетричні.

Розв’язок рівняння (3.23) шукаємо у вигляді $\vec{\mathbf{V}}=\vec{\mathbf{h}}\mathrm{e}^{\lambda x}$, підставивши в (3.23) і спростивши, отримаємо рівняння

$$\mathbf{A}_s\vec{\mathbf{h}}=0, \qquad (3.24)$$

де $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}_4\lambda^4 + \mathbf{A}_2\lambda^2 + \mathbf{A}_1\lambda + \mathbf{A}_0$.

Характеристичне рівняння $\det\left(\mathbf{A}_s\right) = 0$ має корінь $\lambda = 0$ другого ступеня кратності і десять відмінних від нуля коренів. Вектори $\vec{\mathbf{h}}_k$ знаходимо з рівняння (3.24) з точністю до довільного множника C_k. Тому загальний розв'язок (3.23) можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{k=1}^{10} C_k \vec{\mathbf{h}}_k \,\mathrm{e}^{\lambda_k x} + \vec{\mathbf{H}}_0 + \vec{\mathbf{H}}_1 x,$$

де $\vec{\mathbf{H}}_0$ і $\vec{\mathbf{H}}_1$ - власні вектори, що відповідають $\lambda = 0$; $\vec{\mathbf{h}}_k$ - власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda \neq 0$.

$$\vec{\mathbf{H}}_1 = \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{H}}_0 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{11} \\ C_{12}\alpha_1 \\ C_{12}\alpha_2 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = -R_1 \frac{KR_0R_2\left(\mu_{xy}^{(1)}B_x^{(1)} + \mu_{xy}^{(2)}B_x^{(2)}\right) + B_x^{(1)}\mu_{xy}^{(1)}B_y^{(2)}}{KR_0\left(R_2B_y^{(1)} + R_1B_y^{(2)}\right) + B_y^{(1)}B_y^{(2)}},$$

$$\alpha_2 = -R_2 \frac{KR_0R_1\left(\mu_{xy}^{(1)}B_x^{(1)} + \mu_{xy}^{(2)}B_x^{(2)}\right) + B_y^{(1)}\mu_{xy}^{(2)}B_x^{(2)}}{KR_0\left(R_2B_y^{(1)} + R_1B_y^{(2)}\right) + B_y^{(1)}B_y^{(2)}}.$$

Таким чином, в формули для переміщень входить дванадцять констант C_k. З формул (3.14) – (3.22) знаходимо зусилля N_i, Q_i і T_i в несних шарах, згинальні моменти M_i і напруження τ_0 і σ_i в клейовому шарі.

Поздовжні і поперечні переміщення закінцівок позначимо u_3, w_3, ($x \in \left[-L_1 - L; -L\right]$) і u_4, w_4 ($x \in \left[L; L + L_2\right]$). Поза областю склеювання переміщення будуть описуватися класичними рівняннями осесиметричної циліндричної оболонки

$$\begin{aligned} &\frac{R_1^2 J_1}{B_y^{(1)}} \frac{d^4 w_3}{dx^4} + \left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right) w_3 = -\frac{\mu_{xy}^{(1)} F_0}{2\pi B_y^{(1)}}; \\ &\frac{R_2^2 J_2}{B_y^{(2)}} \frac{d^4 w_4}{dx^4} + \left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right) w_4 = -\frac{\mu_{xy}^{(2)} F_0}{2\pi B_y^{(2)}} \end{aligned}, \qquad (3.25)$$

$$\begin{matrix} N_3 = B_x^{(1)} \cdot \dfrac{du_3}{dx} + B_y^{(1)} \mu_{yx}^{(1)} \cdot \dfrac{w_3}{R_1}; & T_3 = B_y^{(1)} \cdot \dfrac{w_3}{R_1} + B_x^{(1)} \mu_{xy}^{(1)} \cdot \dfrac{du_3}{dx}; \\ ; & , \\ N_4 = B_x^{(2)} \cdot \dfrac{du_4}{dx} + B_y^{(2)} \mu_{yx}^{(2)} \cdot \dfrac{w_4}{R_2}; & T_4 = B_y^{(2)} \cdot \dfrac{w_4}{R_2} + B_x^{(2)} \mu_{xy}^{(2)} \cdot \dfrac{du_4}{dx}; \end{matrix} \qquad (3.26)$$

де F_0 - повздовжня сила, що прикладена до з'єднання; $N_3 = \dfrac{F_0}{2\pi R_1} = const$ і $N_4 = \dfrac{F_0}{2\pi R_2} = const$.

Розв'язавши диференціальні рівняння (3.25) і (3.26), знайдемо залежності, що описують переміщення на зовнішніх ділянках конструкції. Зусилля в оболонках описуються залежностями

$$\frac{dQ_3}{dx} = \frac{T_3}{R_1},\ \frac{dQ_4}{dx} = \frac{T_4}{R_2},\ \frac{dM_3}{dx} = Q_3,\ \frac{dM_4}{dx} = Q_4,\ \frac{d^2 w_3}{dx^2} = -\frac{M_3}{J_1},\ \frac{d^2 w_4}{dx^2} = -\frac{M_4}{J_2}.$$

Крайові умови і умови спряження

$$u_3\big|_{x=-L-L_1} = \frac{dw_3}{dx}\bigg|_{x=-L-L_1} = Q_3\big|_{x=-L-L_1} = 0;\ N_2\big|_{x=-L} = Q_2\big|_{x=-L} = M_2\big|_{x=-L} = 0;$$

$$u_3\big|_{x=-L} = u_1\big|_{x=-L};$$

$$w_3\big|_{x=-L} = w_1\big|_{x=-L};\ \frac{dw_3}{dx}\bigg|_{x=-L} = \frac{dw_1}{dx}\bigg|_{x=-L};\ N_3\big|_{x=-L} = N_1\big|_{x=-L};\ Q_3\big|_{x=-L} = Q_1\big|_{x=-L};$$

$$M_3\big|_{x=-L} = M_1\big|_{x=-L};$$

$$N_1\big|_{x=L} = Q_1\big|_{x=L} = M_1\big|_{x=L} = 0;\ u_4\big|_{x=L} = u_2\big|_{x=L};\ w_4\big|_{x=L} = w_2\big|_{x=L};\ \frac{dw_4}{dx}\bigg|_{x=L} = \frac{dw_2}{dx}\bigg|_{x=L};$$

$$N_4\big|_{x=L} = N_2\big|_{x=L};$$

$$Q_4\big|_{x=L} = Q_2\big|_{x=L};\ M_4\big|_{x=L} = M_2\big|_{x=L};\ Q_4\big|_{x=L+L_2} = M_4\big|_{x=L+L_2} = 0.$$

Крайові умови призводять до системи лінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів C_k і коефіцієнтів, що виникають при інтегруванні диференціальних рівнянь (3.25), (3.26).

Розглянемо конструкцію, що має такі параметри: $E_x^{(i)} = E_y^{(i)} = 70$ ГПа; $\mu_{xy}^{(i)} = \mu_{yx}^{(i)} = 0,3$; $i = 1, 2$; $L = 30$ мм; $L_1 = L_2 = 50$ мм; $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм; $G_0 = 0,36$ ГПа; $E_0 = 0,9$ ГПа; $\delta_0 = 0,1$ мм; радіуси $R_1 = 50$ мм; $R_0 = R_1 + 0,5\delta_1 + 0,5\delta_0$; $R_2 = R_0 + 0,5\delta_2 + 0,5\delta_0$. До з'єднання прикладена поздовжня сила F_0, що рівномірно розподілена по окружній координаті.

На рис. 3.9. показано фрагменти двох створених осесиметричних скінченно-елементних моделей.

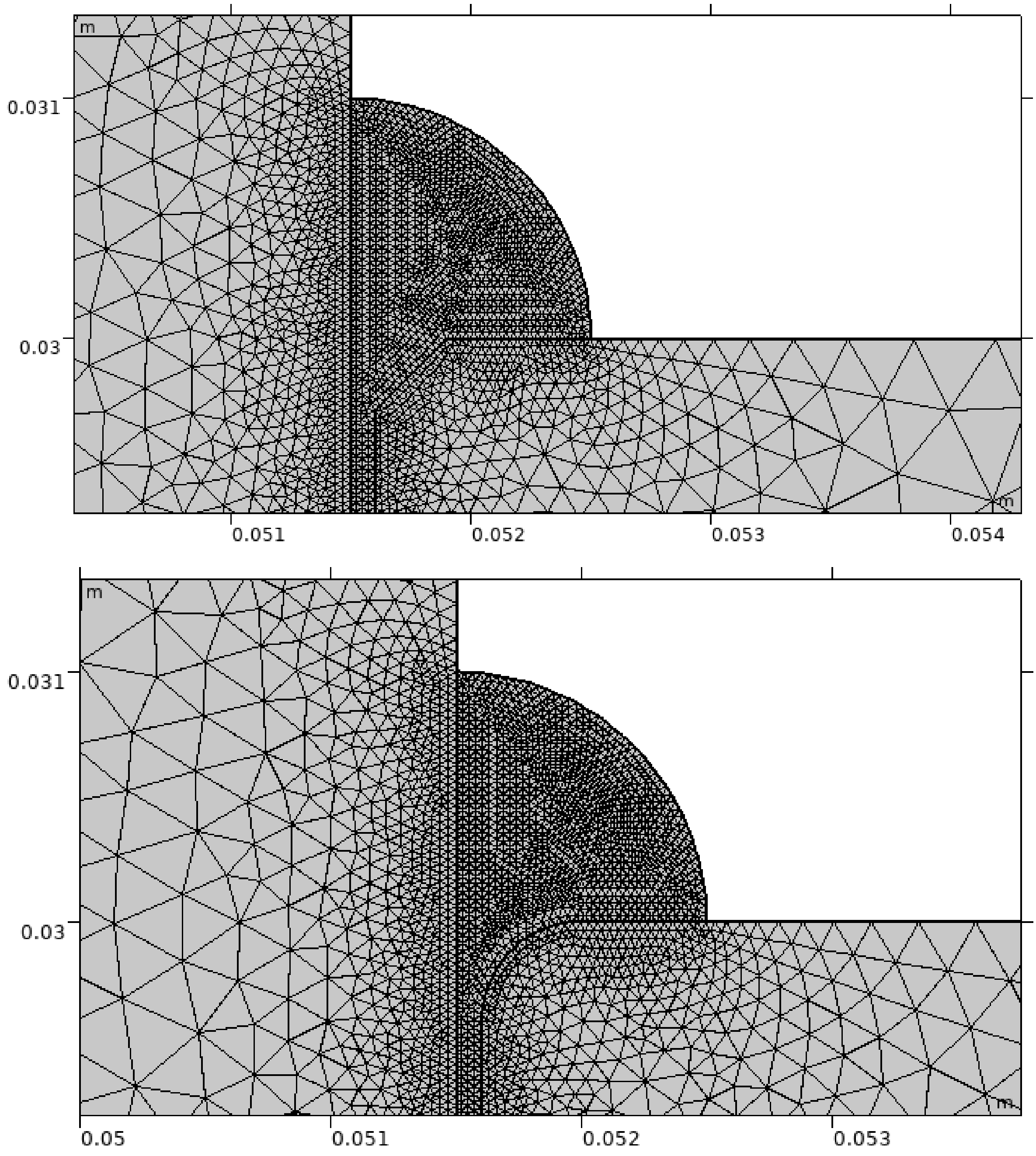

Рисунок 3.9. Фрагменти сітки скінченно-елементної моделі

У клейовому шарі сітка створена більш дрібною з тією метою, щоби мати можливість дослідити НДС клейового шару біля краю з'єднання. При моделюванні створено дві моделі. На краю несного шару у першій моделі зроблено фаску, а у другій моделі – радіус. В обох випадках клейовий шар створює обслой з видавлених надлишків клею.

На рис. 3.10. показано графіки дотичних (a) і нормальних (b) напружень в серединній поверхні клейового шару, які розраховані за запропонованою аналітичною моделлю. Напруження наведено в безрозмірній формі як відношення діючих напружень τ_0 і σ_0 до дотичних напружень $\dfrac{F_0}{4\pi R_0 L}$, які мали б місце при рівномірному розподілі напружень по серединній поверхні клейового шару. Напруження σ_1 і σ_2 в даному випадку мало відрізняються від напружень σ_0 і майже не відрізняються на графіку, і тому на рисунку не приведені, а показано їх середнє значення σ_0.

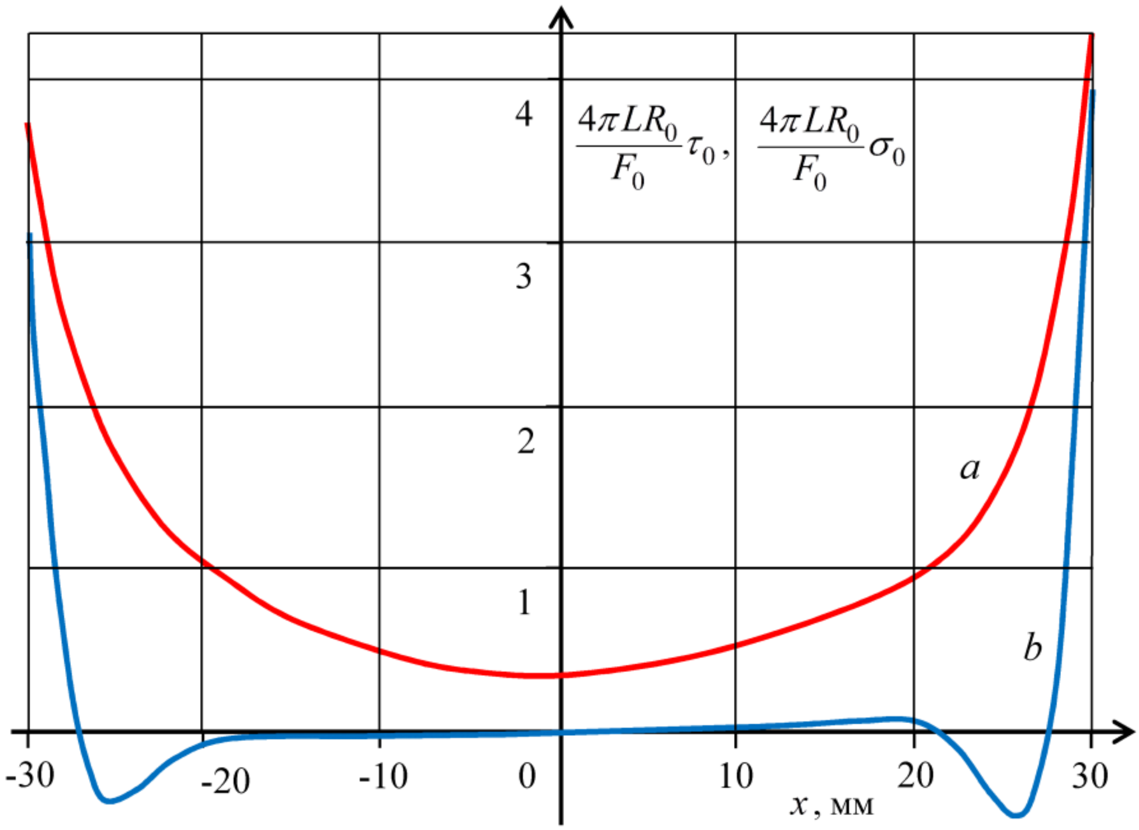

Рисунок 3.10. Напруження в клейовому шарі

Для верифікації розрахункової моделі проведено розрахунок напруженого стану розглянутої конструкції за допомогою МСЕ. Скінченно-елементна модель конструкції (рис. 3.7.) доповнена напливом клею в обох кінцях шва в формі чверті круга радіусом $5\delta_0$, а край деталі, що з'єднується, доповнений фасками зі стороною $2\delta_0$. Характерний розмір кінцевого елемента в клейовому шарі становить $0,2\delta_0$. На рис. 3.11. показано напруження в околі одного з країв шва. Безперервними лініями показано графіки дотичних (a) і нормальних (b) напружень в серединній поверхні клейового шару, обчислені за запропонованою моделлю. Пунктирними лініями показано графіки напружень τ_0, σ_1 і σ_2, що обчислені за допомогою МСЕ з застосуванням моделі з фаскою. Скачки напружень за межами області склейки обумовлені змінами геометрії клейового шару, такими як фаска і наплив клею. Скачки мають локальний характер, не перевищуючи значень на краю клейового шару.

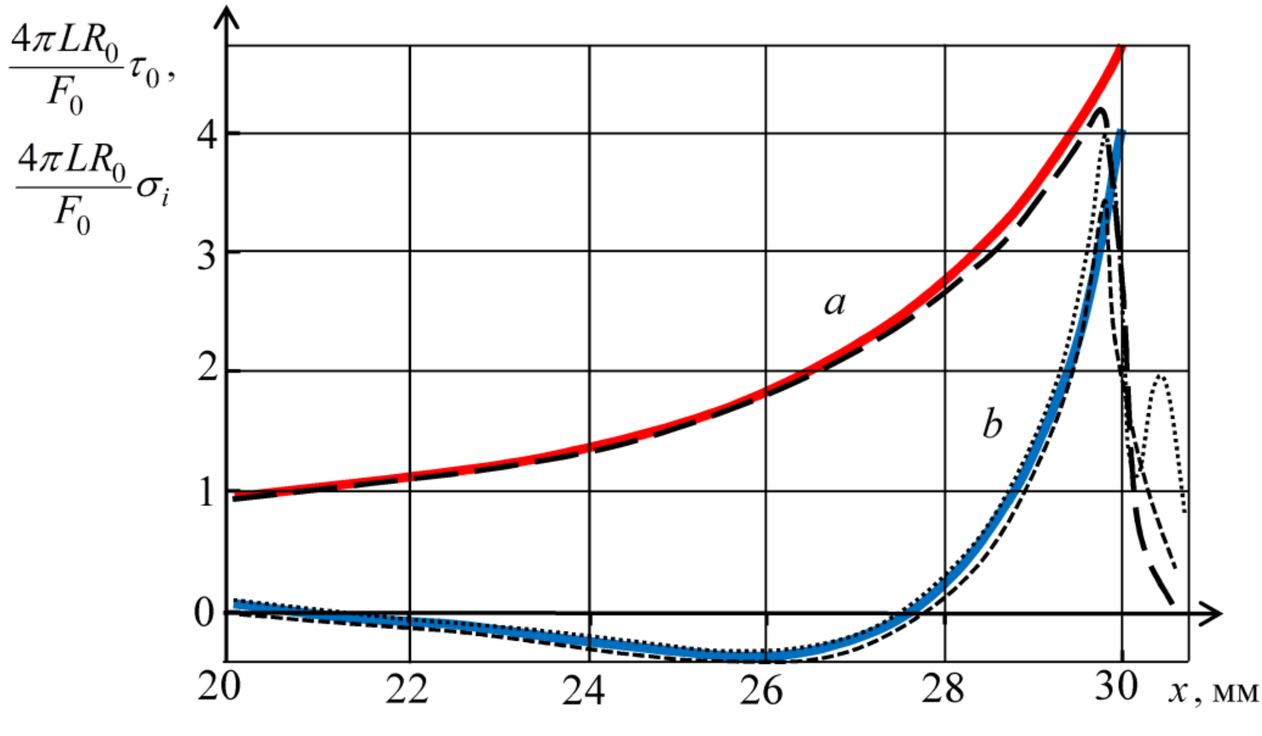

Рисунок 3.11. Напруження в клейовому шарі у краю шва

Якщо клейового напливу немає, то, в силу умов парності дотичних напружень, дотичні напруження на краю шва дорівнюють нулю і досягають максимуму на відстані близько товщини клейового шару від краю клейового шва [4, 33, 107]. При цьому нормальні напруження в клеї σ_1 і σ_2 в значній мірі відрізняються (навіть знаком) у країв клейового шва, але практично збігаються в глибині області. При наявності напливу клею, який по товщині перевершує товщину клейового шару в кілька разів, як в даному випадку, дотичні напруження досягають максимуму на краю клейового шва, а напруження σ_1 і σ_2 відрізняються незначно одне від одного. Отже, можна зробити висновок про те, що запропонована модель краще описує НДС клейового шару при наявності клейового напливу.

На рис. 3.12 наведено розподіл напружень у клейовому шарі біля краю склейки у моделі з фаскою. Для ілюстрації складної картини розподілу обрано перші головні напруження.

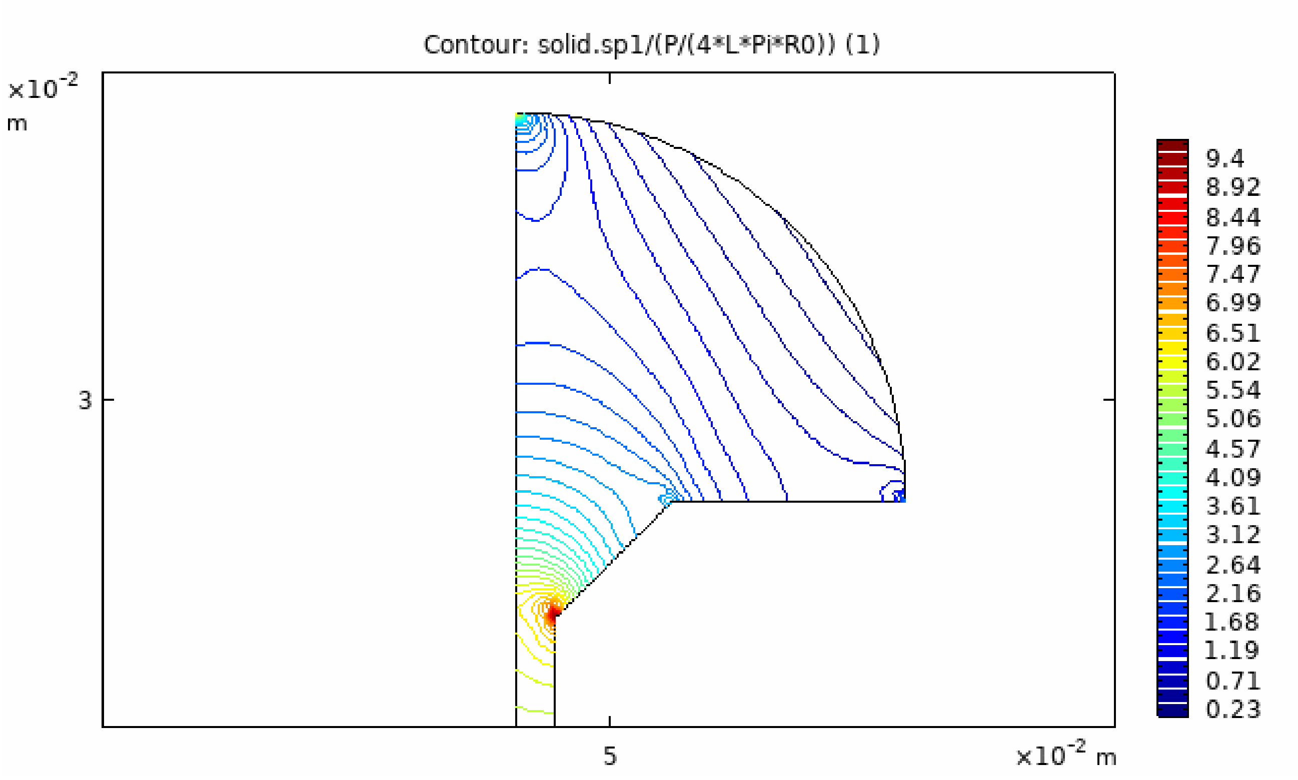

Рисунок 3.12. Розподіл перших головних напружень у клеї біля краю шва у випадку гострої фаски

Як бачимо, наявність фаски суттєво впливає на розподіл напружень у крайовій зоні. Для порівняння розглянемо розподіл перших головних напружень у моделі зі скругліннямкромки несного шару, що показано на рис. 3.13.

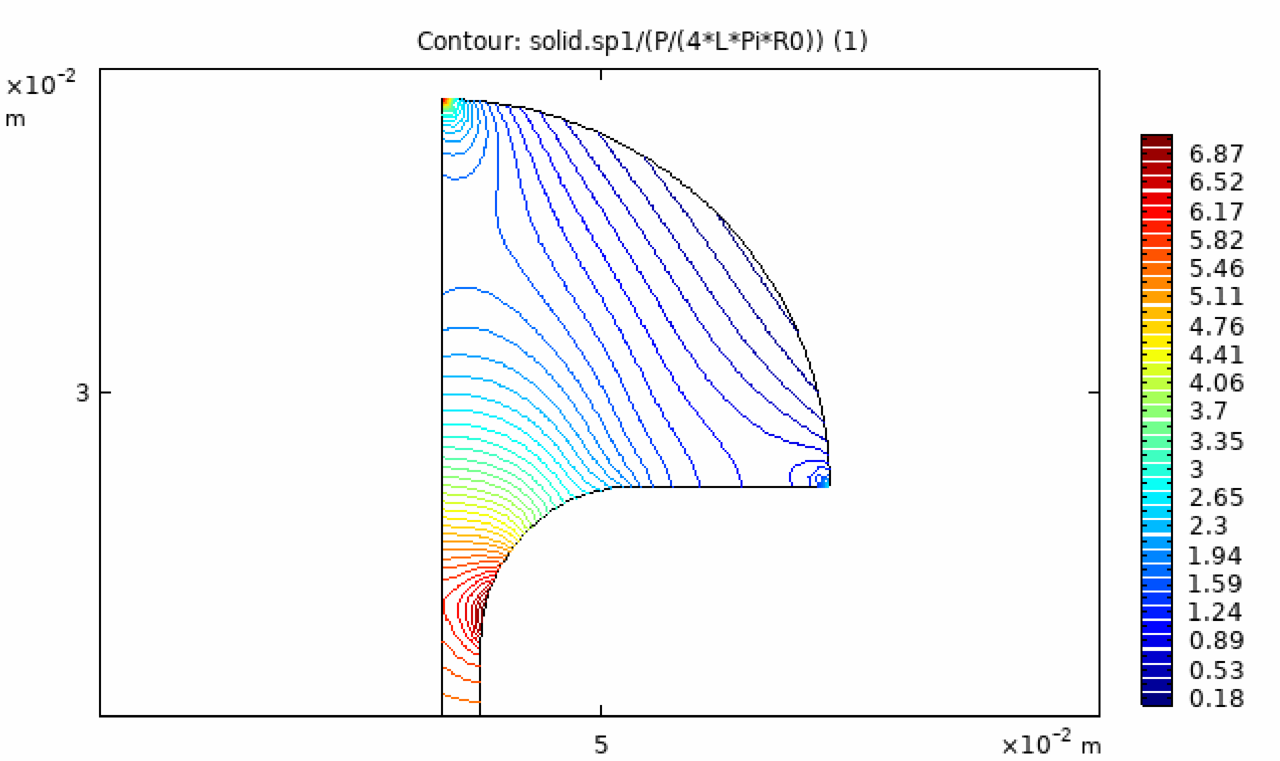

Рисунок 3.13. Розподіл перших головних напружень у клеї біля краю шва у випадку скруглення

Запропоновано модель осесиметричного напруженого стану клейового з'єднання двох коаксіальних циліндричних оболонок. Розв'язок отримано в аналітичній формі. Розв'язано модельну задачу. Показано, що запропонована модель має хорошу точність і може бути використана для розв'язання задач проектування конструкцій.

Подальший розвиток даної моделі може бути направлено на уточнення моделі НДС клейового шару, використанні теорії оболонок Тимошенка для опису НДС несних шарів, обліку сил інерції, температурних деформацій та ін. Одним з можливих напрямків узагальнення даного підходу є створення моделі напруженого стану так званого двозрізного з'єднання, тобто з'єднання трьох несних шарів, в якому центральний несний шар з зовнішньої і внутрішньої сторони з'єднаний з двома накладками. Таке конструктивне рішення дозволяє значно зменшити згинальні моменти і відривні напруження в клеї.

3.3 Висновки за розділом

У цьому розділі дано розвиток моделюванню НДС циліндричних з’єднань, які мають достатньо широке застосування у аерокосмічній техніці. Розглянуто дві моделі НДС таких з’єднань і отримано такі результати.

1. Побудовано аналітичний розв’язок задачі зі знаходження напруженого стану клейового з’єднання внапуск двох товстостінних циліндрів, які є достатньо жорсткими і радіальним вигином яких можна знехтувати. Задачу розв’язано в неосесиметричній постановці, що дозволяє знаходити напружений стан за умов локального навантаження.

2. Побудовано аналітичний розв’язок задачі зі знаходження напруженого стану з’єднання двох коаксіальних циліндричних оболонок. Задачу розв’язану в осесиметричній постановці, що дозволяє застосувати одновимірну модель НДС з’єднання. При побудові розв’язку застосовано уточнену модель розподілу нормальних напружень у клейовому шарі та враховано вплив закінцівок з’єднання, тобто вплив виступаючих за межі з’єднання частин з’єднуваних оболонок.

3. Проведено порівняння НДС модельних задач з розрахунками, виконаними за допомогою МСЕ, та проілюстровано адекватність створених статичних моделей НДС та їхню достатню точність для інженерних задач.

4. Показано, що наявність фаски на несному шарі та наявність видавлених за межі склейки надлишків клею суттєво згладжує нормальні напруження у клейовому шарі, і тому дозволяє застосовувати класичну модель НДС клейового шару, яка не потребує застосування умови рівності нулю дотичних напружень у клеї на зовнішній його границі.

Результати розділу опубліковано в роботах [53, 136, 55, 121, 51, 54].

РОЗДІЛ 4
ОСЕСИМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ СТАТИЧНОГО НДС З'ЄДНАННЯ ПЛАСТИНИ, ЩО МІСТИТЬ КРУГЛИЙ ОТВОР, З КОНЦЕНТРИЧНОЮ НАКЛАДКОЮ

Тонкостінні авіаційні конструкції можуть мати дефекти у вигляді отворів і тріщин, які з’являються в процесі експлуатації, наприклад, в наслідок механічних пошкоджень. Наявність отворів у пластині спричиняє концентрацію напружень на межі отворів, що призводить, у кінцевому підсумку, до передчасного виходу елементу конструкції з ладу. Для підкріплення отворів часто застосовуються так звані ремонтні накладки. З’єднання накладки з основною пластиною може реалізовуватися у системі точок (заклепкові з’єднання) (рис. 4.1.), по лініях (зварні шви) або по всій поверхні накладки (клейові з’єднання внапуск) (рис. 4.2.). Дослідження напруженого стану пластини з отворами або тріщинами різної форми є класичною задачею механіки і має велику історію [139, 141, 39]. Отвори можуть бути підкріплені внутрішніми пружними вставками [138] або накладками [140, 47, 27], які можуть бути з’єднані з основною пластиною заклепками [137].

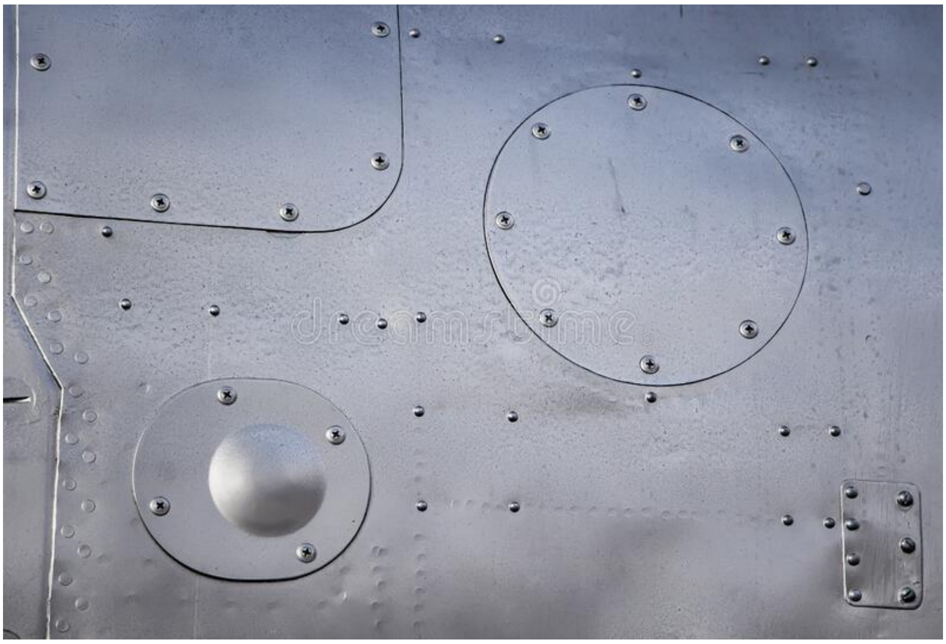

Рисунок 4.1. Заклепкові з’єднання ремонтних накладок з обшивкою

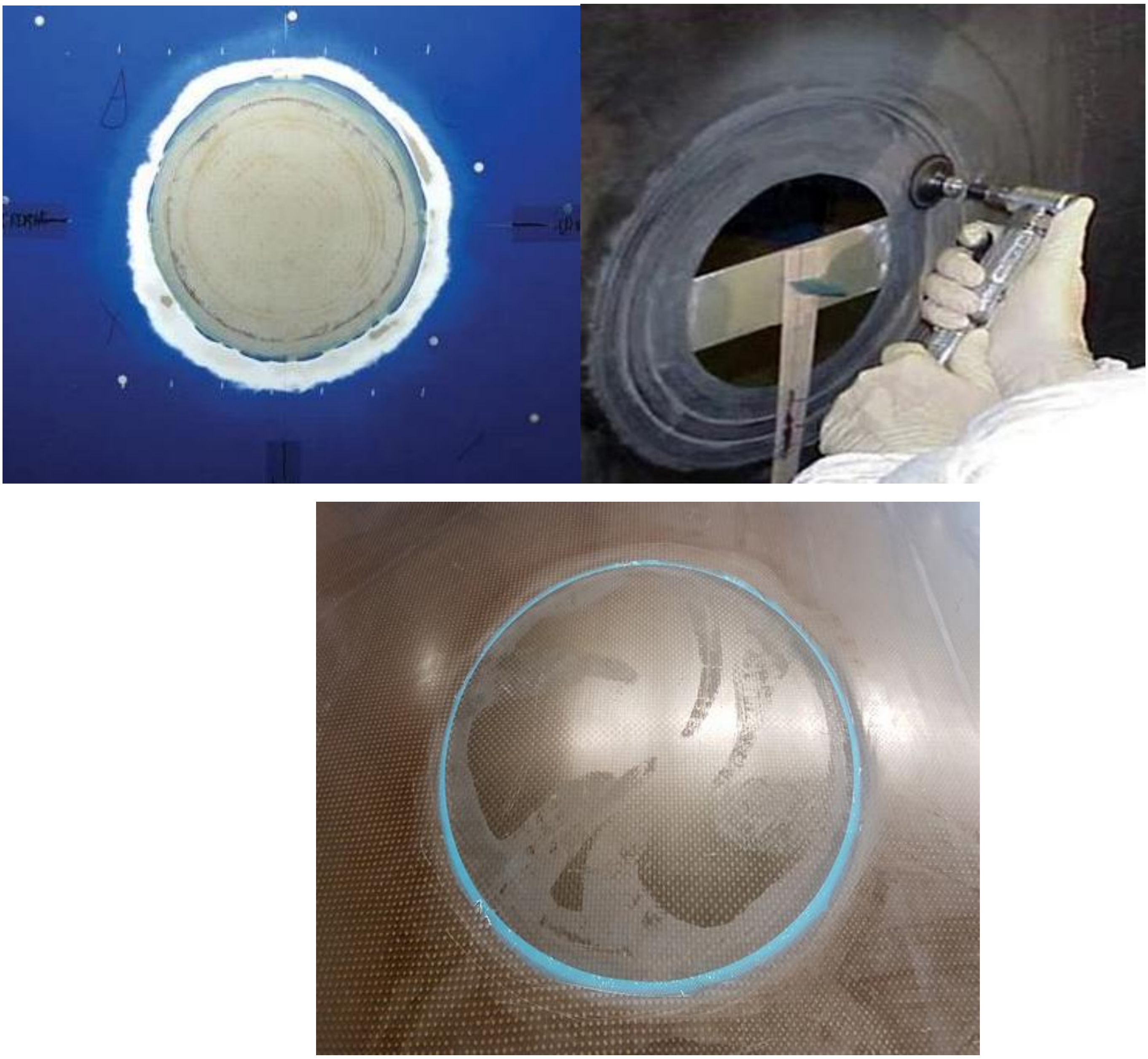

Рисунок 4.2. Клейові з’єднання внапуск ремонтних накладок з обшивкою

Для зменшення концентрації напружень отворам будь якої форми в процесі ремонтних робіт, як правило, надають форму круга. Тому найбільший інтерес викликає дослідження напруженого стану підкріплених круглих отворів. Відомі аналітичні розв’язки задачі про накладку і напружений стан напускних з’єднань, як правило, припускають прямокутну форму накладки і основної пластини та рівномірний розподіл напружень за шириною конструкції [10, 23]. Існує декілька різних наближених двовимірних моделей і відповідних методів розв’язання задач зі знаходження напруженого стану клейового з’єднання [56, 57, 80, 96]. Однак вказані підходи не дозволяють отримати аналітичний розв’язок задачі про пластину з круглим отвором і круглою накладкою. Очевидно, що в даному випадку доцільним буде застосування полярної (циліндричної) системи координат. При цьому, якщо залежність напружень від кутової координати – відсутня, задача зводиться до одновимірної. Відомі моделі статичного НДС тришарових пластин, до яких можна віднести і клейові з’єднання, не дозволяють розв’язати розглянутий клас задач, тому що типовим для цих моделей є однакові крайові умови для з’єднуваних шарів [110, 88]. Тому запропонована модель має наукову новизну і розглядається уперше.

4.1. Осесиметричне узагальнення моделі Фолькерсена

Розглянемо клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини, що показано на рис. 4.3. Основна пластина навантажена симетричним двохосьовим розтягом. Радіус отвору в основній пластині – R_1, радіус накладки – R_2. Основна пластина має товщину δ_1, накладка має товщину δ_2. Основу й накладку виконано з ізотропних матеріалів, модулі пружності яких – E_1 і E_2, коефіцієнти Пуассона – μ_1 і μ_2. Пластини сполучено з допомогою з'єднувального шару, товщина якого – δ_0, а модуль зсуву – G_0.

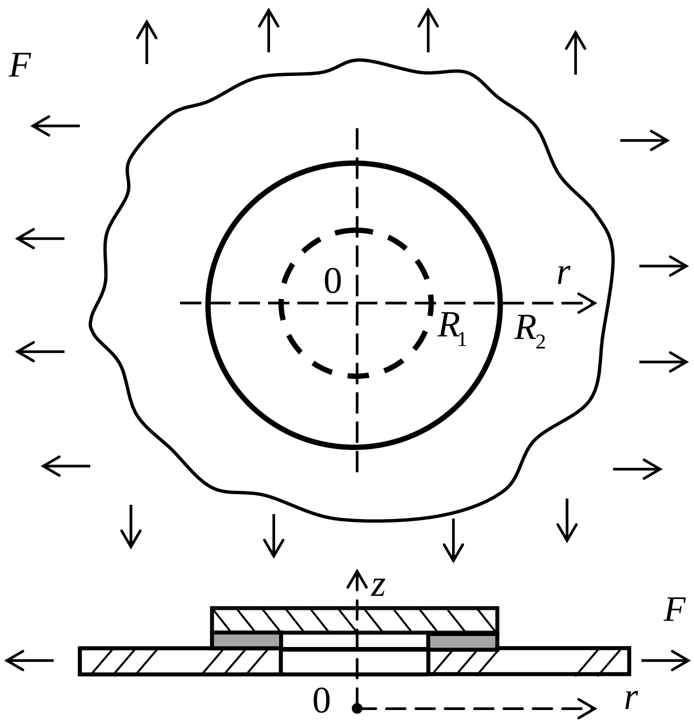

Рисунок 4.3. Схема клейового з'єднання пластини з накладкою

Зазначимо, що на практиці найчастіше ремонт проводиться за допомогою того ж самого листового матеріалу, з якого зроблена основну конструкцію, тобто товщина і властивості накладки збігаються з товщиною і властивостями основи. Крім того, для зменшення вигину конструкції ремонт може здійснюватися за допомогою двох однакових накладок, що приклеюються до основи з двох сторін. У цьому випадку використовуються накладки з товщиною у два рази меншою від товщини основи, і внаслідок симетрії задачу можна звести до задачі, що розв'язується. Завдяки симетрії з'єднання у такому випадку згинальні моменти в з'єднанні також є мінімальними і не впливають на НДС конструкції.

Унаслідок осьової симетрії тангенціальні зусилля в несних шарах Q_1 і Q_2 не залежать від кутової координати, дотичних зусиль в несних шарах немає. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині, а індекс «2» – круглій накладці в межах області склеювання $r \in [R_1; R_2]$.

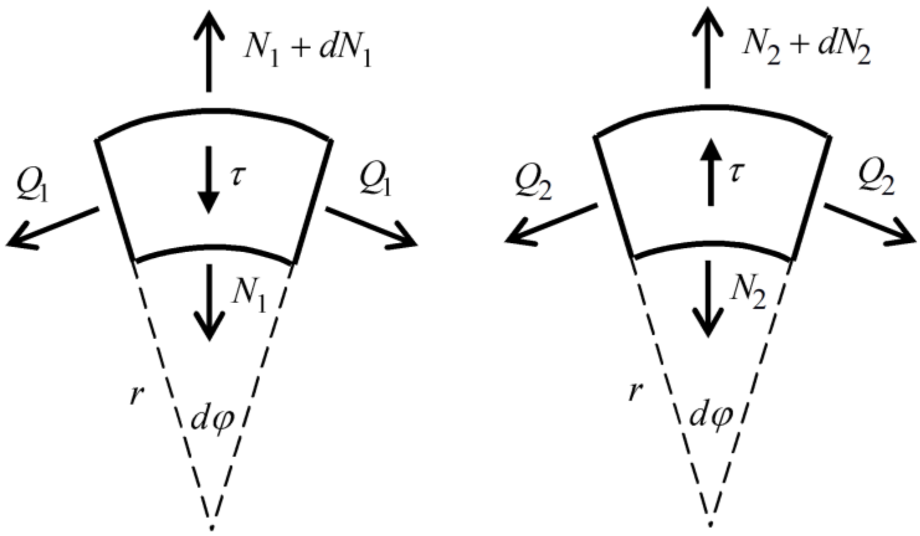

Рисунок 4.4. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Задавши напрямок дотичних напружень в клейовому шарі, запишемо рівняння рівноваги елементів несних шарів в такому вигляді:

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \tag{4.1}$$

де N_k, Q_k – радіальні і тангенціальні зусилля в несному в шарі k, $k = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в радіальному напрямку.

Покладемо, що напруження в клеї є пропорційними різниці переміщень прилеглих до клейового шару сторін обох пластин.

$$\tau = P\left(U_1 - U_2\right), \tag{4.2}$$

де P - жорсткість клейового шару на зсув, $P = \frac{G_0}{\delta_0}$; U_k - радіальні переміщення шарів, $k = 1, 2$.

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд

$$N_k = B_k\left(\varepsilon_{k,r} + \mu_k \varepsilon_{k,\varphi}\right), \qquad Q_k = B_k\left(\varepsilon_{k,\varphi} + \mu_k \varepsilon_{k,r}\right), \tag{4.3}$$

де $B_k = \frac{\delta_k E_k}{1 - \mu_k^2}$ - мембранна жорсткість пластин; $\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ - радіальна і тангенціальна деформація шару k.

Кінематичні співвідношення теорії пружності мають вигляд

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \tag{4.4}$$

Рівняння (4.1), з використанням (4.4) і (4.2), можна подати в такому вигляді:

$$\frac{\tau}{B_1} + \frac{d^2U_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} = 0, \quad -\frac{\tau}{B_2} + \frac{d^2U_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} = 0. \tag{4.5}$$

Диференціюючи (4.2) і використовуючи наведені вище рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tau}{dr} - \left(\frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2} + \frac{1}{r^2}\right)\tau = 0. \tag{4.6}$$

Позначимо $\lambda = \sqrt{\frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2}}$, тоді рівняння (4.6) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tau}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2}\right)\tau = 0. \tag{4.7}$$

Якщо зробити заміну $t = \lambda r$, то рівняння (4.7) перейде у модифіковане рівняння Бесселя

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d\xi}{dt} - \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\xi = 0, \tag{4.8}$$

де $\xi = \xi(t) = \tau\left(\frac{t}{\lambda}\right)$.

Загальний розв’язок модифікованого рівняння Бесселя (4.8) має вигляд

$$\xi(t) = C_1 I_1(t) + C_2 K_1(t),$$

де $I_1(t)$, $K_1(t)$, -модифіковані функції Бесселя; C_1, C_2 – довільні сталі.

Тоді розв’язок рівняння (4.6) можна подати у вигляді

$$\tau(r) = C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r). \tag{4.9}$$

Можна зазначити, що в задачі про напружений стан клейового з'єднання пластин прямокутної форми дотичні напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій [1, 23, 33, 107]. У простій постановці задачі, в так званій моделі Фолькерсена [105], дотичні напруження в клеї можна подати у вигляді суперпозиції гіперболічного синуса і гіперболічного косинуса. У розглянутій осесиметричній задачі про кругову накладку аналогом цих гіперболічних і експоненціальних функцій є необмежені і неперіодичні модифіковані функції Бесселя.

Підставивши дотичні напруження (4.9) у рівняння (4.5), отримаємо лінійні диференціальні неоднорідні рівняння Ейлера.

$$\frac{d^2U_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_i}{dr}-\frac{U_i}{r^2}=-\frac{C_1}{B_i}I_1(\lambda r)-\frac{C_2}{B_i}K_1(\lambda r), \tag{4.10}$$

де $i=1,2$.

Спочатку знайдемо розв’язок однорідного рівняння Ейлера

$$\frac{d^2U_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_i}{dr}-\frac{U_i}{r^2}=0. \tag{4.11}$$

Зробивши заміни $r=e^t$, $t=\ln r$ і $U_i(r)=\tilde{U}_i(t)$, зводимо рівняння (4.11) до вигляду

$$\frac{d^2\tilde{U}_i}{dt^2}-\tilde{U}_i=0.$$

Розв’язок цього рівняння знаходимо у вигляді

$$\tilde{U}_i(t)=C_3e^t+C_4e^{-t}.$$

Тоді розв’язок рівняння (4.11) буде мати вигляд

$$U_i^0(r)=C_3r+\frac{C_4}{r}.$$

Для знаходження розв’язку рівняння (4.10) використаємо метод варіації довільної сталої. Тобто будемо шукати загальний розв’язок рівняння (4.10) у вигляді

$$U_i^*(r) = C_1(r)r + \frac{C_2(r)}{r}. \tag{4.12}$$

Запишемо систему

$$\begin{cases} C_1'(r)r + \dfrac{C_2{}'(r)}{r} = 0, \\ C_1'(r) - \dfrac{C_2{}'(r)}{r^2} = -\dfrac{C_1}{B_i} I_1(\lambda r) - \dfrac{C_2}{B_i} K_1(\lambda r). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, маємо

$$\begin{cases} C_1'(r) = -\dfrac{C_1}{2B_i} I_1(\lambda r) - \dfrac{C_2}{2B_i} K_1(\lambda r), \\ C_2{}'(r) = \dfrac{C_1 r^2}{2B_i} I_1(\lambda r) + \dfrac{C_2 r^2}{2B_i} K_1(\lambda r). \end{cases}$$

Інтегруючи отримані співвідношення за змінною r, отримаємо

$$\begin{cases} C_1(r) = -\dfrac{C_1}{2B_i\lambda} I_0(\lambda r) + \dfrac{C_2}{2B_i\lambda} K_0(\lambda r), \\ C_2(r) = \dfrac{C_1 r^2}{2B_i\lambda} I_2(\lambda r) - \dfrac{C_2 r^2}{2B_i\lambda} K_2(\lambda r). \end{cases}$$

Тоді розв’язок рівняння (4.12) запишемо у вигляді

$$U_i^*(r) = \frac{C_1 r}{2B_i\lambda}\left[I_2(\lambda r) - I_0(\lambda r)\right] - \frac{C_2 r}{2B_i\lambda}\left[K_2(\lambda r) - K_0(\lambda r)\right].$$

Використовуючи рекурентні співвідношення для функцій Бесселя, отримаємо

$$U_i^*(r) = -\frac{C_1}{B_i\lambda^2} I_1(\lambda r) - \frac{C_2 r}{B_i\lambda^2} K_1(\lambda r).$$

Таким чином загальний розв’язок рівняння (4.10) набуває вигляду

$$U_1(r) = -C_1 g_{1,1}(r) - C_2 g_{2,1}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$
$$U_2(r) = C_1 g_{1,2}(r) + C_2 g_{2,2}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \tag{4.13}$$

де $g_{1,k}(r) = \dfrac{I_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}$, $g_{2,k}(r) = \dfrac{K_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}$.

Переміщення у внутрішній ($r < R_1$) і у зовнішній ($r > R_2$) областях, тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями деформації круглих пластин

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0.$$

Позначимо радіальні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання U_3, а радіальні переміщення основної пластини за межами з'єднання – U_4. Наведені вище рівняння Ейлера мають такі розв’язки:

$$U_3(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, U_4(r) = c_3 r + \frac{c_4}{r}. \tag{4.14}$$

Переміщення (4.13) і (4.14), а також співвідношення (4.4) і (4.3) дають можливість знайти зусилля в основній пластині й накладці як в області склеювання, так і за її межами.

$$N_k = B_k\left[\frac{dU_k}{dr} + \mu_1\frac{U_k}{r}\right],\ Q_k = B_k\left[\frac{U_k}{r} + \mu_k\frac{dU_k}{dr}\right], \text{ де } B_k = \frac{\delta_k E_k}{1-\mu_k^2},\ k = 1,2,3,4.$$

$$N_1(r) = -C_1 f_{1,1}(r) + C_2 f_{2,1}(r) + C_3 f_{3,1} + C_4 f_{4,1}(r),$$

$$N_2(r) = C_1 f_{1,2}(r) - C_2 f_{2,2}(r) + C_3 f_{3,2} + C_4 f_{4,2}(r)$$

$$N_3(r) = c_1 f_{3,3} + c_2 f_{4,3}(r),$$

$$N_4(r) = c_3 f_{3,4} + c_4 f_{4,4}(r);$$

$$Q_1(r) = C_1 \tilde{f}_{1,1}(r) + C_2 \tilde{f}_{2,1}(r) + C_3 f_{3,1} - C_4 f_{4,1}(r),$$

$$Q_2(r) = -C_1 \tilde{f}_{1,2}(r) - C_2 \tilde{f}_{2,2}(r) + C_3 f_{3,2} - C_4 f_{4,2}(r)$$

$$Q_3(r) = c_1 f_{3,3} - c_2 f_{4,3}(r),$$

$$Q_4(r) = c_3 f_{3,4} - c_4 f_{4,4}(r),$$

де

$$f_{1,k}(r) = \frac{r\lambda I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1-\mu_k)}{\lambda^2 r}, \qquad f_{2,k}(r) = \frac{r\lambda K_0(\lambda r) + K_1(\lambda r)(1-\mu_k)}{\lambda^2 r},$$

$$f_{3,k} = B_k(1+\mu_k), \qquad f_{4,k}(r) = -\frac{B_k(1-\mu_k)}{r^2},$$

$$\tilde{f}_{1,k}(r) = \frac{-\mu_k r\lambda I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1-\mu_k)}{\lambda^2 r}, \qquad \tilde{f}_{2,k}(r) = \frac{\mu_k r\lambda K_0(\lambda r) - K_1(\lambda r)(1-\mu_k)}{\lambda^2 r}.$$

Сталі C_1, C_2, C_3, C_4, і $c_1, ..., c_4$ знаходимо з крайових умов і умов сполучення переміщень і зусиль на межах областей.

Покладемо, що основна пластина має радіус R_3. Крайові умови на зовнішній межі основний пластини:

$$N_4(R_3) = F.$$

Умови на межі області склейки і основної пластини мають вигляд

$$U_1(R_2) - U_4(R_2) = 0; \;\; N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0; \; N_2(R_2) = 0.$$

Умови на межі області склеювання й отвору мають вигляд

$$U_2(R_1) - U_3(R_1) = 0; \;\; N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \;\; N_1(R_1) = 0.$$

Ще одну сталу знаходимо з умов рівності нулю поздовжніх переміщень накладки на початку координат $(r = 0)$

$$c_2 = 0.$$

Отримаємо систему з семи лінійних рівнянь відносно семи невідомих сталих C_1, C_2, C_3, C_4, і c_1, c_3, c_4.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{3,4} & f_{4,4}(R_3) \\ -g_{1,1}(R_2) & -g_{2,1}(R_2) & R_2 & \dfrac{1}{R_2} & 0 & -R_2 & -\dfrac{1}{R_2} \\ -f_{1,1}(R_2) & f_{2,1}(R_2) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_2) & 0 & -f_{3,4} & -f_{4,4}(R_2) \\ f_{1,2}(R_2) & -f_{2,2}(R_2) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_2) & 0 & 0 & 0 \\ g_{1,2}(R_1) & g_{2,2}(R_1) & R_1 & \dfrac{1}{R_1} & R_1 & 0 & 0 \\ f_{1,2}(R_1) & -f_{2,2}(R_1) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_1) & f_{3,3} & 0 & 0 \\ -f_{1,1}(R_1) & f_{2,1}(R_1) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & c_1 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}^T, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Розглянемо модельну задачу. Задаючи геометрію області, покладемо, що основна пластина має дуже великий радіус R_3.

Параметри задачі: $R_1 = 30$ мм, $R_2 = 50$ мм, $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм, $\delta_0 = 0{,}1$ мм, $E = 70$ ГПа (алюмінієвий сплав), $\mu = 0{,}28$, $E_0 = 0{,}8$ ГПа, $G_0 = 0{,}3125$ ГПа. Погонні розтяжні зусилля F прикладені по периметру основної пластини, зовнішній радіус якої будемо вважати нескінченно великим ($R_3 = \infty$). Для верифікації було створено скінчено-елементну модель. Схему моделі показано на рис. 4.5. Фрагмент скінченно-елементної сітки біля краю з’єднання показано на рис. 4.6.

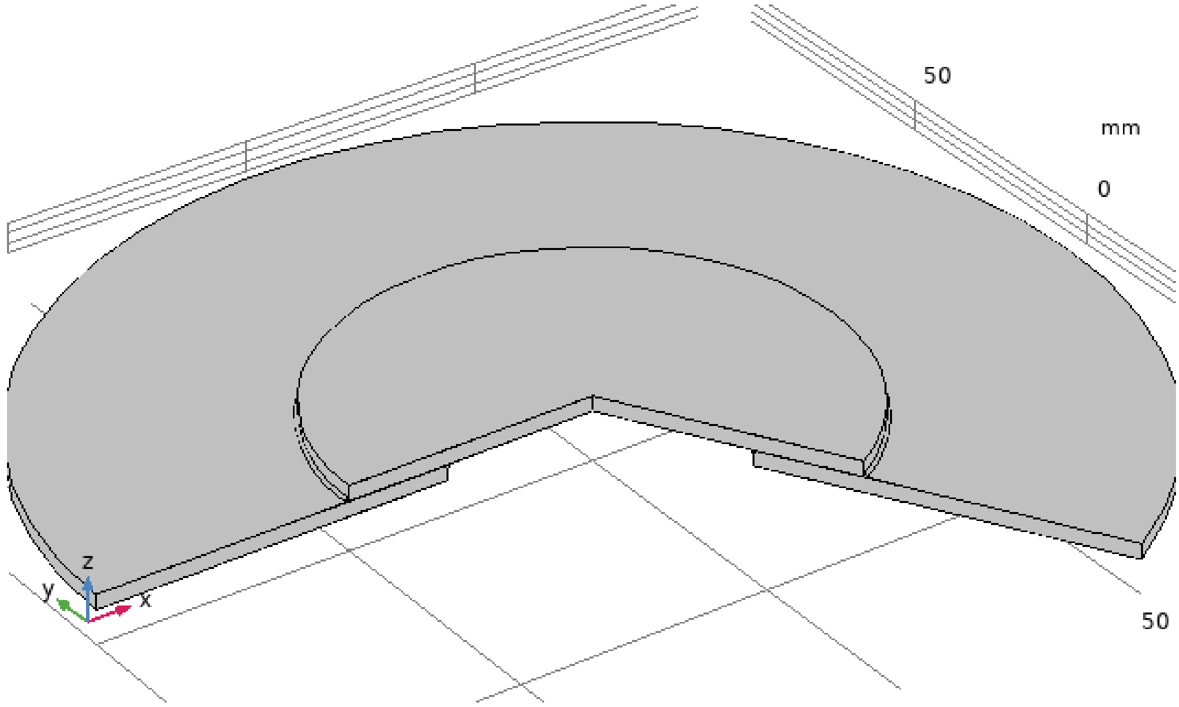

Рисунок 4.5. Схема конструкції

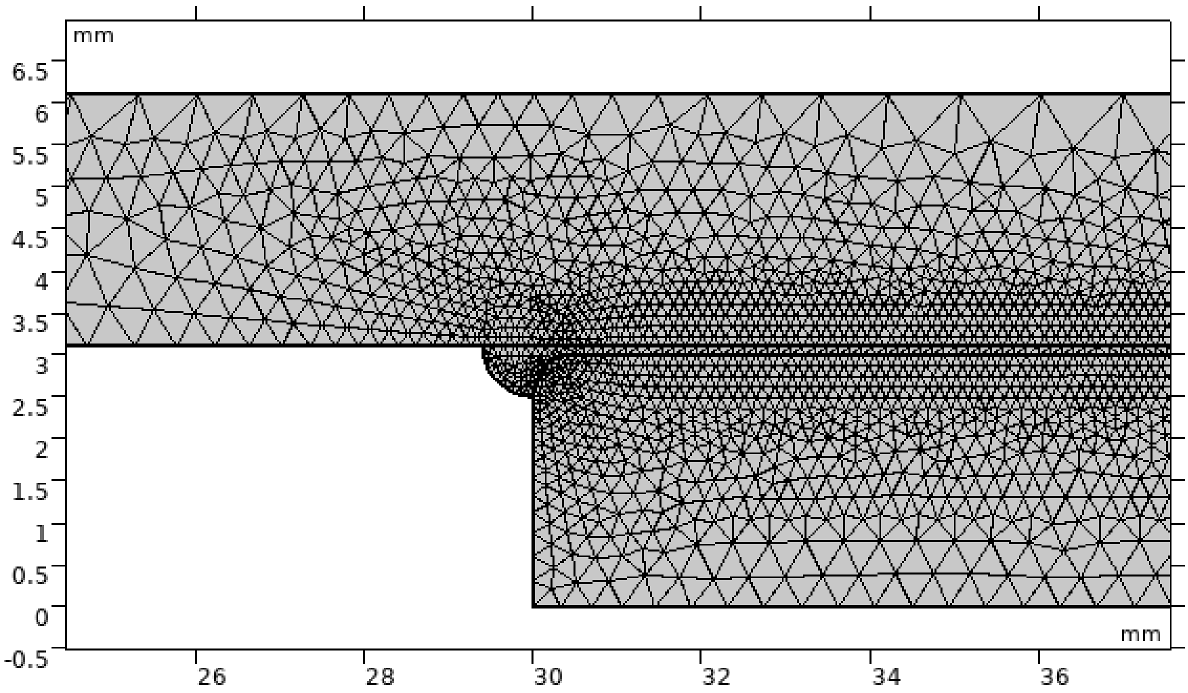

Рисунок 4.6. Фрагмент скінченно-елементної моделі

На рис. 4.7. показано графіки дотичних напружень в клейовому шарі, розрахованих за запропонованою моделлю (a), а також за допомогою методу скінченних елементів (b). Напруження на графіках наведено в безрозмірній формі.

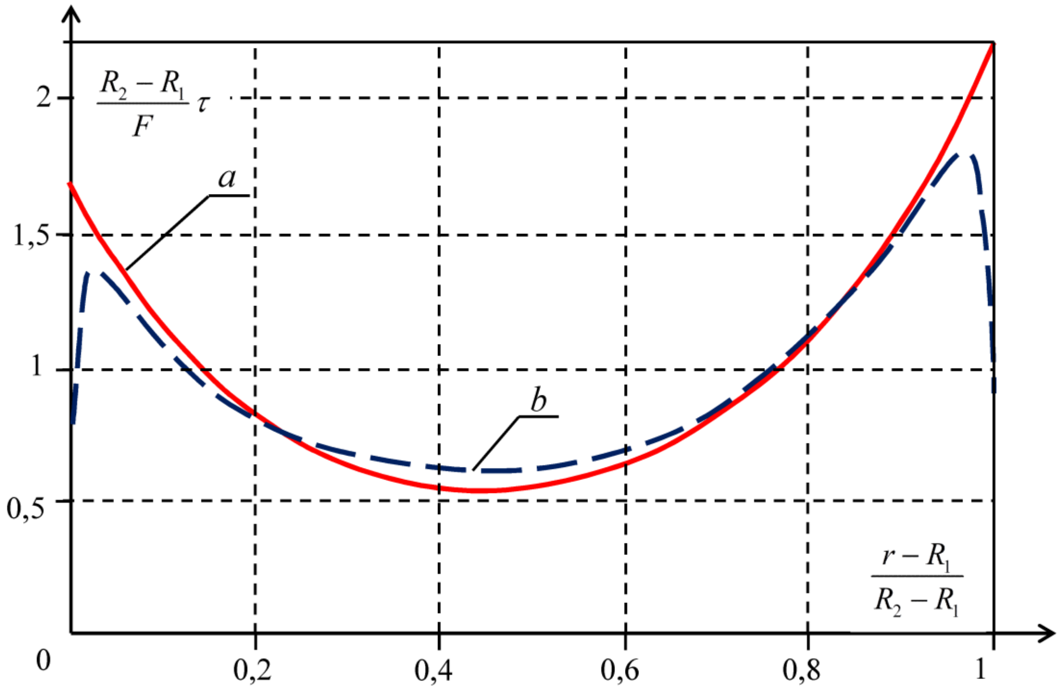

Рисунок 4.7. Дотичні напруження в клеї

Обчислення показали, що напруження, розраховані за допомогою запропонованої моделі й за допомогою скінченно-елементного моделювання, збігаються майже у всій області склеювання. Відмінності спостерігаються лише в невеликих областях у країв клейового шва, причому довжина цієї області – порядку товщини клейового шару. Виявлені відмінності не перевищують кількох відсотків, і на графіках результати практично збігаються. При цьому запропонований у роботі підхід дає дещо завищені результати, що є прийнятним для задач проектування. Описані невеликі відмінності між результатами можна пояснити тим, що зовнішній край клейового шва має вільну від навантаження межу, унаслідок чого дотичні напруження на краю клейового шару мають дорівнювати нулю, що не може відобразити запропонована модель. Ця особливість моделювання напруженого стану клею залежностями (4.4) добре відома [23] та може бути подолана використанням точніших підходів до опису напруженого стану клейового шару [107, 59].

Для ілюстрації того, як накладка розвантажує отвір, розглянемо графіки відношень радіальних і тангенціальних зусиль в основний пластині. На рис. 4.8. радіальні й тангенціальні зусилля показано в безрозмірній формі в деякому околі отвору. Очевидно, що на нескінченності маємо рівномірний напружений стан $N_4 = Q_4 = F$. Відношення радіальних зусиль до F позначено на графіку літерою «а», а відношення тангенціальний зусиль до F – літерою «b».

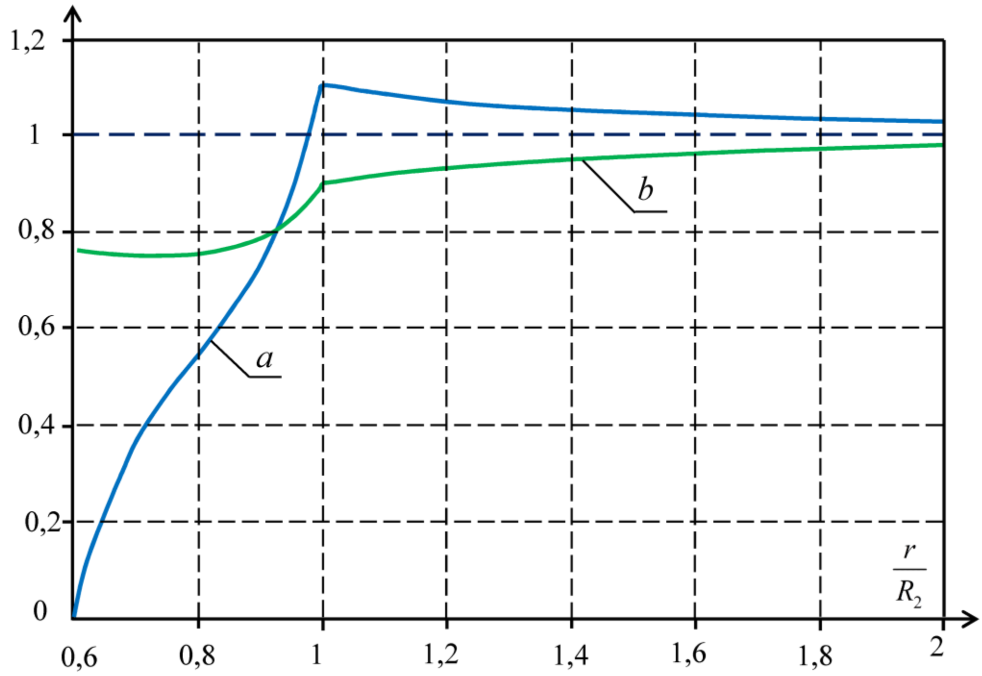

Рисунок 4.8. Напруження в основній пластині в околі отвору

$$(\mathrm{a}) - \frac{N}{F},\ (b) \text{ - } \frac{Q}{F}.$$

Злам на графіках відповідає межі накладки. У випадку відсутності накладки на межі отвору нормальні зусилля були б нульовими, а тангенціальні дорівнювали б $2F$. У цьому випадку маємо лише незначне збільшення радіальних зусиль до $1{,}1F$. Тобто, як і слід було очікувати, накладка істотно розвантажує отвір. Розрахунки показують, що в накладці над отвором $Q_3 = N_3 < 0{,}9F$.

Запропоновано модель осесиметричного напруженого стану пластини, що має круглий отвір, який внапуск закрито приклеєною коаксіальною круглою накладкою. Задачу зведено до лінійного диференційного рівняння відносно дотичних напружень в клейовому шарі. Це рівняння має аналітичний розв’язок у функціях Бесселя.

Особливістю задачі є те, що, на відміну від з'єднань балок при однонапрямленому навантаженні, не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку через клейовий шар. Накладка дещо розвантажує отвір, знижуючи тангенціальні напруження в основній пластині в околі отвору.

Можливими напрямами розвитку запропонованої задачі є

– врахування вигину пластинок;

– включення в модель температурних деформацій;

– включення в модель сил інерції і вивчення динамічних напружень;

– узагальнення на випадок одноосного напруженого стану основи на нескінченності.

4.2. Осесиметричне узагальнення моделі Голанда-Рейсснера

Розглянемо клейове з’єднання двох круглих пластин однакової товщини, яке показане на рис. 4.3. Основна пластина навантажена симетричним двоосним розтягом. Радіус отвору в основної пластині дорівнює R_1, радіус накладки – R_2. Положимо, що обидві пластини (основна і накладка) мають однакову товщину δ і вироблені з однакового ізотропного матеріалу. Між пластинами знаходиться з’єднувальний (клейовий) шар, товщина якого δ_0.

Завдяки осьовій симетрії тангенціальні зусилля в пластинах Q_1 и Q_2 не залежать від кутової координати, дотичні зусилля відсутні. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині, а індекс «2» – накладці в межах області склеювання $r \in [R_1; R_2]$.

На рис. 4.9. показано зусилля, напруження і розподілені згинальні моменти, які діють на диференціальний елемент основної пластини в області склеювання.

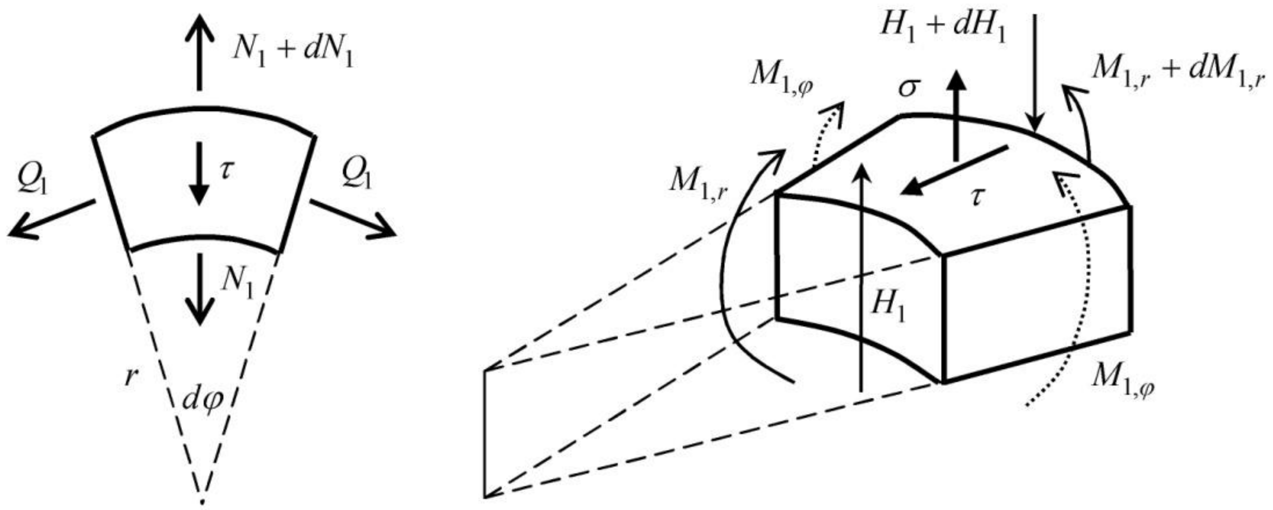

Рисунок. 4.9. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Рівняння рівноваги сил, які діють на елементи пластин в межах області склеювання в напрямку радіальної вісі, мають вигляд

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0\,, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0\,, \tag{4.15}$$

де N_k, Q_k – відповідно радіальні і тангенціальні нормальні зусилля в пластині k, $k = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в радіальному напрямку.

Рівняння рівноваги моментів мають вигляд

$$\frac{M_{1,r} - M_{1,\varphi}}{r} + \frac{dM_{1,r}}{dr} - H_1 + \tau\frac{\delta}{2} = 0\,, \quad \frac{M_{2,r} - M_{2,\varphi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \tau\frac{\delta}{2} = 0\,, \tag{4.16}$$

де $M_{k,r}$ і $M_{k,\varphi}$ - розподілені згинальні моменти в шарі k, рис. 4.9.; H_k - перерізуюче зусилля в пластині k.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів в напрямку вісі z

$$-\sigma + \frac{H_1}{r} + \frac{dH_1}{dr} = 0\,, \quad \sigma + \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} = 0\,, \tag{4.17}$$

де σ - нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі.

Напруження в клейовому шарі будемо вважати пропорційними різниці переміщень прилеглих до клейового шару сторін обох пластин.

$$\tau = P\left(U_1 - U_2 - \frac{\delta}{2}\frac{dW_2}{dr} - \frac{\delta}{2}\frac{dW_1}{dr}\right), \quad \sigma = K\left(W_2 - W_1\right), \tag{4.18}$$

де P і K - жорсткості клейового шару на зсув та на відрив, які обчислюються за формулами $P = \frac{G_0}{\delta_0}$ $K = \frac{E_0}{\delta_0}$, де відповідно E_0 і G_0 - модуль пружності і модуль зсуву клею; W_k - переміщення пластин у напрямку вісі z; U_k - поздовжні (радіальні) переміщення пластин, $k = 1, 2$.

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд

$$N_k = B\left(\varepsilon_{k,r} + \mu\varepsilon_{k,\varphi}\right), \quad Q_k = B\left(\varepsilon_{k,\varphi} + \mu\varepsilon_{k,r}\right), \tag{4.19}$$

де $B = \frac{\delta E}{1-\mu^2}$ - мембранна жорсткість пластин; μ - коефіцієнт Пуассона матеріалу пластин; E - модуль пружності матеріалу пластин; $\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ - деформації пластини k у радіальному та тангенціальному напрямку.

Кінематичні співвідношення теорії пружності

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \tag{4.20}$$

Рівняння згину круглих пластин

$$M_{k,r} = D\left(\frac{d^2W_k}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dW_k}{dr}\right), \quad M_{k,\varphi} = D\left(\mu\frac{d^2W_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_k}{dr}\right), \tag{4.21}$$

де $D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ - жорсткість пластин на згін.

Систему рівнянь (4.15) – (4.21) можна звести до двох рівнянь відносно напружень в клейовому шарі

$$\frac{d^3\tau}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\tau}{dr^2} - \left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D}\right)\right)\tau = 0. \tag{4.22}$$

$$\frac{d^4\sigma}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{2K}{D}\sigma = 0. \tag{4.23}$$

Ці рівняння мають аналітичні розв’язки

$$\tau = \frac{C_1}{r} + C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r). \tag{4.24}$$

$$\sigma = S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r), \tag{4.25}$$

де $\beta = \sqrt{\dfrac{P\left(\delta^2 B + 4D\right)}{2BD}}$; $\lambda = \sqrt[4]{-\dfrac{2K}{D}}$; I_1, K_1, I_0, K_0, - модифіковані функції Бесселя; J_0, Y_0 - функції Бесселя і Неймана відповідно; C_1, C_2, C_3 и $S_1, ..., S_4$ - довільні константи.

Можна зауважити, що в задачі про напружений стан клейового з’єднання пластин прямокутної форми напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій, які мають в т.ч. комплексні аргументи. В осесиметричній задачі аналогом цих функцій є функції Бесселя.

Із рівнянь (4.15), з використанням (4.19) и (4.20), отримаємо рівняння

$$\frac{d^2U_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} - \frac{\tau}{B} = 0, \quad \frac{d^2U_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{\tau}{B} = 0. \tag{4.26}$$

Підставивши в (4.26) дотичні напруження (4.24) і розв’язавши отримані неоднорідні диференційні рівняння Ейлера, отримаємо

$$U_1(r) = g_1(r)C_1 + g_2(r)C_2 + g_3(r)C_3 + C_4 r + \frac{C_5}{r},$$

$$U_2(r) = -g_1(r)C_1 - g_2(r)C_2 - g_3(r)C_3 + C_6 r + \frac{C_7}{r}, \tag{4.27}$$

де

$$g_1(r) = \frac{r(2\ln r - 1)}{4B}; \qquad g_2(r) = \frac{I_1(\beta r)}{\beta^2 B}; \quad g_3(r) = \frac{K_1(\beta r)}{\beta^2 B}.$$

Підставивши (4.25) в друге рівняння (4.18), знайдемо різницю поперечних переміщень $W_2 - W_1$. Підставивши (4.27) в перше рівняння (4.18), і взявши інтеграл, знайдемо суму поперечних переміщень $W_2 + W_1$. Це дає змогу знайти поперечні переміщення пластин в області склеювання

$$W_1(r)=C_1 f_1(r)+C_2 f_2(r)+C_3 f_3(r)+(C_4-C_6)\frac{r^2}{2\delta}+(C_5-C_7)\frac{\ln r}{\delta}+$$

$$+C_8-S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K}-S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K}-S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K}-S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K}, \qquad (4.28)$$

$$W_2(r)=C_1 f_1(r)+C_2 f_2(r)+C_3 f_3(r)+(C_4-C_6)\frac{r^2}{2\delta}+(C_5-C_7)\frac{\ln r}{\delta}+$$

$$+C_8+S_1\frac{J_0(\lambda r)}{2K}+S_2\frac{Y_0(\lambda r)}{2K}+S_3\frac{I_0(\lambda r)}{2K}+S_4\frac{K_0(\lambda r)}{2K}, \qquad (4.29)$$

де

$$f_1(r)=\frac{r^2}{2\delta B}(\ln r-1)-\frac{\ln r}{\delta P};\ f_2(r)=\left(\frac{2}{\delta\beta^2 B}-\frac{1}{\delta P}\right)\frac{I_0(\beta r)}{\beta};$$

$$f_3(r)=\left(\frac{1}{\delta P}-\frac{2}{\delta\beta^2 B}\right)\frac{K_0(\beta r)}{\beta}.$$

Знаючи радіальні переміщення (4.27), поперечні переміщення (4.28), (4.29) пластин та напруження в клейовому шарі (4.24) і (4.25), знайдемо погонні згинальні моменти, а також радіальні і тангенціальні зусилля в пластинах із співвідношень (4.21), (4.19) та (4.16).

Переміщення у внутрішній ($r<R_1$) та у зовнішній ($r>R_2$)областях, тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями згину круглих пластин за відсутності перерізуючих сил

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}-\frac{U}{r^2}=0,\ \frac{d^3W}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2W}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dW}{dr}=0.$$

Позначимо радіальні і поперечні переміщення накладки у внутрішній частині з’єднання (над отвором) U_3 і W_3, а переміщення основної пластини за межами області склеювання U_4 і W_4. Наведені вище рівняння мають загальні розв’язки

$$U_3(r)=c_1 r+\frac{c_2}{r}, \qquad U_4(r)=c_3 r+\frac{c_4}{r}, \qquad (4.30)$$

$$W_3(r) = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2, \qquad W_4(r) = s_4 + s_5 \ln r + s_6 r^2. \tag{4.31}$$

Підставивши (4.27) і (4.30) у (4.20) і (4.17), знаходимо радіальні і тангенціальні нормальні зусилля

$$\begin{aligned}
&N_1(r) = C_1 h_1(r) + C_2 h_2(r) + C_3 h_3(r) + C_4 h_4(r) + C_5 h_5(r),\\
&N_2(r) = -C_1 h_1(r) - C_2 h_2(r) - C_3 h_3(r) + C_6 h_4(r) + C_7 h_5(r),\\
&N_3(r) = c_1 h_4(r),\\
&N_4(r) = c_3 h_4(r) + h_5(r) c_4.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
&Q_1(r) = C_1 \tilde{h}_1(r) + C_2 \tilde{h}_2(r) + C_3 \tilde{h}_3(r) + C_4 h_4(r) - C_5 h_5(r),\\
&Q_2(r) = -C_1 \tilde{h}_1(r) - C_2 \tilde{h}_2(r) - C_3 \tilde{h}_3(r) + C_6 h_4(r) - C_7 h_5(r),\\
&Q_3(r) = c_1 h_4(r),\\
&Q_4(r) = c_3 h_4(r) - h_5(r) c_4,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

де

$$h_1(r) = \frac{(1+\mu)\ln r}{2} + \frac{1-\mu}{4}, \qquad h_2(r) = \frac{I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{(1-\mu) I_1(\beta r)}{\beta^2 r},$$

$$h_3(r) = -\frac{K_0(\beta r)}{\beta} - \frac{(1-\mu) K_1(\beta r)}{\beta^2 r}, \qquad h_4(r) = B(1+\mu), \qquad h_5(r) = -\frac{B(1-\mu)}{r^2}.$$

$$\tilde{h}_1(r) = \frac{(1+\mu)\ln r}{2} - \frac{1-\mu}{4}, \qquad \tilde{h}_2(r) = \frac{\mu I_0(\beta r)}{\beta} + \frac{(1-\mu) I_1(\beta r)}{\beta^2 r},$$

$$\tilde{h}_3(r) = -\frac{\mu K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{(1-\mu) K_1(\beta r)}{\beta^2 r}.$$

Підставивши (4.29) і (4.31) у (4.21), знаходимо згинальні моменти

$$\begin{aligned}
M_{1,r}(r) &= C_1 \xi_1(r) + C_2 \xi_2(r) - C_3 \xi_3(r) + (C_4 - C_6)\xi_4(r) + (C_7 - C_5)\xi_5(r) +\\
&\quad + S_1 \eta_1(r) + S_2 \eta_2(r) - S_3 \eta_3(r) + S_4 \eta_4(r),\\
M_{2,r}(r) &= C_1 \xi_1(r) + C_2 \xi_2(r) - C_3 \xi_3(r) + (C_4 - C_6)\xi_4(r) + (C_7 - C_5)\xi_5(r) -\\
&\quad - S_1 \eta_1(r) - S_2 \eta_2(r) + S_3 \eta_3(r) - S_4 \eta_4(r),\\
M_{3,r}(r) &= 2D(1+\mu) s_3,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$M_{4,r}(r) = -\frac{D}{r^2}(1-\mu)s_5 + 2D(1+\mu)s_6.$$

$$M_{1,\varphi}(r) = C_1\tilde{\xi}_1(r) + C_2\tilde{\xi}_2(r) - C_3\tilde{\xi}_3(r) + (C_4 - C_6)\xi_4(r) + (C_5 - C_7)\xi_5(r) +$$
$$+S_1\tilde{\eta}_1(r) + S_2\tilde{\eta}_2(r) - S_3\tilde{\eta}_3(r) + S_4\tilde{\eta}_4(r),$$
$$M_{2,\varphi}(r) = C_1\tilde{\xi}_1(r) + C_2\tilde{\xi}_2(r) - C_3\tilde{\xi}_3(r) + (C_4 - C_6)\xi_4(r) + (C_5 - C_7)\xi_5(r) - \quad (4.34)$$
$$-S_1\tilde{\eta}_1(r) - S_2\tilde{\eta}_2(r) + S_3\tilde{\eta}_3(r) - S_4\tilde{\eta}_4(r),$$
$$M_{3,\varphi}(r) = 2D(1+\mu)s_3,$$
$$M_{4,\varphi}(r) = -\frac{D}{r^2}(1-\mu)s_5 + 2D(1+\mu)s_6,$$

де

$$\xi_1(r) = \frac{D}{2r^2\delta PB}\left[\left(2B + Pr^2\right)(1-\mu) + 2Pr^2\ln r(1+\mu)\right],$$

$$\xi_2(r) = \frac{D\left(2P - \beta^2 B\right)}{r\delta\beta^2 PB}\left[\beta r I_0(\beta r) - I_1(\beta r)(1-\mu)\right],$$

$$\xi_3(r) = \frac{D\left(2P - B\beta^2\right)}{r\delta\beta^2 PB}\left[\beta r K_0(\beta r) + K_1(\beta r)(1-\mu)\right],$$

$$\xi_4(r) = D\frac{1+\mu}{\delta}, \qquad \xi_5(r) = D\frac{1-\mu}{\delta r^2};$$

$$\eta_1(r) = \frac{D\lambda}{2Kr}\left[\lambda r J_0(\lambda r) - J_1(\lambda r)(1-\mu)\right], \quad \eta_2(r) = \frac{D\lambda}{2Kr}\left[\lambda r Y_0(\lambda r) - Y_1(\lambda r)(1-\mu)\right],$$

$$\eta_3(r) = \frac{D\lambda}{2Kr}\left[\lambda r I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1-\mu)\right], \quad \eta_4(r) = \frac{D\lambda}{2Kr}\left[-\lambda r K_0(\lambda r) - K_1(\lambda r)(1-\mu)\right];$$

$$\tilde{\xi}_1(r) = \frac{D}{2r^2\delta PB}\left[-\left(2B + Pr^2\right)(1-\mu) + 2Pr^2\ln r(1+\mu)\right],$$

$$\tilde{\xi}_2(r) = \frac{D\left(2P - \beta^2 B\right)}{r\delta\beta^2 PB}\left[\mu\beta r I_0(\beta r) + I_1(\beta r)(1-\mu)\right],$$

$$\tilde{\xi}_3(r)=\frac{D\left(2P-B\beta^2\right)}{r\delta\beta^2 PB}\left[\mu\beta r K_0(\beta r)-K_1(\beta r)(1-\mu)\right];$$

$$\tilde{\eta}_1(r)=\frac{D\lambda}{2Kr}\left[\mu\lambda r J_0(\lambda r)+J_1(\lambda r)(1-\mu)\right],$$

$$\tilde{\eta}_2(r)=\frac{D\lambda}{2Kr}\left[\mu\lambda r Y_0(\lambda r)+Y_1(\lambda r)(1-\mu)\right],$$

$$\tilde{\eta}_3(r)=\frac{D\lambda}{2Kr}\left[\mu\lambda r I_0(\lambda r)+I_1(\lambda r)(1-\mu)\right],$$

$$\tilde{\eta}_4(r)=\frac{D\lambda}{2Kr}\left[-\mu\lambda r K_0(\lambda r)+K_1(\lambda r)(1-\mu)\right].$$

Перерізуючі зусилля H_1 і H_2 знайдемо із (4.16) з урахуванням (4.24)

$$H_1(r)=C_1\vartheta_1(r)+C_2\vartheta_2(r)I_1(\beta r)+C_3\vartheta_2(r)K_1(\beta r)-$$

$$-\frac{D\lambda^3}{2K}\left[S_1J_1(\lambda r)+S_2Y_1(\lambda r)+S_3I_1(\lambda r)-S_4K_1(\lambda r)\right],$$

$$H_2(r)=C_1\vartheta_1(r)+C_2\vartheta_2(r)I_1(\beta r)+C_3\vartheta_2(r)K_1(\beta r)+$$

$$+\frac{D\lambda^3}{2K}\left[S_1J_1(\lambda r)+S_2Y_1(\lambda r)+S_3I_1(\lambda r)-S_4K_1(\lambda r)\right],$$

де

$$\vartheta_1(r)=\frac{\delta}{2r}+\frac{4D}{2r\delta B},\qquad \vartheta_2(r)=\frac{2DP}{r\delta B}-\frac{D\beta^2}{r\delta}+\frac{P\delta}{2r}.$$

Перерізуючі зусилля H_3 і H_4 знаходимо за такою формулою:

$$H_m=D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_m}{dr}\right),$$

де $m=3,4$.

$$H_3=0,\ H_4=0.$$

Константи $C_1, C_2, ..., C_8$, $S_1, ..., S_4$ і $c_1, ..., c_4$ с $s_1, ..., s_6$ можна знайти із крайових умов, а також умов спряження переміщень і зусиль на границях областей.

Будемо вважати, що основна пластина має зовнішній радіус R_3. Нехай крайові умови на зовнішній границі основної пластини мають вигляд

$$N_4(R_3) = F; \quad W_4(R_3) = 0; \quad \left.\frac{dW_4}{dr}\right|_{r=R_3} = 0.$$

Умови на зовнішній границі області склеювання і основної пластини мають вигляд

$$U_1(R_2) - U_4(R_2) = 0; \; W_1(R_2) - W_4(R_2) = 0; \; \left.\left(\frac{dW_1}{dr} - \frac{dW_4}{dr}\right)\right|_{r=R_2} = 0;$$

$$M_{1,r}(R_2) - M_{4,r}(R_2) = 0; \; N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0;$$

$$H_2(R_2) = 0; \; M_{2,r}(R_2) = 0; \; N_2(R_2) = 0.$$

Умови на внутрішній границі області склеювання і на отворі мають вигляд

$$U_2(R_1) - U_3(R_1) = 0; \; W_2(R_1) - W_3(R_1) = 0; \; \left.\left(\frac{dW_2}{dr} - \frac{dW_3}{dr}\right)\right|_{r=R_1} = 0;$$

$$M_{2,r}(R_1) - M_{3,r}(R_1) = 0; \quad N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \quad H_2(R_1) = 0;$$

$$H_1(R_1) = 0; \quad M_{1,r}(R_1) = 0; \; N_1(R_1) = 0.$$

Ще дві константи знаходимо із умов рівності нулю радіальних переміщень накладки і скінченної величини її поперечних переміщень при $r = 0$

$$c_2 = 0, \qquad s_2 = 0.$$

Таким чином, маємо систему із двадцяти лінійних рівнянь відносно двадцяти невідомих констант $C_1, ..., C_8, S_1, ..., S_4, c_1, c_3, c_4, s_1, s_3, ..., s_6$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A}=\left\{a_{i,j}\right\}_{i,\mathrm{j}=1}^{20}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & c_1 & c_3 & c_4 & s_1 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6\end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,$$

де $a_{1,1}=a_{1,2}=a_{1,3}=a_{1,4}=a_{1,5}=a_{1,6}=a_{1,7}=a_{1,8}=a_{1,9}=a_{1,10}=a_{1,11}=a_{1,12}=a_{1,13}=a_{1,16}=$

$$=a_{1,17}=a_{1,18}=a_{1,19}=a_{1,20}=0,\quad a_{1,14}=h_4\left(R_3\right),\qquad a_{1,15}=h_5\left(R_3\right);$$

$$a_{2,1}=a_{2,2}=a_{2,3}=a_{2,4}=a_{2,5}=a_{2,6}=a_{2,7}=a_{2,8}=a_{2,9}=a_{2,10}=a_{2,11}=a_{2,12}=a_{2,13}=a_{2,14}=$$

$$=a_{2,15}=a_{2,16}=a_{2,17}=0,\quad a_{2,18}=1,\qquad a_{2,19}=\ln R_3,\qquad a_{2,20}=R_3^2;$$

$$a_{3,1}=a_{3,2}=a_{3,3}=a_{3,4}=a_{3,5}=a_{3,6}=a_{3,7}=a_{3,8}=a_{3,9}=a_{3,10}=a_{3,11}=a_{3,12}=a_{3,13}=a_{3,14}=$$

$$=a_{3,15}=a_{3,16}=a_{3,17}=0,\quad a_{3,18}=1,\qquad a_{3,19}=R_3^{-1},\qquad a_{3,20}=2R_3;$$

$$a_{4,1}=g_1\left(R_2\right),\qquad a_{4,2}=g_2\left(R_2\right),\qquad a_{4,3}=g_3\left(R_2\right),\qquad a_{4,4}=R_2,\quad a_{4,5}=R_2^{-1},$$

$$a_{4,6}=a_{4,7}=a_{4,8}=a_{4,9}=a_{4,10}=a_{4,11}=a_{4,12}=a_{4,13}=0,\qquad a_{4,14}=-R_2,\ a_{4,15}=-R_2^{-1},$$

$$a_{4,16}=a_{4,17}=a_{4,18}=a_{4,19}=a_{4,20}=0;$$

$$a_{5,1}=f_1\left(R_2\right),\qquad a_{5,2}=f_2\left(R_2\right),\qquad a_{5,3}=f_3\left(R_2\right),\qquad a_{5,4}=\frac{R_2^2}{2\delta},\quad a_{5,5}=\frac{\ln R_2}{\delta},$$

$$a_{5,6}=-\frac{R_2^2}{2\delta},\ a_{5,7}=-\frac{\ln R_2}{\delta},\qquad a_{5,8}=1,\qquad a_{5,9}=-\frac{J_0\left(\lambda R_2\right)}{2K},\ a_{5,10}=-\frac{Y_0\left(\lambda R_2\right)}{2K},$$

$$a_{5,11}=-\frac{I_0\left(\lambda R_2\right)}{2K},\ a_{5,12}=-\frac{K_0\left(\lambda R_2\right)}{2K},\ a_{5,13}=a_{5,14}=a_{5,15}=a_{5,16}=a_{5,17}=0,\qquad a_{5,18}=-1,$$

$$a_{5,19}=-\ln R_2,\qquad a_{5,20}=-R_2^2;$$

$$a_{6,1}=f_1'\left(R_2\right),\qquad a_{6,2}=f_2'\left(R_2\right),\qquad a_{6,3}=f_3'\left(R_2\right),\qquad a_{6,4}=\frac{R_2}{\delta},\quad a_{6,5}=\frac{1}{\delta R_2},$$

$$a_{6,6}=-\frac{R_2}{\delta},\ \ a_{6,7}=-\frac{1}{\delta R_2},\qquad a_{6,8}=0,\qquad a_{6,9}=-\frac{\lambda J_1(\lambda R_2)}{2K},\ a_{6,10}=\frac{\lambda Y_1(\lambda R_2)}{2K},$$

$$a_{6,11}=-\frac{\lambda I_1(\lambda R_2)}{2K},\ a_{6,12}=\frac{\lambda K_1(\lambda R_2)}{2K},\ \ a_{6,13}=a_{6,14}=a_{6,15}=a_{6,16}=a_{6,17}=a_{6,18}=0,$$

$$a_{6,19}=-\frac{1}{R_2},\ a_{6,20}=-2R_2;$$

$$a_{7,1}=\xi_1(R_2),\quad a_{7,2}=\xi_2(R_2),\quad a_{7,3}=-\xi_3(R_2),\quad a_{7,4}=\xi_4(R_2),\quad a_{7,5}=-\xi_5(R_2),$$

$$a_{7,6}=-\xi_4(R_2),\quad a_{7,7}=\xi_5(R_2),\quad a_{7,8}=0,\quad a_{7,9}=\eta_1(R_2),\quad a_{7,10}=\eta_2(R_2),$$

$$a_{7,11}=-\eta_3(R_2),\quad a_{7,12}=\eta_4(R_2),\quad a_{7,13}=a_{7,14}=a_{7,15}=a_{7,16}=a_{7,17}=a_{7,18}=0,$$

$$a_{7,19}=\frac{D}{R_2^2}(1-\mu),\ \ a_{7,20}=-2D(1+\mu);$$

$$a_{8,1}=h_1(R_2),\quad a_{8,2}=h_2(R_2),\quad a_{8,3}=h_3(R_2),\quad a_{8,4}=h_4(R_2),\quad a_{8,5}=h_5(R_2),$$

$$a_{8,6}=a_{8,7}=a_{8,8}=a_{8,9}=a_{8,10}=a_{8,11}=a_{8,12}=a_{8,13}=0,\quad a_{8,14}=-h_4(R_2),\quad a_{8,15}=-h_5(R_2),$$

$$a_{8,16}=a_{8,17}=a_{8,18}=a_{8,19}=a_{8,20}=0;$$

$$a_{9,1}=\vartheta_1(R_2),\qquad a_{9,2}=\vartheta_2(R_2)I_1(\beta R_2),\quad a_{9,3}=\vartheta_2(R_2)K_1(\beta R_2),\quad a_{9,4}=a_{9,5}=0,$$

$$a_{9,6}=a_{9,7}=a_{9,8}=0,\quad a_{9,9}=\frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_2)}{2K},\quad a_{9,10}=\frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_2)}{2K},\quad a_{9,11}=\frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_2)}{2K},$$

$$a_{9,12}=-\frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_2)}{2K},\quad a_{9,13}=a_{9,14}=a_{9,15}=a_{9,16}=a_{9,17}=a_{9,18}=a_{9,19}=a_{9,20}=0;$$

$$a_{10,1}=\xi_1(R_2),\quad a_{10,2}=\xi_2(R_2),\quad a_{10,3}=-\xi_3(R_2),\quad a_{10,4}=\xi_4(R_2),\quad a_{10,5}=-\xi_5(R_2),$$

$$a_{10,6}=-\xi_4(R_2),\quad a_{10,7}=\xi_5(R_2),\quad a_{10,8}=0,\quad a_{10,9}=-\eta_1(R_2),\quad a_{10,10}=-\eta_2(R_2),$$

$$a_{10,11}=\eta_3(R_2),\quad a_{10,12}=-\eta_4(R_2),\quad a_{10,13}=a_{10,14}=a_{10,15}=a_{10,16}=a_{10,17}=a_{10,18}=0,$$

$$a_{10,19}=a_{10,20}=0;$$

$$a_{11,1}=-h_1(R_2),\quad a_{11,2}=-h_2(R_2),\quad a_{11,3}=-h_3(R_2),\quad a_{11,4}=h_4(R_2),\quad a_{11,5}=h_5(R_2),$$

$$a_{11,6}=a_{11,7}=a_{11,8}=a_{11,9}=a_{11,10}=a_{11,11}=a_{11,12}=a_{11,13}=a_{11,14}=a_{11,15}=a_{11,16}=a_{11,17}=0,$$

$$a_{11,18}=a_{11,19}=a_{11,20}=0;$$

$$a_{12,1}=-g_1(R_1),\quad a_{12,2}=-g_2(R_1),\quad a_{12,3}=-g_3(R_1),\quad a_{12,4}=a_{12,5}=0,\quad a_{12,6}=R_1,$$

$$a_{12,7}=R_1^{-1},\quad a_{12,8}=a_{12,9}=a_{12,10}=a_{12,11}=a_{12,12}=0,\quad a_{12,13}=-R_1,\ a_{12,14}=a_{12,15}=0,$$

$$a_{12,16}=a_{12,17}=a_{12,18}=a_{12,19}=a_{12,20}=0;$$

$$a_{13,1}=f_1(R_1),\quad a_{13,2}=f_2(R_1),\quad a_{13,3}=f_3(R_1),\quad a_{13,4}=\frac{R_1^2}{2\delta},\quad a_{13,5}=\frac{\ln R_1}{\delta},$$

$$a_{13,6}=-\frac{R_1^2}{2\delta},\ a_{13,7}=-\frac{\ln R_1}{\delta},\quad a_{13,8}=1,\quad a_{13,9}=\frac{J_0(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{13,10}=\frac{Y_0(\lambda R_1)}{2K},$$

$$a_{13,11}=\frac{I_0(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{13,12}=\frac{K_0(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{13,13}=a_{13,14}=a_{13,15}=0,\quad a_{13,16}=-1,$$

$$a_{13,17}=-\ln R_1,\quad a_{13,18}=-R_1^2,\quad a_{13,19}=a_{13,20}=0;$$

$$a_{14,1}=f_1'(R_1),\quad a_{14,2}=f_2'(R_1),\quad a_{14,3}=f_3'(R_1),\quad a_{14,4}=\frac{R_1}{\delta},\quad a_{14,5}=\frac{1}{\delta R_1},$$

$$a_{14,6}=-\frac{R_1}{\delta},\quad a_{14,7}=-\frac{1}{\delta R_1},\quad a_{14,8}=0,\quad a_{14,9}=-\frac{\lambda J_1(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{14,10}=-\frac{\lambda Y_1(\lambda R_1)}{2K},$$

$$a_{14,11}=\frac{\lambda I_1(\lambda R_1)}{2K},\ a_{14,12}=-\frac{\lambda K_1(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{14,13}=a_{14,14}=a_{14,15}=a_{14,16}=0,$$

$$a_{14,17}=-2R_1,\quad a_{14,18}=-R_1^2,\quad a_{14,18}=a_{14,19}=a_{14,20}=0;$$

$$a_{15,1}=\xi_1(R_1),\quad a_{15,2}=\xi_2(R_1),\quad a_{15,3}=-\xi_3(R_1),\quad a_{15,4}=\xi_4(R_1),\quad a_{15,5}=-\xi_5(R_1),$$

$$a_{15,6}=-\xi_4(R_1),\quad a_{15,7}=\xi_5(R_1),\quad a_{15,8}=0,\quad a_{15,9}=-\eta_1(R_1),\quad a_{15,10}=-\eta_2(R_1),$$

$$a_{15,11}=\eta_3(R_1),\quad a_{15,12}=-\eta_4(R_1),\quad a_{15,13}=a_{15,14}=a_{15,15}=a_{15,16}=0,\quad a_{15,17}=-2D(1+\mu)$$

$$a_{15,18}=a_{15,19}=a_{15,20}=0;$$

$$a_{16,1}=-h_1(R_1),\quad a_{16,2}=-h_2(R_1),\quad a_{16,3}=-h_3(R_1),\quad a_{16,4}=a_{16,5}=0,\quad a_{16,6}=h_4(R_1),$$

$$a_{16,7}=h_5(R_1),\quad a_{16,8}=a_{16,9}=a_{16,10}=a_{16,11}=a_{16,12}=0,\quad a_{16,13}=-h_4(R_1),\quad a_{16,14}=0,$$

$$a_{16,15}=a_{16,16}=a_{16,17}=a_{16,18}=a_{16,19}=a_{16,20}=0;$$

$$a_{17,1}=\vartheta_1(R_1),\quad a_{17,2}=\vartheta_2(R_1)I_1(\beta R_1),\quad a_{17,3}=\vartheta_2(R_1)K_1(\beta R_1),\quad a_{17,4}=a_{17,5}=0,$$

$$a_{17,6}=a_{17,7}=a_{17,8}=0,\ a_{17,9}=\frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_1)}{2K},\ a_{17,10}=\frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_1)}{2K},\ a_{17,11}=\frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_1)}{2K},$$

$$a_{17,12}=-\frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{17,13}=a_{17,14}=a_{17,15}=a_{17,16}=a_{17,17}=a_{17,18}=a_{17,19}=a_{17,20}=0;$$

$$a_{18,1}=\vartheta_1(R_1),\ a_{18,2}=\vartheta_2(R_1)I_1(\beta R_1),\ a_{18,3}=\vartheta_2(R_1)K_1(\beta R_1),\ a_{18,4}=a_{18,5}=a_{18,6}=0,$$

$$a_{18,7}=a_{18,8}=0,\ a_{18,9}=-\frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_1)}{2K},\ a_{18,10}=-\frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_1)}{2K},\ a_{18,11}=-\frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_1)}{2K},$$

$$a_{18,12}=\frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_1)}{2K},\quad a_{18,13}=a_{18,14}=a_{18,15}=a_{18,16}=a_{18,17}=a_{18,18}=a_{18,19}=a_{18,20}=0;$$

$$a_{19,1}=\xi_1(R_1),\quad a_{19,2}=\xi_2(R_1),\quad a_{19,3}=-\xi_3(R_1),\quad a_{19,4}=\xi_4(R_1),\quad a_{19,5}=-\xi_5(R_1),$$

$$a_{19,6}=-\xi_4(R_1),\quad a_{19,7}=\xi_5(R_1),\quad a_{19,8}=0,\quad a_{19,9}=\eta_1(R_1),\quad a_{19,10}=\eta_2(R_1),$$

$$a_{19,11}=-\eta_3(R_1),\quad a_{19,12}=\eta_4(R_1),\quad a_{19,13}=a_{19,14}=a_{19,15}=a_{19,16}=a_{19,17}=a_{19,18}=a_{19,19}=0,$$

$$a_{19,20}=0;$$

$$a_{20,1}=h_1(R_1),\quad a_{20,2}=h_2(R_1),\quad a_{20,3}=h_3(R_1),\quad a_{16,4}=h_4(R_1),\quad a_{20,5}=h_5(R_1),$$

$$a_{20,6}=a_{20,7}=a_{20,8}=a_{20,9}=a_{20,10}=a_{20,11}=a_{20,12}=a_{20,13}=a_{20,14}=a_{20,15}=a_{20,16}=a_{20,17}=0,$$

$$a_{20,18}=a_{20,19}=a_{20,20}=0.$$

При дослiджені напруженого стану з’єднання бажано мінімізувати вплив на напружений стан клейового шару умов на зовнішній границі основної пластини. Тому покладемо, що основна пластина має дуже великий радіус R_3.

Параметри задачі: $R_1 = 40$ мм, $R_2 = 60$ мм, $R_3 = 5R_2$, $\delta = 3$ мм, $\delta_0 = 0,1$ мм, $E = 70$ ГПа (алюмінієвий сплав), $\mu = 0,28$, $E_0 = 0,8$ ГПа, $G_0 = 0,3125$ ГПа. Радіальні розтяжні зусилля F прикладені вздовж периметру основної пластини.

Розрахунки НДС конструкції виконано двома способами – за допомогою запропонованої моделі і за допомогою скінченно-елементного моделювання. Як і у попередній задачі, при створенні скінчено-елементної моделі введено фаски з округленням кромки та надлишки видавленого клею, які створюють наплив на краю шва.

На рис. 4.10. наведено графіки нормальних напружень у клейовому шарі, які розраховано за допомогою створеної аналітичної моделі (АМ) та скінченно-елементної моделі (FEM), які подано у безрозмірній формі – у формі відношення до рівномірно розподілених по шву напружень навантаження.

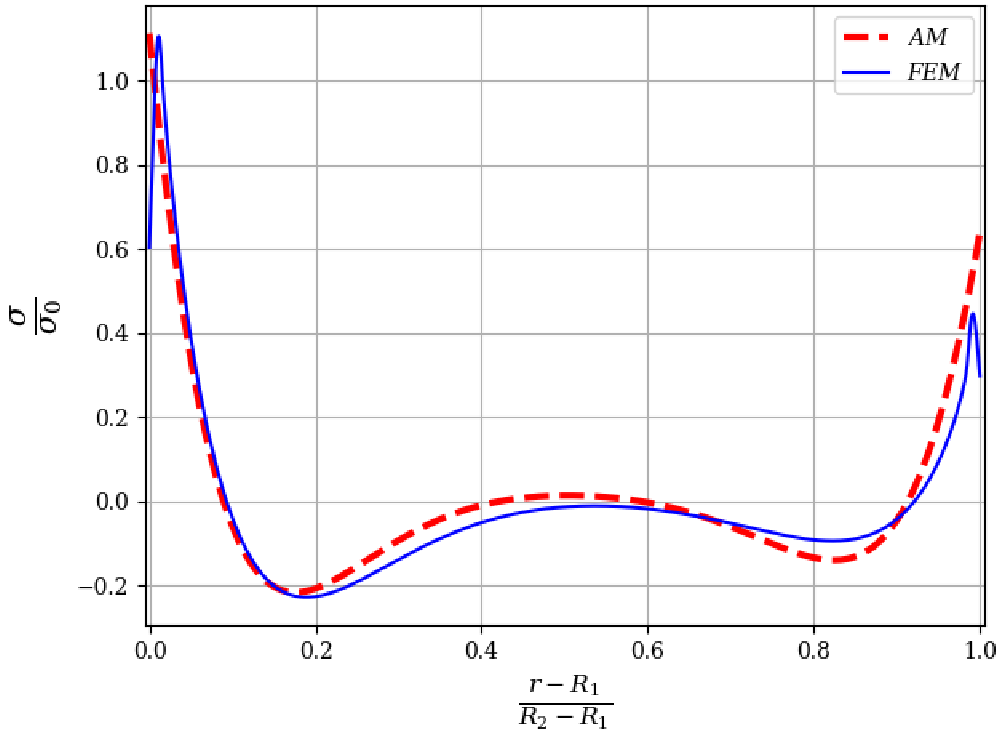

Рисунок 4.10. Нормальні напруження у клейовому шарі

Дотичні напруження у клейовому шарі показано на рис. 4.11. Також наведено порівняння напружень, розрахованих за двома методами.

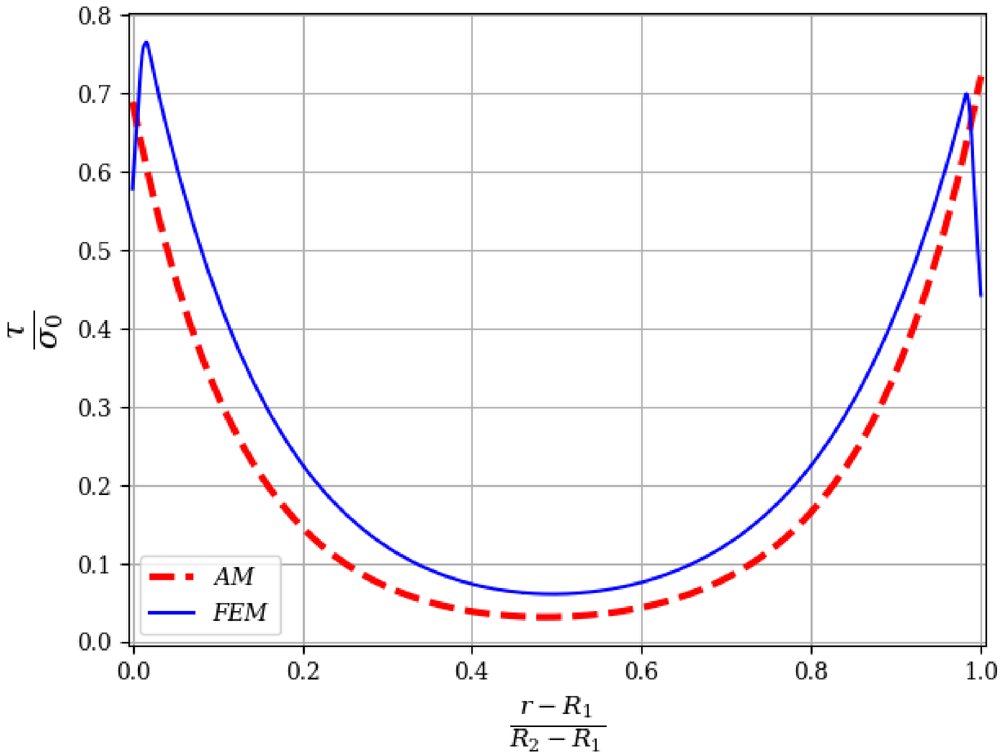

Рисунок 4.11. Дотичні напруження у клейовому шарі

Із рисунків видно, що дотичні і нормальні напруження в клеї – максимальні на границі області склеювання. Ця особливість напруженого стану клейових з'єднань стрижнів добре відома, і, як бачимо, присутня також і при передачі зусиль з пластини на круглу накладку. Порівняння показує добру узгодженість результатів розрахунків, що підтверджує адекватність запропонованої моделі.

З'єднання забезпечує передачу зусиль з основної пластини на накладку, що забезпечує розвантаження основної пластини. Але конструкція несиметрична, і внаслідок ексцентриситету сил при навантаженні зазнає згину, який впливає на напружений стан обох пластин.

Нормальні напруження в пластинах в радіальному ($\sigma_{k,r}$) і коловому ($\sigma_{k,\varphi}$) напрямках за теорією Кірхгофа – Лява описується залежностями

$$\sigma_{k,r}(r,z)=\frac{N_k(r)}{\delta}-\frac{12z}{\delta^3}M_{k,r}(r), \qquad \sigma_{k,\varphi}(r,z)=\frac{Q_k(r)}{\delta}-\frac{12z}{\delta^3}M_{k,\varphi}(r).$$

На границі отвору напруження $\sigma_{1,r}$ дорівнюють нулю. Тому за відсутності накладки напруження $\sigma_{1,\varphi}$ будуть вдвічі більші за напруження на зовнішній віддаленій границі пластини $\sigma_0 = \frac{F}{\delta}$. На рис. 4.12. наведено графіки напружень $\sigma_{1,r}$, а на рис. 4. 13. – графіки напружень $\sigma_{1,\varphi}$ в основній пластині у серединній площині $(z = 0)$ і на зовнішніх поверхнях пластини $(z = \pm 0{,}5\delta)$ в околі клейового з'єднання. Напруження наведено в безрозмірній формі, у вигляді відношення до напружень на зовнішній границі σ_0. Безрозмірна координата горизонтальної вісі графіку обчислюється за формулою $\overline{r} = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$, область склеювання відповідає інтервалу $\overline{r} \in [0;1]$.

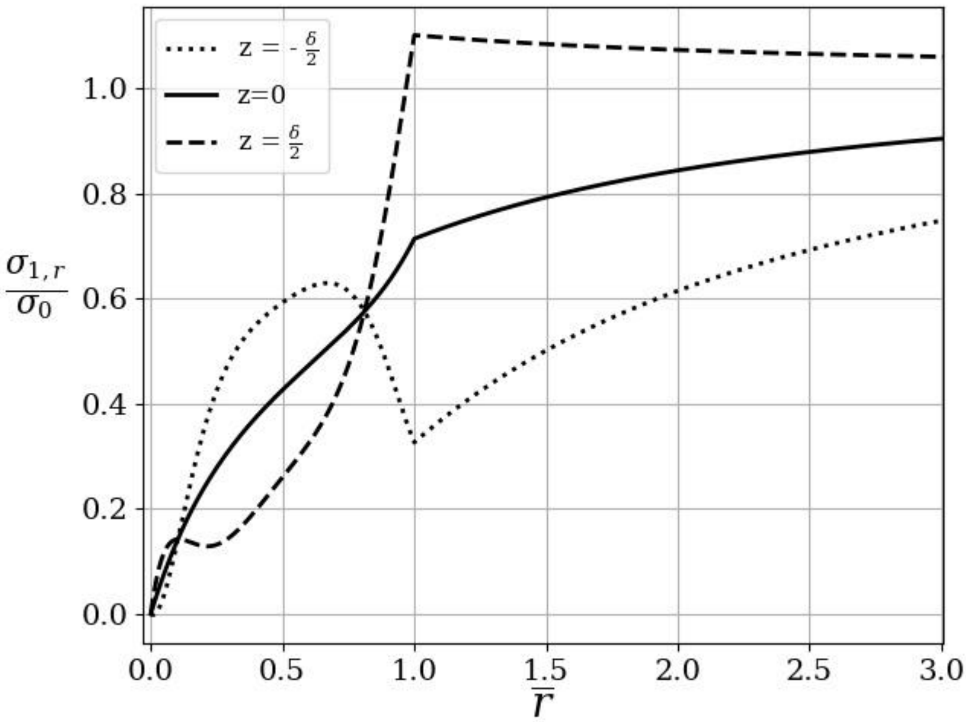

Рисунок 4.12. Напруження $\sigma_{1,r}$ в основній пластині.

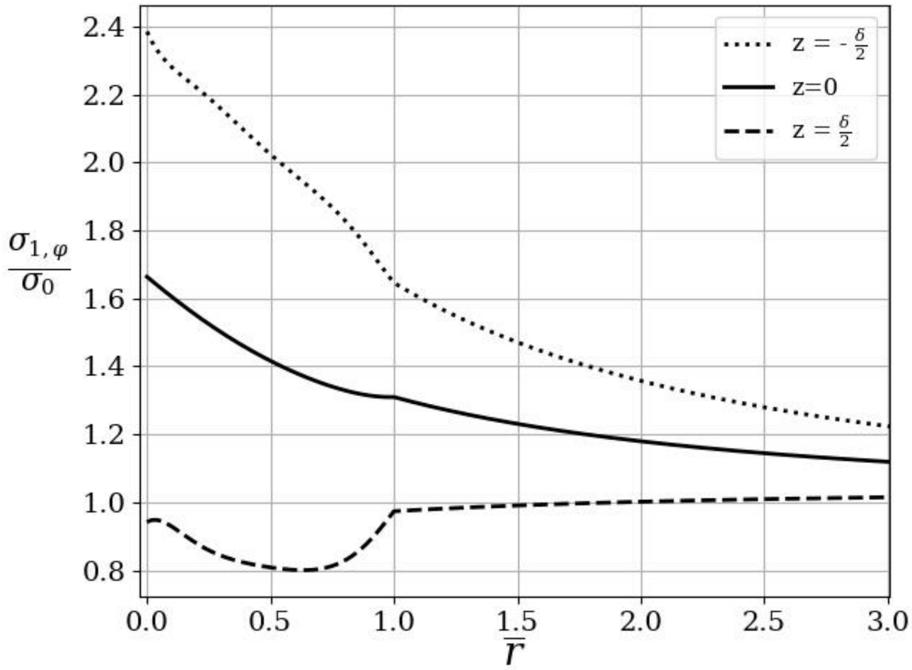

Рисунок 4.13. Напруження $\sigma_{1,\varphi}$ в основній пластині.

Напруження в коловому напрямі в основній пластині $\sigma_{1,\varphi}$ досягають максимальних значень на границі отвору. При цьому завдяки передачі зусиль на накладку, напруження у серединній площині $\sigma_{1,\varphi}(R_1, 0)$ менші ніж $2\sigma_0$. Але внаслідок згину конструкції на протилежній до накладці стороні пластини $\left(z = -\frac{\delta}{2}\right)$ напруження $\sigma_{1,\varphi}$ майже у 2,4 рази перевищують σ_0.

Запропоновано модель НДС осесиметричного напруженого стану конструкції, яка складається з пластини, що містить круглий виріз, та приклеєної внапуск коаксіальної круглої накладки. Задачу зведено до лінійних диференційних рівнянь відносно дотичних і нормальних напружень в клейовому шарі, які мають аналітичні розв’язки в функціях Бесселя.

Особливістю задачі є те, що, на відміну від з’єднань стрижнів, не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку, накладка лише частково розвантажує основну пластину біля отвору. Частка навантаження, яку приймає накладка, залежить від піддатливості клею. Встановлено, що згин конструкції під дією навантаження має суттєвий вплив на напружений стан пластини та накладки. Для зменшення впливу згину доцільно застосовувати дві накладки з обох сторін основної пластини.

Запропонована модель є розвитком класичної моделі напруженого стану клейового з'єднання двох стрижнів Голанда і Рейсснера [23] на осесиметричну область склеювання. У подальшому модель може бути розвинуто на одновісне навантаження.

4.3 Висновки за розділом

У розділі уперше розглянуто задачу зі знаходження НДС з'єднання пластинки з круглим отвором та коаксіальною накладкою внапуск за умов осесиметричного НДС. Задачу розглянуто у двох постановках – без урахування вигину та поперечних переміщень та з у рахуванням цих факторів. Створені статичні моделі НДС з'єднань можна розглядати як узагальнення класичних одновимірних моделей з'єднання Фолькерсена та Голанда і Рейсснера на осесиметричну геометрію. У результаті проведеної роботи можна зробити такі висновки:

1. На відміну від з'єднань стрижнів, не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку, накладка лише частково розвантажує основну пластину біля отвору.

2. Вигин суттєво розвантажує клейовий шар, зменшуючи дотичні напруження.

3. Внаслідок осьової симетрії розв'язки задач будуються у функціях Бесселя, які виступають певним аналогом експоненціальних функцій (або гіперболічних синуса та косинуса) у класичних моделях Фолькерсена та Голанда і Рейсснера.

4. Проведене дослідження НДС модельних задач та порівняння зі скінченно-елементним моделюванням доводить, що створені у даному розділі моделі та відповідні аналітичні розв'язки є адекватними і з високою точністю описують напружений стан склеєної конструкції.

5. На відміну від існуючих моделей НДС тришарових круглих пластин створена модель статичного НДС припускає різні крайові умови для кожного з несних шарів та відповідно різні поперечні переміщення, що дозволяє розв'язати широке коло нових задач.

Результати розділу опубліковано в роботах [120, 119, 11, 132].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Мету дисертаційної роботи досягнуто в повному обсязі: вирішено важливу науково-дослідну задачу розробки нових моделей статичного НДС клейових з'єднань внапуск.

Найбільш важливими є наступні результати роботи:

1. Розвинуто двовимірні моделі статичного НДС клейових з'єднань прямокутних пластин, які на відміну від класичної моделі Фолькерсена враховують нерівномірний розподіл дотичних напружень за шириною з'єднання, що дозволило отримати аналітичний розв'язок задач з новими, не властивими для моделі Фолькерсена, крайовими умовами, а саме коли зовнішнє навантаження зсувом прикладається до бічної сторони однієї пластини в умовах жорсткого закріплення протилежної сторони іншої пластини.

2. Створено нові моделі статичного НДС з'єднань циліндричних труб, які дозволили врахувати нерівномірний характер силового навантаження за коловою координатою та отримати аналітичний розв'язок цих задач.

3. Створено нові моделі статичного НДС з'єднань циліндричних оболонок, які дозволяють уникнути існуючих протиріч класичних моделей, що виникають внаслідок різних радіусів кривизни з'єднувальних поверхонь, а також отримано аналітичні розв'язки цих задач. Запропонована модель з'єднання враховує осереднені за товщиною зсувні напруження у клеї та нормальні напруження, які лінійно змінюються за радіальною координатою.

4. Уперше створено дві моделі осесиметричного статичного НДС з'єднання пластини, що має круглий отвір і концентричної круглої накладки. Отримано аналітичні розв'язки відповідних задач. Створені моделі можна розглядати як узагальнення класичних одновимірних моделей з'єднання Фолькерсена та Голанда – Рейсснера на конструкції з радіальною симетрією.

5. На основі розв'язання модельних задач здійснено порівняння отриманих результатів з даними скінченно-елементного моделювання, яке довело, що запропоновані моделі механічної поведінки клейових з'єднань

внапуск й відповідні аналітичні розв’язки є адекватними і з високою точністю описують напружений стан досліджуваних конструкцій. Однією з переваг запропонованої в роботі методики є дуже малий, на відміну від МСЕ, час роботи програми з числових розрахунків (в десятки разів швидше ніж за МСЕ).

6. Проведено дослідження характеру НДС клейових з’єднань досліджених конструкцій, яке дозволило виявити істотно нерівномірний характер розподілу зсувних напружень за шириною та довжиною клейового з’єднання, підтвердити значну відмінність середніх та максимальних значень зсувних напружень по площадці з’єднання, наявність локальних максимумів напружень за границею області склеювання, які обумовлено змінами геометрії клейового шару, такими як фаска й наплив клею.

Основні результати і рекомендації дисертаційної роботи впроваджені на ДП «Антонов» та у навчальному процесі кафедри технології виробництва літальних апаратів, кафедри проектування літаків і вертольотів та кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Adams R. D., Peppiatt N. A. Effect of poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint // Journal of Strain Analysis. 1973. Vol. 8, iss. 2. P. 134–139.

2. Adams R. D., Peppiatt N. A. Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints // The Journal of Adhesion. 1977. Vol. 9. P. 1–18.

3. Albat A. M., Romilly D. P. A direct linear-elastic analysis of double symmetric bonded joints and reinforcements // Composites Science and Technology. 1999. No. 59. P. 1127–1137.

4. Amidi Sh., Wang J. An analytical model for interfacial stresses in double-lap bonded joints // The Journal of Adhesion. 2018. P. 1–25. DOI: 10.1080/00218464.2018.1464917.

5. Amidi Sh., Wang J. Three-parameter viscoelastic foundation model of adhesively bonded single-lap joints with functionally graded adherends // Engineering Structures. 2018. Vol. 170. P. 118–134. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.076.

6. Analysis tools for adhesively bonded composite joints. Pt. 1: Higher-order theory / B. A. Bednarcyk et all. // AIAA Journal. 2006. Vol. 44, no. 1. P. 171–181.

7. Anyfantis K. N. Analysis and design of composite-to-metal adhesively bonded joints : PhD thesis / National Technical University Of Athens School Of Naval Architecture And Marine Engineering. Athens, 2012. 277 p.

8. Avila A. F., Bueno P. O. Stress analysis on a wavy-lap bonded joint for composites // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2004. Vol. 24. P. 407–414.

9. Aydin M. D. 3-D nonlinear stress analysis on adhesively bonded single lap composite joints with different ply stacking sequences // The Journal of Adhesion. 2008. Vol. 84. P. 15–36.

10. Banea M. D., da Silva L. F. M. Adhesively bonded joints in composite materials: an overview // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.

Pt. L: Journal of Materials Design and Applications. 2009. No. 223. P. 1–18.

11. Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 310 – 319 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

12. Barbosa D. R., Campilho R. D. S. G., Rocha R. J. B. Experimental and numerical assessment of tensile loaded tubular adhesive joints // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Pt. L: Journal of Materials: Design and Applications. Vol. 233, iss. 3. P. 452–464.

13. Bigwood D. A., Crocombe A. D. Non-linear adhesive bonded joint design analyses // International Journal Adhesion and Adhesives. 1990. Vol. 10, № 1. P. 31–41.

14. Bogdanovich A. E., Kizhakkethara I. Three-dimensional finite element analysis of double lap composite adhesive bonded joint using sub modeling approach // Composites: Pt. B. 1999. Vol. 30. P. 537–551.

15. Bonded lap joints of composite laminates with tapered edges / Oterkus E. et all. // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 1459–1489.

16. Chadegani A., Yang C., Dan-Jumbo E. Strain-energy release rate analysis of adhesive-bonded composite joints with prescribed interlaminar crack // Journal of Aircraft. 2009. Vol. 46, no. 1. P. 203–215.

17. Characteristics of in-plane shear loaded adhesive lap joints: experiments and analysis [Electronic resource]: final report 2003. URL: http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar03-21.pdf (01.03.2021).

18. Cheikh M., Coorevits P., Loredo A. Modelling the stress vector continuity at the interface of bonded joints // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2001. Vol. 21. P. 249–257.

19. Cognard J. Y., Devaux H., Sohier L. Numerical analysis and optimisation of cylindrical adhesive joints under tensile loads // International Journal

of Adhesion and Adhesives. 2010. Vol. 30, iss. 8. P. 706–719. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.07.003.

20. Comparison of analytical, numerical, and experimental methods in deriving fracture toughness properties of adhesives using bonded double lap joint specimens / A. R. Setoodeh, H. Hadavinia, F. R. Biglari, K. Nikbin // The Journal of Adhesion. 2005. Vol. 81, no. 5. P. 529–553.

21. Cuc A. Structural health monitoring of adhesively bonded joints with piezoelectric wafer active sensors [Electronic resource]. 2010. 329 p. URL:http://scholarcommons.sc.edu/etd/329 (02.03.2021).

22. Da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analysis of mixed adhesive bonded joints Pt. I: Theoretical formulation // Journal of Adhesion Science and Technology. 2009. Vol. 23. P. 1–34.

23. Da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Pt. I: Literature survey // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2009. Vol. 29. P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005

24. Damage detection in adhesively bonded single lap joints by using backface strain: proposing a new position for backface strain gauges / M. Z. Sadeghi, J. Weiland, A. Preisler, J. Zimmermann, A. Schiebahn, U. Reisgen, K. U. Schroeder // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2020. Vol. 97. Art. 102494. DOI:10.1016/j.ijadhadh.2019.102494

25. Dechwayukul C., Rubin C. A., Hahn G. T., Dechwayukul C., Analysis of the Effects of Thin Sealant Layers in Aircraft Structural Joints // AIAA Journal. 2003. Vol. 41, no. 11, P. 2216–2228.

26. Delale F., Erdogan F., Aydinoglu M. N. Stresses in adhesively bonded joints: A closed-form solution // Journal of Composite Materials. 1981. Vol. 15. P. 249–271.

27. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels / A. C. Okafor, N. Singh, U. E. Enemuoh, S. V. Rao // Composite Structures. 2005. Vol. 71. P. 258–270.

DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.

28. Dragoni E., Goglio L. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Pt. I: Critical review and finite element assessment of published models // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2013. Vol. 47. P. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.

29. Duong C. N., Yu J. An analytical estimate of thermal effects in a composite bonded repair: plane stress analysis // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39. P. 1003–1014.

30. Esmaeel R. A., Taheri F. Stress analysis of tubular adhesive joints with delaminated adherend // Journal of Adhesion Science and Technology. 2009. Vol. 23. P. 1827–1844. DOI: 10.1163/016942409X12459095670511.

31. Failure load prediction of adhesively bonded single lap joints by using various FEM techniques / M. Z. Sadeghi, A. Gabener, J. Zimmermann, K. Savarana, J. Weiland, U. Reisgen, K. U. Schroeder // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2020. Vol. 97. Art. 102493. DOI:10.1016/j.ijadhadh.2019.102493.

32. Finite element prediction of fatigue crack propagation lifetime in composite bonded joints / M. M. Abdel Wahab, I. A. Ashcroft, A. D. Crocombe, P. A. Smith // Composites. Pt. A. 2004. Vol. 35. P. 213–222.

33. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet – high-order theory approach // Journal of Engineering Mechanics. 1999. Vol. 125. P. 1298–1307.

34. Functionally graded adherends in adhesive joints: An overview / M. Q. dos Reis, E. A. S.Marques, R. J. C.Carbasa, L. F. M. da Silva // Journal of Advanced Joining Processes. 2020. Vol. 2. Art. 100033. DOI: 10.1016/j.jajp.2020.100033.

35. Goglio L., Rossetto M. Precision of the one-dimensional solutions for bonded double lap joints // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2011. Vol. 31. P. 301–314.

36. Gonçalves J. P. M, de Moura M. F. S. F., de Castro P. M. S. T. A three-

dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2002. Vol. 22. P. 357–365.

37. Gustafson P. A., Bizard A., Waas A. M. Dimensionless parameters in symmetric double lap joints: an orthotropic solution for thermo mechanical loading // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 5774–5795.

38. Gustafson P. A., Waas A. M. The influence of adhesive constitutive parameters in cohesive zone finite element models of adhesively bonded joints // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 2201 – 2215.

39. Guz A. N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks: review // International Applied Mechanics. 2014. Vol. 50, no. 1. P. 1–57. DOI:10.1007/s10778-014-0609-y.

40. Haghani R., Al-Emrani M., Kliger R. Stress distribution in adhesive joints with tapered laminates – effect of tapering. Stress distribution in adhesive joints with tapered laminates length and material properties // Journal of Composite Materials. 2010. Vol. 44, no. 3. P. 387–302.

41. Harris J. A., Adams R. D. Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods // International Journal of Adhesion and Adhesives. 1984. Vol. 4, no. 2. P. 65–78.

42. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and // International Journal of Adhesion and Adhesives. 1994. Vol. 14, no. 4. P. 261–267.

43. Hoyt D. M., Ward S. H., Minguet P. J. Strength and fatigue life modeling of bonded joints in composite structure // Journal of Composites Technology and Research. 2002. Vol. 24. DOI: 10.1520/CTR10569J.

44. Hybrid and adhesively bonded joints with dissimilar adherends: a critical review // A. Yousefi Kanani, S. Green, X. Hou, J. Ye // Journal of Adhesion Science and Technology, (2020) 1–39. DOI:10.1080/01694243.2020.1861859 статья в печати

45. Katnama K. B., da Silva L. F. M., Young T. M. Bonded repair of composite aircraft structures: a review of scientific challenges and opportunities //

Progress in Aerospace Sciences. 2013. Vol. 61. P. 26–42.

46. Kaya A. Three dimensional stress analysis in adhesively bonded joints // Mathematical and Computational Applications. 1998. Vol. 3, no. 2. P. 101–111.

47. Khan M. A., Kumar S. Interfacial stresses in single-side composite patch-repairs with material tailored bondline // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2017. Vol. 25, iss. 4. P. 304–318. DOI: 10.1080/15376494.2016.1255824.

48. Kim H., Kedward K. T. Stress analysis of adhesively-bonded joints under in-plane shear loading / Journal of Adhesion. 2001. Vol. 76. P. 1–36.

49. Kumar R. S., Sharma R., Gangwar N. Stress analyses of epoxy bonded tubular socket joints composed of fuzzy fiber reinforced composite adherends // 2nd International Conference on Design, Materials and Manufacture 2019, ICDEM 2019; Surathkal, India, 6–8 Dec. 2019. DOI:10.1063/5.0004175

50. Kurennov S. S., Barakhov K. P. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model. PNRPU Mechanics Bulletin, 2019, no. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

51. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V., Chubukina O. V. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load. VI Міжнародна конференція Актуальні проблеми інженерної механіки. Тези доповідей. Одеса, 12 – 15 травня 2020, С. 209 – 212.

52. Kurennov S. S., Poliakov A. G., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2019) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019. Cham (Switzerland), 2020. P. 75 – 85 (Advances in Intelligent Systems and Computing ; Vol. 1113).

53. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue 1(57). 2019. P. 5 – 13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

54. Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. Stress State of

Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 389 – 400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

55. Kurennov S.S., Barakhov K.P., Poliakov A.G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum Vol. 968 P. 519 – 527.

56. Kurennov S. S. A Simplified two-dimensional model of adhesive joints. Nonuniform load // Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 51, iss. 4. P. 479–488.

57. Kurennov S. S. An Approximate two-dimensional model of adhesive joints. Analytical solution // Mechanics of Composite Materials. 2014. Vol. 50, iss. 1. P. 105–114. DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z.

58. Kurennov S. S. Determining stresses in an adhesive joint with a longitudinal unadhered region using a simplified two-dimensional theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60, iss. 4. P. 740 – 747. DOI: 10.1134/s0021894419040199.

59. Kurennov S. S. Refined mathematical model of the stress state of adhesive lap joint: experimental determination of the adhesive layer strength criterion // Strength of Materials. 2020. Iss. 5. P. 779–789. DOI: 10.1007/s11223-020-00231-5.

60. Kurennov S. S., Koshevoi A. G., Polyakov A. G. Through-thickness stress distribution in the adhesive joint for the multilayer composite material // Russian Aeronautics. 2015. Vol. 58. P. 145–151. DOI: 10.3103/S1068799815020026

61. Lang T. P., Mallick P. K. Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints // International Journal of Adhesion and Adhesives. 1998. Vol. 18. P. 167–177

62. Lee J., Cho M., Kim H. S. Bending analysis of a laminated composite patch considering the free-edge effect using a stress-based equivalent single-layer

composite model // International Journal of Mechanical Sciences. 2011. Vol. 53, iss. 8. P. 606–616. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2011.05.007.

63. Lee S. J., Lee D. G. A Closed-form solution for the torque transmission capability of the adhesively bonded tubular double lap joint // Journal of Adhesion. 1994. Vol. 44. P. 271–284.

64. Lubkin J. L., Reissner E. Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes // Transactions – ASME. 1956. No. 78. P. 1213–1221.

65. Mathias J. D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 6921–6947.

66. Mathias J. D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 6921–6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016

67. Mortensen F., Thomsen O. T. A simple approach for the analysis of embedded ply drops in composite and sandwich laminates // Composites Science and Technology. 1999. Vol. 59. P. 1213–1226.

68. Mortensen F., Thomsen O. T. Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach // Composites Science and Technology. 2002. Vol. 62. P. 1011–1031.

69. Nemes O., Lachaud F. Modeling of cylindrical adhesively bonded joints // Journal of Adhesion Science and Technology. 2009. Vol. 23. P. 1383–1393.

70. Nemes O., Lachaud F., Mojtabi A. Contribution to the study of cylindrical adhesive joining // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2006. Vol. 26. P. 474–480.

71. Numerical analysis of the effect of thermal residual stresses on the performances of bonded composite repairs in aircraft structures / A. Albedah, B. B. Bouiadjra et all. // Composites. Pt. B: Engineering. 2011. Vol. 42, no. 3. P. 511–516.

72. Numerical study of flexible tubular metal-polymer adhesive joints /

M. A. Dantas, R. Carbas, E. A. S.Marques, M. P. L. Parente, D. Kushner, L. F. M. da Silva // The Journal of Adhesion. 2020. Art. 1822173. DOI:10.1080/00218464.2020. статья в печати

73. Numerical study of lap joints with composite adhesives and composite adherends subjected to in-plane and transverse loads / S. M. R. Khalili et all. // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2008. Vol. 28. P. 411–418.

74. Olia M., Rossettos J. N. Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending // International Journal of Solids and Structures. 1996. Vol. 33, iss. 18. P. 2681–2693.

75. Osnes H., Andersen A. Computational analysis of geometric nonlinear effects in adhesively bonded single lap composite joints // Composites: Pt. B. 2003 Vol. 34. P. 417–427.

76. Oterkus E., Barut A., Madenci E. Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints // NASA Technical Report AIAA Paper 2004–1560, ID 20040084438. 2004. Acquired Aug. 03. 18 p.

77. Pandey P. C., Shankaragouda H., Singh A. Kr. Nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives // Computers and Structures. 1999. Vol. 70. P. 387–413.

78. Panigrahi S. K., Pradhan B. Three dimensional failure analysis and damage propagation behavior of adhesively bonded single lap joints in laminated frp composites // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2007. Vol. 26, no. 2. P. 183–201.

79. Pugno N., Surace G. Tubular bonded joint under torsion: theoretical analysis and optimization for uniform torsional strength // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2001. Vol. 36, iss. 1. P. 17–34.

80. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II. Displacement formulation for orthotropic adherends // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2015. Vol. 15, iss. 2. P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

81. Romilly D. P., Clark R. J. Elastic analysis of hybrid bonded joints and

bonded composite repairs // Composite Structures. 2008. Vol. 82. P. 563–576.

82. Rubber model for adhesive lap joints / R. D. Adams, S. H. Chambers, P. J. A. Del Strother, N. A. Peppiatt // Journal of Strain Analysis. 1973. Vol. 8, no. 1. P. 52–57.

83. Sharifi S, Choupani N. Stress analysis of adhesively bonded double-lap joints subjected to combined loading // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. Vol. 41. P. 758–763.

84. Shishesaz M., Bavi N. Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation // Journal of Adhesion Science and Technology. 2013. Vol. 27, no. 11. P. 1197–1225.

85. Skoryi I. A., Terekhova L. P. Stresses in adhesive joints in cylindrical shells and panels // Polymer Mechanics. 1972. Vol. 8, iss. 6. P. 964–972. DOI: 10.1007/BF00858340.

86. Smeltzer S. S. An inelastic analysis methodology for bonded joints with shear deformable, anisotropic adherends : Ph.D. dissertation // North Carolina State University. Raleigh, 2003.

87. Smeltzer S. S., Lundgren E. Analytical and numerical results for an adhesively bonded joint subjected to pure bending // 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1–4 May 2006, Newport, Rhode Island. 2006. P. 4472–4483 ID: 20060020138.

88. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovskii D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 54, iss. 3. P. 299–312. DOI:10.1007/s11029-018-9740-x

89. Stere M., Baran D. Calculation of hybrid joints used in modern aerospace structures // Incas Bulletin. 2011. Vol. 3, iss. 4. P. 161– 169.

90. Stress analysis of adhesive in a cracked steel plate repaired with CFRP / Zhang Y. et all. // Journal of Constructional Steel Research. 2018. Vol. 145. P. 210–217. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.02.029.

91. Stress State of a Threaded joint in a dental implant – bone system /

A. Y. Grigorenko, V. V. Los', V. A. Malanchuk, N. N. Tormakhov // International Applied Mechanics. 2020. Vol. 56. P. 33 – 39. DOI: 10.1007/s10778-020-00994-z.

92. Thermal and geometrically non-linear stress analyses of an adhesively bonded composite tee joint / M. K. Apalak, R. Gunes, M. O. Turaman, A. A. Cerit // Composites. Pt. A. 2003. Vol. 34. P. 135–150.

93. Tong L., Sheppard A., Kelly D. The effect of adherend alignment on the behavior of adhesively bonded double lap joints // International Journal of Adhesion & Adhesives. 1996. No. 16. P. 241–247.

94. Tong L., Sun X. Adhesive elements for stress analysis of bonded patch to curved thin-walled structures // Computational Mechanics. 2003. Vol. 30. P. 143–154. DOI 10.1007/s00466-002-0374-3.

95. Tong L., Sun X. Nonlinear stress analysis for bonded patch to curved thinwalled structures // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2003, Vol. 23. P. 349–364.

96. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model / R. Kessentini, O. Klinkova, I. Tawfiq, M. Haddar // International Journal of Mechanical Sciences. 2019. Vol. 150. P. 188–201. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.

97. Tsai M. Y., Morton J. An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint // International Journal Solids and Structures. 1994. Vol. 31, no. 18. P. 2537–2563.

98. Tsai M. Y., Morton J. An experimental investigation of nonlinear deformations in single-lap joints // Mechanic of Materials. 1995. No. 20. P. 183–194.

99. Tsai M. Y., Morton J., Matthews F. L. Experimental and numerical studies of a laminated composite single-lap adhesive joint // Journal of Composite Materials. 1995, Vol. 29, no. 9. P. 1254–1275.

100. Tsai M. Y., Oplinger D. W., Morton J. Improved theoretical solutions for adhesive lap joints // International Journal Solids Structures. 1998, Vol. 35, no. 12. P. 1163–1185.

101. Tvergaard V., Legarth B. N. Effect of plastic anisotropy on crack growth

resistance under mode 1 loading // International Journal of Fracture. 2004, Vol. 130. P. 411–425.

102. Verification of Selected Failure Criteria for Adhesive Bonded Elements with Different Stiffness through the Use of Methacrylic Adhesive / P. Maćkowiak, B. Ligaj, D. Płaczek, M. Kotyk // Materials. 2020. Vol 13, iss. 18. Art. 4011. DOI: 10.3390/ma13184011.

103. Vihak V., Tokovyi Y., Rychahivskyy A. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // Journal of Computational Applied Mechanics. 2002. Vol. 3, no. 2. P. 193–206.

104. Vinson J. R. Adhesive bonding of polymer composites // Polymer Engineering And Science. 1989. Vol. 29, no. 19. P. 1325–1331.

105. Volkersen O. Die Niektraft in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschritten // Luftfahrtforschung. 1938. Vol. 5. P. 41–47.

106. Wang D.-A., Pan J. A computational study of local stress intensity factor solutions for kinked cracks near spot welds in lap-shear specimen // International Journal of Solids and Structures. 2005. Vol. 42. P. 6277–6298.

107. Wang J., Zhang C. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2009. Vol. 29. P. 495–502.

108. Wong E. H., Liu J. Interface and interconnection stresses in electronic assemblies – A critical review of analytical solutions // Microelectronics Reliability. 2017. Vol. 79. P. 206–220. DOI:10.1016/j.microrel.2017.03.010.

109. Xiao X., Foss P. H., Schroeder J. A. Stiffness prediction of the double lap shear joint. Pt. 1. Analytical solution // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2004. No. 24. P. 229–237.

110. Yang C., Pang S. S. Stress-strain analysis of adhesive-bonded single-lap composite joints under cylindrical bending // Composites Engineering. 1993. Vol. 3, no. 2, P. 1051–1063.

111. Yarovaya A. V. Bending of circular sandwich plate on elastic foundation // Strength of Materials. 2005. No. 37. P. 598–605. DOI: 10.1007/s11223-006-0007-

8.

112. Yunxing Du, Yuzhong Liu, Fen Zhou. An improved four-parameter model on stress analysis of adhesive layer in plated beam // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2019. Vol. 91. P. 1–11. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2019.02.005.

113. Zhao B., Lu Z.-H., Lu Y.-N. Closed-form solutions for elastic stress-strain analysis in unbalanced adhesive single-lap joints considering adherend deformations and bond thickness // International Journal of Adhesion & Adhesives. 2011. Vol. 31. P. 434–445.

114. Zhao B., Lu Z-H. A Two-dimensional approach of single-lap adhesive bonded joints // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2009. Vol. 16. P. 130–159.

115. Zhao X., Adams R. D., da Silva L. F. M. Single lap joints with rounded adherend corners: experimental results and strength prediction // Journal of Adhesion Science and Technology. 2011. No. 25. P. 837–856.

116. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейснера склеенных пластин // Исследования по теории пластин и оболочек : сб. ст. / Казан. нац. ун-т. Казань, 1975. Вып. 11. С.136–148.

117. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях // Исследования по теории пластин и оболочек : сб. ст. / Казан. нац. ун-т. Казань, 1973. Вып. 10. С. 3–27.

118. Балашова О. С. Напряженное состояние клеевого соединения с двухсторонней накладкой // Будівельні конструкції : міжвідом. наук.-техн. зб. Київ, 2000. Вип. 52.С. 31–36.

119. Барахов К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2021. – № 2 (170). – С. 12 – 19.

120. Барахов К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії. Открытые информационные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2020. Вып. 90. С.

78-89.

121. Барахов К., Курєннов С. Напружений стан клейового з'єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель. Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. Т. 1. – С. 224.

122. Верещака С.М., Дейнека А.В., Данільцев В.В., Верещака І.В. Термопружний напружений стан склопластикової труби в зоні з'єднання з металевим фланцем // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія: Механізація та автоматизація виробничих процесів 2015. № 11 (27). С. 124–128.

123. Верещака С. М., Данильцев В. В. Прочность бандажного и муфтового соединений стеклопластиковых труб // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. 2015. № 55 (1164). С. 35-42.

124. Верещака С., Данильцев В., Жигилій Д. Розрахунок на міцність склопластикових труб у зоні фланцевих з'єднань // Машинознавство, 2013, №1-2 (187-188). С. 9–13

125. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Известия АН СССР. Серия математическая. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.

126. Карпов Я. С. Проектирования деталей и агрегатов из композитов : учебник. Харьков : ХАИ, 2010. 768 с.

127. Карпов Я. С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов : монография. Харьков : ХАИ, 2006. 359 с.

128. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М. : Наука, 1968. 503 с.

129. Короткова С. Е. Механика клеевых соединений. Алчевск : ДГМИ, 1998. 187 с.

130. Короткова С. Е. Нелинейные деформации клеевого слоя в соединении с односторонней накладкой // Сборник научных трудов / Донбас.

гор.-металлург. ин-т. Алчевск, 1999. Вып. 9. С. 195–201.

131. Короткова С. Е. Расчет коротких клеевых соединений типа нахлестка // Будівельні конструкції : міжвідом. наук.-техн. зб. Київ, 2000. Вип. 52. С. 127–134.

132. Куреннов С. С., Барахов К. П. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой. Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції 5 – 8 жовтня 2020. Харків. С. 350 – 352.

133. Куреннов С. С., Поляков А. Г., Барахов К. П. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2018. – 61. № 3. С. 132 – 138.

Kurennov S. S., Polyakov O. G., Barakhov K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. Journal of Mathematical Sciences. 2021 Vol. 254. P. 156–163.

134. Куреннов С. С. Двухпараметрическая модель упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=40246 (02.03.2021).

135. Куреннов С. С. О распределении напряжений по толщине клеевого соединения // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2016. Вып. 4. С. 80–89.

136. Курєннов С. С., Барахов К. П. Напруження в клейовому з’єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель. Вісник Запорізького національного університету. Запоріжжя. 2019. № 2. С. 81 – 89.

137. Максименко В. Н., Тягний А. В. Расчет напряженного состояния клееклепаных слоистых пластин с трещиной // Ученые записки ЦАГИ. 1990. № 5. С. 92–101.

138. Максимюк В. А., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Напряженно-деформированное состояние гибких ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием // Прикладная механика. 2015. Т. 51, № 4. С. 71–80.

139. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев : Наук. думка, 1968. 891 с.

140. Сильвестров В. В., Землянова А. Ю. Ремонт пластины с круговым вырезом посредством заплатки // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 176–183.

141. Хома И. Ю., Дашко О. Г. Напряженное состояние нетонкой трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием // Прикладная механика. 2015. Т. 50, № 4. С. 112–124.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

[1] Куреннов С. С., Поляков А. Г., Барахов К. П. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2018. – 61. № 3. С. 132 – 138.

Kurennov S. S., Polyakov O. G., Barakhov K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. Journal of Mathematical Sciences. 2021 Vol. 254. P. 156–163.

[2] Kurennov S. S., Barakhov K. P. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model. PNRPU Mechanics Bulletin, 2019, no. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

[3] Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue 1(57). 2019. P. 5 – 13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

[4] Барахов К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії. Открытые информационные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2020. Вып. 90. С. 78-89.

[5] Барахов К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2021. – № 2 (170). – С. 12 – 19.

[6] Курєннов С. С., Барахов К. П. Напруження в клейовому з’єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель. Вісник Запорізького національного університету. Запоріжжя. 2019. № 2. С. 81 – 89.

[7] Kurennov S.S., Barakhov K.P., Poliakov A.G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension. Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum Vol. 968 P. 519 – 527.

[8] Kurennov S. S., Poliakov A. G., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2019) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019. Cham (Switzerland), 2020. P. 75 – 85 (Advances in Intelligent Systems and Computing ; Vol. 1113).

[9] Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 310 – 319 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

[10] Барахов К., Курєннов С. Напружений стан клейового з'єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель. Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. Т. 1. – С. 224.

[11] Kurennov S. S., Barakhov K. P., Dvoretskaya D. V., Chubukina O. V. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load. VI Міжнародна конференція Актуальні проблеми інженерної механіки. Тези доповідей. Одеса, 12 – 15 травня 2020, С. 209 – 212.

[12] Куреннов С. С., Барахов К. П. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой. Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції 5 – 8 жовтня 2020. Харків. С. 350 – 352.

[13] Kurennov S., Barakhov K., Dvoretskaya D., Poliakov O. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. P. 389 – 400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

ДОДАТОК Б

Акти використання результатів дисертаційної роботи

«Затверджую»
Генеральний директор
ДП «АНТОНОВ»
д.т.н., проф. Бичков С.А.

АКТ

використання результатів наукових досліджень
за темою дисертаційної роботи БАРАХОВА Костянтина Петровича
«Статичний напружено-деформований стан клейових з'єднань внапуск»

Цей акт складено щодо використання на Державному підприємстві «Антонов» наступних результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Барахова К. П.:

– підвищення точності визначення напружено-деформованого стану циліндричних клейових з'єднань за умов осесиметричного та локально доданого навантаження;

– підвищення точності розрахунків напруженого стану з'єднань прямокутних пластин за умов передачі зусиль з торця одного шару на бічну сторону іншого шару, що характерне для з'єднань силових елементів конструкції з обшивкою;

– методика розрахунків клейових з'єднань обшивки з круглими отворами та коаксіальними круговими накладками.

Застосування запропонованих методик дозволяє розрахувати напружено-деформований стан у тришарових панелях, ремонтних накладках та конструкціях циліндричної форми.

Заступник Головного конструктора
(з крила та оперення), к.т.н. — Є. Т. Василевський

Головний інженер, д.т.н. — О.В. Андрєєв

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Національного аерокосмічного
університету ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
_________________ В. В. Павліков
___________________________2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» * №02066769

АКТ

використання результатів дисертаційної роботи
здобувача наукового ступеня кандидата технічних наук
БАРАХОВА Костянтина Петровича
«Статичний напружено-деформований стан клейовий з'єднань внапуск»
в навчальний процес
Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»,

Комісія у складі: голови – начальника навчально-методичного відділу, к.т.н., доц. Романова М. С., членів комісії – к.т.н. доц. Шипуль О. В., к.т.н., доц. Гуменного А. М., к.т.н., доц. Маковецького А. В. встановила, що наукові положення дисертаційної роботи «Статичний напружено-деформований стан клейовий з'єднань внапуск», використовуються в навчальному процесі при навчанні за дисциплінами «Фізичне моделювання технологічних процесів», «Основи моделювання технологічних процесів», «Основи технології виробництва та ремонту».

Результати дисертаційної роботи Барахова К. П. використовуються в навчальному процесі для студентів що навчаються за спеціальностями 134 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», 272 «Авіаційний транспорт» і 274 «Автомобільний транспорт», за освітніми програмами «Літаки і вертольоти», «Технології виробництва та ремонту літальних апаратів», «Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів», «Автомобілі та автомобільне господарство».

к.т.н., доцент начальник навчально-методичного відділу	М. С. Романов
к.т.н., доцент, доцент кафедри технології виробництва літальних апаратів	О. В. Шипуль
к.т.н., доцент, зав. кафедрою проектування літаків і вертольотів	А. М. Гуменний
к.т.н., доцент, зав. кафедрою автомобілів та транспортної інфраструктури	А. В. Маковецький