

Міністерство освіти і науки України
Інституту енергетичних машин і
систем ім. А. М. Підгорного НАН України

ТКАЧЕНКО ДЕНИС АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 539.3:517.958:629.7.02(043.3)

**АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДЕФОРМУВАННЯ
СКЛАДНИХ ПЛАСТИНЧАТИХ СИСТЕМ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла
113 – Прикладна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2025

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Національному аерокосмічному університеті «Харківський авіаційний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: Кандидат технічних наук
Минтюк Віталій Борисович,
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»,
доцент кафедри проектування літаків та
вертольотів;

Офіційні опоненти: Доктор технічних наук, професор
Сметанкіна Наталя Володимирівна,
завідувачка відділу вібраційних і
термоміцнісних досліджень Інституту
енергетичних машин і систем ім. А. М.
Підгорного НАН України;

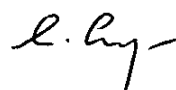
Доктор технічних наук, професор
Данішевський Владислав Валентинович,
Український державний університет науки і
технологій, директор Навчально-наукового
інституту «Придніпровська державна академія
будівництва та архітектури».

Захист відбудеться «12» червня 2025 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, зала вченої ради.

Із дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10.

Автореферат розісланий «12» травня 2025 року.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради
д. т. н., проф.

 О. О. Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Математичні моделі багатьох процесів і об'єктів різної природи (в тому числі і задачі міцності силових конструкцій) формуються у вигляді крайових задач. Для більшості з них точний розв'язок не відомий. На практиці доводиться користуватися наближеними розв'язками цих крайових задач у варіаційному формулюванні. Більшість цих розв'язків нині знаходять за допомогою комерційного програмного забезпечення, яке реалізує метод скінченних елементів (МСЕ). Основна проблема полягає в повільній збіжності наближених розв'язків і, як наслідок, низькій точності та трудомістких витратах на дослідження достовірності. Із цього погляду аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки крайових задач мають незаперечні переваги над числовими. Але застосування цих методів обмежене простими областями зі стандартними умовами обпирання, що унеможлиблює їх поширення на складні системи. Тому розробка і впровадження програмно реалізованих методів, що поєднують переваги аналітичних і числових підходів, є актуальним завданням для сучасної інженерної практики.

Вибір теми дослідження зумовлений необхідністю вдосконалення методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, які мають широке застосування у багатьох інженерних галузях, таких як авіація, космонавтика, кораблебудування та будівництво, де точність і надійність розрахунків є критично важливими для забезпечення ефективності та безпечної експлуатації конструкцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. В основу дисертації покладено матеріали, що узагальнюють дослідження, виконані автором при реалізації держбюджетних тем Міністерства освіти і науки України: «Нові математичні методи дослідження полів, станів і процесів механіки суцільних середовищ для розвитку сучасних аерокосмічних технологій. Метод ідентифікації крайових умов» (№ ДР 0109U001394); «Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем» (№ ДР 0112U002135); «Нові аналітико-числові методи в задачах статичності, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів. Методи аналізу лінійних та нелінійних математичних моделей тонкостінної просторової системи» (№ ДР 0117U002502).

Мета дослідження полягає у розробці та вдосконаленні методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, а також отриманні досі невідомих розв'язків крайових задач для прямокутних пластин з використанням комбінації аналітичних та числових підходів, що забезпечить підвищення точності та ефективності розрахунків.

Метою передбачено розв'язання таких **завдань**:

- 1) Проведення критичного аналізу сучасних методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій.
- 2) Побудова та обґрунтування математичних моделей окремих елементів тонкостінних конструкцій, які точно описують їхню поведінку, з урахуванням неоднорідних крайових умов та рівня декомпозиції конструкції.
- 3) Розробка та обґрунтування вибору методів сполучення конструктивних елементів (МСКЕ) і методу редукції (МР) для підвищення точності розрахунків, а також розвиток методу ідентифікації крайових умов С. А. Халілова (МІКУ) та їх застосування для синтезу математичних моделей елементів у єдину модель всієї конструкції.
- 4) Розробка системного підходу для визначення напружено-деформованого стану стрингерних панелей, отриманих комбінацією прямокутних пластин, та пластин, підкріплених системою балок.
- 5) Проведення чисельних експериментів для підтвердження ефективності запропонованих методів та аналіз їх результатів.
- 6) Створення нових та розвиток існуючих методів аналізу крайових задач для окремих елементів з метою отримання аналітико-чисельних розв'язків.
- 7) Побудова системи ортонормованих функцій в енергетичному просторі оператора крайової задачі, яка б забезпечувала стійкість, збіжність та точність аналітико-чисельних розв'язків.
- 8) Розробка регулярної процедури побудови універсальних функцій, що виконують довільні неоднорідні крайові умови на границі конструктивного елемента.
- 9) Оцінка точності та ефективності запропонованих методів у порівнянні з традиційними методами, такими як МСЕ.

Об'єкт дослідження: поля, стани та процеси, які виникають при деформуванні складних механічних тонкостінних систем.

Предмет дослідження: нові високоточні методи розв'язання неоднорідних крайових задач для аналізу напружено-деформованого стану окремих прямокутних пластин і тонкостінних пластинчатих конструкцій.

Методи дослідження. У роботі застосовані теоретичні, варіаційні методи дослідження: прямі (метод Бубнова-Гальоркіна, метод Рітца) і чисельні (МСЕ), а також спеціальні методи, які використовуються для аналізу конструкцій (МСКЕ, МІКУ, МР).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в подальшому розвитку методу сполучення конструктивних елементів і методу ідентифікації крайових умов та методу редукції, що в комплексі дозволяють будувати аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки для складних тонкостінних просторових конструкцій у межах двох підходів до розгляду конструкції – декомпозиційного і системного.

1. Удосконалено застосування МІКУ у формі МР із залученням МСЕ для ідентифікації крайових умов та МСКЕ для формулювання умов сполучення елементів при аналізі складних тонкостінних конструкцій;

2. Запропоновано новітній алгоритм побудови розв'язку для повністю неоднорідної крайової задачі, який враховує взаємодію компонентів системи;
3. Розроблено новий метод побудови аналітичного базису для системи, яка складається з пластин або пластин та балок;
4. Уперше побудовано ортонормований базис, що забезпечує стабільну збіжність і точність розв'язків;
5. Запропоновані новітні аналітичні розв'язки задачі вигину жорстко затиснутої пластини з демонстрацією переваг нових базисів;
6. Уперше розв'язано задачі для комплексних систем пластин і балок у вигляді замкнутих аналітичних виразів.

Практичне значення отриманих результатів. Розвинуті в роботі МСКЕ, МІКУ та МР дозволяють значно підвищити точність і ефективність розрахунків, що є особливо важливим для аналізу напружено-деформованого стану складних тонкостінних систем. Ці методи також мають потенціал для поширення на різні моделі матеріалів, включаючи ортотропні та анізотропні (композитні), а також на інші типи задач, такі як втрата стійкості, вільні коливання, задачі динаміки.

Цінність отриманих результатів полягає у внеску до загальної теорії наближених методів, функціонального аналізу, математичної фізики та числових методів.

Практична цінність результатів підтверджується їх здатністю підвищити надійність та безпеку конструкцій, а також знизити витрати на їх розробку та експлуатацію, особливо в аерокосмічній техніці. Це робить дослідження вагомим внеском у розвиток методів аналізу тонкостінних конструкцій, зокрема для задач міцності силових конструкцій. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення використання цих методів для нелінійних моделей, а також на вдосконалення базисних систем функцій для виконання як головних, так і природних крайових умов. Крім того, МІКУ та МСКЕ можуть бути інтегровані в оригінальне програмне забезпечення, що сприятиме їх практичному застосуванню.

Окремі результати роботи впроваджено на АТ «Антонов», про що отримані відповідні акти (2017, 2019), які наведено в Додатку Д дисертації.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційне дослідження виконано самостійно: обґрунтовано загальну концепцію роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, обрано підходи до вирішення сформульованих завдань, здійснено обчислення, проаналізовано результати.

У працях, написаних у співавторстві, авторів дисертації належить таке: у високих наближеннях отримано розв'язок «жорсткої» крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутній області з однорідними граничними умовами, а також зроблено висновок про якість апроксимувальних властивостей систем координатних функцій на підставі проведеного чисельного аналізу [1]; побудовано наближений аналітичний розв'язок бігармонічної задачі в прямокутнику за однорідних головних крайових умов, виконано повне дослідження точності та збіжності отриманого розв'язку в різних метриках [2];

запропоновано наближений аналітичний розв'язок для крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором, на двох протилежних боках якого задано умови типу Діріхле, а на двох інших крайові умови довільні, виконано порівняння результатів пропонованих розв'язків з результатами, отриманими за методом скінченних елементів [3]; побудовано ортонормовані в енергетичному просторі бігармонічного оператора базиси в прямокутнику для трьох різних вихідних координатних систем за однорідних головних крайових умов, для елементів базису отримано замкнуті вирази з абсолютно точними параметрами [4]; у високих наближеннях визначено власний спектр основної крайової задачі в прямокутнику для бігармонічного оператора за головних крайових умов і різних значень параметра подовження [5]; запропоновано процедуру, що дозволяє спростити без втрати точності структуру власних функцій, отримано з наперед заданою точністю розв'язки восьми крайових задач, що описують проблему стійкості прямокутних пластин при комбінованому навантаженні, точні розв'язки яких не відомі донині [6]; дано розв'язок задачі про спектр у прямокутнику для складеного оператора за головних крайових умов, запропоновано процедуру спрощення структури власних функцій шляхом виявлення їхніх компонент типу «білого шуму», створено оригінальну програму для виконання обчислень [7]; побудовано аналітико-чисельну функцію Гріна основної крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутній області, яка складається із суми фундаментального і регулярного розв'язків [8]; запропоновано кілька способів продовження крайових функцій із границі в область і дано порівняльний аналіз їхньої ефективності [9]; побудовано аналітико-чисельний розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини з використанням МІКУ у формі МР, ідентифікацію крайових умов виконано за допомогою розрахунків за МСЕ, проведено аналіз результатів низки чисельних експериментів [10]; проведено комплексне порівняння одинадцяти базисних систем, побудованих на основі поліномів Лежандра, Чебишева, інтерполяційних поліномів Лагранжа – Лобатто, тригонометричних функцій, степеневих функцій і фінітних форм МСЕ, для визначення найбільш ефективної базисної системи з точки зору швидкості збіжності наближених розв'язків, нев'язки в рівняннях крайових задач і чисел обумовленості матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь [11]; розроблено модифіковані базисні системи, які виконують як головні, так і природні крайові умови [12].

Апробація результатів дисертації. Основні положення та висновки дисертаційної роботи презентовано в доповідях на всеукраїнських і міжнародних науково-технічних конференціях: Всеукраїнська науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні» (м. Харків, 2014, 2015, 2017); Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки» (м. Харків, 2015, 2017); XVI науково-технічна конференція факультету ракетно-космічної техніки «Сучасні проблеми ракетно-космічної техніки і технології» (м. Харків, 2019).

Публікації. Основні результати за темою дисертації оприлюднено у 18 публікаціях, серед яких 11 статей у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України, 1 стаття у науковому періодичному виданні іншої держави із напряду, з якого підготовлено дисертацію (SCOPUS 2022 Q2), 6 публікацій у матеріалах Всеукраїнських і міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Повний обсяг дисертації складає 252 сторінки, з яких основного тексту 184 сторінки, у тому числі: 53 рисунки, 14 таблиць; список використаних джерел із 152 найменувань на 18 сторінках, п'ять додатків на 24 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обґрунтовано актуальність дисертації, її зв'язок з науковими програмами, планами і темами; визначено об'єкт, предмет, мету, завдання та методи дослідження; схарактеризовано наукову новизну і практичне значення одержаних результатів; подано інформацію про їх апробацію.

У першому розділі «Методи та розв'язки задач визначення напружено-деформованого стану тонкостінних просторових систем» проведено порівняльний аналіз аналітичних і чисельних підходів до розв'язання крайових задач механіки деформівних тіл з точки зору збіжності та точності розв'язків. Аналітичні методи забезпечують високоточні розв'язки через застосування апроксимаційних функцій, що задовольняють крайові умови, проте вимагають значних обчислювальних ресурсів при моделюванні конструкцій з нерегулярною геометрією та складними навантаженнями. Чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ), ефективно вирішують задачі з різними граничними умовами, але обмежені дискретизацією суцільних середовищ. Особлива увага приділяється сучасним методам аналізу тонкостінних просторових систем із пластин (МКУ С. А. Халілова, МР, МСКЕ), що дозволяють отримувати точні й стійкі розв'язки як для цілої системи, так і для окремих її елементів.

Розглянуто два формулювання задач: диференціальне, яке передбачає пошук функцій переміщень і напружень, що задовольняють відповідні диференціальні рівняння і крайові умови, та варіаційне, що полягає в мінімізації функціоналу, пов'язаного з повною потенціальною енергією деформації. Варіаційний підхід дозволяє застосовувати апроксимаційні методи навіть за складних умов, знижуючи вимоги до гладкості розв'язків.

У роботі наведено огляд методів розв'язання як задач, пов'язаних з аналізом тонкостінних просторових систем, так і задач для окремих конструктивних елементів: метод Рітца, метод найменших квадратів, метод колокацій та інші. Зазначено, що для складних конструкцій з багатьма контактними елементами необхідні методи, які враховують взаємодію між елементами та дозволяють будувати стійкі рішення із заздалегідь заданою точністю.

Також у розділі зроблено детальний огляд і критичний аналіз існуючої наукової літератури за напрямком дисертації.

У другому розділі «Формулювання і побудова розв'язку задачі типу Діріхле для тонкостінної просторової конструкції» вводяться два підходи до розв'язання складних задач механіки деформівного твердого тіла: декомпозиційний і системний. Ідея декомпозиційного підходу полягає у застосуванні МКУ у формі МР для зведення розв'язання повністю неоднорідної крайової задачі до розв'язання низки напіводнорідних крайових задач. Під повністю неоднорідною крайовою задачею розуміємо задачу, яка описується неоднорідною системою диференціальних рівнянь:

$$Lu = f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij}u_j = f_j \text{ в } \Omega, j = 1, 2, \dots, k_1 + k_2 \quad (1)$$

у прямокутній області $(2a \times 2b)$, зведеної до квадрата $\Omega = \{(x, y): x, y \in (-1; +1)\}$, відносно вектор-функції $u(x, y)$, яка в задачах механіки може бути функцією Ері або вектором переміщень, за неоднорідних крайових умов:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}; \quad \gamma = \bar{\gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \tilde{\gamma}, \quad (2)$$

де ε, γ – компоненти $u(x, y)$, на які діють оператори другого або четвертого порядків відповідно.

Під напіводнорідною крайовою задачею розуміємо задачу, у якій крайові умови однорідні (далі – базова задача). Побудова розв'язку шляхом редукції вихідної повністю неоднорідної задачі до розв'язання низки базових задач (1) – (2) диктується їх лінійністю. Перед розв'язанням слід визначити, чи є об'єкт автономним або частиною системи. Для автономних елементів крайові умови подаються як відомі функції з необхідною гладкістю, а для системних вони містять параметри, що визначаються з граничних умов та умов на лініях сполучення елементів.

Розв'язок задачі (1) – (2) шукатимемо як суму трьох компонент: спеціального часткового розв'язку u_q , функцій продовження крайових умов в область u_{1+2} та коригувального розв'язку u_0 :

$$u = u_q + u_{1+2} + u_0. \quad (3)$$

Частковий розв'язок u_q враховує неоднорідність диференціальних рівнянь:

$$Lu_q = f \text{ в } \Omega, \quad (4)$$

де f – вектор-функція вільних членів рівняння, яка враховує зовнішнє навантаження і жорсткість пластини, і підпорядкована однорідним крайовим умовам:

$$\varepsilon_q = 0, \gamma_q = \frac{\partial \gamma_q}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (5)$$

де ε_q, γ_q – компоненти вектора u_q ;
 Γ – границя прямокутної області.

Функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$, які відповідають компоненти $\mathcal{E}$, виражаються через суму двох доданків:

$$\mathcal{E}_{1+2} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \quad (6)$$

Білінійна функція $\mathcal{E}_1(x, y)$ продовжує неоднорідні крайові умови з чотирьох кутових точок $\bar{\mathcal{E}}_{pq}$ в область:

$$\mathcal{E}_1(x, y) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \bar{\mathcal{E}}_{pq} \pi_p(x) \pi_q(y), \quad (7)$$

де π_i – лінійні функції форми одновимірного елемента.

Друга функція $\mathcal{E}_2(x, y)$ задається залежністю:

$$\mathcal{E}_2(x, y) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \bar{\mathcal{E}}_k^*(y) \pi_k(x) + \bar{\mathcal{E}}_k^{**}(x) \pi_k(y) \right\}, \quad (8)$$

де $\bar{\mathcal{E}}_k^*$, $\bar{\mathcal{E}}_k^{**}$ – функції, задані на чотирьох ділянках $(-1, +1)$ граничного контуру.

Функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$, що відповідають компоненти Υ , також складаються з двох доданків:

$$\Upsilon_{1+2} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2. \quad (9)$$

Бікубічна функція $\Upsilon_1(x, y)$ продовжує неоднорідні крайові умови з чотирьох кутових точок $\bar{\Upsilon}_{pq}$ в область:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(x, y) = & \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 [\bar{\Upsilon}_{p,q} \rho_p(x) + \bar{\Upsilon}_{p+2,q} \rho_{p+2}(x)] \rho_q(y) + \\ & + \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 [\bar{\Upsilon}_{p,q+2} \rho_p(x) + \bar{\Upsilon}_{p+2,q+2} \rho_{p+2}(x)] \rho_{q+2}(y), \end{aligned} \quad (10)$$

де ρ_i – кубічні функції форми одновимірного елемента.

Функція $\Upsilon_2(x, y)$ записується в такій формі:

$$\Upsilon_2(x, y) = \sum_{k=1}^4 \left\{ \bar{\Upsilon}_k^*(y) \rho_k(x) + \bar{\Upsilon}_k^{**}(x) \rho_k(y) \right\}, \quad (11)$$

тут $\bar{\Upsilon}_k^*$, $\bar{\Upsilon}_k^{**}$ – функції, що задані на чотирьох ділянках $(-1, +1)$ граничного контуру.

Коригувальний розв'язок u_0 будується як розв'язок базової задачі для диференціальних рівнянь:

$$L\mathbf{u}_0 = -L\mathbf{u}_{1+2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} (u_0)_j = - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} (u_{1+2})_j \text{ в } \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, k_1 + k_2 \quad (12)$$

за однорідних крайових умов:

$$\mathcal{E}_0 = 0, \Upsilon_0 = \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (13)$$

Розв'язки задач (4) – (5), (12) – (13) будуються в подвійних рядах за системами координатних функцій, що виконують однорідні крайові умови:

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{E}_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i(x) \xi_j(y), \quad \Upsilon_q(\Upsilon_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} \zeta_i(x) \zeta_j(y), \quad (14)$$

де Ξ_q, Υ_q і Ξ_0, Υ_0 – відповідно компоненти розв'язків $\mathbf{u}_q$ і $\mathbf{u}_0$;
 α_{ij} і β_{ij} – шукані коефіцієнти.

Системний підхід пропонує будувати розв'язок для всієї системи елементів сукупно, без розбиття на підзадачі. Основна увага приділяється добору універсальних функцій, що повинні виконувати як неоднорідні крайові, так і міжелементні контактні умови. Розв'язання виконується за допомогою метода Рітца через мінімізацію функціоналу повної потенціальної енергії.

Функцію із простору Соболева H^1 , що набуває на межах відрізка $(-1, +1)$ ненульових значень, можна подати в системі базисних функцій

$$\zeta = \text{Span}(N_1(x), N_2(x), \varphi_n, n = 0, 1, \dots), \quad (15)$$

де $N_1(x), N_2(x)$ – функції форми одновимірного симплекс-елемента;
 $\varphi_n(x)$ – базисні функції, що дорівнюють нулю на границях $x = \pm 1$ і мають ортогональні похідні в L_2 ;

$P_i(x)$ – поліноми Лежандра.

Аналогічну функцію у квадратній області $(-1, +1) \times (-1, +1)$ можна подати в системі базисних функцій, що отримується у вигляді тензорного добутку:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & [\bar{f}_2 N_1(x) + \bar{f}_3 N_2(x)] N_1(y) + [\bar{f}_1 N_1(x) + \bar{f}_4 N_2(x)] N_2(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{F}_n^1 N_1(x) + \bar{F}_n^2 N_2(x)] \varphi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{F}_n^3 N_1(y) + \bar{F}_n^4 N_2(y)] \varphi_n(x) + \\ & + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} F_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y), \quad \varphi_n(s) = P_{n+2}(s) - P_n(s), \quad s \in \{x, y\}, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\bar{f}_i, i = \overline{1,4}$ – значення функції в кутових точках $f(\pm 1; \pm 1)$;
 $\bar{F}_n^i, i = \overline{1,4}$ – коефіцієнти, що задають функцію на сторонах $f(x; \pm 1), f(\pm 1; y)$;
 F_{ij} – коефіцієнти, що визначають функцію в області.

Аналогічне подання функції з H^2 (такого простору Соболева, що включає в себе всі функції з області Ω , які є квадратно інтегрованими разом зі своїми першими та другими похідними) має вигляд

$$\begin{aligned} g(x, y) = & [\bar{g}_2 M_1(x) + \bar{g}_3 M_2(x) + \bar{\theta}_{x2} K_1(x) + \bar{\theta}_{x3} K_2(x)] M_1(y) + \\ & + [\bar{g}_1 M_1(x) + \bar{g}_4 M_2(x) + \bar{\theta}_{x1} K_1(x) + \bar{\theta}_{x4} K_2(x)] M_2(y) + \\ & + [\bar{\theta}_{y2} M_1(x) + \bar{\theta}_{y3} M_2(x) + \bar{m}_2 K_1(x) + \bar{m}_3 K_2(x)] K_1(y) + \\ & + [\bar{\theta}_{y1} M_1(x) + \bar{\theta}_{y4} M_2(x) + \bar{m}_1 K_1(x) + \bar{m}_4 K_2(x)] K_2(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{G}_n^1 M_1(x) + \bar{G}_n^2 M_2(x) + \bar{\theta}_n^1 K_1(x) + \bar{\theta}_n^2 K_2(x)] \psi_n(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{G}_n^3 M_1(y) + \bar{G}_n^4 M_2(y) + \bar{\theta}_n^3 K_1(y) + \bar{\theta}_n^4 K_2(y)] \psi_n(x) + \\ & + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} G_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y), \\ & \psi_n(s) = P_{n+4}(s) - \frac{2(2n+5)}{2n+3} P_{n+2}(s) + \frac{2n+7}{2n+3} P_n(s), \quad s \in \{x, y\}, \end{aligned} \quad (17)$$

де M_1, M_2, K_1, K_2 – функції кубічної інтерполяції Ерміта,

$\psi_n(x)$ – функції, що дорівнюють нулю разом зі своїми першими похідними на границях $x = \pm 1$ і мають ортогональні другі похідні в L_2 ;

$\bar{g}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{m}_i$ – значення функції $g(\pm 1, \pm 1)$ та її похідних $g_{,x}(\pm 1, \pm 1)$, $g_{,y}(\pm 1, \pm 1)$, $g_{,xy}(\pm 1, \pm 1)$ у кутових точках;

$\bar{G}_n^i, \bar{\theta}_n^i$ – коефіцієнти, що визначають функцію $g(x, \pm 1)$, $g(\pm 1, y)$ та її похідні на сторонах $g_{,x}(\pm 1, y)$, $g_{,y}(x, \pm 1)$.

У роботі реалізацію системного підходу виконано на прикладі стрингерної панелі (рис. 1). Нумерація пластин позначена на рисунку. На сторонах s_1 задано умови вільного обпирання ($w = 0$ і $M_y = 0$), а на сторонах s_2 – умови жорсткого кріплення ($w = 0$ і $w_{,x} = 0$).

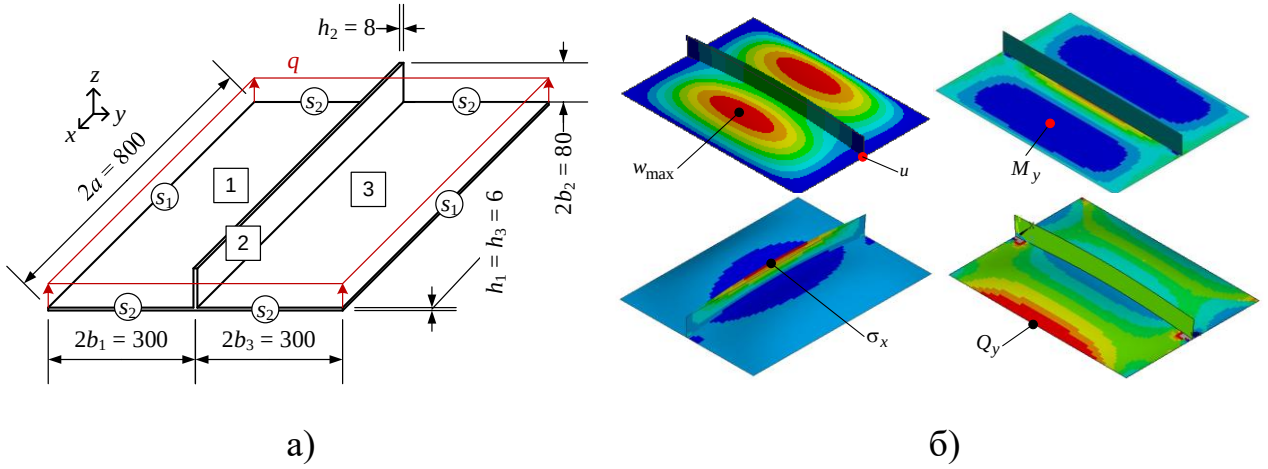


Рисунок 1 – Стрингерна панель, навантажена рівномірним тиском (а), кінематичні та статичні параметри та місця їх контролю (б)

У загальному випадку пластини на рис. 1 зазнають усіх трьох переміщень. Функція прогину для пластини 1 має вигляд

$$w_1 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M_2'(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 \psi_{2i}^{sc}(x) \psi_j(y),$$

$$\psi_n^{sc}(y) = P_{n+4}(y) + \frac{2n+7}{(n+2)^2} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) -$$

$$- \frac{(2n+5)(2(n+1)^2 + 6n + 13)}{(2n+3)(n+2)^2} P_{n+2}(y) + \frac{(2n+7)(n+3)^2}{(2n+3)(n+2)^2} P_n(y). \quad (18)$$

На функції переміщень u_1 і v_1 не накладаються жодні головні граничні умови. Функція u_1 косиметрична щодо осі y , тому вона має вигляд

$$u_1 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i+1}(x) \varphi_j^{f0}(y),$$

$$\varphi_n^{f0}(y) = P_{n+1}(y) - P_n(y). \quad (19)$$

На відміну від u_1 , функція v_1 симетрична відносно осі y і на границі $y = +1$ приймає нульове значення, тому її вигляд спрощується:

$$v_1 = \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i}(x) \varphi_j^{f0}(y). \quad (20)$$

Аналогічно будуються подання функцій переміщень для пластини 3:

$$w_3 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M_1'(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^3 \psi_{2i}^{cs}(x) \psi_j(y),$$

$$\psi_n^{cs}(y) = P_{n+4}(y) - \frac{2n+7}{(n+2)^2} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) -$$

$$- \frac{(2n+5)(2(n+1)^2 + 6n+13)}{(2n+3)(n+2)^2} P_{n+2}(y) + \frac{(2n+7)(n+3)^2}{(2n+3)(n+2)^2} P_n(y); \quad (21)$$

$$u_3 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^3 P_{2i+1}(x) \varphi_j^{f0}(y),$$

$$\varphi_n^{f0}(y) = P_{n+1}(y) - P_n(y); \quad (22)$$

$$v_3 = \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i}(x) \varphi_j^{of}(y), \quad \varphi_n^{of}(y) = P_{n+1}(y) + P_n(y). \quad (23)$$

З огляду на симетрію прогин другої пластини $w_2 = 0$. Функція u_2 з H^1 виконує головні граничні умови тільки на границі $y = -1$:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} U_{ij}^2 P_{2i+1}(x) \varphi_j(y). \quad (24)$$

Функція переміщень v_2 задається класичним "p-MSE" способом. Її слід шукати у вигляді (16), але за такого задавання функції неможливо виконати умови сполучення на границі $y = -1$. Значення функції на цій границі дорівнює $v_2(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots}^{N+1} \bar{V}_n^2 \varphi_{2n}(x)$, а відповідне переміщення осі 1 (прогин першої пластини за $y = 1$ і третьої за $y = -1$) становить $w_1(x, 1) = w_3(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots}^N \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x)$. Тобто тут не вдасться виконати сполучення через просте прирівнювання коефіцієнтів, як для пластин 1 і 3.

З цієї ситуації є кілька виходів. Перший – шукати розв'язок у вигляді (16)

$$v_2(x, y) = [\bar{v}_3 N_1(x) + \bar{v}_4 N_2(x)] N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} F_{ij} \varphi_{2i}(x) \varphi_j(y) +$$

$$+ \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^4 N_1(x) \varphi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \varphi_{2n}(x) [\bar{V}_n^1 N_1(y) + \bar{V}_n^2 N_2(y)], \quad (25)$$

а коефіцієнти $\bar{V}_n^1$ виразити через $\bar{W}_n^1$:

$$\bar{V}_n^1 = \begin{cases} -\frac{(4n+7)\bar{W}_n^1}{4n+3} & 2n \leq 1; \\ \bar{W}_{n-1}^1 - \frac{(4n+7)\bar{W}_n^1}{4n+3} & 1 < 2n \leq 2N; \\ \bar{W}_{n-1}^1 & N < n \leq N+1; \\ n = 0, 1, \dots, N+1. \end{cases} \quad (26)$$

Тут N – верхня межа сумування в (18) і (21). Для забезпечення безперервності сполучення верхню межу сумування в (25) необхідно збільшити на два.

Другий варіант – подати функцію v_2 у вигляді (27). Тоді коефіцієнти $\bar{W}_n^1$, за допомогою яких виконується сполучення, подані в явному вигляді

$$\begin{aligned}
v_2(x, y) = & [\bar{v}_3 M_1(x) + \bar{v}_4 M_2(x) + \bar{\theta}_{z3} K_1(x) + \bar{\theta}_{z4} K_2(x)] M_2(y) + \\
& + [\bar{\theta}_{y2} M_1(x) + \bar{\theta}_{y1} M_2(x) + \bar{m}_2 K_1(x) + \bar{m}_1 K_2(x)] K_1(y) + \\
& + [\bar{\theta}_{y3} M_1(x) + \bar{\theta}_{y4} M_2(x) + \bar{m}_3 K_1(x) + \bar{m}_4 K_2(x)] K_2(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{V}_n^4 M_1(x) + \bar{V}_n^3 M_2(x) + \bar{\theta}_n^4 K_1(x) + \bar{\theta}_n^3 K_2(x)] \psi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} [\bar{W}_n^1 M_1(y) + \bar{W}_n^2 M_2(y) + \bar{\theta}_n^1 K_1(y) + \bar{\theta}_n^2 K_2(y)] \psi_{2n}(x) + \\
& + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} V_{ij}^2 \psi_{2i}(x) \psi_j(y).
\end{aligned} \tag{27}$$

У третьому розділі «Формулювання базових крайових задач типу Діріхле в прямокутнику та побудова їхніх аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків» сформульовано і розв'язано базову крайову задачу типу Діріхле для бігармонічного оператора в прямокутнику, до якої зводиться розв'язання повністю неоднорідної задачі із застосуванням декомпозиційного підходу.

Розглядається крайова задача в прямокутнику $(2a \times 2b)$ з границею $\tilde{\Gamma}$. Шляхом лінійного перетворення розмірна область зводиться до безрозмірного квадрата Ω з границею Γ . Крайова задача описується диференціальним рівнянням

$$Aw \equiv \Delta^2 w(x, y) = f(x, y) \text{ в } \Omega \tag{28}$$

та однорідними крайовими умовами:

$$w(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{29}$$

де $w(x, y)$ – функція прогину в задачах вигину пластини або функція Ері в задачах про плоский напружений стан пластини;

$f(x, y) \equiv 0$ – у задачі плоского напруженого стану, а в задачі вигину пластини Кірхгофа $f(x, y) = a^4 \cdot q(x, y)/D$;

$q(x, y)$ – закон розподілу зовнішнього тиску по поверхні пластини;

D – циліндрична жорсткість пластини.

Точний розв'язок сформульованої крайової задачі досі не знайдено, тому в роботі отримані аналітико-чисельні розв'язки за допомогою методів Бубнова-Гальоркіна та Рітца, які в даному випадку призводять до однакової системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Шуканий розв'язок задачі виражається через відомі системи координатних функцій: С.А. Халілова, В.Б. Минтюка, А.Н. Крилова, косинус-біноми Філоненка-Бородича, які заздалегідь забезпечують виконання граничних умов. Аналіз властивостей отриманих розв'язків виконується за допомогою порівняння цих розв'язків між собою і зіставлення їх з існуючими наближеними розв'язками з робіт Даревського-Шаринова, Тимошенка, а також із даними розв'язання аналогічної задачі чисельно методом скінченних елементів.

Основним (критеріальним) розв'язком сформульованої задачі (28), (29) є розв'язок у подвійних рядах за означеними системами координатних функцій:

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (30)$$

де $X_m(x), Y_n(y)$ – відомі системи координатних функцій;
 A_{mn} – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Аналітико-чисельні розв'язки базової крайової задачі, отримані з використанням систем координатних функцій С.А. Халілова та В.Б. Минтюка, є більш стійкими, швидкозбіжними і мають вищу точність результатів (знаки в мантисі чисел не міняються зі збільшенням членів в апроксимуючих рядах) порівняно з усіма іншими розв'язками. Крім того, розв'язки з використанням цих двох систем координатних функцій надають ідентичні до найменшої розрядної цифри точкові значення прогинів і згинальних моментів у пластині.

Крім аналітико-чисельного розв'язку в подвійних рядах, в роботі надані та проаналізовані й інші наближені аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки:

1. наближений аналітичний розв'язок типу Нав'є:

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) H_m(x) H_n(y) dx dy}{\llbracket H_m H_n \rrbracket^2} H_m(x) H_n(y), \quad (31)$$

де $H_m(x), H_n(y)$ – координатні функції С. А. Халілова;

2. наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах типу Моріса Леві:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(y) H_i(x), \quad (32)$$

де $Y_i(y)$ – функція, що підлягає визначенню;

3. наближений аналітичний розв'язок, побудований на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису:

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^K \omega_k(x, y) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \omega_k(x, y) dx dy, \quad (33)$$

де $\omega_k(x, y)$ – ортонормований в енергетичній метриці оператора A базис;

4. наближений аналітичний розв'язок базової задачі, поданий через власні функції бігармонічного оператора:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f(x, y), \varphi_n)}{\mu_n} \varphi_n(x, y), \quad (34)$$

де $\varphi_n(x, y)$ – власні функції,

μ_n – власні значення оператора A крайової задачі.

У четвертому розділі «Аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних просторових систем» застосування декомпозиційного та системного підходів продемонстровано на прикладі розрахунку ділянки панелі крила літака.

Пропонується алгоритм застосування декомпозиційного підходу з використанням МІКУ, МСКЕ і МР для розв'язання задачі багатострингової панелі (рис. 2), яка перебуває під дією зовнішнього довільного тиску. Оскільки панель виділена з крила, то по її контуру, на кожній ділянці обшивки,

встановлюються неоднорідні крайові умови через переміщення і кути повороту, що відповідають функціям $\bar{E}$, $\bar{Y}$, $\bar{\tilde{Y}}$ в умовах (2).

Функції компонент вектора переміщень (3) кожної пластини, визначені методом редукції, враховують вплив як зовнішнього навантаження в області пластин, так і крайових умов, встановлених на контурах пластин. Неоднорідні умови на лініях сполучення пластин з ребрами і на границях панелі описуються рядами Фур'є з невідомими параметрами, які увійдуть до коригувальної функції u_q . Невідомі в цих рядах визначаються зі статичних та кінематичних рівнянь в місцях з'єднання елементів між собою і з рештою конструкції.

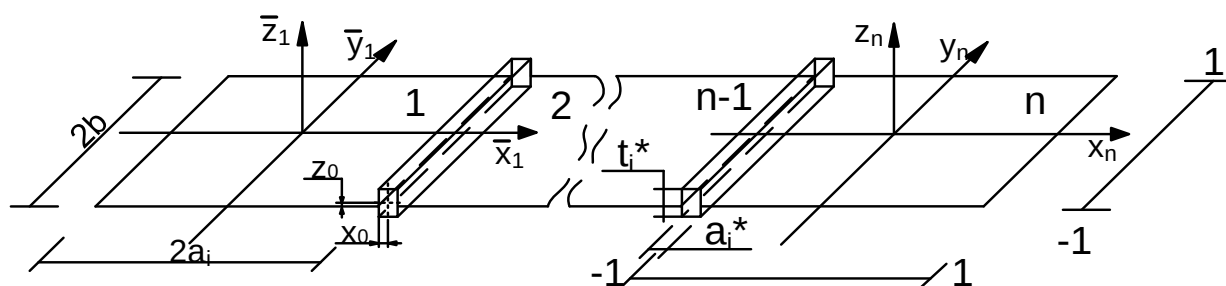


Рисунок 2 – Стрингерна панель, ребра якої розташовані з ексцентриситетом

Розв'язання задачі для багатострингової панелі є громіздким, тому реалізація декомпозиційного підходу виконується на прикладі задачі вигину пластини з метою демонстрації продовження неоднорідних умов (f_i , φ_i) з границі в область. За цим підходом початкова пластина може бути зображена у вигляді двох частин (рис. 3): білого кольору, для якої уточнення не проводиться, та сірого кольору, де здійснюється уточнене розв'язання аналітико-чисельним методом.

Окрім реалізації декомпозиційного підходу, здійснено спробу поєднання МІКУ у формі МР з МСЕ. Розв'язки, отримані за МІКУ і МР, мають швидшу збіжність та вищу точність у відкритих областях блок-елементів порівняно з МСЕ. З'ясовано, що застосування МІКУ і МР сприяють покращенню стійкості, збіжності та точності розв'язків, отриманих менш точними методами, а МСЕ можливо ефективно застосувати для ідентифікації крайових умов.

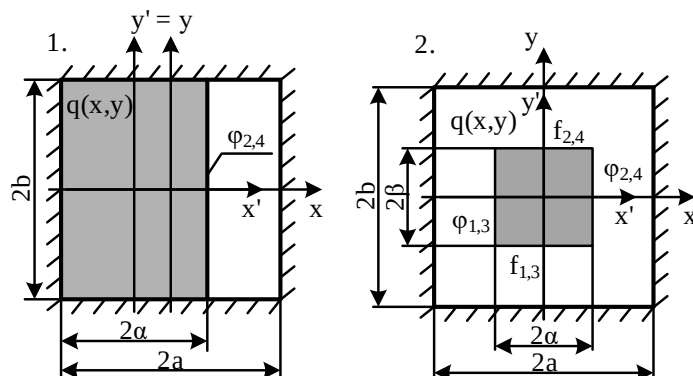


Рисунок 3 – Схеми повністю неоднорідних крайових задач для блок-елементів, виділених з початкової системи, що перебуває під дією тиску $q(x,y)$

Друга частина розділу присвячена розгляду результатів, отриманих при застосуванні системного підходу до аналізу багатострингерних панелей. Для сформульованої в другому розділі задачі для ділянки стрингерної панелі (рис. 1) було досліджено стійкість, швидкість збіжності та точність аналітико-чисельних розв'язків, отриманих для трьох розрахункових схем: комбінація трьох пластин (модель 1); поєднання двох пластин і балки (модель 2), поєднання однієї пластини і балки (модель 3). Для всіх моделей проводилась оцінка збіжності та точності результатів у порівнянні з МСЕ-розв'язками. Встановлено, що аналітичні розв'язки, наприклад за моделлю 1 (рис. 4), мають експоненціальну швидкість збіжності, що є їх перевагою.

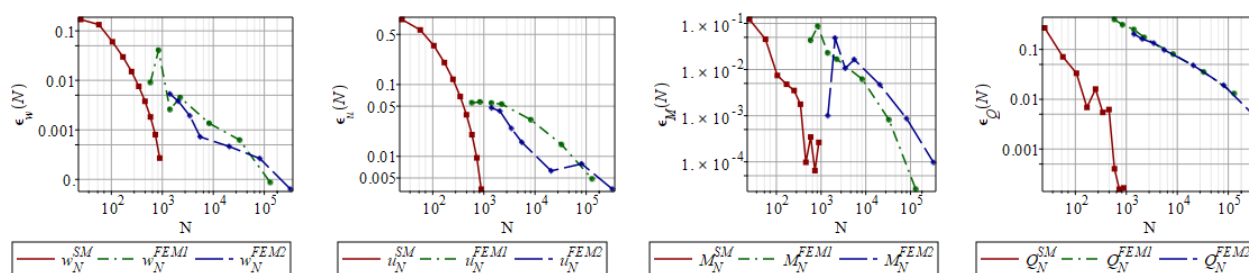


Рисунок 4 – Збіжність компонент напружено-деформованого стану, обчислених аналітичним методом (SM), МСЕ з використанням елементів 1^{ого} (FEM1) і 2^{ого} (FEM2) порядків

Коли ребриста панель подається єдиним конструктивним елементом (модель 3), розв'язок отримується аналогічно до розв'язку базової задачі в двовимірній області. Ребра враховуються як зосереджені елементи – дельта-функції, тобто математичних проблем у такому формулюванні не виникає. При аналізі панелі, яка складається з набору двовимірних (модель 1) або одновимірних і двовимірних елементів (модель 2), виникає проблема узгодження функцій різного класу просторів (сполучення мембранних і згинальних функцій переміщень). Наведено два підходи до вирішення цього питання. У першому підході функція мембранних переміщень задається, як і функція прогину, і зв'язується із заданою на границі функцією тільки за переміщеннями. У другому підході степінь апроксимувального полінома функції мембранних переміщень на границі піднімається до степеня заданої тут функції із наступним перерахунком коефіцієнтів.

Також розв'язані повністю неоднорідні крайові задачі для інших ділянок стрингерних панелей, різних за складом елементів та напружено-деформованим станом (рис. 5).

Для першої панелі (рис. 5, а) були отримані два розв'язки за моделями: система з п'яти елементів – дві пластини і три балки (позн. 1 на рис. 5, а) та єдиний конструктивний елемент – одна пластина і дві балки (позн. 2 на рис. 5, а). Для другої панелі (рис. 5, б) розв'язки будувались для таких моделей: одна суцільна пластина з трьома балками (позн. 1 на рис. 5, б), конструкція з чотирьох пластин і трьох балок (позн. 2 на рис. 5, б), конструкція з тринадцяти пластин.

Для першої стрингерної панелі у розв'язку присутні тільки мембранні переміщення. При аналізі другої панелі, змодельованої тринадцятьма пластинами, виникають нормальні і мембранні переміщення, а за іншими розрахунковими схемами залишаються тільки функції вигину та кута обертання.

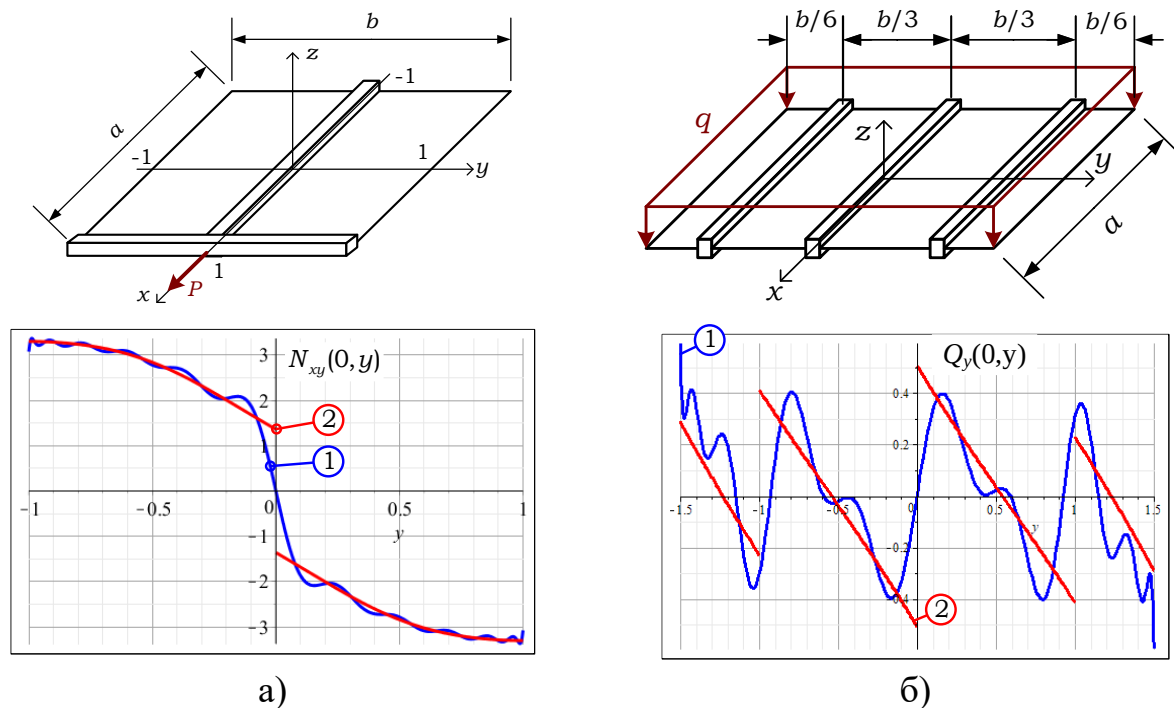


Рисунок 5 – Дослідження точності результатів (ефект Гіббса) для різних стрингерних панелей

Розв'язки для кожної моделі порівнювались між собою та з чисельним розв'язком за МСЕ з точки зору точності та збіжності. У цих задачах аналітичні розв'язки так само мають перевагу в швидкості збіжності та високу точність результатів (переміщень, зусиль, моментів, потенціальної енергії). У межах однієї панелі порівнювались розрахункові схеми щодо здатності апроксимувати стрибки у зусиллях на лініях балок (ефект Гіббса). Порівняння (рис. 5) підтвердило, що схеми з більшою дискретизацією є точнішими.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню важливої науково-технічної проблеми удосконалення методів розв'язання крайових задач теорії пружності для просторових складних пластинчатих конструкцій.

1. Тонкостінні просторові системи, такі як балки, пластини та оболонки, знаходять широке застосування в авіації, ракетній техніці, суднобудуванні та будівництві. Однією з ключових проблем є забезпечення міцності при мінімальній масі конструкції, що вимагає високоточних методів розрахунку напружено-деформованого стану. У дисертації розглядаються аналітико-чисельні розв'язки цієї задачі.

2. Проведено критичний аналіз сучасних методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, який показав, що аналітичні методи, хоч і забезпечують високу точність, обмежені складністю реальних конструкцій. МСЕ є найпоширенішим чисельним методом, але має труднощі з точністю та збіжністю.

3. У дисертації обґрунтовано вибір методів, що поєднують переваги обох підходів, та здійснено спроби їх розвитку і застосування до аналізу напружено-деформованого стану тонкостінної просторової конструкції.

4. У роботі розглянуто два підходи до розв'язання задач складних тонкостінних систем: декомпозиційний та системний. Декомпозиційний підхід дозволяє розбити повністю неоднорідну задачу на окремі напіводнорідні задачі для конструктивних елементів, таких як пластини. Розв'язки напіводнорідних задач для окремих елементів у подальшому з'єднуються в систему через виконання граничних та контактних умов. Системний підхід, у свою чергу, розглядає систему як єдиний об'єкт, для якого розв'язки знаходяться за допомогою універсальних функцій, які враховують конструктивну неоднорідність геометричної форми та автоматично виконують граничні та контактні умови.

5. Основну увагу приділено розв'язанню базової напіводнорідної крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику з однорідними головними крайовими умовами. Було запропоновано кілька методів її розв'язання, зокрема в подвійних і одинарних рядах, за системами ортонормованих функцій, а також через власні функції бігармонічного оператора. Досліджено точність результатів та збіжність розв'язків за цими методами. Показано, що найкращими з точки зору апроксимативних властивостей та обчислювальної ефективності для побудови аналітико-чисельних розв'язків є функції С. А. Халілова та В. Б. Минтюка. Запропоновані підходи були застосовані для розв'язання задач з іншими крайовими умовами.

6. Впроваджений у роботі метод ідентифікації крайових умов у формі МР дозволив побудувати високоточні, стійкі, швидкозбіжні аналітико-чисельні розв'язки задач деформування пластинчастих конструкцій. У роботі показано розширені можливості МКУ, які пов'язані з аналізом напружено-деформованого стану тонкостінної просторової конструкції. На прикладі розв'язання задачі про вигин прямокутної пластини з неоднорідними крайовими умовами було показано, що цей метод можна синтезувати з МСЕ. У перспективі синтез цих методів може стати основою для створення спеціальних інженерних програм для обчислення напружено-деформованого стану багатострингерних панелей.

7. Розроблено системний підхід до розв'язання крайових задач для стрингерних панелей, який використовує універсальні системи координатних функцій для отримання точних розв'язків для всієї сукупності елементів. Імплементация цього методу в моделях панелей підтвердила перевагу аналітичних методів над чисельними в точності та швидкості збіжності. Було

вирішено проблему узгодження функцій мембранних переміщень з функцією прогину двома способами. Запропоновані аналітичні розв'язки є унікальними та новаторськими.

8. Таким чином, результати дисертаційної роботи водночас поповнюють знання з механіки, так і мають значний потенціал для подальшого використання в проектуванні та оптимізації тонкостінних конструкцій, що робить їх цінними для інженерних галузей.

9. Перспективи подальших досліджень включають розширення застосування розроблених методів до нелінійних моделей, а також удосконалення базисних систем функцій для точного відтворення як головних, так і природних крайових умов. Додатково, інтеграція МІКУ і МСКЕ у спеціалізоване програмне забезпечення сприятиме їх ефективному практичному застосуванню. Розроблені підходи також можуть бути адаптовані до аналізу різних моделей матеріалів, а також до розв'язання задач стійкості, вільних коливань і складних видів деформацій.

10. Результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі кафедри міцності літальних апаратів Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут» та впроваджені на АТ «Антонов», про що отримані відповідні акти (2017, 2019).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України:

1. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження аналітико-числового вирішення задачі про вигин жорстко защемленої прямокутної пластини // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології: зб. наук. пр. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2011. Вип. 49. С. 81–94.

2. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження наближеного аналітичного розв'язання бігармонічної проблеми у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2013. № 2 (99). С. 40–49.

3. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Наближене аналітичне розв'язання бігармонічної проблеми в прямокутнику при однорідних головних крайових умовах на двох протилежних сторонах і довільних – на двох інших // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2013. № 5 (102). С. 40–49.

4. Ткаченко Д. А. Ортонормований в енергетичному просторі бігармонічного оператора базис у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах по границі // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 3 (110). С. 41–51.

5. Власний спектр бігармонічного оператора у прямокутнику при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко //

Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 5 (112). С. 70–78.

6. Узагальнена задача на власні значення в прямокутнику з бігармонічним оператором при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 6 (113). С. 36–47.

7. Аналітико-чисельне розв'язання основної крайової задачі про спектр у прямокутнику для складеного оператора з бігармонічним у головній частині / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2015. № 1 (118). С. 60–67.

8. Функція Гріна основної крайової задачі для бігармонічного оператора у прямокутнику / С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2015. № 6 (123). С. 12–22.

9. Задача Діріхле для трансверсально-ізотропної прямокутної пластини / С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2017. № 2 (137). С. 4–21.

10. Синтез методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів. Прямокутні пластини / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2017. № 4 (139). С. 4–26.

11. Числове дослідження базисних систем при розв'язуванні аналітико-числовими методами крайових задач на відрізку / С. А. Халілов, Д. А. Ткаченко, Н. В. Бондарева, В. Б. Минтюк // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2019. № 6 (158). С. 20–32. DOI: 10.32620/aktt.2019.6.04.

Статті в наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію:

12. Spectral Methods Application in Problems of the Thin-Walled Structures Deformation / D. Tkachenko, Y. Tsegelnyk, S. Myntiuk, V. Myntiuk // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2022. № 8 (2). P. 641–654. DOI: 10.22055/JACM.2021.38346.3207.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

13. Ткаченко Д. А. Власний спектр і узагальнені задачі на власні значення з бігармонічним оператором у прямокутнику за головних крайових умов // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2014 : тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2014. Т. 1. С. 35.

14. Основна крайова задача теорії відкритих оболонок / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 15–16 квіт. 2015 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. С. 41–44.

15. Ткаченко Д. А. Континуальні аналоги методів сил і переміщень будівельної механіки в плоскій задачі теорії пружності та задачі вигину пластин

// Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2015 : тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. Т. 1. С. 12–13.

16. Ткаченко Д. А. Сучасні методи аналізу конструкцій літальних апаратів. Статика, коливання, стійкість // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 21–21 квіт. 2017 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. С. 72–73.

17. Ткаченко Д. А. Аналіз класичної та некласичної моделей ексцентрично перехресно підкріплених пластин методом ідентифікації крайових умов із залученням методу скінченних елементів // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2017 : зб. матеріалів Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. Т. 1. С. 10–12.

18. Халілов С. А., Ткаченко Д. А. Математичні проблеми в задачах із двовимірним бігармонійним оператором // Сучасні проблеми ракетно-космічної техніки і технології : тез. доп. XVI Наук.-техн. конф. ф-ту ракетно-космічної техніки, 10–12 квіт. 2019 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2019. С. 13.

АНОТАЦІЯ

Ткаченко Денис Анатолійович. Аналітико-чисельні методи аналізу деформування складних пластинчатих систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Міністерство освіти і науки України Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»; Національна академія наук України Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного; Харків; 2025.

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітичних і аналітико-чисельних методів для розв'язання крайових задач, застосовуваних до аналізу напружено-деформованого стану тонкостінних конструкцій. Актуальність теми визначається широким використанням таких конструкцій у галузях авіації, космічної техніки, кораблебудування та будівництва, де забезпечення високої міцності при збереженні мінімальної маси конструкції є критично важливим. Отримання та використання найбільш точних розв'язків сприяє виконанню цієї антагоністичної вимоги. Отже, попри широке використання методу скінченних елементів в інженерній практиці, розробка аналітичних, наближених аналітичних та аналітико-числових розв'язків є актуальною тенденцією як у науковій, так і в інженерній сферах.

У дисертації наводиться два підходи до аналізу просторової тонкостінної конструкції – декомпозиційний та системний. Перший підхід удосконалює застосування методу ідентифікації крайових умов і залучає до побудови розв'язку метод сполучення конструктивних елементів та метод редукції. За цим підходом повністю неоднорідна крайова задача розв'язується на основі

простіших напіводнорідних задач для окремих конструктивних елементів, як-от пластини або пластини з балками. Тому повний розв'язок задачі записується через суму спеціального часткового розв'язку, функцій продовження крайових умов з границі в область та коригувального розв'язку. На кінцевому етапі всі невідомі параметри в розв'язку знаходяться при відтворенні умов взаємодії між елементами та неоднорідними умовами на зовнішній границі системи.

Системний підхід, на відміну від декомпозиційного, пропонує будувати розв'язок для всієї системи елементів сукупно, без розбиття на підзадачі. Такий розв'язок визначається за допомогою універсальних функцій, що виконують як крайові, так і контактні умови між елементами. Невідомі параметри в записі універсальних функцій знаходяться за процедурою Рітца після мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії всієї системи. У роботі запропоновано алгоритм добору універсальних функцій, що забезпечують стійкість розв'язків і швидко збіжність та високу точність результатів в порівнянні з чисельними методами. Цей підхід реалізовано на прикладі декількох моделей трьох різних стрингерних панелей.

При аналізі панелі, яка складається з набору двовимірних або одновимірних і двовимірних елементів, виникає проблема узгодження функцій різного класу просторів (сполучення мембранних і згинальних функцій переміщень). Наведено два підходи до вирішення цього питання. У першому підході функція мембранних переміщень задається, як і функція прогину, і зв'язується із заданою на границі функцією тільки за переміщеннями. У другому підході степінь апроксимувального полінома функції мембранних переміщень на границі піднімається до степеня заданої тут функції із наступним перерахунком коефіцієнтів.

Побудова розв'язку для просторової тонкостінної конструкції приводить до необхідності розв'язувати напіводнорідну крайову задачу з однорідними головними крайовими умовами та неоднорідною правою частиною диференціального рівняння. На прикладі розв'язання цієї задачі в подвійних рядах було проаналізовано, які системи координатних функцій мають найкращі апроксимативні властивості. Після проведення розрахунків отримано висновок, що найбільш якісними є сімейства поліноміальних функцій С.А. Халілова та В.Б. Минтюка, які є зручними для програмування. Також у роботі наведено інші типи розв'язків, які можуть бути застосовані до цієї задачі: наближений аналітичний розв'язок типу Нав'є, наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах типу Моріса Леві, наближений аналітичний розв'язок, побудований на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису, наближений аналітичний розв'язок базової задачі, поданий через власні функції бігармонічного оператора.

Практична цінність дисертаційної роботи полягає у значному підвищенні точності та ефективності обчислень при моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних просторових конструкцій. Запропоновані підходи та методи дозволяють отримувати високоточні розв'язки для конструкцій з довільними крайовими умовами, а також для конструкцій із

нерегулярною геометрією. Це робить дослідження цінним для інженерних галузей, орієнтованих на розрахунок і проектування міцності та стійкості конструкцій, таких як авіація та космонавтика.

Отримані результати підтверджені чисельними експериментами, а також впроваджені на підприємствах. Основні наукові результати опубліковані у фахових виданнях та представлені на наукових конференціях.

Ключові слова: система прямокутних пластин; панель, підкріплена балками; аналітико-числовий розв'язок; неоднорідна крайова задача; бігармонічний оператор; ідентифікація крайових умов; стійкість, збіжність і точність обчислювальних процедур.

ABSTRACT

Tkachenko Denys Anatoliiovych. Analytical and numerical methods of deformation analysis of complex plate systems. – Qualifying scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solid Body. – National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute» of the Ministry of Education and Science of Ukraine; A.M. Podgorny Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine; Kharkiv, 2025.

This dissertation is devoted to the development of analytical and analytical-numerical methods for solving boundary value problems of the stress-strain state of thin-walled structures widely used in aviation and space technology. The relevance of the work is due to the need for high-precision calculations of structural strength while maintaining minimum weight. The thesis considers two approaches: a decomposition approach, which uses the method of identification of boundary conditions, the method of combining of structural elements, and the method of reduction to solve the problem through a combination of semihomogeneous boundary value problems, and a systematic approach, which proposes to build a solution for the entire system of elements simultaneously using universal functions that satisfy boundary and contact conditions. Two methods are proposed for matching functions of different classes (membrane and bending) when connecting structural elements. High-precision solutions of the semihomogeneous boundary value problem in double rows are constructed using S. A. Khalilov and V. B. Mintyuk polynomial functions as optimal in terms of approximation properties. In addition, other approximate analytical solutions to problems for which exact solutions are not available are presented. The practical value of the work is a significant increase in the accuracy and efficiency of computations of thin-walled structures with arbitrary boundary conditions.

Key words: system of rectangular plates; beam-reinforced panel; analytical-numerical solution; nonhomogeneous boundary-value problem; biharmonic operator; identification of boundary conditions; stability, convergence, and accuracy of computational procedures.