

**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного
Національна академія наук України**

ШМАТКО ТЕТЯНА ВАЛЕНТИНІВНА 

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРОБКА ЧИСЕЛЬНО-
АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-
ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ТА ПЛАСТИН З
ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2025

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Міхлін Юрій Володимирович,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
професор кафедри прикладної математики

Опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Яковлев Сергій Всеволодович,
навчально-науковий інститут комп'ютерних наук та
штучного інтелекту, м. Харків, заступник директора,
Харківський національний університет імені В. Н.
Каразіна, м. Харків, професор кафедри
математичного моделювання та аналізу даних

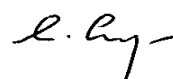
доктор технічних наук, професор
Дісковський Олександр Андрійович,
Дніпровський державний університет внутрішніх
справ, м. Дніпро, професор кафедри інформаційних
технологій

доктор технічних наук, професор
Марчук Олександр Васильович,
Національний транспортний університет, м. Київ,
завідувач кафедри опору матеріалів і
машинознавства

Захист відбудеться «24» квітня 2025 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічній бібліотеці Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Олена СТРЕЛЬНИКОВА

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Широке використання оболонок і пластин як найбільш відповідальних складових елементів сучасних конструкцій, від міцності і жорсткості яких залежить міцність всієї конструкції, приводить до необхідності побудови уточнюючих математичних моделей їх деформування та розробки на їх основі ефективних методів розв'язання нових більш складних класів задач. До таких класів відносяться статичні та динамічні задачі для оболонок, які виготовлені із композитних матеріалів. Серед сучасних композитних матеріалів найбільш широко використовуються функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ). Найчастіше вони застосовуються в таких галузях промисловості, як ракетно-космічна, машинобудівна, авіаційна, оборонна, у промисловому та житловому будівництві. Це пов'язано з великими перевагами ФГМ у порівнянні з традиційними композитами, а саме вони забезпечують високе співвідношення міцності до ваги, відмінну термостійкість матеріалів та усувають концентрацію напруження. Математичними моделями пластин та оболонок, виготовлених із ФГМ, є системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, точний розв'язок яких в загальному випадку є практично неможливим.

В останні роки опубліковано велику кількість робіт, присвячених розробці сучасних чисельно-аналітичних методів дослідження ФГМ пластин та оболонок. Для дослідження таких об'єктів використовуються різні підходи, засновані на застосуванні 3D теорій або квазі-3D (синусоїдальна та гіперболічна) теорій, а також 2D теорій. При цьому найбільш універсальними і широко застосованими є численні модифікації методу скінчених елементів (МСЕ). Багато дослідників для аналізу лінійних коливань використовували метод Релея-Рітца, який є найбільш ефективним для цього класу задач. Але використання цього методу обмежувалось розв'язуванням динамічних задач для ФГМ пластин та пологих оболонок з прямокутною формою плану та досить простими умовами їх закріплення. З огляду на існуючу літературу можна зробити висновок, що ФГМ пластини та оболонки зі складною геометричною формою при наявності вирізів, отворів, пористості, пружної основи, а головне при нелінійному деформуванні об'єктів, вивчені недостатньо.

Таким чином, розробка ефективних чисельно-аналітичних методів дослідження статичної та динамічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених із ФГМ, на основі математичних моделей, які враховують особливості процесів лінійного та нелінійного деформування, є актуальною науково-технічною проблемою. Саме це і визначило тему даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась на кафедрі вищої математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ"). Здобувачка брала участь у виконанні фундаментальних та прикладних завдань держбюджетних робіт Міністерства освіти і науки України у рамках науково-дослідної тематики

кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» відповідно до тем:

- держбюджетна тема "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних та нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти та науки України (№ 960 від 22.12.2004), ДР №0105U000573 (в період з 2005р. по 2007р.);
- держбюджетна тема «Створення на базі теорії R-функцій методів розв’язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№ 1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.);
- держбюджетна тема «Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багат шарових пластин та пологих оболонок» згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1177, від 30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.);
- Грант NATO Science for Peace and Security (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA G6176 (в період з 2023 по 2025 р.), де здобувачка є виконавцем окремих етапів і відповідальним виконавцем.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нового підходу для підвищення ефективності існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних та нелінійних вільних коливань ФГМ пологих оболонок та пластин, у тому числі сендвіч об’єктів, з урахуванням їхньої складної геометрії, пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження в серединній площині.

Для досягнення цієї мети в роботі були поставлені основні наукові задачі:

- розробити метод розв’язку задач теорії лінійних коливань ФГМ пологих оболонок і пластин складної форми в плані, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методах;
- розробити новий підхід дослідження геометрично нелінійних коливань ФГМ структур, який дозволяє звести вихідну нелінійну систему диференціальних рівнянь руху до звичайного нелінійного диференціального рівняння або системи рівнянь;
- побудувати нелінійні рівняння руху пологих оболонок у переміщеннях в рамках класичної та уточнених зсувних деформаційних теорій першого та третього порядків з метою використання їх при реалізації запропонованого методу для розв’язання нелінійних задач;
- отримати варіаційні постановки задач, за допомогою розв’язків яких будується нелінійний розв’язок вихідної задачі;
- знайти аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, що визначають зусилля, моменти та перерізуєчі сили, для різних законів розподілення об’ємних частин кераміки та металу ФГМ, в тому числі степеневих та сигмоїдального законів гомогенізації, причому як для одношарових ФГМ оболонок, так і для сендвіч ФГМ оболонок. Вивести аналогічні аналітичні формули для пористих ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин;

- розвинути конструктивні засоби теорії R-функцій для даного класу задач, побудувати структури розв’язків для різних крайових умов ФГМ пологих оболонок і пластин;
- розробити метод дослідження стійкості ФГМ пластин та пологих оболонок з урахуванням неоднорідного докритичного стану при рівномірному і нерівномірному стискувачому навантаженні в серединній площині;
- розв’язати низку тестових лінійних та геометрично нелінійних задач про коливання, згин та стійкість пологих ФГМ оболонок з метою перевірки вірогідності розробленого метода та відповідного програмного забезпечення;
- застосувати розроблений метод та створене програмне забезпечення для розв’язання таких задач:
 - 1) дослідити вплив градієнтного індексу на власні частоти та амплітудно-частотні характеристики ФГМ одношарових пологих оболонок складної форми в плані;
 - 2) вивчити вплив схеми розташування шарів та різних типів ФГМ на власні частоти та частоти нелінійних коливань оболонок і пластин з вирізами та отворами;
 - 3) дослідити вплив пористості на динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок та пластин;
 - 4) проаналізувати вплив пружної основи на власні частоти та амплітудно-частотні характеристики ФГМ пологих оболонок та пластин;
 - 5) дослідити вплив різних типів нерівномірного стискаючого навантаження пластини, умов закріплення, типів ФГМ на величину критичного навантаження;
 - 6) дослідити вільні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин змінної товщини.

На основі проведених досліджень проаналізувати вплив названих факторів на власні частоти і скелетні криві ФГМ пологих оболонок та пластин з метою надання відповідних рекомендацій для інженерів–конструкторів при проектуванні сучасних конструкцій.

Об’єкт дослідження – статична та динамічна поведінка елементів тонкостінних конструкцій, виготовлених із функціонально-градієнтних матеріалів.

Предмет дослідження – математичне та комп’ютерне моделювання і методи розв’язання лінійних та геометрично нелінійних задач коливання, стійкості та згину ФГМ пластин та пологих оболонок складної геометричної форми.

Методи дослідження. Для розв’язання поставлених задач використовуються: варіаційний метод Рітца, проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна, метод Рунге-Кутта. Для побудови системи координатних функцій використано теорію R-функцій.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що в роботі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід для дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань і стійкості функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин складної форми, в тому числі:

– вперше за допомогою теорії R-функцій розроблено новий підхід для підвищення ефективності існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які виготовлені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів. Використання теорії R-функцій дозволило побудувати в аналітичному вигляді розв’язки задач статичної та динамічної ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної геометрії плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження;

– вперше для ФГМ пластин та оболонок зі складною формою плану розроблено метод розв’язання задач про геометрично нелінійні коливання. Суть цього методу полягає в представленні розв’язку нелінійної задачі у вигляді суми двох доданків, один із яких будується на базі власних функцій, одержаних в результаті розв’язання лінійної задачі про коливання ФГМ оболонки, а другий містить розв’язки допоміжної задачі, яка моделюється неоднорідною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними;

– побудовано нелінійні рівняння руху у переміщеннях з метою комп’ютерної реалізації запропонованого методу;

– вперше отримані варіаційні постановки допоміжних задач та побудовані відповідні функціонали в рамках трьох теорій: класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії пологих оболонок першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді);

– вперше для ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану запропоновано метод зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержано в явному вигляді аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів цього рівняння;

– побудовано алгоритм знаходження відношення частот нелінійних та лінійних коливань, який базується на використанні методу Рунге-Кутти;

– вперше для ФГМ оболонок та пластин, які знаходяться під дією стискаючих як рівномірних, так і нерівномірних навантажень, розроблено підхід до розв’язання задач про коливання та стійкість. Відповідно до запропонованого алгоритму вихідна задача розв’язується як ланцюг наступних задач: спочатку розв’язується задача теорії пружності для визначення неоднорідного докритичного стану; на другому кроці визначається критичне навантаження; на третьому кроці розв’язується задача коливань ФГМ оболонки під дією стискаючого навантаження, величина якого не перебільшує критичне навантаження;

– отримано аналітичні вирази для елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ, у рамках трьох теорій пологих оболонок (класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та уточненої теорії третього порядку). При цьому такі формули одержані як для одношарових, так і для сендвіч оболонок та пластин з урахуванням степеневих та сигмоїдальних законів розподілення об’ємних часток складових та пористості;

– дістали подальшого розвитку методи теорії R-функцій для побудови структурних формул для ФГМ оболонок та пластин, на базі яких будуються

системи координатних функцій, що задовольняють крайовим умовам, в тому числі мішаним. Запропоновані системи координатних функцій випробувано на великій кількості тестових задач та використано для розв'язання нових задач в областях складної геометричної форми;

– розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL на вхідній мові системи. Відповідні програми реалізують алгоритми розв'язання задач у рамках як класичної теорії, так і у рамках уточнених зсувних деформаційних теорій пологих оболонок першого та третього порядків. Програми побудовані для задач коливань одношарових та сендвіч оболонок з урахуванням законів обчислення ефективних властивостей ФГМ, пружної основи, типу пористості, нерівномірного стискаючого навантаження, а також оболонок змінної товщини. Програмне забезпечення протестовано на кожному класі задач та використано для розв'язання серії нових задач, в тому числі нелінійних.

За допомогою розробленого комплексу програм було:

- вивчено вплив об'ємної долі кераміки на власні частоти одношарових ФГМ пологих оболонок складної геометричної форми;
- досліджено вплив товщини лицевих шарів та заповнювача, типу ФГМ на власні лінійні та нелінійні частоти для сендвіч ФГМ пологих оболонок;
- досліджено вплив різних видів пористості на оболонки з отворами та вирізами на власні частоти ФГМ пологих оболонок;
- проаналізовано вплив пружної основи на власні частоти та частоти нелінійних коливань оболонок різної геометричної форми, в тому числі змінної товщини;
- визначено критичне навантаження ФГМ пластин та пологих оболонок з отворами при різних умовах закріплення, різних законах розподілення стискуючих навантажень у серединній площині та різних законах розподілення об'ємної долі кераміки;
- на основі проведених досліджень надано практичні рекомендації щодо проектування елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ФГМ пластинами та пологими оболонками;
- вірогідність розробленого методу підтверджено практичним експериментом та застосуванням інших методів, які базуються на МСЕ.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблений ефективний метод, а також програмне забезпечення для системи POLE-RL, яке здійснює його чисельну реалізацію, дозволили виконати багатоваріантні чисельні експерименти та дослідити лінійні та геометрично нелінійні коливання, стійкість та згин одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок/пластин складної геометричної форми.

Результати, які одержані в дисертації, можуть використовуватися під час проектування елементів аерокосмічних та машинобудівних конструкцій, які виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів.

Велика кількість одержаних в роботі результатів, які представлені у вигляді графіків та таблиць, може бути використана науковцями та інженерами, які застосовують інші методи та пакети, в тому числі МСЕ та відомі пакети ANSYS, ABACUS, NASTRAN з метою порівняння та перевірки вірогідності, особливо це

стосується оболонок та пластин з отворами та вирізами, які жорстко або шарнірно закріплені.

Деякі наукові результати роботи використано в навчальному процесі у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут», кафедра прикладної математики (Додаток Б) та при виконанні науково-дослідної роботи «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій» за проектом Програми НАТО Peace and Security (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA G6176 «Наука заради миру та безпеки» (Додаток В).

Особистий внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: розробка методу та виконання його комп'ютерної реалізації для розв'язання задач про лінійні та нелінійні коливання ФГМ пластин та пологих оболонок складної форми плану; побудова нелінійних рівнянь руху у переміщеннях з метою комп'ютерної реалізації запропонованого методу; отримання варіаційної постановки допоміжних задач та побудова відповідних функціоналів у рамках трьох теорій: класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії пологих оболонок першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді); реалізація методу зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержання в явному вигляді аналітичних виразів для обчислення коефіцієнтів цього рівняння для ФГМ пологих оболонок та пластин; побудова системи базисних функцій за допомогою теорії R-функцій для дослідження ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної форми плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи; розробка нового підходу до розв'язання задач про коливання та стійкість ФГМ оболонок та пластин складної форми плану, які знаходяться під дією стискаючих рівномірних і нерівномірних навантажень.

Апробація результатів роботи. Загальні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 43 українських та міжнародних наукових конференціях, семінарах і конгресах: International Conferences on Nonlinear Dynamics “Нелінійна динаміка” ND-KhPI 2004 (September 14-16, 2004, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2007 (September 25-28, 2007, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2010 (September 21-24, 2010, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2013 (June 19-22, 2013, Sevastopol, Ukraine), ND-KhPI 2016 (September 27-30, 2016, Kharkov, Ukraine); 7-му Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (18-20 травня 2005, Львів, Україна; I та II Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 2007), (10-12 жовтня 2019, Дніпро, Україна); 9th, 10th, 11th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017 (June 25-30, 2017, Budapest, Hungary), ENOC 2020 (July 17-22, 2022, Lyon, France), ENOC 2024 (July 22-26, 2024, Delft, the Netherlands); International conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation DSMSI 2008 (September 14-16, 2008, Alushta, Ukraine), DSMSI 2009 (May 27-29, 2009, Kyiv, Ukraine), DSMSI 2011 (May 25-27, 2011, Kyiv, Ukraine), DSMSI 2013 (May 29-31, 2013, Kyiv, Ukraine); International

Conference on Dynamical System. Theory and Applications DSTA 2007 (December 17-20, 2009, Lodz, Poland), DSTA 2009 (December 07-10, 2009, Lodz, Poland), DSTA 2011 (December 5-8, 2011, Łódź, Poland), DSTA 2015 (December 7-10, 2015, Łódź, Poland), DSTA 2017 (December 11-14, 2017, Łódź, Poland), DSTA 2019 (December 2-5, 2019, Lodz, Poland), DSTA 2021 (December 6-9, 2021, Lodz, Poland); XIX міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (01-03 червня 2011, Харків, Україна); Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» - 2013, 2018, 2023 (21-25 травня 2013, Львів, Україна), (22-25 травня 2018, Львів, Україна), (23-25 травня 2023, Львів, Україна); IX, X та XI Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (15-19 вересня 2014, Львів, Україна), (17-19 вересня 2019, Львів, Україна), (24-26 вересня 2024, Львів, Україна); 11th International Conference "Shell Structures: Theory and Applications" SSTA 2017 (October 11-13, 2017, Gdansk, Poland); II International USERN Congress (November 8-10, 2017, Kharkiv, Ukraine); I and II International Science and Technology Conferences "Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering" DSMME 2018 (10-14 September, 2018, Kharkiv, Ukraine), DSMME 2020 (05–08 October, 2020, Kharkiv, Ukraine); Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih" (04-06 September 2019, Belgrade, Serbia; International Nonlinear Dynamics Conferencei NODYCON 2019 (February 17-20, 2019, Rome, Italy), NODYCON 2021 (February 16-19, 2021, Rome, Italy), NODYCON 2023 (June 18-22, 2023, Rome, Italy); International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering CAMPE-2021 (18-20 жовтня, 2021, Kharkiv, Ukraine); International scientific conference «Actual problems of mechanics - 2023» to the 145th anniversary of the birth of S.P. Timoshenko (14-16 November, 2023, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine); IV International Conference on Dynamics, Control, and Applications to Applied Engineering and Life Science (November 6-11, 2023, Brazil); 13-th International Symposium on Vibrations of Continuous Systems Pomeroy, Kananaskis Mountain Lodge (July 30-August 04, 2023, Alberta, CANADA); 19-th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management CM2023 (September 12-14, 2023, Northampton, UK); 19-th European Mechanics of Materials Conferences EMMC19 (May 29-31, 2024, Madrid, Spain); 28th International Scientific Conference "Transport Means – 2024" (October 02-04, 2024, Kaunas, Lithuania).

Публікації. Основні положення та наукові результати дисертаційної роботи опубліковані в 74 наукових працях, з них:

- 51 стаття, з яких 30 статей включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection, при цьому 29 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 16 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 кuartилів, 2 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 кuartилів); 6 статей – в збірниках наукових праць, що входить до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 15 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 8 статей опубліковано в різних зарубіжних видавництвах);

- 22 публікації – тези доповідей на конференціях (з яких 5 робіт видано в зарубіжних видавництвах);

- 1 монографія у співавторстві.

Структура й обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, вступу, дев'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (374 найменування на 44 сторінках) та 3 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 414 сторінок; робота містить 130 рисунків і 74 таблиці. Основний текст дисертації складає 330 сторінок та додатки на 29 сторінках.

Авторка висловлює глибоку подяку науковому консультанту проф. Ю.В.Міхліну за багаторічну наукову співпрацю, сумісне отримання плідних результатів та створення нових підходів до розв'язання сучасних наукових проблем математичного моделювання, які сприяли формуванню, розвитку й реалізації нового наукового напрямку – використання теорії R-функцій для дослідження функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність дисертаційної роботи, сформульовані мета і задачі досліджень, викладено основні отримані результати, підкреслено їх наукову новизну та практичне значення, наведено відомості про публікації, особистий внесок автора та апробацію роботи.

У першому розділі наведено огляд літературних джерел за темою дисертації. Проведено аналіз сучасного стану теоретичних та числових досліджень лінійних та геометрично нелінійних коливань елементів конструкцій, які моделюються ФГМ пологими оболонками та пластинами. Основна увага приділяється аналізу функціонально-градієнтних елементів тонкостінних конструкцій та методам їх динамічного та статичного дослідження в рамках класичної та уточнених зсувних деформаційних теорій першого (FSDT) та третього порядків (HSDT). Враховуючи широке використання функціонально-градієнтних матеріалів в багатьох галузях промисловості, існує велика кількість публікацій, присвячених математичному моделюванню ефективних властивостей ФГМ та розвиненню ефективних методів дослідження динамічної та статичної поведінки пластин та оболонок.

Фундаментальний вклад у розвиток теорій та методів розрахунку композитних пластин і оболонок внесли роботи провідних вчених, серед яких: С.О. Амбарцумян, В.Г. Баженов, І.А. Біргер, В.В. Болотин, І.Н. Векуа, В.З.Власов, А.С. Вольмір, К.З. Галімов, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М.Гузь, Л.Г. Донелл, Б.Я. Кантор, М.О. Кільчевський, В.Д. Кубенко, Р.М.Кушнір, С.Г. Лехницький, А. Ляв, Х.М. Муштарі, Ю.М. Новічков, В.В.Новожилов, Б.Л. Пелех, В.Г. Піскунов, О.О. Рассказов, В.Л. Рвачов, А.П.Філіппов, Л.А. Фільштінський, І.Ю. Хома, М.О. Шульга, М.Е.Carrera, J.L.Sanders, W.T.Koiter, P.M.Naghdi, H.X.Nguyen, J.N.Reddy, H.S.Shen, A.J.Ferreira, E.Reissner, L.Libresku та інші.

Вагомий внесок у розвиток методів математичного моделювання та дослідження лінійних та геометрично нелінійних процесів деформування композитних елементів тонкостінних конструкцій, у тому числі вироблених з

ФГМ, мають наукові праці К.В.Аврамова, І.В. Андріанова, Д.В. Бреславського, А.Т. Василенка, Я.М. Григоренка, О.Я.Григоренка, В.З. Грищака, В.С. Гудрамовича, А.П. Дзюби, А.А.Дісковського, В.А. Крисько, Л.В. Курпи, В.В. Лободи, І.А. Лози, Г.І. Львова, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Ю.В. Міхліна, В.П. Пошивалова, Н.Д.Панкратової, В.С. Пакош, Н.В. Сметанкіної, С.М. Склепуса, О.О. Стрельнікової, Ю.В.Токового, С.В. Угрімова, О.М. Шупікова, С.В.Яковлева, Н.Altenbach, J. Awrejcewicz, F. Alijani, M. Amabili, M.Ganapathi, S.I.Hossain, K.M.Liew, F.Pellicano, P.K.Sinha, A.V.Singh, C.H.Thai, Y.X.Zhang, A.M.Zenkour, F.Tornabene, M.S.Qatu, P.Ribeiro та інші.

Суттєвий внесок у розвиток методів, заснованих на використанні теорії R-функцій та їх застосувань, внесли учні В.Л. Рвачова: Г.П. Манько, Т.І. Шейко, К.В. Максименко-Шейко, В.М. Колодяжний, В.Ф. Кравченко, Л.В. Курпа, О.М.Литвин, В.С. Проценко, І.Б. Сіроджа, Ю.Г. Стоян, М.С. Синєкоп, С.М.Склепус, Н.Д. Сизова, Ф.П. Слесаренко, І.Г. Суворова, О.М. Шевченко та інші.

Огляд літератури, виконаний за обраною проблемою, показав, що найбільш розвинуті методи дослідження оболонок та пластин прямокутної форми в рамках лінійних теорій: класичної, уточнених зсувних деформаційних теорій першого та третього порядків, а також у деяких модифікаціях цих теорій. Кількість робіт, присвячених дослідженню геометрично нелінійних та параметричних коливань та стійкості ФГМ оболонок/пластин, які мають складну геометричну форму, значно менша. Особливо це стосується ФГМ сендвіч пористих оболонок, оболонок змінної товщини, а також оболонок з закріпленими отворами та вирізами, оболонок на пружній основі, на які діють нерівномірні навантаження у серединній площині.

На основі аналізу літературних джерел обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, пов'язаної з розробкою ефективних чисельно-аналітичних методів та необхідність проведення досліджень в обраному напрямку.

У другому розділі представлені основні підходи до математичного моделювання механічних властивостей ФГМ. Обрано клас ФГМ, які складаються з двох типів матеріалу, а саме з металу та кераміки. Звернено увагу на те, що для більш точного моделювання ФГМ важливо брати до уваги залежність складових матеріалу від температури T (в К), яка визначається наступною формулою:

$$P_j = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3),$$

де $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ є коефіцієнти, що обчислюються для кожного конкретного матеріалу та відповідних пружних характеристик.

Ефективні механічні властивості ФГМ, а саме модуль пружності E , коефіцієнт Пуассона ν , густина матеріалу ρ знаходяться за формулами:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T))V_c(z) + P_m(T),$$

де $P_c(T)$, $P_m(T)$ є відповідними характеристиками кераміки та металу при заданій температурі, V_c - об'ємна частка кераміки, що задається згідно з обраним законом розподілення складових суміші. Враховуючи те, що взагалі ФГМ є неоднорідними за своєю природою, необхідно виконувати їхню гомогенізацію. В роботі описані методи гомогенізації, які базуються на наступних законах: степеневий закон Фойгта, експоненціальний, сигмоїдальний та підхід Морі-Танака. У даній роботі обрано найбільш ефективні для комп'ютерного моделювання закони гомогенізації,

а саме степеневий та сигмоїдальний закони. За степеневим законом об'ємна частка керамічної фази $V_c = V(z, h, k)$ визначається як:

$$V = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad (1)$$

де h - це товщина оболонки/пластини, k - це параметр, який керує зміною матеріалу в напрямку товщини і називається *градієнтним індексом* або *індексом об'ємної частки кераміки* ($0 \leq k < \infty$). Якщо $k = 0$, то оболонка повністю виготовлена з кераміки; якщо $k = \infty$, то буде металева оболонка.

Відповідно до сигмоїдального закону зміна об'ємної частки кераміки відбувається за формулами:

$$V_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} < z < 0; \quad V_c = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k, \quad 0 < z < \frac{h}{2}. \quad (2)$$

В п.2.2-2.4 цього ж розділу представлено математичні моделі задач коливання пологих оболонок з урахуванням геометрично нелінійного деформування в рамках трьох теорій: класичної теорії, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та уточненої теорії третього порядку (теорії Редді). Наведено основні співвідношення для деформацій, зусиль, моментів, перерізуючих сил, потенціальної та кінетичної енергії. Диференціальні рівняння руху представлено в зусиллях та моментах.

У третьому розділі пропонується новий підхід до розв'язання задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин складної геометричної форми та різними умовами закріплення, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методах. А саме, задачі про власні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин розв'язуються методом Рітца, та система координатних функцій будується за допомогою теорії R-функцій.

Алгоритм розв'язання задач про геометрично нелінійні коливання зводиться до виконання наступних кроків:

1. Розв'язання проблеми лінійних вільних коливань ФГМ пологих оболонок та пластин (одношарових, сендвіч, пористих, на пружній основі змінної товщини).
2. Побудова нелінійних рівнянь руху у переміщеннях. Представлення розв'язку нелінійної системи рівнянь руху у вигляді суми двох доданків, один із яких будується на базі власних функцій, а другий містить розв'язки допоміжної задачі. Побудова варіаційних постановок для розв'язання послідовності допоміжних задач з метою знаходження допоміжних функцій, що необхідні для представлення нелінійного розв'язку задачі.
3. Зведення нелінійної системи диференціальних рівнянь руху пологих ФГМ оболонок з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння.
4. Розв'язання нелінійного звичайного диференціального рівняння методом Рунге-Кутта.

У наступних пунктах цього розділу описано підходи реалізації запропонованого методу в рамках трьох теорій: класичної теорії, теорії FSDT та HSDT теорії. Як приклад, нижче наведено реалізацію розробленого методу для зсувної деформаційної теорії першого порядку FSDT.

Відповідно до запропонованого методу деформації, зусилля та моменти $\{\varepsilon\}$, $\{N\}$, $\{M\}$ представлено у вигляді суми лінійних та нелінійних складових:

$$\{\varepsilon_{ij}^0\} = \{\varepsilon_{ij}^{L_0} + \varepsilon_{ij}^{NL_0}\} \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = \{N^L\}^T + \{N^{NL}\}^T, \quad (4)$$

$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = \{M^L\}^T + \{M^{NL}\}^T, \quad (5)$$

де $\varepsilon_{ij}^{L_0}$, $\varepsilon_{ij}^{NL_0}$ визначаються як:

$$\{\varepsilon^{L_0}\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0; \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0; \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\}^T, \quad \{\varepsilon^{NL_0}\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\}^T \quad (6)$$

u_0 , v_0 , w_0 - переміщення точок координатної поверхні.

Вирази для лінійних та нелінійних доданків у формулах (4-5) мають наступний вигляд:

$$\{N^L\}^T = [A]\{\varepsilon^{L_0}\} + [B]\{\chi\}, \quad \{N^{NL}\}^T = [A]\{\varepsilon^{NL_0}\}, \quad (7)$$

$$\{M^L\}^T = [B]\{\varepsilon^{L_0}\} + [D]\{\chi\}, \quad \{M^{NL}\}^T = [B]\{\varepsilon^{NL_0}\}, \quad (8)$$

$$\{\chi\} = \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right\}^T, \quad (9)$$

$\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$ - кути повороту нормалі навколо осі Oy та Ox відповідно.

Матриці $[A]$, $[B]$ і $[D]$ у формулах (7-8) для ФГМ оболонок визначаються як:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Елементи матриць (10) для ФГМ обчислюються у вигляді наступних інтегралів:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2) dz, \quad (A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66}(1, z, z^2) dz, \quad (11)$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}. \quad (12)$$

Вирази для A_{12} , B_{12} , D_{12} , A_{66} , B_{66} , D_{66} визначаються як:

$$A_{12} = \nu A_{11}, \quad B_{12} = \nu B_{11}, \quad D_{12} = \nu D_{11},$$

$$A_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) A_{11}, \quad B_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) B_{11}, \quad D_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) D_{11}. \quad (13)$$

Враховуючи формули (3-5) вихідну систему диференціальних рівнянь руху представлено у переміщеннях.

Операторна форма цієї системи є наступною:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = NL_1w + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = NL_2w + I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = NL_{32}(u, v, w) + NL_{33}w + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = NL_4w + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = NL_5w + I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (14)$$

Система (14) доповнюється граничними умовами, які залежать від типів закріплення оболонки. Лінійні диференціальні оператори L_{ij} $i, j = \overline{1,5}$ визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_{12} = L_{21} = (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, L_{13} = -L_{31} = -(k_1 A_{11} + k_2 A_{12}) \frac{\partial}{\partial x}, L_{14} = \\ L_{41} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_{15} = L_{51} = L_{24} = L_{42} = (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{22} &= A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_{23} = -L_{32} = -(k_1 A_{21} + k_2 A_{22}) \frac{\partial}{\partial y}, L_{25} = L_{52} = B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{33} &= K_s^2 A_{33} L_{11}(w) - (k_1^2 A_{11} + 2k_1 k_2 A_{12} + k_2^2 A_{22}) w, \\ L_{34} &= -L_{43} = (K_s^2 A_{66} + k_1 B_{11} + k_2 B_{12}) \frac{\partial}{\partial x}, L_{35} = -L_{53} = (K_s^2 A_{66} + k_1 B_{12} + k_2 B_{22}) \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - K_s^2 A_{66} \psi_x, L_{45} = L_{54} = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{55} &= D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_s^2 A_{66} \psi_y, \end{aligned}$$

K_s^2 - поправочний коефіцієнт зсуву.

Вирази для $NL_i(w)$, $i = \overline{1,5}$ представлено нижче:

$$\begin{aligned} NL_1(w) &= -L_{11}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, NL_2(w) = -L_{12}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, \\ NL_3 &= NL_{32} + NL_{33}, NL_{32}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = N_{11}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^L \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ NL_{33}(w) &= -N_{11}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_{22}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ NL_4(w) &= -L_{41}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{42}(w) \frac{\partial w}{\partial y}, NL_5(w) = -L_{51}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{52}(w) \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Вирази для I_0 , I_1 , I_2 в системі (14) визначаються як:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (\rho^{(r)})(1, z, z^2) dz. \quad (17)$$

Відповідно до методу, розвинутому в даній роботі, при розв'язанні проблеми нелінійних коливань пологих оболонок припускається, що динамічний процес відбувається без поширення пружних хвиль; не враховується також інерція обертання, тобто у рівняннях (14) залишається тільки результуюча сила інерції $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ в напрямку z . Розв'язок нелінійної системи (14) пропонується відшукувати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = y_1(t) u_1^{(e)}(x, y) + y_1^2(t) u_2(x, y) \\ v(x, y, t) = y_1(t) v_1^{(e)}(x, y) + y_1^2(t) v_2(x, y) \\ w(x, y, t) = y_1(t) w_1^{(e)}(x, y) \\ \psi_x(x, y, t) = y_1(t) \psi_{x1}^{(e)}(x, y) + y_1^2(t) \psi_{x2}(x, y) \\ \psi_y(x, y, t) = y_1(t) \psi_{y1}^{(e)}(x, y) + y_1^2(t) \psi_{y2}(x, y) \end{cases}, \quad (18)$$

де функція $y_1(t)$ є невідомою функцією, яка залежить від часу; $u_1^{(e)}(x, y)$, $v_1^{(e)}(x, y)$, $w_1^{(e)}(x, y)$, $\psi_{x1}^{(e)}(x, y)$, $\psi_{y1}^{(e)}(x, y)$ - це власні функції задачі про лінійні

коливання ФГМ пологої оболонки, які знаходяться за допомогою методу Рітца у сукупності з теорією R-функцій; функції $u_2(x, y), v_2(x, y), \psi_{x2}(x, y), \psi_{y2}(x, y)$ є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} L_{11}u_2(x, y) + L_{12}v_2(x, y) + L_{14}\psi_{x2}(x, y) + L_{15}\psi_{y2}(x, y) = NL_1(w_1^{(e)}) \\ L_{21}u_2(x, y) + L_{22}v_2(x, y) + L_{24}\psi_{x2}(x, y) + L_{25}\psi_{y2}(x, y) = NL_2(w_1^{(e)}) \\ L_{41}u_2(x, y) + L_{42}v_2(x, y) + L_{44}\psi_{x2}(x, y) + L_{45}\psi_{y2}(x, y) = NL_4(w_1^{(e)}) \\ L_{51}u_2(x, y) + L_{52}v_2(x, y) + L_{54}\psi_{x2}(x, y) + L_{55}\psi_{y2}(x, y) = NL_5(w_1^{(e)}) \end{cases} \quad (19)$$

Для знаходження розв'язку системи (19) була побудована варіаційна постановка цієї задачі, яка зводиться до обчислення точки стаціонарності наступного функціоналу:

$$\begin{aligned} I(u_2, v_2, \psi_{x2}, \psi_{y2}) = & \iint_{\Omega} (N_{11}^{L_2} \varepsilon_{11}^{L_2} + N_{22}^{L_2} \varepsilon_{22}^{L_2} + N_{12}^{L_2} \varepsilon_{12}^{L_2} + M_{11}^{L_2} \chi_{11}^{L_2} + M_{22}^{L_2} \chi_{22}^{L_2} + M_{12}^{L_2} \chi_{12}^{L_2} + \\ & + K_s^2 A_{66} (\psi_{x2}^2 + \psi_{y2}^2) - 2 (NL_1(w_1^{(e)})u_2 + NL_2(w_1^{(e)})v_2 + NL_4(w_1^{(e)})\psi_{x2} + \\ & + NL_5(w_1^{(e)})\psi_{y2}) d\Omega - 2 \int_{\partial\Omega} (F_1 u_2^{(n)} + F_2 v_2^{(n)} + F_4 \psi_{x2}^{(n)} + F_5 \psi_{y2}^{(n)}) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Функції F_1, F_2, F_4, F_5 відомі, їх вирази залежать від заданих крайових умов, зокрема якщо оболонка/пластина жорстко закріплена по всій границі, то ці функції будуть дорівнювати нулю, тобто криволінійний інтеграл у (20) буде відсутнім. Вектори $\{N^{L_2}\}, \{M^{L_2}\}, \{\varepsilon^{L_2}\}, \{\chi^{L_2}\}$ визначаються за формулами (7)-(9), які застосовуються до функцій $u_2(x, y), v_2(x, y), \psi_{x2}(x, y), \psi_{y2}(x, y)$.

Підставляючи розв'язок системи (19) у вихідну нелінійну систему рівнянь (14), з урахуванням припущення про інерційні члени, можна перекоонатися, що всі рівняння системи (14), крім третього, задовольняються тотожно, а третє рівняння системи (14) зводиться до наступного

$$\begin{aligned} m_1 w_1^{(e)}(x, y) y_1''(t) + m_1 \omega_L^2 w_1^{(e)}(x, y) y_1(t) - y_1^2(t) (L_{31}u_2(x, y) + L_{32}v_2(x, y) + \\ + L_{34}\psi_{x2}(x, y) + L_{35}\psi_{y2}(x, y) + N_{11}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y}) - \\ - y_1^3(t) \left(NL_{33}w_1^{(e)} + N_{11}^{(L_2)} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(L_2)} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{(L_2)} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \{N^{L_1}\} &= [A] \cdot \{\varepsilon^{L_1}\} + [B]\{\chi_1\}, \{N^{L_2}\} = [A] \cdot \{\varepsilon^{L_2}\} + [B]\{\chi_2\}, \\ \{\varepsilon^{L_1}\} &= \left\{ \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x} + k_1 w_1^{(e)}; \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y} + k_2 w_1^{(e)}; \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial x} \right\}^T, \{\varepsilon^{L_2}\} = \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x}; \frac{\partial v_2}{\partial y}; \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right\}^T, \\ \{\chi_1\} &= \left\{ \frac{\partial \psi_{x2}^{(e)}}{\partial x}; \frac{\partial \psi_{y2}^{(e)}}{\partial y}; \frac{\partial \psi_{x2}^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}^{(e)}}{\partial x} \right\}^T, \{\chi_2\} = \left\{ \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x}; \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y}; \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial x} \right\}^T, \\ \{N^{N_1}\} &= [A] \cdot \{\varepsilon^{N_1}\}, \{\varepsilon^{N_1}\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x} \right)^2; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x} \right\}^T. \end{aligned} \quad (22)$$

Рівняння (21) є звичайним диференціальним рівнянням, яке після застосування методу Бубнова-Гальоркіна перетворюється на наступне рівняння

$$y_1''(t) + \alpha y_1(t) + \beta y_1^2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0. \quad (23)$$

Доведено, що коефіцієнти цього рівняння визначаються за допомогою наступних

формул:

$$\alpha = \omega_L^2, \quad \beta = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(e)}\|^2} \iint_{\Omega} (L_{31}u_2 + L_{32}v_2 + L_{34}\psi_{x2} + L_{35}\psi_{y2} + N_{11}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y}) w_1^{(e)} dx dy,$$

$$\gamma = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(e)}\|^2} \iint_{\Omega} (NL_{33}(w_1^{(e)}) + N_{11}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y}) w_1^{(e)} dx dy.$$

Рівняння (23) розв'язується методом Рунге-Кутта 4-5 або 7-8 порядків.

Для реалізації запропонованого методу використовується теорія R-функцій. Необхідні поняття цієї теорії наведено у п.3.4.5 дисертаційної роботи.

Розділ четвертий присвячено використанню розробленого підходу для дослідження лінійних та нелінійних коливань одношарових ФГМ пологих оболонок та пластин. Отримано аналітичні вирази для елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ, у рамках трьох теорій пологих оболонок. Нижче наведено матриці [A],[B],[D] та отримані формули для визначення елементів цих матриць у рамках теорії першого порядку FSDT:

$$A = \frac{E_1}{1-\nu^2} [C], \quad B = \frac{E_2}{1-\nu^2} [C], \quad D = \frac{E_3}{1-\nu^2} [C], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1}\right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)}, \quad E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right) h^3. \quad (25)$$

Отримані формули для обчислення значень I_0, I_1, I_2 у виразах (17) мають вигляд:

$$I_0 = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1}\right) h, \quad I_1 = \frac{(\rho_c - \rho_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$I_2 = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right) h^3. \quad (26)$$

Для перевірки розробленого методу та відповідного програмного забезпечення для системи POLE-RL було розв'язано низку тестових задач в рамках різних теорій для циліндричних, сферичних та параболоїдно-гіперболічних пологих оболонок з прямокутною та еліптичною формою плану. Механічні властивості функціонально-градієнтних матеріалів представлено в Таблиці 1. Наведемо декілька прикладів з тестових перевірок.

Задача 1. Досліджуються вільні лінійні коливання пологих оболонок з квадратною формою плану, виготовлених із ФГМ (Al/Al_2O_3), які вільно оперті вздовж всього контуру. Товщина оболонок дорівнює $h/2a=0.1$, довжина сторони квадрату дорівнює $2a$.

Таблиця 1. Механічні властивості функціонально-градієнтних матеріалів

Матеріал	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Al	70	0.3	2707
Al_2O_3	389	0.3	3800
Si_3N_4	322.27	0.3	2370
$SUS304$	207.78	0.3	8166
ZrO_2	200	0.3	5700
$Ti - 6Al - 4V$	105.69	0.3	4427

Кривини приймають значення: $k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0; 0.5; -0.5; k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0; 0.5; 0.5$.

У Таблиці 2 представлено порівняння основних безрозмірних частот $\Lambda = \lambda(2a)^2 h \sqrt{\rho_c/E_c}$, обчислених при використанні RFM на базі класичної (CST) та уточненої теорії першого порядку (FSDT), з відомими результатами.

Аналіз порівняння показує, що результати, отримані за допомогою уточненої теорії першого порядку (FSDT) та RFM, практично збігаються з представленими в роботі [2]. Відхилення від результатів теорії вищого порядку (HSDT) [3] не перевищують 4 %. Відхилення результатів при використанні RFM та класичної теорії (CST) з результатами роботи [1] не перевищують 2 %. В цілому слід зазначити, що класична теорія призводить в більшості випадків до підвищених значень основних частот у порівнянні з уточненими теоріями.

Таблиця 2. Порівняння основних частот вільно опертої квадратної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки при різних кривинах та значеннях градієнтного індексу k

$\frac{2a}{R_y}$	$\frac{2a}{R_x}$	k	RFM (CST)	RFM (FSDT)	(CST) [1]	(FSDT) [2]	(HSDT) [3]
0	0	0	0.0597	0.0576	0.0597	0.0577	0.0578
		1	0.0455	0.0441	0.0456	0.0442	0.0443
		4	0.0395	0.0382	0.0396	0.0383	0.0381
		10	0.0380	0.0365	0.0380	0.0366	0.0364
0.5	0.5	0	0.0770	0.0753	0.0779	0.0762	0.0751
		1	0.0605	0.0593	0.0617	0.0607	0.0601
		4	0.0508	0.0496	0.0519	0.0509	0.0503
		10	0.0472	0.0462	0.0482	0.0471	0.0464
0	0.5	0	0.0642	0.0622	0.0648	0.0629	0.0622
		1	0.0494	0.0481	0.0501	0.0490	0.0485
		4	0.0423	0.0411	0.0430	0.0419	0.0413
		10	0.0403	0.0389	0.0408	0.0395	0.0390
0.5	-0.5	0	0.0582	0.0562	0.0597	0.0580	0.0563
		1	0.0444	0.0430	0.0456	0.0445	0.0432
		4	0.0385	0.0372	0.0396	0.0385	0.0372
		10	0.0370	0.0356	0.0380	0.0368	0.0355

[1] Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. J Sound Vib. 2011. 330 (7). P.1432–1454.

[2] Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form. Composite Structures. 2010. Vol. 92. P. 2573–2581.

[3] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. Composite Structures. 2008. Vol. 84. P. 132–146.

Задача 2. Досліджуються власні коливання вільно опертої квадратної циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки. Відношення радіуса кривини до сторони основи оболонки становить $R/2a = 5$, відношення товщини до сторони $h/2a = 0.1$. Значення показника степеневого закону варіюються: $k = 0, 0.2, 0.5, 1, 2, 10, \infty$. Діаграма на Рис. 1 показує добру збіжність результатів, отриманих за допомогою запропонованого методу, з результатами, опублікованими в роботах вчених Ferreira A.J.M., Pradyumna S. [4, 5].

Для ілюстрації можливостей запропонованого методу були розв’язані лінійні та геометрично нелінійні задачі про коливання одношарових пологих оболонок:

прямокутної оболонки з прямокутними та круговими вирізами, яка жорстко закріплена по всьому контуру або вільно оперта; оболонки еліптичної форми плану з прямокутними виступами та прямокутними вирізами; прямокутної оболонки з круговими кутовими вирізами та квадратним отвором. Для кожної оболонки було обґрунтовано вірогідність результатів завдяки аналізу збіжності та виродження розглянутої області до відомої.

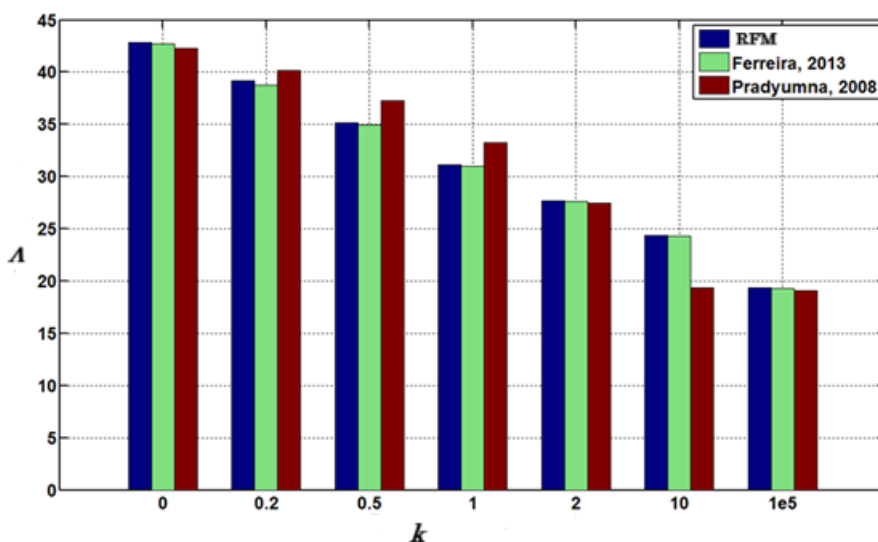


Рис. 1. Порівняння отриманих основних частот з відомими результатами з робіт [4, 5]

[4] Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N.: Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation accounting for through the thickness deformations. Eur J Mech A/Solids. 2013. Vol. 37. P. 24-34.

[5] Pradyumna S., Bandyopadhyay J.N.: Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 318. P. 176-192.

Побудовано відповідні структури розв'язків для заданих крайових умов, на базі яких будуються системи координатних функцій для методу Рітца. Одержано залежність власних частот від значень показника градієнтного індексу k для розглянутих оболонок і різних типів ФГМ. Загальною особливістю поведінки безрозмірних частот при збільшенні показника k є зменшення власних частот.

Проаналізовано нелінійні вільні коливання пологих оболонок. Розв'язані тестові задачі та виконано порівняння з відомими результатами, яке показало, що відхилення одержаних результатів не перебільшує 4 %, а в більшості випадків 2 %. Побудовані відповідні скелетні криві. Було показано, що для жорстко закріплених оболонок та оболонок середньої товщини, скелетні криві мають жорстку поведінку. Нижче наведено деякі приклади розв'язаних задач.

Задача 3. Досліджується ФГМ (Al/Al_2O_3) полога оболонка зі складною формою плану (Рис. 3). Оболонка жорстко закріплена, має наступні геометричні параметри:

$$b/a = 1; a_1/2a = 0.25; b_1/2a = 0.35; 0.4; 0.45, R/2a=10.$$

Граничні умови з використанням теорії першого порядку (FSDT) для жорсткого закріплення є наступними:

$$u = v = w = 0, \psi_x = \psi_y = 0. \quad (27)$$

Структуру розв'язку в рамках FSDT можна прийняти як:

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5, \quad (28)$$

де $\omega = 0$ є рівняння границі оболонки, яке побудоване за допомогою теорії R-функцій.

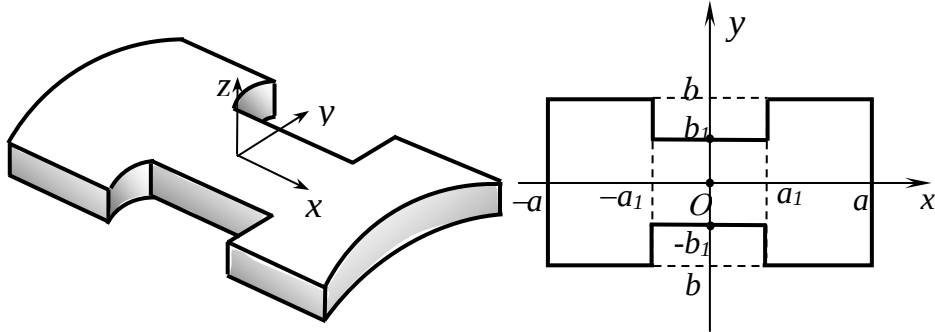


Рис. 3. ФГМ оболонка з прямокутними вирізами і її форма плану

На Рис. 4 показано значення основних частот для жорстко закріплених ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричних і сферичних оболонок із співвідношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$, з різними розмірами прямокутних вирізів і декількома показниками k степеневого закону. На Рис. 5 показано амплітудно-частотну характеристику вільно опертої циліндричної оболонки для різних показників k степеневого закону, за умови, що $a_1/2a = 0.25$; $b_1/2a = 0.35$.

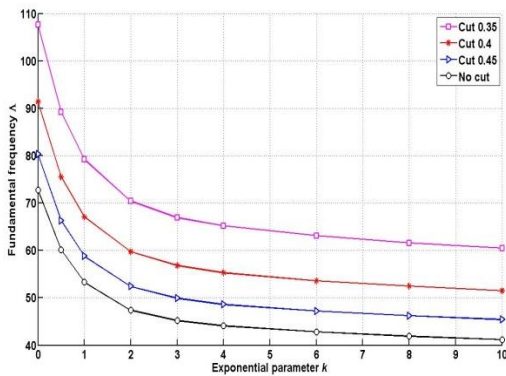


Рис. 4. Основні частоти для жорстко закріпленої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з різними розмірами прямокутних вирізів (Рис. 3)

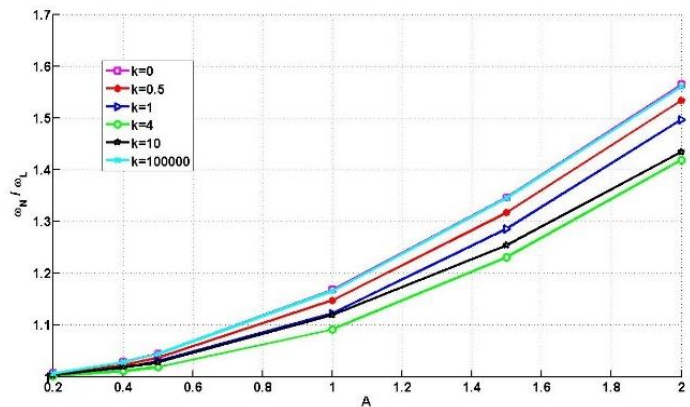


Рис. 5. Вплив показника об'ємної частки k на співвідношення частот вільно опертої ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричної оболонки з прямокутними вирізами (Рис. 3)

За Рис. 4 можна зробити висновок, що основні частоти зростають зі збільшенням величини вирізу, що пояснюється граничними умовами та геометрією оболонки через ефект жорсткості. Як видно з Рис. 5, степеневий показник k у значній мірі впливає на частоти нелінійних коливань. Відзначимо, що скелетні криві мають жорсткий характер, монотонно зростають, що характерно для помірно товстих жорстко закріплених оболонок ($h/2a = 0.1$). Найбільші частоти має оболонка з чистої кераміки (Alumina, $k = 0$). Це пов'язано з тим, що цей матеріал має більший модуль Юнга E_c . Незважаючи на те, що ФГМ оболонка ($k = 4, 10$)

містить невелику об'ємну частку Alumina, вона набагато жорсткіша, ніж оболонка з чистого металу (Aluminium, $k = 100\,000$), і тому їх частоти вищі, ніж відповідні частоти для металу.

Задача 4. Досліджуються вільні коливання функціонально-градієнтної жорстко закріпленої по всьому контуру оболонки складної геометрії, яка має план, зображений на Рис. 6.

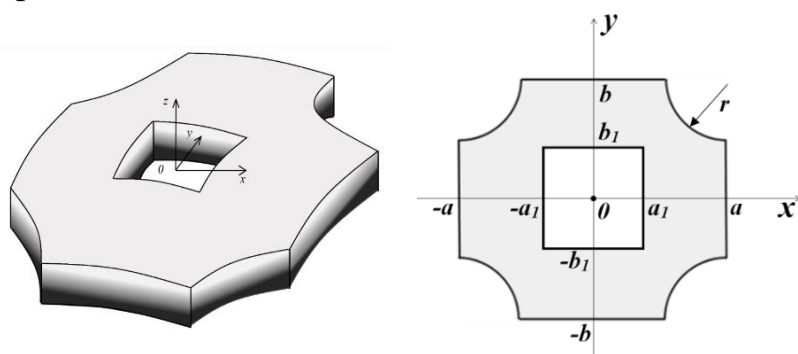


Рис. 6. ФГМ полога оболонка складної геометрії з вирізами та її форма плану

Геометричні параметри оболонки є наступними:

M1: Al/Al_2O_3 ;

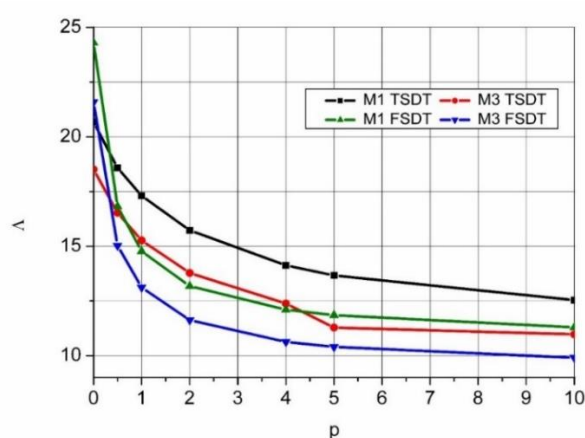
M2: Al/ZrO_2 ;

M3: $Si_3N_4/SUS304$;

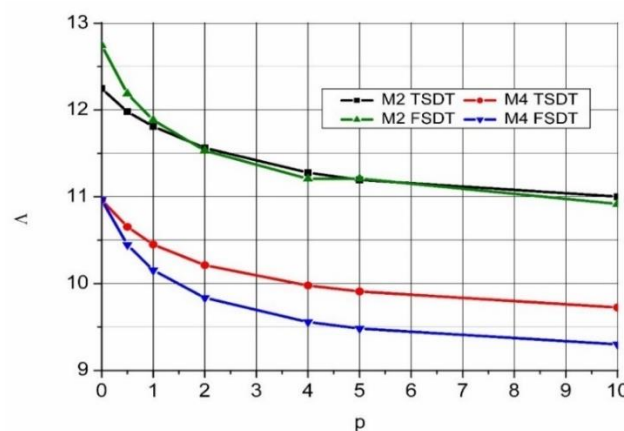
M4: $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$.

Вплив градієнтного індексу (показник об'ємної частки позначено літерою p) на власні частоти циліндричних оболонок,

виготовлених з різних матеріалів, показано на Рис. 7(а,б). Безрозмірні параметри власної частоти визначаються за формулою $\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m}$.



а)



б)

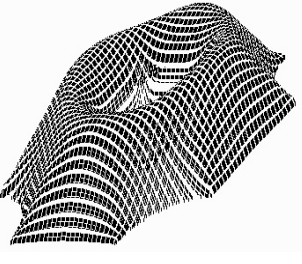
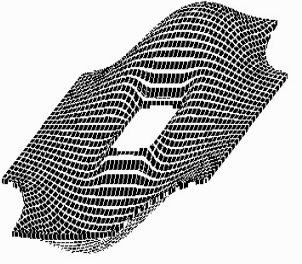
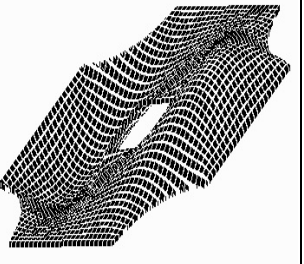
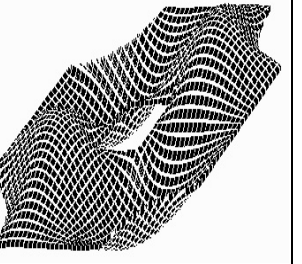
Рис. 7. Вплив градієнтного індексу p на власні частоти ФГМ пологих оболонок складної форми (Рис. 6) у рамках теорій FSDT та HSDT: а) із сумішей M1 і M3; б) із сумішей M2 і M4

За Рис. 7(а,б) можна зробити висновок, що при дослідженні пологих оболонок більшої кривини та товщини різниця між результатами, отриманими за допомогою теорій FSDT та HSDT, є суттєвою, тому доцільно використовувати теорію оболонок вищого порядку.

Форми коливань циліндричної ФГМ оболонки складної форми (Рис. 6) із суміші M3 для показника градієнтного індексу $p=2$ представлені в Таблиці 3. Моді коливань, отримані в рамках двох теорій, майже однакові, але безрозмірні параметри власних частот відрізняються на 9-11.7 %.

У п'ятому розділі запропонований метод розвинено для дослідження ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин. Структура сендвічу в основному складається з трьох шарів: дві лицьові сторони та заповнювач. Можливі різні види заповнювача, а саме виробленого із ФГМ або ізотропного матеріалу. Аналогічно, лицьові поверхні сендвіч-конструкції можуть бути як ізотропними, так і виготовленими з ФГМ.

Таблиця 3. Форми коливань циліндричної ФГМ пологої оболонки складної форми (Рис. 6), виготовленої з матеріалу МЗ

			
$\Lambda_1=11.625$ (FSDT) $\Lambda_1=13.178$ (TSDT)	$\Lambda_2=12.825$ (FSDT) $\Lambda_2=13.994$ (TSDT)	$\Lambda_3=12.635$ (FSDT) $\Lambda_3=13.907$ (TSDT)	$\Lambda_4=15.953$ (FSDT) $\Lambda_4=17.608$ (TSDT)

Розглянуто чотири типи сендвіч структур: 1-1, 1-2, 2-1 та 2-2, які представлено на Рис. 8.

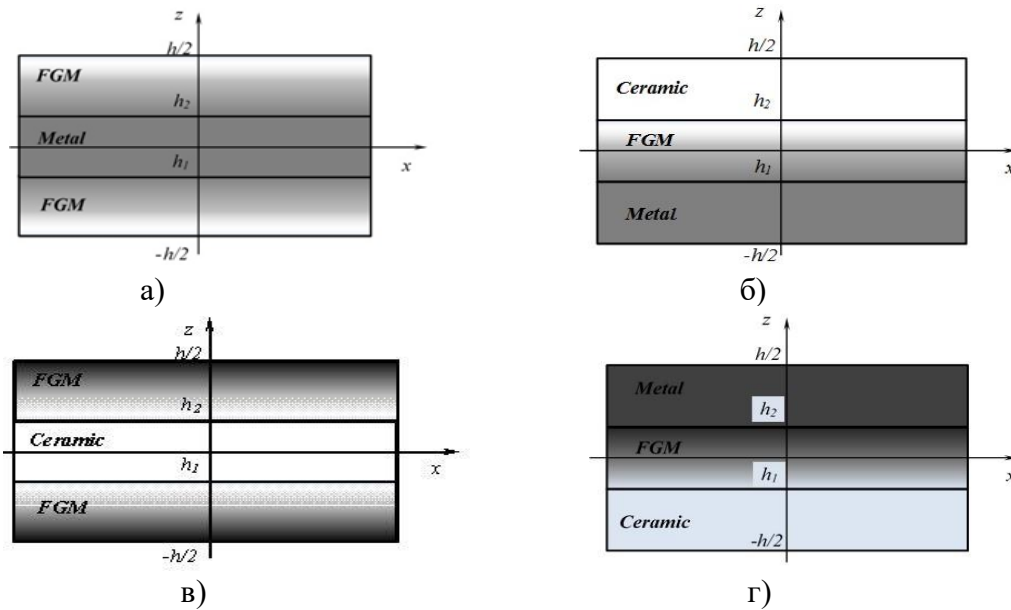


Рис. 8. Схеми розташування шарів вздовж товщини оболонки: а) Тип 1-1; б) Тип 2-1; в) Тип 1-2; г) Тип 2-2

Об'ємна доля V_1 для кожної схеми розташування шарів обчислюється відповідно до типу ламінації. Наприклад, для Типів 1-1 і 1-2 ці формули мають наступний вигляд:

Тип 1-1:

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h_1 + \frac{h}{2}} \right)^{p_1}, \\ V_1^{(2)} = 1, \\ V_1^{(3)} = \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{h_2 - \frac{h}{2}} \right)^{p_3}, \end{cases}$$

Тип 1-2

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{-h_1 - \frac{h}{2}} \right)^{p_1}, \\ V_1^{(2)} = 0, \\ V_1^{(3)} = \left(\frac{z - h_2}{\frac{h}{2} - h_2} \right)^{p_3}, \end{cases} \quad \begin{cases} z \in \left[-\frac{h}{2}, h_1 \right], \\ z \in [h_1, h_2], \\ z \in \left[h_2, \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Для кожного Типу ламінації в роботі були одержані аналітичні формули для обчислення елементів матриць [A], [B], [D] та [E], [F], [H]. Наприклад, для класичної та уточненої теорій першого порядку у разі сендвіч оболонок Типу 1-1 ці вирази мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \nu_0 \left(E_{cm} \left(\frac{as1}{p_1+1} - \frac{as2}{p_3+1} \right) + E_m(h - as21) + E_c as21 \right), \\ B_{11} &= \nu_0 E_{cm} \left(\frac{as1}{p_1+2} \left(h_1 - \frac{h}{2(p_1+1)} \right) - \frac{as2}{p_3+2} \left(h_2 + \frac{h}{2(p_3+1)} \right) + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right), \\ D_{11} &= \nu_0 \left(E_{cm} \left(as1 \left(\frac{(as1)^2}{p_1+3} - \frac{as1}{p_1+2} h - \frac{h^2}{4(p_1+1)} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - as2 \left(\frac{(as2)^2}{p_3+3} - \frac{as2}{p_3+2} h + \frac{h^2}{4(p_3+1)} \right) + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right) + \frac{E_m}{12} h^3 \right), \end{aligned} \quad (29)$$

де

$$\nu_0 = \frac{1}{(1-\nu^2)}, \quad E_{cm} = E_c - E_m, \quad \rho_{cm} = \rho_c - \rho_m, \quad as1 = \left(\frac{h}{2} + h_1 \right), \quad as2 = h_2 - \frac{h}{2}, \quad as21 = h_2 - h_1.$$

Вирази для I_0 , I_1 , I_2 визначаються сумою наступних інтегралів:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} (\rho^{(r)}) (1, z, z^2) dz,$$

$\rho^{(r)}$ - густина r -го шару. Знайдені аналітичні вирази для обчислення I_0, I_1, I_2 за умови $\nu_m = \nu_c$ для відповідного типу ламінації мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_0 &= \rho_{cm} \left(\frac{as1}{p_1+1} - \frac{as2}{p_2+1} \right) + \rho_m(h_1 - as2) + \rho_c(h_2 - h_1), \\ I_1 &= \rho_{cm} \left(\frac{as1}{p_1+2} \left(h_1 - \frac{h}{2(p_1+1)} \right) - \frac{as2}{p_3+2} \left(h_2 + \frac{h}{2(p_3+1)} \right) + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right), \\ I_2 &= \rho_{cm} \left(as1 \left(\frac{as1^2}{p_1+3} - \frac{as1}{p_1+2} h - \frac{h^2}{4(p_1+1)} \right) - as2 \left(\frac{as2^2}{p_3+3} - \frac{as2}{p_3+2} h + \frac{h^2}{4(p_3+1)} \right) + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right) + \frac{\rho_m}{12} h^3. \end{aligned}$$

Для підтвердження вірогідності запропонованого алгоритму, одержаних аналітичних виразів для елементів матриць [A], [B], [D], [E], [F], [H], інтегралів $I_i, i = \overline{1,6}$, а також розробленого програмного забезпечення було розв'язано низку тестових задач для циліндричних, сферичних та гіперболічно-параболоїдних ФГМ сендвіч пологих оболонок. Порівняння результатів, які були отримані за допомогою розробленого методу, показало добрий збіг з результатами, що доступні в літературі.

У шостому розділі запропонований підхід було розвинено для дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань ФГМ сендвіч пористих оболонок та пластин. Було враховано дві моделі, які описують пористість ФГМ.

Модель І. Рівномірне розподілення пористості (Рого І):

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m). \end{cases} \quad (30)$$

Використовуючи правило суміші, ефективні властивості матеріалу $P^{(r)}$ (модуль пружності E та густина матеріалу ρ) для r -го шару ($r=1, 2, 3$) з рівномірно розподіленою пористістю визначаються за допомогою формул (30).

Модель II. Нерівномірне розподілення пористості (Poro II):

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m)\left(1 - \frac{z+\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}+h_1}\right), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m)\left(1 - \frac{z-\frac{h}{2}}{h_2-\frac{h}{2}}\right). \end{cases} \quad (31)$$

Дослідження пористих ФГМ сендвіч пластин та пологих оболонок виконувалось також з використанням сигмоїдального закону (S-law) для об'ємної долі кераміки сендвіч структур з урахуванням двох моделей пористості Моделі I та Моделі II:

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+\frac{h}{2}}{h_m+\frac{h}{2}}\right)^p, & -\frac{h}{2} \leq z \leq h_m, \\ V^{(1)}(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z-h_1}{h_m-h_1}\right)^p, & h_m \leq z \leq h_1, \\ V^{(2)}(z) = 1, & h_1 \leq z \leq h_2, \\ V^{(3)}(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z-h_2}{h_n+h_2}\right)^p, & h_2 \leq z \leq h_n, \\ V^{(3)}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z-\frac{h}{2}}{h_n-\frac{h}{2}}\right)^p, & h_n \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Величини h_m та h_n визначають середини нижнього та верхнього шарів та мають наступний вигляд:

$$h_m = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h}{2}\right), \quad h_n = \frac{1}{2}\left(h_2 + \frac{h}{2}\right).$$

У роботі одержано аналітичні формули для обчислення елементів матриць [A],[B], [D] та [E],[F], [H] при наявності пористості.

$$\begin{aligned} A_{11}^{(1,2)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(A_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{11}^{(1,2)} \right), \quad B_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1-\nu^2} \left(B_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{12}^{(1,2)} \right), \\ D_{11}^{(1,2)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(D_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{13}^{(1,2)} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

де $A_{11}^{(com)}$, $B_{11}^{(com)}$, $D_{11}^{(com)}$ мають вигляд у випадку сигмоїдального закону:

$$A_{11}^{(com)} = E_m h + \frac{1}{2} E_{cm} (h + h_c), \quad B_{11}^{(com)} = \frac{1}{2} E_{cm} (h_n^2 - h_m^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p+1)(p+2)},$$

$$D_{11}^{(com)} = E_m \frac{h^3}{12} E_{cm} \left(\frac{h_n^3 - h_m^3}{3} + \frac{AS2^2(h_2+\frac{h}{2}) - AS1^2(h_1-\frac{h}{2})}{4(p+1)(p+2)} \right).$$

Верхні індекси (1, 2) у формулах (32) визначають номер відповідної моделі.

Аналітичні вирази для величин I_0 , I_1 , I_2 мають наступний вигляд:

$$I_0^{(1,2)} = (I_0^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{11}^{(1,2)}), \quad I_1^{(1,2)} = (I_1^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{12}^{(1,2)}), \quad I_2^{(1,2)} = (I_2^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{13}^{(1,2)}),$$

де $\rho_{cm}^{(s)} = \alpha \frac{\rho_c + \rho_m}{2}$, вирази $I_0^{(com)}$, $I_1^{(com)}$, $I_2^{(com)}$ для сигмоїдального закону:

$$I_0^{(com)} = \rho_m h + \frac{1}{2} \rho_{cm} (h + h_c), \quad I_1^{(com)} = \frac{1}{2} \rho_{cm} (h_n^2 - h_m^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p+1)(p+2)},$$

$$I_2^{(com)} = \rho_m \frac{h^3}{12} + \rho_{cm} \left(\frac{h_n^3 - h_m^3}{3} + \frac{AS2^2(h_2+\frac{h}{2}) - AS1^2(h_1-\frac{h}{2})}{4(p+1)(p+2)} \right).$$

Запропонований підхід та розроблене програмне забезпечення перевірено на багатьох тестових задачах та застосовано для розв'язання низки нових задач. Розв'язані задачі про нелінійні коливання пористих одношарових та сендвіч ФГМ оболонок зі складною геометричною формою. Побудовані скелетні криві для

різних значень геометричних та фізичних параметрів. Нижче наведені декілька прикладів.

Задача 1. Розглядається пориста ФГМ (Al_2O_3/Al) сендвіч пластина (Рис. 9). Для дослідження використовується теорія першого порядку (FSDT).

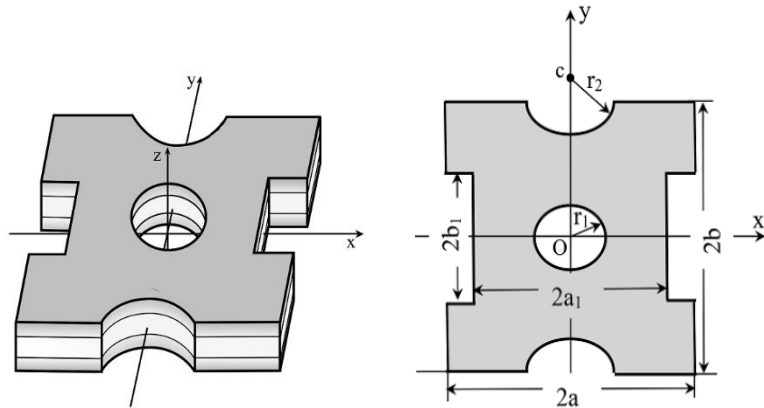


Рис. 9. Пориста ФГМ сендвіч пластина складної геометрії та її форма плану

Пластина жорстко закріплена по всій границі області, включаючи отвір. Геометричні параметри даної пластини наступні:

$$\frac{h}{2a} = 0.1; \quad \frac{b}{a} = 1; \quad \frac{b_1}{a} = 0.3; \\ \frac{a_1}{a} = 0.45; \quad \frac{c}{2a} = 0.7; \quad \frac{r_1}{2a} = 0.1; \\ r_2/2a = 0.28.$$

Ефективні властивості ФГМ змінюються по товщині згідно зі степеневим та сигмоїдальним законами (P-law, S-law).

Було розглянуто два типи розподілу пористості (рівномірний і лінійно нерівномірний). Структуру розв'язку, яка задовольняє умовам жорсткого закріплення, побудовано за допомогою теорії R-функцій.

Рисунок 10 демонструє залежність безрозмірної основної частоти $\Lambda = \lambda (2a)^2 \sqrt{\rho_0/E_0}/h$ пластини, яка досліджується за двома законами розподілу ФГМ (P-law і S-law), від параметру пористості α . Розглядаються різні схеми відношення товщини шарів (1-1-1; 1-2-1; 2-1-2) при фіксованому значенні показника об'ємної частки кераміки $p=2$.

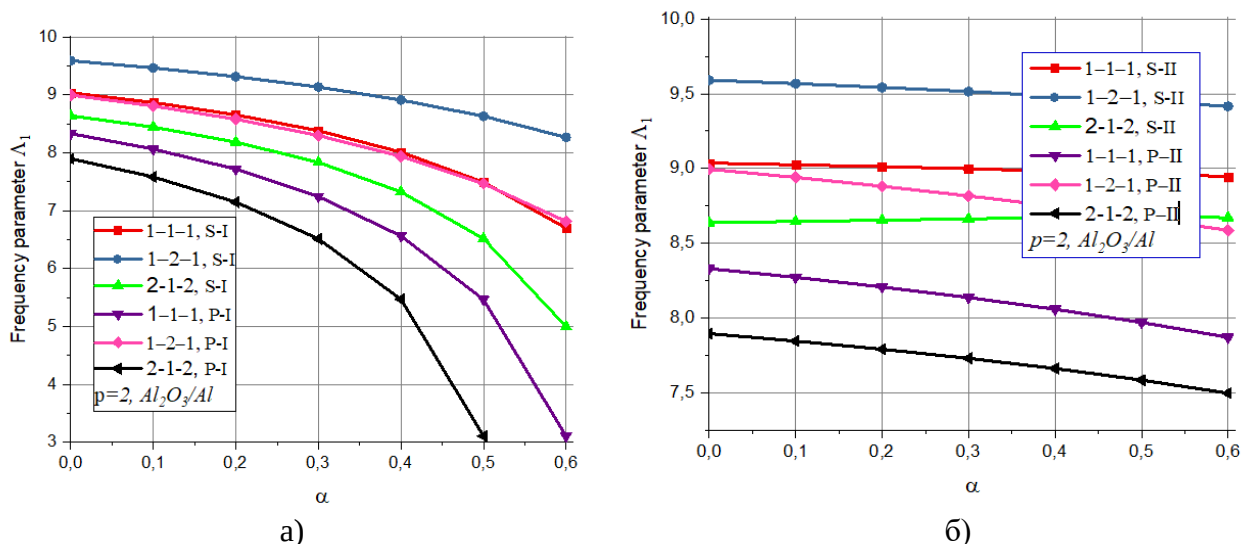


Рис. 10. Вплив коефіцієнта пористості α на власні частоти закріпленої пористої ФГМ (Al_2O_3/Al) сендвіч пластини зі складною формою в плані:
а) Моделі P-I, S-I; б) Моделі P-II, S-II

Вплив різних моделей розподілу пористості на власні частоти представлено на Рис. 10а (моделі P-I, S-I) та на Рис. 10б (моделі P-II, S-II). Збільшення коефіцієнта пористості α викликає зменшення значення власних частот для всіх схем укладання

шарів. Видно, що вплив коефіцієнта пористості α на частоти є більш суттєвим для рівномірного розподілу пористості (Модель I), ніж для лінійно нерівномірного розподілу (Модель II).

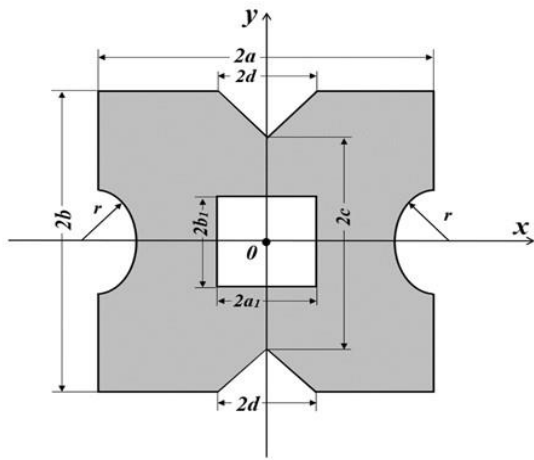


Рис. 11. Форма пористої ФГМ сендвіч пластини

Задача 2. Досліджуються нелінійні коливання пористої сендвіч пластини, план форми якої наведено на Рис. 11. Використовується теорія першого порядку (FSDT). Геометричні параметри є наступними:

$$\frac{a}{b} = 1; \quad \frac{b_1}{2a} = 0.15; \quad \frac{d}{2a} = 0.25; \quad \frac{a_1}{2a} = 0.15; \quad \frac{a_2}{2a} = 0.7; \quad \frac{c}{2a} = 0.35; \quad \frac{r}{2a} = 0.25.$$

Було проаналізовано два види ФГМ: Al/Al_2O_3 і $Si_3N_4/SUS304$, пластина жорстко закріплена повністю, включаючи виріз.

Перші чотири форми коливань для пористої ФГМ (Al/Al_2O_3) сендвіч пластини складної форми (Рис. 11) представлені в Таблиці 4.

Таблиця 4. Перші чотири форми коливань ФГМ (Al/Al_2O_3) та відповідні значення безрозмірних частот $\Lambda_i = \omega_i (2a)^2 \sqrt{\rho_c/E_c} h$ пористої (Модель I) сендвіч пластини складної форми з розподілом шарів 1-2-1 при $p=2$ та відповідні значення безрозмірних частот

$\Lambda_1=0.2554$	$\Lambda_2=0.2558$	$\Lambda_3=0.2656$	$\Lambda_4=0.2660$

У Таблиці 5 та Рис. 12 показано залежність ω_N/ω_L від амплітуди ФГМ пористої сендвіч пластини для двох типів пористості: Модель I (Poro-I) і Модель II (Poro-II). Дослідження виконано для фіксованого значення градієнтного індексу $p=2$ і коефіцієнту пористості $\alpha=0.2$, схема розподілу шарів 1-1-1.

З Таблиці 5 і Рис. 12 випливає, що при малих амплітудах коливань ($W/h < 1$) повністю закріплених пористих сендвіч пластин відношення частот ω_N/ω_L мало відрізняється для обох типів пористості і для різних типів ФГМ. Різниця зростає зі збільшенням амплітуди коливань. Для матеріалу $SiN_4/SUS304$ співвідношення ω_N/ω_L менше, ніж відповідне співвідношення для матеріалу Al_2O_3/Al для всіх амплітуд коливань.

Таблиця 5. Залежність ω_N/ω_L від амплітуди ФГМ пористої сендвіч пластини (Рис. 11)

$\frac{W}{h}$	ω_N/ω_L (SiN_4 /SUS304)		ω_N/ω_L (Al_2O_3 /Al)	
	Poro-I	Poro-II	Poro-I	Poro-II
0	1	1	1	1
0.2	1.0043	1.0041	1.0054	1.0047
0.4	1.0172	1.0162	1.0214	1.0188
0.6	1.0383	1.0359	1.0474	1.0419
0.8	1.0670	1.0627	1.0827	1.0731
1.0	1.1026	1.0966	1.1262	1.1119
1.2	1.1446	1.1362	1.1770	1.1573
1.4	1.1921	1.1811	1.2341	1.2086
1.6	1.2444	1.2307	1.2966	1.2650
1.8	1.3010	1.2844	1.3683	1.3258
2.0	1.3613	1.3418	1.4351	1.3905

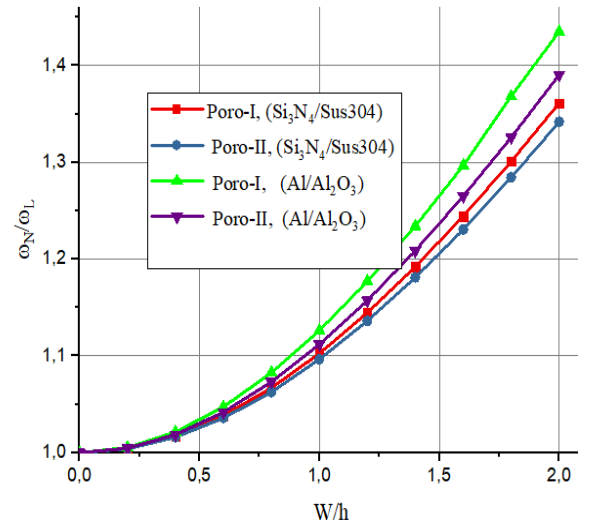


Рис. 12. Амплітудно-частотна характеристика пористої сендвіч пластини (Рис. 18) для різних типів пористості та матеріалу

У цьому розділі розроблений метод розвинено до розрахунку інженерних конструкцій, що спираються на пружний фундамент.

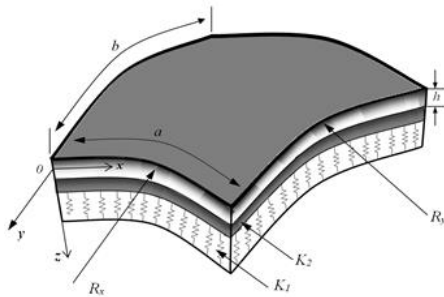


Рис. 13. ФГМ полого оболонка на пружній основі

оболонки зі складною геометричною формою. Були досліджені тришарові пологі оболонки з лицевими поверхнями, зробленими з функціонально-градієнтних матеріалів (Рис. 14).

Середній шар виготовляється з кераміки (Модель А) або металу (Модель Б). Загальну товщину оболонок позначено через h , товщину лицевого листа через h_f і товщину серцевини (центрального шару) через h_c (Рис. 14а, Рис. 14б).

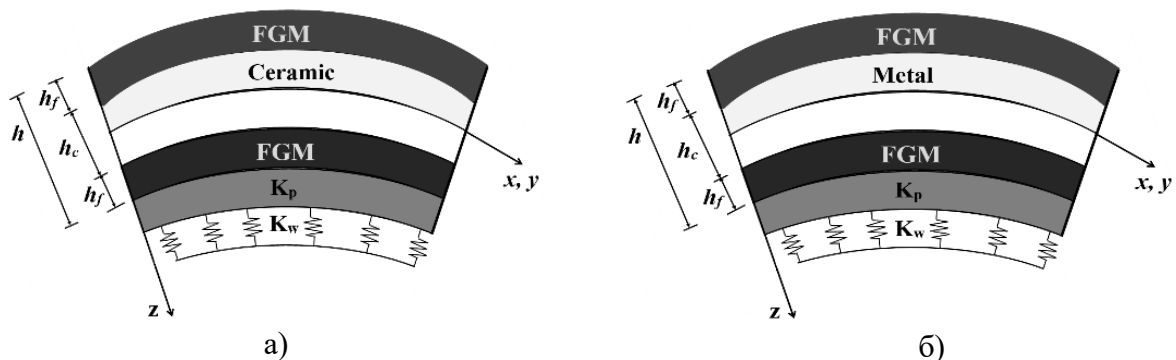


Рис. 14. Тришарова полого оболонка на пружній основі: а) Модель А; б) Модель Б

Для розглянутих задач відповідні вирази частки керамічної фази для кожного шару пов'язані наступними формулами:

Модель А	Модель Б
$\begin{cases} V_c^{(1)} = \left(\frac{h+2z}{h-h_c}\right)^p, & z \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{h_c}{2}\right], \\ V_c^{(2)} = 1, & z \in \left[-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}\right], \\ V_c^{(3)} = \left(\frac{h-2z}{h-h_c}\right)^p, & z \in \left[\frac{h_c}{2}, \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$	$\begin{cases} V_c^{(1)} = \left(\frac{h_c+2z}{h_c-h}\right)^p, & z \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{h_c}{2}\right], \\ V_c^{(2)} = 0, & z \in \left[-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}\right], \\ V_c^{(3)} = \left(\frac{h_c+2z}{h+h_c}\right)^p, & z \in \left[\frac{h_c}{2}, \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$

Результати досліджень сферичних ФГМ сендвіч оболонок (Модель А) квадратної форми зі стороною $2a$ наведені в Таблиці 6. Було обрано суміш Al/Al_2O_3 , безрозмірна основна частота обчислювалась за формулою:

$$\Lambda = (\lambda (2a)^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}.$$

Таблиця 6. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту вільно опертої ФГМ квадратної сферичної оболонки ($k_1 = k_2 = 0.5$, $h/2a=0.2$)

p	$h_f - h_c - h_f = 1 - 1 - 1$				$h_f - h_c - h_f = 1 - 2 - 1$			
	$K_w = 0$ $K_p = 0$	$K_w = 100$ $K_p = 0$	$K_w = 0$ $K_p = 100$	$K_w = 100$ $K_p = 100$	$K_w = 0$ $K_p = 0$	$K_w = 100$ $K_p = 0$	$K_w = 0$ $K_p = 100$	$K_w = 100$ $K_p = 100$
0	11.1839	11.5329	16.8053	17.0394	13.4095	13.6830	18.1044	18.3077
0.5	12.3175	12.6313	17.5639	17.7853	13.4603	13.7308	18.1512	18.3526
1	12.1490	12.4652	17.4602	17.6816	13.1552	13.4307	17.9481	18.1511
2	11.6187	11.9470	17.1289	17.3535	12.6496	12.9348	17.6163	17.8225
5	10.8819	11.2300	16.6751	16.9046	12.0001	12.2993	17.1971	17.4076
10	10.5599	10.9176	16.4765	16.7085	11.6906	11.9972	16.9984	17.2111
20	10.4011	10.7639	16.3779	16.6115	11.5207	11.8314	16.8892	17.1031

З Таблиці 6 видно, що значення власних частот істотно залежать від параметрів пружної основи і товщини шарів h_j , h_c . Чим товщій шар кераміки, тим більше частота. Вплив параметра Вінклера K_w на значення частоти значно менший, ніж вплив параметра Пастернака K_p .

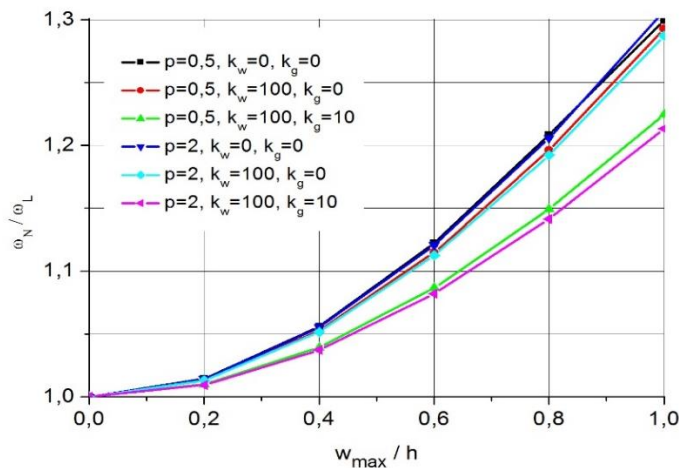


Рис. 15. Відношення частот ω_{NL}/ω_L для закріпленої ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричної оболонки, що спирається на пружну основу

Результати дослідження нелінійних коливань показано для оболонки складної форми плану (Рис. 6). Аналіз виконано для фіксованих значень градієнтного індексу $p=0.5$, $p=2$ та різних значень характеристик k_w , k_g пружних основ: $(k_w, k_g)=(0,0)$; $(100,0)$; $(100,10)$. Геометричні параметри наступні: $k_1 = 0.5$; $k_2 = 0$; $\frac{h}{2a} = 0.1$; $\frac{a}{b} = 1$; $a_1 = b_1$; $a_1/a = 0.2$.

На Рис. 15 показано поведінку скелетних кривих для жорстко закріплених ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричних оболонок. Як видно з Рис. 15, вплив характеристик пружної основи більш суттєвий, ніж значення показника градієнта. Було виявлено, що наявність пружної основи значно підвищує жорсткість оболонки. Тому частоти оболонки на пружній основі більші, ніж відповідні частоти оболонок без пружної основи.

У восьмому розділі запропоновано метод дослідження стійкості та коливань ФГМ сендвіч пологих оболонок та пластин, навантажених у серединній площині. Розроблений метод враховує розрахунок докритичного стану структури, за умови рівномірного та нерівномірного навантаження. Для реалізації розробленого підходу виведено відповідні функціонали в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку. Дослідження нелінійних коливань проведено за попереднім алгоритмом, розглянутим у Розділі 3. Розроблений підхід протестований на значній кількості задач стійкості пологих оболонок і пластин з прямокутною формою плану, з різними крайовими умовами, різних типів ФГМ та різних значень кривини оболонок. Особливої уваги надано дослідженню ФГМ оболонок і пластин з вирізами та отворами різної геометричної форми та способів їх закріплення.

В якості прикладу представлено аналіз стійкості сендвіч ФГМ пластини складної форми (Рис. 16) для двох ФГМ сумішей Al/Al_2O_3 і $Si_3N_4/SUS304$ та двох Типів ламінації 1-1 і 2-1. Пластина має наступні геометричні параметри:

$$b/a = 1, a_1/2a = 0.25, b_1/2a = 0.35, h/2a = 0.1, x_0/2a = 0.7.$$

Припускається, що навантаження діє вздовж прямокутної частини границі області, паралельної вісі Ox (Рис. 16). Пластина рухомо закріплена по всій межі. У Таблиці 7 наведено значення безрозмірної власної частоти $\Lambda = \frac{\omega_L(2a)^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$ та критичного навантаження $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$, що були отримані для ФГМ (Al/Al_2O_3) пластини, навантаженої в серединній площині, з Типом ламінації 1-1 і розташуванням шарів 2-1-2.

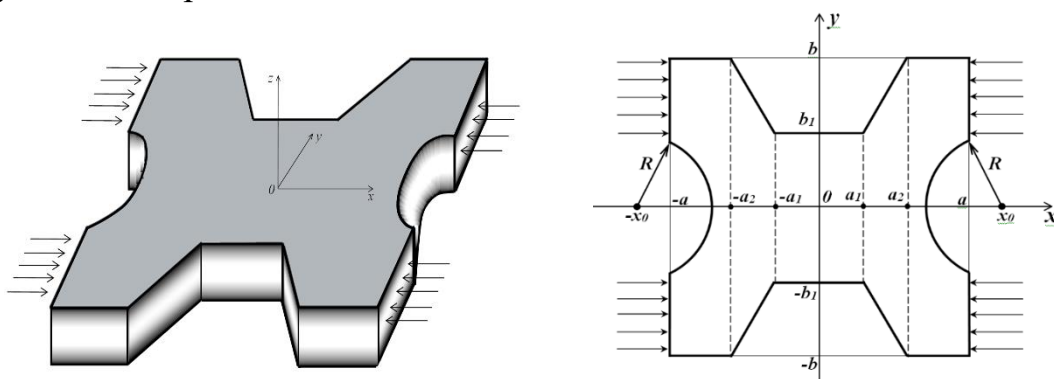


Рис. 16. ФГМ сендвіч пластина та її план форма

Як показали проведені розрахунки, при зростанні індексу градієнта p критичне навантаження і власні частоти зменшуються для обох Типів ламінації (Типи 1-1 і 2-1). Зокрема зміна критичного навантаження для Типу 1-1 є більш суттєвою, ніж її зміна для Типу 2-1. Зазначимо, що значення власної частоти пластини Типу ламінації 1-1 перевищують відповідні значення частоти пластини

Типу 2-1, коли індекс градієнта змінюється $0 \leq p \leq 1$. Якщо індекс $p > 1$, то ситуація з частотами буде зворотною.

Таблиця 7. Вплив показника степеневого закону p на критичне навантаження та частоту ФГМ (Al/Al_2O_3) навантаженої пластини (Тип 1-1, товщина шарів 2-1-2)

$p \backslash N_{cr}/p_{st}$	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	N_{cr}
0	16.794	16.793	14.404	10.577	6.858	0.277	52.99
0.5	15.268	13.896	11.704	8.562	5.536	0.348	32.13
1	14.278	12.715	10.698	7.814	5.046	0.183	26.05
5	11.055	9.828	8.251	6.009	3.869	0.317	14.21
10	10.602	9.427	7.917	5.772	3.728	0.484	12.78
100	10.312	9.172	7.706	5.618	3.623	0.370	11.83

Порівняння отриманих даних показало, що значення критичного навантаження для матеріалу Al/Al_2O_3 менші за відповідні значення для матеріалу $Si_3N_4/SUS 304$. Але значення власних частот більші для матеріалу Al/Al_2O_3 .

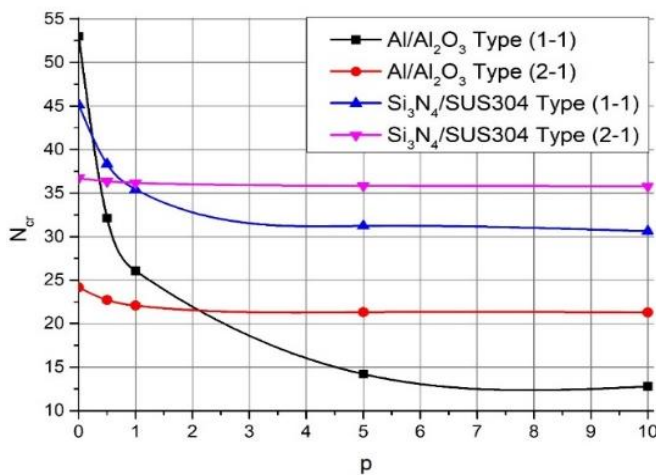


Рис. 17. Вплив показника p на критичне навантаження ФГМ пластини (Рис. 16)

Вплив показника степеневого закону p на критичне навантаження ФГМ пластини зі схемою шарів 2-1-2 показано на Рис. 17. Як видно з Рис. 17, критичне навантаження для ФГМ пластин Типу 2-1, виготовлених з $Si_3N_4/SUS 304$, більше, ніж критичне навантаження для ФГМ пластин з Al/Al_2O_3 для всіх значень степеневого показника p . Цей висновок справедливий для пластин Типу 1-1 із значенням індексу $p \geq 0.3$.

У дев'ятому розділі представлено результати, які були одержані в результаті проведення експерименту у рамках міжнародного співробітництва з італійською науковою групою під керівництвом професора Pellicano в Департаменті Інженерії «Enzo Ferrari» (Engineering Department) в Університеті Модени та Реджо-Емілії, Італія (University of Modena and Reggio-Emilia, Italy).

Експеримент було виконано для низки пластин різної геометричної форми плану та різними граничними умовами з метою дослідження їх динамічної поведінки. Для проведення експерименту пластини було виготовлено з ПЕТ-матеріалу за допомогою 3D-друку. Властивості ПЕТ-матеріалу були прийняті наступними: $\rho = 1.20 \text{ g/cm}^3$, $E = 1.6 \text{ GPa}$, $\nu = 0.417$, $K_s^2 = 0.56 \text{ GPa}$. Значення отриманих власних частот та форми мод порівнювалися з відповідними характеристиками, що були обчислені методом R-функцій та методом скінчених елементів з використанням пакету Nastran. У Таблиці 8 представлено порівняння експериментального модального аналізу за допомогою методу скінчених елементів (MCE) і методу R-функцій (RFM).

Таблиця 8. Порівняння експериментальних, MCE і RFM частот для пластини складної форми

Експеримент [Hz]	MCE моделювання [Hz]	Різниця (Експеримент-MCE)	RFM [Hz]	Різниця (Експеримент-RFM)
287.82	258.57	10.16 %	270.96	5.86 %
509.47	597.43	-17.27 %	555.64	-9.06 %
598.59	606.73	-1.36 %	618.72	-3.36 %
730.24	862.25	-18.08 %	805.71	-10.33 %
1060.18	1149.54	-8.43 %	1135.85	-7.14 %
1455.78	1547.42	-6.29 %	1580.06	-8.54 %
1548.43	1678.08	-8.37 %	1673.14	-8.05 %
1651.66	1783.58	-7.99 %	1736.54	-5.14 %

Метод R-функцій показує кращу збіжність: середня розбіжність між експериментальними результатами та результатами RFM не перевищує 7.2 %. Середня різниця між експериментальними результатами та MCE становить 9.7 %. Крім того, перша, друга та четверта моди краще моделюються методом RFM порівняно з MCE, ніж інші моди. Ці розбіжності можуть бути пов'язані зі складністю моделювання та реалізації ідеальних граничних умов.

В результаті порівняння результатів, одержаних експериментально та за допомогою методу скінчених елементів і RFM, було встановлено, що таке порівняння є дуже корисним для перевірки експериментальних даних, отриманих за допомогою 3D-принтера. Значимість паралельного дослідження полягає в тому, що воно може підвищити точність та надійність динамічного аналізу 3D-друкованих конструкцій, тим самим сприяючи створенню безпечніших та ефективніших інженерних споруд.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою працею, в якій запропоновано новий підхід для розв'язання важливої науково-технічної проблеми, що пов'язана з розробкою ефективних методів розрахунку та дослідженням динамічної та статичної поведінки елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються пологими оболонками та пластинами складної геометричної форми та виготовлені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів.

Узагальнені висновки за одержаними результатами можуть бути сформульовані наступним чином:

1. Розроблено новий підхід, який підвищує ефективність існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань ФГМ пластин та пологих оболонок. Новизна методу полягає в тому, що завдяки використанню теорії R-функцій та варіаційних методів, він дозволяє будувати розв'язки в аналітичному вигляді для ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної геометрії плану з урахуванням пористості, змінної

товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження.

2. Для чисельної реалізації запропонованого методу одержано аналітичні вирази для обчислення елементів матриці, які враховують ефективні властивості функціонально-градієнтних матеріалів, у рамках трьох теорій: класичної теорії, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та теорії третього порядку. Аналітичні вирази виведено як для одношарових ФГМ оболонок, так і для сендвіч оболонок зі степеневим та сигмоїдальним законами розподілення об'ємної частки кераміки, а також з урахуванням рівномірного та нерівномірного законів пористості.

3. На основі запропонованого методу отримано нові математичні моделі задач про нелінійні коливання одношарових та сендвіч оболонок у переміщеннях, які суттєво використовуються при зведенні вихідного нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними до звичайного нелінійного диференціального рівняння.

4. Побудовано варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язок яких використовується для реалізації запропонованого методу при дослідження геометрично нелінійних процесів.

5. Запропоновано оригінальний алгоритм зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь руху в рамках класичної теорії, уточнених теорій першого та третього порядків до нелінійного звичайного диференціального рівняння.

6. Виведені аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів отриманого рівняння, які уявляють собою подвійні інтеграли від функцій, що були одержані на попередніх кроках розв'язання задачі.

7. Для дослідження стійкості ФГМ пологих оболонок та пластин запропоновано розрахункову модель, яка дозволяє враховувати неоднорідний докритичний стан, рівномірне та нерівномірне навантаження в серединній площині.

8. Побудовано нові варіаційні постановки задач стійкості та коливань пластин, які знаходяться під дією стискаючого навантаження, для розрахунку їх докритичного стану.

9. Створено програмне забезпечення для реалізації розробленого методу в рамках системи POLE-RL, яке було використано для розв'язання нових задач.

10. Отримано нові результати впливу об'ємної долі кераміки для одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок складної геометричної форми, вивчено вплив товщини лицьових шарів та заповнювача, типу ФГМ на власні частоти та частоти нелінійних коливань.

11. Досліджено вплив різних видів пористості на динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок з отворами та вирізами. При збільшенні коефіцієнту пористості поведінка власних частот залежить від типу сендвіч структури та товщини ФГМ шарів.

12. Проаналізовано вплив пружної основи на власні та нелінійні частоти коливань оболонок різної геометричної форми, в тому числі змінної товщини.

Показано, що більш суттєво впливають на власні частоти параметри пружної основи Пастернака.

13. Визначено критичне навантаження ФГМ пластин та пологих оболонок з отворами при різних умовах їх закріплення, різних законах навантаження у серединній площині для різних законів гомогенізації ФГМ. Показано, що при збільшенні об'ємної частки кераміки значення критичного навантаження збільшується.

14. На основі проведених досліджень надано характеристику поведінки власних частот в кожному окремому випадку, що може бути використаним при проектуванні елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ФГМ пластинами та пологими оболонками.

15. Вірогідність розробленого методу підтверджено практичним експериментом та застосуванням інших методів, які базуються на МСЕ.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Mikhlin Y.V., Shmatko T.V., Manucharyan G.V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82. Is. 31-32. P. 2733-2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082 (квартиль Q1).

Здобувачкою розроблено алгоритм та виконана його комп'ютерна реалізація для отримання областей стійкості та нестійкості, фазових портретів систем з декількома положеннями рівноваги.

2. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufrienko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with complex form. *Mathematical Problems in Engineering*. 2006. Vol. 2006. P. 125–138 doi:10.1155/MPE/2006/26081 (квартиль Q1).

Здобувачкою побудовані математичні моделі для задач про нелінійні коливання ортотропних пластин складної форми.

3. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Timchenko G.N. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures*. 2010. Vol.93. P. 225-233 (квартиль Q1).

Здобувачкою чисельно реалізовано алгоритм для дослідження нелінійних коливань ламінованих пологих оболонок та виконано його тестування.

4. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness. *Latin American Journal of Solid and Structures*. 2013. Vol. 10. P. 147-160 (квартиль Q2).

Здобувачкою побудовані математичні моделі для дослідження нелінійних коливань ортотропних пологих оболонок змінної товщини, розроблені програми та виконано тестування.

5. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2014. Taylor &

Francis Group, London, UK. Vol.3. P.305-308.

Здобувачці належать числові результати, які отримано для власних коливань ламінованих пологих оболонок з шарами змінної товщини.

6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P.575–585 (квартиль Q1).

Здобувачкою розроблено підхід для дослідження геометрично нелінійних коливань ламінованих пологих оболонок з шарами змінної товщини.

7. Shmatko T., Kurpa L., Bhaskar A. Geometrical analysis of vibrations of functionally graded shell panels using the R-functions theory. *Proceeding of 24-th International Congress on Sound and Vibration, ICSV*. 2017. London, UK. ISBN: 978-1-5108-4585-5. P. 6298-6305.

Здобувачкою побудовані математичні моделі для задач про нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок із застосуванням теорії R-функцій.

8. Shmatko T.V., Bhaskar A. Using the R-functions theory for investigation of nonlinear vibrations of FGM shallow shells. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 4. P. 333-336 <https://doi.org/10.1201/9781315166605>.

Здобувачкою побудовані та чисельно реалізовані алгоритми для розв'язання задач про нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок.

9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. P. 1648-1668. DOI: 10.1590/1679-78253817 (квартиль Q2).

Здобувачкою отримані чисельні результати та виконано їх аналіз. Розроблено алгоритм обчислення частот нелінійних коливань.

10. Shmatko T., Bhaskar A. R-functions theory applied to investigation of nonlinear free vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93. P. 189–204. DOI: [10.1007/s11071-017-3922-2](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3922-2) (квартиль Q1).

Здобувачкою побудовані варіаційні постановки задач про нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок та отримані чисельні результати.

11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93, P. 133–147. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3930-2> (квартиль Q1).

Здобувачкою побудовані структури розв'язків задач про нелінійні коливання ламінованих пологих оболонок із застосуванням теорії R-функцій.

12. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 107. P. 161-169. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013 (квартиль Q1).

Здобувачкою побудовані структури розв'язків задач, розроблені програми та досліджено вплив градієнтного індексу на частоти лінійних та нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок.

13. Mikhlin Y.V., Plaksiy K.Y., Shmatko T.V., Rudneva G.V. Normal modes of chaotic vibrations and transient normal modes in nonlinear systems. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials. Advanced Structured Materials* / eds. Andrianov I., Manevich A., Mikhlin Y., Gendelman O. Springer, Cham, 2019. Vol. 94. P.85-100. DOI: 10.1007/978-3-319-92234-8_6.

Здобувачкою розроблено програми та виконані числові розрахунки для отримання областей стійкості та нестійкості, застосовуючи метод нормальних мод.

14. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 16, №1. DOI: 10.1590/1679-78254911 (квартиль Q2).

Здобувачкою побудовані структури розв'язків, розроблені програми в рамках системи POLE-RL та виконано обчислювальний експеримент для ФГМ пологих оболонок із закріпленими отворами.

15. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the R-functions theory and variational methods. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, № 3. P. 496–520. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2> (квартиль Q4).

Здобувачкою запропоновано підхід для дослідження стійкості ФГМ сендвіч пластин з урахуванням неоднорідного стану.

16. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. Is. 20. P. 4582-4593. <https://doi.org/10.1177/0954406220936304> (квартиль Q2).

Здобувачкою запропоновано підхід для дослідження стійкості ФГМ сендвіч оболонок і пластин з урахуванням неоднорідного стану та використанням варіаційних методів та теорії R-функцій.

17. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of functionally graded sandwich plates with complex forms. *New Trends in Nonlinear Dynamics* / eds. Lacarbonara W., Balachandran B., Ma J., Tenreiro Machado J., Stepan G. Springer, Cham, 2020. Vol. 3. 66-77. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34724-6_8.

Здобувачкою запропоновано та реалізовано алгоритм знаходження зон стійкості/нестійкості, виконано обчислювальний експеримент.

18. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions in free vibration analysis of FGM plates and shallow shells with temperature dependent properties. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 101. Is. 3. DOI: 10.1002/zamm.202000080 (квартиль Q2).

Здобувачкою запропоновано та реалізовано алгоритм метод розв'язання задач про вільні коливання за умови нерівномірного розповсюдження температури вздовж товщини.

19. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Nonlinear vibration of the three-layered FGM plates with variable thickness of layers and different boundary conditions. *Nonlinear Mechanics of Complex Structures, Advanced Structured Materials*. 2021. Vol. 157. P. 57-74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_4.

Здобувачкою розроблено математичні моделі, отримано аналітичні вирази для обчислення елементів матриць у разі змінної товщини шарів сендвіч пологих оболонок.

20. Zippo A., Iarriccio G., Pellicano F., Shmatko T. Vibrations of plates with complex shape: experimental modal analysis, finite element method, and R-functions method. *Shock and Vibration*. 2020. Vol. 2020. P. 1-23. <https://doi.org/10.1155/2020/8882867> (квартиль Q2).

Здобувачкою отримано числові результати за допомогою створеного програмного забезпечення, що використовує теорію R-функцій та варіаційний метод Рітца.

21. Kurpa L., Shmatko T. Chapter 11 - Parametric vibrations of axially compressed functionally graded sandwich plates with a complex plan form. *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. Igor Andrianov, Simon Gluzman, Vladimir Mityushev. Academic Press, 2022. P. 213-232. <https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00016-5>.

Здобувачкою проведено дослідження про вплив градієнтного індексу, геометрії пластини, типу матеріалу, умов закріплення на динамічну стійкість ФГМ сендвіч пластин.

22. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1895–1910. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y> (квартиль Q2).

Здобувачкою виконано обчислювальний експеримент та проведено дослідження про вплив механічних і геометричних параметрів на частоти ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану, які знаходяться на пружній основі.

23. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G., Morachkovska I. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. Vol. 9. № 4. P. 1144-1155. doi: 10.22055/jacm.2023.43435.4082 (квартиль Q1)

Здобувачкою побудовані моделі ФГМ сендвіч пластин у разі використання сигмоподібного розподілення об'ємної частки кераміки та отримані аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, які необхідні для обчислення зусиль та моментів.

24. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method and shell theory of the higher-order to study free vibration of functionally graded shallow shells. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / eds. Altenbach, H., et al. Springer, Cham, 2023. P. 188–197. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_19.

Здобувачкою побудовані математичні моделі задачі про нелінійні коливання в рамках теорії Редді.

25. Zippo A., Shmatko T., Pellicano F., Kurpa L. Free vibration analysis of FGM plates and shallow shells by the R-functions method. *Proceedings of the International Conference on Condition Monitoring and Asset Management*, 19th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management, September 2023. P. 1-5. <https://doi.org/10.1784/cm2023.4d7>.

Здобувачкою отримані чисельні результати за допомогою створеного програмного забезпечення з використанням теорії R-функцій та методу Рітца.

26. Kurpa L., Shmatko T., Linnik A. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on an elastic foundation and subjected to a nonuniform loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 645–658. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10122-w> (квартиль Q1)

Здобувачкою побудовані математичні моделі нелінійних коливань та стійкості ФГМ сендвіч пластини в рамках теорії першого порядку із урахуванням пружної основи та нерівномірного стискаючого навантаження.

27. Shmatko T.V. Computer simulation of the stress-strain state of functionally graded sandwich plates and shallow shells of complex shape resting on the elastic foundation. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2023. Vol. 277. P. 95–108 (квартиль Q4)

28. Kurpa L., Pellicano F., Shmatko T., Zippo A. Free vibration analysis of porous functionally graded material plates with variable thickness on an elastic foundation using the R-functions method. *Mathematical and Computational Applications*. 2024. Vol. 29. № 1. <https://doi.org/10.3390/mca29010010>

Здобувачкою розроблені комп'ютерні програми, за допомогою яких досліджено вільні коливання пористих ФГМ пластин змінної товщини, що знаходяться на пружній основі.

29. Kurpa L., Shmatko T. Research of vibration behavior of porous FGM panels by the Ritz method. *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials* / eds. Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A.Y., Kushnir, R.M., Nazarenko, V.M., Eremeyev, V.A. Springer, Cham, 2024. Vol. 204. P. 325-338. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_22

Здобувачкою побудовані комп'ютерні програми, структури розв'язку та досліджено динамічну поведінку пористих ФГМ оболонок зі складною формою плану.

30. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Perspectives in Dynamical Systems II — Numerical and Analytical Approaches. DSTA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* / eds. Awrejcewicz J. Springer, Cham, 2024. Vol 454. P. 593–605. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56496-3_38

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

31. Курпа Л.В., Онуфриенко О.Г., Шматко Т.В. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы. *Доклады НАН*

Украины. 2005. № 3. С. 42–46.

Здобувачкою побудовані структури розв'язків задач та функціонал для розв'язання задачі теорії пружності, розв'язок якої є складовою частиною алгоритму.

32. Курпа Л.В., Осетров А.А., Шматко Т.В. Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью теории R-функций и сплайн-аппроксимации. *Вісник НТУ «ХПІ» Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях»*. Харків: НТУ «ХПІ». 2014. № 6. С. 99-110.

Здобувачкою розроблені програми та виконано обчислювальний експеримент при апроксимації невизначених компонент структури розв'язку степеневими поліномами.

33. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». Харків: НТУ «ХПІ». 2015. №6 (1115). С.56-66.

Здобувачці належать числові результати, які отримані з використанням розроблених програмних засобів в системі POLE-RL.

34. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Исследование геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих со сложной формой плана. *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки*. Запоріжжя: Запорізький національний університет. 2015. С. 89-97.

Здобувачкою розроблено підхід дослідження нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану з використанням теорії R- функцій.

35. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Linnik A.B. Analysis of stability and vibrations of porous power and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. № 4. P. 38-49. DOI: <https://doi.org/10.15407/pmach2023.04.038>.

Здобувачкою побудовані математичні моделі нелінійних коливань та стійкості в рамках теорії першого порядку з урахуванням пористості, що розподілена за різними законами.

36. Курпа Л., Шматко Т., Ліннік Г.Б., Морачковська І.О., Тимченко Г.М. Динамічний аналіз функціонально-градієнтних пористих сигмовидних сендвіч пластин. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин /Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Dynamics and Strength of Machines: збірник наукових праць*. Харків: НТУ "ХПІ", 2023. № 1. С. 39-44. <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/73892>.

Здобувачкою отримані аналітичні формули для обчислення елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ за сигмоїдальним законом розподілу об'ємної частки кераміки.

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій:

37. Kurpa L.V., Onufrienko O.G., Shmatko T.V. Researches of nonlinear vibrations of orthotropic plates with arbitrary form by the R-functions method. *Research*

and Education: Proceedings of the 2-nd International Conference, Miscolc, March 17–19, 2004. Miscolc, Egyetemvarioos, 2004. P.109–115.

Здобувачці належить розробка методу дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної форми.

38. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Нелинейная динамика: труды Международной конференции*, Харьков, 14–16 сент. 2004. Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. P.108–112.

Здобувачкою виконано тестування алгоритму, розробленого для дослідження нелінійних вимушених коливань ортотропних пластин, у системі POLE-RL.

39. Shmatko T.V. Stability Investigation of Vibration Modes of Laminated Shallow Shells with Complex Plan Form. *Dynamical System. Theory and Applications: Proceedings of 10th Conference on Dynamical System. Theory and Applications*, DSTA-2009, Lodz, Poland, December 07-10, 2009. Lodz, 2009. Vol.1. P. 467 – 472.

40. Курпа Л.В., Шматко Т.В., Тимченко Г.Н. Исследование геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек с отверстиями. *Збірник наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла»*. Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. Вип. 10. С. 179-185.

Здобувачкою проведено чисельний аналіз при дослідженні нелінійних коливань пологих оболонок з отворами.

41. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibration of orthotropic shallow shells of the complex shape with variable thickness. *Dynamical Systems. Theory and Applications: Abstracts of the 11th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications*, DSTA-2011, Łódź, Poland, December 5-8, 2011. Wydawnictwo politechniki Lodzkiej. Łódź, 2011. Book 1. P. 243-248.

Здобувачці належить розробка програми та виконання обчислювального експерименту.

42. Kurpa L., Shmatko T. Investigation of geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness by meshless approach. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013: Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013*, Sevastopol, Ukraine, June 19-22, 2013. Sevastopol, 2013. P. 277-283.

Здобувачкою запропонована комп'ютерна модель для дослідження нелінійних коливань багатопшарових оболонок змінної товщини.

43. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Донецк. № 8 (54). С.77-86.

Здобувачкою побудовані структури розв'язків з використанням теорії R-функцій та апробовано їх для розв'язання поставлених задач.

44. Курпа Л., Шматко Т. Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Вып.55. № 9. С.59-70.

Здобувачці належить розробка підходу для дослідження нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок з використанням теорії R-функцій.

45. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Vibration of functionally graded shallow shells with complex shape. *Dynamical Systems: Theory and Applications: Book of abstracts of the 13-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications*, DSTA-2015, Lodz, Poland, December 7-10, 2015. Lodz, 2015. P. 57-68.

Здобувачці належить розробка підходу для дослідження власних коливань ФГМ пологих оболонок складної геометрії з використанням теорії R-функцій.

46. Shmatko T., Bhaskar A. Geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016: Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016*, Kharkov, Ukraine, September 27-30, 2016. Kharkiv, 2016. P. 485-492.

Здобувачкою створено алгоритм для побудови скелетних кривих при дослідженні нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок.

47. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells by the R-functions method. *Dynamical Systems: Theory and Applications: Book of abstracts of the 14-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications*, DSTA 2017, Łódź, Poland, December 11-14, 2017. Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis. Lodz, 2017. V.2. P. 311-322.

Здобувачкою отримані аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ.

48. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method for vibration and buckling analysis of functionally graded plates and shallow shells with complex planform. Literature review from 2014 to 2020. *Dynamics of hybrid systems of complex structures* / ed. Katica R. (Stevanovi'c) Hedrih. Belgrad, 2022. P. 237-261.

Здобувачкою виконано узагальнений огляд робіт, у яких було використано метод RFM для дослідження ФГМ пластин та оболонок, за період з 2014 до 2020 років.

49. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Nonlinear Vibration of Functionally Graded Shallow Shells Resting on Elastic Foundations. *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara, W., Balachandran, B., Leamy, M.J., Ma, J., Tenreiro Machado, J.A., Stepan, G. Springer, Cham, 2022. P. 385-394. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_34

Здобувачкою побудовані варіаційні моделі задач про нелінійні коливання ФГМ пологих оболонок на пружній основі.

50. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G. Nonlinear free vibration of functionally graded shallow shells with variable thickness resting on elastic foundation. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 191-201. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_17

Здобувачкою створено програмні засоби, за допомогою яких виконано дослідження нелінійних коливань ФГМ оболонок змінної товщини, що знаходяться на пружній основі.

51. Shmatko T., Kurpa L., Lacarbonara W. Nonlinear free vibrations of functionally graded porous sandwich plates with complex shape. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 203-215. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_18

Здобувачкою побудовані математичні моделі задач про нелінійні вільні коливання пористих ФГМ сендвіч пластин складної форми з різними умовами закріплення та алгоритми їх розв'язання.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

52. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Nonlinear Dynamics: Book of abstracts of conference on Nonlinear Dynamics*, Kharkiv, Ukraine, September 14-16, 2004. Kharkiv, 2004. P.50–51.

Здобувачці належить розробка алгоритму дослідження нелінійних вимушених коливань ортотропних пластин складної форми.

53. Курпа Л.В., Онуфрієнко О.Г., Шматко Т.В. Дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної планформи за допомогою R-функцій. *Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей 7-го Міжнародного симпозіума, Львів, Україна, 18-20 травня 2005р. Львів, 2005. С. 23.*

Здобувачкою проведено аналіз впливу різних граничних умов при дослідженні нелінійних коливань ортотропних пластин.

54. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Исследование динамического поведения ортотропных пластин и пологих оболочек, опирающихся на план сложной. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковского, Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. С. 264.*

Здобувачці належить постановка задачі та метод її розв'язання.

55. Шматко Т.В. Исследование устойчивости форм колебаний многослойных пологих оболочек. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DDMI-2009: Abstracts of the conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation*, Kyiv, Ukraine, May 27-29, 2009. Kyiv, 2009. С. 264.

56. Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек переменной толщины. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DDMI-2011: Abstracts of conference reports of the XV International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation*, Kyiv, Ukraine, May 25-27, 2011. Kyiv, 2011. С. 141.

57. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Метод R-функций для исследования нелинейных колебаний ортотропных оболочек переменной толщины. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XIX міжнародної науково-практичної конференції, Харків,*

Україна, 01-03 червня 2011р. / за ред. проф. ТОВАЖНЯНСЬКОГО Л.Л. Харків: НТУ “ХПІ”, 2011. Ч.1. С. 53.

Здобувачкою запропоновано алгоритм для дослідження ортотропних пологих оболонок змінної товщини.

58. Шматко Т.В., Шматко А.В. Геометрически нелинейные колебания многослойных пластин с переменной толщиной слоев. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DСMI-2013: Abstracts of conference reports of the XVI International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation*, Kyiv, Ukraine, May 29-31, 2013. Kyiv, 2013. С. 148.

Здобувачкою виконано аналіз нелінійних коливань багат шарових пластин зі змінною товщиною шарів.

59. Шматко Т., Шматко О. Нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини. *Сучасні проблеми механіки та математики: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції*, Львів, Україна, 21-25 травня 2013р. / під ред. Р.М.Кушніра, Б.Й.Пташника. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України. Львів, 2013. Т.2. С. 185-186.

Здобувачкою побудована комп'ютерна модель для дослідження нелінійних коливань ортотропних пологих оболонок змінної товщини.

60. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Збірник праць IX Міжнародної наукової конференції*, Львів, Україна, 15-19 вересня 2014. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2014. С.363-365.

Здобувачці належить розробка підходу для дослідження нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок з використанням теорії R-функцій.

61. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex planform in thermal environments. *European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017: Proceeding of the 9-th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017*, Budapest, Hungary, June 25-30, 2017. Budapest, 2017. P. 70-72.

Здобувачкою побудована комп'ютерна модель для задачі про нелінійні коливання функціонально-градієнтних оболонок складної форми у температурному середовищі.

62. Курпа Л., Шматко Т. Застосування теорії R-функцій для дослідження нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища. *Сучасні проблеми механіки та математики: Тези доповідей міжнародної конференції*, Львів, Україна, 22-25 травня 2018р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018. Т. 1. С. 177-178.

Здобувачкою виконано дослідження нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища за допомогою створеної комп'ютерної моделі.

63. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек в температурной среде. *Динаміка, міцність та моделювання у машинобудуванні*: Тези доповідей І-ї Міжнародної конференції, Харків, Україна, 10-14 вересня 2018р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 2018. С.134-135.

Здобувачкою запропоновано комп'ютерну модель для дослідження вільних коливань ФГМ пологих оболонок у температурному середовищі.

64. Шматко Т. Дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок методом R-функцій. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей II-ї міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпро, Україна, 10-12 жовтня 2019. Дніпро, 2019. С. 235.

65. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Free vibration analysis of FGM shell with complex planform in thermal environments. *Dynamical Systems: Theory and Applications: Book of abstracts of 15th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2019, Lodz, Poland, December 2-5, 2019. Lodz, 2019, P. 207.*

Здобувачкою виконано обчислювальний експеримент для ФГМ оболонок у температурному середовищі.

66. Курпа Л., Шматко Т. Вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з функціонально-градієнтними шарами. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 17-19 вересня 2019р. Львів, 2019. С. 61.

Здобувачці належить створення відповідних алгоритмів у програмному середовищі системи POLE-RL, які дозволяють враховувати ФГМ шаруваті конструкції.

67. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Research of stability and nonlinear vibrations of sandwich plates with functionally graded core by Ritz's method and the R-functions theory. *Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih"*: Booklet of abstracts Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih", Belgrade, Serbia, September 04-06, 2019. Belgrade, 2019. P. 19-20.

Здобувачкою отримані амплітудно-частотні характеристики для ФГМ сендвіч пластин.

68. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of the functionally graded sandwich plates with complex form. *Nonlinear Dynamics NODYCON 2019: Book of abstract of the First International Nonlinear Dynamics Conference NODYCON 2019, Rome, Italy, February 17-20, 2019. Rome, 2019. P.409-410.*

Здобувачкою проведено аналіз отриманих результатів для задачі про нелінійні коливання ФГМ сендвіч пластин.

69. Шматко Т.В. Исследование свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек на упругом основании. *Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering: Theses of the Second International Science and*

Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, October 05–08, 2020. ІПМаш НАН України, Харків, 2020. С. 310-313.

70. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Dynamical Systems: Theory and Applications: Book of abstracts of 16th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2021*, Lodz, Poland, December 6-9, 2021. Lodz, 2021. P. 629-630.

71. Курпа Л., Шматко Т., Лінник Г. Аналіз стійкості та коливань пористих функціонально-градієнтних пластин з використанням теорії R-функцій. *Сучасні проблеми механіки та математики: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції*, Львів, Україна, 23-25 травня 2023р. Львів, 2023. С.194.

Здобувачкою проведено обчислювальний експеримент для ФГМ пластин з урахуванням пористості.

72. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Згин та коливання функціонально-градієнтних пористих сендвіч пологих оболонок з отворами та вирізами. *Actual problems of mechanics – 2023: Proceedings of International scientific conference dedicated to the 145-th anniversary of the birth of S.P.Timoshenko*, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine, November 14-16, 2023. Kharkiv, 2023. С. 420-421.

Здобувачкою запропоновано комп'ютерна модель для дослідження згину та коливань ФГМ пористих сендвіч пологих оболонок складної геометрії.

73. Курпа Л., Шматко Т., Лінник Г., Морачковська І. Вільні коливання сендвіч пластин з ауксетичним сотовим заповнювачем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції*, Львів, Україна, 24-26 вересня 2024р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. С. 101-102.

Здобувачкою розроблені програмні засоби, які враховують ауксетичні властивості сендвіч конструкцій, при дослідженні їх на вільні коливання.

Монографії

74. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Застосування теорії R-функцій до розв'язання нелінійних задач динаміки багатошарових пластин: монографія. Харків: ООО «В деле», 2016. 492 с.

Здобувачці належить розробка методу дослідження нелінійних коливань багатошарових пластин складної форми та відповідні чисельні результати.

АНОТАЦІЯ

Шматко Т.В. Математичне моделювання та розробка чисельно-аналітичних методів дослідження функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин з використанням теорії R-функцій. - На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи. Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2025.

У дисертаційній роботі розв'язана науково-технічна проблема, яка полягає в створенні ефективного чисельно-аналітичного методу дослідження статичної та динамічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), на основі математичних моделей, які враховують такі важливі характеристики задачі, як наявність геометричної нелінійності, пористості, пружної основи, різні закони розподілення об'ємних часток складових ФГМ.

Розроблено новий підхід для дослідження лінійних коливань ФГМ пластин та пологих оболонок зі складною формою плану та різними умовами їх закріплення в рамках трьох теорій пологих оболонок: класичної (CLT), уточненої зсувної деформаційної теорії першого (FSDT) та третього порядків (HSDT). Запропонований підхід базується на використанні теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца, що дозволило побудувати розв'язки задач в аналітичному вигляді та використати ці розв'язки при розв'язанні нелінійних задач.

Запропоновано метод розв'язання задач про геометрично нелінійні коливання ФГМ одношарових та сендвіч пологих оболонок і пластин довільної форми плану. Одержано варіаційні постановки сформульованих проблем та побудовані відповідні функціонали в рамках трьох теорій: CLT, FSDT, HSDT. Запропоновано метод зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержано в явному вигляді аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів цього рівняння. Розроблено підхід до розв'язання задач стійкості та коливань ФГМ оболонок та пластин, які знаходяться під дією стискаючих як рівномірних, так і нерівномірних навантажень.

Комп'ютерну реалізацію запропонованих методів виконано в рамках системи POLE-RL. За допомогою розробленого комплексу програм вивчено вплив різних геометричних та механічних параметрів на власні частоти, критичне навантаження та поведінку амплітудно-частотних характеристик одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок з різною геометричною формою плану, з вирізами та отворами складної форми. Досліджено динамічну поведінку ФГМ оболонок змінної товщини. На основі проведених досліджень надано практичні рекомендації щодо проектування елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ФГМ пластинами та пологими оболонками. Вірогідність розробленого методу підтверджено практичним експериментом та застосуванням інших методів, які базуються на МСЕ.

Ключові слова: метод R-функцій, варіаційні методи, функціонально-градієнтні матеріали, математичне моделювання ФГМ об'єктів, сендвіч пологі оболонки та пластини, лінійні та геометрично нелінійні коливання, стійкість, пористість, пружна основа, зміна товщина.

ABSTRACT

Shmatko T.V. Mathematical modelling and development of numerical-analytical methods for studying functionally graded shallow shells and plates using the R-functions theory. - Manuscript.

The dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation solves a scientific and technical problem consisting in the creation of an effective numerical-analytical method for studying the static and dynamic behaviour of structural elements made of modern functionally graded materials (FGM) based on mathematical models that consider such important characteristics of the problem as geometric nonlinearity, porosity, elastic foundation, different distribution laws of volume fraction ceramics of FGM.

A new approach has been developed for studying linear vibrations of FGM plates and shallow shells with a complex plan shape and different boundary conditions within the framework of three shallow shell theories: classical (CLT), refined deformation shear theory of the first (FSDT) and third orders (HSDT). The proposed approach is based on the use of the R-functions theory and the Ritz variational method, which made it possible to construct solutions to problems in an analytical form and use these solutions when solving nonlinear problems.

A method for solving problems of geometrically nonlinear vibrations of the FGM single-layer and sandwich shallow shells and plates of arbitrary plan shape is proposed. Variational statements of the formulated problems are obtained and the corresponding functionals are constructed within the framework of three theories: CLT, FSDT, HSDT. A method is proposed for reducing a nonlinear differential equation of motion with partial derivatives to a nonlinear ordinary differential equation and analytical expressions are obtained in explicit form for calculating the coefficients of this equation. An approach is developed to solve the problems of stability and vibrations of the FGM shells and plates under the action of compressive uniform and non-uniform loads.

The computer implementation of the proposed methods is performed within the POLE-RL system. Using the developed software package, the influence of various geometric and mechanical parameters on natural frequencies, critical load and behavior of amplitude-frequency characteristics of single-layer and sandwich FGM shallow shells with different geometric plan shapes, cutouts and complex-shaped holes is studied. The dynamic behavior of FGM shells of variable thickness is investigated. Based on the conducted research, practical recommendations are given for designing elements of thin-walled structures modeled by FGM plates and shallow shells. The reliability of the developed method is confirmed by a practical experiment and the use of other methods based on the FEM.

Key words: R-functions theory, variational methods, functionally graded materials, mathematical modelling of FGM objects, sandwich shallow shells and plates, linear and geometrically nonlinear vibrations, stability, porosity, elastic foundation, variable thickness.