НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ЕНЕРГЕТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ
ім. А.М.ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШМАТКО ТЕТЯНА ВАЛЕНТИНІВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРОБКА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ТА ПЛАСТИН З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

01.05.02– математичне моделювання та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Т.В.Шматко

Науковий консультант: Міхлін Юрій Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Шматко Тетяна Валентинівна. **Математичне моделювання та розробка чисельно-аналітичних методів дослідження функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин з використанням теорії R-функцій.** - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2025.

Дисертаційна робота присвячена розв’язанню важливої науково-технічної проблеми, яка пов’язана з розробкою та удосконаленням ефективних чисельно-аналітичних методів дослідження статичної та динамічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), на основі математичних моделей, які враховують особливості процесів їх деформування: нелінійності, наявності пористості, пружної основи, розподілення об’ємних часток складових ФГМ, різної форми плану та виду умов закріплення.

За оглядом робіт, які висвітлюють методи дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок, можна зробити висновок, що ФГМ пластини та оболонки зі складною геометричною формою при наявності вирізів, отворів, пористості, пружної основи, а головне, при нелінійному деформуванні об’єктів, вивчені недостатньо. Тому науково-технічна проблема розробки ефективних чисельно-аналітичних методів дослідження статичної та динамічної поведінки ФГМ елементів конструкцій, які моделюються пластинами та оболонками, є актуальною, оскільки її розв’язання дозволяє враховувати особливості процесів лінійного та нелінійного деформування об’єктів, що є затребуваним у проектуванні конструкцій та промисловому виробництві.

Об’єкт дослідження – статична та динамічна поведінка елементів тонкостінних конструкцій, виготовлених із функціонально-градієнтних

матеріалів.

Предмет дослідження – математичне та комп'ютерне моделювання і методи розв'язання лінійних та геометрично нелінійних задач коливання, стійкості та згину ФГМ пластин та пологих оболонок складної геометричної форми.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються: варіаційний метод Рітца, проекційний метод Бубнова-Гальоркіна, метод Рунге-Кутта. Для побудови системи координатних функцій використано теорію R-функцій.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що в роботі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід для дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань і стійкості функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин складної форми. Основні одержані результати виконаної роботи:

– вперше за допомогою теорії R-функцій розроблено новий підхід для підвищення ефективності існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які виготовлені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів. Використання теорії R-функцій дозволило побудувати в аналітичному вигляді розв'язки задач статики та динаміки ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної геометрії плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження;

– вперше для ФГМ пластин та оболонок зі складною формою плану розроблено метод розв'язання задач про геометрично нелінійні коливання. Суть цього методу полягає в представленні розв'язку нелінійної задачі у вигляді суми двох доданків, один із яких будується на базі власних функцій, одержаних в результаті розв'язання лінійної задачі про коливання ФГМ оболонки, а другий містить розв'язки допоміжної задачі, яка моделюється неоднорідною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними;

– побудовані математичні моделі задачі про геометрично нелінійні коливання у переміщеннях з метою комп'ютерної реалізації запропонованого методу;

– вперше виконані варіаційні постановки допоміжних задач та побудовані відповідні функціонали в рамках трьох теорій: класичної теорії, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді);

– вперше для ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану запропоновано метод зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержано в явному вигляді аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів цього рівняння;

– побудовано алгоритм знаходження відношення частоти нелінійних коливань до лінійних, який базується на використанні методу Рунге-Кутта;

– вперше для ФГМ оболонок та пластин, які знаходяться під дією стискаючих рівномірних і нерівномірних навантажень, розроблено підхід до розв'язання задач про коливання та стійкість;

– отримано аналітичні вирази для елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ, у рамках трьох теорій пологих оболонок (класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та уточненої теорії третього порядку). Такі формули одержані як для одношарових, так і для сендвіч оболонок і пластин з урахуванням степеневого та сигмоїдального законів розподілення об'ємних часток складових та пористості;

– дістали подальшого розвитку методи теорії R-функцій для побудови структурних формул для ФГМ оболонок та пластин, на базі яких будуються системи координатних функцій, що задовольняють крайовим умовам, в тому числі мішаним;

– розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL на вхідній мові системи. Відповідні програми реалізують алгоритми розв'язання задач у рамках як класичної теорії, так і у рамках уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та третього порядків. Програмне забезпечення протестовано на кожному класі задач та використано для розв'язання серії нових задач, в тому числі нелінійних.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблений ефективний метод, а також програмне забезпечення для системи POLE-RL, яке здійснює його чисельну реалізацію, дозволили виконати багатоваріантні чисельні експерименти та дослідити лінійні та геометрично нелінійні коливання, стійкість та згин одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок/пластин складної геометричної форми.

Велика кількість одержаних в роботі результатів, які представлені у вигляді графіків та таблиць, може бути використана науковцями та інженерами, які застосовують інші методи та пакети, в тому числі МСЕ та відомі пакети ANSYS, ABACUS, NASTRAN з метою порівняння та перевірки вірогідності, особливо це стосується оболонок та пластин з отворами та вирізами, які жорстко або шарнірно закріплені.

Наукові результати роботи використано в навчальному процесі у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут», при виконанні держбюджетних тем та виконанні науково-дослідної роботи «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій» за проектом Програми НАТО Peace and Security (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA G6176 «Наука заради миру та безпеки».

Авторський внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: розробка методу та виконання комп'ютерної реалізації розв'язку задач про лінійні та нелінійні коливання ФГМ пластин та пологих оболонок складної форми плану; побудова математичних моделей задачі про геометрично нелінійні коливання у переміщеннях; виконання варіаційної постановки допоміжних задач та побудова відповідних функціоналів у рамках трьох теорій: класичної теорії, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді); реалізація методу зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержання в явному вигляді аналітичних виразів для обчислення коефіцієнтів цього рівняння для ФГМ пологих оболонок та пластин; використання теорії R-функцій для розв'язку задач в аналітичному вигляді для ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної форми плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи; розробка нового підходу до розв'язання задач про коливання та стійкість ФГМ оболонок та пластин складної форми плану, які знаходяться під дією стискаючих рівномірних і нерівномірних навантажень.

Основний зміст дисертації відображено у 74 наукових публікаціях, з них: 51 стаття, з яких 30 статей включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection, при цьому 29 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 16 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квартилів, 2 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квартилів); 6 статей – в збірниках наукових праць, що входить до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 15 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 8 статей опубліковано в різних зарубіжних видавництвах); 22 публікації – тези доповідей на конференціях (з яких 5 робіт видано в зарубіжних видавництвах); 1 монографія у співавторстві.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові результати та положення дисертаційної роботи доповідались, обговорювались та були схвалені на 43 українських та міжнародних наукових конференціях, семінарах і конгресах: International Conferences on Nonlinear Dynamics "Нелінійна динаміка" ND-KhPI 2004, 2007, 2010, 2013, 2016 (Kharkiv, Ukraine); 9th, 10th, 11th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conferences ENOC 2017, 2020, 2024 (Budapest, Hungary; Lyon, France; Delft, the Netherlands); International conferences Dynamical System Modeling and Stability Investigation DSMSI 2009, 2011, 2013 (Kyiv, Ukraine); International Conferences on Dynamical System. Theory and Applications DSTA 2007, 2009, 2011, 2015, 2017, 2019, 2021 (Lodz, Poland); International Nonlinear Dynamics Conferences NODYCON 2019, 2021, 2023 (Rome, Italy);

International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering CAMPE-2021 (Kharkiv, Ukraine); IV International Conference on Dynamics, Control, and Applications to Applied Engineering and Life Science (2023, Brazil); 19-th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management CM2023 (2023, Northampton, UK); 19-th European Mechanics of Materials Conferences EMMC19 (2024, Madrid, Spain) та інших.

Структура й обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, вступу, дев’яти розділів, висновків, списку використаних джерел (374 найменування на 44 сторінках) та 3 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 414 сторінок; робота містить 130 рисунків і 74 таблиці. Основний текст дисертації складає 330 сторінок та додатки на 29 сторінках.

У вступі дисертації обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, об’єкт та предмет дослідження, розкрито наукову новизну, практичну значущість одержаних результатів, визначено особистий внесок автора, наведено дані стосовно апробації та впровадження в практику результатів дослідження, надано кількість публікацій за темою роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи виконано огляд літератури, присвяченій дослідженню лінійних та геометрично нелінійних коливань, стійкості та згину ФГМ пластин та пологих оболонок. Узагальнюючи огляд літератури в рамках аналітичних або чисельно-аналітичних методів розрахунку, зроблено висновок, що найбільш вивченими є лінійні задачі для пластин та пологих оболонок з прямокутною формою плану та достатньо простими граничними умовами. Недостатньо вивченими залишаються задачі для ФГМ пластин та пологих оболонок зі складною геометричною формою плану та різними видами граничних умов, в тому числі мішаних. Особливо це стосується ФГМ пластин та пологих оболонок з вирізами та отворами, які жорстко або шарнірно закріплені; пористих сендвіч ФГМ пологих оболонок, з урахуванням пружної основи; навантажених нерівномірно в серединній площині, що викликає неоднорідний докритичний стан, та оболонок змінної товщини. Подальшої розробки потребують методи дослідження перелічених проблем з урахуванням геометричної нелінійності.

У другому розділі представлені основні підходи до математичного моделювання механічних властивостей ФГМ. Обрано клас ФГ матеріалів, які складаються із двох типів матеріалу, а саме, металу та кераміки. Наведено характеристику найпоширенішим теоріям гомогенізації, які базуються на наступних законах: степеневий закон Фойгта, експоненціальний, сигмоїдальний та закон Морі-Танака. В роботі застосовано найбільш ефективні для комп'ютерного моделювання закони гомогенізації, а саме, степеневий та сигмоїдальний закони. В цьому ж розділі представлені рівняння руху з урахуванням геометрично нелінійного деформування в рамках трьох теорій: класичної (CST), уточненої теорії першого порядку (FSDT) та уточненої теорії третього порядку (TSDT). Наведені основні співвідношення для деформацій, зусиль в серединній площині, моментів та перерізуючих сил.

У третьому розділі пропонується новий підхід до розв'язання задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин складної геометричної форми та різними умовами закріплення, який базується на використанні теорії R–функцій та варіаційних методах. Задачі про власні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин розв'язано методом Рітца; система координатних функцій будується за допомогою теорії R-функцій.

Алгоритм розв'язання задач про геометрично нелінійні коливання зводиться до виконання наступних кроків: розв'язання проблеми лінійних вільних коливань ФГМ пологих оболонок та пластин; побудова нелінійних рівнянь руху у переміщеннях. Побудова варіаційних постановок для розв'язання послідовності допоміжних задач з метою знаходження допоміжних функцій, що необхідні для представлення нелінійного розв'язку; зведення нелінійної системи диференціальних рівнянь руху пологих ФГМ оболонок з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння; розв'язання отриманого нелінійного звичайного диференціального рівняння методом Рунге–Кутта.

Запропонований метод реалізовано в рамках трьох теорій: класичної теорії, теорії FSDT та HSDT теорії.

У четвертому розділі розроблений підхід застосовано для дослідження лінійних та нелінійних коливань одношарових ФГМ пологих оболонок та пластин. Отримано аналітичні вирази для елементів матриць, що використовуються для обчислення зусиль, моментів та перерізуючих сил з урахуванням ефективних властивостей ФГМ в рамках трьох теорій пологих оболонок. За допомогою створеного програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL виконане широке тестування розробленого методу на прикладах циліндричних, сферичних та параболоїдно-гіперболічних пологих ФГМ оболонок з прямокутною та еліптичною формою плану. Порівняно результати для різних типів граничних умов, різних сумішей ФГМ, товщин та значень кривини. Аналіз порівняння показав добрий збіг результатів, які отримані за допомогою запропонованого підходу, з результатами, наведеними у відомих публікаціях. Розв’язані нові задачі про лінійні та геометрично нелінійні коливання ФГМ одношарових пологих оболонок різної кривини зі складною формою плану та різними типами крайових умов в рамках різних теорій.

У п’ятому розділі розроблений підхід поширено для дослідження ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин. Наведено основні положення для сендвіч структур з урахуванням різних схем розташування ФГМ та зміни об’ємної частки кераміки по товщині. Одержано аналітичні вирази для обчислення зусиль, моментів та перерізуючих сил з урахуванням ефективних властивостей ФГМ для кожної схеми ламінування в рамках трьох теорій (CST, FSDT, HSDT). Метод R-функцій (RFM) розвинено для цього класу задач та запропоновані відповідні структури розв’язків до заданих крайових умов, на базі яких будуються системи координатних функцій для методу Рітца. Досліджено вплив відношення товщин шарів, значення градієнтного індексу на частоти лінійних та нелінійних коливань ФГМ сендвіч оболонок різної кривини з вирізами та отворами складної форми. Одержано амплітудно-частотні характеристики таких оболонок з різною формою плану та різними типами крайових умов у рамках трьох теорій.

У шостому розділі запропонований підхід було розвинено для дослідження ФГМ сендвіч пористих оболонок та пластин. Було враховано дві моделі, які описують пористість ФГМ. Побудовані варіаційні постановки задач з урахуванням пористості. Отримано аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, які враховують ефективні властивості пористих ФГМ об’єктів для двох видів розподілення пористості (рівномірного та нерівномірного) та двох законів розподілення об’ємної частки кераміки (степеневого та сигмоїдального). Розв’язані задачі про нелінійні коливання пористих одношарових та сендвіч ФГМ оболонок зі складною геометричною формою. Побудовані скелетні криві для різних значень геометричних та фізичних параметрів.

У сьомому розділі розроблений метод застосовано до ФГМ пластин та пологих оболонок, що спираються на пружну основу. В якості моделі для пружної основи обрано двопараметричну модель Пастернака. Сформульовано варіаційну постановку задачі. Були розглянуті різні значення параметрів пружної основи, різні типи ФГМ, відношення товщини шарів. Отримано нові результати в задачах дослідження лінійних та нелінійних коливань ФГМ оболонок зі складною геометричною формою, що спираються на пружну основу. Приділено особливої уваги дослідженню пористої пластини змінної товщини, яка знаходиться на пружній основі. Побудовано комп'ютерну модель для задач про визначення напружено-деформованого стану (НДС) функціонально-градієнтних сендвіч пластин та пологих оболонок.

У восьмому розділі запропоновано метод дослідження стійкості та коливань ФГМ сендвіч пологих оболонок та пластин, навантажених у серединній площині. Розроблений метод враховує розрахунок докритичного стану структури, при умові рівномірного та нерівномірного навантаження. Для реалізації розробленого підходу виведено відповідні функціонали в рамках класичної та уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку. Запропонований підхід протестовано на великій кількості задач стійкості пологих оболонок і пластин з прямокутною формою плану, з різними крайовими умовами, для різних типів ФГМ та різних значень кривини оболонок. Особливої уваги надано дослідженню ФГМ оболонок і пластин з вирізами та отворами різної геометричної форми та способів їх закріплення. Розглянута задача стійкості ФГМ сендвіч пластини на пружній основі, яка навантажена нерівномірно стискаючим зусиллям. Зміна стискаючого навантаження відбувається за різними законами: рівномірним, параболічним, лінійним та трапецієвидним.

У дев'ятому розділі представлено результати, які були одержані в процесі проведення експерименту в рамках міжнародного співробітництва з науковою групою під керівництвом професора F. Pellicano в Департаменті Інженерії (Engineering Department «Enzo Ferrari») в Університеті Модени та Реджо-Емілії, Італія (University of Modena and Reggio-Emilia, Italy). Експеримент було виконано для низки пластин різної геометричної форми плану та різними граничними умовами з метою дослідження їх динамічної поведінки. Для проведення експерименту пластини було виготовлено з ПЕТ-матеріалу за допомогою 3D-друку. Після порівняння результатів, одержаних експериментально та за допомогою методів скінчених елементів (використовувався пакет NASTRAN) і RFM, було встановлено, що таке порівняння є дуже важливим для перевірки експериментальних даних, отриманих за допомогою 3D-принтера. Значимість паралельного дослідження полягає в тому, що воно може підвищити точність та надійність динамічного аналізу 3D-друкованих конструкцій, тим самим сприяючи створенню безпечніших та ефективніших інженерних споруд.

У **висновках** наведено основні результати дисертаційної роботи при розв'язанні поставлених завдань.

Ключові слова: метод R-функцій, варіаційні методи, функціонально-градієнтні матеріали, математичне моделювання ФГМ об'єктів, сендвіч пологі оболонки та пластини, лінійні та геометрично нелінійні коливання, стійкість, пористість, пружна основа, зміна товщина.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Mikhlin Y.V., Shmatko T.V., Manucharyan G.V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82. Is. 31-32. P. 2733-2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082 *(квартиль Q1)*.

2. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufrienko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with complex form. *Mathematical Problems in Engineering*. 2006. Vol. 2006. P. 125–138 doi:10.1155/MPE/2006/26081 *(квартиль Q1)*.

3. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Timchenko G.N. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures*. 2010. Vol.93. P. 225-233 *(квартиль Q1)*.

4. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness. *Latin American Journal of Solid and Structures*. 2013. Vol. 10. P. 147-160 *(квартиль Q2).*

5. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2014. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol.3. P.305-308.

6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P.575–585 *(квартиль Q1)*.

7. Shmatko T., Kurpa L., Bhaskar A. Geometrical analysis of vibrations of functionally graded shell panels using the R-functions theory. *Proceeding of 24-th International Congress on Sound and Vibration, ICSV*. 2017. London, UK. ISBN: 978-1-5108-4585-5. P. 6298-6305.

8. Shmatko T.V., Bhaskar A. Using the R-functions theory for investigation of nonlinear vibrations of FGM shallow shells. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 4. P. 333-336 https://doi.org/10.1201/9781315166605.

9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. P. 1648-1668. DOI: 10.1590/1679-78253817 (*квартиль Q2)*.

10. Shmatko T., Bhaskar A. R-functions theory applied to investigation of nonlinear free vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93. P. 189–204. DOI:10.1007/s11071-017-3922-2 *(квартиль Q1).*

11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93, P. 133–147. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3930-2 *(квартиль Q1)*.

12. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 107. P. 161-169. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013 *(квартиль Q1).*

13. Mikhlin Y.V., Plaksiy K.Y., Shmatko T.V., Rudneva G.V. Normal modes of chaotic vibrations and transient normal modes in nonlinear systems. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials. Advanced Structured Materials* / eds. Andrianov I., Manevich A., Mikhlin Y., Gendelman O. Springer, Cham, 2019. Vol. 94. P.85-100. DOI: 10.1007/978-3-319-92234-8_6.

14. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 16, №1. DOI: 10.1590/1679-78254911 *(квартиль Q2)*.

15. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the R-functions theory and variational methods. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, № 3. P. 496–520. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2 *(квартиль Q4)*.

16. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. Is. 20. P. 4582-4593. https://doi.org/10.1177/0954406220936304 *(квартиль Q2)*.

17. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of functionally graded sandwich plates with complex forms. *New Trends in Nonlinear*

Dynamics / eds. Lacarbonara W., Balachandran B., Ma J., Tenreiro Machado J., Stepan G. Springer, Cham, 2020. Vol. 3. 66-77. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34724-6_8.

18. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions in free vibration analysis of FGM plates and shallow shells with temperature dependent properties. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 101. Is. 3. DOI: 10.1002/zamm.202000080 *(квартиль Q2)*.

19. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Nonlinear vibration of the three-layered FGM plates with variable thickness of layers and different boundary conditions. *Nonlinear Mechanics of Complex Structures, Advanced Structured Materials*. 2021. Vol. 157. P. 57-74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_4.

20. Zippo A., Iarriccio G., Pellicano F., Shmatko T. Vibrations of plates with complex shape: experimental modal analysis, finite element method, and R-functions method. *Shock and Vibration*. 2020. Vol. 2020. P. 1-23. https://doi.org/10.1155/2020/8882867 *(квартиль Q2)*.

21. Kurpa L., Shmatko T. Chapter 11 - Parametric vibrations of axially compressed functionally graded sandwich plates with a complex plan form. *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. Igor Andrianov, Simon Gluzman, Vladimir Mityushev. Academic Press, 2022. P. 213-232. https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00016-5.

22. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1895–1910. https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y *(квартиль Q2)*.

23. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G., Morachkovska I. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. Vol. 9. № 4. P. 1144-1155. doi: 10.22055/jacm.2023.43435.4082 (*квартиль Q1)*

24. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method and shell theory of the higher-order to study free vibration of functionally graded shallow shells. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / eds. Altenbach, H., et al. Springer, Cham, 2023. P. 188–197. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_19.

25. Zippo A., Shmatko T., Pellicano F., Kurpa L. Free vibration analysis of FGM plates and shallow shells by the R-functions method. *Proceedings of the*

International Conference on Condition Monitoring and Asset Management, 19th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management, September 2023. P. 1-5. https://doi.org/10.1784/cm2023.4d7.

26. Kurpa L., Shmatko T., Linnik A. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on an elastic foundation and subjected to a nonuniform loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 645–658. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10122-w *(квартиль Q1)*

27. Shmatko T.V. Computer simulation of the stress-strain state of functionally graded sandwich plates and shallow shells of complex shape resting on the elastic foundation. *Journal of Mathematical Sciences* (United States). 2023. Vol. 277. P. 95–108 *(квартиль Q4)*

28. Kurpa L, Pellicano F, Shmatko T, Zippo A. Free vibration analysis of porous functionally graded material plates with variable thickness on an elastic foundation using the R-functions method. *Mathematical and Computational Applications*. 2024. Vol. 29. № 1. https://doi.org/10.3390/mca29010010

29. Kurpa L., Shmatko T. Research of vibration behavior of porous FGM panels by the Ritz method. *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials* / eds. Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A.Y., Kushnir, R.M., Nazarenko, V.M., Eremeyev, V.A. Springer, Cham, 2024. Vol. 204. P. 325-338. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_22

30. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Perspectives in Dynamical Systems II — Numerical and Analytical Approaches. DSTA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* / eds. Awrejcewicz J. Springer, Cham, 2024. Vol 454. P. 593–605. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56496-3_38

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

31. Курпа Л.В., Онуфриенко О.Г., Шматко Т.В. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы. *Доклады НАН Украины*. 2005. № 3. С. 42–46.

32. Курпа Л.В., Осетров А.А., Шматко Т.В. Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью теории R-функций и сплайн-аппроксимации. *Вісник НТУ «ХПІ» Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях»*. Харків: НТУ "ХПІ". 2014. № 6. С. 99-110.

33. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».* Харків: НТУ "ХПІ". 2015. №6 (1115). С.56-66.

34. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Исследование геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих со сложной формой плана. *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки.* Запоріжжя: Запорізький національний університет. 2015. С. 89-97.

35. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Linnik A.B. Analysis of stability and vibrations of porous power and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. № 4.P. 38-49. DOI: https://doi.org/10.15407/pmach2023.04.038.

36. Курпа Л., Шматко Т., Ліннік Г.Б., Морачковська І.О., Тимченко Г.М. Динамічний аналіз функціонально-градієнтних пористих сигмовидних сендвіч пластин. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин* /Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Dynamics and Strength of Machines: збірник наукових праць. Харків: НТУ "ХПІ", 2023. № 1. С. 39-44. https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/73892.

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій:

37. Kurpa L.V., Onufrienko O.G., Shmatko T.V. Researches of nonlinear vibrations of orthotropic plates with arbitrary form by the R-functions method. *Research and Education:* Proceedings of the 2-nd International Conference, Miscolc, March 17–19, 2004. Miscolc, Egyetemvarioos, 2004. P.109–115.

38. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Нелинейная динамика:* труды Международной конференции, Харьков, 14–16 сент. 2004. Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. P.108–112.

39. Shmatko T.V. Stability Investigation of Vibration Modes of Laminated Shallow Shells with Complex Plan Form. *Dynamical System. Theory and Applications:* Proceedings of 10th Conference on Dynamical System. Theory and Applications, DSTA-2009, Lodz, Poland, December 07-10, 2009. Lodz, 2009. Vol.1. P. 467 – 472.

40. Курпа Л.В., Шматко Т.В., Тимченко Г.Н. Исследование геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек с отверстиями. *Збірник наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла».* Дніпропетровськ: IMA-прес, 2009. Вип. 10. С. 179-185.

41. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibration of orthotropic shallow shells of the complex shape with variable thickness. *Dynamical Systems. Theory and Applications:* Abstracts of the 11th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications, DSTA-2011, Łódź, Poland, December 5-8, 2011. Wydawnictwo politechniki Lodzkiej. Łódź, 2011. Book 1. P. 243-248.

42. Kurpa L., Shmatko T. Investigation of geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness by meshless approach. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013:* Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013, Sevastopol, Ukraine, June 19-22, 2013. Sevastopol, 2013. P. 277-283.

43. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Донецк. № 8 (54). С.77-86.

44. Курпа Л., Шматко Т. Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Вып.55. № 9. С.59-70.

45. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Vibration of functionally graded shallow shells with complex shape. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracs of the 13-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA-2015, Lodz, Poland, December 7-10, 2015. Lodz, 2015. P. 57-68.

46. Shmatko T., Bhaskar A. Geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016:* Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016, Kharkov, Ukraine, September 27-30, 2016. Kharkiv, 2016. P. 485-492.

47. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells by the R-functions method. *Dynamical Systems: Theory and Applications*: Book of abstracts of the 14-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA 2017, Łódź, Poland, December 11-14, 2017. Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis. Lodz, 2017. V.2. P. 311-322.

48. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method for vibration and buckling analysis of functionally graded plates and shallow shells with complex planform. Literature review from 2014 to 2020. *Dynamics of hybrid systems of complex structures* / ed. Katica R. (Stevanovi´c) Hedrih. Belgrad, 2022. P. 237-261.

49. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Nonlinear Vibration of Functionally Graded Shallow Shells Resting on Elastic Foundations. *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara, W., Balachandran, B., Leamy, M.J., Ma, J., Tenreiro Machado, J.A., Stepan, G. Springer, Cham, 2022. P. 385-394. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_34

50. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G. Nonlinear free vibration of functionally graded shallow shells with variable thickness resting on elastic foundation. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 191-201. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_17

51. Shmatko T., Kurpa L., Lacarbonara W. Nonlinear free vibrations of functionally graded porous sandwich plates with complex shape. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 203-215. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_18

<u>Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації</u>

52. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Nonlinear Dynamics:* Book of abstracts of conference on Nonlinear Dynamics, Kharkiv, Ukraine, September 14-16, 2004. Kharkiv, 2004. P.50–51.

53. Курпа Л.В., Онуфрієнко О.Г., Шматко Т.В. Дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної планформи за допомогою R–функцій. *Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові:* Тези доповідей 7-го Міжнародного симпозіума, Львів, Україна, 18-20 травня 2005р. Львів, 2005. С. 23.

54. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Исследование динамического поведения ортотропных пластин и пологих оболочек, опирающихся на план сложной. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* Тези доповідей Міжнародної науково-

технічної конференції пам’яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. С. 264.

55. Шматко Т.В. Исследование устойчивости форм колебаний многослойных пологих оболочек. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2009:* Abstracts of the conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 27-29, 2009. Kyiv, 2009. С. 264.

56. Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек переменной толщины. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2011:* Abstracts of conference reports of the XV International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 25-27, 2011. Kyiv, 2011. С. 141.

57. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Метод R-функций для исследования нелинейных колебаний ортотропных оболочек переменной толщины. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я*: Тези доповідей XIX міжнародної науково-практичної конференції, Харків, Україна, 01-03 червня 2011р. / за ред. проф. Товажнянського Л.Л. Харків: НТУ “ХПІ”, 2011. Ч.1. С. 53.

58. Шматко Т.В., Шматко А.В. Геометрически нелинейные колебания многослойных пластин с переменной толщиной слоев. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2013:* Abstracts of conference reports of the XVI International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 29-31, 2013. Kyiv, 2013. С. 148.

59. Шматко Т., Шматко О. Нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини. *Сучасні проблеми механіки та математики:* Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 21-25 травня 2013р. / під ред. Р.М.Кушніра, Б.Й.Пташника. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України. Львів, 2013. Т.2. С. 185-186.

60. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник праць IX Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 15-19 вересня 2014. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2014. С.363-365.

61. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex planform in thermal environments.

European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017: Proceeding of the 9-th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017, Budapest, Hungary, June 25-30, 2017. Budapest, 2017. P. 70-72.

62. Курпа Л., Шматко Т. Застосування теорії R-функцій для дослідження нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища. *Сучасні проблеми механіки та математики*: Тези доповідей міжнародної конференції, Львів, Україна, 22-25 травня 2018р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018. Т. 1. С. 177-178.

63. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек в температурной среде. *Динаміка, міцність та моделювання у машинобудуванні:* Тези доповідей I-й Міжнародної конференції, Харків, Україна, 10-14 вересня 2018р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 2018. С.134-135.

64. Шматко Т. Дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок методом R-функцій. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей II-ї міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпро, Україна, 10-12 жовтня 2019. Дніпро, 2019. С. 235.

65. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Free vibration analysis of FGM shell with complex planform in thermal environments. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracts of 15th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2019, Lodz, Poland, December 2-5, 2019. Lodz, 2019, P. 207.

66. Курпа Л., Шматко Т. Вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з функціонально-градієнтними шарами. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур:* Збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 17-19 вересня 2019р. Львів, 2019. С. 61.

67. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Research of stability and nonlinear vibrations of sandwich plates with functionally graded core by Ritz’s method and the R-functions theory. *Symposium “Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih”:* Booklet of abstracts Symposium “Nonlinear dynamics – scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih”, Belgrade, Serbia, September 04-06, 2019. Belgrade, 2019. P. 19-20.

68. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of the functionally graded sandwich plates with complex form. *Nonlinear Dynamics*

NODYCON 2019: Book of abstract of the First International Nonlinear Dynamics Conference NODYCON 2019, Rome, Italy, February 17-20, 2019. Rome, 2019. P.409-410.

69. Шматко Т.В. Исследование свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек на упругом основании. *Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering:* Theses of the Second International Science and Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, October 05–08, 2020. ІПМаш НАН України, Харків, 2020. С. 310-313.

70. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracts of 16th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2021, Lodz, Poland, December 6-9, 2021. Lodz, 2021. P. 629-630.

71. Курпа Л., ШматкоТ., Лінник Г. Аналіз стійкості та коливань пористих функціонально-градієнтних пластин з використанням теорії R-функцій. *Сучасні проблеми механіки та математики:* Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 23-25 травня 2023р. Львів, 2023. С.194.

72. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Згин та коливання функціонально-градієнтних пористих сендвіч пологих оболонок з отворами та вирізами. *Actual problems of mechanics – 2023:* Proceedings of International scientific conference dedicated to the 145-th anniversary of the birth of S.P.Timoshenko, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine, November 14-16, 2023. Kharkiv, 2023.С. 420-421.

73. Курпа Л, Шматко Т., Лінник Г., Морачковська І. Вільні коливання сендвіч пластин з ауксетичним сотовим заповнювачем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 24-26 вересня 2024р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. С. 101-102.

Монографії

74. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Застосування теорії R-функцій до розв'язання нелінійних задач динаміки багатошарових пластин: монографія. Харків: ООО «В деле», 2016. 492 с.

ABSTRACT

Shmatko Tetyana Valentynivna. **Mathematical modelling and development of numerical-analytical methods for studying functionally graded shallow shells and plates using the R-functions theory**. – Qualified scientific work on the rights of a manuscript.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute“. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation is devoted to solving an important scientific and technical problem of developing and improving effective numerical and analytical methods for studying the static and dynamic behavior of structural elements made of modern functionally graded materials (FGM) based on mathematical models that take into account the features of their deformation processes: nonlinearity, porosity, elasticity, distribution of volume fractions of FGM components, different plan shapes and types of boundary conditions.

Based on the review of works delt with the development of methods for studying the FGM plates and shallow shells, it can be concluded that the FGM plates and shells with complex geometric shapes with cutouts, holes, porosity, elastic foundation, and, most importantly, under nonlinear deformation of objects, have been studied insufficiently. Therefore, the scientific and technical problem of developing effective numerical and analytical methods for studying the static and dynamic behavior of FGM of structural elements modelled by plates and shells based on mathematical models is very actual since its solution allows to consider the peculiarities of the processes of linear and nonlinear deformation of objects, which is in demand in structural design and industrial production.

The object of the research – static and dynamic behavior of elements of thin-walled structures made of functionally graded materials.

The subject of the research – mathematical and computer modelling and methods for solving linear and geometrically nonlinear problems of vibration, stability and bending of FGM plates and shallow shells of complex geometric shapes.

The research methods. The following methods are used to solve the problems: the Ritz variational method, the Bubnov-Galerkin projection method and the Runge-Kutta method. The theory of R-functions was used to construct the system of admissible functions.

The scientific novelty of the obtained results. An effective numerical and analytical approach is proposed to study linear and geometrically nonlinear vibrations and stability of functionally graded shallow shells and plates of complex shapes. The main results obtained of the work are performed:

- for the first time, using the R-functions theory, a new approach was developed to improve the efficiency of existing computational methods for studying linear vibrations of thin-walled structural elements made of modern functionally graded materials. The use of the R-functions theory made it possible to construct analytical solutions to the problems of statics and dynamics of FGM shallow shells and plates and sandwich structures of complex plan geometry, considering porosity, variable thickness, elastic base, and uniform and non-uniform compressive load;

- for the first time, a method for solving problems of geometrically nonlinear vibrations was developed for FGM plates and shells with complex plan forms. The essence of this method is to represent the solution of a nonlinear problem as a sum of two terms, one of which uses the eigenfunctions obtained as a result of solving the linear problem of vibrations of the FGM shell, and the second contains solutions of the auxiliary problem modelled by an inhomogeneous system of partial differential equations;

- mathematical models of the problem of geometrically nonlinear vibrations in displacements were constructed for the purpose of computer implementation of the proposed method;

- for the first time, variational formulations of auxiliary problems were performed and the corresponding functionals were constructed within the framework of three theories: the classical theory, the refined shallow shells theory of the first order and the third order theory (Reddy's theory);

- for the first time, for FGM shallow shells with complex plan form, a method of reducing the nonlinear partial differential equation of motion to the nonlinear ordinary differential equation is proposed, and analytical expressions for calculating the coefficients of this equation are obtained explicitly;

- an algorithm for finding the ratio of the frequency of nonlinear vibrations to linear ones, based on the Runge-Kutta method, is constructed;

- for the first time, an approach to solving the problems of vibrations and stability was developed for FGM shells and plates under compressive uniform and non-uniform loads;

- analytical expressions for the elements of matrices that consider the effective properties of FGMs within the framework of three theories of shallow shells (classical theory, refined first-order theory and refined third-order theory) are obtained. Such formulas were obtained for both single-layer and sandwich shells and plates, taking into account the power law and sigmoidal laws of distribution of the volume fractions of the components and porosity;

- the methods of the R-functions theory were further developed to construct structural formulas for FGM of shells and plates, on the basis of which systems of admissible functions satisfying boundary conditions, including mixed ones, are constructed;

- software for the POLE-RL system was developed the input language of the system. The corresponding programs implement algorithms for solving problems within the framework of both the classical theory and the refined theories of shallow shells of the first and third orders. The software was tested on each class of problems and used to solve a series of new problems, including nonlinear ones.

The practical significance of the research results. The developed effective method, as well as the software for the POLE-RL system, which carries out its numerical implementation, allowed to perform multivariate numerical experiments and study linear and geometrically nonlinear vibrations, stability and bending of single-layer and sandwich FGM shallow shells/plates of complex geometric shapes.

A large number of the results obtained in this work, which are presented in the form of graphs and tables, can be used by scientists and engineers who use other methods and packages, including FEM and well-known packages ANSYS, ABACUS, and NASTRAN, for the purpose of comparison and verification of reliability, especially for shells and plates with holes and cutouts that are clamped or simply supported.

Some of the scientific results of the work were used in the educational process at the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, in the implementation of the state budget themes and in the research work “Composite metamaterials for aerospace structures” under the NATO Project ”Science for Peace and Security” (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures - CoMetA G6176.

Author's contribution of the applicant. The provisions and results submitted for the defense of the dissertation were obtained by the applicant personally. Among them: development of a method and computer implementation of solving problems on linear and nonlinear vibrations of FGM plates and shallow shells of complex plan form; construction of mathematical models of the problem on geometrically nonlinear vibrations in displacements; variational formulation of auxiliary problems and construction of corresponding functionalities within the framework of three theories: classical, refined first-order theory of shallow shells and third-order theory (Reddy's theory); implementation of the method of reducing the nonlinear partial differential equation of motion to a nonlinear ordinary differential equation and obtaining explicit analytical expressions for calculating the coefficients of this equation for the FGM shallow shells and plates; use of the R-functions theory to solve problems in an analytical form for FGM shallow shells and plates and sandwich structures of complex plan form with porosity, variable thickness, and elastic foundation; development of a new approach to solving the problems on vibrations and stability of FGM shells and plates of complex plan form under compressive uniform and non-uniform loads.

The main content of the dissertation is reflected in 74 scientific publications, including: 51 articles, of which 30 articles are included in the Scopus and/or Web of Science Core Collection, with 29 articles published in various journals (including 16 articles in journals classified as the first Q1 and second Q2 quartiles, 2 articles in journals of the third Q3 and fourth Q4 quartiles); 6 articles in collections of scientific papers included in the list of professional publications of the Ministry of Education and Science of Ukraine; 15 articles - in scientific periodicals, continuing editions and conference proceedings (of which 8 articles were published in various foreign publishers); 22 publications - abstracts of reports at conferences (of which 5 papers were published in foreign publishers); 1 monograph in co-authorship.

Approbation of the results of the dissertation. The main scientific results and provisions of the dissertation were reported, discussed and approved at 43 Ukrainian and international scientific conferences, seminars and congresses: International Conferences on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2004, 2007, 2010, 2013, 2016 (Kharkiv, Ukraine); 9th, 10th, and 11th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conferences ENOC 2017, 2020, 2024 (Budapest, Hungary; Lyon, France; Delft, the Netherlands); International conferences Dynamical System Modelling and Stability Investigation DSMSI 2009, 2011, 2013 (Kyiv, Ukraine); International Conferences on Dynamical Systems. Theory and Applications DSTA 2007, 2009, 2011, 2015, 2017, 2019, 2021 (Lodz, Poland); International Nonlinear Dynamics Conferences NODYCON 2019, 2021, 2023 (Rome, Italy); International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering CAMPE-2021 (Kharkiv, Ukraine); IV International Conference on Dynamics, Control, and Applications to Applied Engineering and Life Science (2023, Brazil); 19th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management CM2023 (2023, Northampton, UK); 19th European Mechanics of Materials Conferences EMMC19 (2024, Madrid, Spain) and others.

The structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an abstract, table of contents, introduction, nine chapters, conclusions, a list of references (374 items) and 3 appendices. The total volume of the dissertation is 414 pages; the work contains 130 pictures and 74 tables. The main text of the dissertation is 330 pages, and the appendices are 29 pages long.

The introduction of the dissertation substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, tasks, object and subject of the research, reveals the scientific novelty and practical significance of the results obtained, identifies the author's personal contribution, provides data on the testing and implementation of the research results, and provides the number of publications on the topic.

In the first chapter of the dissertation, a review of the literature on the study of linear and geometrically nonlinear vibrations, stability and bending of FGM plates and shallow shells is carried out. Summarising the literature review within the framework of analytical or numerically analytical calculation methods, it is concluded that the most studied problems are linear problems for plates and shallow shells with a rectangular plan form and rather simple boundary conditions. Problems for FGM plates and shallow shells with a complex geometric shape of the plan and various types of boundary conditions, including mixed ones, remain unexplored sufficiently. This is especially true for FGM plates and shallow shells with cutouts and holes that are clamped or simply supported; porous sandwich FGM shallow shells, considering the elastic foundation; loaded non-uniformly in the middle surface, which causes a heterogeneous subcritical state; and shells of variable thickness. Further development is required to study the above problems regarding geometric nonlinearity.

Chapter two presents the main approaches to the mathematical modelling of the mechanical properties of FGMs. The class of FG materials consisting of two types of material, metal and ceramics, is selected. The most common homogenization theories based on the following laws are described: Voigt's power law, exponential law, sigmoidal law and Mori-Tanaka law. The most effective homogenization laws for computer modelling, namely, the power law and sigmoidal law, are used in this paper. In the same chapter, the equations of motion with geometrically nonlinear deformation are presented within the framework of three theories: classical (CST), refined first-order theory (FSDT) and refined third-order theory (TSDT). The basic relations for deformations, stress and strains resultants and moments are presented. Such information is necessary for further developing a method for calculating the static and dynamic behavior of FGM plates and shallow shells of various shapes.

In the third chapter a new approach to solving the problems of linear and geometrically nonlinear vibrations of FGMs shallow shells and plates of complex geometric shapes and different boundary conditions is proposed, based on the use of the R-functions theory and variational methods. The problems of the linear vibrations of FGM shallow shells and plates are solved by the Ritz method; the system of admissible functions is constructed using the R-functions theory.

The algorithm for solving the problems of geometrically nonlinear vibrations is reduced to the following steps: solving the problem of linear free vibrations of FGM shallow shells and plates; construction of nonlinear equations of motion in displacements. Construction of variational formulations for solving a sequence of auxiliary problems in order to find the auxiliary functions necessary to represent the nonlinear solution; reduction of the nonlinear system of partial differential equations of motion of FGM shallow shells to a nonlinear ordinary differential equation; solution of the obtained nonlinear ordinary differential equation by the Runge-Kutta method.

The proposed method is implemented within the framework of three theories: the classical theory, the FSDT theory and the HSDT theory.

In the fourth chapter the developed approach is applied to the study of linear and nonlinear vibrations of single-layer FGM shallow shells and plates. Analytical expressions are obtained for matrix elements that consider the effective properties of FGM in the framework of three theories of shallow shells. Using the software created within the POLE-RL system, extensive testing of the developed method was performed using examples of cylindrical, spherical, and paraboloid-hyperbolic shallow FGM shells with a rectangular and elliptical plan shape. The results are compared for different types of boundary conditions, different mixtures of FGMs, thicknesses and curvature values. The comparison analysis showed good agreement between the results obtained using the proposed approach and the results given in the publications provided. New problems on linear and geometrically nonlinear vibrations of the FGM single-layer shallow shells of various curvatures with a complex plan shape and different types of boundary conditions are solved in the framework of various theories.

In the fifth chapter the approach developed in the third chapter is extended to the study of FGM sandwich shallow shells and plates. The main provisions for sandwich structures are given, considering different schemes of FGM arrangement and changes in the volume fraction of ceramics in thickness. Analytical expressions that consider the effective properties of FGM for each lamination scheme are obtained within the framework of three theories (CST, FSDT, HSDT). The R-functions method (RFM) is developed for this class of problems, and the corresponding solution structures for the given boundary conditions are proposed, based on which admissible function systems for the Ritz method are constructed. The influence of the ratio of layer thicknesses and the value of the gradient index on the eigenvalues and nonlinear frequencies of FGM sandwich shells of various curvatures with cutouts and holes of complex shape is studied. The amplitude-frequency characteristics of such shells with different plan shapes and different types of boundary conditions are obtained within the framework of three theories.

In the sixth chapter the proposed approach was developed for the study of FGM sandwich porous shells and plates. Two models describing the porosity of FGMs were considered. Variational problem statements considering porosity are constructed. Analytical expressions for calculating matrix elements that consider the effective properties of porous FGM objects are obtained for two types of porosity distribution (uniform and uneven) and two laws of distribution of the volume fraction of ceramics (power and sigmoidal). Problems of nonlinear vibrations of porous single-layer and sandwich FGM shells with complex geometric shapes are solved. Backbone curves are plotted for various values of geometric and physical parameters.

In the seventh chapter the developed method is applied to FGM plates and shallow shells resting on an elastic foundation. The two-parameter Pasternak model was chosen as the model for the elastic base. The variational formulation of the problem is formulated. Different values of elastic foundation parameters, different types of FGM, and layer thickness ratios were considered. New results are obtained in the problems of studying linear and nonlinear vibrations of FGM shells with a complex geometric shape resting on an elastic foundation. Special attention is paid to the study of a porous plate of variable thickness, which is on an elastic foundation. This example shows the significant advantages of the methods developed and the software created. A computer model is constructed for problems on determining the stress-strain state of FGM sandwich plates and shallow shells.

In the eighth chapter a method for studying the stability and vibrations of the FGM sandwich shallow shells and plates under compressed load is proposed. The developed method considers the calculation of the subcritical state of the structure, provided that the load is uniform and non-uniform. To implement the developed approach, the corresponding functionals are derived within the framework of classical and refined first-order theories. The proposed approach is tested on a large number of stability problems of FGM shallow shells and plates with a rectangular plan shape, with different boundary conditions for different types of FGMs and different values of shell curvature. Special attention is paid to the study of FGM shells and plates with cutouts and holes of various geometric shapes and boundary conditions. The problem of stability of the FGM sandwich plate resting on an elastic foundation under non-uniform compressed load is considered. The compression load changes according to different laws: uniform, parabolic, linear and trapezoidal.

The chapter nine presents the results obtained during the experiment conducted within the framework of international cooperation with a scientific group led by Professor F. Pellicano in the Engineering Department "Enzo Ferrari" at the University of Modena and Reggio-Emilia, Italy. The experiment was performed for a number of plates of different geometric plan shapes and different boundary conditions in order to study their dynamic behavior. For the experiment, the plates were made of PET material using 3D printing. After comparing the results obtained experimentally and using the finite element methods (NASTRAN package was used) and RFM, it was found that such a comparison is very important for verifying experimental data obtained using a 3D printer. The significance of parallel research is that it can improve the accuracy and reliability of dynamic analysis of 3D printed structures, thereby contributing to the creation of safer and more efficient engineering structures.

The conclusions present the main results of the dissertation work in solving the tasks set.

Keywords: R-functions theory, variational methods, functionally graded materials, mathematical modelling of FGM objects, sandwich shallow shells and plates, linear and geometrically nonlinear vibrations, stability, porosity, elastic foundation, variable thickness.

ЗМІСТ

ВСТУП

Сутність науково-технічної проблеми. Розвиток багатьох галузей промисловості невід'ємно пов'язаний з використанням сучасних матеріалів, які сприяють здешевленню виготовлення конструкцій та їх складових частин, що моделюються пластинами та оболонками. Використання композитних матеріалів дозволяє суттєво зменшити вагу конструкції, зберегти міцність та надійність, забезпечити працю в складних умовах, в тому числі при високих температурах. Експериментальне дослідження об'єктів при їх проектуванні, вимагає великих фінансових затрат, тому цілком логічно фізичні експерименти замінити числовими. Але для проведення числових експериментів необхідно побудувати математичні моделі процесу, що досліджується, які б адекватно описували всі його характеристики. Математичними моделями пластин та оболонок, виготовлених із композитних матеріалів, є системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. Тому виконання числових експериментів для тонкостінних конструкцій можливо тільки при наявності ефективних методів розв'язання відповідних диференціальних рівнянь.

Актуальність теми. Серед сучасних композитних матеріалів найбільш широко використовуються функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ). Особливо це стосується таких галузей промисловості як авіаційна, ракетно-космічна, оборонна, енерго-машинобудівна, промислове та суцільне будівництво та інші. Це пов'язано з великими перевагами ФГМ в порівнянні з традиційними композитами, а саме вони забезпечують високе співвідношення міцності до ваги, відмінну термостійкість матеріалів та усувають концентрацію напружень. Багатошарові, в тому числі сендвіч-конструкції, є ефективною ілюстрацією застосування ФГМ. В останні роки опубліковано велику кількість робіт, присвячених розробці методів дослідження ФГМ пластин та оболонок, як важливих складових багатьох сучасних конструкцій. З попереднього огляду літератури випливає, що для дослідження таких об'єктів використовуються різні підходи, засновані на застосуванні 3D-теорій або квазі 3D (синусоїдальна та гіперболічна), а також на 2D теоріях. При цьому у більшості робіт використовується чисельний метод скінчених елементів (МСЕ). Значно менше дослідників використовували варіаційні методи, при цьому, як правило досліджувались пластини та оболонки з прямокутною формою плану. З огляду на існуючу літературу можна зробити висновок, що ФГМ пластини та оболонки зі складною геометричною формою при наявності вирізів, отворів, пористості, пружної основи, змінної товщини, а головне при нелінійному деформуванні об'єктів, вивчені недостатньо.

Таким чином, розробка ефективних чисельно-аналітичних методів дослідження статичної та динамічної поведінки композитних елементів конструкцій на основі математичних моделей, які враховують особливості процесів нелінійного деформування: наявності пористості, пружної основи, розподілення об'ємних часток складових ФГМ, геометрії та виду умов закріплення, оболонки змінної товщини, є актуальною проблемою. Тому, застосування універсальних чисельно-аналітичних методів дозволяє розв'язувати важливі прикладні задачі. Саме це і визначило тему даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась на кафедрі вищої математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ"). Здобувачка брала участь у виконанні фундаментальних та прикладних завдань держбюджетних робіт Міністерства освіти і науки України у рамках науково-дослідної тематики кафедри прикладної математики НТУ «ХПІ» відповідно до тем:

– держбюджетна тема "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних та нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти та науки України (№ 960 від 22.12.2004), ДР №0105U000573 (в період з 2005 р. по 2007 р.);

– держбюджетна тема «Створення на базі теорії R-функцій методів розв'язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом

Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№ 1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.);

– держбюджетна тема «Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багатошарових пластин та пологих оболонок» згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1177, від 30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.);

– Грант NATO Science for Peace and Security (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA G6176 (в період з 2023 р. по 2025 р.), де здобувачка є виконавцем окремих етапів і відповідальним виконавцем.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нового підходу для підвищення ефективності існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних та нелінійних вільних коливань ФГМ пологих оболонок та пластин, у тому числі сендвіч об'єктів, з урахуванням їхньої складної геометрії, пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження в серединній площині.

Для досягнення цієї мети в роботі були поставлені такі основні наукові задачі:

– розробити метод розв'язку задач теорії лінійних коливань ФГМ пологих оболонок і пластин складної форми в плані, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методах;

– розробити новий підхід дослідження геометрично нелінійних коливань ФГМ структур, який дозволяє звести вихідну нелінійну систему диференціальних рівнянь руху до звичайного нелінійного диференціального рівняння або системи рівнянь;

– побудувати нелінійні рівняння руху пологих оболонок у переміщеннях в рамках класичної та уточнених зсувних деформаційних теорій першого та третього порядків з метою використання їх при реалізації запропонованого методу для розв'язання нелінійних задач;

– отримати варіаційні постановки задач, за допомогою розв'язків яких будується нелінійний розв'язок вихідної задачі;

– знайти аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, що визначають зусилля, моменти та перерізуючи сили, для різних законів розподілення об'ємних частин кераміки та металу ФГМ, в тому числі степеневого та сигмоїдального законів гомогенізації, причому як для одношарових ФГМ оболонок, так і для сендвіч ФГМ оболонок. Вивести аналогічні аналітичні формули для пористих ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин;

– розвинути конструктивні засоби теорії R-функцій для даного класу задач, побудувати структури розв'язків для різних крайових умов ФГМ пологих оболонок і пластин;

– розробити метод дослідження стійкості ФГМ пластин та пологих оболонок з урахуванням неоднорідного докритичного стану при рівномірному і нерівномірному стискуючому навантаженні в серединній площині;

– розв'язати низку тестових лінійних та геометрично нелінійних задач про коливання, згин та стійкість пологих ФГМ оболонок з метою перевірки вірогідності розробленого метода та відповідного програмного забезпечення;

– застосувати розроблений метод та створене програмне забезпечення для розв'язання таких задач:

1) дослідити вплив градієнтного індексу на динамічний стан ФГМ одношарових пологих оболонок;

2) вивчити вплив схеми розташування шарів та різних типів ФГМ на власні та нелінійні частоти оболонок і пластин з вирізами та отворами;

3) дослідити вплив пористості на динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок;

4) проаналізувати вплив пружної основи на статичну та динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок;

5) дослідити вплив різних типів нерівномірного навантаження пластини в серединній площини, умов закріплення, типів ФГМ на величину критичного навантаження;

6) дослідити вільні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин змінної товщини.

На основі проведених досліджень проаналізувати вплив названих факторів на власні частоти ФГМ оболонок та поведінку скелетних кривих, з метою надання відповідних рекомендацій для інженерів–конструкторів при проектуванні сучасних конструкцій.

Об'єкт дослідження – статична та динамічна поведінка елементів тонкостінних конструкцій, виготовлених із функціонально-градієнтних матеріалів

Предмет дослідження – математичне та комп'ютерне моделювання і методи розв'язання лінійних та геометрично нелінійних задач коливання, стійкості та згину ФГМ пластин та пологих оболонок складної геометричної форми.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються: варіаційний метод Рітца, проекційний метод Бубнова-Гальоркіна, метод Рунге-Кутта. Для побудови системи координатних функцій використано теорію R-функцій.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що в роботі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід для дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань і стійкості функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин складної форми. В тому числі були виконані такі завдання:

– вперше за допомогою теорії R-функцій розроблено новий підхід для підвищення ефективності існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які виготовлені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів. Використання теорії R-функцій дозволило побудувати в аналітичному вигляді розв'язки задач статики та динаміки ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної геометрії плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження;

– вперше для ФГМ пластин та оболонок зі складною формою плану розроблено метод розв’язання задач про геометрично нелінійні коливання. Суть цього методу полягає в представленні розв’язку нелінійної задачі у вигляді суми двох доданків, один із яких будується на базі власних функцій, одержаних в результаті розв’язання лінійної задачі про коливання ФГМ оболонки, а другий містить розв’язки допоміжної задачі, яка моделюється неоднорідною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними;

– побудовано нелінійні рівняння руху у переміщеннях з метою комп’ютерної реалізації запропонованого методу;

– вперше отримані варіаційні постановки допоміжних задач та побудовані відповідні функціонали в рамках трьох теорій: класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії пологих оболонок першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді);

– вперше для ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану запропоновано метод зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержано в явному вигляді аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів цього рівняння;

– побудовано алгоритм знаходження відношення частот нелінійних та лінійних коливань, який базується на використанні методу Рунге-Кутта;

– вперше для ФГМ оболонок та пластин, які знаходяться під дією стискаючих як рівномірних, так і нерівномірних навантажень, розроблено підхід до розв’язання задач про коливання та стійкість. Відповідно до запропонованого алгоритму вихідна задача розв’язується як ланцюг наступних задач: спочатку розвязується задача теорії пружності для визначення неоднорідного докритичного стану; на другому кроці визначається критичне навантаження; на третьому кроці розв’язується задача коливань ФГМ оболонки під дією стискаючого навантаження, величина якого не перебільшує критичне навантаження;

– отримано аналітичні вирази для елементів матриць, які враховують ефективні властивості ФГМ, у рамках трьох теорій пологих оболонок (класичної, уточненої зсувної деформаційної теорії першого порядку та уточненої теорії третього порядку). При цьому такі формули одержані як для одношарових, так і для сендвіч оболонок та пластин з урахуванням степеневого та сигмоїдального законів розподілення об'ємних часток складових та пористості;

– дістали подальшого розвитку методи теорії R-функцій для побудови структурних формул для ФГМ оболонок та пластин, на базі яких будуються системи координатних функцій, що задовольняють крайовим умовам, в тому числі мішаним. Запропоновані системи координатних функцій випробувано на великій кількості тестових задач та використано для розв'язання нових задач в областях складної геометричної форми;

– розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL на вхідній мові системи. Відповідні програми реалізують алгоритми розв'язання задач у рамках як класичної теорії, так і у рамках уточнених зсувних деформаційних теорій пологих оболонок першого та третього порядків. Програми побудовані для задач коливань одношарових та сендвіч оболонок з урахуванням законів обчислення ефективних властивостей ФГМ, пружної основи, типу пористості, нерівномірного стискаючого навантаження, а також оболонок змінної товщини. Програмне забезпечення протестовано на кожному класі задач та використано для розв'язання серії нових задач, в тому числі нелінійних.

За допомогою розробленого комплексу програм було:

– вивчено вплив об'ємної долі кераміки на власні частоти одношарових ФГМ пологих оболонок складної геометричної форми;

– досліджено вплив товщини лицевих шарів та заповнювача, типу ФГМ на власні лінійні та нелінійні частоти для сендвіч ФГМ пологих оболонок;

– досліджено вплив різних видів пористості на оболонки з отворами та вирізами на власні частоти ФГМ пологих оболонок;

– проаналізовано вплив пружної основи на власні частоти та частоти нелінійних коливань оболонок різної геометричної форми, в тому числі змінної товщини;

– визначено критичне навантаження ФГМ пластин та пологих оболонок з отворами при різних умовах закріплення, різних законах розподілення стискуючих навантажень у серединній площині та різних законах розподілення об'ємної долі кераміки;

– на основі проведених досліджень надано практичні рекомендації щодо проектування елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ФГМ пластинами та пологими оболонками;

– вірогідність розробленого методу підтверджено практичним експериментом та застосуванням інших методів, які базуються на МСЕ.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблений ефективний метод, а також програмне забезпечення для системи POLE-RL, як здійснює його чисельну реалізацію, дозволили виконати багатоваріантні чисельні експерименти та дослідити лінійні та геометрично нелінійні коливання, стійкість та згин одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок/пластин складної геометричної форми.

Результати, які одержані в дисертації, можуть використовуватися під час проектування елементів аерокосмічних та машинобудівних конструкцій, які виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів.

Велика кількість одержаних в роботі результатів, представлених у вигляді графіків та таблиць, може бути використана науковцями та інженерами, які використовують інші методи та пакети, в тому числі МСЕ та відомі пакети ANSYS, ABACUS, NASTRAN з метою порівняння та перевірки вірогідності, особливо це стосується оболонок та пластин з отворами та вирізами, які жорстко або шарнірно закріплені.

Деякі наукові результати роботи використано в навчальному процесі у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут», кафедра прикладної математики (Додаток Б). Також наукові результати роботи застосовано при виконанні науково-дослідної роботи «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій» за проектом Програми НАТО

Peace and Security (SPS) Programme Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA G6176 «Наука заради миру та безпеки» (Додаток В).

Особистий внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: розробка методу та виконання комп'ютерної реалізації розв'язку задач про лінійні та нелінійні коливання ФГМ пластин та пологих оболонок складної форми плану; побудова математичних моделей задачі про геометрично нелінійні коливання у переміщеннях; виконання варіаційної постановки допоміжних задач та побудова відповідних функціоналів у рамках трьох теорій: класичної, уточненої теорії пологих оболонок першого порядку та теорії третього порядку (теорії Редді); реалізація методу зведення нелінійного диференціального рівняння руху з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння та одержання в явному вигляді аналітичних виразів для обчислення коефіцієнтів цього рівняння для ФГМ пологих оболонок та пластин; використання теорії R-функцій для розв'язку задач в аналітичному вигляді для ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної форми плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи; розробка підходу до розв'язання задач про коливання та стійкість ФГМ оболонок та пластин, які знаходяться під дією стискаючих рівномірних і нерівномірних навантажень. Роботи [327, 330, 355, 356, 364, 369, 370] виконані без співавторів.

Апробація результатів роботи. Загальні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 43 українських та міжнародних наукових конференціях, семінарах і конгресах: International Conferences on Nonlinear Dynamics "Нелінійна динаміка" ND-KhPI 2004 (September 14-16, 2004, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2007 (September 25-28, 2007, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2010 (September 21-24, 2010, Kharkiv, Ukraine), ND-KhPI 2013 (June 19-22, 2013, Sevastopol, Ukraine), ND-KhPI 2016 (September 27-30, 2016, Kharkov, Ukraine); 7-му Міжнародному симпозіумумі українських інженерів-механіків у Львові (18-20 травня 2005, Львів, Україна; I та II Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка НАН України

В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 2007), (10-12 жовтня 2019, Дніпро, Україна); 9th, 10th, 11th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017 (June 25-30, 2017, Budapest, Hungary), ENOC 2020 (July 17-22, 2022, Lyon, France), ENOC 2024 (July 22-26, 2024, Delft, the Netherlands); International conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation DSMSI 2008 (September 14-16, 2008, Alushta, Ukraine), DSMSI 2009 (May 27-29, 2009, Kyiv, Ukraine), DSMSI 2011 (May 25-27, 2011, Kyiv, Ukraine), DSMSI 2013 (May 29-31, 2013, Kyiv, Ukraine); International Conference on Dynamical System. Theory and Applications DSTA 2007 (December 17-20, 2009, Lodz, Poland), DSTA 2009 (December 07-10, 2009, Lodz, Poland), DSTA 2011 (December 5-8, 2011, Łódź, Poland), DSTA 2015 (December 7-10, 2015, Łódź, Poland), DSTA 2017 (December 11-14, 2017, Łódź, Poland), DSTA 2019 (December 2-5, 2019, Lodz, Poland), DSTA 2021 (December 6-9, 2021, Lodz, Poland); XIX міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (01-03 червня 2011, Харків, Україна); Міжнародних наукових конференцях «Сучасні проблеми механіки та математики» - 2013, 2018, 2023 (21-25 травня 2013, Львів, Україна), (22-25 травня 2018, Львів, Україна), (23-25 травня 2023, Львів, Україна); IX, X та XI Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (15-19 вересня 2014, Львів, Україна), (17-19 вересня 2019, Львів, Україна), (24-26 вересня 2024, Львів, Україна); 11th International Conference "Shell Structures: Theory and Applications" SSTA 2017 (October 11-13, 2017, Gdansk, Poland); II International USERN Congress (November 8-10, 2017, Kharkiv, Ukraine); I and II International Science and Technology Conferences "Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering" DSMME 2018 (10-14 September, 2018, Kharkiv, Ukraine), DSMME 2020 (05–08 October, 2020, Kharkiv, Ukraine); Symposium "Nonlinear dynamics – scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih" (04-06 September 2019, Belgrade, Serbia; International Nonlinear Dynamics Conferencei NODYCON 2019 (February 17-20, 2019, Rome, Italy), NODYCON 2021 (February 16-19, 2021, Rome, Italy), NODYCON 2023 (June 18-22, 2023, Rome, Italy); International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering CAMPE-2021 (18-20 жовтня, 2021, Kharkiv, Ukraine); International scientific conference «Actual problems of mechanics - 2023» to the 145th anniversary of the birth of S.P. Timoshenko (14-16 November, 2023, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine); IV International Conference on Dynamics, Control, and Applications to Applied Engineering and Life Science (November 6-11, 2023, Brazil); 13-th International Symposium on Vibrations of Continuous Systems Pomeroy, Kananaskis Mountain Lodge (July 30-August 04, 2023, Alberta, CANADA); 19-th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management CM2023 (September 12-14, 2023, Northampton, UK); 19-th European Mechanics of Materials Conferences EMMC19 (May 29-31, 2024, Madrid, Spain); 28th International Scientific Conference "Transport Means – 2024" (October 02-04, 2024, Kaunas, Lithuania).

Публікації. Основні положення та наукові результати дисертаційної роботи опубліковані в 74 наукових працях, з них:

- 51 стаття, з яких 30 статей включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection, з яких 29 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 16 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квартилів, 2 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квартилів); 6 статей – в збірниках наукових праць, що входить до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 15 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 8 статей опубліковано в різних зарубіжних видавництвах);
- 22 публікації – тези доповідей на конференціях (з яких 5 робіт видано в зарубіжних видавництвах);
- 1 монографія у співавторстві.

РОЗДІЛ 1

АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ. СТАН ПРОБЛЕМИ І ПОСТАНОВКА НОВИХ ЗАВДАНЬ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) та їх застосування в різних галузях промисловості

Композитні матеріали займають лідируючу позицію при виготовленні різного обладнання та деталей промислового виробництва. Створення нових композитних матеріалів з поліпшеними експлуатаційними показниками, зниження матеріаломісткості, вартості та трудомісткості виготовлення є основним і дуже актуальним завданням в області машинобудування, виробництва та матеріалознавства. В умовах безперервно зростаючих вимог до фізико-технічних властивостей композитних матеріалів виникає необхідність створення їх нових зразків з комплексом поліпшених показників [1-4]. Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) є класом передових матеріалів, завдяки тому що їх властивості (механічні та термічні) неперервно змінюються від однієї поверхні до іншої, тим самим усуваючи концентрацію напружень у шаруватих композитах [5]. Зазвичай ці матеріали уявляють собою суміш металу та кераміки. Керамічна складова має гарну термостійкість через низьку здатність до провідності. Металева складова ФГМ поліпшує міцність структурного елемента та дозволяє уникнути руйнування через швидкі зміни температури за короткий час [6, 7].

Зміна об'ємної частки складових матеріалів може відбуватися безпосередньо по всій товщині деталі (Рис. 1.1) або в будь-якому іншому напрямку. Поступова зміна властивостей компонентів дозволяє отримувати нові матеріали з більш широким спектром їх застосування в порівнянні з традиційними композитами.

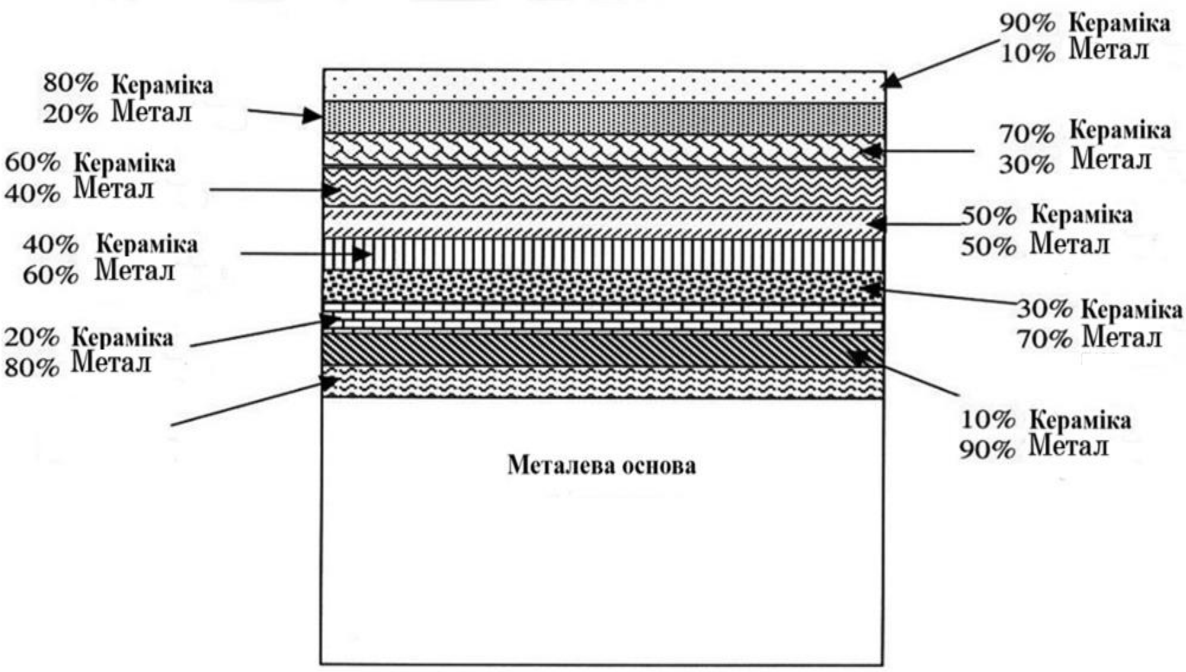


Рис. 1.1. Покриття (розподіл) ФГМ

Концепція ФГМ вперше була запропонована в 1984 р в Японії при розробці теплоізоляційних покриттів для багаторазових космічних апаратів. Розроблені покриття товщиною 10 мм мали зовнішній вогнестійкий керамічний шар, який плавно переходив у внутрішній тепловідвідний металевий шар, що дозволило витримувати без руйнувань перепад температури до 1000 К [8]. З цього часу ФГМ почали широко використовувати в різних галузях промисловості таких, як аерокосмічна промисловість, ядерні реактори, автомобілі, літаки, космічна біомедицина та сталеливарна промисловість у якості надійних теплоізоляційних конструкційних матеріалів. Сучасні ФГМ мають гарні хімічні, механічні, магнітні, теплові, електричні та інші властивості.

Хоча ідея ФГМ спочатку була розроблена для створення термостійких матеріалів, згодом такі матеріали стали широко використовуватися з метою зниження концентрації напружень в структурних елементах за рахунок плавної зміни властивостей матеріалу, вибору відповідних долей кераміки та металу. Численні галузі інженерних застосувань в ракето- та літакобудуванні, автомобілебудування, біомедичній промисловості, зробили значний внесок у розвиток технологій створення нових типів ФГМ. [9].

ФГМ є відмінним розв'язанням проблеми, пов'язаної з розробкою матеріалів, які є необхідними для виготовлення структурних елементів із суперечливими властивостями. А саме, наприклад, коли в одних і тих же компонентах об'єкту, потрібна висока твердість зовні і висока пластичність усередині. Отже, ФГМ із специфічними властивостями можуть бути ефективно застосовані в багатьох галузях, таких як аерокосмічна промисловість, автомобілебудування, покриття різних промислових елементів, електроніка, біомедицина, будівельні та ріжучі інструменти, як показано на Рис. 1.2 [10].

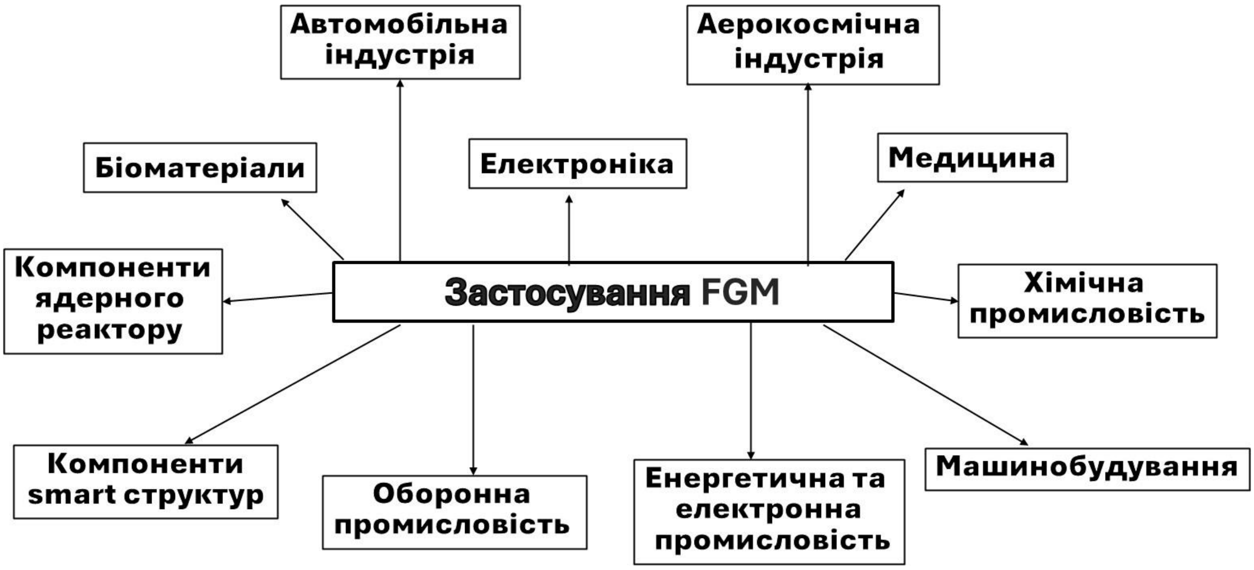


Рис. 1.2. Області застосування ФГ матеріалів

1.1.1 Застосування ФГМ в аерокосмічній індустрії

Хоча початковим реальним застосуванням ФГМ були покриття космічних кораблів, що знижувало термічні напруження між зовнішньою та внутрішньою поверхнями, пізніше вони стали використовуватися для виготовлення багатьох інших складових космічних кораблів [11, 300]. В даний час ФГМ з градієнтними властивостями використовуються для ракетних двигунів, конструкцій шестірні космічного корабля, пластинчатих теплообмінників. Крім цього ФГМ використовуються в таких елементах як відбивачі, сонячні панелі, відсіки для камер, колеса турбіни, покриття лопаток, носових кришок, переднього краю ракет та інших, як показано на Рис. 1.3 [12].

Рис. 1.3. Застосування ФГМ у аерокосмічній індустрії

Ці компоненти можуть бути під впливом дуже високих температур і саме використання ФГМ забезпечує цілісність цих компонентів. В останні роки сплав ФГМ Al_2O_3/Al з відмінною термічною та корозійною стійкістю використовується для виготовлення деталей двигунів та сопел ракет [13]. В дослідженні [14] авторами S. Kumar та ін. розроблено та вироблено полімерно-керамічні композити ФГМ для для аерокосмічного застосування.

1.1.2 Застосування ФГМ в автомобільній індустрії

Багато автомобільних компонентів, таких як поршні дизельних двигунів і гільзи циліндрів, камери згоряння, гальма гоночних автомобілів, карданні вали і маховики повинні бути градуйовані за температурою, тиском або напруженням [15]. Тому ці компоненти виробляються з ФГМ з градієнтними властивостями, як показано на Рис. 1.4. Крім можливості використання ФГМ із градієнтними властивостями у покриттях кузовів автомобілів.

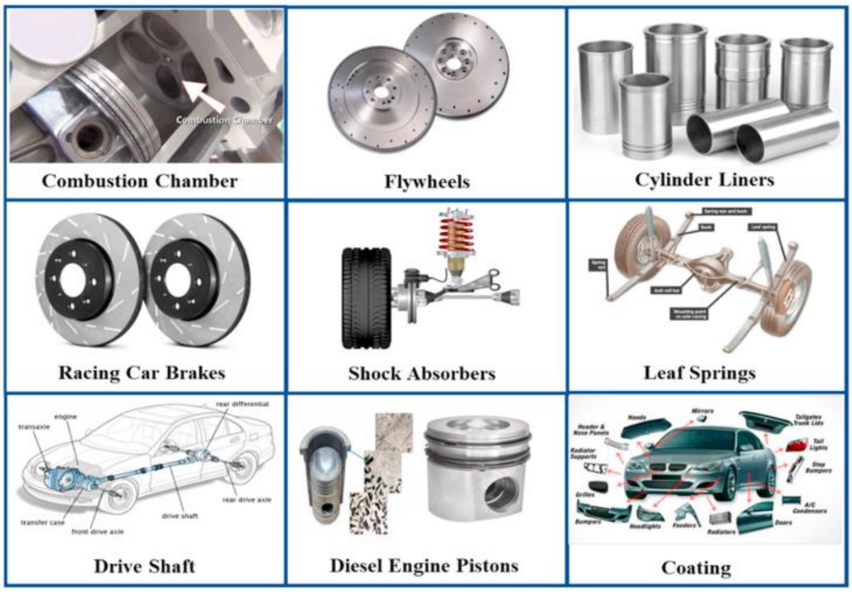


Рис. 1.4. Застосування ФГМ у автомобільній індустрії

1.1.3 Застосування ФГМ у машинобудуванні та промисловому обладнанні

ФГМ з градієнтною структурою широко використовуються у виробництві багатьох деталей машинобудування, таких як ріжучі інструменти, формувальні форми та блоки двигунів машин, оскільки вони легко підвищують міцність, термічну зносостійкість та корозійну стійкість цих деталей [16].

1.1.4 Застосування ФГМ у біомедицині

В даний час ФГМ широко використовуються в протезах та компонентах штучних зубів [17]. В останні роки ФГМ Ti-HA, Ti-Co, Ti-ZrO2, HA-ZrO2, Ti-SiO2 та TiN-HA використовувалися для виробництва зубних імплантатів та штучних кісток для покращення біосумісності, зносостійкості та опору твердості, що прискорює зростання кісток та запобігання втрати кісткової маси [18]. Крім зубних імплантатів та частин протезів, ФГМ з градієнтними властивостями також використовуються для відновлення хрящів.

1.1.5 Застосування ФГМ в оборонній промисловості

Загальна тенденція на сьогодні в оборонній сфері полягає в зниженні ваги транспортних засобів і запобігти поширенню тріщин за допомогою ФГМ, де градуйовані конструкції використовуються як непробивні матеріали для виготовлення бронеплит і бронежилетів, а також для виготовлення захисних деталей, таких як напрямні стрижні, прецизійні ролики, вали, труби, засувки, кожухи осей і бойок [19]. C. Huang та Y. Chen [20] використовували принцип ФГМ для виготовлення маловагової броні з високою ударостійкістю та низькою вартістю з композитів Al_2O_3–ZrO_2 методом порошкової металургії. Крім того, вони вказали, що композити ФГМ Al_2O_3–ZrO_2 з регульованими властивостями є багатообіцяючим матеріалом для використання в оборонних додатках через його чудові властивості порівняно зі звичайними композитами.

1.1.6 Застосування ФГМ в енергетичній та електронній промисловості

На додаток до попередніх областей, ФГМ з градієнтними структурами представляють високі потенціали для енергетики та електроніки, а також оптоелектронних додатків. Концепція ФГМ з температурним градієнтом тепер використовується в різних енергетичних системах замість того, щоб працювати з одним матеріалом при дуже високих або низьких температурах, як у генераторах теплової енергії, компонентах сонячної енергії та пристроях перетворення енергії, конденсаторах, датчиках та електродах [21]. Ці матеріали з градієнтною структурою також використовуються в батареях, напівпровідниках (транзисторах, діодах та оптоелектронних пристроях), п'єзоелектричних пристроях та інтегральних схемах [22, 23].

З проведеного аналізу випливає, що завдяки такому широкому використанню ФГМ в різних галузях промисловості перед інженерами та науковцями виникають дві головні проблеми: перша - це розробка сучасних технологій для виробництва ФГМ, які відповідають вимогам їх конкретного застосування, а друга – це математичне моделювання та розробка методів розрахунку елементів сучасних конструкцій, вироблених із ФГМ.

Дана робота є певним внеском розв'язання саме другої проблеми при вивченні тонкостінних елементів конструкцій, які моделюються тонкими пластинами та пологими оболонками. Розробка ефективних методів для комп'ютерного моделювання та дослідження і аналізу лінійних і нелінійних статичних та динамічних задач теорії пластин і пологих оболонок, вироблених із функціонально-градієнтних матеріалів, є дуже важливою і актуальною задачею наукового дослідження. Тому зупинимось на детальному аналізу досягнень та проблем, пов'язаних з розробкою математичних методів розв'язання цього класу задач, а саме задач згину, коливань та стійкості ФГМ пластин та пологих оболонок.

Безумовно, що вивчення усіх цих проблем базується на досвіді попередніх розробок та раніш розроблених теорій і методів розрахунку пластин та оболонок.

1.2 Огляд існуючих теорій і методів розв'язання статичних та динамічних задач для ФГМ пластин та пологих оболонок

Необхідно відзначити, що теорія пластин і оболонок була актуальною та цікавила багатьох учених ще з кінця XIX століття. Дослідники використовували два основних підходи для розв'язку задачі про лінійні та нелінійні коливання: розв'язання тривимірної задачі теорії пружності і приведення тривимірної задачі до двовимірної. Розв'язання проблеми пружності з використанням 3D-підходу є доволі складним і громіздким математичним завданням. Щоб подолати ці математичні труднощі, проблему дослідження оболонки можна спростити до двовимірної задачі, розглядаючи один із вимірів як досить малий у порівнянні з іншими вимірами. Цікаво, що першими дослідниками, хто розглянув розкладання напружень та деформацій у напрямку товщини для зведення тривимірного завдання до двомірного, були вчені Cauchy та Poisson [24], які сформулювали цю концепцію в 1890 році. Basset [25] вважається першим, хто використав цей підхід до оболонок. Кільчевський [26, 27] при розв'язанні цієї задачі використував розкладання напруження та деформації в ряд Маклорена за степенями координати товщини. Другий підхід до теорії, яка зводить тривимірну задачу до двомірної, був підхід Коссера, відомий як Cosserat surface [28, 29]. Він розглядає оболонку як деформоване тіло з набором деформованих напрямних, де векторне поле напрямних відображає зміну орієнтації та довжини волокон матеріалу. Третій підхід, що зводить тривимірне завдання до двовимірної задачі, розглядає інтегральні характеристики напружень за товщиною. Більшість досліджень виконуються саме за таким підходом.

Фундаментальний вклад у розвиток теорій та методів розрахунку композитних пластин і оболонок внесли роботи провідних вчених, серед яких: С.О. Амбарцумян, В.Г. Баженов, І.А. Біргер, В.В. Болотин, І.Н. Векуа, В.З.Власов, А.С. Вольмір, К.З. Галімов, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М.Гузь, Л.Г. Донелл, Б.Я. Кантор, М.О. Кільчевський, В.Д. Кубенко, Р.М.Кушнір, С.Г. Лехницький, А. Ляв, Х.М. Муштарі, Ю.М. Новічков, В.В.Новожилов, Б.Л. Пелех, В.Г. Піскунов, О.О. Рассказов, В.Л. Рвачов, А.П.Філіппов, Л.А. Фільштінський, І.Ю. Хома, М.О. Шульга, M.E. Carrera, J.L.Sanders, W.T.Koiter, P.M.Naghdi, H.X.Nguyen, J.N.Reddy, H.S.Shen, A.J.Ferreira, E.Reissner, L.Libresku та інші.

Вагомий внесок у розвиток методів математичного моделювання та дослідження лінійних та геометрично нелінійних процесів деформування композитних елементів тонкостінних конструкцій в тому числі вироблених з ФГМ, мають наукові праці К.В. Аврамова, І.В. Андріанова, Д.В. Бреславського, А.Т. Василенка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, В.З. Грищака, В.С.Гудрамовича, А.П. Дзюби, А.А. Дісковського, В.А. Крисько, Л.В. Курпи, В.В. Лободи, І.А. Лози, Г.І. Львова, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Ю.В. Міхліна, В.П. Пошивалова, Н.Д. Панкратової, В.С. Пакош, Н.В. Сметанкіної, С.М.Склепуса, О.О. Стрельнікової, Ю.В.Токового, С.В. Угрімова, О.М.Шупікова, С.В.Яковлева, H.Altenbach, J. Awrejcewicz, F. Alijani, M. Amabili, M.Ganapathi, S.I.Hossain, K.M.Liew, F.Pellicano, P.K.Sinha, A.V.Singh, C.H.Thai, Y.X.Zhang, A.M.Zenkour, F.Tornabene, M.S.Qatu, P.Ribeiro та інші.

Для товстих багатошарових пластин та оболонок було розроблено тривимірні моделі, побудовані в рамках теорії пружності, які найбільш точно моделювали деформаційні процеси. Істотний внесок у розвиток цього напряму зробили роботи вчених Е.І.Григолюка, П.Я.Носатенко, Я.М.Григоренко, Н.Д.Панкратової, А.Н.Гузя, І.Ю.Бабича, А.Г.Гуртового, В.Г.Піскунова та ін. Однак застосування тривимірних рівнянь пов'язане з великими математичними труднощами. Тому дослідниками переважно використовувались двовимірні моделі. Двовимірні теорії оболонок можна розділити на три основних класи:

1) Класична теорія (CPT);

2) Теорія деформації зсуву першого порядку (FSDT);

3) Теорії деформації зсуву вищого порядку (HSDT).

З появою нових матеріалів теорію пластин та оболонок, розроблену для однорідних ізотропних пластин, було поширено на композитні ламіновані, а пізніше на ФГМ пластини та оболонки. Нещодавно було опубліковано низку оглядів, що стосуються ФГМ пластин та оболонок [30, 31, 32, 33, 34, 35]. Поряд з питаннями визначення властивостей ФГМ в літературі великої уваги приділялось різним методам аналізу ФГМ пластин та оболонок.

Деякі з найбільш широко використовуваних методів – це розв’язок Нав’є [36, 37, 38, 39, 40], метод скінченних різниць [41, 42], диференціальний метод квадратур [43, 44, 45, 46], метод Гальоркіна [47, 48, 49, 50, 51], метод Рітца [52, 53, 54, 55] тощо. Деякі інші доступні методи – нерівномірні раціональні B-сплайни (NURBS) [56, 57], безсіткові методи [58, 59, 60] тощо.

З огляду на складність математичної постановки задач статичного та динамічного аналізу ФГМ пластин та пологих оболонок їх дослідження, зазвичай, виконується за допомогою чисельних методів. Особливо це стосується нелінійних задач. Одним з найбільш поширених чисельних методів розв’язання завдань про нелінійні коливання багатошарових та ФГМ пологих оболонок і пластин є метод скінченних елементів (МСЕ) [61, 62, 63, 64, 65]. Він часто застосовується у поєднанні з методом гармонійного балансу [66, 67, 68] та іншими методами.

Представимо більш детальний огляд досліджень за наведеними теоріями та методами.

1.2.1 Використання класичної теорії та методів для дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок

Класичну теорію пластин було створено ще у вісімнадцятому столітті. Використовуючи прості припущення теорії пластин (гіпотези Poisson-Kirchhoff), класична теорія була поширена для дослідження оболонок. Aron [69] був першим, хто використав гіпотези пластин Пуассона-Кірхгофа для розробки теорії оболонок. Він вивів рівняння згину оболонок при малій деформації та кінцевих зсувах. Його теорія містила кілька помилок, які були виправлені вченим Love [70]. Love працював з такими спрощеннями:

1. Оболонка є тонкою. Це регулювалося критерієм (h/R_{min}) з припущенням, що (h/Rmin)≪1. Величина h представляє товщину оболонки, а R_{min} – менший радіус кривини оболонки.

2. Прогини оболонки малі проти її розмірів.

3. Нормаль до опорної поверхні оболонки залишається прямою та нормальної до неї і не зазнає жодних змін за довжиною під час деформації.

4. Значення поперечного нормального напруження набагато менше порівняно з напруженнями внутрішньої площини.

Цей підхід виявився досить перспективним із практичної точки зору і для багатошарових оболонок, оскільки поєднує в собі можливість опису процесів деформування шаруватих конструкцій з відносно простою системою рівнянь. Для тонких шаруватих пластин та оболонок часто використовуються гіпотези Кірхгофа-Лява, прийняті для всього пакету шарів загалом [71]. Суть цих гіпотез зводиться до наступного:

- нормальний до серединної поверхні прямолінійний елемент після деформації залишається прямолінійним, нормальним та зберігає свою довжину;

- нормальними напруженнями на поверхнях, паралельних серединній поверхні, можна знехтувати.

Похибка, яка допускається під час використання класичної теорії, має порядок товщини. Тому вона використовується для тонких оболонок та пластин.

Теорія пластин, яка базується на припущеннях Кірхгофа-Лява, називається класичною теорією (CPT) [71].

Sanders [72] та Koiter [73] представили модифіковане перше наближення теорії оболонок. Вони спробували усунути невідповідності теорії оболонок Лява, не впливаючи на простоту моделі. Якщо говорити про пологі оболонки, то для їх дослідження використовуються теорії, які враховують основні припущення про нульовий поперечний зсув і нормальні деформації. Такі теорії розглядаються як класичні теорії оболонок (CST). Наведемо декілька робіт, в яких було застосовано класичну теорію та отримані досить важливі результати для ФГМ пластин та оболонок.

Chi and Chung [74, 75] отримали розв'язок у замкнутому вигляді для ФГМ пластин у разі різних законів обчислення ефективних властивостей функціонально-градієнтного матеріалу, а саме для степеневого закону розподілення ФГМ (P-FGM), сигмоїдального закону (S-FGM) і експоненціального закону (E-FGM). Javaheri R. та ін. [76] досліджували стійкість ФГМ пластин під дією стискаючого навантаження. Mohammadi M. та ін. [77] розробили аналітичний підхід на основі розв'язку Levy для дослідження втрати стійкості ФГМ пластин. У роботі [78] Hu Y. та його співавтори застосували припущення CPT та рівняння Кармана для аналізу стійкості та коливань ФГМ пластин, а також дослідили вплив деяких параметричних значень системи. У дослідженні [79] Ghannadpour S.A.M. та ін. втрата стійкості ФГМ пластин при термічних навантаженнях досліджувалося методом кінцевих смуг, заснованим на CPT. Автори використовували CPT разом з методом Релея-Рітца. Michalska K.K. та співавтори [80] вивчали згин та динамічну стійкість ФГМ пластин з використанням CPT. У розглянутих дослідженнях прямокутна пластина знаходилась під дією термічних та механічних навантажень. Damanpack A.R. та його колеги [81] розробили модель, засновану на нейтральній поверхні та CPT для аналізу поведінки ФГМ пластин при згині. У цій роботі для чисельного розрахунку використовувався метод граничних елементів.

Ґрунтуючись на властивості фізичної нейтральної поверхні, Zhang J.H. і Zhao Y.G. [82] використовували класичну теорію для аналізу тонких ФГМ пластин. Liu D.Y. та ін. [83] проаналізували поведінку ФГМ пластин на основі CPT з урахуванням властивостей матеріалу, що змінюються за товщиною. Yang J. і Shen H. S. [85] запропонували метод аналізу вільних та вимушених коливань для початково напружених функціонально-градієнтних пластин у термічному середовищі. Baferani A. H. та ін. [86] проаналізували динамічний відгук функціонально-градієнтних тонких пластин. У роботі докладно обговорюється вплив різних параметрів таких, як товщини, співвідношення довжини та ширини, показника степеневого закону та граничних умов, на характеристики функціонально-градієнтних коливань прямокутних пластин.

Завдяки простоті класична теорія також була використана багатьма вченими для дослідження ФГМ оболонок. Наприклад, в роботах [87, 88, 89] було проаналізовано коливання вільно опертих циліндричних оболонок, використовуючи CPT та метод Релея–Рітца. У роботах [90, 91, 92] на базі різних підходів було досліджено нелінійні коливання циліндричних оболонок. Нелінійні вимушені коливання ФГМ пологих оболонок подвійної кривини були досліджені Alijani та ін. [93] з використанням CPT, рівнянь фон Кармана та багатомодовою дискретизацією з використанням процедури Гальоркіна. Nguyen and Tran [94] використали CPT для розв’язання задачі про нелінійні коливання пологих оболонок подвійної кривини з прямокутною формою плану, що знаходяться на пружній основі під дією механічного навантаження в тепловому середовищі.

1.2.2 Використання теорії першого порядку та методів для дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок

Не дивлячись на те, що класичні теорії дають достатньо точні результати для багатьох тонких пружних елементів, для товстих оболонок на результати CST не можна покладатися. Тому, що у випадку композитних матеріалів або неоднорідних ламінатів міжшарові напруження та деформації є домінуючими, і ними не можна нехтувати. Зрозуміло, що для точної оцінки поведінки оболонки потрібні вдосконалені теорії, які враховують зсувні деформації.

Однією з найпростіших теорій, яка враховує зсувні деформації, є уточнена теорія першого порядку (FSDT), яка використовується для дослідження ФГМ пластин та оболонок середньої товщини (від 1/20 до 1/5 розмірів плану пластини). Ця теорія базується на гіпотезі прямої лінії:

- прямолінійний нормальний до координатної площини після деформації елемент залишається прямолінійним, але не перпендикулярним до деформованої поверхні.

На відміну від класичної теорії, система рівнянь руху в уточненій теорії першого порядку складається з п'яти рівнянь і містить п'ять невідомих – переміщення у серединній площині пластини, прогин та кути повороту. У цій теорії вирази для переміщення в площині містять координату товщини z у першій степені, поперечне переміщення по товщині, а також поперечні напруження поперек товщини конструкції вважаються незмінними. Але оскільки наспавді поперечні напруження непостійні по товщині структури і є параболічними, то ця теорія вимагає коефіцієнта поправки на зсув. Значення цього коефіцієнту залежить від різних параметрів, таких як граничні умови, схема товщини, властивості матеріалу, характер навантаження тощо. Багато дослідників відмічали це в своїх оглядових роботах [6, 32, 95, 96, 97, 98, 99, 299].

Отже, присутність зсувної корекції необхідна для компенсації різниці між фактичним напруженням і передбачуваним нормальним напруженим станом. S Hosseini-Hashemi та ін. [100] застосували FSDT для вивчення вільних коливань ФГМ пластин на основі кінематики та визначальних рівнянь для запропонованої моделі для розрахунку власної частоти, припускаючи, що властивості ФГМ пластини змінюються за товщиною і мають градієнтний індекс, спрямований по товщині деталі. T. K. Nguyen та ін. [101] розробили нову модель вільних коливань ФГМ пластин, використовуючи припущення FSDT та отримали розв’язок у замкнутій формі. Nguyen T.K.a та ін. [102] використовували теорію FSDT для аналізу поведінки коливань та втрати стійкості функціонально-градієнтних багатошарових пластин з покращеною жорсткістю при поперечному зсуві. Крім того, вони розробили більш спрощену модель FSDT для аналізу статичного згину та вільних коливань сучасних композитних пластин [103]. Thai H.T. та ін. [104] проаналізували механічну поведінку функціонально-градієнтних багатошарових пластин з використанням нового підходу FSDT, який поділяє поперечне зміщення на згинальну та зсувну складові. Zenkour A.M. [105] досліджував згин, втрату стійкості та коливання прямокутних ФГМ пластин, використовуючи теорію пластин синусоїдальної зсувної деформації (SSDT), беручи до уваги ефекти інерції обертання та пружних основ. Li Q. та ін. [106] виконали тривимірний (3D) аналіз коливань вільно опертих та закріплених ФГМ сендвіч панелей.

Теорія FSDT широко використовувалась також для моделювання геометрично нелінійних процесів ФГМ пластин. В роботі Praveen та Reddy [107] на базі рівнянь Кармана та МСЕ дослідили нелінійні перехідні реакції ФГМ пластин при термічних і механічних навантаженнях. Singha та ін. [108] для вивчення нелінійного вигину ФГМ пластин під поперечним тиском також використали МСЕ та FSDT. Але ця теорія була переформульована на основі нейтральної поверхні. Саме теорію FSDT на основі нейтральної поверхні було використано в роботі Prakash та ін. [109] для дослідження нелінійної стійкості ФГМ скошених пластин.

Для дослідження ФГМ оболонок теорія FSDT також використовувалась багатьма вченими. Наприклад, задачі про статичну та динамічну поведінку циліндричних та подвійно вигнутих ФГМ оболонок під комбінованим термічним та механічним навантаженням були розглянуті в роботах [110-115]. Isvandzibaei та ін. [116] досліджували динамічні характеристики навантажених циліндричних ФГМ оболонок. Розв’язок рівнянь для різних граничних умов було виконано за допомогою методу Рітца.

Геометрично нелінійний аналіз ФГМ оболонок з використанням FSDT та методу скінченних елементів було також виконано Arciniega та Reddy [97]. На базі FSDT, використовуючи рівняння Кармана в роботі Nguyen та Pham [118] було досліджено нелінійні коливання недосконалих циліндричних ФГМ оболонок, підкріплених ребрами жорсткості, які знаходяться на пружній основі. Для отримання динамічного відгуку було використано метод Рунге-Кутта. Pradyumna та Nanda [119] досліджували геометрично нелінійний відгук недосконалих ФГМ панелей в тепловому середовищ. Для розв'язання задачі було використано теорію FSDT та рівняння фон Кармана, які було розв'язано МСЕ в поєднанні з ітераційним методом Ньютона–Рафсона.

1.2.3 Використання теорії вищого порядку та методів для дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок

Щоб уникнути використання поправки на зсув та отримати більш точні деформації поперечного зсуву та регулярних деформацій у ФГМ об'єктах, були запропоновані теорії вищого порядку (HSDT). У цих теоріях переміщення в площині виражаються співвідношеннями, які містять координати товщини вищого порядку. Загалом, HSDT можуть бути розроблені повністю на основі зсувів у площині [120-122] або з урахуванням як зсувів у площині, так і поперечних зсувів [123, 124] (тобто квазі-3D теорій).

Вагомий внесок у розвиток теорій ізотропних та ортотропних оболонок вищого порядку внесли Новожилов [125], Гольденвейзер [126], Власов [127], які враховували не тільки зсув, але і поперечні нормальні деформації. Подібно до розвитку лінійних теорій оболонок, було запропоновано багато нелінійних теорій тонких оболонок. Муштарі і Галімов [128], Donnell [129], Власов [127] і Муштарі [130] незалежно один від одного вивели теорії пологих оболонок, які розвинуто на ФГМ об'єкти.

В літературі можна знайти різні модифікації теорій вищого порядку: тригонометрична теорія деформації зсуву (SDT), гіперболічна SDT, зворотна тригонометрична/гіперболічна SDT, експоненціальна SDT та інші зсувні деформаційні теорії вищого порядку [131-136]. Nguyen та ін. [137] використовували метод Рітца та аналітичний підхід, базуючись на зворотній тригонометричній теорії SDT [136] для аналізу вільних коливань сендвіч ФГМ балок. Fazzolari [138] виконав аналіз стійкості сендвіч ФГМ балок, що спираються на пружну основу, з використанням поліноміальної, експоненціальної та тригонометричної теорії SDT.

В загальному випадку теорії HSDT вимагають величезних обчислювальних ресурсів через безліч невідомих (наприклад, теорії, які використовують Neves A.M.A. та ін. [139] з дев'ятьма невідомими, K.H.Lo та ін. [140] з 11 невідомими, T.Kant [141] з шістьма невідомими). Можна відзначити роботи Reddy J.N. [142] з 11 невідомими, також Jha D.K.та ін. [143] з 12 невідомими, M.Talha та B.N.Singh [144] і Natarajan S. та Manickam G. [145] з 13 невідомими, A.Bhimaraddi та Stevens L.K. [146] з п'ятьма невідомими.

Нижче представлені деякі роботи, в яких теорії вищого порядку використано для ФГМ пластин та оболонок.

Використовуючи просту та повну тригонометричну теорію високого порядку, автори роботи [147], дослідили вплив нормальної поперечної деформації на прогин, напруження та динамічні характеристики ФГМ деталей. В роботі Mahi A. та ін. [148] було використано нову теорію гіперболічної деформації зсуву (HSDT) для аналізу вільних коливань та згину ізотропних, функціонально-градієнтних, сендвіч і шаруватих композитних пластин. Fakhari V. та ін. [149] запропонували нову нелінійну математичну модель, засновану на теорії зсувної деформації високого порядку, для оцінки власної частоти та стійкості ФГМ пластин з п'єзоелектричними шарами, з'єднаними через поверхню. Pradyumna S. та Bandyopadhyay J.N. [150] використали формулювання скінченних елементів вищого порядку, яке включає в себе наближення Сандерса для подвійно вигнутих оболонок з урахуванням ефектів інерції обертання та поперечного зсуву, для виконання вільного аналізу коливань функціонально-градієнтних вигнутих панелей.

Слід зазначити, що найчастіше для дослідження ФГМ структур використовується теорія третього порядку TSDT, яка була запропонована J.N.Reddy і C.D.Chin [110]. В рамках цієї теорії система рівнянь руху складається з п’яти рівнянь і містить ті ж невідомі, що і в теорії першого порядку.

У роботі [152] Reddy представив як аналітичні формулювання теорії TSDT, так і на базі МСЕ. При цьому було враховано термомеханічний зв’язок для моментів та сил у серединній площині, залежність від часу, геометричну нелінійність типу Кармана. Shen у роботі [153] представив нелінійний аналіз ФГМ пластин при поперечних навантаженнях у теплових середовищах. Нелінійні рівняння Кармана, одержані на базі теорії TSDT, були розв’язані з використанням підходу Гальоркіна. Були представлені результати для кривих навантаження-прогину та навантаження-згинального моменту для прямокутних пластин з рухомими або нерухомими краями. Нелінійний згин пластин та коливання, а також динамічну стійкість сендвіч пластин під дією термічного та механічного навантаження було досліджено в роботах Yang та Shen [154, 155]. В роботах [156-160] теорію TSDT було використано на основі рядів Фур’є, нейтральної поверхні, розв’язку Леві, розв’язку Нав’є, методу Релея-Рітца.

Значний внесок у дослідження ФГМ циліндричних оболонок на основі цієї теорії зробили Shen та його колеги [161, 162, 163]. Згин оболонок подвійної кривини було розглянуто в роботі Oktem та ін. [164]. Автори представили аналітичні розв’язки для згину шарнірно опертих пластин і подвійно вигнутих оболонок, використовуючи для розв’язання узагальнені подвійні ряди Фур'є. Hoang та Nguyen [165] проаналізували нелінійний відгук вигнутих ФГМ панелей, що спираються на пружну основу. Було отримано криві прогин –навантаження для шарнірно опертої панелі при механічних і термічних навантаженнях. Результати було отримано на базі TSDT та методу Гальоркіна. Matsunaga H. [166] у своєму дослідженні представив двовимірні наближені теорії вищого порядку, які можуть точно передбачити власну частоту та напруження згину ФГМ вільно опертих пологих оболонок.

Багато науковців досліджували задачі статичної та динамічної поведінки ФГМ одношарових та сендвіч пластин та пологих оболонок при наявності різних ускладнюючих факторів: різні типи заповнювачів (металеві, керамічні, ФГМ) у сендвіч структурах, зміна товщини шарів, пружна основа, теплове середовище, поява пористості в ФГМ, неоднорідний докритичний стан об’єктів, навантажених у серединній площині та інші. Урахування подібних факторів має велике значення при практичному використанні ФГМ об'єктів, тому що їх наявність суттєво впливає на НДС та динамічні характеристики структури. Наведемо інформацію про виконані в останній час розрахунки та дослідження ФГМ об'єктів, в яких було враховано подібні особливості.

1.3 Огляд літератури про дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок при наявності суттєвих додаткових умов, які впливають на статичну та динамічну поведінку

1.3.1 ФГМ сендвіч пластини та оболонки

Сендвіч пластини та оболонки є ефективними структурними елементами, які характеризуються легкістю та міцністю, здатністю поглинати енергію, витримувати високі термічні навантаження, працювати в тепловому середовищі та ін., завдяки чому відіграють важливу роль у авіаційній, аерокосмічній промисловості, цивільному будівництві, гнучкій електроніці та інших галузях. Останнім часом у зв'язку з впровадженням функціонально-градієнтних матеріалів сендвіч-структурам приділено велику увагу, перш за все тому, що завдяки неперервній зміні властивостей від однієї поверхні до другої, усунена концентрація напруження в шаруватих композитах. ФГМ сендвіч-структури зазвичай поділяють на дві категорії: тип А - сендвіч-структури з лицьовими листами ФГМ та однорідним заповнювачем і тип В - сендвіч-структури з однорідними лицьовими листами та ФГМ заповнювачем. Для проектування та застосування ФГМ сендвіч-структур потрібне повне вивчення їх статичної та динамічної поведінки.

Аналіз коливань ФГМ сендвіч пластин та пологих оболонок був виконаний багатьма дослідниками. Розширений огляд літератури, який присвячено лінійним і нелінійним коливанням оболонок та пластин, вироблених з традиційних та сучасних матеріалів, можна знайти в роботах [167-171], багато досліджень було виконано для ФГМ пластин та оболонок [84, 172-177].

Swaminathan та ін. [32], Thai і Kim [33] представили вичерпний огляд різних методів, що використовуються для дослідження ФГМ пластин і оболонок. Birman і Kardomatea [178] представили короткий огляд методів і теорій, доступних для аналізу сендвіч-структур. Zhang та ін. [179] дали огляд щодо аналізу втрати стійкості, згину та вільних коливань ФГМ конструкцій. Garg і Chalak [180] представили детальний огляд аналізу сендвіч-конструкцій у гігротермічних умовах. Ghatage та ін. [181] опублікували детальний огляд моделювання та аналізу багатонаправлених ФГМ пластин. Нещодавно, у зв'язку з 30-річчям винаходу та застосування ФГМ, Saleh та ін. [10] забезпечили детальний опис про виробничий дизайн, застосування та проблемні питання, що пов’язані з використанням ФГМ.

Наведемо декілька робіт, в яких було досліджено конкретні ФГМ сендвіч-структури.

Zenkour [183, 184] використав синусоїдальну зсувну деформаційну теорію, для дослідження згину ФГМ сендвіч пластин, виготовлених із трьох шарів із керамічною/металевою ФГМ поверхнею та гомогенною керамікою для заповнювача. У роботі [183] було представлено аналітичний розв’язок Нав’є для дослідження статичного відгуку прямокутної ФГМ пластини. Zhang and Zhou [185] вивчали статичну та динамічну поведінку ФГМ сендвіч пластин на основі фізично нейтральних поверхонь. В роботі Sobhy [186] проаналізовано вільні коливання та визначено критичне навантаження при згині багатошарової прямокутної пластини, що знаходиться на пружній основі та має різні умови закріплення. Hessameddin Yaghoobi and Pooria Yaghoobi в роботі [187] на базі теорії FSDT досліджували поведінку ФГМ сендвіч пластин, що знаходяться на пружній основі, з урахуванням термодинамічного аналізу. Zenkour and Sobhy [188, 189] дослідили стійкість ФГМ сендвіч пластин у тепловому середовищі для різних типів матеріалів та з урахуванням пружної основи. У роботі Dozio [53] було використано 2D моделі з використанням методу Рітца зі змінною кінематикою для дослідження динамічної поведінки сендвіч пластин з однорідною поверхнею лицьових шарів та заповнювачем з ФГМ. Pandey and

Pradyumna [190] запропонували чисельні методи для дослідження вільних коливань ФГМ сендвіч пластин у тепловому середовищі. Carrera та ін. [191, 192] розробили декілька уточнених ієрархічних моделей використовуючи уніфіковану формулу Carrera (CUF) для аналізу ФГМ одношарових і багатошарових пластин і оболонок із вбудованими ФГМ шарами. Геометрично нелінійні задачі для неоднорідних ізотропних і ФГМ пластин і оболонок були розв’язані в роботах Shen [193], F.Alijani і M.Amabili [194-197] та роботах інших дослідників. Зауважимо, що тут і в інших публікаціях розглядалися ФГМ сендвіч пластини та оболонки прямокутної форми в плані.

1.3.2 Огляд робіт, в яких досліджено вплив пористості

Під час виробничого процесу різниця в температурах затвердіння між двома компонентами може призвести до утворення пор або мікропустот у структурах ФГМ [198], що може суттєво вплинути на їхню механічну поведінку. Тому критично важливо оцінити вплив *пористості* на динамічні та статичні відгуки ФГМ конструкцій.

Багато науковців займалися аналізом динамічної реакції ФГМ структур з пористістю. Наприклад, Kim та ін. [199] досліджували лінійну вібрацію, згин та втрату стійкості ФГМ мікропластин із пористістю, тоді як Duc та ін. [200] досліджували нелінійні статичні та динамічні відгуки пористих ФГМ пластин, що спираються на пружну основу. Крім того, деякі дослідники аналізували нелінійну динамічну реакцію ФГМ структур. Liu та ін. [201, 202] досліджували нелінійні вимушені коливання ФГМ циліндричних сендвіч оболонок з пористістю, а Hao та ін. [203] досліджували нелінійні коливання і хаос для ФГМ пластин і оболонок на основі теорії деформації зсуву третього порядку. При вивченні вільних коливань та стійкості пористих ФГМ сендвіч пластин Daikh AA. та Zenkour AM. [204] представили чотири види розподілу пористості і нові моделі пористих ФГМ сендвіч пластин, що базуються на використанні сигмоїдального закону. Vinh P.V. та Huy L.Q. [205] використовували метод скінчених елементів для аналізу ФГМ сендвіч пластин з пористостю за допомогою нової гіперболічної теорії деформації зсуву. Також теорія деформації зсуву вищого порядку (HSDT) була застосована Cong P.H та ін. [206] для аналітичного аналізу поведінки при втраті стійкості пористих ФГМ пластин, що піддаються термічним і механічним навантаженням. Zur і Jankowski [207] провели багатопараметричне дослідження аналізу вільних коливань круглих пористих ФГМ пластин з використанням класичної теорії пластин. Li та ін. [208] розглянули напіваналітичний підхід до дослідження поведінки вільних коливань пористих циліндричних ФГМ оболонок. Wang і Wu [209] досліджували характеристики вільних коливань пористих циліндричних ФГМ оболонок з різними граничними умовами із застосуванням теорії синусоїдальної зсувної деформації (SSDT).

Дослідження пористої ФГМ структури з рівномірним і нерівномірним розподілом пористості спостерігалися протягом останніх кількох років. Rezaei і Saidi [210, 211] проаналізували вільні коливання та реакцію на згин пористих пластин з різними граничними умовами. Zenkour [212] досліджував статичну реакцію пористих ФГМ одношарових і сендвіч пластин за допомогою квазі-3D теорії деформації зсуву. Trinh та ін. [213] досліджували вплив рівномірно та нерівномірно розподіленої пористості на динамічну поведінку циліндричних, сферичних і гіперболічно-параболоїдних ФГМ оболонок за допомогою FSDT. Thrin та ін. [214] розробили уточнену теорію деформації зсуву з трьома змінними, щоб дослідити вільні коливання та поведінку згину пористих подвійно вигнутих ФГМ пологих оболонок, що піддаються рівномірному та синусоїдальному навантаженню з урахуванням двох типів пористості. Більшість наведених вище робіт стосувалися прямокутних об’єктів. У роботі [216] Balak та ін. досліджували динамічну поведінку еліптичної багатошарової пластини з насиченим пористим наповнювачем, що спирається на пружну основу. Автори розглядали випадок, коли лицьові шари є п'єзоелектричними. Для розв’язку поставленої задачі автори застосували теорію зсувної деформації першого порядку та метод Гальоркіна.

1.3.3 Огляд робіт, в яких вивчається вплив пружної основи

Тема динамічного та статичного аналізу ФГМ пластин і оболонок, *що спираються на пружну основу*, постійно привертає увагу багатьох дослідників [217-220]. Для розв'язання технічних проблем, що виникають при дослідженні поведінки цих об'єктів, розроблено різні теорії деформування та методи [221-223]. Зазвичай моделювання пружної основи виконується за моделями Вінклера або більш загальною двопараметричною моделлю Пастернака [224].

Математичне моделювання ФГМ виконується за різними підходами, але більшість дослідників розглядають механічні властивості матеріалу як величини, які змінюються за товщиною об'єкту. При цьому коефіцієнт Пуассона вважається постійним через його невелику варіацію від металевої до керамічної фази. Для визначення ефективних властивостей ФГМ здебільшого використовується модель Фойгта [225], яка заснована на степеневому або експоненційному законі, а також модель Морі-Танака [226].

Автори роботи [227] для аналізу двояко криволінійних оболонок, що спираються на пружний фундамент Вінклера-Пастернака використовували метод узагальнених диференціальних квадратур (GDQ). В роботі [228] для дослідження ФГМ пластин на пружній основі використано квазі-трьохвимірну теорію високого порядку (HSDT) гібридного типу. Yang і Shen [85] провели вібраційний аналіз початково напруженої ФГМ пластини, що спирається на пружну основу. Вони використовували простий степеневий закон для градації матеріалу з фіксованими граничними умовами. Amini та ін. [221] провели тривимірний вібраційний аналіз ФГМ пластини, що спирається на фундамент Вінклера. Для отримання мод коливань застосовано поліноми Чебишева та метод Рітца. Результати аналізу вільних коливань та втрати стійкості багатошарової пластини S-ФГМ (Sigmoid FGM), що спирається на пружну основу, представили Singh і Harsha [229]. Malekzadeh і Karami [230] досліджували вільні коливання неоднорідної товстої пластини з товщиною, що безперервно змінюється, на двопараметричній пружній основі, використовуючи диференціальні квадратурні методи.

В багатьох публікаціях автори враховують одночасно як пружну основу, так і пористість. Nguen та ін. [231] використовували теорію деформації зсуву першого порядку для отримання теоретичних формулювань та ілюстрації нелінійного відгуку пористих ФГМ пластин під дією теплових і механічних навантажень, що підтримується моделлю пружної основи Пастернака. Рівномірно та нерівномірно розподілені пористості були включені в закон розподілу розрахунку ефективних властивостей ФГМ пластин. Kumar та ін. [232] застосували теорію деформації зсуву першого порядку для пористих ФГМ пластин змінної товщини, що спираються на двопараметричну пружну основу. Було досліджено розв’язок для пластин як постійної, так і змінної товщини.

1.3.4 Стійкість та нелінійні коливання ФГМ структур

Задачі стаціонарної та динамічної стійкості ФГМ пластин та оболонок під дією сил в серединній площині складають головну частину їх нелінійного аналізу. Дослідження *стійкості* ФГМ пластин та пологих оболонок передбачає розрахунок критичного навантаження та знаходження зон динамічної стійкості/нестійкості за різних типів стискаючих зусиль. Ці навантаження створюють стискаючі напруження в площині, що може привести до втрати стійкості об’єкту, який досліджується, і навіть його руйнування.

Фундаментальний внесок в розвиток теорії нелінійних коливань ізотропних та анізотропних пластин та оболонок і методів їх дослідження було зроблено в роботах видатних науковців А.М.Ляпунова [233], А.А.Андронова [234], Н.Н.Боголюбова [235], Ю.А.Мітропольського [236], И.Г.Малкіна [237], В.В.Болотіна [238], А.С.Вольміра [239], В.Д.Кубенка [240], С.Г.Лехницького [241], А.І.Лур’є [242] та ін. Значний вклад у подальший розвиток методів дослідження динамічної поведінки пластин та оболонок внесли роботи А.Я.Александрова, К.В.Аврамова, М.А.Алфутова, В.А.Баженова, О.І.Беспалової, А.Т.Василенка, О.Я.Григоренка, В.З.Грищака, Т.С.Краснопольської, Л.В.Курпа, Р.М.Кушніра, Л.Лібреску, В.В.Лободи, М.В.Марчука, Ю.В.Міхліна, Г.Т.Сулима, В.Г.Піскунова, Б.Л.Пелеха, Дж.Редді, Л.А.Фільштинського, П.П.Чулкова, М.О.Шульги та багатьох інших вчених.

Стосовно ФГМ пластин та оболонок нелінійний аналіз набув подальшого розвинення багатьма науковцями [117, 169, 170, 215, 220, 244-247].

Для дослідження стійкості та коливань ФГМ стиснутих пластин було розроблено багато теорій та методів для їх реалізації [248-251]. Kettaf F.Z. та ін. [248] розробили гіперболічну модель, яка враховує зсувні деформації, та застосували її для дослідження стійкості ФГМ сендвіч пластин під дією термічного навантаження. Nguyen V.H. та ін. [249] запропонували нову обернену тригонометричну зсувну деформаційну теорію для ізотропних та ФГМ сендвіч пластин. Akavci S.S. [250] дослідив згин, коливання та стійкість ФГМ прямокутних сендвіч пластин на пружній основі за допомогою нової зсувної гіперболічної та нормальної деформаційних теорій. Neves A.M.A. та ін. [251] використовували деформаційну синусоїдальну теорію зсуву. Термомеханічна поведінка функціонально-градієнтних сендвіч пластин на пружній основі була досліджена Taibi F.Z. та ін. [40] і Tung H.V. [252].

Дослідження стійкості ізотропних та ФГМ прямокутних пластин для різних типів граничних умов та варіацій товщини матеріалу було виконано в роботі [253]. В дослідженні Wang та ін. [254] було показано, що класична теорія пластин зазвичай недооцінює прогин і переоцінює власні частоти та критичне навантаження для товстих пластин. Samsam Shariat та ін. [255] і Birman [256] досліджували проблему стійкості ФГМ прямокутних пластин, що піддаються одновісному стисненню. Марчук О.В. та ін. [257] вивчали стійкість ФГМ пластин за допомогою 3D теорії пружності. Wu L. [258] розробив нову модель для прямокутної вільно опертої ФГМ пластини та дослідив вплив співвідношення сторін і температурного навантаження на стійкість. Czechowski L. та ін. [259] були проведені дослідження закритичної поведінки ФГМ коробчастих структур. Javaheri та Eslami [76] досліджували стійкість ФГМ пластин під дією стискаючих навантажень. Fekrar та ін. [246] запропонували нову уточнену теорію, використовуючи метод Нав’є та обмежуючись чотирма невідомими функціями для дослідження стійкості прямокутних вільно опертих ФГМ пластин, навантажених у площині. Відповідність між прогином, критичним навантаженням і частотою тонких ФГМ пластинами та відповідними однорідними пластинами вивчали Li Shi-Rong та ін. [261]. Zenkour [262] представив повний аналіз стійкості та вільних коливань вільно опертих прямокутних ФГМ сендвіч панелей, що складаються з однорідного заповнювача та ФГМ лицьових шарів. Shen та ін. [263] досліджували ефект температурного навантаження на закритичну поведінку ФГМ сендвіч панелей. Kiani та ін. [264] визначили критичне навантаження і динамічні характеристики ФГМ сендвіч панелей, розміщених на пружній основі Пастернака, за різними граничними умовами. За допомогою методу скінченних елементів Na та Kim [265, 266] досліджували закритичний стан ФГМ сендвіч пластин, які піддаються рівномірному або нерівномірному підвищенню температури. Nguyen і Tung [267] на базі CPT вивели математичну модель для навантажених пластин та виконали аналіз прогину ФГМ пластин з використанням різних навантажень і співвідношень сторін. Park і Kim [268] розробили чисельну модель, засновану на FSDT, щоб дослідити закритичну поведінку ФГМ пластин під дією теплових навантажень. Результати аналізу вільних коливань та втрати стійкості багатошарової пластини S-ФГМ (Sigmoid FGM), що спирається на пружну основу, представили Singh і Harsha [229].

За допомогою FSDT Kiani та Elsami [269] провели аналіз втрати стійкості та дослідили закритичну поведінку ФГМ сендвіч пластин, що спираються на пружну основу, враховуючи термічне навантаження. Нелінійна теорія FSDT на припущеннях фон Кармана була розроблена Tung [252] для аналізу втрати стійкості та закритичної поведінки ФГМ сендвіч пластин, що знаходяться на пружній основі і піддаються рівномірному зовнішньому тиску, термічному навантаженню та одновісному стиску в тепловому середовищі. Yaghoobi H. та Yaghoobi P. [187] провели термомеханічний аналіз втрати стійкості ФГМ сендвіч пластин, що спираються на пружну основу. Duc та ін. [270] провів аналіз на стійкість ФГМ сендвіч оболонок усіченої конічної форми з ребрами жорсткості за термічних і механічних навантажень. Wang і Shen [271] використовували HSDT для аналізу стійкості ФГМ сендвіч пластин під дією термічних навантажень. Tu B.T та ін. [272] використовували нелінійну теорію зсувної деформації вищого порядку Редді (HSDT) для нового аналітичного дослідження втрати стійкості пологих пористих ФГМ круглих пластин на нелінійно пружній основі. Shen і Li [263] використовували HSDT для аналізу втрати стійкості та закритичної поведінки багатошарових ФГМ пластин при дії температурного навантаження та отримали аналітичні розв’язки з використанням методу збурень. Nguyen, Chien та ін. [273, 274] впровадили безсіточний метод з модифікованими базисними функціями. Потім цей метод поєднується з теорією зсувної деформації високого порядку (HSDT) для статичного та динамічного аналізу, вивчення втрати стійкості ФГМ одношарових та сендвіч пластин. Sobhy [275] провів аналіз втрати стійкості ФГМ сендвіч пластин, що спираються на пружну основу Вінклера–Пастернака в гігротермальних умовах за допомогою HSDT. Meksi та ін. [39] запропонували новий розв’язок Нав’є на основі HSDT для аналізу втрати стійкості ФГМ сендвіч пластин. Нехтуючи нормальними поперечними деформаціями, Daikh та Megueni [276] провели аналіз втрати стійкості ФГМ сендвіч пластин при термічному навантаженні. За допомогою експоненціальної теорії SDT Zenkour і Radwan [277] провели аналіз втрати стійкості ФГМ сендвіч пластин, що спираються на пружну основу в гігротермальних умовах. Neves та ін. [251] аналізують втрату стійкості ФГМ сендвіч пластин з використанням двох видів синусоїдальної теорії зсувної деформації: одна теорія враховує ефекти поперечної деформації, а друга не враховує ефекти поперечної деформації. Було помічено, що підхід, якій містить ефекти поперечної деформації, допомагає ефективно прогнозувати поведінку товстих ФГМ сендвіч пластин.

Однією з важливих складових розрахунку ФГМ пластин та оболонок є не тільки знаходження критичного навантаження, але і зон динамічної нестійкості, визначення їхньої закритичної поведінки при впливі статичного та динамічного навантаження в серединній площині. Проблема побудови областей динамічної нестійкості тонкостінних елементів конструкцій пов'язана з дослідженням так званих параметричних коливань. Періодичні навантаження, що діють у серединній площині пластини, за відповідних умов можуть спричинити інтенсивні поперечні коливання. Особливістю такого класу задач є можлива втрата стійкості при відповідних значеннях параметрів навантаження, що призводить до небажаних наслідків і навіть до руйнування конструкції. Параметричні коливання аналогічні вимушеним коливанням, але мають деякі специфічні особливості. Параметричний резонанс виникає при збігу збуджуючої частоти з подвоєною частотою власних коливань. Інша відмінність полягає у можливості збудження коливань при частотах менших, ніж частота головного резонансу. Ще однією особливістю параметричного резонансу є суцільні області збудження (області динамічної нестійкості). Завдяки цим та іншим факторам загальноприйняті методи демпфування, віброізоляції можуть не мати належного ефекту при параметричному резонансі. Якщо конструкція знаходиться у режимі вібрацій довгий час, то це може призвести до втомних руйнувань, а також до порушення її цілісності.

Дослідження параметричних коливань пластин та оболонок зводиться до вивчення системи диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від часу. Особливістю такого типу систем є те, що при деяких умовах тривіальний розв'язок системи може бути нестійким по Ляпунову. Це означає, що при деяких співвідношеннях параметрів навантаження та лінійної частоти недеформований стан пластини стає динамічно нестійким: виникають коливання, амплітуда яких зростає з часом. Задача про динамічну стійкість є нелінійною. Як було показано в роботі Челомея [279], задача про динамічну стійкість механічних систем в загальному випадку зводиться до систем звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

В недавні часи проблемі дослідження стійкості та параметричним коливанням ФГМ тонкостінних об'єктів під дією періодичного навантаження в своїй площині було присвячено велику кількість досліджень [96, 199-204].

Розроблено багато теорій і методів для дослідження стійкості та параметричних коливань ФГМ пластин та оболонок. Серед них – метод Релея, Релея–Рітца, Гальоркіна, методи скінченних різниць, скінченних елементів, диференціальних квадратур, диференціальних перетворень, граничних інтегральних рівнянь, колокацій та ін. [81, 205-209]. Огляд публікацій, в яких застосовано метод Релея–Рітца, наведено в роботах [280, 281]. З аналізу цих робіт можемо зробити висновок, що метод Релея–Рітца було застосовано для дослідження параметричних коливань багатошарових ФҐМ пластин і пологих оболонок з прямокутною формою плану [100, 205-207].

Наскільки відомо автору, дослідження стійкості ФГМ сендвіч пластин та оболонок складної форми, що спираються на пружну основу і зазнають нерівномірного стискаючого механічного навантаження, також майже відсутні. У цьому випадку слід враховувати докритичний стан пластини. В загальному випадку цю задачу можна розв’язати лише чисельними методами. Слід зазначити, що одним із найбільш часто використовуваних підходів серед наближених методів є метод скінченних елементів (МСЕ).

Незважаючи на велику кількість публікацій, розглянута проблема залишається актуальною. Так, в роботах українських та закордонних вчених представлено результати подальшого розвитку проблем нелінійної динаміки механічних систем [282, 283] та ін. В тому числі проаналізовано перехід від регулярного режиму до хаотичного, з цією метою в роботі [284] застосовано метод Бубнова-Гальоркіна для зведення системи рівнянь в частинних похідних (системи руху пластин та оболонок) до дискретної системи з скінченною кількістю степенів вільності. Сценарії переходу від гармонічних коливань до хаотичних досліджено в роботах [285, 286].

Як випливає з наведеного огляду, більшість публікацій присвячено розробці методів дослідження лінійних та нелінійних коливань ФГМ пластин та пологих оболонок із прямокутною формою плану. Щодо дослідження ФГМ об'єктів, в тому числі сендвіч структур, зі складною формою плану за наявності отворів, зовнішніх вирізів, а також із різними граничними умовами, наявності пружної основи та пористості, дії статичного та динамічного навантаження, різними законами визначення ефективних властивостей ФГМ, то варто зазначити, що таких робіт дуже обмежена кількість. Враховуючи, що геометрична форма реальних конструктивних елементів може бути досить складною, можна зробити висновок, що розробка нових універсальних методів для дослідження коливань ФГМ пластин і пологих оболонок зі складною формою плану за різних способів закріплення та врахування додаткових є дуже актуальною. У даній науковій роботі ця проблема успішно розв’язана за допомогою теорії R-функцій [287]. Головна перевага цієї теорії полягає в тому, що розв’язок крайової задачі можна будувати в аналітичному вигляді, що дозволяє потім використовувати його для комп'ютерної реалізації проблеми. Для ФГМ пластин та пологих оболонок теорію R-функцій розвинено та використано вперше. Раніше ця теорія була використана для ортотропних та багатошарових пластин та оболонок в рамках класичної та уточненої теорій першого порядку типу Тимошенко при активній участі автора даної дисертаційної роботи. Механічні властивості для багатошарових структур обчислювалися для всього пакету в цілому, на відміну від ФГМ, для яких механічні властивості залежать, як від температури, так і від положення точки вздовж товщини, тобто від аплікати точки. Для реалізації запропонованого підходу було розроблено відповідне програмне забезпечення в рамках системи POLE-RL [288], за допомогою якого вдалося розв’язати велику кількість важливих задач та зробити відповідні практичні рекомендації.

Тому обрана тема дисертаційної роботи є актуальною. На погляд автора, для розробки ефективних методів дослідження ФГМ пластин та оболонок складної форми для різних видів їх закріплення може бути використана теорія R-функцій та варіаційні методи.

Висновки за Розділом 1

В першому розділі дисертаційної роботи виконано огляд літератури, присвяченій дослідженню лінійних та геометрично нелінійних коливань, стійкості та згину ФГМ пластин та пологих оболонок.

Узагальнюючи огляд літератури в рамках аналітичних або чисельно-аналітичних методів розрахунку, зроблено висновок, що найбільш вивченими є лінійні задачі для пластин та пологих оболонок з прямокутною формою плану та простими граничними умовами.

Невивченими залишаються задачі для ФГМ пластин та пологих оболонок зі складною геометричною формою плану та різними видами граничних умов, в тому числі мішаних. Особливо це стосується ФГМ пластин та пологих оболонок з вирізами та отворами, які жорстко або шарнірно закріплені; пористих сендвіч ФГМ пологих оболонок, з урахуванням пружної основи; навантажених нерівномірно в серединній площині, що викликає неоднорідний докритичний стан; оболонок змінної товщини.

Ще більш потребують подальшої розробки методи дослідження перелічених проблем з урахування геометричної нелінійності.

Таким чином, головними завданнями дослідження є наступні:

- розробити метод розв’язку задач теорії лінійних коливань ФГМ пологих оболонок і пластин складної форми в плані, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методах;
- розробити новий підхід дослідження геометрично нелінійних коливань, який дозволяє звести вихідну нелінійну систему диференціальних рівнянь руху до звичайного нелінійного диференціального рівняння або системи рівнянь;
- побудувати нелінійні рівняння руху пологих оболонок у переміщеннях в рамках класичної та уточнених теорій першого та третього порядків з метою використання їх при реалізації запропонованого методу для розв’язання нелінійних задач;
- виконати варіаційні постановки задач, за допомогою розв’язків яких будується нелінійний розв’язок вихідної задачі;

- знайти аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, що визначають зусилля, моменти та перерізуючи сили, для різних законів розподілення об’ємних частин кераміки та металу ФГМ, в тому числі степеневого та сигмоїдального законів, причому як для одношарових ФГМ оболонок, так і для сендвіч ФГМ оболонок. Вивести аналогічні аналітичні формули для пористих ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин;
- розвинути конструктивні засоби теорії R-функцій для даного класу задач, побудувати структури розв’язків для різних крайових умов ФГМ пологих оболонок і пластин;
- розробити метод дослідження стійкості ФГМ пластин та пологих оболонок з урахуванням неоднорідного докритичного стану при рівномірному і нерівномірному стискуючому навантаженні в серединній площині;
- розв’язати низку тестових лінійних та геометрично нелінійних задач про коливання та стійкість пологих ФГМ оболонок з метою перевірки вірогідності розробленого метода та відповідного програмного забезпечення;
- застосувати розроблений метод та створене програмне забезпечення для розв’язання таких задач:

1) дослідити вплив градієнтного індексу на власні частоти та амплітудно-частотні характеристики ФГМ одношарових пологих оболонок складної форми в плані;

2) вивчити вплив схеми розташування шарів та різних типів ФГМ на власні частоти та частоти нелінійних коливань оболонок і пластин з вирізами та отворами;

3) дослідити вплив пористості на динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок та пластин;

4) проаналізувати вплив пружної основи на власні частоти та амплітудно-частотні характеристики ФГМ пологих оболонок та пластин;

5) дослідити вплив різних типів нерівномірного навантаження пластини в серединній площини, умов закріплення, типів ФГМ на величину критичного навантаження;

6) дослідити вільні коливання ФГМ пологих оболонок та пластин змінної товщини.

На основі проведених досліджень проаналізувати вплив названих факторів на власні частоти і поведінку скелетних кривих ФГМ пологих оболонок та пластин з метою надання відповідних рекомендацій для інженерів–конструкторів при проектуванні сучасних конструкцій.

Основною метою даної роботи є розробка універсального методу розв’язання і дослідження вказаних задач. Запропонований в даній роботі чисельно-аналітичний метод базується на використанні та розвиненні теорії R-функцій для нового класу задач, варіаційного методу Рітца, проекційного методу Бубнова-Гальоркіна, методу Рунге-Кутта.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНИХ ТА ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕМЕНТАХ СУЧАСНИХ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ, ВИРОБЛЕНИХ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

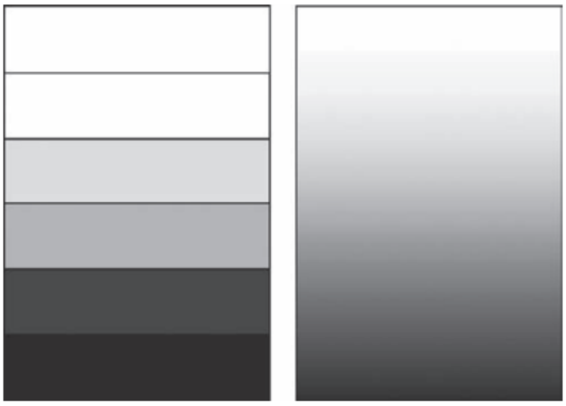
2.1 Деякі підходи до математичного моделювання механічних властивостей функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ)

Відомо, що функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) виготовляються із двох або більше видів матеріалів з різними властивостями. Детальний опис реальних градієнтних мікроструктур зазвичай недоступний, за винятком, можливо, інформації про розподіл об'ємних частин. Оскільки об'ємна частка кожної складової ФГМ поступово змінюється у напрямі градації, ефективні властивості ФГМ також змінюються у цьому напрямі. В основному існують два можливі підходи до моделювання ФГМ.

При першому підході передбачається переривчаста зміна об'ємної частки кераміки або металу, а ФГМ приймається шаруватим з однаковою об'ємною часткою в кожній області, тобто квазіоднорідними кераміко-металевими шарами (Рис. 2.1а).

При другому варіанті передбачається неперервна зміна об'ємної частки кераміки чи металу (Рис. 2.1б).

Оскільки функціонально-градієнтні структури дуже часто використовуються у високотемпературному середовищі, де очікуються значні зміни в механічних властивостях складових матеріалів [110], то для більш точного моделювання ФГМ важливо брати до уваги залежність складових матеріалу від температури.



а) б)

Рис. 2.1. Аналітичні моделі шарів ФГМ: а) переривчаста зміна об'ємної частки; б) неперервна зміна об'ємної частки

Така залежність для модуля Юнга E, коефіцієнта Пуассона ν, коефіцієнта теплового розширення α і теплопровідності k може бути визначена як нелінійна функція температури за допомогою наступного виразу [193]:

$$P_j = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3), \tag{2.1}$$

де $P_0, P_{-1,} P_1, P_2, P_3$ є коефіцієнти температури T (в К) (обчислюються для кожного конкретного матеріалу) та відповідних характеристик E, ν, α, k. Таблиці значень цих коефіцієнтів для деяких матеріалів наведено в [193]. Наприклад, для модуля Юнга ці значення представлені в Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Значення коефіцієнтів $P_0, P_{-1,} P_1, P_2, P_3$ для обчислення модулів пружності

Матеріал	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Цирконій (ZrO_2)	244.27E+9	0	-1.371E-3	1.214E-6	-3.681E-10
Оксид алюмінію (Al_2O_3)	349.55E+9	0	-3.853E-4	4.027E-7	-1.673E-10
Нітрид кремнію (Si_3N_4)	348.43E+9	0	-3.070E-4	2.160E-7	-8.946E-11
Тітан (Ti-6Al-4V)	122.56E+9	0	-4.586E-4	0	0
Нержавіюча сталь (SUS304)	201.04E+9	0	3.079E-4	-6.534E-7	0
Нікель (N_4)	223.95E+9	0	-2.794E-4	-3.998E-9	0

Взагалі ФГМ є неоднорідними за своєю природою, тому виконується його гомогенізація. Методи гомогенізації залежать від швидкості зміни властивостей складових частин або від градієнту зміни властивостей уздовж товщини [298]. Основні теорії гомогенізації об'ємних часток зазвичай формулюються для двофазних композитів. Ці теорії розглядають окремо складові як пружні ізотропні фазові складові. А моделі виражають властивості градієнтного матеріалу як лінійну функцію об'ємної частки та властивостей окремих складових структури:

$$E_{ef} = E_1 V_1 + E_2 V_2, \tag{2.2}$$

Об'ємні частки складових задовольняють рівнянню

$$V_1 + V_2 = 1, \tag{2.3}$$

тому рівняння (2.2) може бути записаним у вигляді

$$E_{ef} = (E_1 - E_2) V_1 + E_2 \tag{2.4}$$

Параметри E_1 та E_2 визначають пружні властивості верхньої та нижньої поверхні ФГМ оболонки/пластини відповідно. Зазвичай верхня поверхня є керамічною, а нижня металевою, тому формула (2.4), як правило подається у вигляді

$$E_{ef} = (E_c - E_m) V_c + E_m. \tag{2.5}$$

Аналогічний вигляд мають інші властивості ФГМ, а саме коефіцієнт Пуассона ν_{ef}, густина матеріалу ρ_{ef}, коефіцієнт теплового розширення α_{ef} і теплопровідність k_{ef}

$$\begin{aligned} \nu_{ef} &= (\nu_c - \nu_m) V_c + \nu_m \\ \rho_{ef} &= (\rho_c - \rho_m) V_c + \rho_m \\ \alpha_{ef} &= (\alpha_c - \alpha_m) V_c + \alpha_m \\ k_{ef} &= (k_c - k_m) V_c + k_m \end{aligned} \tag{2.6}$$

Моделі градації для об'ємної частки V_c найчастіше виконуються за наступними законами, які наведені нижче.

2.1.1 Степеневий закон Фойгта

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \tag{2.7}$$

де h - це товщина оболонки/пластини, k - це параметр, який керує зміною матеріалу в напрямку товщини. Надалі цей параметр будемо називати *градієнтним індексом* або *індексом об'ємної частки кераміки*. Він змінюється від 0 до нескінченності ($0 \leq k < \infty$). Коли $k = 0$, ми маємо оболонку, виготовлену повністю з кераміки; коли $k = \infty$, то буде металева оболонка. Зміни деяких властивостей ФГМ (модуль Юнга та густина матеріалу), які змінюються разом із товщиною пластини або оболонки, можна побачити на Рис. 2.2. Як показано на Рис. 2.2, зміна значення k генерує нескінченну кількість композиційних розподілів.

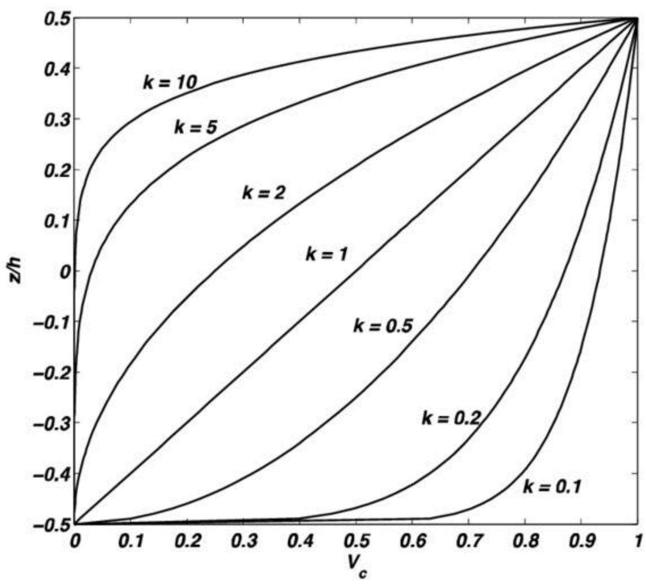


Рис. 2.2. Розподіл об'ємної частки кераміки по товщині для різних степеневих показників

2.1.2 Експоненціальний закон Фойгта

Експоненціальний закон Фойгта характеризується наступною формулою:

$$V_c = E_2 e^{a\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)}, \quad a = \frac{1}{h} ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right). \tag{2.8}$$

Подання модуля Юнга в напрямку товщини ЕФГМ оболонки/пластини зображено на Рис. 2.3.

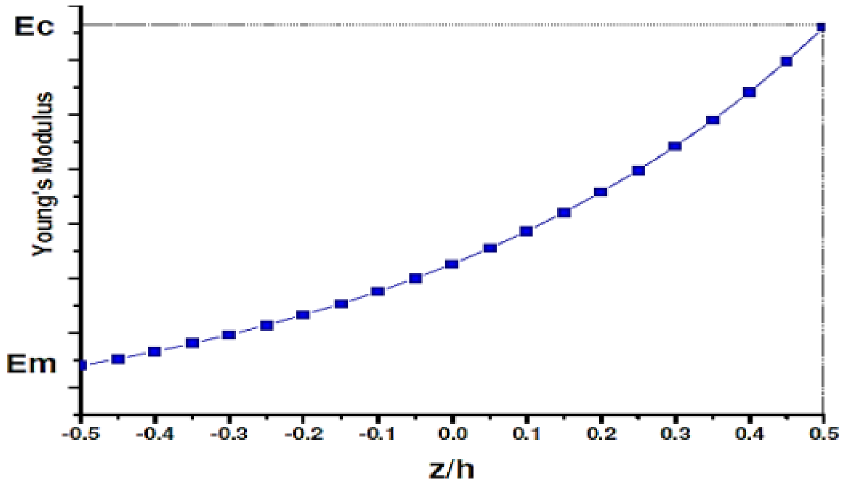


Рис. 2.3. Зміна модуля Юнга в напрямку товщини пластини

2.1.3 Сигмоїдальний закон Фойгта

Цей закон використовується тоді, коли треба запобігти концентрації напружень у граничному шарі. При зберіганні спадкоємності властивостей матеріалу у всьому діапазоні товщини у граничному шарі виникає концентрація напруження, тобто зміна властивостей відбувається не плавно [74]. Для розв'язання цього завдання використовуються два степеневі індекси. У дослідженні, проведеному Chi SH і Chung YL [75], для виразу зміни об'ємної частки використовувалися дві степеневі функції, щоб запобігти швидкій зміні напруження через інтерфейс. Наступні рівняння становлять зміну об'ємної частки з використанням двох степеневих індексів [31]:

$$V_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h}{2}+z}{\frac{h}{2}}\right)^k, \qquad -\frac{h}{2} < z < 0; \tag{2.9}$$

$$V_c = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h}{2}-z}{\frac{h}{2}}\right)^k, \qquad 0 < z < \frac{h}{2}. \tag{2.10}$$

На Рис. 2.4 показано зміну об'єму ФГМ для різних значень k при використанні сигмоподібного закону.

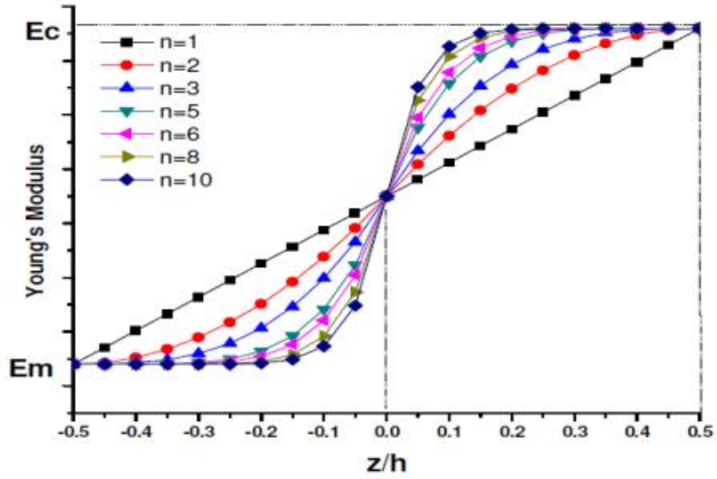


Рис. 2.4. Зміна модуля Юнга та товщини оболонки для різних значень k (відповідно n на рисунку) при використанні сигмоїдального закону

Таким чином, на основі вищевикладеного можна зробити висновок, що в загальному випадку механічні властивості ФГМ залежать від температури T та координати z. Тобто, узагальнена формула для обчислення ефективних властивостей матеріалу має вигляд:

$$P(z,T) = \big(P_c(T) - P_m(T)\big)V_c(z) + P_m(T), \tag{2.11}$$

де $P_c(T)$, $P_m(T)$ є відповідними характеристиками кераміки та металу при заданій температурі. Відповідно до загальних формул (2.4-2.6) та відповідних виразів для об'ємної частки $V_c(z)$ модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν, та густина матеріалу ρ, коефіцієнт теплового розширення α та теплопровідності k є функціями від товщини z та температури T, тому можна записати:

$$\begin{gathered} E(z,T) = \big(E_c(T) - E_m(T)\big)V_c(z) + E_m(T), \\ \rho(z,T) = \big(\rho_c(T) - \rho_m(T)\big)V_c(z) + \rho_m(T), \\ \nu(z,T) = \big(\nu_c(T) - \nu_m(T)\big)V_c(z) + \nu_m(T), \\ \alpha(z,T) = (\alpha_c - \alpha_m)V_c(z) + \alpha_m(T), \\ k(z,T) = (k_c - k_m)V_c(z) + k_m(T). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Варто відмітити, що представлені закони є зручним і простим інструментом для прогнозування та обчислення загальних властивостей та відгуків матеріалу.

2.1.4 Гомогенізація ефективних властивостей ФГМ за допомогою підходу Морі-Танака

Якщо композити мають чітко визначену безперервну матрицю та розривні включені частинки в областях градієнтної мікроструктури, то моделювання ефективних властивостей ФГМ може бути виконаним за допомогою підходу Морі-Танака. Мікроструктура такого композиту показана на Рис. 2.5.

Метод Морі-Танаки або підхід «еквівалентного середнього напруження включень» працює із концепцією середнього напруження. Ця схема враховує взаємодію пружних полів між сусідніми включеннями. З досвіду дослідників випливає, що модель Морі-Танака дає досить точне визначення властивостей композитних або градієнтних матеріалів, що складаються із чітко визначеної безперервної матриці з розривними включеннями [97].

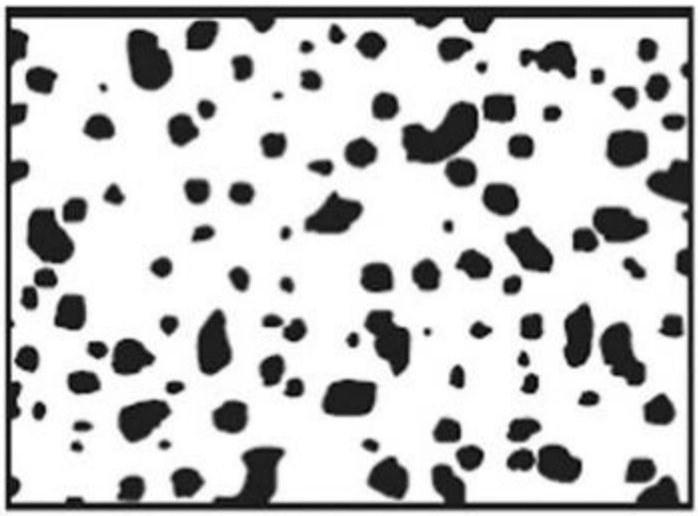


Рис. 2.5. Мікроструктура ФГМ

Для запису градієнтної об’ємної частки ФГМ за функцією степеня з емпіричною моделлю Морі-Танака введемо наступні позначення. Нехай матрична частина, позначена індексом 1, а дисперсна частина матеріалу позначена індексом 2. Тоді вважаємо, що коефіцієнти K_1, G_1 і V_1 позначають, відповідно, об’ємний модуль, зсув модуля і об'ємну частку матриці; K_2, G_2 і V_2 позначають відповідні властивості матеріалу включень та об'ємну частку дисперсної фази. Слід зазначити, що, як і раніш, виконується рівність $V_1+V_2=1$. Ефективний локальний об’ємний модуль K_f, модуль зсуву G_f, теплове розширення коефіцієнт α_f і теплопровідність k_f, отримані за схемою Морі–Танака для випадкового розподілу ізотропних частинок в ізотропній матриці, мають вигляд:

$$\frac{K_f - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(\frac{3(K_2 - K_1)}{3K_1 + 4G_1})},$$

$$\frac{G_f - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(\frac{(G_2 - G_1)}{G_1 + f_1})},$$

$$\frac{\alpha_f - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_1}}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}},$$

$$\frac{k_f - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(\frac{k_2 - k_1}{3k_1})},$$

де

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)}.$$

Інші методи моделювання механічних властивостей ФГМ досить детально описані в роботі Devesh Punera, Tarun Kant [31].

Порівняння моделі Морі-Танакі та самоузгодженої моделі, а також моделювання ФГМ методом кінцевих елементів було представлено в роботі [97]. Показано, що модель Морі-Танакі дозволяє точно передбачати властивості при чітко вираженій суцільній матриці та переривчастих включеннях, а самоузгоджена модель краще підходить для скелетних мікроструктур, що характеризуються широкою перехідною зоною між областями з переважанням однієї зі складових фази.

У даній дисертаційній роботі для моделювання ефективних властивостей функціонально-градієнтних матеріалів використовуються перші два закони: степеневий та сигмоїдальний закони Фойгта.

Для виконання математичного моделювання нелінійних динамічних та статичних процесів, які відбуваються у ФГМ пластинах та пологих оболонках, використовувалися три найбільш поширені теорії, а саме – класична теорія (CST), уточнена теорія першого порядку (FSDT) та теорія вищого порядку (теорія Редді, HSDT). Розглянемо докладніше кожен із цих підходів.

2.2 Математичне моделювання задач про коливання та згин ФГМ пологих оболонок у рамках класичної геометрично нелінійної теорії (CST)

Розглянемо задачу про геометрично нелінійні коливання ФГМ тонкої пологої оболонки/пластини постійної товщини h. Нехай оболонка розташована в криволінійній ортогональній системі координат $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, причому серединна поверхня оболонки належить координатній поверхні $\gamma = 0$, а координатні осі α і β збігаються з лініями основних кривизн оболонки. Зважаючи на те, що ми розглядатимемо дуже пологі оболонки, приблизно можна прийняти, що внутрішня геометрія серединної поверхні нічим не відрізняється від евклідової геометрії на площині [182]. Тому далі замість криволінійних координат $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ будемо використовувати прямокутні $\{x, y, z\}$.

Виконаємо математичну постановку задачі у рамках класичної геометрично нелінійної теорії Доннелла-Муштарі-Власова, яка базується на гіпотезах Кірхгоффа-Лява:

- *нормальний до серединної поверхні прямолінійний елемент після деформації залишається прямолінійним, нормальним та зберігає свою довжину;*
- *нормальними напруженнями на поверхнях, паралельних серединній поверхні, можна знехтувати.*

Використання цих гіпотез дозволяє компоненти переміщення точок, які не лежать на серединній (координатній) поверхні, надати у вигляді:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y), \tag{2.13}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y), \tag{2.14}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \tag{2.15}$$

де u_0, v_0, w_0- переміщення точок координатної поверхні; $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$- кути повороту координатної поверхні у площинах $x = const$, $y = const$ відповідно. Ці кути визначаються як

$$\psi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{u_o}{R_x}, \quad \psi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{v_0}{R_y}. \tag{2.16}$$

У рамках класичної геометрично нелінійної теорії відносні деформації подовження та зсуву серединної поверхні тонкої оболонки з урахуванням геометричних нелінійностей мають вигляд [239]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + z\chi_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + z\chi_{22}, \ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + z\chi_{12}, \tag{2.17}$$

де

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \\ \varepsilon_{12}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right), \end{gathered} \tag{2.18}$$

тут $k_1 = \frac{1}{R_x}$ і $k_2 = \frac{1}{R_y}$ – кривини оболонки.

Відносні зміни головних кривин та деформація кручення задаються формулами:

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \tag{2.19}$$

Для зручності будемо розглядати деформації $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{12},$ а також деформації $\varepsilon_{11}^0,\ \varepsilon_{11}^0,\ \varepsilon_{11}^0$ і зміни кривин $\chi_{11},\ \chi_{22},\ \chi_{12},$ як координати наступних векторів $\varepsilon = \{\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{12}\},\quad \varepsilon^0 = \{\varepsilon_{11}^0,\ \varepsilon_{22}^0,\ \varepsilon_{12}^0\},\quad \chi = \{\chi_{11},\ \chi_{22},\ \chi_{12}\}$ Тоді формули (2.17) можна записати як

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\chi\}.$$

Припускаємо, що деформації відповідають закону Гука. Зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається відомими виразами:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{12}}{E}, \tag{2.20}$$

де $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ є модулем зсуву. З формули (2.20) отримуємо

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}. \tag{2.21}$$

З метою зведення тривимірної задачі до двовимірної, в теорії оболонок та пластин замість напружень вводяться їх інтегральні характеристики зусилля

N_{11}, N_{22}, N_{12} та моменти M_{11}, M_{22}, M_{12}, які визначаються наступними формулами:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz, \ (i, j = 1,2), \qquad (2.22)$$

де N_{11}, N_{22} є нормальні зусилля на серединній поверхні оболонки, N_{12}, N_{21} є зсувні зусилля, M_{11}, M_{22} є згинальні моменти, M_{12}, M_{21} - це крутні моменти.

Для ФГ матеріалів після інтегрування ми отримуємо наступні співвідношення пружності (зв'язок між деформаціями та рівнодіючими напруженнями і моментами $N_{ij}, M_{ij}, (i, j = 1,2)$), які запишемо у матричній формі:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon\} + [B]\{\chi\}, \qquad (2.23)$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\}, \qquad (2.24)$$

де матриці $[A]$, $[B]$, $[D]$ мають вигляд:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \ (2.25)$$

Тоді в розгорнутому вигляді

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \qquad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

де

$$A_{11} = A_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz, \; A_{12} = A_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz, A_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz, \quad (2.28)$$

$$B_{11} = B_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz, B_{12} = B_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12}\, z dz, B_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} z dz, \quad (2.29)$$

$$D_{11} = D_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 dz, \; D_{12} = D_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z^2 dz, D_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} z^2 dz, \quad (2.30)$$

де через Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}, Q_{66} позначені наступні вирази:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \qquad Q_{12} = \nu Q_{11}, \qquad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\,. \quad (2.31)$$

Надалі будемо вважати, що коефіцієнти Пуассона задовольняють умові $\nu_m = \nu_c$, тоді коефіцієнти A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} можна обчислити інтегруванням вздовж товщини. Вигляд цих коефіцієнтів залежить від прийнятого розподілення об'ємної долі кераміки та металу. У даній роботі було одержано такі вирази для різних випадків та використаних законів. У наступних розділах будуть наведені їх аналітичні вирази для кожного конкретного вигляду закону розподілення об’ємних часток цих складових.

При цьому вирази для $A_{12},\ B_{12},\ D_{12},\ A_{66},\ B_{66},\ D_{66}$ визначаються як:

$$A_{12} = \nu A_{11}, \quad B_{12} = \nu B_{11}, \quad D_{12} = \nu D_{11}, \quad (2.32)$$

$$A_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) A_{11}, \quad B_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) B_{11}, \quad D_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) D_{11}. \quad (2.33)$$

Для того щоб одержати рівняння рівноваги, треба знайти варіацію повної енергії оболонки

$$W = P - T - A, \tag{2.34}$$

де під T ми розуміємо кінетичну енергію, P - це є потенціальна енергія, A – це робота зовнішніх сил. В рамках класичної теорії максимальна потенціальна енергія обчислюється за формулою:

$$P = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}(N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12})\, d\Omega. \tag{2.35}$$

Максимальна кінетична енергія в рамках класичної теорії визначається як:

$$T = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\rho h\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right) d\Omega. \tag{2.36}$$

При дії зовнішнього поперечного навантаження інтенсивності $q(x,y)$ та навантажень $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$ в серединній площині робота зовнішніх сил обчислюється як

$$A = \iint_{\Omega}\left(up_x + vp_y + qw\right) d\Omega. \tag{2.37}$$

Рівняння руху можуть бути одержані за допомогою енергетичного принципу Гамільтона-Остроградського [71, 193, 239], згідно з яким повинно виконуватися наступне варіаційне рівняння

$$\delta W = \delta\int_{t_0}^{t_1}(P - T - A)\, dt = 0, \tag{2.38}$$

де $[t_0,\ t_1]$ - це проміжок часу, на якому відбувається даний процес. В багатьох роботах [32, 194, 227] були одержані рівняння руху, тому не будемо приводити їх виведення, а скористаємося відомими.

Рівняння руху ФГМ оболонки в рамках класичної теорії [193] мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + p_x = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + p_y = I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_1N_{11} + k_2N_{22} + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\cdot N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = Q_y, \tag{2.39}$$

де I_0, I_1, I_2 є моменти інерції маси, які визначаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz. \tag{2.40}$$

Якщо в третє рівняння системи (2.39) підставити вирази для Q_x, Q_y із четвертого та п'ятого рівнянь, то ми одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + p_x = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + p_y = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cdot N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

$$+ N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad . \tag{2.41}$$

Для задач згину під дією поперечного навантаження вважаємо, що коефіцієнти I_0, I_1, I_2 дорівнюють нулю, тобто сили інерції відсутні. А функціонал (2.34) має вигляд:

$$W = P - A, \tag{2.42}$$

де

$$A = \iint_\Omega qw d\Omega.$$

2.3 Математичне моделювання задач про коливання та згин ФГМ пологих оболонок у рамках геометрично нелінійної теорії першого порядку (FSDT)

Уточнена теорія першого порядку базується на гіпотезі прямої лінії:

Прямолінійний нормальний до координатної площини елемент після деформації залишається прямолінійним, але не перпендикулярним до деформованої поверхні.

Ця теорія застосовується для дослідження як тонких оболонок, так і оболонок середньої товщини, і навіть для панелей типу «сендвіч» (із заповнювачем).

У рамках уточненої теорії першого порядку (FSDT) переміщення задаються так само, як і в класичній теорії:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z \cdot \psi_x(x,y),$$
$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z \cdot \psi_y(x,y), \tag{2.43}$$
$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

де

$$\psi_x(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{u_o}{R_x}, \quad \psi_y(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{v_0}{R_y}.$$

У рамках уточненої теорії першого порядку відносні деформації подовження та зсуву серединної поверхні тонкої оболонки з урахуванням геометричних нелінійностей мають такий же вигляд, як і в класичній теорії (CST), але тут додаються деформації зсуву ε_{13}, ε_{23} [239]. Таким чином, маємо:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + z\chi_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + z\chi_{22}, \ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + z\chi_{12} \tag{2.44}$$

де

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2,$$
$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \tag{2.45}$$
$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right),$$

тут $k_1 = \frac{1}{R_x}$ и $k_2 = \frac{1}{R_y}$ – кривини оболонки.

Деформації зсуву є наступними:

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y. \tag{2.46}$$

Крім цього, на відміну від класичної теорії, компоненти вектора $\{\chi\}$ представляються як:

$$\chi_{11} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \chi_{22} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \chi_{12} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}. \tag{2.47}$$

Зв’язок між деформаціями та рівнодіючими напруженнями і моментами запишемо у матричній формі:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\chi\},$$
$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\chi\}.$$

Або в розгорнутому вигляді

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \qquad (2.48)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}. \qquad (2.49)$$

Коефіцієнти матриць $[A]$, $[B]$, $[D]$ визначаються як і у випадку класичної теорії за формулами (2.28)-(2.31).

У рамках уточненої зсувної геометрично нелінійної теорії першого порядку максимальна потенціальна енергія обчислюється за формулою:

$$P = \int_{\Omega}\big(N_{11}\varepsilon_{11}^0 + N_{22}\varepsilon_{22}^0 + N_{12}\varepsilon_{12}^0 + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13}^0 + $$
$$+ Q_y\varepsilon_{23}^0\big)d\Omega, \quad (2.50)$$

Поперечні сили визначаються в такий спосіб:

$$Q_x = K_s^2 A_{66}\varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{66}\varepsilon_{23}, \qquad (2.51)$$

де K_s^2 є коефіцієнтом зсуву;

коефіцієнт A_{66} визначається за допомогою формули (2.33).

Максимальна кінетична енергія в рамках уточненої зсувної теорії першого порядку визначається як:

$$T=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(I_0\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right)+2I_1\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+I_2\left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right)^2\right)\right)d\Omega. \qquad (2.52)$$

При дії зовнішнього поперечного навантаження інтенсивності $q(x,y)$, та навантажень $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$ в серединній площині робота зовнішніх сил обчислюється як і в класичній теорії за формулою (2.37):

$$A=\iint_{\Omega}\left(up_x+vp_y+qw\right)d\Omega.$$

Якщо на оболонку діє лише поперечне навантаження $q(x,y)$, то повна енергія оболонки визначається за допомогою формули (2.43).

Аналогічно, як і в класичній теорії рівняння руху можуть бути одержані за допомогою енергетичного принципу Гамільтона-Остроградського [71, 193, 239].

Нелінійні коливання ФГ пологих оболонок в рамках цієї теорії описуються п'ятьма рівняннями руху з п'ятьма невідомими - переміщеннями u, v, w та кутами повороту ψ_x, ψ_y:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x}+\frac{\partial N_{12}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial y}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+k_1N_{11}+k_2N_{22}+N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x}+\frac{\partial M_{12}}{\partial y}-Q_x=I_2\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial y}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x}-Q_y=I_2\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \qquad (2.53)$$

2.4 Математичне моделювання задач про коливання та згин ФГМ пологих оболонок у рамках теорії оболонок вищого порядку (теорії Редді)

Класична теорія оболонок та уточнена теорія першого порядку є найпростішими теоріями, і вони добре описують кінематичну поведінку об'єктів. Теорії вищого порядку можуть уявити кінематику краще, де вони не вимагають використання коефіцієнта зсувної деформації, можуть забезпечити більш точні розрахунки для товстих пластин та пологих оболонок. Однак ці теорії включають результуючі напруження високих порядків, які важко інтерпретуються і вимагають значно більших зусиль для їх обчислення.

В принципі можна розвинути в ряд поле переміщень по координаті товщини до будь-якої бажаної степені. Однак через алгебраїчну складність і обчислювальні зусилля, пов'язані з теоріями вищого порядку в обмін на незначний виграш в точності, спроби створення теорій вище третього порядку практично не робилися. Теорій третього порядку достатньо, щоб уникнути введення поправочних коефіцієнтів для обчислення зсувних деформацій та напружень, які використовуються в теорії першого порядку. Треба зазначити, що на теперішній час розвинуто багато теорій третього порядку. Але ми зупинились не теорії Reddy (TSDT), яка була використана в даній роботі [142].

Теорія пластин третього порядку базується на тих самих припущеннях, що й класичні теорії та теорії пластин першого порядку, за винятком того, що послабляється припущення щодо прямолінійності та нормальності поперечної нормалі після деформації завдяки розвиненню переміщень (u, v, w) як кубічних функцій від координати товщини [247]:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z \cdot \psi_x(x,y) - c_1 z^3 \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \qquad (2.54)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z \cdot \psi_y(x,y) - c_1 z^3 \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right), \qquad (2.55)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t). \qquad (2.56)$$

Тут (u_0, v_0, w_0) и $(\psi_x,\ \psi_y)$ мають той же фізичний зміст, що і в теорії першого порядку: вони позначають переміщення та кути поворотів поперечних нормалей до площини $z = 0$ відповідно. Якщо $c_1 = 0$, то отримуємо теорію першого порядку

(FSDT). Для теорії Редді третього порядку цей коефіцієнт приймає значення $c_1 = \frac{4}{3h^2}$.

В рамках цієї теорії деформації подовження та зсуву серединної поверхні тонкої оболонки з урахуванням геометричної нелінійності визначаються як [170, 193]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(0)} \\ \varepsilon_{22}^{(0)} \\ \varepsilon_{12}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{11}^{(3)} \\ \chi_{22}^{(3)} \\ \chi_{12}^{(3)} \end{Bmatrix}, \tag{2.57}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13}^{(0)} \\ \varepsilon_{23}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{13}^{(2)} \\ \chi_{23}^{(2)} \end{Bmatrix}, \tag{2.58}$$

де

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(0)} \\ \varepsilon_{22}^{(0)} \\ \varepsilon_{12}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{Bmatrix}, \tag{2.59}$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \tag{2.60}$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_{11}^{(3)} \\ \chi_{22}^{(3)} \\ \chi_{12}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \tag{2.61}$$

також

$$\{\gamma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13}^{(0)} \\ \varepsilon_{23}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \tag{2.62}$$

$$\{\gamma^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \chi_{13}^{(2)} \\ \chi_{23}^{(2)} \end{Bmatrix} = -\mathrm{c}_2 \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \tag{2.63}$$

де $c_2 = 3c_1$.

Відзначимо, що зусилля у площині $N = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}$, згинальні та крутні моменти $M = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}$, напруження вищого порядку $P = \{P_{11}, P_{22}, P_{12}\}$ та $R = \{R_1, R_2\}$ та поперечні зусилля $Q = \{Q_1, Q_2\}$ визначаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E \\ B & D & F \\ E & F & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \chi \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ D & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix}. \tag{2.64}$$

Вигляд матриць $[A]$, $[B]$, $[D]$ співпадає з формулами (2.25). Матриці $[E]$, $[F]$, $[H]$ мають аналогічний вигляд, тобто

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}, [H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix}, \tag{2.65}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(0)} \\ \varepsilon_{13}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{66} & 0 \\ 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(2)} \\ \varepsilon_{13}^{(2)} \end{Bmatrix}, \tag{2.66}$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{66} & 0 \\ 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(0)} \\ \varepsilon_{13}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{66} & 0 \\ 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(2)} \\ \varepsilon_{13}^{(2)} \end{Bmatrix}. \tag{2.67}$$

Елементи цих матриць $A_{ij}, B_{ij} D_{ij}, E_{ij} F_{ij}, H_{ij}$ є коефіцієнтами жорсткості оболонки, які визначаються за допомогою формул:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}(z,T)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz,\ i,j = 1,2,6, \tag{2.68}$$

$$\left(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}(z,T)(1, z^2, z^4)dz, \quad i,j = 4,5, \tag{2.69}$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{13} = Q_{23} = 0;$$

$$Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu)}. \tag{2.70}$$

У рамках уточненої геометрично нелінійної теорії третього порядку максимальна потенціальна енергія обчислюється за формулою

$$P = \iint\limits_{\Omega} \Big(N_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + N_{22}\varepsilon_{22}^{(0)} + N_{12}\varepsilon_{12}^{(0)} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12}$$

$$+ Q_x\varepsilon_{13}^{(0)} + Q_y\varepsilon_{23}^{(0)} + \left(P_{11}\chi_{11}^{(3)} + P_{22}\chi_{22}^{(3)} + P_{12}\chi_{12}^{(3)}\right) +$$

$$+ \left(R_1\varepsilon_{13}^{(0)} + R_2\varepsilon_{23}^{(0)}\right)\Big)\, \partial\Omega. \qquad (2.71)$$

Максимальна кінетична енергія в рамках уточненої теорії вищого порядку визначається як:

$$T = \iint\limits_{\Omega} \left(I_0\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right) + I_1\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_y}{\partial t}\frac{\partial v_0}{\partial t}\right) +\right.$$

$$+ I_2\left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right)^2\right) - c_1 I_3\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial v_0}{\partial t}\right) -$$

$$\left. - c_1 I_4\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right) + c_1^2 I_6\left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\right)^2\right)\right) d\Omega. \qquad (2.72)$$

Рівняння руху ФГМ оболонки в рамках уточненої теорії третього порядку мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} - k_1 Q_x = I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - c_1 I_4\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} - k_2 Q_y = I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - c_1 I_4\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial\left(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{12}\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(N_{12}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{22}\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

$$+ c_1\left(\frac{\partial^2 P_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{22}}{\partial y^2}\right) - c_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y}\right) =$$

$$= I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_1^2 I_7\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}{\partial t^2} + c_1 I_4\frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial t^2} + c_1 I_5\frac{\partial^2\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_x + c_2 R_1 - c_1\left(\frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right) = I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - c_1 I_5\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - Q_y + c_2 R_2 - c_1\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y}\right) = I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - c_1 I_5\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \qquad (2.73)$$

де як і раніше $k_1 = 1/R_x$, $k_2 = 1/R_y$ є головними кривинами оболонки за координатами x та y відповідно.

Інтеграли I_i $(i = \overline{1,5}, i = 7)$ обчислюються за формулами:

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z)\,(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz. \tag{2.74}$$

Якщо $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, тоді ми будемо мати рівняння руху, що відповідають теорії деформації зсуву першого порядку (FSDT).

2.5 Граничні умови

Система рівнянь руху оболонки доповнюється граничними умовами, які визначаються способом закріплення країв оболонки. Наведемо деякі види граничних умов.

У випадку *класичної теорії* (вектор переміщень $\{U\}$ містить три компоненти u, v та w) граничні умови задаються наступним чином.

Жорстке закріплення:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{2.75}$$

Закріплення, що перешкоджає зміщенню краю в тангенціальному напрямку (ковзне закріплення):

$$N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{2.76}$$

Закріплення, що перешкоджає зміщенню краю у нормальному напрямку (нерухомий шарнір):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \tag{2.77}$$

Закріплення, що перешкоджає зміщенню краю в тангенціальному напрямку (ковзкий шарнір):

$$N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \tag{2.78}$$

Контур шарнірно опертий і нерухомий у тангенціальному напрямку (класичний шарнір):

$$v_n = 0, \quad N_n = 0, \quad M_n = 0, \quad w = 0. \tag{2.79}$$

Вирази для N_n, M_n, T_n і v_n визначаються формулами:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \tag{2.80}$$

$$M_n = M_{11}l^2 + M_{22}m^2 + 2M_{12}lm, \tag{2.81}$$

$$T_n = N_{12}\left(l^2 - m^2\right) + \left(N_{11} - N_{22}\right)lm, \tag{2.82}$$

$$v_n = -um + vl, \tag{2.83}$$

де $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta = \sin\alpha$ – напрямні косинуси вектору нормалі до межі області.

У випадку *уточненої теорії першого порядку* вектор $\{U\}$ містить п'ять компонент u, v, w, ψ_x та ψ_y. Система (2.53) має бути доповнена відповідними граничними умовами:

Жорстке закріплення:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0. \tag{2.84}$$

Вільне опирання:

$$N_{11} = N_{12} = M_{11} = M_{12} = Q_x = 0. \tag{2.85}$$

Контур, вільний у тангенціальному напрямку та жорстко закріплений у поперечному напрямку:

$$N_{11} = N_{12} = w = \psi_x = \psi_y = 0. \tag{2.86}$$

Контур, жорстко закріплений у тангенціальному напрямку та вільний у поперечному напрямку:

$$u = v = M_{11} = M_{12} = Q_x = 0. \tag{2.87}$$

Нерухомий шарнір:

$$u = v = w = M_n = Q_y = 0. \tag{2.88}$$

Класичний шарнір:

$$N_n = v = w = M_n = Q_y = 0. \tag{2.89}$$

У випадку *теорії вищого порядку* граничні умови будуть наведені при розв'язанні конкретних задач.

Висновки за Розділом 2

1. В даному розділі представлені основні підходи до математичного моделювання механічних властивостей ФГМ. Обрано клас ФГ матеріалів, які складаються із двох типів матеріалу, а саме металу та кераміки. Звернено увагу на те, що для більш точного моделювання ФГМ важливо брати до уваги залежність складових матеріалу від температури. Така залежність для модуля Юнга E, коефіцієнта Пуассона ν, коефіцієнта теплового розширення α і теплопровідності k може бути визначена як нелінійна функція температури.

Враховуючи, що взагалі ФГМ є неоднорідними за своєю природою, необхідно виконувати їхню гомогенізацію. Дано характеристику найбільш використовуваним теоріям гомогенізації, які базуються на наступних законах: степеневий закон Фойгта, експоненціальний, сигмоїдальний та підхід Морі-Танака. В даній роботі обрано найбільш ефективні для комп'ютерного моделювання закони гомогенізації, а саме, степеневий та сигмоїдальний закони.

2. В цьому ж розділі представлені рівняння руху з урахуванням геометрично нелінійного деформування в рамках трьох теорій: класичної, уточненої теорії першого порядку та уточненої теорії третього порядку (теорії Редді TSDT). Наведені основні співвідношення для деформацій, зусиль в серединній площині, моментів та перерізуючих сил. Диференціальні рівняння рівноваги представлено в зусиллях та моментах. Подібна інформація необхідна в подальшому при розробці методу розрахунку статичної та динамічної поведінки ФГМ пластин та пологих оболонок різної форми.

Наведені результати цього розділу використовуються в інших розділах та в роботах автора [310-312, 314-318, 332-334, 336, 343-349, 360-368, 374].

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ТА ПЛАСТИН ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ, ЩО БАЗУЮТЬСЯ НА ВИКОРИСТАННІ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

Для розв'язання задач про лінійні та нелінійні коливання, згин та стійкість ФГМ пологих оболонок і пластин можуть використовуватися різні наближені методи такі, як метод скінчених елементів, послідовних наближень, методи малого параметру, метод Ньютона- Канторовича, метод Гальоркіна, метод рядів, методи багатьох масштабів та інші. При використанні названих методів досить часто використовується розв'язок Нав'є, який є точним для дослідження лінійних коливань вільно опертих прямокутних пластин та пологих оболонок. Завдяки тому, що метод R-функцій дозволяє знаходити власні функції для пологих оболонок і пластин практично довільної геометричної форми плану та широкого спектру крайових умов, ця здатність теорії R-функцій була використана в даній роботі для розробки нового методу розв'язання геометрично нелінійних задач теорії ФГМ пластин та пологих оболонок.

Розроблений метод складається з декількох етапів.

На першому етапі визначаються власні форми та власні значення ФГМ оболонки (одношарової або сендвіч, пористої, на пружній основі, змінної товщини). Застосування теорії R-функцій та використання методу Рітца дозволяє вирішити цю проблему для будь якої області та різних крайових умов.

Далі будується варіаційна постановка послідовності допоміжних крайових задач, розв'язання яких використовується для побудови нелінійного розв'язку вихідної задачі. Цей розв'язок у вигляді ряду, коефіцієнтами якого є невідомі функції, залежні від часу, підставляється у вихідну систему нелінійних диференціальних рівнянь. До цієї системи застосовується метод Бубнова-

Гальоркіна, в результаті чого вихідна система зводиться до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь.

На останньому кроці одержана система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь розв'язується методом Рунге-Кутта.

Алгоритм розв'язку задачі представлено нижче на Рис. 3.1

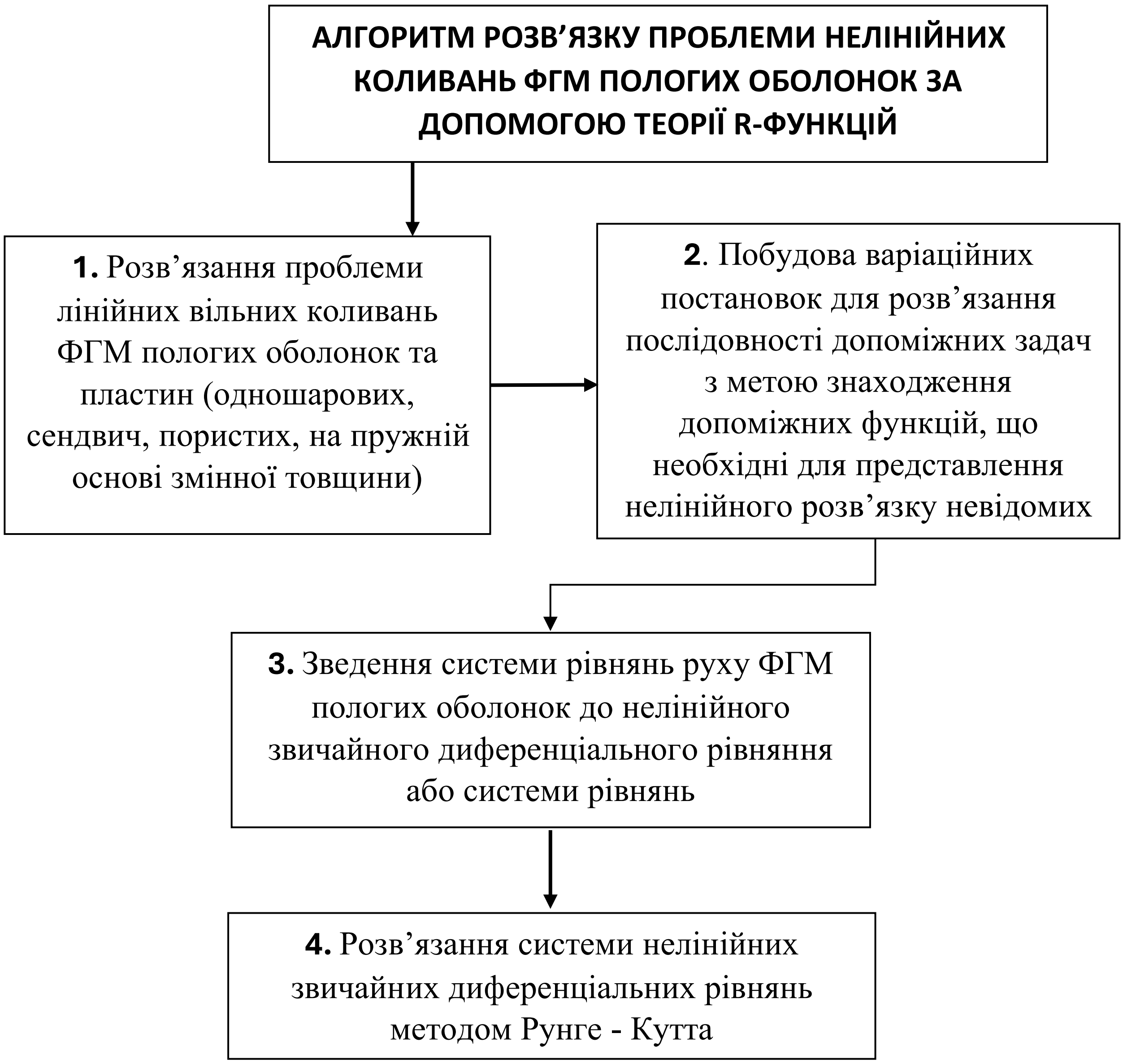


Рис. 3.1. Алгоритм розв'язку проблеми нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій

Для реалізації запропонованого методу необхідно побудувати систему руху ФГМ пологих оболонок в переміщеннях. Саме цьому і присвячено наступний пункт роботи.

3.1 Побудова нелінійних рівнянь руху пологих оболонок у переміщеннях в рамках класичної та уточнених теорій першого та третього порядків

Запропонований в даній роботі метод розв'язання задач про геометричні нелінійні коливання розроблено для нелінійних рівнянь рівноваги, які записані у переміщеннях. З цією метою представимо деформації, зусилля та моменти у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків

$$\{\varepsilon_{ij}^{0}\} = \{\varepsilon_{ij}{}^{L_0} + \varepsilon_{ij}{}^{NL_0}\} \;\; i,j = 1,2, \tag{3.1}$$

де введено позначення для лінійної $\varepsilon_{ij}{}^{L_0}$ та нелінійної $\varepsilon_{ij}{}^{NL_0}$ частини.

$$\{\varepsilon^{L_0}\} = \left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w_0;\; \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0;\; \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right\}^T, \tag{3.2}$$

$$\{\varepsilon^{NL_0}\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2;\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2;\; \frac{\partial w_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial y}\right\}^T. \tag{3.3}$$

Тоді зусилля $\{N\}$ та моменти $\{M\}$також можна представити як:

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = \{N^L\}^T + \{N^{NL}\}^T, \tag{3.4}$$

$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = \{M^L\}^T + \{M^{NL}\}^T. \tag{3.5}$$

Розглянемо виведення нелінійних рівнянь рівноваги пологих ФГМ оболонок у переміщеннях у рамках різних теорій.

3.1.1 Класична теорія

Запишемо формули (3.4) у матричному вигляді:

$$\{N^L\} = \{N_{11}^L;\; N_{22}^L;\; N_{12}^L\}^T = [A]\{\varepsilon^{(L_0)}\} + [B]\{\chi\}, \tag{3.6}$$

$$\{M^L\} = \{M_{11}^L;\; M_{22}^L;\; M_{12}^L\}^T = [B]\{\varepsilon^{(L_0)}\} + [D]\{\chi\}, \tag{3.7}$$

$$\{N^{NL}\} = \{N_{11}^{NL};\; N_{22}^{NL};\; N_{12}^{NL}\}^T = [A]\{\varepsilon^{(NL_0)}\}, \tag{3.8}$$

$$\{M^{NL}\} = \{M_{11}^{NL};\, M_{22}^{NL};\, M_{12}^{NL}\}^T = [B]\{\varepsilon^{(NL_0)}\}, \tag{3.9}$$

$$\{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T = \left\{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right\}^T. \tag{3.10}$$

Матриці [A], [B] і [D] для ФГМ оболонок визначаються як:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Елементи цих матриць, як було зазначено в Розділі 2, визначаються за формулами (2.28-2.30).

Вирази для лінійних та нелінійних доданків зусиль $\{N\}$ та моментів $\{M\}$ представимо в розгорнутому вигляді:

$$N_{11}^L = A_{11}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} =$$
$$= A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \tag{3.11}$$

$$N_{22}^L = A_{12}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} =$$
$$= A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + B_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \tag{3.12}$$

$$N_{12}^L = A_{66}\varepsilon_{12}^{(L_0)} + B_{66}\chi_{12} = A_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + B_{66}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right), \tag{3.13}$$

$$N_{11}^{NL} = A_{11}\varepsilon_{11}^{NL_0} + A_{12}\varepsilon_{22}^{NL_0} = \frac{1}{2}A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \tag{3.14}$$

$$N_{22}^{NL} = A_{12}\varepsilon_{11}^{NL_0} + A_{22}\varepsilon_{22}^{NL_0} = \frac{1}{2}A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \tag{3.15}$$

$$N_{12}^{NL} = A_{66}\varepsilon_{12}^{NL_0} = A_{66}\frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}; \tag{3.16}$$

$$M_{11}^L = B_{11}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + B_{12}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} =$$
$$= B_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{11}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \tag{3.17}$$

$$M_{22}^L = B_{12}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + B_{22}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} =$$
$$= B_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + D_{22}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \tag{3.18}$$

$$M_{12}^L = B_{66}\varepsilon_{12}^{(L_0)} + D_{66}\chi_{12} = B_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + D_{66}\left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right), \tag{3.19}$$

$$M_{11}^{NL} = B_{11}\varepsilon_{11}^{NL_0} + B_{12}\varepsilon_{22}^{NL_0} = \frac{1}{2}B_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}B_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \quad (3.20)$$

$$M_{22}^{NL} = B_{12}\varepsilon_{11}^{NL_0} + B_{22}\varepsilon_{22}^{NL_0} = \frac{1}{2}B_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}B_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \quad (3.21)$$

$$M_{12}^{NL} = B_{66}\varepsilon_{12}^{NL_0} = B_{66}\frac{\partial w_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Застосовуючи вирази сил і моментів (3.11-3.22) та підставляючи їх в систему рівнянь (2.41), отримуємо цю систему в термінах переміщень. Операторна форма цієї системи є наступною:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = NL_1 w + I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.23)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = NL_2 w + I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (3.24)$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = NL_{32}(u,v,w) + NL_{33}w + I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.25)$$

де $I_0,\ I_1,\ I_2$ є моменти інерції маси, які визначаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz. \quad (3.26)$$

Диференціальні оператори $L_{ij},\ i,j = 1,2,3$ та нелінійні вирази NL_i в правих частинах наведених рівнянь (3.23-3.25) визначаються таким чином:

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad L_{12} = L_{21} = \left(A_{12} + A_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(B_{12} + 2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - (k_1 A_{11} + k_2 A_{12})\frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{22} = A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{23} = -L_{32} = -B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \left(B_{12} + 2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (k_1 A_{21} + k_2 A_{22})\frac{\partial}{\partial y},$$

$$NL_1(w) = -L_{11}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.27)$$

$$NL_2(w) = -L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w)\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.28)$$

$$NL_{32}(u,v,w) = -(N_{11}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) - (B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 +$$

$$+2B_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2B_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right) - \frac{\partial w}{\partial x}L_{31}w - \frac{\partial w}{\partial y}L_{32}w, \qquad (3.29)$$

$$NL_{33}(w) = -N_{11}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_{22}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (3.30)$$

Оскільки ФГМ пластини можна розглядати як окремий випадок пологої оболонки, то поклавши $k_1 = k_2 = 0$ у формулах, наведених вище, отримаємо подання лінійних та нелінійних операторів L_{ij} та Nl_i, $i, j = \overline{1,3}$ для пластин:

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2},$$

$$L_{22} = A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{23} = -L_{32} = -B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y},$$

$$NL_1(w) = -L_{11}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (3.31)$$

$$NL_2(w) = -L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w)\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (3.32)$$

$$NL_{32}(u,v,w) = -(N_{11}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^{L}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) - (B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 +$$

$$+2B_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2B_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right) - \frac{\partial w}{\partial x}L_{31}w - \frac{\partial w}{\partial y}L_{32}w, \qquad (3.33)$$

$$NL_{33}(w) = -N_{11}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_{22}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (3.34)$$

3.1.2 Уточнена зсувна теорія першого порядку

Як і в рамках класичної теорії, представимо вектори $\{\varepsilon\}$, $\{N\}$, $\{M\}$ як суму їх лінійних та нелінійних складових (3.1-3.4):

$$\{\varepsilon_{ij}^{0}\} = \{\varepsilon_{ij}{}^{L_0} + \varepsilon_{ij}{}^{NL_0}\} \quad i, j = 1,2 .$$

$$\{N\} = \{N_{11};\, N_{22};\, N_{12}\}^T = \{N^L\}^T + \{N^{NL}\}^T ,$$

$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22};\, M_{12}\}^T = \{M^L\}^T + \{M^{NL}\}^T ,$$

де $\varepsilon_{ij}{}^{L_0}$, та $\varepsilon_{ij}{}^{NL_0}$ співпадають з виразами (3.2), (3.3). Вирази $\{N^{NL}\} = \{N_{11}^{NL}; N_{22}^{NL}; N_{12}^{NL}\}^T$, $\{M^{NL}\} = \{M_{11}^{NL}; M_{22}^{NL}; M_{12}^{NL}\}^T$ для нелінійних доданків в зусиллях та моментах також співпадають з відповідними виразам наведеними для класичної теорії (3.14-3.16), (3.20-3.22). Але вирази для лінійних доданків будуть іншими, а саме:

$$N_{11}^L = A_{11}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} = A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) +$$

$$+A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \tag{3.35}$$

$$N_{22}^L = A_{12}\varepsilon_{11}^{(L_0)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(L_0)} + B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} = A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) +$$

$$+A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \tag{3.36}$$

$$N_{12}^L = A_{66}\varepsilon_{12}^{(L_0)} + B_{66}\chi_{12} = A_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right), \tag{3.37}$$

$$M_{11}^L = B_{11}\varepsilon_{11}^{L_0} + B_{12}\varepsilon_{22}^{L_0} + D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} =$$

$$= B_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \tag{3.38}$$

$$M_{22}^L = B_{12}\varepsilon_{11}^{L_0} + B_{22}\varepsilon_{22}^{L_0} + D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} =$$

$$= B_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \tag{3.39}$$

$$M_{12}^L = B_{66}\varepsilon_{12}^{L_0} + D_{66}\chi_{12} = B_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + D_{66}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right). \tag{3.40}$$

Застосовуючи вирази для сил і моментів в рамках теорії першого порядку (3.35-3.40), (3.14-3.16), (3.20-3.22) та підставляючи їх у систему рівнянь (2.54), отримуємо цю систему в переміщеннях. Операторна форма цієї системи є наступною:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = NL_1 w + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.41}$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = NL_2 w + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{3.42}$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = NL_{32}(u, v, w) + NL_{33} w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.43}$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = NL_4 w + m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \tag{3.44}$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = NL_5 w + m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \tag{3.45}$$

Тут диференціальні оператори L_{ij}, $i, j = \overline{1,5}$ та нелінійні вирази NL_i визначаються таким чином:

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -(k_1 A_{11} + k_2 A_{12})\frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{14} = L_{41} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \;\; L_{15} = L_{51} = L_{24} = L_{42} = (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$NL_1(w) = -L_{11}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.46}$$

$$L_{22} = A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \;\; L_{23} = -L_{32} = -(k_1 A_{21} + k_2 A_{22})\frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_{25} = L_{52} = B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$NL_2(w) = -L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w)\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.47}$$

$$L_{33} = K_s^2 A_{33} L_{11}(w) - (k_1^2 A_{11} + 2k_1 k_2 A_{12} + k_2^2 A_{22})w,$$

$$L_{34} = -L_{43} = (K_s^2 A_{66} + k_1 B_{11} + k_2 B_{12})\frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{35} = -L_{53} = (K_s^2 A_{66} + k_1 B_{12} + k_2 B_{22})\frac{\partial}{\partial y},$$

$$NL_3 = NL_{32} + NL_{33}, \tag{3.48}$$

$$NL_{32}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = N_{11}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^L \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3.49}$$

$$NL_{33}(w) = -N_{11}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_{22}^{NL}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \tag{3.50}$$

$$L_{44} = D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - K_s^2 A_{66}\psi_x,\ L_{45} = L_{54} = (D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$NL_4(w) = -L_{41}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{42}(w)\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.51}$$

$$L_{55} = D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_s^2 A_{66}\psi_y,$$

$$NL_5(w) = -L_{51}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{52}(w)\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.52}$$

3.1.3 Уточнена теорія третього порядку (теорія Редді)

Для виведення рівнянь руху в переміщеннях в рамках теорії третього порядку скористаємось представленням деформацій $\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_{11}^0,\ \varepsilon_{22}^0,\ \varepsilon_{12}^0\}$ у вигляді (3.1).

Тоді зусилля $N = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}$, $P = \{P_{11}, P_{22}, P_{12}\}$ та моменти $M = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}$ також представимо у вигляді суми лінійної та нелінійної складових, а саме:

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = \{N^L\}^T + \{N^{NL}\}^T,$$
$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = \{M^L\}^T + \{M^{NL}\}^T,$$
$$\{P\} = \{P_{11}; P_{22}; P_{12}\}^T = \{P^L\}^T + \{P^{NL}\}^T. \tag{3.54}$$

Нагадаємо, що вони визначаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E \\ B & D & F \\ E & F & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \chi \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix}. \tag{3.55}$$

Перерізуючи сили $Q = \{Q_x, Q_y\}$ та напруження вищого порядку $R = \{R_1, R_2\}$ визначаються як:

$$\begin{Bmatrix} Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ D & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix}. \tag{3.56}$$

Відзначимо, що для нелінійних доданків вирази для зусиль та моментів першого та другого рівнянь руху будуть такі самі, які було отримано для класичної теорії та теорії першого порядку (3.14-3.16), (3.20-3.22). Вирази для лінійних доданків, а також нелінійні складові третього, четвертого та п’ятого рівнянь мають інший вигляд. Наведемо ці формули.

$$\{N^L\} = [A]\{\varepsilon^{L_0}\} + [B]\{\chi\} + [E]\{\chi^{(3)}\}, \tag{3.57}$$

$$N_{11}^L = A_{11}\varepsilon_{11}^{L_0} + A_{12}\varepsilon_{22}^{L_0} + B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} - c_1E_{11}\chi_{11}^{(3)} - c_1E_{12}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1E_{11}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1E_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.58}$$

$$N_{22}^L = A_{12}\varepsilon_{11}^{L_0} + A_{22}\varepsilon_{22}^{L_0} + B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} - c_1E_{12}\chi_{11}^{(3)} - c_1E_{22}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + B_{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1E_{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1E_{22}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.59}$$

$$N_{12}^L = A_{66}\varepsilon_{12}^{L_0} + B_{66}\chi_{12} + E_{66}\chi_{12}^{(3)} = A_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right) -$$

$$-c_1E_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \tag{3.60}$$

$$\{M^L\} = [B]\{\varepsilon^{L_0}\} + [D]\{\chi\} + [F]\{\chi^{(3)}\}, \tag{3.61}$$

$$M_{11}^L = B_{11}\varepsilon_{11}^{L_0} + B_{12}\varepsilon_{22}^{L_0} + D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} - c_1F_{11}\chi_{11}^{(3)} - c_1F_{12}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= B_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1F_{11}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1F_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.62}$$

$$M_{22}^L = B_{12}\varepsilon_{11}^{L_0} + B_{22}\varepsilon_{22}^{L_0} + D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} - c_1F_{12}\chi_{11}^{(3)} - c_1F_{22}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= B_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + B_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + D_{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1F_{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1F_{22}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.63}$$

$$M_{12}^L = B_{66}\varepsilon_{12}^{L_0} + D_{66}\chi_{12} - c_1F_{66}\chi_{12}^{(3)} = B_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + D_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right) -$$

$$-c_1F_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \tag{3.64}$$

$$\{P^L\} = [E]\{\varepsilon^{L_0}\} + [F]\{\chi\} + [H]\{\chi^{(3)}\}, \tag{3.65}$$

$$P_{11}^L = E_{11}\varepsilon_{11}^{L_0} + E_{12}\varepsilon_{22}^{L_0} + F_{11}\chi_{11} + F_{12}\chi_{22} - c_1H_{11}\chi_{11}^{(3)} - c_1H_{12}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= E_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + E_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + F_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + F_{12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1H_{11}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1H_{12}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.66}$$

$$P_{22}^L = E_{12}\varepsilon_{11}^{L_0} + E_{22}\varepsilon_{22}^{L_0} + F_{12}\chi_{11} + F_{22}\chi_{22} - c_1H_{12}\chi_{11}^{(3)} - c_1H_{22}\chi_{22}^{(3)} =$$

$$= E_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 w\right) + E_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 w_0\right) + F_{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + F_{22}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} -$$

$$-c_1H_{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1H_{22}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.67}$$

$$P_{12}^L = E_{66}\varepsilon_{12}^{L_0} + F_{66}\chi_{12} - c_1H_{66}\chi_{12}^{(3)} = E_{66}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + F_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right) -$$

$$-c_1H_{66}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right); \tag{3.68}$$

$$\{P^{NL}\} = [E]\{\varepsilon^{NL_0}\};$$

$$\{Q\} = [A]\{\gamma^{(0)}\} + [D]\{\gamma^{(2)}\}, \tag{3.69}$$

$$Q_x = A_{66}\varepsilon_{13}^{(0)} - c_2D_{66}\chi_{13}^{(2)} = A_{66}\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - c_2D_{66}\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \tag{3.70}$$

$$Q_y = A_{66}\varepsilon_{23}^{(0)} - c_2D_{66}\chi_{23}^{(2)} = A_{66}\left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) - c_2D_{66}\left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right); \tag{3.71}$$

$$\{R\} = [D]\{\gamma^{(0)}\} + [F]\{\gamma^{(2)}\}, \tag{3.72}$$

$$R_x = D_{66}\varepsilon_{13}^{(0)} - c_2F_{66}\chi_{13}^{(2)} = D_{66}\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - c_2F_{66}\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \tag{3.73}$$

$$R_y = D_{66}\varepsilon_{23}^{(0)} - c_2F_{66}\chi_{23}^{(2)} = D_{66}\left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) - c_2F_{66}\left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right). \tag{3.74}$$

Застосовуючи вирази для сил і моментів в рамках теорії вищого порядку (3.57)-(3.74) та підставляючи їх у систему рівнянь (2.73), отримуємо цю систему в переміщеннях. Операторна форма цієї системи є наступною:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = NL_1 w + I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - c_1I_4\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{3.75}$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = NL_2 w + I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - c_1I_4\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \tag{3.76}$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = NL_{32}(u,v,w) + NL_{33}w + I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} -$$

$$-c_1^2 I_7 \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}{\partial t^2} + c_1 I_4 \frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial t^2} + c_1 I_5 \frac{\partial^2\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right)}{\partial t^2}, \tag{3.77}$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = NL_4 w + I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - c_1 I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{3.78}$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = NL_5 w + I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - c_1 I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}. \tag{3.79}$$

Тут диференціальні оператори L_{ij}, $i,j=\overline{1{,}5}$ та нелінійні вирази NL_i визначаються таким чином:

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad L_{12} = L_{21} = \left(A_{12} + A_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -c_1 E_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - c_1(E_{12} + 2E_{66})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2},$$

$$L_{14} = L_{41} = (B_{11} - c_1 E_{11})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{66} - c_1 E_{66})\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{15} = L_{51} = L_{24} = L_{42} = \left(B_{12} + B_{66} - c_1(E_{12} + E_{66})\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$NL_1(w) = -L_{11}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.80}$$

$$L_{22} = A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \;\; L_{23} = -L_{32} = -c_1(E_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3} + (E_{12} + 2E_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}),$$

$$L_{25} = L_{52} = (B_{66} - c_1 E_{66})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{22} - c_1 E_{22})\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$NL_2(w) = -L_{12}(w)\frac{\partial w}{\partial x} - L_{22}(w)\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.81}$$

Можна довести, що лінійні диференціальні L_{33}, L_{34}, L_{35} оператори мають наступний вигляд:

$$L_{33} = (A_{66} - 2c_2 D_{66} + c_2^2 F_{66})\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) -$$

$$-c_1^2\left(H_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + (2H_{12} + 4H_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

$$L_{34} = -L_{43} = (A_{66} - 2c_2 D_{66} + c_2^2 F_{66})\frac{\partial}{\partial x} + c_1(F_{11} - c_1 H_{11})\frac{\partial^3}{\partial x^3} + c_1(2(F_{66} -$$

$$-c_1 H_{66}) + F_{12} - c_1 H_{12})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2},$$

$L_{35} = -L_{53} = (A_{66} - 2c_2 D_{66} + c_2^2 F_{66}) \frac{\partial}{\partial y} + c_1(F_{22} - c_1 H_{22}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + c_1(2(F_{66} -$

$-c_1 H_{66}) + F_{12} - c_1 H_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y},$

$$NL_3 = NL_{32} + NL_{33},$$

$$NL_{32}(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = E_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + E_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 +$$

$$+2E_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} L_{13}(w) + \frac{\partial w}{\partial y} L_{23}(w) +$$

$$+N_{11}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}^L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^L \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.82)$$

$$NL_{33}(w) = -N_{11}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{12}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_{22}^{NL} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3.83)$$

Нижче представлені вирази для операторів L_{44}, L_{45}, L_{54}:

$L_{44} = (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (A_{66} -$

$-2c_2 D_{66} + c_2^2 F_{66}) \psi_x,$

$L_{45} = L_{54} = (D_{12} + F_{12} + D_{66} + F_{66} - c_1(F_{12} + F_{66}) + c_1^2(H_{12} + H_{66})) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$

$$NL_4(w) = -L_{41}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{42}(w) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.84)$$

У п’ятому рівнянні оператори L_{55} та $NL_5(w)$ мають вигляд:

$$L_{55} = (D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{22} - 2c_1 F_{22} + c_1^2 H_{22}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} -$$

$$-(A_{66} - 2c_2 D_{66} + c_2^2 F_{66}) \psi_y,$$

$$NL_5(w) = -L_{51}(w) \frac{\partial w}{\partial x} - L_{52}(w) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.85)$$

3.2 Розв’язання лінійної проблеми про вільні коливання ФГМ пологих оболонок довільної форми плану

Відповідно до запропонованого методу перш за все необхідно розв’язати задачу про вільні коливання оболонки/пластини. Це питання розглянуто в рамках трьох теорій.

3.2.1 Класична теорія

У рамках класичної теорії система рівнянь, яка описує лінійні коливання ФГМ пологих оболонок, складається з трьох рівнянь (2.42), що зв'язують переміщення u, v, w.

Варіаційною постановкою задачі лінійних вільних коливань ФГМ пологих оболонок є задача знаходження стаціонарної точки наступного функціоналу

$$J = P - T, \tag{3.86}$$

де P, T є потенційною та кінетичною енергією оболонки.

Оскільки лінійні коливання гармонійні за часом, то переміщення можуть бути представлені наступним чином:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= U(x,y)\cos\omega_L t, \\ v(x,y,t) &= V(x,y)\cos\omega_L t, \\ w(x,y,t) &= W(x,y)\cos\omega_L t. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Застосовуючи принцип Остроградського-Гамільтона, поставлена задача може бути зведена до варіаційної проблеми, тобто до знаходження мінімума наступного функціоналу:

$$J = P_{max} - \omega_L^2 T_{max}, \tag{3.88}$$

де

$$P_{max} = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(N_{11}^L \varepsilon_{11}^{(L_0)} + N_{22}^L \varepsilon_{22}^{(L_0)} + N_{12}^L \varepsilon_{12}^{(L_0)} + M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12} \right) \tag{3.89}$$

є максимальна потенційна енергія оболонки,

$$T_{max} = \frac{1}{2}\iint_\Omega I_0 (U^2 + V^2 + W^2) d\Omega \tag{3.90}$$

є максимальна кінетична енергія оболонки. Зусилля, моменти та деформації визначаються формулами (3.2), (3.6-3.7), (3.10).

Для знаходження стаціонарних точок функціоналу (3.88) використовуємо метод Рітца. Для цього представимо функції U , V , W у наступному вигляді:

$$U = \sum_{k=1}^{N_1} c_k u_k, \quad V = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} c_k v_k, \quad W = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} c_k w_k, \tag{3.91}$$

де u_k, v_k, w_k є координатними функціями, які задовольняють заданим граничним умовам;

c_k, $k = \overline{1, N_3}$ є невідомі константи, які можуть бути знайдені з наступної умови:

$$\frac{\partial}{\partial c_k}(P_{max} - \omega_L^2 T_{max}) = 0, \ \ k = \overline{1, N_3}. \tag{3.92}$$

Розв'язок системи (3.92) дозволяє знайти спектр власних частот і відповідних власних функцій. Позначимо власні функції як $\left\{U_i^{(e)}\right\}$, $\left\{V_i^{(e)}\right\}$, $\left\{W_i^{(e)}\right\}$. Тоді використовуючи вираз (3.91), представимо власні функції, які відповідають i-й власній частоті ω_{Li}, у наступному вигляді:

$$U_i^{(e)} = \sum_{k=1}^{N_1} c_k^{(i)} u_k, \quad V_i^{(e)} = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} c_k^{(i)} v_k, \quad W_i^{(e)} = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} c_k^{(i)} w_k. \tag{3.93}$$

3.2.2 Уточнена теорія пологих оболонок першого порядку

У рамках цієї теорії система рівнянь, яка описує лінійні коливання пологих оболонок ФГМ, містить п'ять рівнянь (2.53), що зв'язують переміщення u, v, w та кути обертання ψ_x, ψ_y.

Так само, як і для класичної теорії, представимо переміщення u, v, w у вигляді (3.87) та функції ψ_x, ψ_y.у наступній формі:

$$\psi_x(x, y, t) = \Psi_x(x, y) \cos \omega_L t,$$
$$\psi_y(x, y, t) = \Psi_y(x, y) \cos \omega_L t. \tag{3.94}$$

Варіаційною постановкою задачі про вільні коливання в рамках цієї теорії є задача про знаходження точки стаціонарності функціоналу (3.88). Вирази для максимальної потенційної та кінетичної енергії визначаються формулами:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Big[N_{11}^L \varepsilon_{11}^{(L_0)} + N_{22}^L \varepsilon_{22}^{(L_0)} + N_{12}^L \varepsilon_{12}^{(L_0)} + M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12} +$$
$$+ Q_x\left(\Psi_y + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + Q_y\left(\Psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\Big]\, d\Omega, \tag{3.95}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[I_0(U^2 + V^2 + W^2) + I_1\left(\Psi_x^2 + \Psi_y^2\right)\right] d\Omega. \tag{3.96}$$

Як і у випадку класичної теорії для знаходження стаціонарних точок наведеного функціоналу J використовуємо метод Рітца. Для цього представимо функції U, V, W, Ψ_x, Ψ_y у наступному вигляді:

$$U = \sum_{k=1}^{N_1} c_k u_k, \ \ V = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} c_k v_k, \ \ W = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} c_k w_k,$$

$$\Psi_x = \sum_{k=N_3+1}^{N_4} c_k \psi_{xk}, \quad \Psi_y = \sum_{k=N_4+1}^{N_5} c_k \psi_{yk}, \tag{3.97}$$

де c_k, $k = \overline{1, N_5}$ є невизначені коефіцієнти, які знаходяться з умови стаціонарності функціоналу J, при умові, що $P_{\max}$ та $T_{\max}$ визначаються за формулами (3.95), (3.96). Послідовності $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{\psi_{xk}\}$, $\{\psi_{yk}\}$, $k = \overline{1, N_5}$ є послідовностями координатних функцій, які задовольняють заданим граничним умовам.

Побудова координатних функцій здійснюється за допомогою теорії R-функцій. Потім ми визначаємо власні функції лінійних коливань оболонки за наступними формулами:

$$U_i^{(e)} = \sum_{k=1}^{N_1} c_k^{(i)} u_k, \quad V_i^{(e)} = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} c_k^{(i)} v_k, \quad W_i^{(e)} = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} c_k^{(i)} w_k \quad ,$$

$$\Psi_{xi}^{(e)} = \sum_{k=N_3+1}^{N_4} c_k^{(i)} \psi_{xk}, \quad \Psi_{yi}^{(e)} = \sum_{k=N_4+1}^{N_5} c_k^{(i)} \psi_{yk}. \tag{3.98}$$

3.2.3 Теорія третього порядку (теорія Редді)

Для розв’язання лінійної задачі застосовується такий же алгоритм, як і у разі теорії першого порядку, за винятком виразів для потенційної та кінетичної енергії, які задаються наступним чином:

$$P = \iint_{\Omega} \Big(N_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + N_{22}\varepsilon_{22}^{(0)} + N_{12}\varepsilon_{12}^{(0)} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13}^{(0)} + Q_y\varepsilon_{23}^{(0)} + \left(P_{11}\chi_{11}^{(3)} + P_{22}\chi_{22}^{(3)} + P_{12}\chi_{12}^{(3)} \right) + \left(R_1\varepsilon_{13}^{(0)} + R_2\varepsilon_{23}^{(0)} \right) \Big) \partial\Omega, \tag{3.99}$$

$$T = \iint_{\Omega} \Bigg(I_0 \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2 \right) + I_1 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_y}{\partial t}\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + I_2 \left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right)^2 \right) - c_1 I_3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) - c_1 I_4 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right) + c_1^2 I_6 \left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial t}\right)^2 \right) d\Omega. \tag{3.100}$$

Представляючи функції u, v, w у вигляді (3.87) та функції ψ_x, ψ_y.у вигляді (3.94), одержимо вирази для потенційної та кінетичної енергії. При цьому загальний вигляд для $P_{\max}$ у формулі (3.99) зберігається, а вираз для $T_{\max}$ у формулі (3.100) набуває вигляду:

$$T_{max} = \iint_{\Omega} \left(I_0(U^2 + V^2 + W^2) + I_1\left(\Psi_x U + \Psi_y U\right) + \right.$$
$$+I_2\left(\Psi_x^2 + \Psi_y^2\right) - c_1 I_3(\varepsilon_{13} U + \varepsilon_{23} V) - c_1 I_4\left(\varepsilon_{13}\Psi_x + \varepsilon_{23}\Psi_y\right) +$$
$$+c_1^2 I_6((\varepsilon_{13})^2 + (\varepsilon_{23})^2) d\Omega. \qquad (3.101)$$

Як і у разі класичної та теорії першого порядку, розв'язок лінійної задачі у рамках теорії вищого порядку зводиться до знаходження точки стаціонарності функціоналу (3.88) із урахуванням виразів (3.99), (3.101) для P_{max}, T_{max}.

Чисельна реалізація методу розв'язання задач лінійних коливань ФГМ пологих оболонок у рамках трьох теорій виконана в системі POLE-RL.

3.3 Розв'язання послідовностей лінійних задач теорії пружності

Враховуючи те, що в роботі пропонується оригінальне представлення нелінійного розв'язку, що вимагає необхідність розв'язання задач типу теорії пружності, то далі розглядаються саме такі розв'язання для трьох теорій.

3.3.1 Класична теорія

Знайдемо розв'язок наступної неоднорідної системи:

$$\begin{cases} L_{11}u_2(x,y) + L_{12}v_2(x,y) = NL_1 w_1^{(e)}(x,y) \\ L_{21}u_2(x,y) + L_{22}v_2(x,y) = NL_2 w_1^{(e)}(x,y) \end{cases} \qquad (3.102)$$

де $w_1^{(e)}(x,y)$ є власною функцією лінійних коливань оболонки.

Ця система доповнюється відповідними неоднорідними граничними умовами. Розв'язок знаходиться з використанням варіаційного підходу. Для цього запишемо варіаційну постановку задачі (3.102) за допомогою функціоналу Лагранжа:

$$I(u_2,v_2)=\iint_{\Omega}\Big[\Big(N_{11}^{(L_2)}\varepsilon_{11}^{L_2}+N_{22}^{(L_2)}\varepsilon_{22}^{L_2}+N_{12}^{(L_2)}\varepsilon_{12}^{L_2}\Big)-$$

$$-2\Big(NL_1\Big(w_1^{(e)}\Big)u_2+NL_2\Big(w_1^{(e)}\Big)v_2\Big)\Big]d\Omega-2\int_{\partial\Omega}\Big(F_1\,u_2^{(n)}+F_2\,v_2^{(n)}\Big)ds\,, \qquad (3.103)$$

де $N_{ij}^{(L_2)}$, $i, j=1{,}2$ визначаються наступними виразами:

$$\left\{N^{(L_2)}\right\}=\left\{N_{11}^{(L_2)};N_{22}^{(L_2)};N_{12}^{(L_2)}\right\}^T=[A]\{\varepsilon^{L_2}\}^T, \qquad (3.104)$$

$$\{\varepsilon^{L_2}\}=\frac{\partial u_2}{\partial x};\frac{\partial v_2}{\partial y};\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}. \qquad (3.105)$$

Тут

$$F_1=-\Big(N_{11}^{NL}l^2+N_{22}^{NL}m^2+2N_{11}^{NL}lm\Big), \qquad (3.106)$$

$$F_2=-N_{12}^{NL}\Big(l^2-m^2\Big)-lm\Big(\Big(N_{22}^{NL}\Big)^2-\Big(N_{11}^{NL}\Big)^2\Big), \qquad (3.107)$$

$$u_2^{(n)}=u_2l+v_2m,\ v_2^{(n)}=-u_2m+v_2l, \qquad (3.108)$$

$$\{N^{NL}\}=\{N_{11}^{NL};N_{22}^{NL};N_{12}^{NL}\}^T=[A]\{\varepsilon^{N_1}\}, \qquad (3.109)$$

$$\{\varepsilon^{N_1}\}=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\right)^2;\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\right);\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\right\}^T. \qquad (3.110)$$

Таким чином проблема зводиться до мінімізації функціоналу (3.103). Відзначимо, що для випадку граничних умов із закріпленим краєм, коли

$$u_2^{(n)}=0,\quad v_2^{(n)}=0,$$

Контурний інтеграл у формулі (3.103) буде дорівнювати нулю.

Розв'язання задачі здійснюється за методом Рітца. Представимо розв'язки для функцій u_2, v_2 у наступному вигляді:

$$u_2=\sum_{k=1}^{N_1}b_ku_{2k}\,,\quad v_2=\sum_{k=N_1+1}^{N_2}b_kv_{2k}\,. \qquad (3.111)$$

Ми будемо будувати послідовність координатних функцій u_{2k} ($k=\overline{1,N_1}$) та v_{2k} ($k=\overline{N_1+1,N_2}$) за допомогою теорії R-функцій. Підставимо співвідношення (3.111) у вираз функціоналу (3.103). З умови стаціонарності функціоналу $I(u_2,v_2)$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = 0,\ k = \overline{1, N_2} \tag{3.112}$$

знайдемо невизначені коефіцієнті b_k $(k = \overline{1, N_2})$.

Розв’язок системи рівнянь (3.102) було також виконано за допомогою програмного пакету POLE-RL із підключенням додаткових модулей.

3.3.2 Уточнена теорія пологих оболонок першого порядку

Для розв’язання задачі про нелінійні коливання в рамках уточненої теорії пологих оболонок першого порядку необхідно розв’язати допоміжну лінійну задачу, пов’язану з знаходженням функцій $u_2(x,y), v_2(x,y), \psi_{x2}(x,y), \psi_{y2}(x,y)$, які є розв’язком такої неоднорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} L_{11}u_2(x,y) + L_{12}v_2(x,y) + L_{14}\psi_{x2}(x,y) + L_{15}\psi_{y2}(x,y) = NL_1\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{21}u_2(x,y) + L_{22}v_2(x,y) + L_{24}\psi_{x2}(x,y) + L_{25}\psi_{y2}(x,y) = NL_2\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{41}u_2(x,y) + L_{42}v_2(x,y) + L_{44}\psi_{x2}(x,y) + L_{45}\psi_{y2}(x,y) = NL_4\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{51}u_2(x,y) + L_{52}v_2(x,y) + L_{54}\psi_{x2}(x,y) + L_{55}\psi_{y2}(x,y) = NL_5(w_1^{(e)}) \end{cases} \tag{3.113}$$

Лінійні диференціальні оператори L_{ij}, $i,j = 1,2,4,5$ застосовуються до функцій $u_2(x,y)$, $v_2(x,y)$, $\psi_{x2}(x,y)$, $\psi_{y2}(x,y)$. Права частина системи (3.113) залежить від власних функцій $w_1^{(e)}(x,y)$, які були отримані при розв'язанні лінійних задач про коливання оболонки в рамках уточненої теорії. Тобто праві частини системи визначаються безпосередньо підстановкою власних функцій у вирази (3.46-3.47), (3.51-3.52) для NL_i, $i,j = 1,2,4,5$.

Ця система природньо доповнюється відповідними неоднорідними граничними умовами.

Було доведено, що розв’язок системи є точкою стаціонарності наступного функціоналу:

$$I(u_2, v_2, \psi_{x2}, \psi_{y2}) = \iint\limits_{\Omega} \Big(N_{11}^{L_2} \varepsilon_{11}^{L_2} + N_{22}^{L_2} \varepsilon_{22}^{L_2} + N_{12}^{L_2} \varepsilon_{12}^{L_2} + M_{11}^{L_2} \chi_{11}^{L_2} + M_{22}^{L_2} \chi_{22}^{L_2} + M_{12}^{L_2} \chi_{12}^{L_2} +$$

$$+ K_s^2 A_{66} \left(\psi_{x2}^2 + \psi_{y2}^2 \right) - 2 \left(NL_1 \left(w_1^{(e)} \right) u_2 + NL_2 \left(w_1^{(e)} \right) v_2 + NL_4 \left(w^{(e)} \right) \psi_{x2} + \right.$$

$$\left. NL_5 \left(w^{(e)} \right) \psi_{y2} \right) \Big) d\Omega - 2 \int\limits_{\partial\Omega} \left(F_1 u_2^{(n)} + F_2 v_2^{(n)} + F_4 \psi_{x2}^{(n)} + F_5 \psi_{y2}^{(n)} \right) ds, \quad (3.114)$$

де $N_{ij}^{L_2}$, $\varepsilon_{ij}^{L_2}$, $M_{ij}^{L_2}$ $(i, j = 1{,}2)$ визначаються як

$$\{N^{L_2}\} = \left\{ N_{11}^{L_2}; N_{22}^{L_2}; N_{12}^{L_2} \right\}^T = [A]\{\varepsilon^{L_2}\} + [B]\{\chi^{L_2}\}, \quad (3.115)$$

$$\{M^{L_2}\} = \left\{ M_{11}^{L_2}; M_{22}^{L_2}; M_{12}^{L_2} \right\}^T = [B]\{\varepsilon^{L_2}\} + [D]\{\chi^{L_2}\}, \quad (3.116)$$

Вираз для $\left\{ \varepsilon^{L_2} \right\}$ такий же, як і для класичної теорії, тобто співпадає с (3.105).

$$\{\chi^{L_2}\} = \left\{ \chi_{11}^{L_2}, \chi_{22}^{L_2}, \chi_{12}^{L_2} \right\} = \left(\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x}; \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y}; \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial x} \right), \quad (3.117)$$

$$\psi_{x2}^{(n)} = \psi_{x2} l + \psi_{y2} m, \; \psi_{y2}^{(n)} = -\psi_{x2} m + \psi_{y2} l. \quad (3.118)$$

Вирази для функцій $u_2^{(n)}$, $v_2^{(n)}$ співпадають з виразами (3.108), вирази для F_i $(i = 1{,}2{,}4{,}5)$ визначаються початковими граничними умовами.

Точка стаціонарності функціоналу (3.114) знаходиться методом Рітца. Невідомі функції $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$, $\psi_{x2}(x, y)$, $\psi_{y2}(x, y)$ представляються у вигляді:

$$u_2 = \sum_{k=1}^{N_1} b_k u_{2k}, \; v_2 = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} b_k v_{2k},$$

$$\psi_{x2} = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} b_k \psi_{x2k}, \; \psi_{y2} = \sum_{k=N_3+1}^{N_4} b_k \psi_{y2k}.$$

Невідомі коефіцієнти b_k $(k = \overline{1, N_4})$ знаходяться за умови стаціонарності функціоналу (3.114), а системи координатних функцій u_{2k} $(k = \overline{1, N_1})$, v_{2k} $(k = \overline{N_1 + 1, N_2})$, ψ_{x2k} $(k = \overline{N_2 + 1, N_3})$, ψ_{y2k} $(k = \overline{N_3 + 1, N_4})$ будуються за допомогою теорії R-функцій, як і для випадку класичної теорії.

3.3.3 Теорія третього порядку (теорія Редді)

Для розв’язання задачі про нелінійні коливання в рамках теорії третього порядку необхідно розв’язати допоміжну лінійну задачу, пов’язану із знаходженням функцій $u_2(x,y)$, $v_2(x,y)$, $\psi_{x2}(x,y)$, $\psi_{y2}(x,y)$, які є розв'язком наступної неоднорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} L_{11}u_2(x,y) + L_{12}v_2(x,y) + L_{14}\psi_{x2}(x,y) + L_{15}\psi_{y2}(x,y) = NL_1\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{21}u_2(x,y) + L_{22}v_2(x,y) + L_{24}\psi_{x2}(x,y) + L_{25}\psi_{y2}(x,y) = NL_2\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{41}u_2(x,y) + L_{42}v_2(x,y) + L_{44}\psi_{x2}(x,y) + L_{45}\psi_{y2}(x,y) = NL_4\left(w_1^{(e)}\right) \\ L_{51}u_2(x,y) + L_{52}v_2(x,y) + L_{54}\psi_{x2}(x,y) + L_{55}\psi_{y2}(x,y) = NL_5(w_1^{(e)}) \end{cases} \quad (3.119)$$

Права частина системи (3.119) визначається за допомогою формул (3.80-3.85), які застосовуються до власних функцій.

Було доведено, що розв'язок системи (3.119) є точкою стаціонарності наступного функціоналу:

$$I(u_2,v_2,\psi_{x2},\psi_{y2}) = \iint\limits_{\Omega}\Big(N_{11}^{L_2}\varepsilon_{11}^{L_2} + N_{22}^{L_2}\varepsilon_{22}^{L_2} + N_{12}^{L_2}\varepsilon_{12}^{L_2} + M_{11}^{L_2}\chi_{11}^{L_2} + M_{22}^{L_2}\chi_{22}^{L_2} + M_{12}^{L_2}\chi_{12}^{L_2} +$$

$$+K_s^2A_{66}\left(\psi_{x2}^2 + \psi_{y2}^2\right) + (Q_x + R_1)\varepsilon_{13}^{L_2} + \left(Q_y + R_2\right)\varepsilon_{23}^{L_2} + P_{11}^{L}\chi_{11}^{(3)L_2} + P_{22}^{L}\chi_{22}^{(3)L_2} +$$

$$+P_{12}^{L}\chi_{12}^{(3)L_2} - 2\left(NL_1\left(w_1^{(e)}\right)u_2 + NL_2\left(w_1^{(e)}\right)v_2 + NL_4\left(w^{(e)}\right)\psi_{x2} +\right.$$

$$\left.+NL_5\left(w^{(e)}\right)\psi_{y2}\right)\Big)d\Omega - 2\int\limits_{\partial\Omega}\left(F_1\,u_2^{(n)} + F_2\,v_2^{(n)} + F_4\psi_{x2}^{(n)} + F_5\psi_{y2}^{(n)}\right)ds. \quad (3.120)$$

Відмітимо, що вирази для функцій $u_2^{(n)}$, $v_2^{(n)}$ співпадають з виразом (3.108), вирази для $\psi_{x2}^{(n)}, \psi_{y2}^{(n)}$ визначаються формулами (3.118), вирази для F_i $(i = 1,2,4,5)$ визначаються відповідними граничними умовами.

Розв'язок отриманої варіаційної задачі (3.120) знаходиться за допомогою теорії R-функцій, як і для випадку класичної теорії та теорії вищого порядку.

3.4 Зведення нелінійної системи рівнянь руху до нелінійного звичайного диференціального рівняння або системи рівнянь

3.4.1 Класична теорія

При розв'язанні нелінійної задачі (3.23-3.25) знехтуємо силами інерції $m_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $m_1 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ в серединній поверхні оболонки та запишемо систему у вигляді:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = NL_1 w, \tag{3.121}$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = NL_2 w, \tag{3.122}$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = NL_{32}(u,v,w) + NL_{33}w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3.123}$$

Представимо невідомі функції в наступному вигляді:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = y_1(t)u_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)u_2(x,y), \\ v(x,y,t) = y_1(t)v_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)v_2(x,y), \\ w(x,y,t) = y_1(t)w_1^{(e)}(x,y), \end{cases} \tag{3.124}$$

де $u_1^{(e)}(x,y)$, $v_1^{(e)}(x,y)$, $w_1^{(e)}(x,y)$ є компонентами власного вектору, який відповідає першій власній частоті ω_L. Функції $u_2(x,y)$ та $v_2(x,y)$ є розв'язками системи (3.102).

Очевидно, що для будь-якого вибору функції $y_1(t)$ рівняння (3.121), (3.122) будуть задовольнятися тотожно.

Для того щоб знайти функцію $y_1(t)$ ми підставимо вирази (3.124) у рівняння (3.123), після чого отримаємо наступне рівняння:

$$L_{31}\Big(y_1(t)u_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)u_2(x,y))\Big) + L_{32}\Big(y_1(t)v_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)v_2(x,y)\Big) +$$

$$+ L_{33}\Big(y_1(t)w_1^{(e)}(x,y)\Big) = y_1^2(t)NL_{32}(u_1^{(e)}, v_1^{(e)}, w_1^{(e)}) + y_1^3(t)NL_{33}w_1^{(e)} + m_1 w_1^{(e)} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2}.$$

Після спрощення маємо таке рівняння:

$$y_1(t)\Big[L_{31}u_1^{(e)}(x,y) + L_{32}v_1^{(e)}(x,y) + L_{33}w_1^{(e)}(x,y)\Big] + y_1^2(t)\big[L_{31}u_2(x,y) + L_{32}v_2(x,y)\big] =$$

$$= y_1^2(t) NL_{32}(u_1^{(e)}, v_1^{(e)}, w_1^{(e)}) + y_1^3(t) NL_{33}\left(w_1^{(e)}\right) + m_1 w_1^{(e)} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2}.$$

Зауважимо, що при розв'язуванні лінійної задачі про вільні коливання оболонки ми отримали що

$$L_{31}u_1^{(e)}(x,y) + L_{32}v_1^{(e)}(x,y) + L_{33}w_1^{(e)}(x,y) = -m_1\omega_L^2 w_1^{(e)}(x,y),$$

врахування цього факту дозволяє переписати попереднє рівняння у такому вигляді:

$$m_1 w_1^{(e)}(x,y) y_1''(t) + m_1\omega_L^2 w_1^{(e)}(x,y) y_1(t) - \left(L_{31}u_2(x,y) + L_{32}v_2(x,y)\right) y_1^2(t) +$$

$$+ y_1^2(t) NL_{32}(u_1^{(e)}, v_1^{(e)}, w_1^{(e)}) + y_1^3(t) NL_{33}\left(w_1^{(e)}\right) = 0. \qquad (3.125)$$

Застосовуючи до останнього рівняння метод Бубнова-Гальоркін та враховуючи ортогональність власних функцій зведемо рівняння (3.125) до звичайного нелінійного диференціального рівняння з невідомою функцією $y_1(t)$:

$$y_1''(t) + \alpha y_1(t) + \beta y_1^2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0, \qquad (3.126)$$

з коефіцієнтами α, β, γ, які визначаються за формулами:

$$\alpha = \omega_L^2,$$

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_{\Omega} \left(L_{31}u_2(x,y) + L_{32}v_2(x,y) - NL_{32}(u_1^{(e)}, v_1^{(e)}, w_1^{(e)})\right) w_1^{(e)} dxdy, \qquad (3.127)$$

$$\gamma = \frac{1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_{\Omega} NL_{33}(w_1^{(e)}) w_1^{(e)} dxdy. \qquad (3.128)$$

Отже, ми звели нелінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними до нелінійного звичайного диференціального рівняння, коефіцієнти якого обчислюються за одержаними формулами (3.127)-(3.128).

3.4.2 Уточнена теорія пологих оболонок першого порядку

При розв'язуванні нелінійної задачі ми ігноруємо інерційними членами

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}$ у вихідній нелінійній системі (3.41-3.45) і розглядаємо наступну систему рівнянь:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = NL_1(w), \quad (3.129)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = NL_2(w), \quad (3.130)$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = NL_3(w) + m_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.131)$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = NL_4(w), \quad (3.132)$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = NL_5(w). \quad (3.133)$$

У рамках FSDT представимо невідомі функції в наступному вигляді:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = y_1(t)u_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)u_2(x,y), \\ v(x,y,t) = y_1(t)v_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)v_2(x,y), \\ w(x,y,t) = y_1(t)w_1^{(e)}(x,y), \\ \psi_x(x,y,t) = y_1(t)\psi_{x1}^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)\psi_{x2}(x,y), \\ \psi_y(x,y,t) = y_1(t)\psi_{y1}^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)\psi_{y2}(x,y). \end{cases}, \quad (3.134)$$

де $u_1^{(e)}(x,y)$, $v_1^{(e)}(x,y)$, $w_1^{(e)}(x,y)$, $\psi_{x1}^{(e)}(x,y)$, $\psi_{y1}^{(e)}(x,y)$ власні функції лінійних коливань оболонки. Функції $u_2(x,y)$, $v_2(x,y)$, $\psi_{x2}(x,y)$, $\psi_{y2}(x,y)$ є розв'язком системи рівнянь (3.113). Можна показати, що згідно з співвідношеннями (3.134) перше, друге, четверте і п'яте рівняння системи (3.129-3.133) будуть задовольнятися тотожно завдяки побудові функцій u_2, v_2, ψ_{x2}, ψ_{y2} та знайденим власним функціям.

Підставимо тепер співвідношення (3.134) у третє рівняння системи (3.131), тобто у рівняння

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = m_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + NL_{32}(u,v,w) + NL_{33}(w).$$

В результаті цієї підстановки отримуємо наступне рівняння:

$$L_{31}\left(y_1(t)u_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)u_2(x,y))\right) + L_{32}\left(y_1(t)v_1^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)v_2(x,y)\right) +$$

$$+ L_{33}y_1(t)w_1^{(e)}(x,y) + L_{34}\left(y_1(t)\psi_{x1}^{(e)}(x,y) + y_1^2(t)\psi_{x2}(x,y)\right) +$$

$$+L_{35}\Big(y_1(t)\psi_{y1}^{(e)}(x,y)+y_1^2(t)\psi_{y2}(x,y)\Big)=m_1w_1^{(e)}\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+$$

$$=NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y)+y_1^3(t)NL_{33}w_1^{(e)}(x,y).$$

Згрупуємо подібні члени при невідомій функції $y_1(t)$:

$$y_1(t)\Big(L_{31}u_1^{(e)}(x,y)+L_{32}v_1^{(e)}(x,y)+L_{33}w_1^{(e)}(x,y)+L_{34}\psi_{x1}^{(e)}(x,y)+L_{35}\psi_{y1}^{(e)}(x,y)\Big)+$$

$$+y_1^2(t)\big(L_{31}u_2(x,y)+L_{32}v_2(x,y)+L_{34}\psi_2(x,y)+L_{35}\psi_2(x,y)\big)=m_1w_1^{(e)}\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+$$

$$+NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y)+y_1^3(t)NL_{33}(w_1^{(e)}).$$

Аналогічно сгрупуємо вирази при невідомій функції $y_1(t)$ у виразі $NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y)$, беручи до уваги (3.134)

$$NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y)=$$

$$=y_1^2(t)\left(\left(A_{11}k_1w_1^{(e)}+A_{12}k_2w_1^{(e)}\right)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x^2}+\left(A_{12}k_1w_1^{(e)}+A_{22}k_2w_1^{(e)}\right)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial y^2}\right)-$$

$$-y_1(t)\Bigg(\Bigg(A_{11}\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)u_1^{(e)}+y_1^2(t)u_2\Big)+A_{12}\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)v_1^{(e)}+y_1^2(t)v_2\Big)+$$

$$+B_{11}\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)\psi_{x1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{x2}\Big)+B_{12}\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)\psi_{y1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{y2}\Big)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x^2}\Bigg)+$$

$$+2\Bigg(\Bigg(A_{33}\Bigg(\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)u_1^{(e)}+y_1^2(t)u_2\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)v_1^{(e)}+y_1^2(t)v_2\Big)\Bigg)+$$

$$+B_{33}\Bigg(\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)\psi_{x1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{x2}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)\psi_{y1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{y2}\Big)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x\partial y}\Bigg)\Bigg)+$$

$$+A_{21}\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)u_1^{(e)}+y_1^2(t)u_2\Big)+A_{22}\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)v_1^{(e)}+y_1^2(t)v_2\Big)+$$

$$+B_{21}\frac{\partial}{\partial x}\Big(y_1(t)\psi_{x1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{x2}\Big)+B_{22}\frac{\partial}{\partial y}\Big(y_1(t)\psi_{y1}^{(e)}+y_1^2(t)\psi_{y2}\Big)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial y^2}\Bigg)=$$

$$= -y_1^2(t)\Bigg(\left(A_{11}\left(\frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x} - k_1 w_1^{(e)}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y} - k_2 w_1^{(e)}\right) + B_{11}\frac{\partial \psi_1^{(e)}}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \psi_1^{(e)}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\left(A_{33}\left(\frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial x}\right) + B_{33}\left(\frac{\partial \psi_{x1}^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y1}^{(e)}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} +$$

$$+ A_{12}\left(\left(\frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x} - k_1 w_1^{(e)}\right) + A_{22}\left(\frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y} - k_2 w_1^{(e)}\right) + B_{12}\frac{\partial \psi_{x1}^{(e)}}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \psi_{y1}^{(e)}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2}\Bigg) +$$

$$- y_1^3(t)\Bigg(\left(A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v_2}{\partial y} + B_{11}\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\left(A_{33}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + B_{33}\left(\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} +$$

$$+\left(\left(A_{21}\frac{\partial u_2}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v_2}{\partial y} + B_{21}\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2}\right)\Bigg).$$

Очевидно, що вирази в дужках можна записати в більш компактному вигляді, і вираз $NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y)$ ми можемо представити наступним чином:

$$NL_{32}(u,v,w,\psi_x,\psi_y) = -y_1^2(t)\left(N_{11}^{L_1}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_1}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_1}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$-y_1^3(t)\left(N_{11}^{L_2}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_2}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_2}\frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y}\right), \qquad (3.135)$$

де

$$\{N^{L_1)}\} = \{N_{11}^{L_1},\ N_{22}^{L_1},\ N_{12}^{L_1}\}^T = [A]\cdot\{\varepsilon^{L_1}\} + [B]\{\chi_1\}, \qquad (3.136)$$

$$\{\varepsilon^{L_1}\} = \left\{\frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x} + k_1 w_1^{(e)};\ \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y} + k_2 w_1^{(e)};\ \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial x}\right\}^T, \qquad (3.137)$$

$$\{\chi_1\} = \left\{\frac{\partial \psi_{x2}^{(e)}}{\partial x};\ \frac{\partial \psi_{y2}^{(e)}}{\partial y};\ \frac{\partial \psi_{x2}^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}^{(e)}}{\partial x}\right\}^T \qquad (3.138)$$

$$\{N^{L_2}\} = \{N_{11}^{L_2},\ N_{22}^{L_2},\ N_{12}^{L_2}\}^T = [A]\cdot\{\varepsilon^{L_2}\} + [B]\{\chi_2\}, \qquad (3.139)$$

$$\left\{\varepsilon^{L_2}\right\}=\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x};\frac{\partial v_2}{\partial y};\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right\}^T, \tag{3.140}$$

$$\{\chi_2\}=\left\{\frac{\partial\psi_{x2}}{\partial x};\ \frac{\partial\psi_{y2}}{\partial y};\ \frac{\partial\psi_{x2}}{\partial y}+\frac{\partial\psi_{y2}}{\partial x}\right\}^T, \tag{3.141}$$

$$\{N^{N_1}\}=\left\{N_{11}^{N_1},\ N_{22}^{N_1},\ N_{12}^{N_1}\right\}^T=[A]\cdot\left\{\varepsilon^{N_1}\right\}, \tag{3.142}$$

$$\left\{\varepsilon^{N_1}\right\}=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\right)^2;\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\right)^2;\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\right\}^T. \tag{3.143}$$

При розв’язанні лінійної задачі, було отримано, що :

$$L_{31}u_1^{(e)}(x,y)+L_{32}v_1^{(e)}(x,y)+L_{33}w_1^{(e)}(x,y)+L_{34}\psi_{x1}^{(e)}(x,y)+L_{35}\psi_{y1}^{(e)}(x,y)=$$

$$-m_1\omega_L^2w_1^{(e)}(x,y).$$

Тоді, з урахуванням усіх перетворень, третє рівняння системи (3.131) може бути переписано в наступному вигляді:

$$m_1w_1^{(e)}(x,y)y_1{}''(t)+m_1\omega_L^2w_1^{(e)}(x,y)y_1(t)-y_1^2(t)(L_{31}u_2(x,y)+L_{32}v_2(x,y)+$$

$$\left.+L_{34}\psi_{x2}(x,y)+L_{35}\psi_{y2}(x,y)+N_{11}^{L_1}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x^2}+N_{22}^{L_1}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial y^2}+2N_{12}^{L_1}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x\partial y}\right)-$$

$$-y_1^3(t)\left(NL_{33}w_1^{(e)}+N_{11}^{(L_2)}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x^2}+N_{22}^{(L_2)}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial y^2}+2N_{12}^{(L_2)}\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x\partial y}\right)=0. \tag{3.144}$$

Тут

$$NL_{33}(w_1^{(e)})=-N_{11}^{N_1}\left(w_1^{(e)}\right)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x^2}-2N_{12}^{N_1}\left(w_1^{(e)}\right)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial x\partial y}-N_{22}^{N_1}\left(w_1^{(e)}\right)\frac{\partial^2w_1^{(e)}}{\partial y^2}.$$

Одержане рівняння (3.144) є звичайним диференціальним рівнянням з невідомою функцією $y_1(t)$. Воно містить квадратичну та кубічну нелінійність. Застосовуючи до цього рівняння метод Бубнова-Гальоркіна, ми отримали нелінійне звичайне диференціальне рівняння:

$$y_1''(t)+\alpha y_1(t)+\beta y_1^2(t)+\gamma y_1^3(t)=0\ , \tag{3.145}$$

Де його коефіцієнти α,β,γ визначаються наступним чином:

$$\alpha=\omega_L^2, \tag{3.146}$$

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_\Omega \left(L_{31} u_2 + L_{32} v_2 + L_{34} \psi_{x2} + L_{35} \psi_{y2} + \right.$$

$$\left. + N_{11}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_1} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) w_1^{(e)} dxdy \tag{3.147}$$

$$\gamma = \frac{-1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_\Omega \left(NL_{33}\left(w_1^{(e)}\right) + N_{11}^{L_2)} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) w_1^{(e)} \, dxdy. \tag{3.148}$$

У виразах (3.147-3.148) для обчислення $\left\{N^{L_1)}\right\} = \left\{N_{11}^{L_1},\ N_{22}^{L_1},\ N_{12}^{L_1}\right\}^T$ та $\{N^{L_2}\} = \left\{N_{11}^{L_2},\ N_{22}^{L_2},\ N_{12}^{L_2}\right\}^T$ застосовуються формули (3.136-3.139).

Таким чином, як і для випадку використання класичної теорії, так і для випадку використання FSDT ми звели нелінійну систему диференціальних рівнянь до нелінійного звичайного диференціального рівняння.

3.4.3 Теорія третього порядку (теорія Редді)

Треба зазначити, що для зведення системи рівнянь руху ФГМ пологих оболонок до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь у рамках теорії третього порядку використовується такий самий алгоритм, який було застосовано для теорії зсуву першого порядку. Задача зводиться до розв’язання нелінійного звичайного рівняння (3.145), коефіцієнти якого визначаються за аналогічними формулами

$$\alpha = \omega_L^2, \tag{3.149}$$

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_\Omega \left(L_{31} u_2 + L_{32} v_2 + L_{34} \psi_{x2} + L_{35} \psi_{y2} + \right.$$

$$\left. + \left(N_{11}^{L_1} - c_1\right) \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + \left(N_{22}^{L_1} - c_1\right) \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2\left(N_{12}^{L_1} - c_1\right) \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) w_1^{(e)} dxdy \tag{3.150}$$

$$\gamma = \frac{-1}{m_1 \left\| w_1^{(e)} \right\|^2} \iint_\Omega \left(NL_{33}\left(w_1^{(e)}\right) + N_{11}^{L_2)} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x^2} + N_{22}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{L_2} \frac{\partial^2 w_1^{(e)}}{\partial x \partial y} \right) w_1^{(e)} \, dxdy. \tag{3.151}$$

Зауважимо що всі лінійні оператори та нелінійні частини рівнянь мають вигляд, який записано в підрозділі 3.1.3 у рамках використання теорії Редді.

Наведемо нелінійні вирази, які присутні у формулах (3.150-3.151):

$$\{N^{L_1}\} = \left\{N_{11}^{L_1},\ N_{22}^{L_1},\ N_{12}^{L_1}\right\}^T = [A]\cdot\{\varepsilon^{L_1}\} + [B]\{\chi_2\} + [E]\left\{\chi_2^{(3)}\right\},$$

$$\left\{\varepsilon^{L_1}\right\} = \left\{\frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x} + k_1 w_1^{(e)};\ \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial y} + k_2 w_1^{(e)};\ \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(e)}}{\partial x}\right\}^T,$$

$$\{\chi_2\} = \left\{\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x};\ \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y};\ \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial x}\right\}^T,$$

$$\left\{\chi_2^{(3)}\right\} = -\mathrm{c}_1\left\{\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1^e}{\partial x^2};\ \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_1^e}{\partial y^2};\ \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y2}}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w_1^e}{\partial x \partial y}\right\}$$

$$\{N^{L_2}\} = \left\{N_{11}^{L_2},\ N_{22}^{L_2},\ N_{12}^{L_2}\right\}^T = [A]\cdot\{\varepsilon^{L_2}\} + [B]\{\chi_2\} + [E]\left\{\chi_2^{(3)}\right\},$$

$$\left\{\varepsilon^{L_2}\right\} = \left\{\frac{\partial u_2}{\partial x};\frac{\partial v_2}{\partial y};\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right\}^T,$$

$$\{N^{N_1}\} = \left\{N_{11}^{N_1},\ N_{22}^{N_1},\ N_{12}^{N_1}\right\}^T = [A]\cdot\{\varepsilon^{N_1}\} + [B]\{\chi_2\} + [E]\left\{\chi_2^{(3)}\right\},$$

$$\left\{\varepsilon^{N_1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\right)^2;\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\right)^2;\ \frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial w_1^{(e)}}{\partial x}\right\}^T.$$

3.4.4 Розв’язання нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод Рунге-Кутта

Для розв’язання нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з квадратичними і кубічними нелінійностями, що входять до них, можуть бути використані різні наближені методи, наприклад метод Бубнова-Гальоркіна, метод багатьох масштабів, метод гармонійного балансу, метод Рунге-Кутта та інші методи.

Згідно з *методом Бубнова-Гальоркіна*, шуканий розв’язок представляється як розкладання по базисним функціям. Знаходження розв’язку здійснюється згідно з якістю ортогональності нев'язки до базових функцій.

Сутність *методу гармонійного балансу* полягає у заміні коливальних системах нелінійних сил спеціальним чином побудованими лінійними функціями, у результаті він дозволяє використовувати теорію лінійних диференціальних рівнянь для наближеного аналізу нелінійних систем.

Метод Рунге-Кутта полягає в рекурентному застосуванні ітераційних формул для обчислення значень функції, що шукається.

У цій роботі для розв'язку нелінійних рівнянь (3.126), (3.145) було застосовано метод Рунге-Кутта 7-8 порядку. Чисельна реалізація методу виконана за допомогою пакета MAPLE.

Розглянемо докладніше застосування методу Рунге-Кутта до цих рівнянь. Розв'язання рівнянь дозволяє знайти функцію $y_1(t)$, а, отже, і прогин оболонки у будь-який час у точці, заданої у початкових умовах:

$$w(x_0, y_0, t) = w_1^{(e)}(x_0, y_0) y_1(t).$$

Тут (x_0, y_0) – точка, в якій задано початковий прогин $w_1 = w_{max}$.

Функції $y_1(t)$ і $w(x_0, y_0, t)$ є періодичними з загальним періодом T_N. Залежності ω_N/ω_L знаходяться як відношення лінійного та нелінійного періодів коливань:

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \frac{T_L}{T_N}, \tag{3.152}$$

де

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L}. \tag{3.153}$$

Варіюючи початкові умови та повторюючи описані операції, отримаємо дискретний набір точок для побудови скелетних та резонансних кривих.

У разі пластин одержане нелінійне диференціальне рівняння можна розв'язати методом Гальоркіна або методом гармонічного балансу [239]. Залежність відношення ω_N/ω_L визначається однаковою формулою, а саме:

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\gamma A^2}. \tag{3.154}$$

3.4.5 Використання теорії R-функцій для реалізації запропонованого методу

Для реалізації запропонованого алгоритму розв'язання лінійних та нелінійних задач теорії ФГМ пластин та пологих оболонок надалі буде використано варіаційний метод Рітца та теорія R-функцій, тобто метод, який відомий у всесвітній літературі, як варіаційно-структурний метод, абревіатура якого визначається як RFM. Цей метод було використано для розв'язання багатьох задач математичної фізики, в тому числі для задач теорії пластин та оболонок. Не будемо зупинятися на повному огляді джерел, в яких було використано цей метод. Зауважимо тільки, що вперше до задач теорії ізотропних пластин метод було застосовано в роботах В.Л. Рвачова та його учнів. Результати цих досліджень були узагальнені в монографії [289]. В монографії В.Л.Рвачова та Л.В. Курпа [290] метод було розвинуто для аналізу анізотропних пластин зі складною формою плану та різними умовами закріплення. В цій роботі вперше були розглянуті геометрично нелінійні коливання ізотропних пластин та задачі стійкості з урахуванням неоднорідного докритичного стану. Розв'язання задач було виконано в рамках класичної теорії пластин. Подальший розвиток теорії R-функцій стосовно теорії оболонок та пластин, в тому числі багатошарових, відбувався на протязі останніх 20 років. Основні результати цих досліджень були виконані в багатьох роботах [302-306, 331, 337-342, 352-359] за активною участю здобувачки та узагальнені в двох монографіях [74] та [291]. Починаючи з 2014 року теорію R-функцій було застосовано до розрахунку статичної та динамічної поведінки функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин з урахуванням геометричної нелінійності, пружної основи, пористості матеріалу, змінної товщини, та інших особливостей, які впливають на поведінку об'єкту.

Для зручності нагадаємо основні положення та ідею методу (RFM) на прикладі задачі про лінійні коливання ФГМ пологої оболонки, яка моделюється в рамках уточненої теорії першого порядку. Враховуючи, що для розв'язання цієї задачі використовується варіаційний метод Рітца, то перш за все необхідно сформулювати варіаційну постановку задачі.

Варіаційна постановка цієї задачі формулюється як варіаційна проблема про знаходження екстремума наступного функціоналу:

$$J = U(u, v, w, \psi_x, \psi_y) - \lambda^2 P\big(u, v, w, \psi_x, \psi_y\big), \tag{3.155}$$

де потенціальна енергія U та кінетична енергія P визначаються як

$$U = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} +$$

$$+Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}\big)d\Omega,$$

$$P = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \Big(I_0(u^2 + v^2 + w^2) + 2I_1\big(u\psi_x + v\psi_y\big) + I_2\big(\psi_x^2 + \psi_y^2\big)\Big)\, dxdy.$$

Якщо досліджується згин пологої оболонки під дією поперечного навантаження $q(x, y)$, то варіаційна постановка задачі формулюється як знаходження стаціонарної точки наступного функціоналу:

$$J = U(u, v, w, \psi_x, \psi_y) - A, \tag{3.156}$$

де

$$A = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} q(x, y)w\, dxdy.$$

Екстремум функціоналів (3.155) та (3.156) відшукується на множині функцій, які задовольняють принаймні головні граничні умови. Тому невідомі функції u, v, w, ψ_x, ψ_y представляються у вигляді розвинення в ряди відносно заданої системи координатних функцій [287]:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} c_k u_k\,(x, y),\; v(x, y) = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} c_k v_k\,(x, y),$$

$$w(x, y) = \sum_{k=N_2+1}^{N_3} c_k w_k\,(x, y),\;\; \psi_x(x, y) = \sum_{k=N_3+1}^{N_4} c_k \psi_{xk}\,(x, y),$$

$$\psi_y(x, y) = \sum_{k=N_4+1}^{N_5} c_k \psi_{yk}\,(x, y), \tag{3.157}$$

де $c_k, k = \overline{1, N_5}$ невизначені коефіцієнти, які знаходяться за умови стаціонарності функціоналів J (4.64, 4.65);

$\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{\psi_{xk}\}$, $\{\psi_{yk}\}$, $k = \overline{1, N_5}$ - це послідовності координатних функцій.

Системи координатних функцій повинні задовольняти наступні вимоги:

а) бути лінійно незалежними;

б) диференційованими до необхідного порядку;

в) утворювати повну систему функцій;

г) задовольняти принаймні головним (геометричним) крайовим умовам.

У даній роботі побудова систем координатних функцій для складної геометрії плану оболонки виконується за допомогою теорії R-функцій. Невизначені коефіцієнти c_k, $k = \overline{1, N_5}$ знаходяться з відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, тобто з системи Рітца, яка в загальному вигляді визначається як

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1,2, \cdots N_5 \ . \tag{3.158}$$

Проблема побудови системи координатних функцій за допомогою теорії R-функцій вирішується шляхом конструювання структурних формул розв'язку крайової задачі, що містять явну залежність від геометричних та фізичних параметрів.

Сформулюємо визначення структури розв'язку.

Визначення 1. Формула

$$U = B(\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n, \omega, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n),$$

де B - відомий оператор, який залежить від виду крайових умов,

$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ – так звані невизначені компоненти структури розв'язку, які необхідне число раз диференційовані в заданій області, та при будь якому виборі яких будуть задовільнені крайові умови, функції $\omega, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ описують рівняння границі області та окремих її частин, називається структурою розв'язку крайової задачі.

Визначення 2. Структура, яка враховує всі крайові умови, називається загальною структурою (GSS-General structure of solution). Якщо задовольняється лише частина крайових умов, то структура називається частковою.

З визначення структури, яка враховує деяку крайову умову, видно, що невизначені компоненти, що входять до структури, можуть вибиратися довільно, оскільки незалежно від цього вибору крайові умови, що розглядаються, мають бути задоволені. Ці невизначені компоненти природно вибирати таким чином, щоб найкраще задовольнити заданому диференціальному рівнянню, і якщо необхідно, то й іншим крайовим умовам завдання.

Оскільки структура повинна бути деяким аналітичним виразом, що має сенс скрізь в області, що розглядається, то необхідно враховувати інформацію про крайові умови на аналітичному рівні. Зауважимо, що кінематичні крайові умови (головні) можна врахувати за допомогою методів побудови рівнянь складних геометричних об'єктів.

Наприклад, якщо розглядається оболонка жорстко закріплена на границі, то відповідні крайові умови в рамках уточненої теорії першого порядку мають вигляд:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega, \tag{3.159}$$

Структура розв'язку для такого виду крайових умов має наступний вигляд:

$$w = \omega\Phi_1, \; u = \omega\Phi_2, \; v = \omega\Phi_3, \; \psi_x = \omega\Phi_4, \; \psi_y = \omega\Phi_5, \tag{3.160}$$

де функція $\omega(x, y)$ будується за допомогою теорії R-функцій та задовольняє наступним умовам:

$$\begin{aligned} &\omega(x, y) = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega, \\ &\omega(x, y) > 0, \quad \forall(x, y) \in \Omega\ , \\ &\omega(x, y) < 0, \quad \forall(x, y) \notin \Omega. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Функції $\Phi_i, \; i = \overline{1,5}$ уявляють собою невизначені компоненти структури розв'язку. Представимо їх у вигляді розвинутих усікнених рядів за деякою повною системою функцій $\{\varphi_i^k\}, \left(k = \overline{1,5}, \quad i = \overline{1, n}\right)$, наприклад, степеневих поліномів, поліномів Чебишева, сплайнів, тригонометричних поліномів або інших повних систем, тобто приймемо, що

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i^{(1)}, \Phi_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} b_i \varphi_i^{(2)}, \Phi_3 = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} c_i \varphi_i^{(3)},$$

$$\Phi_4 = \sum_{N_3+1}^{N_4} d_i \varphi_i^{(4)}, \Phi_5 = \sum_{N_4+1}^{N_5} d_i \varphi_i^{(5)} \tag{3.162}$$

У даній роботі в якості таких систем було обрано степеневі поліноми, з урахуванням симетрії задачі. Тоді, якщо припустити, що функція $\omega(x, y)$, яка задовольняє умови (3.161) побудована, то підставляючи (3.162) в (3.160) одержимо розв'язок задачі у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i\,\omega\varphi_i^{(1)},\quad v = \sum_{i=N_1+1}^{N_{21}} a_i\,\omega\varphi_i^{(2)},\quad w = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i\,\omega\varphi_i^{(3)},$$

$$\psi_x = \sum_{i=N_3+1}^{N_4} a_i\,\omega\varphi_i^{(4)},\ \psi_y = \sum_{i=N_4+1}^{N_5} a_i\omega\,\varphi_i^{(5)}. \qquad (3.163)$$

Це означає, що координатні функції для методу Рітца побудовано. Очевидно, що вони мають наступний вигляд

$$u_i = \omega\varphi_i^{(1)},\quad v_i = \omega\varphi_i^{(2)},\quad w_i = \omega\varphi_i^{(3)},\quad \psi_{x_i} = \omega\varphi_i^{(4)},\quad \psi_{yi} = \varphi_i^{(5)}. \qquad (3.164)$$

Зупинимось коротко на методах побудови рівняння границі будь якої області. Детально та строго теорію R-функцій викладено в монографії автора цієї теорії В.Л.Рвачова та його учнів [287, 289]. Тут в роботі описано методи побудови рівнянь границі будь якої області на практичному рівні, не зосереджуючи уваги на багатьох подробицях, які можна знайти в роботах [290, 291].

Згідно з теорією R-функцій перш за все необхідно побудувати логічну формулу заданої області, яка уявляє собою перетин, об'єднання або заперечення опорних областей, з яких можна побудувати задану область. Наприклад, прямокутник, який показано на Рис. 3.2

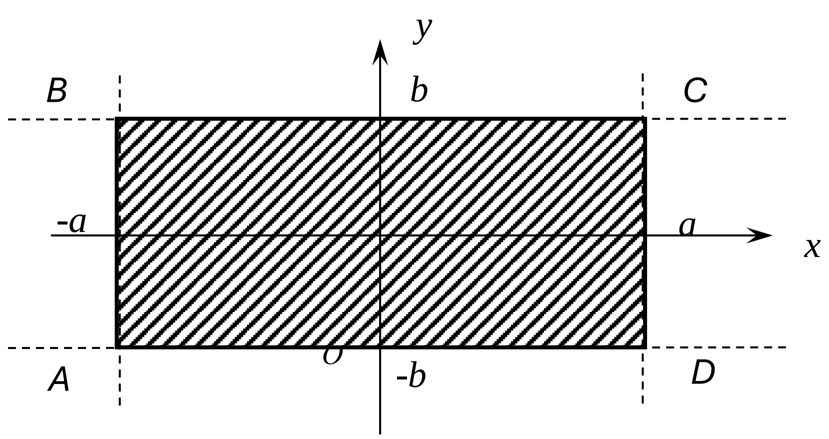


Рис. 3.2. Перший приклад області (прямокутник)

Перший приклад області (прямокутник) можна розглядати як перетин двох смуг, які визначаються нерівностями:

$$\Omega_1:\ f_1 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0, \qquad (3.165)$$

$$\Omega_2: \; f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0 \qquad (3.166)$$

Очевидно, що перша нерівність буде виконуватися для всіх точок, що лежать всередині вертикальної смуги ширини $2a$, а друга виконується для всіх точок, що належать внутрішній частині горизонтальної смуги шириною $2b$. Перетин цих смуг і утворює заданий прямокутник. Таким чином, вираз $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$буде логічною формулою або предикатом для прямокутника. Як було показано В.Л. Рвачовим [287] для побудови рівняння границі прямокутника в аналітичному вигляді досить в логічній формулі замінити символи Ω_1та Ω_2 виразами для функцій f_1 та f_2, а знак перетину знаком $\wedge_\alpha$, який відповідає операції *R-кон'юнкції*. Ця операція визначається як:

$$x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}\right), \qquad (3.167)$$

де α – довільна величина, яка знаходиться в межах $-1 < \alpha \leq 1$.

Таким чином, аналітичний вигляд рівняння границі прямокутника є наступним:

$$\omega(x, y) = f_1 \wedge_\alpha f_1$$

Побудуємо логічну формулу для більш складної області, зображеної на Рис. 3.3.

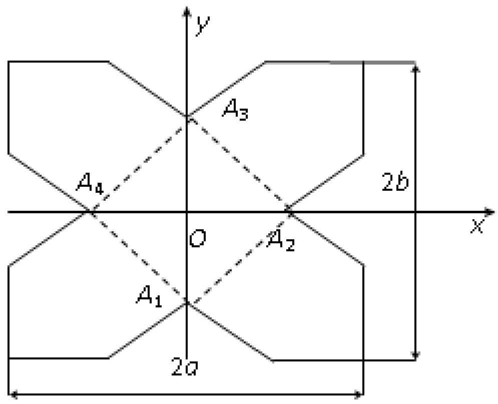


Рис. 3.3. Другий приклад області (складна геометрія)

Побудуємо логічну формулу для заданої області та функцію $\omega(x, y)$, додатну в заданій області Ω (Рис. 3.3) і рівну нулю на границі $\partial\Omega$.

Логічна формула для заданої області може бути подана у вигляді

$$\Omega = (f_1 \wedge f_2) \wedge \left((f_3 \wedge f_4) \vee (f_5 \wedge f_6)\right), \qquad (3.168)$$

де f_1 – вертикальна смуга, симетрична відносно осі $0y$, шириною $2a$. Множина точок, які належать внутрішній частині цієї смуги, визначається нерівністю

$$f_1 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0,$$

f_2 – горизонтальна смуга шириною $2b$, симетрична відносно осі Ox.

Множина точок, які належать внутрішній частині цієї смуги, визначається нерівністю

$$f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0,$$

f_3, f_5 – півплощини, що розташована вище прямих A_1A_2 і A_4A_1 відповідно, f_4, f_6 – півплощини, які розташовані нижче прямих A_2A_3 і A_3A_4 відповідно. Ці півплощини задаються за допомогою орієнтованих прямих [287] A_1A_2 (f_3), A_2A_3 (f_5), A_3A_4 (f_4), A_4A_1 (f_6). Позначимо координати точок A_1, A_2, A_3, A_4 як $A_1(0, -c)$, $A_2(c, 0)$, $A_3(0, c)$, $A_4(-c, 0)$. Тоді множини точок, які належать цим півплощинам, задовольняють наступні нерівності:

$$f_3 = ((y - x + c)/\sqrt{2}) \geq 0,$$

$$f_4 = ((x - y + c)/\sqrt{2}) \geq 0,$$

$$f_5 = ((y + x - c)/\sqrt{2}) \geq 0,$$

$$f_6 = ((y + x + c)/\sqrt{2}) \geq 0.$$

Згідно з відповідними теоремами теорії R-функцій побудуємо рівняння границі області в аналітичному вигляді

$$\omega(x,y) = (f_1 \wedge_\alpha f_2) \wedge_\alpha ((f_3 \wedge_\alpha f_4) \vee_\alpha (f_5 \wedge_\alpha f_6)),$$

Зазначимо, що знак об'єднання опорних областей у логічній формулі (3.168) при побудові аналітичного виразу замінюється знаком $\vee_\alpha$, який відповідає операції *R-диз'юнкції*. Ця операція визначається як:

$$x_1 \vee_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}). \qquad (3.169)$$

Заперечення в логічній формулі замінюється R-запереченням, тобто визначається як

$$\overline{x} = -x. \qquad (3.170)$$

Система R-функцій (3.167), (3.169), (3.170) утворює повну систему [287], за допомогою якої можна побудувати будь яку R-функцію. Надалі ми будемо використовувати дану систему при нульовому значенні параметра α, тобто наступну *систему R-операцій*:

$$X_1 \wedge_0 X_2 \equiv X_1 + X_2 - \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \qquad (3.171)$$

$$X_1 \vee_0 X_2 \equiv X_1 + X_2 + \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \qquad (3.172)$$

$$\overline{\mathrm{X}} = -\mathrm{X}. \qquad (3.173)$$

Що ж до обліку крайових умов, які містять похідні від невідомих функцій то тут виникає специфічна складність, пов'язана з тим, що крайові умови є співвідношенням, що мають сенс на межі області. Це призводить до необхідності здійснювати деяке аналітичне продовження крайових умов всередину області. Таке продовження вдається здійснити за допомогою спеціальних операторів та з коефіцієнтами, що залежать від форми області, що перетворюються на оператори диференціювання k-го порядку за нормаллю і дотичною відповідно на межі області. Детально такі оператори описані в монографії Рвачова [287], як і методи побудови структурних формул для заданих крайових умов. Для задач теорії пластин та пологих оболонок було побудовано велику кількість структурних формул, які задовольняють різним типам крайових умов [290, 291].

Далі при вирішенні конкретних задач, будемо будувати необхідні структури розв'язків, або використовувати уже відомі.

Висновки за Розділом 3

З теоретичної точки зору цей розділ найбільш суттєвий, тому що саме в ньому пропонується новий метод розв'язання лінійних та геометрично нелінійних коливань пологих оболонок та пластин складної геометричної форми та різними умовами закріплення. Алгоритм методу компактно представлено у вигляді схеми (Рис.3.1). В наступних пунктах описано підходи реалізації запропонованого методу:

1. Одержано нелінійні рівняння руху пологих оболонок у переміщеннях в рамках класичної та уточнених теорій першого та третього порядків. Права частина одержаних рівнянь містить лінійні доданки, а ліва

тільки нелінійні доданки. Зауважимо, що вирази для нелінійних доданків мають досить складний вигляд і суттєво відрізняються один від одного при застосуванні різних теорій (CLT, FSDT, HSDT)

2. Отримано варіаційні постановки задач про вільні лінійні коливання пологих оболонок та пластин складної геометричної форми в рамках трьох теорій та представлені методи дискретизації одержаних функціоналів, використовуючи варіаційний метод Рітца та теорію R-функцій.

3. Побудовані нові функціонали для розв'язку послідовності задач подібних задачам теорії пружності, коли роль масових сил виконують нелінійні доданки системи, обчислені як функції від одержаних на попередньому кроці власних функцій лінійної задачі. Це необхідно було для реалізації запропонованого методу

4. Запропоновано оригінальні методи зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до звичайного нелінійного диференціального рівняння. Одержано в явному аналітичному вигляді коефіцієнти цього рівняння в рамках трьох теорій (CLT, FSDT, HSDT), які визначаються як подвійні інтеграли от відомих функцій по заданій області.

5. Представлено алгоритм розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта та побудови скелетних кривих.

6. В останньому пункті цього розділу наведено необхідну інформацію з теорії R-функцій та описано приклад її застосування у комбінації з методом Рітца.

Результати цього розділу застосовано в наступних розділах та опубліковано в роботах автора [307-310, 312, 314-315, 324, 333-335, 343-348, 360-367].

РОЗДІЛ 4

ВИКОРИСТАННЯ ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОШАРОВИХ ФГМ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Як було відмічено, аналіз опублікованої літератури з проблеми лінійних та нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок і пластин показує, що практично всі дослідники розглядають прямокутну або кругову форму плану та класичні граничні умови, які відповідають шарнірному закріпленню або вільній границі. Запропонований у даній роботі метод дозволяє вивчати динамічну поведінку функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану та різними граничними умовами.

Перш за все проілюструємо розроблений метод для розв'язання динамічних задач для одношарових ФГМ пологих оболонок двоякої кривини.

4.1 Загальні припущення для задач про коливання одношарових ФГМ пологих оболонок

Розглянемо одношарову пологу оболонку довільної план-форми з радіусами кривини R_x, R_y у напрямку Ox, Oy осей координат відповідно (Рис. 4.1).

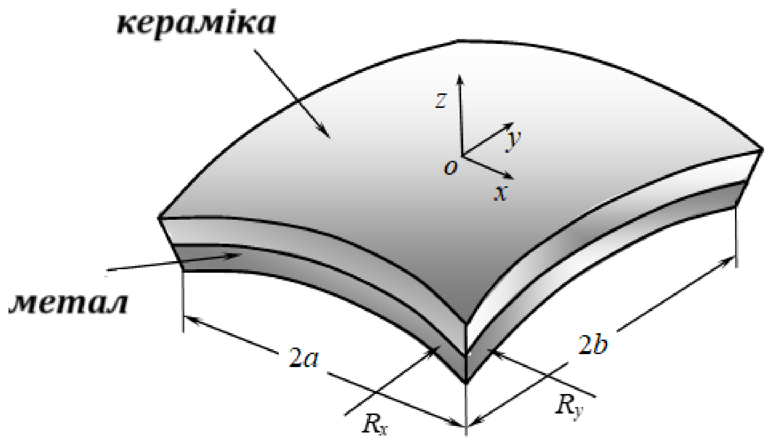


Рис. 4.1. Типова ФГМ квадратна оболонка

Будемо аналізувати різні види ФГМ пологих оболонок за характером їх кривини: кругову циліндричну оболонку ($R_x = R,\ R_y = \infty$), сферична оболонку $\left(R_x = R_y = R\right)$, гіперболічно-параболоїдну оболонку $\left(R_x = R,\ R_y = -R\right)$ та пластину ($R_x = R_y = \infty$) (Рис. 4.1). Вважаємо, що ФГМ полога оболонка виготовлена із суміші двох матеріальних складових: металу та кераміки.

Ефективні властивості ФГМ матеріалу змінюються в одному напрямку, а саме в напрямку товщини та визначаються як [193]:

Модель А

$$E(z,T) = \left(E_c(T) - E_m(T)\right)V_c + E_m(T), \tag{4.1}$$

$$\rho(z,T) = \left(\rho_c(T) - \rho_m(T)\right)V_c + \rho_m(T), \tag{4.2}$$

$$\nu(z,T) = \left(\nu_c(T) - \nu_m(T)\right)V_c + \nu_m(T). \tag{4.3}$$

Або

Модель Б

$$E(z,T) = \left(E_m(T) - E_c(T)\right)V_c + E_c(T), \tag{4.4}$$

$$\rho(z,T) = \left(\rho_m(T) - \rho_c(T)\right)V_c + \rho_c(T), \tag{4.5}$$

$$\nu(z,T) = \left(\nu_m(T) - \nu_c(T)\right)V_c + \nu_c(T). \tag{4.6}$$

Об’ємна доля кераміки V_c визначається за степеневим законом (правило Фойгта). Відповідно до цього правила маємо:

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k, \tag{4.7}$$

де h - це товщина оболонки, k це параметр, який керує зміною об’ємних часток матеріалу в напрямку товщини. Надалі цей параметр будемо називати *градієнтним індексом* або *індексом об'ємної частки кераміки*. В залежності від обраного закону зміна властивостей матеріалу буде відбуватися згідно з формулами (4.1-4.3) або формул (4.4-4.6).

Використовуючи метод Рітца для розв’язання задач про вільні коливання оболонок, треба знайти стаціонарне значення відповідного функціоналу:

$$J = P - T, \tag{4.8}$$

де вирази для енергії деформації P та кінетичної енергії T залежать від обраної теорії. Для класичної теорії це будуть формули (2.35), (2.36), для уточненої теорії першого порядку використовуються формули (2.50), (2.52), для теорії вищого порядку (теорії Редді) застосовуються формули (2.71), (2.72).

Надалі будемо вважати, що коефіцієнт Пуассона є постійна величина. Зазвичай він приймається однаковим для обох складових та рівним $\nu = 0.3$. Тоді інтеграли (2.28-2.30) обчислюються точно. Враховуючи, що більшість чисельних результатів було одержано в рамках класичної теорії (CST) або уточненої теорії першого порядку (FSDT), нижче наведено необхідну інформацію для цих теорій. А саме, представимо матриці $[A], [B], [D]$ у наступному вигляді:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \frac{E_1}{1-\nu^2}[C], \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} = \frac{E_2}{1-\nu^2}[C], \quad (4.9)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = \frac{E_3}{1-\nu^2}[C]\ , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Аналітичні вирази для E_1, E_2, E_3, що були одержані в даній роботі, мають однаковий вигляд для теорій CST, FSDT, а саме:

Модель А:

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1}\right)h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)}, \quad (4.11)$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right)h^3. \quad (4.12)$$

Модель Б:

$$E_1 = \left(E_c + \frac{E_m - E_c}{k+1}\right)h, \quad E_2 = \frac{(E_m - E_c)kh^2}{2(k+1)(k+2)}, \quad (4.13)$$

$$E_3 = \left(\frac{E_c}{12} + (E_m - E_c)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right)h^3. \quad (4.14)$$

Наведемо формули для обчислення значень I_o, I_1, I_2 у виразах (2.40).

Для класичної теорії (CST):

Модель А

$$\rho(z,T) = I_o = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1}\right)h. \quad (4.15)$$

Модель Б

$$\rho(z,T) = \left(\rho_c + \frac{\rho_m - \rho_c}{k+1}\right) h = I_o. \tag{4.16}$$

Для уточненої теорії першого порядку (FSDT):

Модель А

$$I_o = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1}\right) h, \qquad I_1 = \frac{(\rho_c - \rho_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)}, \tag{4.17}$$

$$I_2 = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right) h^3. \tag{4.18}$$

Модель Б

$$I_o = \left(\rho_c + \frac{\rho_m - \rho_c}{k+1}\right) h, \quad I_1 = \frac{(\rho_m - \rho_c) k h^2}{2(k+1)(k+2)}, \tag{4.19}$$

$$I_2 = \left(\frac{\rho_c}{12} + (\rho_m - \rho_c)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}\right)\right) h^3. \tag{4.20}$$

У наведених формулах (4.15-4.20) ρ_m, ρ_c визначають густину металу та кераміки відповідно.

Запропонований метод було реалізовано в рамках системи POLE-RL у вигляді комплексу програм.

4.2 Тестові задачі

Для перевірки програмного забезпечення та точності запропонованого методу було розв’язано багато тестових задач. Були проаналізовані лінійні коливання функціонально-градієнтних циліндричних, сферичних або у формі параболічного гіперболоїду пологих оболонок, що спираються на прямокутний план. Розв'язання виконувалось у рамках класичної (CST) або уточненої теорій першого порядку (FSDT). У якості функціонально-градієнтного матеріалу було обрано різні сплави. Значення модуля Юнга E, коефіцієнта Пуассона ν та масової густини ρ для різних видів матеріалу, що складають ФГМ сплав, наведено у Таблиці 4.1.

Таблиця 4.1. Механічні властивості функціонально-градієнтних матеріалів

Матеріал	E (GPA)	ν	$\rho(\mathrm{kg/m^3})$
Al	70	0.3	2707
Al_2O_3	389	0.3	3800
Si_3N_4	322.27	0.3	2370
$SUS304$	207.78	0.3	8166
ZrO_2	200	0.3	5700
$Ti-6Al-4V$	105.69	0.3	4427

Наведемо декілька прикладів з тестових перевірок.

4.2.1 Аналіз коливань вільно опертої ФГМ пластини та пологої оболонки з квадратною формою плану в рамках класичної (CST) та уточненої (FSDT) теорій

Досліджуємо вільні коливання ФГМ пластини та пологої оболонки (сферичної, циліндричної або у формі гіперболічного параболоїда), що спирається на квадратний план зі стороною $2a$ (Рис. 4.1). Співвідношення товщини до характерного геометричного розміру прийнято рівним *h/2a*=0.1.

Зауважимо, що при використанні методу Рітца достатньо задовольняти кінематичним (так званим, головним або геометричним) граничним умовам. Тому нижче будемо наводити саме такі умови.

Припустимо, що оболонка вільно оперта по всьому контуру. Ефективні властивості обчислюються відповідно до Моделі A. У разі класичної теорії (CST) геометричні (головні) крайові умови визначаються як:

$$\begin{aligned} w &= 0\,,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega,\\ u &= 0\,,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega_1,\\ v &= 0\,,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega_2, \end{aligned} \tag{4.21}$$

де $\partial\Omega$ означає всю границю оболонки;

$\partial\Omega_1$ - сторони оболонки, які визначаються рівняннями $y=\pm b$, тобто паралельні осі *Ox*;

$\partial\Omega_2$ - сторони оболонки, які визначаються рівняннями $x = \pm a$, тобто паралельні осі *Oy*.

При використанні уточненої теорії першого порядку (FSDT) геометричні (головні) крайові умови мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &w = 0\,,\ \forall(x,y) \in \partial\Omega, \\ &u = \psi_x = 0\,,\ \forall(x,y) \in \partial\Omega_1, \\ &v = \psi_y = 0\,,\ \forall(x,y) \in \partial\Omega_2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

У даному випадку для побудови системи координатних функцій, на множині яких відшукується мінімум функціоналу

$$I = U_{max} - \lambda^2 T_{max}, \tag{4.23}$$

нема необхідності застосовувати теорію R-функцій, але для тестування будемо використовувати цю теорію. Структурні формули мають вигляд:

а) *класична теорія* (CST):

$$u = \omega_1\Phi_1,\ \ v = \omega_2\Phi_2,\ \ w = \omega\Phi_3, \tag{4.24}$$

б) *уточнена теорія першого порядку* (FSDT):

$$u = \omega_1\Phi_1, v = \omega_2\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega_1\Phi_4, \psi_y = \omega_2\Phi_5. \tag{4.25}$$

У рівняннях (4.24) та (4.25) $\omega = 0$ є рівнянням всієї границі оболонки. Функція ω визначається як:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \tag{4.26}$$

$\omega_1 = 0$ - рівняння сторін, параллельних вісі абсцис, $\omega_1 = f_1$,

$\omega_2 = 0$ - рівняння сторін, параллельних вісі ординат, $\omega_2 = f_2$,

де

$$f_1 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0 \tag{4.26а}$$

є рівнянням горизонтальної смуги, обмеженої прямими лініями $y = \pm b$;

$$f_2 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0 \tag{4.26б}$$

є рівнянням вертикальної смуги, обмеженої прямими лініями $x = \pm a$.

У структурних формулах (4.24) та (4.25) $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4,\ \Phi_5$ є невизначені компоненти, які розкладаються за деякою повною системою функцій $\left\{\varphi_k^{(i)}\right\}$:

$$P_i = \sum_{k=1}^{k=N_i} a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)} \ . \tag{4.27}$$

В даному випадку в якості такої системи обрані степеневі поліноми. Після проведення обчислювального експерименту було встановлено, що збіжність результатів принаймні у третьому знаку настає при збереженні 9-го степеня для поліномів $\Phi_1, \Phi_2, \ \Phi_4, \Phi_5$ та 10-го степеня для полінома Φ_3.

У Таблиці 4.2 представлено порівняння основних частот, обчислених при використанні RFM на базі класичної (CST) та уточненої теорій першого порядку (FSDT), з результатами робіт [93, 175, 166]. Безрозмірна частота обчислювалась за допомогою формули:

$$\Lambda = \lambda(2a)^2 h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}.$$

Аналіз порівняння показує, що результати, отримані за допомогою уточненої теорії першого порядку (FSDT) та RFM практично збігаються з представленими в роботі [175]. Відхилення від результатів теорії вищого порядку (HSDT) [166] не перевищують 4 %. Відхилення результатів при використанні RFM та класичної теорії (CST) з результатами роботи [93] не перевищують 2 %. В цілому слід зазначити, що класична теорія призводить в більшості випадків до підвищених значень основних частот у порівнянні з уточненими теоріями.

Також результати були перевірені з результатами вчених Neves та Ferreira [278]. Автори цієї роботи використовували метод колокацій на основі радіальних базисних функцій відповідно до теорії деформації зсуву вищого порядку, яка враховує деформацію через товщину. У роботі Pradyumna та Bandyopadhyay [150] було використано метод скінченних елементів і деформаційну зсувну теорію оболонок високого порядку (HSDT) без урахування деформацій по товщині. Як показало порівняння з результатами робіт [278] та [150], відхилення одержаних результатів не перебільшує 2 %.

Таблиця 4.2. Порівняння основних частот вільно опертої квадратної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки (*h/2a*=0.1) при різних кривинах та значеннях градієнтного індексу k

$\frac{2a}{R_y}$	$\frac{2a}{R_x}$	k	RFM (CST)	RFM (FSDT)	(CST) [93] Alijani	(FSDT) [175] Chorfi	(HSDT) [166] Matsunaga
0	0	0	0.0597	0.0576	0.0597	0.0577	0.0578
		0.5	0.0505	0.0489	0.0506	0.0490	0.0492
		1	0.0455	0.0441	0.0456	0.0442	0.0443
		4	0.0395	0.0382	0.0396	0.0383	0.0381
		10	0.0380	0.0365	0.0380	0.0366	0.0364
0.5	0.5	0	0.0770	0.0753	0.0779	0.0762	0.0751
		0.5	0.0665	0.0652	0.0676	0.0664	0.0657
		1	0.0605	0.0593	0.0617	0.0607	0.0601
		4	0.0508	0.0496	0.0519	0.0509	0.0503
		10	0.0472	0.0462	0.0482	0.0471	0.0464
0	0.5	0	0.0642	0.0622	0.0648	0.0629	0.0622
		0.5	0.0546	0.0531	0.0553	0.0540	0.0535
		1	0.0494	0.0481	0.0501	0.0490	0.0485
		4	0.0423	0.0411	0.0430	0.0419	0.0413
		10	0.0403	0.0389	0.0408	0.0395	0.0390
0.5	-0.5	0	0.0582	0.0562	0.0597	0.0580	0.0563
		0.5	0.0493	0.0477	0.0506	0.0493	0.0479
		1	0.0444	0.0430	0.0456	0.0445	0.0432
		4	0.0385	0.0372	0.0396	0.0385	0.0372
		10	0.0370	0.0356	0.0380	0.0368	0.0355

4.2.2 Дослідження лінійних коливань закріпленої та вільно опертої ФГМ циліндричної оболонки

Аналізуємо вільні коливання закріплених і вільно опертих ФГМ циліндричних оболонок.

У випадку застосування класичної теорії (CST) крайові умови для жорстко закріпленої оболонки визначаються як:

$$w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \,, \ u = v = 0 \,, \ \forall (x, y) \in \partial\Omega, \tag{4.28}$$

де $\partial\Omega$ означає всю границю оболонки.

При використанні уточненої теорії першого порядку (FSDT) крайові умови для жорстко закріпленої оболонки мають наступний вигляд:

$$w = u = v = \psi_x = \psi_y = 0\,,\ \forall(x,y) \in \partial\Omega. \tag{4.29}$$

Структурні формули для жорстко закріплених оболонок мають вигляд:

а) *класична теорія* (CST):

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega^2\Phi_3, \tag{4.29}$$

б) *уточнена теорія першого порядку* (FSDT):

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5. \tag{4.30}$$

У рівняннях (4.29) та (4.30) $\omega = 0$ є рівнянням всієї границі оболонки. Функція ω визначається формулою (4.26) з такими рівняннями для функцій f_1 та f_2, як у формулах (4.26а, б).

У Таблиці 4.3 представлені основні частоти жорстко закріпленої циліндричної квадратної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки із відношенням радіуса до сторони $R/2a = 10$, різними співвідношеннями товщини до сторони $h/2a$ та показниками k степеневого закону.

Таблиця 4.3. Порівняння основних частот квадратної циліндричної жорстко закріпленої ФГМ оболонки (Al/Al_2O_3), *R/2a*=10 для різних *h/2a* та k ($\Lambda = \lambda(2a)^2\sqrt{\frac{\rho_m h}{D}}$)

k	Метод	*h/2a*=0.1	*h/2a*=0.2	*h/2a*=0.5	*h/2a*=1
0	RFM	72.8029	78.6677	85.6286	102.362
	[278]	72.8141	78.7342	85.7713	102.7871
	[150]	71.7395	77.5654	84.88	102.3351
0.5	RFM	60.0817	64.6433	70.7237	85.7915
	[278]	59.9353	64.4438	70.5664	85.9029
	[150]	58.5305	63.1381	69.86	86.5452
1	RFM	53.3031	57.2635	62.8322	76.7814
	[278]	53.2759	57.2226	62.8414	77.0381
	[150]	52.0173	56.088	62.2152	77.0774

Результати запропонованого підходу в Таблиці 4.3 добре узгоджуються з результатами, які містяться в довідкових джерелах.

У Таблиці 4.4 наведено основну частоту циліндричної вільно опертої ФГМ квадратної оболонки (Al/Al_2O_3) з відношенням товщини до довжини $h/2a = 0.1$, а також для кількох відношень радіуса до довжини $R/2a$ і для кількох показників k степеневого закону.

Таблиця 4.4. Основні частоти квадратної циліндричної вільно опертої ФГМ оболонки (Al/Al_2O_3), *h/2a*=0.1 для різних *R/2a* та k ($\Lambda = \lambda(2a)^2\sqrt{\frac{\rho_m h}{D}}$)

k	Метод	*R/2a*=1	*R/2a*=5	*R/2a*=10	*R/2a*=50	Пластина
0	RFM	53.7464	42.8494	42.4338	42.2996	42.2939
	[278]	52.1101	42.7172	42.3684	42.256	42.2513
	[150]	51.5216	42.2543	41.908	41.7963	41.7917
0.2	RFM	49.5653	39.1767	38.7832	38.6597	38.6558
	[278]	47.859	38.7646	38.4368	38.3384	38.3368
	[150]	47.5968	40.1621	39.8472	39.7465	39.7426
0.5	RFM	45.0048	35.1827	34.8125	34.6998	34.6975
	[278]	43.6239	34.9273	34.6219	34.5365	34.5376
	[150]	43.3019	37.287	36.9995	36.9088	36.9057
1	RFM	40.2285	31.1428	30.8022	30.7016	30.7008
	[278]	39.1246	30.9865	30.7077	30.6355	30.6386
	[150]	38.7715	33.2268	32.9585	32.875	32.8726
2	RFM	35.6361	27.7018	27.4087	27.3251	27.3256
	[278]	34.7289	27.5977	27.3616	27.3055	27.3102
	[150]	34.3338	27.4449	27.1789	27.0961	27.0937
10	RFM	29.6011	24.3663	24.1808	24.1291	24.1298
	[278]	28.7611	24.2839	24.1444	24.1125	24.1171
	[150]	28.2757	19.3892	19.1562	19.0809	19.0778
∞	RFM	24.2852	19.3618	19.174	19.1133	19.1108
	[278]	23.5448	19.3008	19.1433	19.0924	19.0903
	[150]	24.1988	19.0917	18.9352	18.8848	18.8827

Згідно з Таблицями 4.3-4.4 різниця між результатами, отриманими за допомогою запропонованого методу R-функцій, та результатів, що наведені у роботах [278, 150], становить близько 1 %. Це підтверджує добре узгодження отриманих значень для розглянутих випадків.

4.2.3 Лінійні коливання жорстко закріпленої та вільно опертої ФГМ сферичної оболонки

Зараз розглядаємо вільні коливання жорстко закріплених і вільно опертих ФГМ (Al/Al_2O_3) сферичних оболонок. Результати для власних частот вільних коливань вільно опертої сферичної ФГМ оболонки представлені в Таблиці 4.5. Відношення товщини до сторони дорівнює $h/2a = 0.1$. Враховано різні співвідношення радіуса до сторони $R/2a$, а також показники k степеневого закону.

Таблиця 4.5. Основні частоти вільно опертої квадратної сферичної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки, $h/2a$=0.1, для різних $R/2a$ та k ($\Lambda = \lambda(2a)^2\sqrt{\frac{\rho_m h}{D}}$)

k	Метод	$R/2a$=1	$R/2a$=5	$R/2a$=10	$R/2a$=50	Пластина
0	RFM	80.4992	44.6403	42.8941	42.3181	42.2939
	[278]	79.0008	44.4697	42.818	42.2741	42.2513
	[150]	78.2306	44.0073	42.3579	41.8145	41.7917
0.2	RFM	74.6887	40.878	39.2175	38.676	38.6558
	[278]	73.0034	40.4211	38.8551	38.3528	38.3368
	[150]	72.6343	41.7782	42.818	39.7629	39.7426
0.5	RFM	68.3253	36.786	35.2191	34.7139	34.6975
	[278]	66.9033	36.4782	35.008	34.5478	34.5376
	[150]	66.5025	38.7731	37.3785	36.9234	36.9057
1	RFM	61.4497	32.6222	31.1749	30.7135	30.7008
	[278]	60.2636	32.4101	31.0572	30.6437	30.6386
	[150]	59.8521	34.6004	33.308	2.8881	32.8726
2	RFM	54.2238	28.99	27.7303	27.3343	27.3256
	[278]	53.2311	28.8329	27.6602	27.3109	27.3102
	[150]	52.7875	28.7459	27.511	27.1085	27.0937

Продовження Таблиці 4.5

10	RFM	43.0442	25.2207	24.3917	24.1349	24.1298
	[278]	42.2155	25.1038	24.3401	24.1168	24.1171
	[150]	41.6702	20.4691	19.4357	19.0922	19.0778
∞	RFM	36.3729	20.1709	19.382	19.1217	19.1108
	[278]	35.6948	20.0927	19.3464	19.1006	19.0903
	[150]	36.2904	19.8838	19.1385	18.893	18.8827

Для графічної ілюстрації доброго узгодження отриманих результатів з опублікованими в роботах [278, 150] наведено діаграму, яка представлена на Рис. 4.2. Для обчислення основних частот вільно опертої квадратної циліндричної ФГМ оболонки були розглянуті такі значення показників степеневого закону як k =0, 0.2, 0.5, 1, 2, 10, ∞, відношення радіуса до сторони становить $R/2a$ =5, відношення товщини до сторони $h/2a = 0.1$.

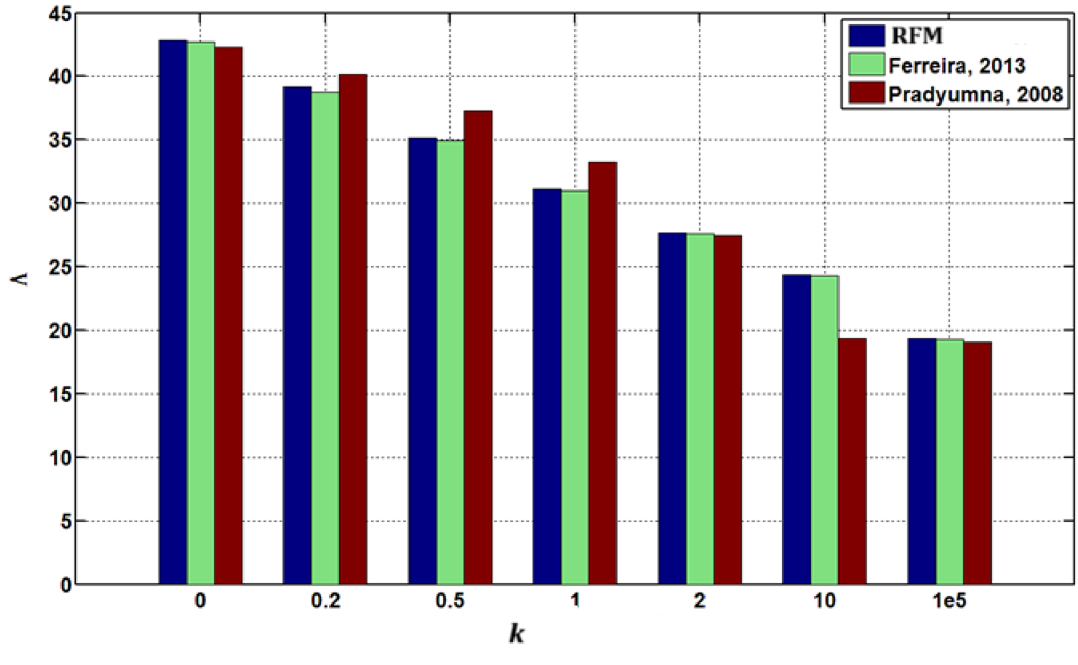


Рис. 4.2. Порівняння отриманих основних частот з результатами робіт [278, 150]

4.2.4 Лінійні коливання жорстко закріпленої сферичної оболонки з еліптичною формою плану

Геометричні параметри жорстко закріпленої ФГМ оболонки, що досліджується, були обрані такими:

$$R_x/R_y = 1,\ \ a/b = 2,\ \ h/2a = 0.1,\ \ 2a/R_x = 0.2,$$

де a і b – півосі еліпса. Розглядаються два функціонально-градієнтних сплава FG1 та FG2:

$$\textbf{FG1: } Al/Al_2O_3; \tag{4.31}$$

$$\textbf{FG2: } Al/ZrO_2. \tag{4.32}$$

Механічні характеристики ФГ матеріалів, що складають ці сплави, наведено в Таблиці 4.1.

На Рис. 4.3 представлено порівняння одержаного основного безрозмірного частотного параметру $\Omega_L = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ з результатами роботи [175] для різних показників степені об'ємної частки кераміки k.

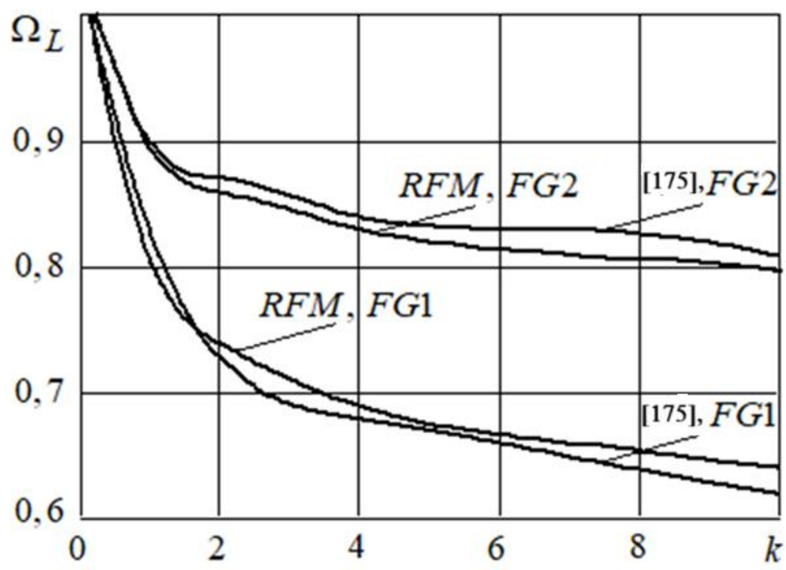


Рис. 4.3. Залежність основного безрозмірного параметру $\Omega_L = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ від показників степені k для різних матеріалів FG1 та FG2

Рисунок 4.3 демонструє гарний збіг результатів, отриманих методом RFM, з результатами роботи [175] для різних ФГМ та градієнтного індексу k.

4.2.5 Вільні коливання вільно опертих пластин та пологих оболонок з еліптичною формою плану

Тестування розробленого програмного забезпечення було виконано для повністю вільних пластин і пологих оболонок з еліптичною формою плану. Геометричні параметри досліджуваної оболонки обрані наступними:

$$a/b = 2, h/2a = 0.01,$$

де a і b - піввісі еліпса. Механічні характеристики розглянутого сплаву Al/Al_2O_3 наведено в Таблиці 4.1.

Таблиця 4.6. Порівняння значень параметра $\Omega_L = \lambda ab\sqrt{\rho_m h/D_m}$ для основних частот еліптичних в плані ФГМ (Al/Al_2O_3) повністю вільних оболонок з результатами роботи [175]

$a/R_x = 0$									
a/R_y	Мода	*k*=1		*k*=4		*k*=10		*k*=100	
0		RFM	[175]	RFM	[175]	RFM	[175]	RFM	[175]
	1	10.00	10.17	8.688	8.839	8.346	8.492	7.042	7.164
	2	41.52	42.27	36.06	36.73	34.63	35.28	29.22	29.77
	3	47.14	47.93	40.94	41.65	39.32	39.99	33.18	33.27
$a/R_x = 0.2$									
-1	1	11.94	12.17	10.21	10.41	9.626	9.811	8.187	8.342
	2	46.92	47.76	40.15	40.88	37.94	38.65	32.23	32.83
	3	49.50	50.35	42.72	43.47	40.76	41.47	34.49	35.09
0	1	10.12	10.30	8.786	8.945	8.421	8.579	7.110	7.240
	2	47.21	48.037	40.91	41.67	38.64	39.36	32.45	33.46
	3	48.09	48.88	41.09	41.79	39.58	40.06	33.24	33.81
1	1	10.51	10.70	9.090	9.262	8.881	8.848	7.343	7.481
	2	47.89	48.72	41.42	42.18	39.35	40.11	33.41	34.04
	3	49.51	50.38	42.20	42.95	40.00	40.69	33.90	34.48

Враховуючи симетрію задачі, інтегрування виконувалося тільки по ¼ області. У Таблиці 4.6 представлено порівняння з результатами роботи [175] перших трьох власних частот, які обчислювалися за формулою:

$$\Omega_L = \lambda ab\sqrt{\rho_m h/D_m},$$

для відповідних симетрично-симетричним формам коливань, для різних значень показника k об'ємної частки кераміки. Величина D_m визначається як:

$$D_m = E_m h^3/12(1-\nu_m^2).$$

Таблиця 4.6 демонструє добрий збіг отриманих результатів з порівняними з роботи [175].

4.2.6 Дослідження лінійних коливань ФГМ пологих оболонок у рамках теорії третього порядку (TSDT)

Проаналізовано власні частоти вільно опертих з рухомими краями квадратних ФГМ пологих оболонок з різною кривиною $2a/R_x$, $2a/R_y$ та відношенням товщини до сторони *2a/h*= 5.

Оболонка виготовлена зі сплаву Al/Al_2O_3. Завдання вирішувалося в рамках двох теорій: теорії першого порядку (FSDT) з коефіцієнтом зсуву 5/6 і теорії третього порядку (TSDT). Кількість базисних функцій було обрано $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 15$, Φ_5 =28. Порівняння одержаних результатів з результатами роботи [166] наведено у Таблиці 4.7. Безрозмірний частотний параметр обчислювався за формулою:

$$\Omega = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}. \tag{4.33}$$

Таблиця 4.7. Порівняння основних частотних параметрів квадратних ФГМ (Al/Al_2O_3) пологих оболонок із вільно опертими рухомими краями для двох теорій FSDT та TSDT при різних кривинах

$2a/R_y$	$2a/R_x$	Метод	*k*=0	*k*=0.5	*k*=1	*k*=4	*k*=10	$k=\infty$
0	0	RFM(FSDT)	0.211	0.180	0.162	0.139	0.132	0.108
		RFM(TSDT)	0.208	0.177	0.161	0.136	0.129	0.110
		[166]	0.212	0.182	0.164	0.138	0.131	0.108
0.5	0.5	RFM(FSDT)	0.2297	0.1961	0.1774	0.1497	0.1408	0.1168
		RFM(TSDT)	0.2335	0.1999	0.1806	0.1517	0.1425	0.1194
		[166]	0.2301	0.2000	0.1819	0.1526	0.1420	0.1172
1	1	RFM(FSDT)	0.2753	0.2370	0.2149	0.1774	0.1641	0.1400
		RFM(TSDT)	0.2782	0.2402	0.2179	0.1794	0.1656	0.1421
		[166]	0.2735	0.2425	0.2233	0.1858	0.1688	0.1393

Продовження Таблиці 4.7

0	0.5	RFM(FSDT)	0.2141	0.1827	0.1649	0.1405	0.1329	0.1089
		RFM(TSDT)	0.2182	0.1862	0.1680	0.1424	0.1347	0.1117
		[166]	0.2153	0.1855	0.1678	0.1413	0.1328	0.1096
0	1	RFM(FSDT)	0.2235	0.1913	0.1730	0.1459	0.1371	0.1137
		RFM(TSDT)	0.2271	0.1946	0.1759	0.1477	0.1386	0.1162
		[166]	0.2239	0.1945	0.1769	0.1483	0.1380	0.1140
0.5	-0.5	RFM(FSDT)	0.2049	0.1751	0.1582	0.1354	0.1283	0.1040
		RFM(TSDT)	0.2090	0.1785	0.1611	0.1373	0.1300	0.1070
		[166]	0.2064	0.1770	0.1596	0.1346	0.1270	0.1051
1	-1	RFM(FSDT)	0.1908	0.1631	0.1475	0.1262	0.1194	0.0969
		RFM(TSDT)	0.1945	0.1662	0.1501	0.1279	0.1209	0.09956
		[166]	0.1920	0.1648	0.1487	0.1252	0.1181	0.0977

Таблиця 4.7 демонструє гарний збіг з порівняними результатами роботи [166].

4.3 Лінійні коливання пологих ФГМ оболонок зі складною формою в плані

Пошук літератури на тему аналізу вільних коливань ФГМ закріплених або вільно опертих пологих оболонок зі складною формою плану показує, що цій проблемі не приділялося багато уваги. Тому наше основне завдання на даному етапі полягає в тому, щоб продемонструвати істотні переваги RFM, оскільки він дозволяє аналітично враховувати геометричну інформацію крайових задач. Щоб проілюструвати ефективність запропонованого методу, було проаналізовано декілька ФГМ пологих оболонок зі складною формою в плані. Було досліджено вплив граничних умов, форми плану, також кривини на основні частоти.

4.3.1 Лінійні коливання ФГМ оболонки з прямокутними вирізами

а) Жорстко закріплена ФГМ оболонка з прямокутними вирізами

Розглянемо закріплену ФГМ пологу оболонку складної форми, яка зображена на Рис. 4.4.

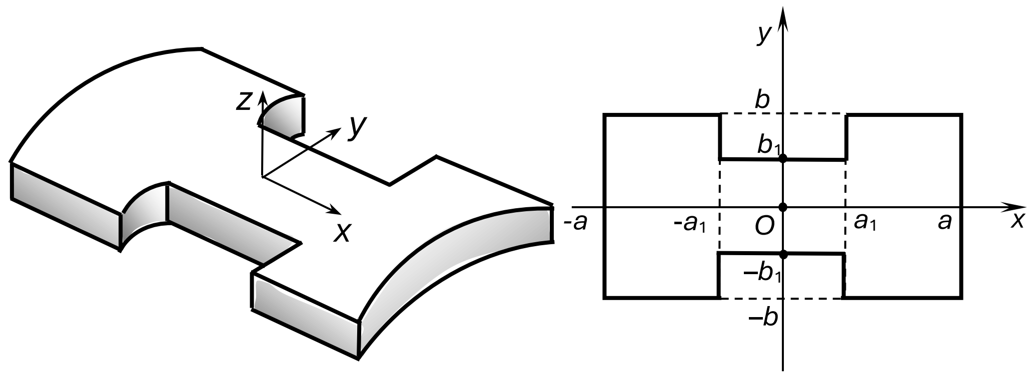


Рис. 4.4. ФГМ оболонка з прямокутними вирізами

Геометричні розміри приймаються наступними:

$$b/a = 1;\ a_1/2a = 0.25;\ b_1/2a = 0.35;\ \ 0.4;\ \ 0.45. \tag{4.34}$$

Оболонка складається з двох типів ФГМ матеріалу: Al та Al_2O_3, характеристики яких наведено в Таблиці 4.1. Граничні умови з використанням теорії першого порядку (FSDT) для *жорсткого закріплення* є наступними:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0. \tag{4.35}$$

Структуру розв'язку в рамках FSDT можна прийняти як:

$$u = \omega\Phi_1,\ v = \omega\Phi_2,\ w = \omega\Phi_3,\ \psi_x = \omega\Phi_4,\ \psi_y = \omega\Phi_5, \tag{4.36}$$

де $\omega = 0$ є рівнянням границі форми плану оболонки;

$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4,\ \Phi_5$ є невизначені компоненти.

Щоб реалізувати цю структуру розв'язку, потрібно побудувати рівняння границі $\omega = 0$. Використовуючи R-оператори $\wedge_0$ і $\vee_0$ (3.167), (3.169) [287], будуємо рівняння в наступному вигляді:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \tag{4.37}$$

де

$f_1 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0$ — вертикальна смуга, обмежена прямими лініями $x = \pm a$;

$f_2 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \geq 0$ — горизонтальна смуга, обмежена прямими лініями $y = \pm b$;

$f_3 = \frac{(x^2 - a_1^2)}{2a_1} \geq 0$ - зовнішня область вертикальної смуги, обмеженої прямими лініями $x = \pm a_1$;

$f_4 = \frac{(b_1^2 - y^2)}{2b_1} \geq 0$ — горизонтальна смуга, обмежена прямими лініями $y = \pm b_1$.

Спочатку виконується дослідження збіжності запропонованого підходу в залежності від певної степені поліномів, що використовуються при апроксимації шуканих функцій. Результати для основних частот першої форми коливань вільно опертої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з прямокутними вирізами з відношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$, відношенням радіусу до сторони $R/2a = 10$, геометричних параметрів $a_1/2a = 0.25$ та $b_1/2a = 0.3$ і показником степеневого закону k =1 представлені в Таблиці 4.8. Були обрані наступні степені поліномів $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 15$ і $\Phi_5 = 12$, що відповідає 36 координатним функціям для кожної шуканої функції.

Таблиця 4.8. Збіжність основних частот першої моди коливань $\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ вільно опертої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки, (Рис. 4.3) ($h/2a = 0.1,\ R/2a = 0.1,\ a_1/2a = 0.25, b_1/2a = 0.3$)

Степені $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_4,\ \Phi_5$	Степені Φ_3				
	8	10	12	14	16
9	67.87	67.21	67.10	67.02	66.98
11	66.68	66.27	66.21	66.09	66.03
13	66.09	65.65	65.58	65.38	65.30
15	65.67	65.24	65.18	65.03	64.94

Наступна Таблиця 4.9 демонструє основну частоту квадратної жорстко закріпленої ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з прямокутними вирізами $a_1/2a = 0.25$, $b_1/2a = 0.35$. Співвідношення товщини до сторони дорівнює $h/2a = 0.1$. Досліджено різні співвідношення радіуса до сторони $R/2a$ для циліндричних, сферичних та оболонок параболічного типу. Значення показників k степеневого закону варіювалось.

Таблиця 4.9. Основні частоти закріпленої ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки, $h/2a = 0.1$ для різних значень k і типів оболонки $a_1/2a = 0.25,\ b_1/2a = 0.35$ $(\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}})$

k	Циліндрична оболонка $R_x/2a = 0, R_y/2a = 10$	Сферична оболонка $R_x/2a = R_y/2a = 10$	Параболічна оболонка $R_x/2a = 10, R_y/2a = -10$
0	107.59	107.89	107.70
0.5	89.15	89.40	89.26
1	79.22	79.44	79.33
10	60.49	60.62	60.56
∞	48.62	48.75	48.66

З чисельного експерименту, проведеного для пологих оболонок з різними розмірами прямокутних вирізів $(a_1/2a = 0.25;\ b_1/2a = 0.35;\ 0.4;\ 0.45)$, випливає, що для різних форм оболонок значення основних частот відрізняються менш ніж на 0.5%. Це спостереження добре узгоджується з фізичним очікуванням, що кривизна не має істотного впливу на частоту у випадку жорстко закріпленої оболонки.

На Рис. 4.5 і Рис. 4.6 графічно показано значення основних частот для жорстко закріплених ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричних і сферичних оболонок із співвідношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$, співвідношеннями радіуса до сторони $R/2a = 10$, з різними розмірами прямокутних вирізів $(\mathrm{a}_1/2\mathrm{a} = 0.25;\ \mathrm{b}_1/2\mathrm{a} = 0{,}0.35;\ 0.4;\ 0.45)$ і різними показниками k степеневого закону.

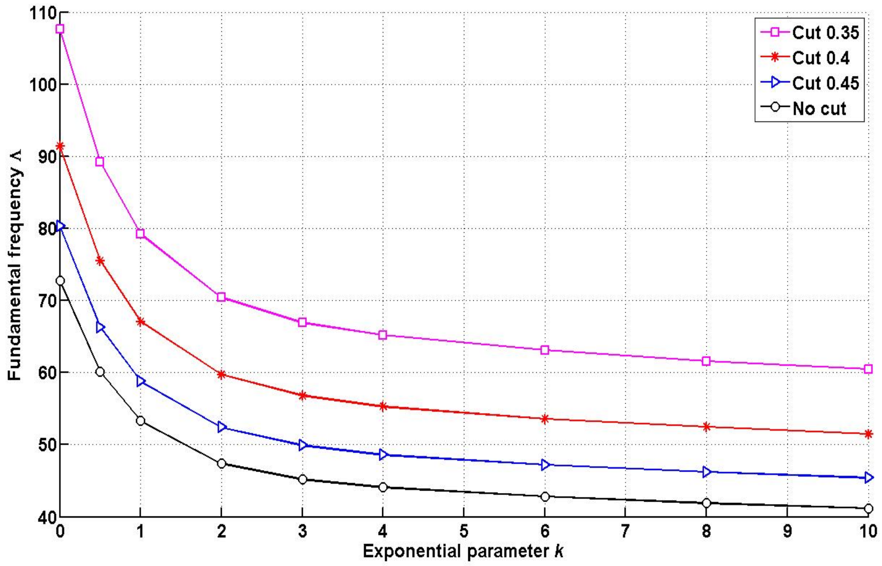


Рис. 4.5. Основні частоти для жорстко закріпленої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки $R/2a = 10$ с різними розмірами прямокутних вирізів

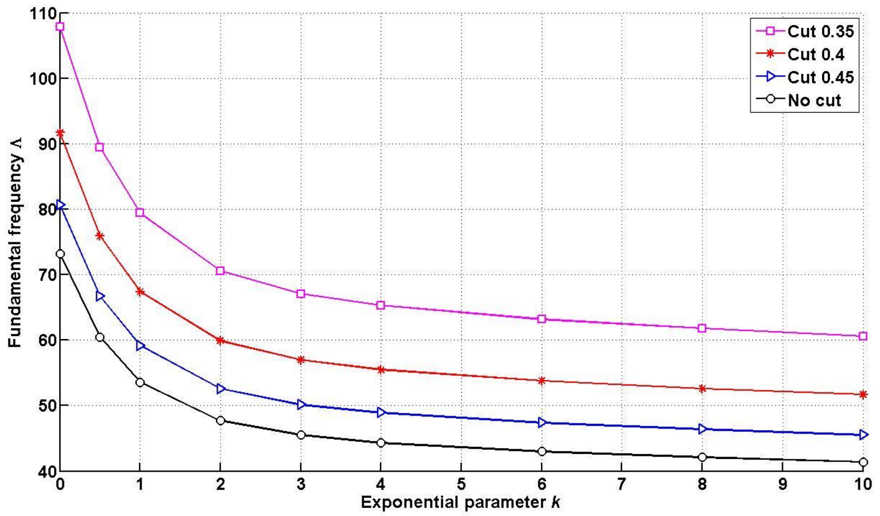


Рис. 4.6. Основні частоти для жорстко закріпленої сферичної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки $R/2a = 10$ с різними розмірами прямокутних вирізів

З аналізу Рис. 4.5 і Рис. 4.6 можна зробити важливий висновок, що основні частоти зростають зі збільшенням величини вирізу, що пояснюється граничними умовами та геометрією оболонки через ефект жорсткості.

б) Вільна оперта ФГМ оболонка з прямокутними вирізами

Проаналізуємо вільні коливання *вільно опертої* ФГМ оболонки з прямокутними вирізами. Геометричні параметри розглянемо такі ж самі, як і для прикладу в підрозділі 4.3.1(а). Граничні умови (контур вільно спирається в дотичному напрямку та закріплюється в поперечному напрямку) у разі використання теорії першого порядку (FDST) є наступні:

$$u = \psi_x = 0,\ \ \forall(x,y) \in \partial\Omega_1,\ \ v = \psi_y = 0,\ \ \forall(x,y) \in \partial\Omega_2,$$
$$w = 0,\ \ \forall(x,y) \in \partial\Omega. \qquad (4.38)$$

Для виконання основних граничних умов побудуємо наступну структуру розв'язку. У випадку вільно опертої оболонки (умови 4.38) структури розв'язку мають більш складний характер, а саме:

$$u = \omega_1\Phi_1, v = \omega_2\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega_1\Phi_4, \psi_y = \omega_2\Phi_5, \qquad (4.39)$$

де

$\omega_1 = 0$ – рівняння частин граничної області, паралельних вісі *OX*;

$\omega_2 = 0$ – рівняння частин граничної області, паралельних вісі *OY*;

$\omega = 0$ - рівняння всієї області.

Зауважимо, що при будові рівнянь $\omega_1 = 0$ та $\omega_2 = 0$ треба врахувати, що ці функції дорівнюють нулю на окремих сегментах границі, що вдало реалізовується завдяки використанню теорії R-функцій. Нижче наведено вирази для функцій ω_1, ω_2, ω:

$$\omega_1 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_1 \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}), \qquad (4.40)$$

$$\omega_2 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_2 \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6) \vee_0 (f_7 \vee_0 f_8), \qquad (4.41)$$

$$\omega = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \qquad (4.42)$$

де

f_1, f_2, f_3, f_4 є такими самими рівняннями, що й для приклада в Розділі 4.1.3.(а);

$f_5 = \frac{((x+a_1)^2+(y-y_0)^2-r_1^2)}{2r_1} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці $(-a_1, y_0)$ і радіусом r_1;

$f_6 = \frac{((x-a_1)^2+(y-y_0)^2-r_1^2)}{2r_1} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці (a_1, y_0) і радіусом r_1;

$f_7 = \frac{((x+a_1)^2+(y+y_0)^2-r_1^2)}{2r_1} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці $(-a_1, -y_0)$ і радіусом r_1;

$f_8 = \frac{((x-a_1)^2+(y+y_0)^2-r_1^2)}{2r_1} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці $(a_1, -y_0)$ і радіусом r_1;

$f_9 = \frac{(x^2+(y-b_1)^2-r_2^2)}{2r_2} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці $(0, b_1)$ і радіусом r_2;

$f_{10} = \frac{(x^2+(y+b_1)^2-r_2^2)}{2r_2} \geq 0$ є внутрішньою областю кола з центром у точці $(0, -b_1)$ і радіусом r_2;

де

$y_0 = (b + b_1)/2, r_1 = (b - b_1)/2, r_2 = a_1/2.$

Для перевірки правильності отриманих результатів будемо поступово збільшувати розмір вирізу оболонки. Спочатку область була побудована зі значеннями вирізу $a_1/2a = 0.05$ і $b_1/2a = 0.48$. Оболонка з прямокутними вирізами наближається досить близько до панелі з квадратною формою, і тому зрозуміло, що результати для квадратної оболонки та оболонки з невеликими прямокутними вирізами також будуть дуже близькими (див. значення з двох перших стовпців Таблиці 4.10).

Таблиця 4.10. Основні частоти вільно опертої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з прямокутними вирізами, $h/2a = 0.1$, $R/2a = 10$ для різних k і розмірів вирізу ($\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$)

k	Виріз $a_1/2a = 0$ $b_1/2a = 0$	Виріз $a_1/2a = 0.25$ $b_1/2a = 0.49$	Виріз $a_1/2a = 0.25$ $b_1/2a = 0.45$	Виріз $a_1/2a = 0.25$ $b_1/2a = 0.4$	Виріз $a_1/2a = 0.25$ $b_1/2a = 0.3$
0	42.43	42.88	48.13	60.85	89.08
0.2	38.78	39.28	44.12	55.76	81.71
0.5	34.81	35.37	39.74	50.20	73.65
1	30.80	31.37	35.27	44.53	65.38
2	27.40	27.90	31.36	39.59	58.10
10	24.18	24.28	27.19	34.42	50.19
∞	19.17	19.38	21.75	27.49	40.25

Ці прямокутні вирізи були розширені від розміру вирізів $a_1/2a = 0.1$ до $b_1/2a = 0.45$ шляхом поступового збільшення розміру вирізів $a_1/2a = 0.25$ і $b_1/2a = 0.25$. Таблиця 4.10 представляє основну частоту вільно опертої циліндричної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з відношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$, відношенням радіуса до сторони до $R/2a = 10$, різними розмірами вирізів та показниками k степеневого закону.

Видно, що значення власних частот повністю закріпленої оболонки вищі, ніж такої самої вільно опертої оболонки. Зрозуміло, що граничні умови, коли оболонка закріплена, забезпечують вищу жорсткість оболонки порівняно з граничними умовами, коли оболонка вільно оперта.

4.3.2 Лінійні коливання ФГМ оболонки з круговими вирізами

Досліджується жорстко закріплена ФГМ пологa оболонка форми, зображеної на Рис. 4.7. Геометричні параметри є наступними: $b/a = 1$, $r/2a = 0.2$.

Оболонка складається з двох типів ФГМ: Al та Al_2O_3, характеристики яких наведено в Таблиці 4.1. Граничні умови з використанням теорії першого порядку (FSDT) для *жорсткого закріплення* є наступними:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0.$$

Структура розв'язку для випадку FSDT має наступний вигляд:

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5,$$

де $\omega = 0$ є рівняння границі області.

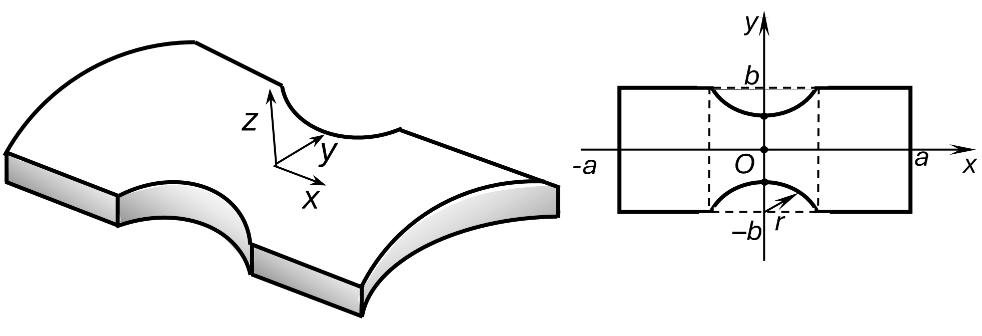


Рис. 4.7. ФГМ панель оболонки з круговими вирізами

Побудуємо рівняння границі області $\omega = 0$ за допомогою R-операторів:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 f_3 \wedge_0 f_4, \tag{4.43}$$

де функції f_1, f_2, f_3, f_4 визначаються наступними формулами:

$f_1 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0$ — вертикальна смуга, обмежена прямими лініями $x = \pm a$;

$f_2 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \geq 0$ — горизонтальна смуга, обмежена прямими лініями $y = \pm b$;

$f_3 = \frac{(x^2 + (y-b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ - зовнішня область кола з центром у точці $(0, b)$ і радіусом r ;

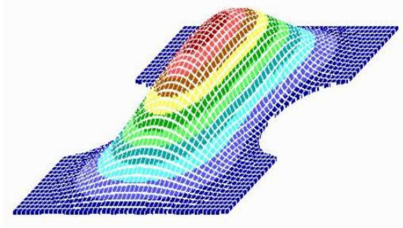
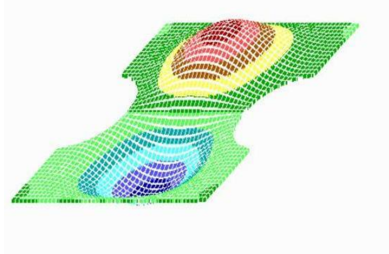
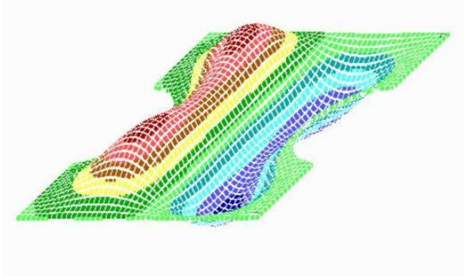
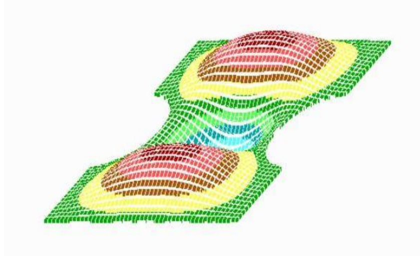
$f_4 = \frac{(x^2 + (y+b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ - зовнішня область кола з центром у точці $(0, -b)$ і радіусом r.

У Таблиці 4.11 представлено основну частоту закріпленої ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з круговими вирізами $r/2a = 0.2$ із відношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$, враховуючи різні типи значень $R/2a$ і декілька показників k степеневого закону.

Таблиця 4.11. Основні частоти для жорстко закріпленої ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки, *h/2a*=0.1 для різних k та типів оболонки з круговими вирізами *r*=0.2 ($\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$)

k	Циліндрична оболонка $\frac{R_x}{2a} = 0, \frac{R_y}{2a} = 10$	Сферічна оболонка $\frac{R_x}{2a} = \frac{R_y}{2a} = 10$	Параболічна оболонка $\frac{R_x}{2a} = 10, \frac{R_y}{2a} = -10$
0	116.76	117.03	116.87
0.5	97.01	97.25	97.13
1	86.33	86.53	86.44
10	65.40	65.52	65.48
∞	52.76	52.88	52.81

Таблиця 4.12. Перші чотири форми коливання жорстко закріпленої ФГМ сферичної оболонки з круговими вирізами

 $\Lambda = 86.53$	 $\Lambda = 119.80$
 $\Lambda = 181.19$	 $\Lambda = 182.02$

З Таблиці 4.11 випливає, що для різних форм оболонки значення основних частот відрізняються, починаючи з третього знаку. Це узгоджується з фізичною постановкою задачі, оскільки кривизна суттєво не впливає на частоту для випадку закріпленої оболонки.

У Таблиці 4.12 показані перші 4 форми коливання жорстко закріпленої ФГМ (Al/Al_2O_3) сферичної оболонки з круговими вирізами, відношеннями $h/2a = 0.1$ та $R/2a = 10$, $r/2a = 0.2$ і також показником степеневого закону k=1.

4.3.3 Лінійні коливання ФГМ оболонки еліптичної форми плану з прямокутними виступами

Досліджуємо лінійні коливання функціонально-градієнтної *жорстко закріпленої* по всьому контуру оболонки, що спирається на план, зображений на Рис. 4.8.

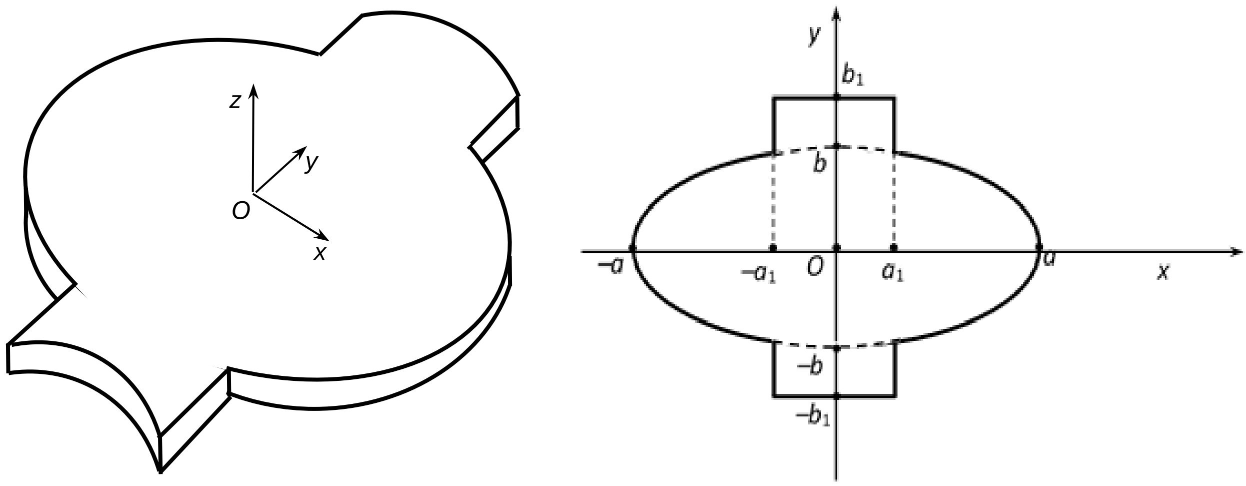


Рис. 4.8. ФГМ оболонка еліптичної форми з прямокутними виступами та її план форма

Припустимо, що геометричні параметри оболонки обрані такими:

$$R_x/R_y = 1,\ \ b/a = 0.5,\ h/2a = 0.1,\ \ 2a/R_x = 0.2,$$

$$b_1/2a = 0.35,\ \ a_1/2a = 0.2.$$

Розглядаються два функціонально-градієнтних сплава FG1 та FG2, механічні характеристики матеріалів наведені в підрозділі 4.2.4, формули (4.31), (4.32).

Граничні умови з використанням теорії першого порядку (FSDT) для *жорсткого закріплення* є наступними:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0.$$

Структура розв'язку для випадку FSDT має наступний вигляд:

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5,$$

де $\omega = 0$ є рівняння границі області.

Для конкретизації структури розв'язку побудуємо в аналітичному вигляді рівняння границі області, використовуючи R-операції:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 f_3, \tag{4.44}$$

де

$f_1 = \left(\frac{({a_1}^2 - x^2)}{2a_1}\right) \geq 0$ - вертикальна смуга, обмежена прямими $x = \pm a_1$;

$f_2 = \left(\left({b_1}^2 - y^2\right)/2b_1\right) \geq 0$ - горизонтальна смуга, обмежена прямими $y = \pm b_1$;

$f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \geq 0$ - частина площини, що знаходиться усередині еліпса.

При чисельній реалізації розробленого програмного забезпечення було враховано симетрію поставленого завдання щодо осей *Ox* і *Oy*. Тому інтегрування виконувалося по 1/4 області та послідовності поліномів були обрані у вигляді:

$$\begin{gathered} \Phi_1, \Phi_4: x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, x^3y^4, xy^6, \cdots; \\ \Phi_2, \Phi_5: y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, x^2y^5, y^7, \cdots; \\ \Phi_3: 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \cdots. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Для дослідження збіжності значень власних частот було проведено обчислювальний експеримент з використанням різної кількості координатних функций. Було встановлено, що третій знак після коми стабілізується при збереженні степенів апроксимуючих поліномів (11, 11, 14, 11, 11), що відповідає наступній кількості координатних функцій для u, v, w, ψ_x, ψ_y: (21, 21, 36, 21, 21).

На Рис. 4.9 представлені залежності власних частот від значень степеня показника k закону розподілу складових матеріалів. Для перевірки достовірності отриманих результатів було виконано розрахунок при значенні параметра $b_1/2a = 0{,}51$, коли форма, подана на Рис. 4.8, дуже близька до еліптичної. Пунктирні криві відповідають цьому значенню параметра $b_1/2a = 0{,}51$. Як видно із Рис. 4.9, значення власних частот для цього значення параметра і відповідні значення частот для еліптичної форми практично збігаються. Така перевірка дозволяє зробити висновок про правильність роботи програмного забезпечення. На цьому ж рисунку представлені значення для сферичних оболонок із значеннями радіусів кривизни рівними: $k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0.5$ і $k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0.5$. Порівнюючи результати для двох видів матеріалів можна зробити висновок, що як і у випадку оболонок з еліптичним планом, значення частот для суміші FG2 значно більше, ніж для суміші FG1.

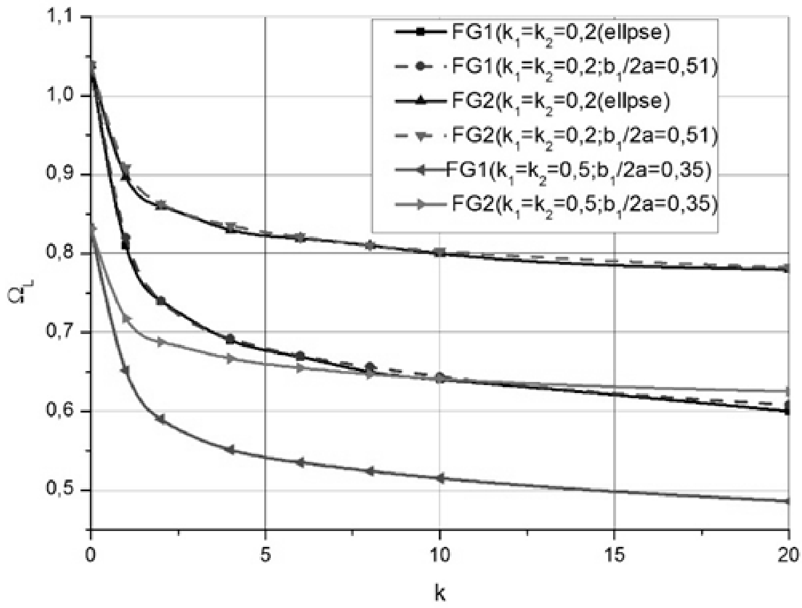


Рис. 4.9. Залежність власних частот від градієнтного індексу k для жорстко закріпленої ФГМ пологої сферичної оболонки та оболонки еліптичної форми плану з різних сумішей ФГМ матеріалу

У Таблиці 4.13 наведено значення основного частотного параметра $\Omega_L = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$ для жорстко закріплених оболонок двоякої кривини (Рис. 4.8) для різних значень показника степеня k об'ємної частки кераміки. Розрахунок виконаний для сферичних панелей, циліндричних та у вигляді гіперболічного параболоїда, а також для пластин.

Таблиця 4.13. Основний частотний параметр жорстко закріпленої оболонки двоякої кривини

$\frac{a}{R_x}$	$\frac{a}{R_y}$	Вид ФГМ	$k=0$	$k=1$	$k=4$	$k=10$
0	0	FG1	0.8248	0.6457	0.5472	0.5109
		FG2	0.8248	0.7121	0.6633	0.6363
0.5	0.5	FG1	0.8707	0.6839	0.5760	0.5355
		FG2	0.8707	0.7518	0.6958	0.6692
0	0.5	FG1	0.8429	0.6604	0.5581	0.5203
		FG2	0.8429	0.7275	0.6747	0.6491
0.5	-0.5	FG1	0.8510	0.6681	0.5643	0.5254
		FG2	0.8510	0.7351	0.6813	0.6552

З Таблиці 4.13 випливає, що при зростанні величини k незалежно від типу кривини оболонки і механічних характеристик сумішей спостерігається зменшення значень основної частоти коливань. Частоти «асимптотично» наближаються до відповідних значень частот металевої оболонки або пластини. Слід зазначити, що у всьому діапазоні зміни значень величини $k \in [0,\ 10]$ найбільші величини основних частот мають сферичні оболонки, а найменші мають пластини, що відповідає фізичному змісту задачі.

4.3.4 Лінійні коливання ФГМ оболонки еліптичної форми плану з прямокутними вирізами

Пластини та оболонки, які мають криволінійну границю, та ще й додаткові вирізи, відносяться до складних задач. Але застосування теорії R-функцій та методу Рітца досить ефективно вирішують цю проблему. В якості такого прикладу проаналізуємо лінійні коливання функціонально-градієнтної *жорстко закріпленої* по всьому контуру оболонки складної геометрії, що спирається на план, зображений на Рис. 4.10. Геометричні параметри досліджуваної оболонки обрані наступними:

$$R_x/R_y = 1, \quad a/b = 2, \quad h/2a = 0.1, \quad 2a/R_x = 0.2$$

$$b_1/2a = 0.175; \quad a_1/2a = 0.15.$$

Розглянемо два ФГМ сплава FG1 (Al/Al_2O_3) та FG2 (Al/ZrO_2), механічні характеристики яких наведені в Таблиці 4.1.

Для побудови системи координатних функцій для випадку повністю закріпленої оболонки будемо використовувати таку ж структуру розв'язку, як і в попередній задачі, тобто :

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5.$$

Рівняння границі області $\omega = 0$ в цьому випадку буде мати вигляд:

$$\omega = \left(\overline{f}_1 \vee_0 f_2\right) \wedge_0 f_3, \tag{4.46}$$

де f_1, f_2, f_3 визначаються саме так, як і в попередній задачі:

$$f_1 = ((a_1{}^2 - x^2)/2a_1) \geq 0, f_2 = \left(\left(b_1{}^2 - y^2\right)/2b_1\right) \geq 0,$$

$$f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \geq 0.$$

Але формула (4.46) визначає границю зовсім іншої області завдяки другому використанню відповідних R-операторів. І це є однією з важливих переваг методу RFM.

Невизначені компоненти в структурних формулах апроксимувались з урахуванням симетрії поставленого завдання щодо осей *Ox* та *Oy*, а саме за допомогою системи (4.45).

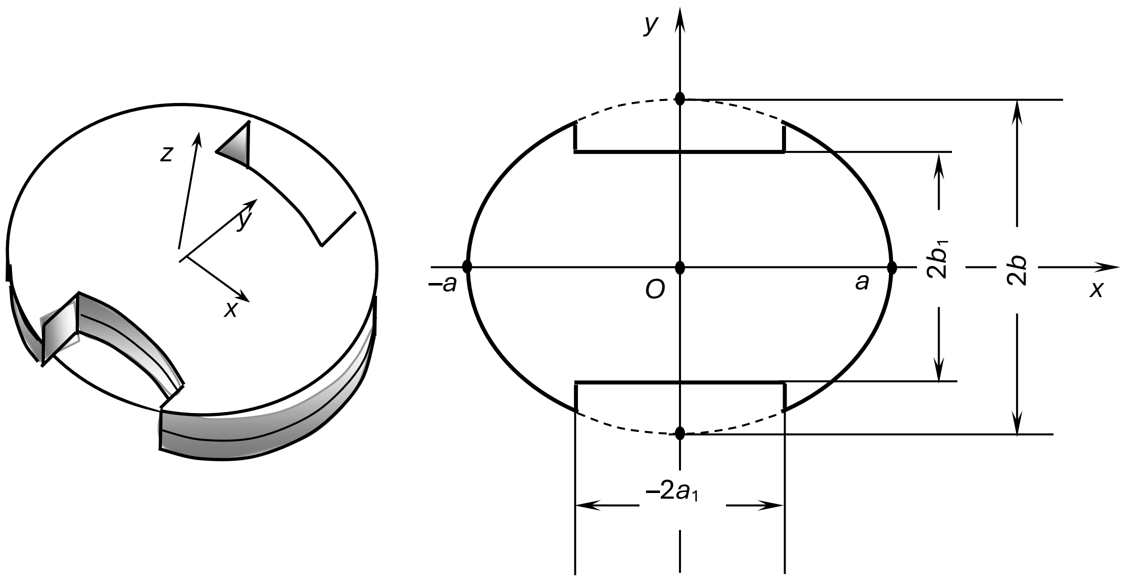


Рис. 4.10. ФГМ оболонка складної еліптичної форми з прямокутними вирізами та її план форма

Інтегрування виконувалося по 1/4 області. Результати розв’язку лінійної задачі при різних значеннях прямокутного вирізу для сплавів FG1 та FG2 представлені на Рис. 4.11 та Рис. 4.12 у вигляді залежностей лінійної частоти $\Omega_L = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ від значення показника k об’ємної долі кераміки.

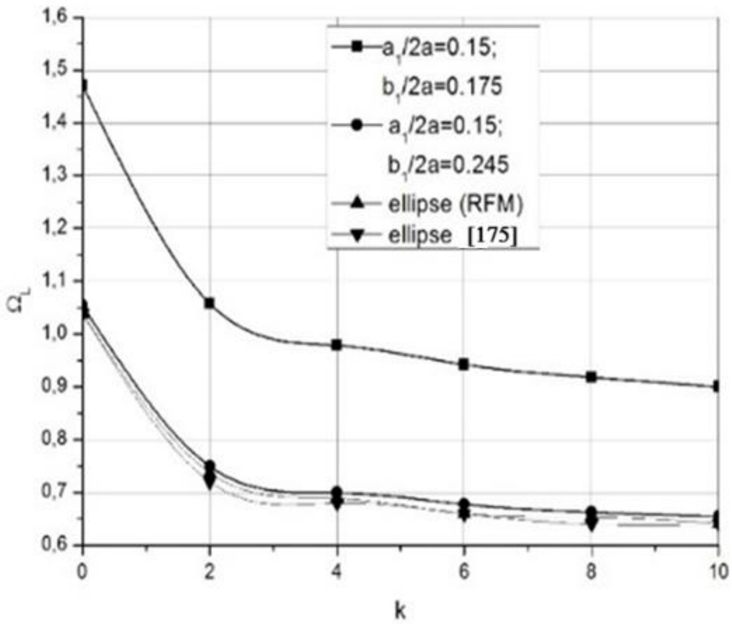


Рис. 4.11. Залежність лінійної частоти ФГМ оболонки складної еліптичної форми з прямокутними вирізами від показника k для суміші FG1 при різних геометричних параметрах вирізу

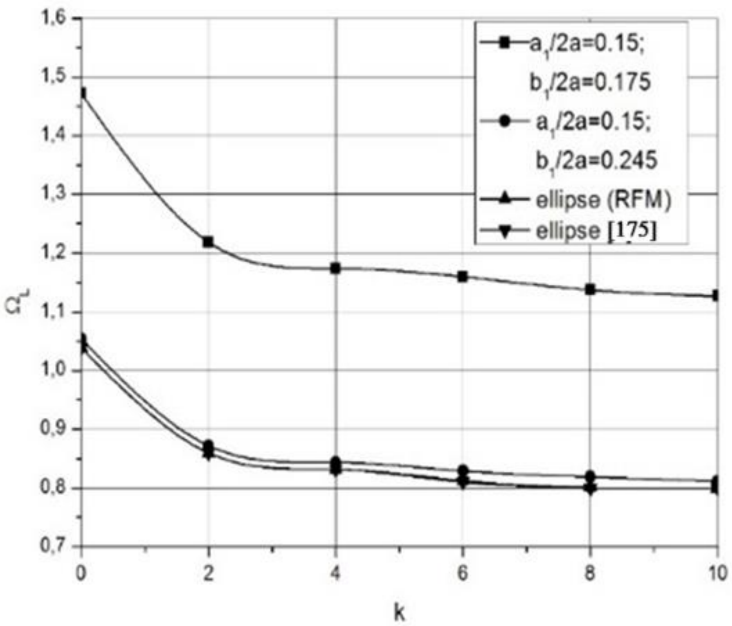


Рис. 4.12. Залежність лінійної частоти ФГМ оболонки складної еліптичної форми з прямокутними вирізами від показника k для суміші FG2 при різних геометричних параметрах вирізу

Відзначимо, що в даному дослідженні окрім значень прямокутного вирізу $b_1/2a = 0.175$; $a_1/2a = 0.15$, було розв'язано задачу для відношень $b_1/2a = 0.245$; $a_1/2a = 0.15$. В останньому випадку геометрична форма плану (Рис. 4.10) прямує до еліптичної і результати можна порівняти з результатами роботи

[175]. З наведених графіків видно, що вони практично співпадають, що підтверджує вірогідність розв’язання лінійної задачі.

4.3.5 Аналіз вільних коливань ФГМ пологих оболонок складної форми з використанням теорій першого (FSDT) та вищого порядків (HSDT)

Будемо досліджувати вільні коливання функціонально-градієнтної *жорстко закріпленої* по всьому контуру оболонки складної геометрії, яка має план, зображений на Рис. 4.13.

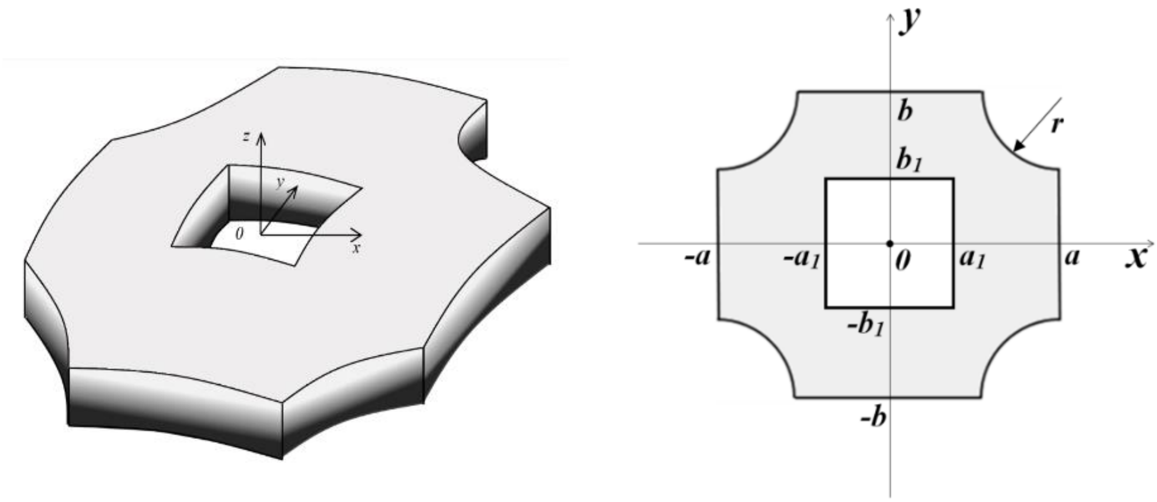


Рис. 4.13. ФГМ полога оболонка складної геометрії з вирізами та її форма плану

Геометричні параметри оболонки є наступними:

$$a_1/a = 0.2;\ a_1 = b_1;\ r/2a = 0.25;\ h/2a = 0.5;\ \frac{2a}{R_x} = 1;\ \frac{2a}{R_y} = 0.$$

Дослідження виконується для чотирьох сумішей ФГ матеріалу:

M1: Al/Al_2O_4; **M2:** $Al/\,ZrO_2$; **M3:** $Si_3N_4;/SUS304$;

M4: $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V.$ (4.47)

Механічні характеристики матеріалів наведені в підрозділі 4.2.5, формули (4.31), (4.32).

Граничні умови для *жорсткого закріплення* мають вигляд (4.35):

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0.$$

Тому структура розв’язку співпадає з формулою (4.36), тобто

$$u = \omega\Phi_1, v = \omega\Phi_2, w = \omega\Phi_3, \psi_x = \omega\Phi_4, \psi_y = \omega\Phi_5,$$

де $\omega = 0$ є рівняння границі заданої області.

Запишемо в аналітичному вигляді рівняння границі області, зображеної на Рис. 4.13, використовуючи R-операції:

$$\omega = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 (f_5 \wedge_0 f_6) \wedge_0 (f_7 \wedge_0 f_8), \qquad (4.48)$$

де

$f_1 = \left(\frac{\left(x^2 - {a_1}^2\right)}{2a_1}\right) \geq 0$ – зовнішна область вертикальної смуги, обмеженої прямими $x = \pm a_1$;

$f_2 = \left(\left(y^2 - {b_1}^2\right)/2b_1\right) \geq 0$ – зовнішна область горизонтальної смуги, обмеженої прямими $y = \pm b_1$;

$f_3 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0$ — вертикальна смуга, обмежена прямими лініями $x = \pm a$;

$f_4 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \geq 0$ — горизонтальна смуга, обмежена прямими лініями $y = \pm b$;

$f_5 = \frac{((x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ є зовнішньою областю кола з центром у точці (a, b) і радіусом r;

$f_6 = \frac{((x-a)^2 + (y+b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ є зовнішньою областю кола з центром у точці $(a, -b)$ і радіусом r;

$f_7 = \frac{((x+a)^2 + (y+b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ є зовнішньою областю кола з центром у точці $(-a, -b)$ і радіусом r;

$f_8 = \frac{((x+a)^2 + (y-b)^2 - r^2)}{2r} \geq 0$ є зовнішньою областю кола з центром у точці $(-a, b)$ і радіусом r.

Для апроксимації невизначеної складової Φ_3 було взято 28 членів ряду поліномів (4.45), а невизначені компоненти, що залишилися, апроксимувалися 15-ма членами ряду (4.45).

Вплив градієнтного індексу (у даному випадку показник об’ємної частки позначено літерою p) на власні частоти циліндричних оболонок, виготовлених з різних матеріалів, показано на Рис. 4.14, 4.15. Безрозмірні параметри власної частоти визначаються за формулою:

$$\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\rho_m/E_m}.$$

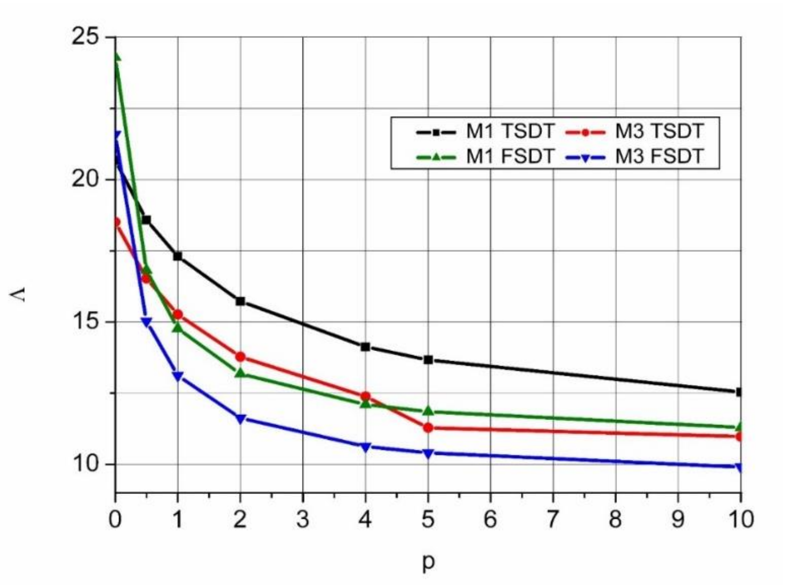


Рис. 4.14. Вплив градієнтного індексу *p* на власні частоти ФГМ пологих оболонок (Рис. 4.13) з сумішей М1 і М3 у рамках теорій FSDT та HSDT

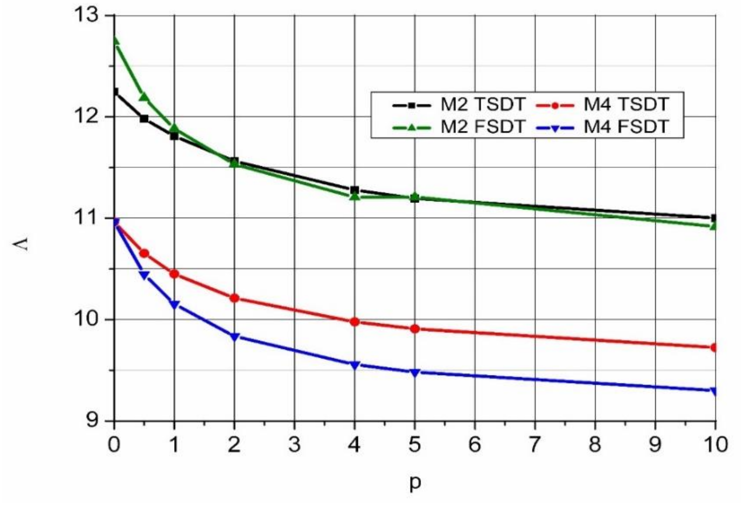
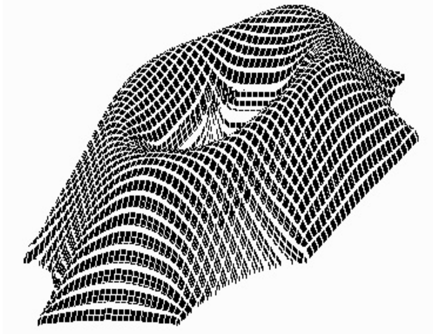
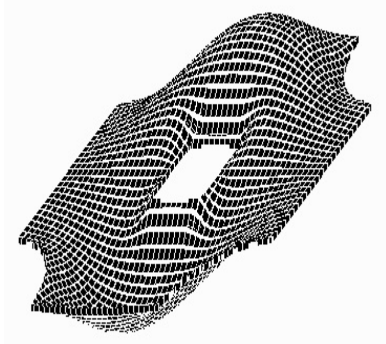
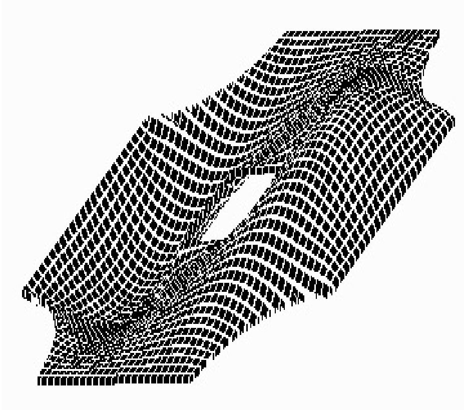
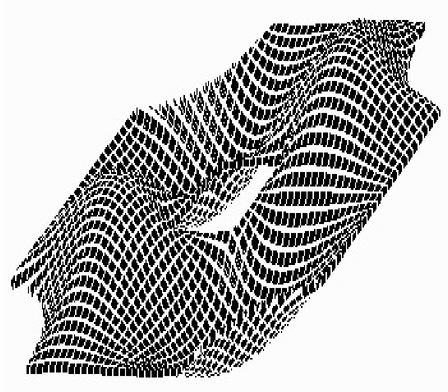


Рис. 4.15. Вплив градієнтного індексу *p* на власні частоти ФГМ пологих оболонок (Рис. 4.13) з сумішей М2 і М4 у рамках теорій FSDT та HSDT

За Рис. 4.14, 4.15 можна зробити висновок, що при дослідженні пологих оболонок більшої кривини та товщини доцільно використовувати теорію оболонок вищого порядку (HSDT).

Форми коливань циліндричної ФГМ оболонки складної форми (Рис. 4.13) із суміші М3 для показника градієнтного індексу *p*=2 представлені в Таблиці 4.13.

Таблиця 4.13. Форми коливань циліндричної ФГМ пологої оболонки складної форми (Рис. 4.13), виготовленої з матеріалу М3

	
$\Lambda_1 = 11.625$ (FSDT) $\Lambda_1 = 13.178$ (TSDT)	$\Lambda_2 = 12.825$ (FSDT) $\Lambda_2 = 13.994$ (TSDT)
	
$\Lambda_3 = 12.635$ (FSDT) $\Lambda_3 = 13.907$ (TSDT)	$\Lambda_4 = 15.953$ (FSDT) $\Lambda_4 = 17.608$ (TSDT)

Відзначимо, що моди коливань, отримані в рамках двох теорій, майже однакові, але власні частоти відрізняються одна від одної на 9-11.7 %.

4.4 Нелінійні вільні коливання пологих оболонок. Тестові задачі

Щоб перевірити вірогідність запропонованого підходу до розв’язання нелінійних динамічних задач теорії пологих оболонок було проведено досить багато різноманітних тестів, наведемо приклади трьох тестових задач.

4.4.1 Полога оболонка подвійної кривини квадратного плану

Задача 1. Дослідимо вільні геометрично нелінійні коливання пологої ізотропної квадратної оболонки подвійної кривини з постійною товщиною за допомогою теорії першого порядку FSDT. Нижче наведено значення геометричних та механічних параметрів оболонки:

$$\frac{a}{b} = 1;\ \frac{R_x}{R_y} = 1; \frac{R_x}{R_y} = 0;\ \frac{R_x}{2a} = 10; \frac{h}{2a} = 0.01;\ \nu = 0.3.$$

Граничні умови відповідають *вільно опертому краю*. На Рис. 4.16 показано порівняння скелетних кривих та порівняння результатів, отриманих методом RFM з відомими результатами роботи [292] для циліндричних та сферичних оболонок. Для отримання залежності відношення нелінійної частоти до лінійної від амплітуди використовувався метод Рунге-Кутта 7-8 порядку.

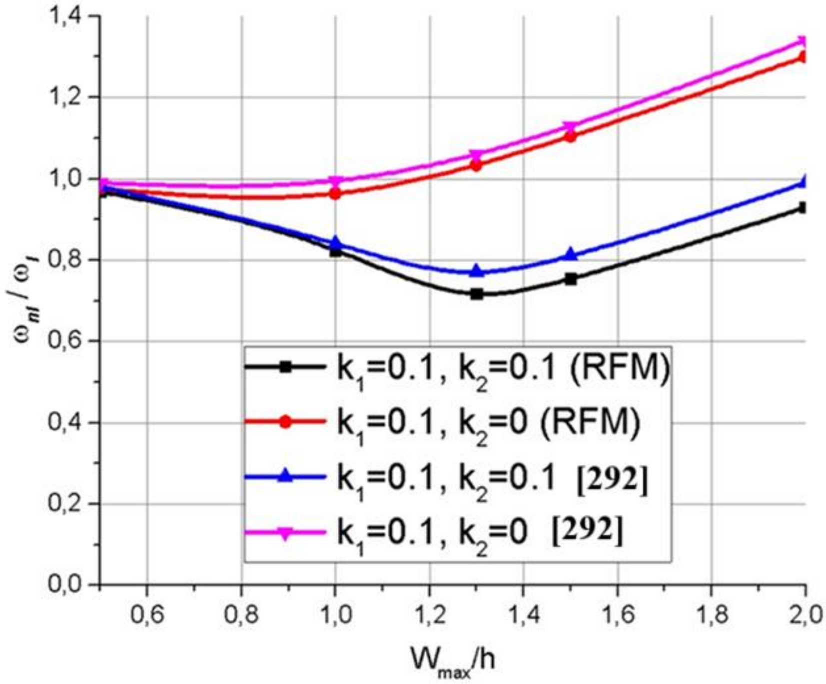


Рис. 4.16. Залежність відношення частот ω_{nl}/ω_l від W_{max} для циліндричних $(k_1 = 0.1;\ k_2 = 0)$ та сферичних $(k_1 = 0.1;\ k_2 = 0.1)$ ізотропних панелей

Відзначимо, що розбіжність отриманих результатів з відомими, які представлені в роботі [292], не перевищує 2 %.

Задача 2. Розглянемо вільні нелінійні коливання вільно опертої сферичної пологої оболонки з квадратною формою плану. Припустимо, що геометричні параметри оболонки дорівнюють:

$$k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0.1,\ k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0.1, \frac{b}{a} = 1.$$

Результати цього дослідження представлено на Рис. 4.17.

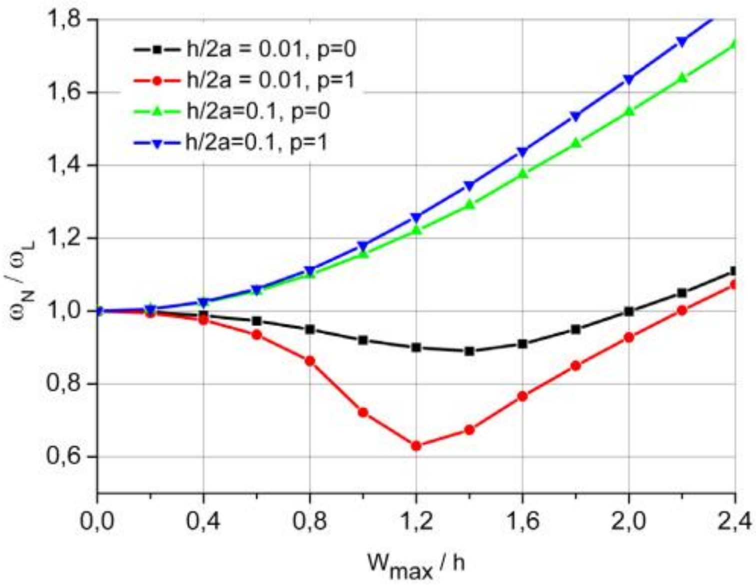


Рис. 4.17. Вплив амплітуди на частоту для різних товщин сферичної ФГМ (Al_2O_3/Al) квадратної пологої оболонки

Цікаво відмітити, що, для ізотропних оболонок зі збільшенням товщини характер поведінки скелетної кривої стає більш жорстким. А при відношенні товщин більше 0.1 скелетні криві взагалі мають жорсткий характер.

Було встановлено, що для ФГМ (Al_2O_3/Al) пологих оболонок вплив амплітуди на частоту, що був досліджений для різних товщин, є аналогічним випадку для ізотропних оболонок (Рис. 4.17, p=0). Однак у випадку ФГМ пологих оболонок м'який характер поведінки скелетної кривої стає сильнішим (Рис. 4.17, p=1). Це можна пояснити наступним чином. Для малих амплітуд початкова жорсткість даної ФГМ оболонки є переважно мембранною. Зі збільшенням амплітуди роль вигину стає більш важливою.

Задача 3. Розглянемо нелінійні коливання вільно опертої сферичної пологої оболонки з квадратною формою плану. Оболонка виготовлена з різних типів ФГМ: Si_3N_4 / $SUS304$ та ZrO_2 / Ti–$6Al$–$4V$. Градієнтний індекс степеневого закону було прийнято k=2. Аналогічна задача була розв'язана в роботах [195], [293]. Порівняння результатів наведено на Рис. 4.18.

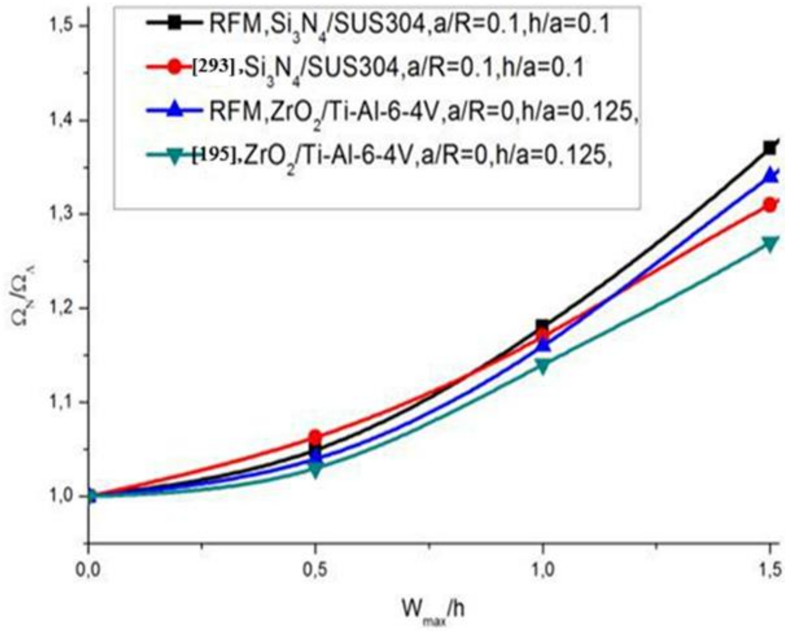


Рис. 4.18. Порівняння скелетних кривих вільно опертої квадратної ФГМ пластини при різних сумішах ФГМ та фіксованому градієнтному індексі k=2

Наведений тест показує гарну збіжність отриманих результатів з порівняними даними з робіт [195] та [293].

4.4.2 ФГМ сферична полога оболонка еліптичного плану

Розглянемо нелінійні вільні коливання сферичної ФГМ *жорстко закріпленої* пологої оболонки, що спирається на еліптичний план. Геометричні параметри оболонки, що досліджується, були обрані такими:

$$R_x/R_y = 1, a/b = 2, h/2a = 0.1, 2a/R_x = 0.2.$$

Розглядались дві суміші функціонально-градієнтних матеріалів FG1 та FG2, механічні характеристики яких було наведено у підрозділі 4.2.4 у формулах (4.31-4.32). Відзначимо, що лінійна задача для таких оболонок була розв'язана в п.п. 4.2.4. Одержані результати добре співпадали з відомими. Для розв'язання нелінійної задачі було використано теорію першого порядку FSDT.

На Рис. 4.19 представлені результати дослідження геометрично нелінійних коливань цієї оболонки для суміші FG1 та двох значень параметра градієнтного індексу k=0 (кераміка), k=1.

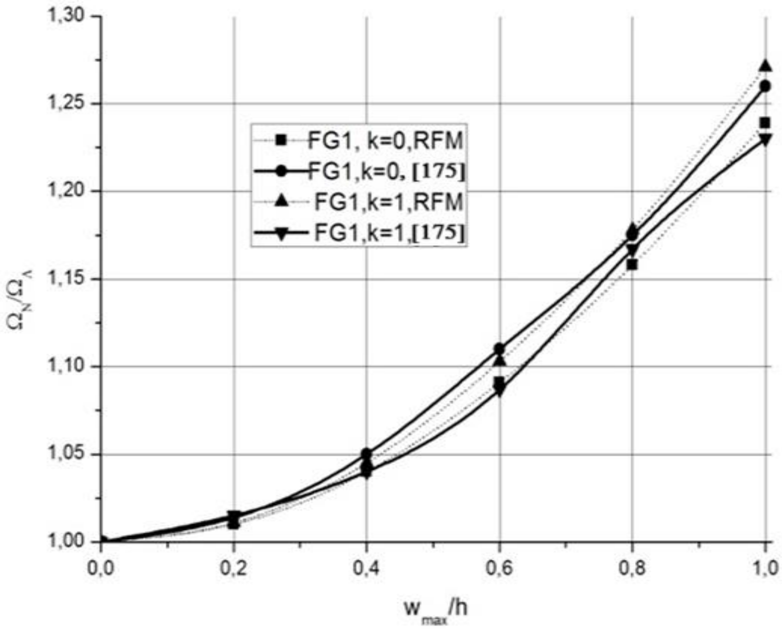


Рис. 4.19 Порівняння скелетних кривих сферичної ФГМ закріпленої оболонки з суміші FG1, градієнтний індекс k=0, k=1

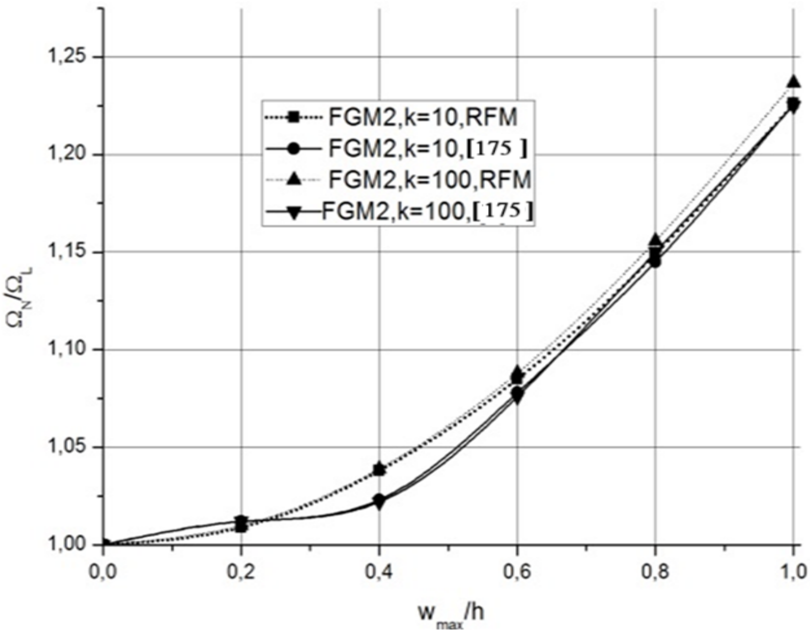


Рис. 4.20. Порівняння скелетних кривих сферичної ФГМ закріпленої оболонки з суміші FG2, градієнтний індекс k=10, k=100

На Рис. 4.20 представлені результати для суміші FG2 та значень параметра k=10, k=100 (метал). Порівняння скелетних кривих із результатами роботи [175] підтверджує достовірність запропонованого підходу. У межах точності графіка отримані результати практично збігаються. Відхилення не перевищує 1 %.

4.5 Нелінійні коливання ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану

4.5.1 Нелінійні вільні коливання жорстко закріпленої ФГМ оболонки з круговими вирізами

Дослідження лінійних коливань для оболонок складної форми, що представлена на Рис. 4.7, було виконано в п.п. 4.3.2. У цьому пункті досліджуємо нелінійні вільні коливання *жорстко закріпленої* ФГМ (Al/Al_2O_3) сферичної оболонки з круговими вирізами (Рис. 4.7), яка має наступні геометричні параметри:

$$h/2a = 0.1 \text{ і } R/2a = 10,\ r/2a = 0.2.$$

На Рис. 4.21 показано нелінійні співвідношення ω_N/ω_L амплітуди частоти для різних показників степеневого закону k.

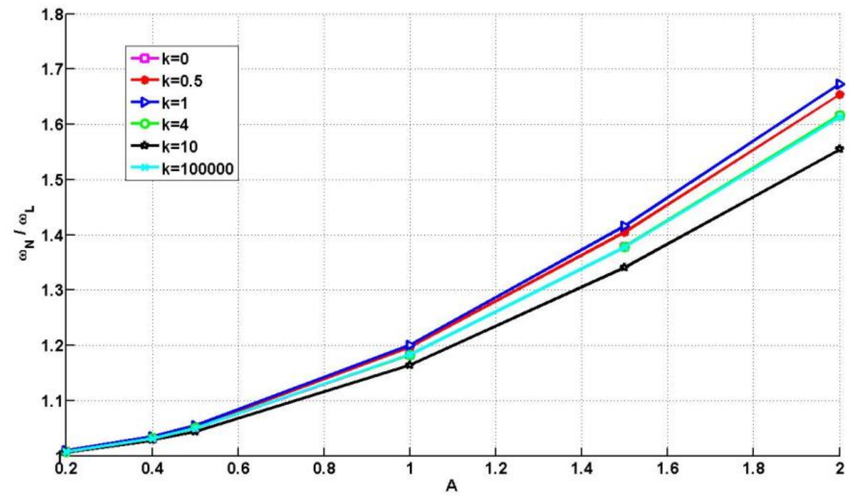


Рис. 4.21. Вплив показника об'ємної частки k на співвідношення частот закріпленої сферичної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки *R/2a*=10 з круговими вирізами (Рис. 4.7)

З Рис. 4.21 випливає, що скелетні криві для різних значень градієнтного індексу k досить близькі. Але значення лінійних та нелінійних частот значно відрізняються. Тому остаточно висновок про лінійну поведінку оболонки не можна зробити тільки на основі скелетних кривих.

4.5.2 Нелінійні вільні коливання вільно опертої ФГМ оболонки з прямокутними вирізами

Лінійні коливання для оболонки складної форми, що представлена на Рис. 4.4, було виконано в п.п. 4.3.1. Проведемо дослідження нелінійних вільних коливань *вільно опертої* ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричної оболонки з прямокутними вирізами (Рис. 4.4) з відношенням товщини до сторони $h/2a = 0.1$. Геометричні параметри є наступними:

$$a/b = 1; \quad a_1/2a = 0.25; \; b_1/2a = 0.35.$$

На Рис. 4.22 показано нелінійну залежність амплітуди частоти для різних показників k степеневого закону.

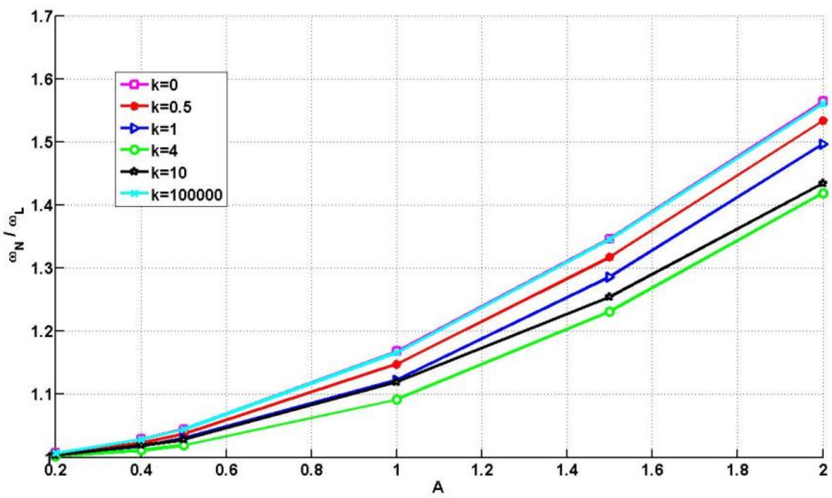


Рис. 4.22. Вплив показника об'ємної частки k на співвідношення частот вільно опертої ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричної оболонки $R/2a$=10 з прямокутними вирізами (Рис. 4.4)

Як видно з Рис. 4.22, степеневий показник k істотно впливає на нелінійні частоти. Найбільші частоти має оболонка з чистої кераміки (Alumina). Це пов'язано з тим, що цей матеріал має великий модуль Юнга E_c. Незважаючи на те, що ФГМ оболонка (k = 4, 10) містить невелику об'ємну частку Alumina, вона набагато жорсткіша, ніж оболонка з чистого металу (Aluminium), і тому їх частоти вищі, ніж відповідні частоти для металу (k = 100 000).

4.5.3 Нелінійні коливання закріпленої ФГМ оболонки еліптичної форми з прямокутними виступами

Лінійна задача для оболонок з геометрією на Рис. 4.8 була розв’язана в п.п. 4.3.3. Представимо результати дослідження на нелінійні коливання *закріпленої* сферичної ФГМ пологої оболонки складної еліптичної форми з прямокутними виступами (Рис. 4.8). Результати було отримано для двох сумішей функціонально-градієнтних матеріалів FG1 та FG2, механічні характеристики яких було наведено в підрозділі 4.2.4 у формулах (4.31-4.32). Рисунки 4.23 та 4.24 показують нелінійну залежність амплітуди частоти для різних показників k степеневого закону для ФГМ матеріалів FG1 та FG2.

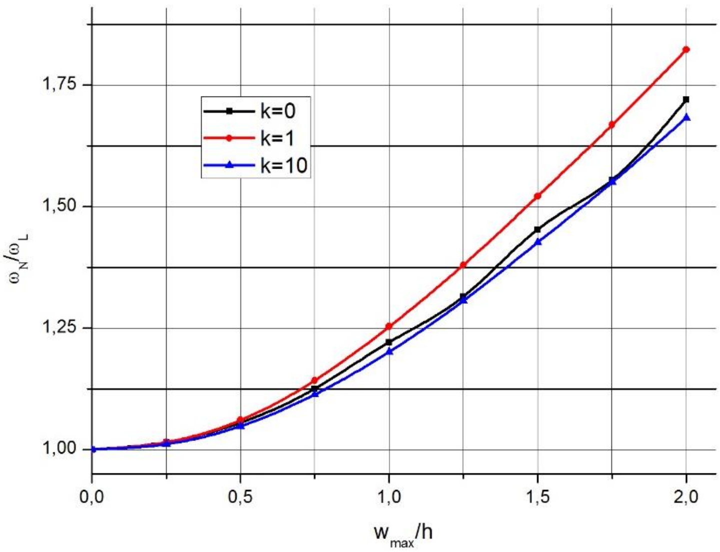


Рис. 4.23. Вплив показника об’ємної частки k на співвідношення частот закріпленої ФГМ (Si_3N_4 / $SUS304$) сферичної оболонки складної еліптичної форми з прямокутними виступами (Рис. 4.8)

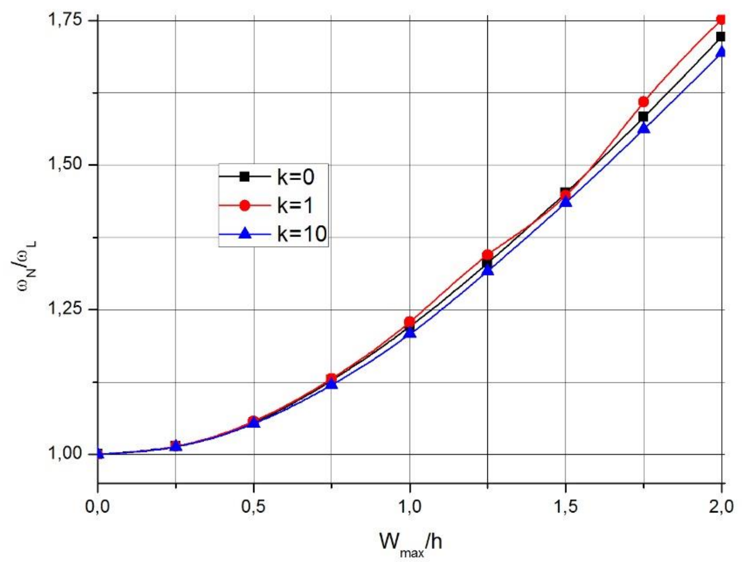


Рис. 4.24. Вплив показника об'ємної частки k на співвідношення частот закріпленої ФГМ (ZrO_2 / Ti-6Al-4V) сферичної оболонки складної еліптичної форми з прямокутними виступами (Рис. 4.8)

Як і в попередніх випадках скелетні криві близькі одна до одної, але з цього не можна зробити висновок, що показник k об'ємної частки кераміки не впливає на поведінку нелінійних частот. Тому що за результатами розв'язків лінійних задач видно цей вплив на власні частоти оболонок.

4.5.4 Нелінійні коливання закріпленої ФГМ пологої оболонки еліптичної форми з прямокутними вирізами

Лінійна задача для оболонок з геометрією на Рис. 4.10 була розв'язана в п.п. 4.3.4. У цьому пункті досліджуються нелінійні коливання *закріпленої* сферичної ФГМ пологої оболонки складної еліптичної форми з прямокутними вирізами (Рис. 4.10). Розглядаються такі ж суміші FG1 та FG2 і геометричні параметри оболонки, що було наведено в підрозділі 4.3.4. Значення прямокутного вирізу обрані наступними:

$$b_1/2a = 0.175, a_1/2a = 0.15.$$

Рисунки 4.25 та 4.26 показують нелінійну залежність амплітуди частоти закріпленої сферичної ФГМ пологої оболонки (Рис. 4.10) для різних показників *k* степеневого закону для ФГМ матеріалів FG1 та FG2.

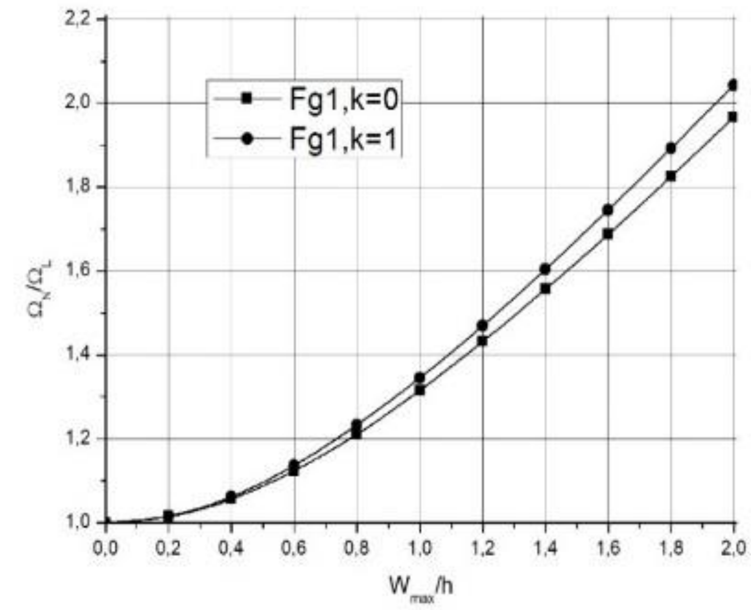


Рис. 4.25. Скелетні криві для закріпленої ФГМ сферичної оболонки складної еліптичної форми з прямокутними вирізами (Рис. 4.10) з суміші FG1

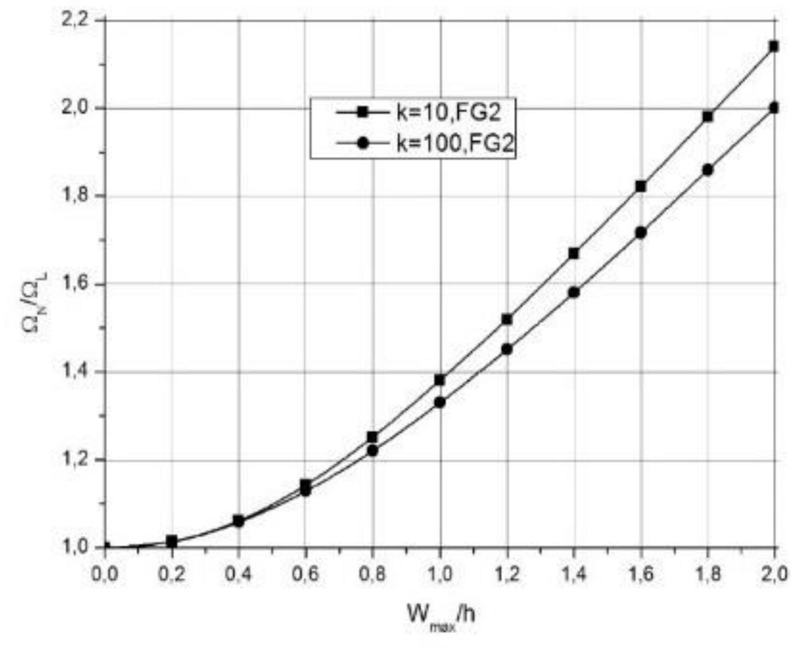


Рис. 4.26. Скелетні криві для закріпленої ФГМ сферичної оболонки складної еліптичної форми з прямокутними вирізами (Рис. 4.10) з суміші FG2

Відзначимо, що в обох випадках криві мають жорсткий характер, монотонно зростають, що характерно для помірно товстих жорстко закріплених оболонок ($h/2a = 0.1$). При проведенні обчислювального експерименту було встановлено, що при прямуванні відношення $b_1/2a \to 0{,}25$, тобто $b_1/b \to 1$, скелетні криві збігаються з відповідними кривими для еліптичного плану, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

Висновки за Розділом 4

Даний розділ присвячено використанню розробленого методу для дослідження лінійних та нелінійних коливань одношарових ФГМ пологих оболонок та пластин. Основні висновки по даному розділу зводяться до наступного:

1. Для комп'ютерної реалізації розробленого методу до даного класу задач в рамках трьох теорій виведено аналітичні формули для обчислення елементів матриць, за допомогою яких визначаються сили в серединній площині, моменти та перерізуючи сили. Ці формули були одержані завдяки обчисленню визначених інтегралів від відповідних функцій, за умови, що коефіцієнт Пуассона не залежить від координати z , в напрямку якої змінюються ефективні властивості матеріалу. Формули отримано для степеневого і сигмоїдального законів розподілення об'ємної частки кераміки. За допомогою одержаних формул визначаються ефективні властивості ФГМ.

2. За допомогою створеного програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL виконане широке тестування розробленого методу на прикладах циліндричних, сферичних та параболоїдно-гіперболічних пологих оболонок з прямокутною та еліптичною формою плану. Порівняно результати для різних типів граничних умов, різних ФГМ, товщин та значень кривини. Аналіз порівняння показав, що результати, отримані за допомогою уточненої теорії першого порядку (FSDT) та RFM практично збігаються з представленими в роботі [175]. Відхилення від результатів теорії вищого порядку (HSDT) [166] не перевищують 4 %. Відхилення результатів при використанні RFM та

класичної теорії (CST) з результатами роботи [93] не перевищують 2 %. В цілому слід зазначити, що класична теорія призводить в більшості випадків до підвищених значень основних частот у порівнянні з уточненими теоріями.

3. Вивчено лінійні коливання ФГМ одношарових пологих оболонок різної кривини зі складною формою плану та різними типами крайових умов в рамках різних теорій. Одержані власні частоти та форми коливань для таких оболонок:

– прямокутної оболонки з прямокутними та круговими вирізами, яка жорстко закріплена по всьому контуру або вільно оперта;

– оболонки еліптичної форми плану з прямокутними виступами та прямокутними вирізами.

– прямокутної оболонки з круговими кутовими вирізами та квадратним отвором.

Для кожної оболонки обґрунтовується вірогідність результатів завдяки аналізу збіжності та виродження розглянутої області до відомої.

4. Побудовані відповідні структури розв’язків відповідно заданим крайовим умовам, на базі яких будується система координатних функцій для методу Рітца.

5. Одержано залежність власних частот від значень показника градієнтного індексу p для розглянутих оболонок і різних типів ФГМ

Загальною особливістю поведінки частот при збільшенні показника p, є зменшення власних частот.

6. Проаналізовано нелінійні вільні коливання пологих оболонок. Вирішені тестові задачі та виконано порівняння з відомими результатами, яке показало, що відхилення одержаних результатів не перебільшує 4 %, а в більшості випадків 2 %.

7. Для всіх випадків розглянутих вище оболонок зі складною формою плану, досліджених в рамках лінійної теорії, були розв’язані геометрично нелінійні задачі. Побудовані відповідні скелетні криві. Було показано, що для

жорстко закріплених оболонок та оболонок середньої товщини, скелетні криві мають жорстку поведінку.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [307-310, 324, 333-334, 343-348, 360-364].

РОЗДІЛ 5

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ СЕНДВІЧ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Слід відзначити, що сендвіч структури широко використовуються в багатьох промислових галузях. Але традиційні сендвіч-конструкції мають деякі недоліки, які пов’язані з раптовою зміною властивостей матеріалу на межах розділу шарів, що може призвести до великих міжшарових напружень. Крім того ламіновані композитні конструкції погано витримують удари, а під час їх використання виникають деякі пошкодження, такі як розшарування та тріщини. Ці недоліки композитних матеріалів призводять до погіршення експлуатаційних характеристик і навіть виходу з експлуатації багатошарової конструкції.

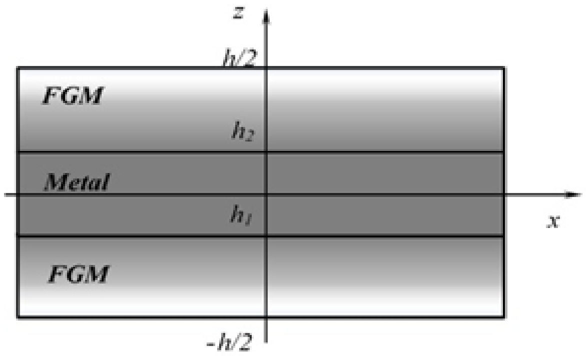
Щоб подолати ці недоліки, в останні роки суттєво було поширено використання ФГМ для багатошарових структур, в тому числі для тришарових, або для сендвіч структур, які мають високу конструкційну ефективність завдяки своїм відмінним властивостям, а саме: високе співвідношення міцності до ваги, гарна здатність звукопоглинання, термостійкість і головне, неперервну зміну механічних властивостей, що виключає розшарування та концентрацію напружень між шарами.

З поліпшенням якості та появою безліч нових видів композитних матеріалів, застосування сендвіч конструкцій стає дедалі більшим. Якщо раніш сендвіч структури в основному використовувались в аерокосмічній, морській та авіаційній промисловості, то в даний час застосування цих конструкцій поширено на біомедичну, автомобільну, нафтохімічну та інші галузі.

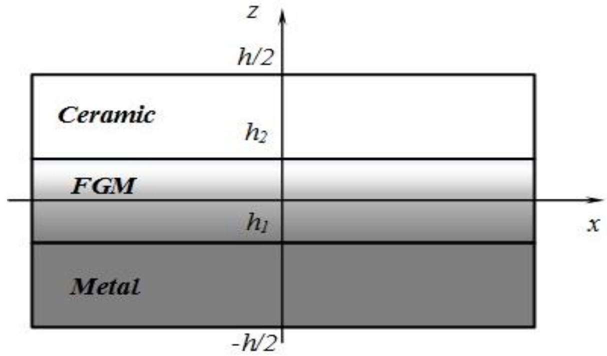
Структура сендвічу в основному складається з трьох шарів: дві лицьові сторони та заповнювач. Можливі різні види заповнювача, а саме виробленого із ФГМ або ізотропного матеріалу. Аналогічно лицьові поверхні сендвіч-конструкції можуть бути як ізотропними, так і виготовленими з ФГМ.

5.1 Основні положення для сендвіч структур. Виведення аналітичних виразів для обчислення елементів матриць з урахуванням ефективних властивостей ФГМ

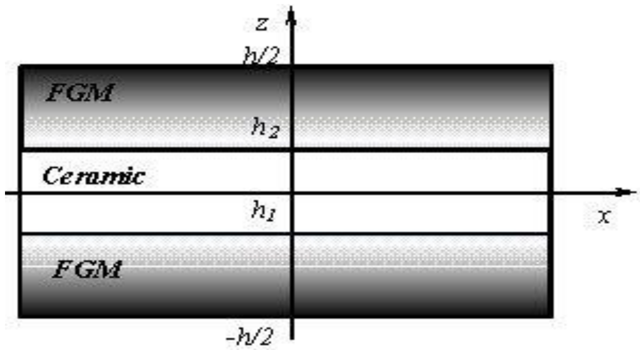
Припустимо, що шари оболонки виготовлені із функціонально-градієнтного матеріалу (суміші металу та кераміки) або з ізотропного матеріалу (метал чи кераміка). Розглянемо чотири типи схем ламінації: 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, які представлені на Рис. 5.1 вздовж товщини оболонки.



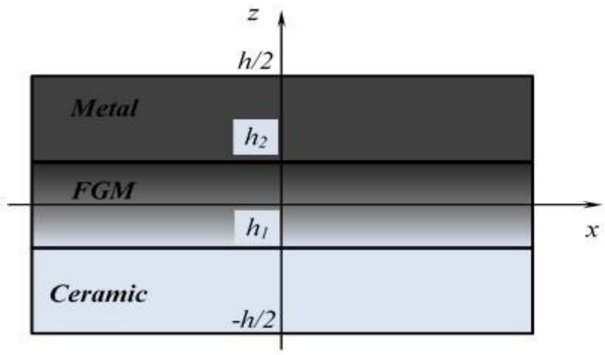
а) Тип 1-1



б) Тип 2-1



в) Тип 1-2



г) Тип 2-2

Рис. 5.1. Схеми розташування шарів вздовж товщини оболонки

Пологі оболонки Типу 1-1 та Типу 1-2 відповідають сендвіч оболонкам із зовнішнім шаром з ФГМ та ізотропним (металевим або керамічним) наповнювачем. Оболонки Типу 2-1 і Типу 2-2 відповідають сендвіч оболонкам з наповнювачем з ФГМ та керамікою або металом на верхньому і нижньому шарах. Передбачається, що шари ФГМ складаються із суміші металу та кераміки, тобто із матеріалів M_1, M_2. Ефективні властивості матеріалу шарів визначаються за правилом Фойгта. Модуль Юнга, щільність маси та коефіцієнт Пуассона для кожного $r-$го шару на верхній ($E_1^{(r)}$, $\rho_1^{(r)}$, $\nu_1^{(r)}$) та нижній ($E_2^{(r)}$, $\rho_2^{(r)}$, $\nu_2^{(r)}$) поверхні визначаються за степеневим законом наступним чином:

$$E^{(r)} = \left(E_1^{(r)} - E_2^{(r)}\right) V_1^{(r)} + E_2^{(r)}, \tag{5.1}$$

$$\rho^{(r)} = \left(\rho_1^{(r)} - \rho_2^{(r)}\right) V_1^{(r)} + \rho_2^{(r)}, \tag{5.2}$$

$$\nu^{(r)} = \left(\nu_1^{(r)} - \nu_2^{(r)}\right) V_1^{(r)} + \nu_2^{(r)}, \tag{5.3}$$

де $V_1^{(r)}$ – об’ємна доля матеріалу M_1. Об'ємна доля V_1 для кожної схеми розташування шарів обчислюється відповідно до нижче наведених формул:

Тип 1-1:

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = \left(\dfrac{z+\frac{h}{2}}{h_1+\frac{h}{2}}\right)^{p_1}, & z \in [-h/2, h_1], \\ V_1^{(2)} = 1, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} = \left(\dfrac{z-\frac{h}{2}}{h_2-\frac{h}{2}}\right)^{p_3}, & z \in [h_2, h/2] \end{cases} \tag{5.4}$$

Тип 2-1:

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = 1, & z \in \left[-\frac{h}{2}, h_1\right], \\ V_1^{(2)} = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^{p_2}, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} = 0, & z \in \left[h_2, \frac{h}{2}\right]. \end{cases} \tag{5.5}$$

Тип 1-2:

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = \left(\dfrac{z-h_1}{-h_1-\frac{h}{2}}\right)^{p_1}, & z \in \left[-\frac{h}{2}, h_1\right], \\ V_1^{(2)} = 0, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} = \left(\dfrac{z-h_2}{\frac{h}{2}-h_2}\right)^{p_3}, & z \in \left[h_2, \frac{h}{2}\right]. \end{cases} \tag{5.6}$$

Тип 2-2:

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = 0, & z \in \left[-\frac{h}{2}, h_1\right], \\ V_1^{(2)} = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^{p_2}, & z \in [h_1, h_2], \\ V_1^{(3)} = 1, & z \in \left[h_2, \frac{h}{2}\right]. \end{cases} \tag{5.7}$$

Величини p_1, p_2, p_3 дорівнюють значенню показника степеневого закону для ФГМ матеріалу і можуть приймати різні значення на різних шарах, а можуть бути однаковими.

На Рис. 5.2 показано зміну об'ємної долі V_1 вздовж товщини оболонки для різних значень показника p (градієнтного індексу).

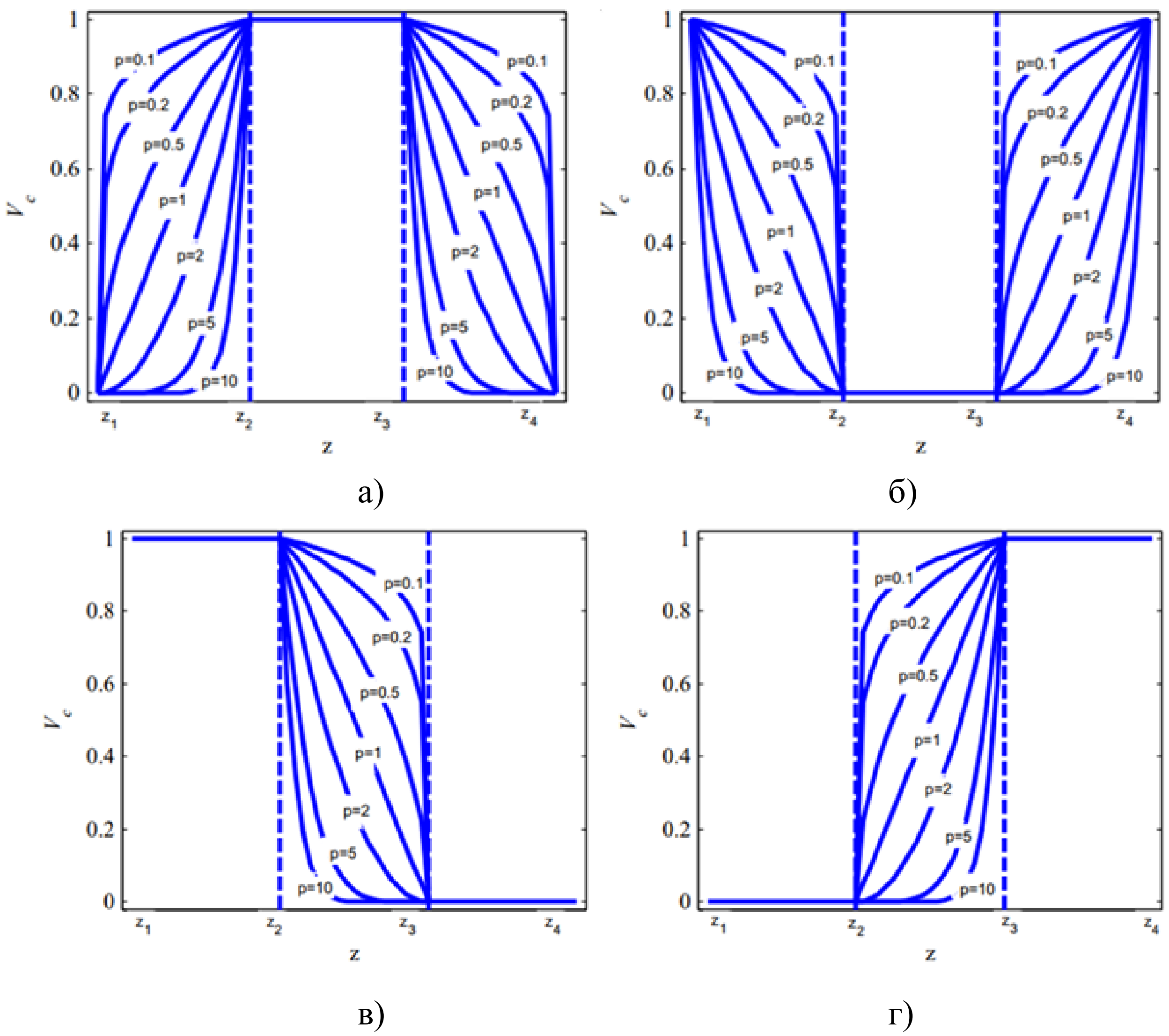


Рис. 5.2 (а-г). Зміна об'ємної частки V_1 по товщині для різних значень показника степеневого закону: (а) Тип 1-1; (б) Тип 1-2; (в) Тип 2-1; (г) Тип 2-2

Товщина кожного шару оболонки може бути різною. Далі відношення товщини шарів будемо позначати як відношення трьох чисел $h^{(1)} - h^{(2)} - h^{(3)}$, де $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$- це товщини нижнього, середнього та верхнього шарів відповідно (Рис. 5.1):

$$h^{(1)} = h_1 + h/2, \ h^{(2)} = h_2 - h_1, h^{(3)} = h/2 - h_2. \tag{5.8}$$

Якщо для розв'язання задач застосовується уточнена теорія пологих оболонок або пластин першого порядку (FSDT), яка враховує деформації зсуву, то зусилля $N = \{N_{11}, N_{12}, N_{22}\}^T$ і моменти $M = \{M_{11}, M_{12}, M_{22}\}^T$ визначаються за формулами (2.23-2.34), тобто мають вигляд:

$$[N] = [A]\{\varepsilon\} + [B]\{\chi\}, \quad [M] = [B]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\},$$

де $[A], [B], [D]$ - це квадратні матриці третього порядку, елементи яких A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} $(i, j = 1,2,6)$ для сендвіч структур обчислюються за наступними формулами :

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz,\ B_{ij} = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz,\ D_{ij} = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz, \quad (5.9)$$

де $z_1 = -h/2, \quad z_2 = h_1, \quad z_3 = h_2, \quad z_4 = h/2.$

Треба звернути увагу, що в разі сендвіч оболонок елементи матриць визначаються як сума інтегралів вздовж товщини, формули (5.9).

Величини $Q_{ij}^{(r)} (i, j = 1,2,6)$ визначаються як:

$$Q_{11}^{(r)} = Q_{22}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{1 - (\nu^{(r)})^2}, \qquad Q_{12}^{(r)} = \frac{\nu^{(r)} E^{(r)}}{1 - (\nu^{(r)})^2}, \qquad Q_{66}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1 + \nu^{(r)})}. \quad (5.10)$$

Перерізуючи сили Q_x, Q_y будемо обчислювати за формулами:

$$Q_x = K_s^2 A_{66} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{66} \varepsilon_{23}, \quad (5.11)$$

де K_s^2 - коефіцієнт зсуву. В даній роботі значення для цього коефіцієнта зазвичай приймається рівним $5/6$.

Далі будемо розглядати матеріали, які мають однаковий коефіцієнт Пуассона для металу та кераміки, тобто $\nu_m = \nu_c$. Для цього класу матеріалів одержані аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} у рамках теорій CST та FSDT. Аналітичні вирази цих коефіцієнтів для оболонок з Типами ламінації 1-1, 1-2, 2-1 та 2-2 наведено нижче:

Тип 1-1:

$$A_{11} = \nu_0 \left(E_{cm} \left(\frac{as1}{p_1 + 1} - \frac{as2}{p_3 + 1} \right) + E_m (h - as21) + E_c as21 \right),$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left(\frac{as1}{p_1 + 2} \left(h_1 - \frac{h}{2(p_1 + 1)} \right) - \frac{as2}{p_3 + 2} \left(h_2 + \frac{h}{2(p_3 + 1)} \right) + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right), \quad (5.12)$$

$$D_{11} = \nu_0 \left(E_{cm} \left(as1 \left(\frac{(as1)^2}{p_1 + 3} - \frac{as1}{p_1 + 2} h - \frac{h^2}{4(p_1 + 1)} \right) - \right.\right.$$

$$-as2\ \left(\frac{(as2)^2}{p_3+3}-\frac{as2}{p_3+2}h+\frac{h^2}{4(p_3+1)}\right)+\frac{h_2^3-h_1^3}{3}\Big)+\frac{E_m}{12}h^3\Big).$$

Тип 1-2:

$$A_{11}=\nu_0\left(E_{cm}\left(\frac{as1}{p_1+1}-\frac{as2}{p_3+1}+\right)+E_m h\right),$$

$$B_{11}=\nu_0 E_{cm}\left(as1\ \left(\frac{h_1}{p_1+1}-\frac{as1}{p_1+2}\right)-as2\ \left(\frac{h_2}{p_3+1}-\frac{as2}{p_3+2}\right)\right), \qquad (5.13)$$

$$D_{11}=\nu_0(E_{cm}(as1\left(\frac{h_1^2}{p_1+1}-\frac{2as1}{p_1+2}h_1+\frac{as1^2}{p_1+3}\right)-as2\ \left(\frac{as2^2}{p_3+3}-2h_2\frac{as2}{p_3+2}h+\right.$$

$$\left.\left.\frac{h_2^2}{p_3+1}\right)\right)+\frac{E_m}{12}h^3\Big).$$

Тип 2-1:

$$A_{11}=\nu_0\left(E_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+1}-h_2\right)+\frac{h}{2}(E_c+E_m)\right),$$

$$B_{11}=\nu_0 E_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+2}\ \left(h_1+\frac{h_2}{p_2+1}\right)+\frac{1}{2}\ \left(\frac{h^2}{4}-h_2^2\right)\right), \qquad (5.14)$$

$$D_{11}=\nu_0(E_{cm}(as1\left(\frac{h_2^2}{p_1+1}-\frac{2as21}{p_1+2}h_2+\frac{(as21)^2}{p_1+3}\right)-\frac{h_2^3}{3})+\frac{(E_m+E_c)}{24}h^3\Big),$$

Тип 2-2:

$$A_{11}=\nu_0\left(E_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+1}-h_2\right)+\frac{h}{2}(E_c+E_m)\right),$$

$$B_{11}=\nu_0 E_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+2}\ \left(h_2+\frac{h_1}{p_2+1}\right)+\frac{1}{2}\ \left(\frac{h^2}{4}-h_2^2\right)\right), \qquad (5.15)$$

$$D_{11}=\nu_0\left(E_{cm}\left(as21\ \left(\frac{h_1^2}{p_2+1}+\frac{2as21}{p_2+2}h_1+\frac{as21^2}{p_2+3}\right)-\frac{h_2^3}{3}\right)+\frac{(E_m+E_c)}{24}h^3\right),$$

де

$$\nu_0=\frac{1}{(1-\nu^2)},\ E_{cm}=E_c-E_m,\ \ \rho_{cm}=\rho_c-\rho_m,$$

$$as1=\left(\frac{h}{2}+h_1\right),\ \ as2=h_2-\frac{h}{2}, as21=h_2-h_1. \qquad (5.16)$$

Зауважимо, що величини

$A_{12},\ A_{66},\ B_{12},\ B_{66},\ D_{12},\ D_{66}$ для всіх типів розташування шарів визначаються за формулами

$$R_{12}=\nu R_{11},\ R_{22}=\nu R_{11},\ R_{66}=\frac{1-\nu}{2}R_{11}, \qquad (5.17)$$

де R є загальне позначення для відповідних коефіцієнтів A, B, D.

Рівняння руху сендвіч оболонки співпадають з рівняннями (2.54) для одношарових ФГМ оболонок, але головна різниця в коефіцієнтах A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} та $I_0,\ I_1,\ I_2$. Вирази для A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} представлені вище (5.12-5.15), а вирази для I_0, $I_1,\ I_2$ визначаються як:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} \left(\rho^{(r)}\right) (1, z, z^2) dz, \tag{5.18}$$

$\rho^{(r)}$ - щільність маси *r-го шару*. Знайдені аналітичні вирази для обчислення I_0, I_1, I_2 при умові $\nu_m = \nu_c$ для відповідного типу ламінації мають вигляд:

Тип 1-1:

$$I_0 = \rho_{cm}\left(\frac{as1}{p_1+1} - \frac{as2}{p_2+1}\right) + \rho_m(h_1 - as2) + \rho_c(h_2 - h_1),$$

$$I_1 = \rho_{cm}\left(\frac{as1}{p_1+2}\ \left(h_1 - \frac{h}{2(p_1+1)}\right) - \frac{as2}{p_3+2}\ \left(h_2 + \frac{h}{2(p_3+1)}\right) + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}\right), \tag{5.19}$$

$$I_2 = \rho_{cm}\left(as1\ \left(\frac{as1^2}{p_1+3} - \frac{as1}{p_1+2}h - \frac{h^2}{4(p_1+1)}\right) -\right.$$

$$\left. -as2\ \left(\frac{as2^2}{p_3+3} - \frac{as2}{p_3+2}h + \frac{h^2}{4(p_3+1)}\right) + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3}\right) + \frac{\rho_m}{12}h^3.$$

Тип 1-2:

$$I_0 = \left(\rho_{cm}\left(\frac{as1}{p_1+1} - \frac{as2}{p_3+1} + \right) + \rho_m h\right),$$

$$I_1 = \rho_{cm}\left(as1\ \left(\frac{h_1}{p_1+1} - \frac{as1}{p_1+2}\right) - as2\ \left(\frac{h_2}{p_3+1} - \frac{as2}{p_3+2}\right)\right), \tag{5.20}$$

$$I_2 = (\rho_{cm}(as1\left(\frac{h_1^2}{p_1+1} - \frac{2as1}{p_1+2}h_1 + \frac{as1^2}{p_1+3}\right) - as2\ \left(\frac{as2^2}{p_3+3} - 2h_2\frac{as2}{p_3+2}h + \right.$$

$$\left.\left.\frac{h_2^2}{p_3+1}\right)\right) + \frac{\rho}{12}h^3\Big).$$

Тип 2-1:

$$I_0 = \left(\rho_{cm}\left(h_1 + \frac{as21}{p_2+1}\right) + \frac{h}{2}(\rho_c + \rho_m)\right),$$

$$I_1 = \rho_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+2}\ \left(h_2 + \frac{h_1}{p_2+1}\right) + \frac{1}{2}\ \left(h_1^2 - \frac{h^2}{4}\right)\right), \tag{5.21}$$

$$I_2 = \rho_{cm}\left(\frac{h_1^3}{3} + as21\ \left(\frac{h_1^2}{p_2+1} + \frac{2as21}{p_2+2}h_1 + \frac{as21^2}{p_2+3}\right) - \frac{h_2^3}{3}\right) + \frac{(\rho_m+\rho_c)}{24}h^3.$$

Тип 2-2:

$$I_0 = \left(\rho_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+1} - h_2\right) + \frac{h}{2}(\rho_c + \rho)\right),$$

$$I_1 = \rho_{cm}\left(\frac{as21}{p_2+2}\ \left(h_2 + \frac{h_1}{p_2+1}\right) + \frac{1}{2}\ \left(\frac{h^2}{4} - h_2^2\right)\right), \tag{5.22}$$

$$I_2 = \left(\rho_{cm}\left(as21\ \left(\frac{h_1^2}{p_2+1} + \frac{2as21}{p_2+2}h_1 + \frac{as21^2}{p_2+3}\right) - \frac{h_2^3}{3}\right) + \frac{(\rho_m+\rho_c)}{24}h^3\right).$$

Якщо задача вирішується в рамках уточненої теорії третього порядку (теорії Редді), то в матричному виді зусилля $N = \{N_{11}, N_{12}, N_{22}\}^T$ і моменти $M = \{M_{11}, M_{12}, M_{22}\}^T$ визначаються як

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E \\ B & D & F \\ E & F & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \chi \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ D & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix}.$$

Матриці $[A]$, $[B]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$, $[H]$ мають вигляд (2.65):

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}, [H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix}.$$

Перерізуючі сили $\{Q\}$ та напруження вищого порядку $\{R\}$ визначаються за формулами(2.66), (2.67):

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(0)} \\ \varepsilon_{13}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{66} & 0 \\ 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(2)} \\ \varepsilon_{13}^{(2)} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{66} & 0 \\ 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(0)} \\ \varepsilon_{13}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{66} & 0 \\ 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}^{(2)} \\ \varepsilon_{13}^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Елементи цих матриць $A_{ij}, B_{ij} D_{ij}, E_{ij} F_{ij}, H_{ij}$ є коефіцієнтами жорсткості оболонки, які визначаються за допомогою формул (2.68-2.69), але інтеграли по всій товщині визначаються як сума трьох інтегралів:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\right) = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}(z,T)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz, \ \ i,j = 1,2,6,$$

$$\left(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\right) = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}(z,T)(1, z^2, z^4)dz, \quad i,j = 4,5,$$

При розв'язанні конкретних задач далі теорія Редді буде використана для схеми ламінації ФГМ-кераміка-ФГМ (Тип 1-2), при умові що градієнтні індекси для всіх шарів однакові, тобто $p_1 = p_2 = p_3 = k$. За такі умови було виведено відповідні аналітичні формули для обчислення елементів матриць $[A]$, $[B]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$, $[H]$:

$$\mathrm{A}_{11} = \nu_0 \left(E_m h + \frac{E_{cm}}{k+1}(h + kas21) \right), \tag{5.23}$$

$$B_{11} = \nu_0 E_{cm} \left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + as1\left(\frac{as1}{k+2} - \frac{h}{2(k+1)}\right) - as2\left(\frac{as2}{k+2} + \frac{h}{2(k+1)}\right) \right), \tag{5.24}$$

$$D_{11} = \nu_0 \left(E_{cm} \left(\frac{h_2^3 - h_1^3}{3} + \frac{1}{k+3}(as1^3 - as2^3) - \frac{h}{k+2}(as1^2 + as2^2) + \frac{h^2}{4(k+1)}(as1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - as2) \right) + E_m \frac{h^3}{12} \right) ,$$

$$E_{11} = \nu_0 E_{cm} \left(\frac{h_2^4 - h_1^4}{4} + \frac{1}{k+4}(as1^4 - as2^4) - \frac{3h}{2(k+3)}(as1^3 + as2^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{3h^2}{4(k+2)}(as1^2 - as2^2) + \frac{h^3}{8(k+1)}(as1 + as2) \right), \tag{5.25}$$

$$F_{11} = \nu_0 E_{cm} \left(\frac{h_2^5 - h_1^5}{5} + \frac{1}{k+5}(as1^5 - as2^5) - \frac{2h}{k+4}(as1^4 + as2^4) - \frac{3h^2}{2(k+3)}(as1^3 - \right.$$

$$\left. - as2^3) - \frac{h^3}{2(k+2)}(as1^2 + as2^2) + \frac{h^4}{16(k+1)}(as1 - as2) \right) + E_m \frac{h^5}{80}, \tag{5.26}$$

$$H_{11} = \nu_0 E_{cm}\left(\frac{h_2^7-h_1^7}{7} + \frac{1}{k+7}(as1^7 - as2^7) - \frac{3h}{k+6}(as1^6 + as2^6) + \frac{15h^2}{4(k+5)}(as1^5 - as2^5) - \frac{5h^3}{2(k+4)}(as1^4 + as2^4) + \frac{15h^4}{16(k+3)}(as1^3 - as2^3) - \frac{3h^5}{16(k+2)}(as1^2 + as2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{h^6}{64(k+1)}(as1 - as2)\right) + E_m\frac{h^7}{488}. \quad (5.27)$$

Зауважимо, що величини $A_{12},\ A_{66},\ B_{12},\ B_{66},\ D_{12},\ D_{66}, E_{12},\ E_{66}, F_{12},\ F_{66}, H_{12}, H_{66}$ для всіх типів розташування шарів визначаються за формулами

$$R_{12} = \nu R_{11},\ R_{22} = \nu R_{11},\ R_{44} = R_{55} = R_{66} = \frac{1-\nu}{2}R_{11}, \quad (5.28)$$

Аналітичні вирази інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 для випадку, що розглядається, представлено нижче:

$$I_1 = \rho_m h + \frac{\rho_{cm}}{k+1}\left(h + k(h_2 - h_1)\right), \quad (5.29)$$

$$I_2 = \rho_{cm}\left(\frac{h_2^2-h_1^2}{2} + as1\left(\frac{as1}{k+2} - \frac{h}{2(k+1)}\right) - as2\left(\frac{as2}{k+2} + \frac{h}{2(k+1)}\right)\right), \quad (5.30)$$

$$I_3 = \rho_{cm}\left(\frac{h_2^3-h_1^3}{3} + \frac{1}{k+3}(as1^3 - as2^3) - \frac{h}{k+2}(as1^2 + as2^2) + \frac{h^2}{4(k+1)}(as1 - \right.$$

$$\left. - as2)\right) + \rho_m\frac{h^3}{12}, \quad (5.31)$$

$$I_4 = \rho_{cm}\left(\frac{h_2^4 - h_1^4}{4} + \frac{1}{k+4}(as1^4 - as2^4) - \frac{3h}{2(k+3)}(as1^3 + as2^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{3h^2}{4(k+2)}(as1^2 - as2^2) + \frac{h^3}{8(k+1)}(as1 + as2)\right), \quad (5.32)$$

$$I_5 = \rho_{cm}\left(\frac{h_2^5-h_1^5}{5} + \frac{1}{k+5}(as1^5 - as2^5) - \frac{2h}{k+4}(as1^4 + as2^4) - \frac{3h^2}{2(k+3)}(as1^3 - \right.$$

$$\left. - as2^3) - \frac{h^3}{2(k+2)}(as1^2 + as2^2) + \frac{h^4}{16(k+1)}(as1 - as2)\right) + \rho_m\frac{h^5}{80}, \quad (5.33)$$

$$I_6 = \rho_{cm}\left(\frac{h_2^7-h_1^7}{7} + \frac{1}{k+7}(as1^7 - as2^7) - \frac{3h}{k+6}(as1^6 + as2^6) + \frac{15h^2}{4(k+5)}(as1^5 - \right.$$

$$- as2^5) - \frac{5h^3}{2(k+4)}(as1^4 + as2^4) + \frac{15h^4}{16(k+3)}(as1^3 - as2^3). \quad (5.34)$$

5.2 Тестові задачі для ФГМ сендвіч пологих оболонок з різними умовами закріплення

Для підтвердження вірогідності запропонованого алгоритму, одержаних аналітичних виразів для елементів матриць $[A]$, $[B]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$, $[H]$, інтегралів I_i , $i = \overline{1,6}$, а також розробленого програмного забезпечення розв'яжемо декілька тестових задач.

Задача 1. Розглянемо сендвіч ФГМ пологу оболонку (Типу 1-2 та 2-2), що спирається на прямокутний план, з різними граничними умовами та наступними геометричними параметрами:

$$\frac{h}{2a} = 0.1; \; \frac{b}{a} = 1; \quad k_1 = 2a/R_x = 0.2, k_2 = 2a/R_y = (0; 0.2).$$

Величина $2a$ визначає довжину сторони прямокутного плану. Фізичні характеристики функціонально-градієнтного матеріалу Al/Al_2O_3, який було обрано для даного випадку, наведені в Розділі 4 у Таблиці 4.1.

Граничні умови задаються наступним чином:

CCCC - оболонка жорстко закріплена на всіх сторонах $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, (5.35)

SSSS - оболонка вільно оперта на всіх сторонах $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, (5.36)

SFSF - оболонка вільно оперта на сторонах $x = \pm\frac{a}{2}$ і вільна на сторонах $y = \pm\frac{b}{2}$, (5.37)

SCSC - оболонка вільно оперта з боків $x = \pm\frac{a}{2}$ і жорстко закріплена на сторонах $y = \pm\frac{b}{2}$. (5.38)

У даному тестовому прикладі було проведено порівняння результатів, отриманих розробленим комп'ютерним кодом, що реалізує запропонований підхід для квадратних сендвіч ФГМ пологих оболонок подвійної кривини. Результати порівняння одержаних результатів з відомими [172] наведено у Таблицях 5.1, 5.2, 5.3. Таблиця 5.1 показує порівняння значення безрозмірних параметрів власної частоти для циліндричних і сферичних оболонок Типу 1-2 та 2-2 для схеми розташування товщин 1-2-1.

Таблиця 5.1. Порівняння параметра основної частоти квадратної сендвіч (Типу 1-2 та 2-2) ФГМ (Al/Al_2O_3) циліндричної і сферичної оболонки зі схемою товщини 1-2-1 та різними граничними умовами

Тип ламінації	p	Метод	Циліндрична оболонка k_1=0.2, k_2=0				Сферична оболонка k_1=k_2=0.2			
			SFSF	SSSS	CCCC	SCSC	SFSF	SSSS	CCCC	SCSC
1-2	0.6	[172]	0.8326	1.6862	2.8005	2.2990	0.8384	1.7330	2.8462	2.3455
		RFM	0.8343	1.6919	2.8291	2.3189	0.8400	1.7385	2.8742	2.3649
	5	[172]	0.6274	1.2742	2.1318	1.7462	0.6323	1.3129	2.1699	1.7845
		RFM	0.6285	1.2781	2.1519	1.7601	0.6334	1.3167	2.1890	1.7980
	20	[172]	0.5195	1.0605	1.7969	1.4659	0.5246	1.0989	1.8335	1.5036
		RFM	0.5202	1.0631	1.8115	1.4759	0.5253	1.1014	1.8476	1.5132
2-2	0.6	[172]	0.6459	1.3372	2.3283	1.8784	0.6571	1.4134	2.3989	1.9254
		RFM	0.6464	1.3389	2.3402	1.8864	0.6576	1.4150	2.4103	1.9599
	5	[172]	0.6042	1.2457	2.1569	1.7440	0.6133	1.3074	2.2147	1.8042
		RFM	0.6047	1.2476	2.1693	1.7523	0.6139	1.3091	2.2266	1.8121
	20	[172]	0.6072	1.2483	2.1511	1.7426	0.6154	1.3043	2.2039	1.7974
		RFM	0.6078	1.2505	2.1646	1.7517	0.6160	1.3061	2.2169	1.8061

Частотний параметр Ω_L визначається у даному тесті за формулою:

$$\Omega_L^{(1)} = \lambda_1 (2a)^2 h \sqrt{\rho_0 / E_0},$$

де $\rho_0 = 1 \quad kg/m^2,\ E_0 = 1 \quad GPa.$

Порівняння отриманих результатів для параболоїдно-гіперболічних пологих оболонок з Типом ламінації 1-2 та 2-2 ($k_1 = 0.2; \quad k_2 = -0.2$) з різним співвідношенням товщини шарів та для різних граничних умов показані в Таблиці 5.3.

Таблиця 5.2. Порівняння параметра основної частоти квадратної сендвіч (Тип 1-2) циліндричної і сферичної ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки з різними граничними умовами і різними схемами товщини

Схема товщини	p	Метод	Циліндрична оболонка k_1=0.2, k_2=0				Сферична оболонка k_1=k_2=0.2			
			SFSF	SSSS	CCCC	SCSC	SFSF	SSSS	CCCC	SCSC
1-0-1	0.6	[172]	0.8843	1.8023	3.0433	2.4855	0.8924	1.8643	3.1027	2.5465
		RFM	0.8856	1.8070	3.0691	2.5032	0.8937	1.8689	3.1278	2.5636
	5	[172]	0.7185	1.4566	2.4252	1.9894	0.7237	1.4982	2.4657	2.0308
		RFM	0.7198	1.4613	2.4493	2.0061	0.7250	1.5028	2.4894	2.0471
	20	[172]	0.5681	1.1566	1.947	1.5919	0.5730	1.1948	1.9840	1.6296
		RFM	0.5689	1.1598	1.9644	1.6036	0.5739	1.1979	2.0007	1.6409
1-1-1	0.6	[172]	0.8656	1.7561	2.9305	2.4023	0.8722	1.8071	2.9807	2.4535
		RFM	0.8672	1.7617	2.9590	2.4220	0.8737	1.8131	3.0085	2.4726
	5	[172]	0.6635	1.3462	2.2461	1.8414	0.6685	1.3857	2.2845	1.8806
		RFM	0.6647	1.3505	1.2680	1.8565	0.6697	1.3899	2.3059	1.8953
	20	[172]	0.5369	1.0948	1.8506	1.5109	0.5419	1.1331	1.8871	1.5485
		RFM	0.5376	1.0976	1.8660	1.5215	0.5426	1.1358	1.9022	1.5587
1-2-1	0.6	[172]	0.8326	1.6862	2.8005	2.2990	0.8384	1.7330	2.8462	2.3455
		RFM	0.8342	1.6919	2.8291	2.3189	0.8400	1.7385	2.8742	2.3649
	5	[172]	0.6274	1.2742	2.1318	1.7462	0.6323	1.3129	2.1693	1.7845
		RFM	0.6285	1.2781	2.1519	1.7601	0.6334	1.3167	2.3189	1.7980
	20	[172]	0.5195	1.0605	1.7969	1.4659	0.5246	1.0989	1.8335	1.5036
		RFM	0.5202	1.0631	1.8115	1.4759	0.5253	1.1014	1.8476	1.5132

Ці результати були отримані з використанням 28 допустимих функцій для апроксимації кожної з функцій u, v, ψ_x, ψ_y та 36 допустимих функцій для апроксимації відхилення w. Апроксимація невизначених компонент в структурних формулах була виконана за допомогою системи (4.45).

Таблиця 5.3. Порівняння параметра основної частоти квадратної сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонки параболічно-гиперболічного типу ($k_1 = 0.2$; $k_2 = -0.2$) з різним співвідношенням товщин шарів та різними граничними умовами

Схема	p	Метод	Тип оболонки 1-2				Схема	Тип оболонки 2-2			
			SFSF	SSSS	CCCC	SCSC		SFSF	SSSS	CCCC	SCSC
1-0-1	0.6	[172]	0.8997	1,7761	3.0634	2.5193	0-1-1	0.8059	1.5873	2.8180	2.3047
		RFM	0.9010	1.7809	3.0890	2.5366		0.8067	1.5901	2.8349	2.3160
	5	[172]	0.7281	1.4384	2.4389	2.0125		0.6516	1.2781	2.3107	1.8839
		RFM	0.7299	1.4431	2.4629	2.0290		0.6521	1.2796	2.3215	1.8910
	20	[172]	05775	1.1404	1.9597	1.6128		0.6283	1.2320	2.2298	1.8176
		RFM	0.5784	1.1436	1.9767	1.6243		0.6287	1.2335	2.2401	1.8243
1-2-1	0.6	[172]	0.8440	1.6656	2.8159	2.3250	1-2-1	0.6660	1.3082	2.3543	1.9207
		RFM	0.8455	1.6713	2.8443	2.3446		0.6665	1.3100	2.3660	1.9284
	5	[172]	0.6369	1.2575	2.1445	1.7675		0.6206	1.2225	2.1791	1.7797
		RFM	0.6379	1.2614	2.1645	1.7812		0.6211	1.2245	2.1914	1.7878
	20	[172]	0.5291	1.0445	1.8093	1.4867		0.6220	1.2273	2.1716	1.7755
		RFM	0.5298	1.0471	1.8237	1.4964		0.6226	1.2295	2.1850	1.7844

Завдяки симетричному характеру задачі чисельна реалізація розробленого програмного забезпечення інтегрування виконувалась тільки по однієї чверті області. Можна помітити, що представлені результати чудово узгоджуються з тими, що наведені в роботі [172].

5.3 Лінійні коливання сендвіч ФГМ пологих оболонок зі складною формою плану та різними граничними умовами

5.3.1 ФГМ сендвіч пологи оболонки з отвором складної форми

Як показує практика, однією із важливих проблем при досліджені ФГМ пластин і пологих оболонок є проблема аналізу елементів тонкостінних конструкцій, які мають отвори та вирізи довільної геометричної форми. Вирізи та отвори часто потрібні в елементах оболонки через практичну необхідність. Наприклад, щоб полегшити загальну структуру об'єкту, забезпечити доступ і з'єднати з іншими частинами, для вентиляції та з інших причин. Вирізи можуть бути як вільними, так і закріпленими і мати довільну форму. Роботи про коливання сендвіч ФГМ оболонок із закріпленими або вільно опертими вирізами практично відсутні. Однак на практиці такі способи закріплення зустрічаються досить часто. Щоб продемонструвати нові результати та проілюструвати універсальність та ефективність запропонованого методу, що базується на використання теорії R-функцій, а також розробленого комп'ютерного коду, розглянемо пологу оболонку з отвором складної геометричної форми, яка представлена на Рис. 5.3.

Припустимо, що оболонка закріплена на внутрішньої границі області. На зовнішній границі області вона може бути або закріплена, або вільно оперта, або мати змішані граничні умови, такі як описано та позначено в пункті 5.2: CCCC (5.23), SSSS (5.24), SFSF (5.25) і SCSC (5.26).

Зафіксуємо наступні геометричні параметри оболонки:

$$b/a = 1,\ k_1 = 2a/R_x = 0.2,\ k_2 = 2a/R_y = (0{,}0.2,-0.2),$$
$$r/2a = 0.125,\ R/2a = 0.25,\ h/2a = 0.1.$$

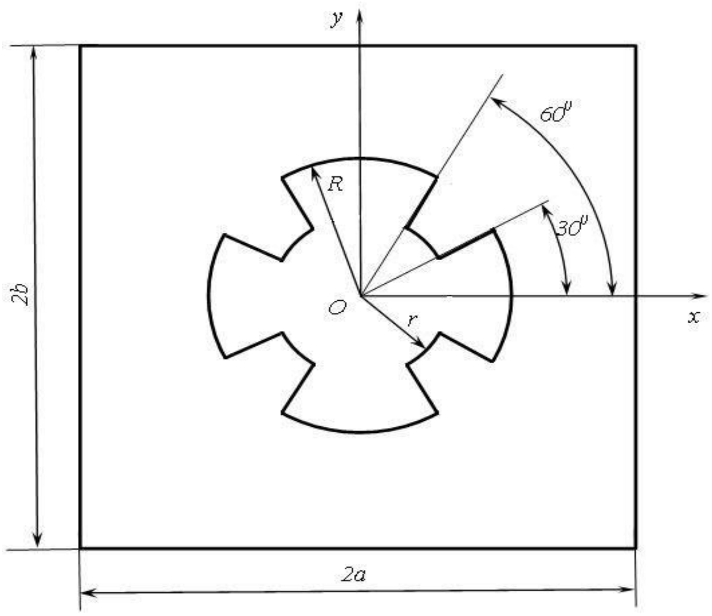


Рис. 5.3. Форма плану сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) пологої оболонки з отвором складного вигляду

Використовуючи R-операції, побудуємо рівняння границі області у такому вигляді:

$$\omega = \omega_{inside} \wedge_0 \omega_{outside}, \tag{5.39}$$

де функція ω_{inside} описує зовнішну частину отвору, та дорівнює нулеві на самому отворі. Її аналітичний вираз наведено нижче:

$$\omega_{inside} = \left(-\left(\left(\left(\left((f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 \left(\overline{f_1} \wedge_0 \overline{f_2}\right) \vee_0 \left((f_3 \wedge_0 f_4) \vee_0 \left(\overline{f_3} \wedge_0 \overline{f_4}\right) \right) \right) \vee_0 f_5 \right) \wedge_0 f_6 \right) \right) \right), \tag{5.40}$$

Функція $\omega_{outside}$ позитивна всередині квадрата і дорівнює нулю на його сторонах, тобто ця функція визначається як:

$$\omega_{outside} = f_7 \wedge_0 f_8. \tag{5.41}$$

Функції $f_i,\ i = 1, \ldots, 8$ задаються наступним чином:

$$f_1 = \left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}x\right) \geq 0, \quad f_2 = \left(-y + \frac{1}{\sqrt{3}}x\right) \geq 0, \quad f_3 = \left(y - \sqrt{3}x\right) \geq 0,$$

$$f_4 = \left(y + \sqrt{3}x\right) \geq 0, f_5 = (r_1^2 - x^2 - y^2) \geq 0, \quad f_6 = (r_2^2 - x^2 - y^2) \geq 0,$$

$$f_7 = (a^2 - x^2) \geq 0, \quad f_8 = (b^2 - y^2) \geq 0.$$

Структурні формули для розглянутих крайових умов можна записати загальною формулою, як

$$u = \omega^{(u)}\Phi_1,\ v = \omega^{(v)}\Phi_2,\ w = \omega^{(w)}\Phi_3,\ \ \psi_x = \omega^{(\psi_x)}\Phi_4,\ \psi_y = \omega^{(\psi_y)}\Phi_5 \tag{5.42}$$

Нижче записані вирази для функцій $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(w)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ для різних граничних умов на зовнішній частині границі області за умови жорстокого закріплення отвору оболонки. Позначення CCCC відповідають умовам, коли всі сторони квадрат жорстко закріплені; SSSS -зовнішній контур, тобто всі сторони квадрата вільно оперті, а отвір жорстко закріплений; SFSF-отвір жорстко закріплений, сторони квадрата, що паралельні осі *Oy* вільно оперті, дві інші, що паралельні осі *Ox* - вільні; SCSC- отвір та сторони квадрату, що паралельні осі *Ox* жорстко закріплені, сторони квадрата, які паралельні осі *Oy* вільно оперті. Тоді функції $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(w)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$, які використовуються в структурних формулах (5.42), будуються за допомогою теорії R-функцій і можуть бути обраними для різних крайових умов, у наступному вигляді:

CCCC: $\omega^{(u)} = \omega^{(v)} = \omega^{(w)} = \omega^{(\psi_x)} = \omega^{(\psi_y)} = \omega;$ (5.43)

SSSS: $\omega^{(w)} = \omega, \quad \omega^{(u)} = \omega^{(\psi_x)} = \omega_{inside} \wedge_0 f_8;$ (5.44)

SFSF: $\omega^{(w)} = \omega^{(v)} = \omega^{(\psi_y)} = \omega_{inside} \wedge_0 f_7, \quad \omega^{(u)} = \omega^{(\psi_x)} = \omega_{inside};$ (5.45)

SCSC: $\omega^{(w)} = \omega^{(v)} = \omega^{(\psi_y)} = \omega, \quad \omega^{(u)} = \omega^{(\psi_x)} = \omega_{inside} \wedge_0 = f_8.$ (5.46)

У Таблиці 5.4 представлені параметри основної частоти $\Omega_L^{(1)} = \lambda_1 (2a)^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ для циліндричних, сферичних і у формі гіперболічного параболоїду ФГМ (Al/Al_2O_3) пологих оболонок Типу ламінації 2-2 і двох схем розподілення товщини шарів (2-1-2) і (2-2-1).

Таблиця 5.4. Основні частотні параметри для сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) пологих оболонок Типу 2-2 із закріпленим отвором і вільно опертим або закріпленим зовнішнім контуром області (Рис. 5.3)

Схема	p	k_1=0.2, k_2=0		k_1=0.2, k_2= 0.2		k_1=0.2, k_2= -0.2	
		SSSS	CCCC	SSSS	CCCC	SSSS	CCCC
2-1-2	0.1	24.104	31.497	24.104	31.539	24.127	31.528
	0.5	23.662	30.905	23.659	30.945	23.688	30.936
	1	23.362	30.499	23.357	30.537	23.390	30.531
	5	22.846	29.770	22.836	29.805	22.877	29.802
	10	22.760	29.636	22.749	29.670	22.792	29.668
	20	22.718	29.567	22.706	29.635	22.750	29.599
2-2-1	0.1	24.027	31.373	24.026	31.415	24.051	31.404
	0.5	23.375	30.433	23.369	30.470	23.403	30.464
	1	22.946	29.785	22.934	29.818	22.975	29.816
	5	22.242	28.571	22.222	28.598	22.273	28.600
	10	22.099	28.286	22.078	28.313	22.129	28.314
	20	22.007	28.106	21.985	28.132	22.036	28.133

Зауважимо, що для розглянутих оболонок із загальною товщиною *h/2a*=0,1 параметри основних частот близькі для циліндричних, сферичних і гіперболічно параболоїдного типу оболонок. Якщо оболонка закріплена на всій границі (СССС), то найбільшу частоту має сферична оболонка, а найменшу – циліндрична панель.

Однак, якщо оболонка вільно оперта на її зовнішній границі, а її отвір закріплюється, то ця закономірність порушується для даного співвідношення товщини шарів. Найбільшу частоту має оболонка гіперболічно параболоїдного типу, а частоти сферичних панелей менші, ніж відповідні частоти циліндричних панелей. Цей приклад показує вплив граничних умов для різних схем товщини. Це означає, що кожен випадок вимагає індивідуального аналізу.

Вплив індексу градієнта $p = p_1 = p_2 = p_3$ на параметр основної частоти $\Omega_L^{(1)} = \lambda_1 (2a)^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ для циліндричних, сферичних і гіперболічно параболоїдних оболонок з Типом ламінації 1-2 та 2-2 з різними граничними умовами показано на Рис. 5.4, 5.5, 5.6. Для розглянутих сендвіч ФГМ пологих оболонок прийняті різні схеми розподілення товщини шарів. Отримані результати для циліндричних ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонок зі схемою товщин (1-2-1) представлені на Рис. 5.4.

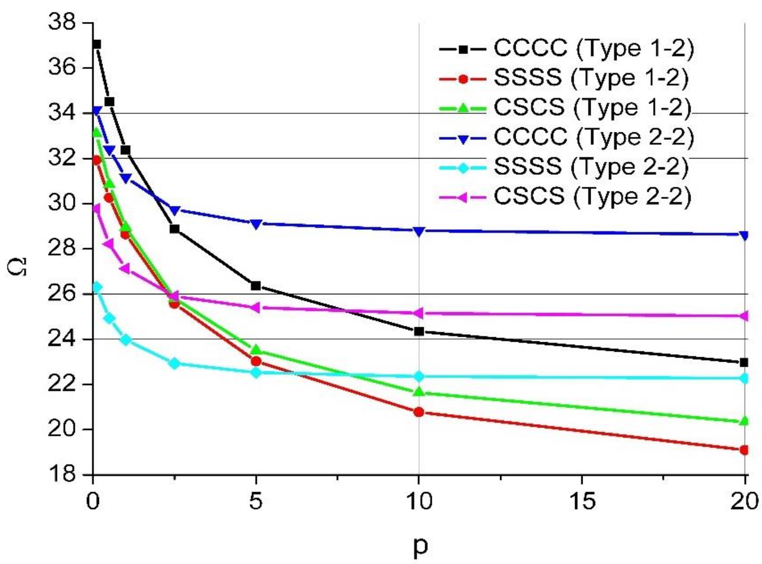


Рис. 5.4. Залежність параметра основної частоти *циліндричних* сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонок (Типу 1-2 та 2-2) від індексу градієнта p та різних граничних умов (схема товщин 1-2-1)

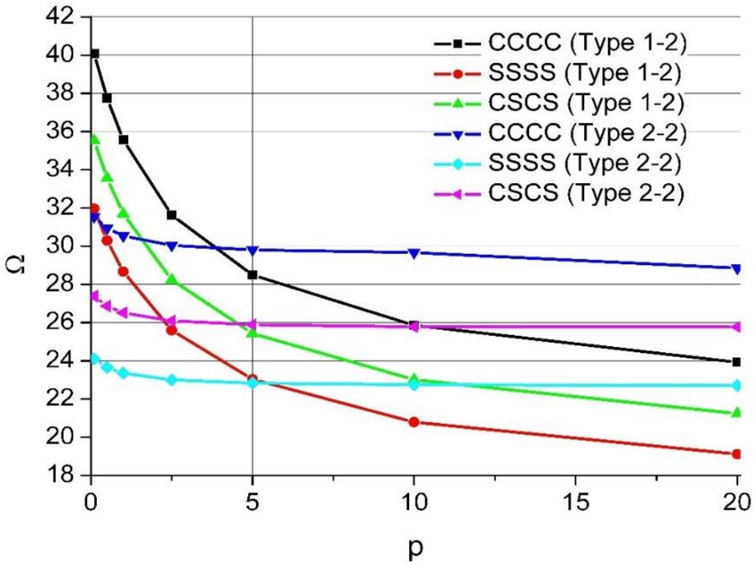


Рис. 5.5. Залежність параметра основної частоти *сферичних* сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонок (Типу 1-2 та 2-2) від індексу градієнта p та різних граничних умов (схема товщин 2-1-2)

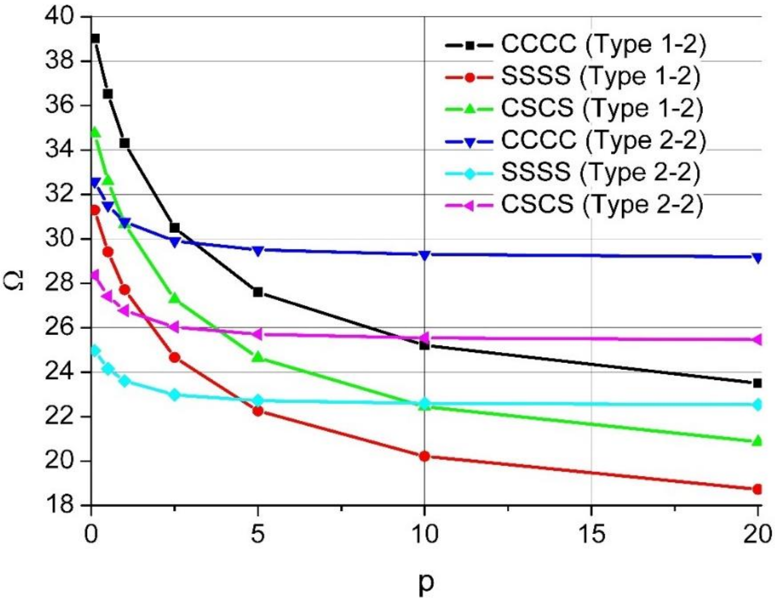
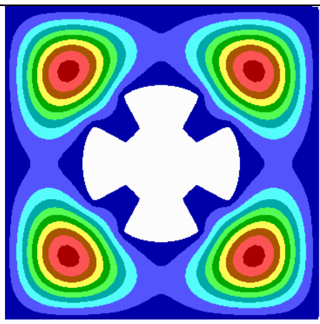
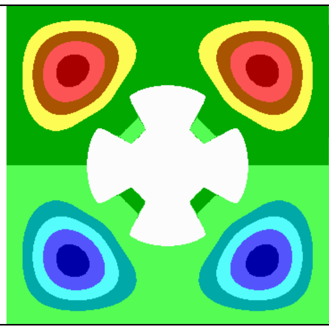
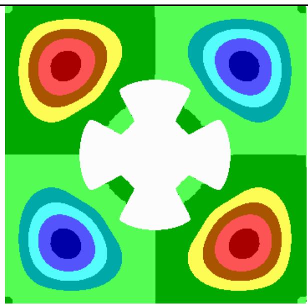
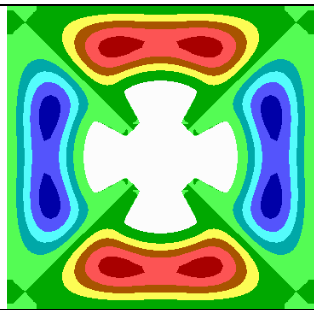
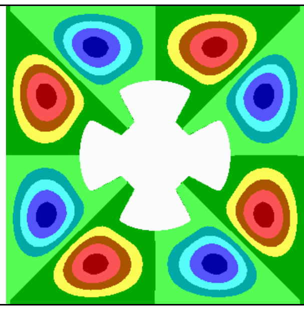


Рис. 5.6. Залежність параметра основної частоти *гіперболічно параболоїдних* сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) оболонок (Типу 1-2 та 2-2) від індексу градієнта p та різних граничних умов (схема товщин 1-1-1)

Вплив типів ламінації і показників степеневого закону на частотний параметр сферичних сендвіч ФГМ (Al/Al_2O_3) пологих оболонок зі схемою розподілення товщини шарів (2-1-2) представлено на Рис. 5.5. Подібні результати для гіперболічно-параболоїдних ФГМ (Al/Al_2O_3) пологих оболонок зі схемою товщин (1-1-1) показані на Рис. 5.6.

Як випливає з Рис. 5.4-5.6, значення параметрів основної частоти істотно залежить від типу матеріалу, схем розподілення товщин шарів і граничних умов. Очевидно, параметри основних частот для всіх розглянутих випадків зменшуються зі збільшенням показника p степеневого закону. Для сендвіч ФГМ пологих оболонок з Типом ламінації 1-2 зниження істотніше, ніж для оболонок Типу 2-2.

Таблиця 5.5. Форми коливань жорстко закріпленої сферичної ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) оболонки (Рис. 5.3)

	
$\Omega_L = 15.836$	$\Omega_L = 15.870$
	
$\Omega_L = 15.926$	$\Omega_L = 22.939$
	
$\Omega_L = 23.743$	$\Omega_L = 25.782$

У Таблиці 5.5 наведені шість форм коливань ФГМ жорстко закріпленої сферичної оболонки, виготовленої з суміші $Si_3N_4/SUS304$, яка має план-форму Рис. 5.3.

5.3.2 Аналіз лінійних коливань ФГМ сендвіч пологих оболонок з вирізами

Розглянемо сендвіч ФГМ пологу оболонку з формою плану, зображеною на Рис. 5.7. Припустимо, що в серединному шарі оболонка повністю керамічна, а нижній і верхній шари виготовлені з декількох видів функціонально-градієнтних матеріалів.

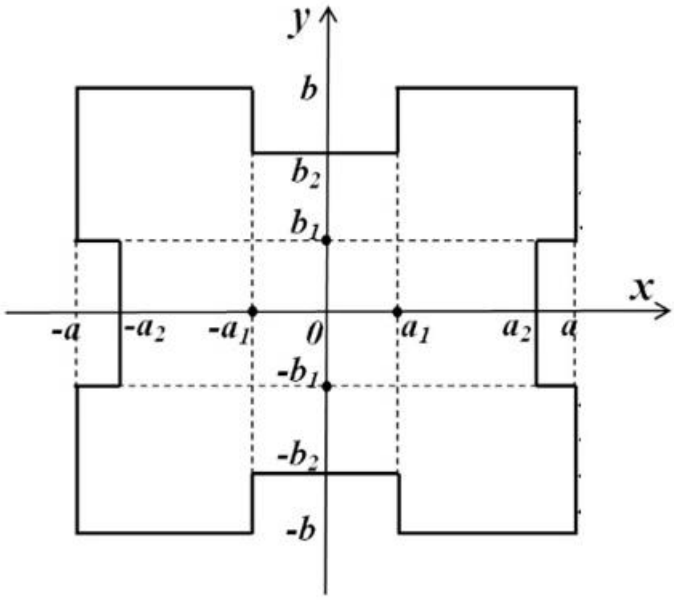


Рис. 5.7. Форма плану сендвіч ФГМ оболонки складної геометрії

Геометричні параметри цієї оболонки є наступними:

$$k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0.2, \quad k_2 = \frac{2a}{R_y} = (0;\ 0.2;\ -0.2), \ \frac{b}{a} = 1;$$

$$a_1/2a = 0.2; \quad b_1/2a = 0.125; \quad h/2a = 0.1; \ a_2/2a = 0.4; \quad b_2/2a = 0.4.$$

Розглядаються три сплава функціонально-градієнтних матеріалів, які позначаються як M1, M2 та M3:

$$\textbf{M1:}\ Al_2O_3/Al, \qquad \textbf{M2:}\ Si_3N_4/SUS304, \qquad \textbf{M3:}\ ZrO_3/Al. \qquad (5.47)$$

Їхні механічні характеристики наведено у Таблиці 4.1 у Розділі 4.

Розв’язок задачі будемо виконувати в рамках FSDT. Розглянемо два типи граничних умов: оболонка жорстко закріплена по всьому контуру (CL) та вільна оперта на всій границі (SS). Нагадаємо, що у випадку оболонки вільно опертої вздовж всього контуру, головні крайові умови визначаються наступним чином: функція прогину повинна дорівнювати нулю на всій границі області, функції u,

ψ_x повинні дорівнювати нулю на частинах границі, що обмежені сегментами прямих, паралельних осі Ox, а функції v, ψ_y повинні дорівнювати нулю на частинах границі, що обмежені сегментами прямих, паралельних осі Oy. У даному випадку це ускладнює побудову структур розв'язку для різних методів, але якщо використовувати теорію R-функцій, то ця проблема розв'язується на аналітичному рівні. Дійсно, якщо скористатися загальною формулою (5.44) для структури розв'язку даної задачі, то необхідно тільки побудувати вирази для функцій $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(w)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$, які залежать від типу граничних умов і безумовно, від форми границі області. Перш за все побудуємо рівняння всієї границі області:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 w_{cut} \tag{5.48}$$

де

$$w_{cut} = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_5 \vee_0 f_6). \tag{5.49}$$

Для жорстко закріпленої оболонки функція ω визначається формулою (5.48). Для вільно опертої оболонки вирази для функцій $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ є більш складними. Побудуємо їх, використовуючи теорію R-функцій:

$$\omega^{(\psi_x)} = (w_{cut} \wedge_0 f_2) \vee_0 (f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}) \vee_0 (f_{11} \vee_0 f_{12}), \tag{5.50}$$

$$\omega^{(\psi_y)} = (w_{cut} \wedge_0 f_2) \vee_0 (f_{13} \vee_0 f_{14}) \vee_0 (f_{15} \vee_0 f_{16}) \vee_0 (f_{17} \vee_0 f_{18}). \tag{5.51}$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}18}$ визначаються такими нерівностями:

$$f_1 = (a^2 - x^2)/2a \ge 0, \quad f_2 = (b^2 - y^2)/2b \ge 0, \quad f_3 = (x^2 - a_1^2)/2a_1 \ge 0,$$

$$f_4 = (b_2^2 - y^2)/2b_2 \ge 0, \quad f_5 = (y^2 - b_1^2)/2b_1 \ge 0, \quad f_6 = (a_2^2 - x^2)/2a_2 \ge 0,$$

$$f_7 = (b_1^2 - (x - a_2)^2 - y^2)/2b_1 \ge 0, \quad f_8 = (b_1^2 - (x + a_2)^2 - y^2)/2b_1 \ge 0,$$

$$f_9 = (r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y - r_1)^2)/2r_2 \ge 0, \quad f_{10} = (r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y - r_1)^2)/2r_2 \ge 0,$$

$$f_{11} = (r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y + r_1)^2)/2r_2 \ge 0, \quad f_{12} = (r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y + r_1)^2)/2r_2 \ge 0,$$

$$f_{13} = (a_1^2 - x^2 - (y - b_2)^2)/2a_1 \ge 0, \qquad f_{14} = (a_1^2 - x^2 - (y + b_2)^2)/2a_1 \ge 0,$$

$$f_{15} = (r_4^2 - (x - r_3)^2 - (y - b_1)^2)/2r_4 \ge 0, \quad f_{16} = (r_4^2 - (x - r_3)^2 - (y + b_1)^2)/2r_4 \ge 0,$$

$$f_{17} = (r_4^2 - (x + r_3)^2 - (y - b_1)^2)/2r_4 \geq 0, \quad f_{18} = (r_4^2 - (x + r_3)^2 - (y + b_1)^2)/2r_4 \geq 0,$$

де

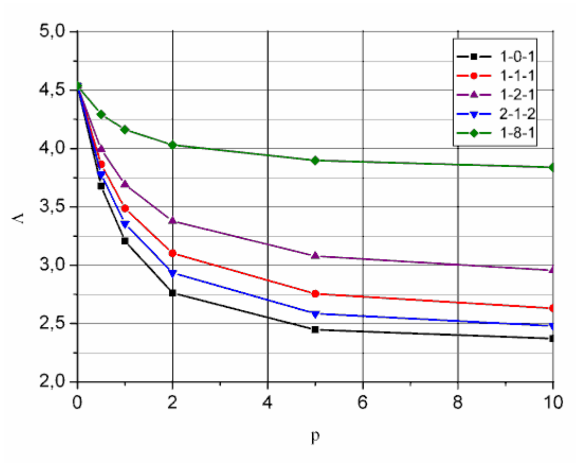
$$r_1 = (b + b_2)/2; \quad r_2 = (b - b_2)/2; \quad r_3 = (a + a_2)/2; \quad r_4 = (a - a_2)/2.$$

Таким чином, структури розв’язків для жорстко закріпленої оболонки мають вид (5.42), а для вільно опертої (5.44), якщо функції $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ визначаються формулами (5.50-5.51).

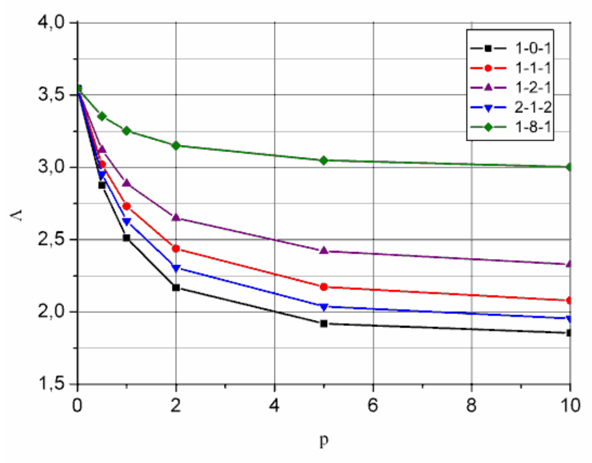
Невизначені компоненти $\Phi_i, i = 1,2,3,4,5$ будемо апроксимувати степеневими поліномами з урахуванням симетрії задачі, тобто ці поліноми обираються у вигляді (4.45).

Було досліджено вплив показника p степеня об’ємної долі кераміки і різних схем розподілення товщин шарів на параметри основної частоти $\Lambda = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ циліндричних сендвіч пологих оболонок, виготовлених з різних функціонально-градієнтних матеріалів (M1, M2, M3). Результати цих досліджень для закріплених (CL_M1, CL_M2, CL_M3) і вільно опертих (SS_M1, SS_M2, SS_M3) циліндричних оболонок наведено на Рис. 5.8(а-е).

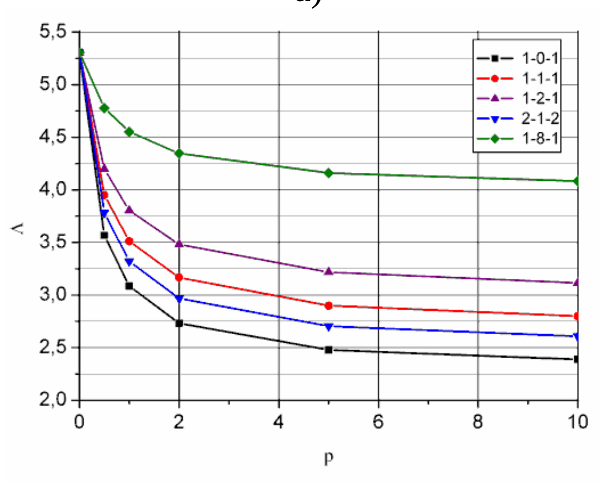
Для всіх розглянутих випадків частоти зменшуються зі збільшенням градієнтного індексу p і залежать від типів матеріалів і схем товщини. Виявлено, що значення параметра власної частоти найбільше для оболонок з матеріалу M2 для обох типів граничних умов. Збільшення товщини керамічної серцевини призводить до значного збільшення параметра основної частоти сендвіч пологої оболонки.



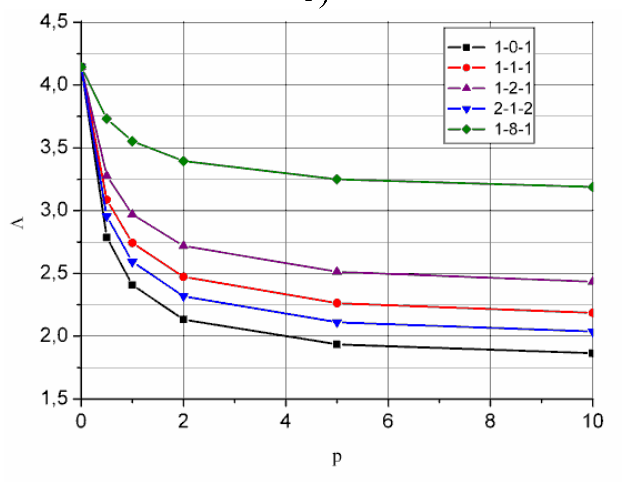
а)



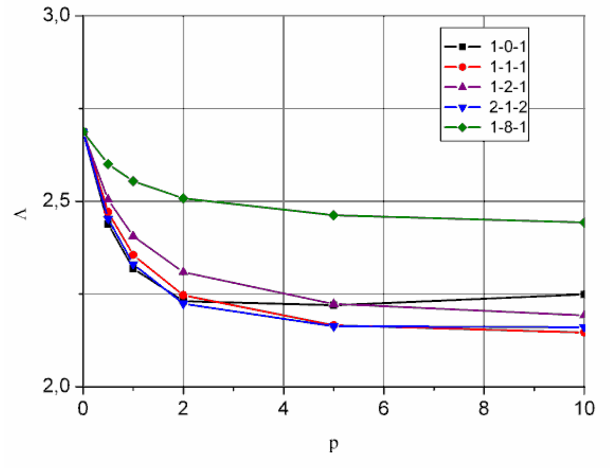
б)



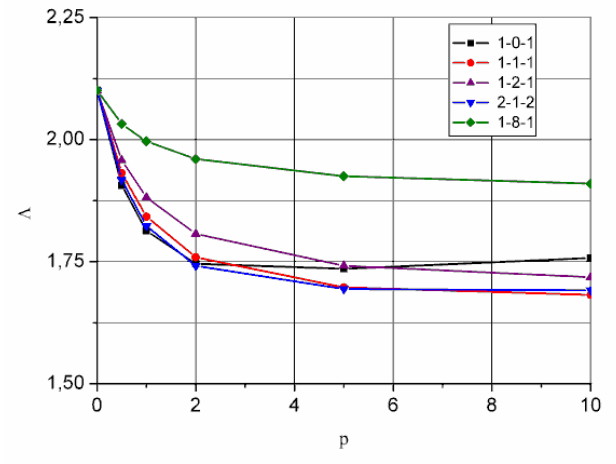
в)



г)



д)



е)

Рис. 5.8. Вплив степеневого показника *p* і різних схем товщин на параметри основної частоти циліндричної сендвіч ФГМ пологої оболонки: а) суміш М1, спосіб закріплення CL; б) суміш М1, спосіб закріплення SS; в) суміш М2, спосіб закріплення CL; г) суміш М2, спосіб закріплення SS; д) суміш М3, спосіб закріплення CL; е) суміш М3, спосіб закріплення SS

Таблиця 5.6 демонструє влив на значення частотного параметра $\Lambda = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ для розподілу товщини шарів (1-8-1) значень кривини та градієнтного індексу. Розглядаються різні значення кривини: $k_1 = 0.2,\quad k_2 = (0;\ 0.2;\ -0.2)$.

Таблиця 5.6. Основні власні частоти $\Lambda = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ для сендвіч ФГМ пологих оболонок складної форми в плані (Рис. 5.7, *2a/h*=10) різної кривини з співвідношенням товщин шарів (1-8-1)

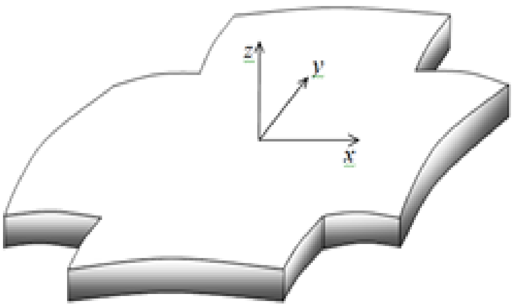
Матеріал	Гран. умови	*2a/R$_x$*	*2a/R$_y$*	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
M1	CL	0.2	0	4.5375	4.2919	4.1625	4.0303	3.8979	3.8388
		0.2	0.2	4.5872	4.3424	4.2136	4,0819	3.9500	3.8913
		0.2	-0.2	4.5556	4.3103	4. 1811	4.0492	3.9169	3.8580
	SS	0.2	0	3.5467	3.3539	3.2531	3.1506	3.0484	3.0030
		0.2	0.2	3.5926	3.4008	3.3057	3.1986	3.0970	3.0518
		0.2	-0.2	3.5571	3.3647	3.2640	3.1616	3.0596	3.0143
M2	CL	0.2	0	5.3059	4.7778	4.5516	4.346	4.1610	4.0826
		0.2	0.2	5.3653	4.8926	4.6048	4.3983	4.2110	4.1320
		0.2	-0.2	5.3261	4.7964	4.5698	4.3643	4.1781	4.0995
	SS	0.2	0	4.1449	3.7310	3.5542	3.3940	3.2489	3.1877
		0.2	0.2	4.1991	3.7814	3.6029	3.4412	3.2947	3.2329
		0.2	-0.2	4.1565	3.7419	3.5647	3.4042	3.2588	3.1975
M3	CL	0.2	0	2.6877	2.6004	2.5546	2.5083	2.4627	2.4428
		0.2	0.2	2.7172	2.6305	2.5852	2.5392	2.4940	2.4743
		0.2	-0.2	2.6985	2.6114	2.5657	2.5196	2.4742	2.4543
	SS	0.2	0	2.1008	2.0321	1.9964	1.9604	1.9251	1.9097
		0.2	0.2	2.1281	2.0600	2.0247	1.9891	1.9542	1.9390
		0.2	-0.2	2.1071	2.0385	2.0029	1.9669	1.9318	1.9165

З Таблиці 5.6 випливає, що значення власних частот для циліндричної, сферичної та гіперболічно параболоїдної оболонок, виготовлених із однакового матеріалу для закріплень типу CC та SS, близькі між собою для наведених кривин. Для розглянутих видів ФГМ (сумішей M1, M2, M3) найменше значення мають циліндричні оболонки, а найбільше значення – сферичні. При цьому, значення частот для суміші М3 суттєво менші, ніж для матеріалів М1, М2.

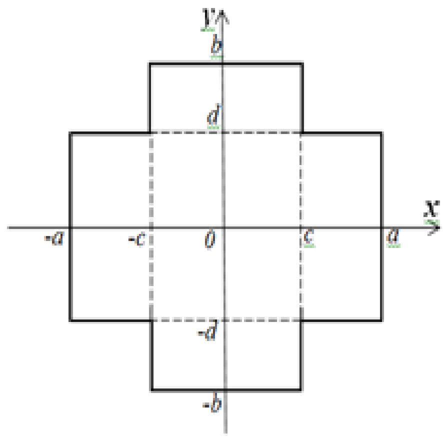
Як видно з Рис. 5.8(а-е) та Таблиці 5.6, при такому співвідношенні товщин шарів оболонки (1-8-1) ми маємо суттєво більші значення власних частот для всіх типів матеріалів, що, безумовно, пояснюється збільшенням долі кераміки, а відповідно, і жорсткості оболонки.

5.3.3 Лінійні коливання прямокутних сендвіч ФГМ пологих оболонок з прямокутними виступами вздовж усіх сторін

Розглянемо сендвіч ФГМ пологу оболонку з формою плану на Рис. 5.9.



а)



б)

Рис. 5.9. Сендвіч ФГМ полога оболонка з прямокутними вирізами (а) з відповідною формою плану (б)

Геометричні параметри для цієї оболонки є наступними:

$$k_1 = 2a/R_x = 0.2,\ k_2 = 2a/R_y = (0;\ 0.2;\ -0.2),$$

$$b/a = 1,\ a_1/2a = 0.25,\ b_1/2a = 0.35,\ h/2a = 0.1.$$

Оболонка виготовлена з функціонально-градієнтного матеріалу Al_2O_3/Al, характеристики якого наведені в Розділі 4 у Таблиці 4.1.

Розглянемо два типи закріплення: жорстке закріплення та вільне опирання. Структури розв’язку для даних крайових умов визначаються загальними формулами (5.42).

Функції $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(w)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ будуються за допомогою теорії R-функцій таким чином, що вони дорівнюють нулю на тих частинах границі області, де функції $u,\ v,\ w,\ \psi_x,\ \psi_y$ повинні дорівнювати нулю. Для закріпленого краю оболонки ці функції мають вигляд (5.43):

$$\omega^{(u)} = \omega^{(v)} = \omega^{(w)} = \omega^{(\psi_x)} = \omega^{(\psi_y)} = \omega.$$

У даному випадку рівняння границі всієї області $\omega(x, y) = 0$ визначається функцією:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4) \tag{5.52}$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1,4}$ у формулі (5.52) задаються у вигляді таких нерівностей:

$$f_1 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0, \quad f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0$$

$$f_3 = \left(c^2 - x^2\right)/2c \geq 0, \quad f_4 = (d^2 - y^2)/2d \geq 0.$$

Запишемо вирази для функцій $\omega^{(u)},\ \omega^{(v)},\ \omega^{(w)},\ \omega^{(\psi_x)},\ \omega^{(\psi_y)}$ для випадку вільно опертої оболонки, тобто ці функції повинні бути задовільними наступній умові:

$$\omega^{(w)} = \omega.$$

Функції $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$ повинні дорівнювати нулю на сегментах області, які паралельні вісі *Ox,* одже їх можна побудувати у вигляді:

$$\omega^{(u)} = \omega^{(\psi_x)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6) \vee_0 (f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 f_2.$$

Функції $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ повинні дорівнювати нулю на сегментах області, які паралельні вісі *Oy,* одже їх можна побудувати у вигляді:

$$\omega^{(v)} = \omega^{(\psi_y)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}) \vee_0 (f_{11} \vee_0 f_{12}) \vee_0 f_1,$$

де

$$f_5 = \left(r_1^2 - (x - c)^2 - \left(y - (b - r_1)\right)^2\right)/2r_1 \geq 0,$$

$$f_6 = \left(r_1^2 - (x + c)^2 - \left(y - (b - r_1)\right)^2\right)/2r_1 \geq 0,$$

$$f_7 = \left(r_1^2 - (x - c)^2 - \left(y + (b - r_1)\right)^2\right)/2r_1 \geq 0,$$

$$f_8 = \left(r_1^2 - (x + c)^2 - \left(y + (b - r_1)\right)^2\right)/2r_1 \geq 0,$$

$$f_9 = \left(r_2^2 - \left(x - (a - r_2)\right)^2 - (y - d)^2\right)/2r_2 \geq 0,$$

$$f_{10} = \left(r_2^2 - \left(x + (a - r_2)\right)^2 - (y - d)^2\right)/2r_2 \geq 0,$$

$$f_{11} = \left(r_2^2 - \left(x - (a - r_2)\right)^2 - (y + d)^2\right)/2r_2 \geq 0,$$

$$f_{12} = \left(r_2^2 - \left(x + (a - r_2)\right)^2 - (y + d)^2\right)/2r_2 \geq 0,$$

$$r_1 = (b - d)/2, \quad r_2 = (a - c)/2.$$

Проаналізуємо значення параметрів основної частоти $\Omega_L^{(1)} = \lambda_1 a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}/h$ для закріплених (Таблиця 5.7) і вільно опертих (Таблиця 5.8) пластин і циліндричних, сферичних і гіперболічно параболоїдальних оболонок, які виготовлені з функціонально-градієнтного матеріалу Al_2O_3/Al. Розглянемо різні Типи ламінації оболонок (1-1; 1-2; 2-2) і різни схеми розподілення товщини шарів. Показники градієнтного індексу p для всіх шарів приймаються однаковими $p_1 = p_2 = p_3 = p, p = 1$.

Таблиця 5.7. Основні частотні параметри для сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологої оболонки (Рис. 5.9) жорстко закріпленої на всій границі

Тип ламінації	Кривина оболонки	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
1-1	Пластина	8.426	8.761	9.019	9.289	10.54
	Цил.	8.563	8.901	9.157	9.430	10.67
	Сфер.	8.768	9.109	9.364	9.640	10.88
	Параб.	8.627	8.967	9.223	9.495	10.73
1-2	Пластина	10.52	10.24	9.867	9.741	8.106
	Цил.	10.62	10.33	9.953	9.820	8.174
	Сфер.	10.75	10.46	10.08	9.939	8.277
	Параб.	10.66	10.37	9.990	9.856	8.206
2-2	Пластина	8.022	8.109	7.959	8.268	8.654
	Цил.	8.147	8.233	8.070	8.390	8.771
	Сфер.	8.335	8.419	8.239	8.573	8.947
	Параб.	8.213	8.298	8.131	8.454	8.832

Зауважимо, що параметри основних частот мають найбільше значення для сферичних оболонок і найменше для пластин. Ці значення істотно залежать від Типу ламінації оболонки і схеми розподілення товщини шарів. Поведінка оболонок Типу 1-1 і Типу 2-2 подібна, а значення параметра частот приймає максимальне значення для схеми розподілення товщини 1-8-1.

Таблиця 5.8. Основні частотні параметри для сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологої оболонки (Рис. 5.9) вільно опертою на всій границі

Тип ламінації	Кривина оболонки	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
1-1	Пластина	6.805	7.071	7.273	7.487	8.464
	Цил.	6.895	7.163	7.363	7.579	8.553
	Сфер.	7.098	7.370	7.568	7.788	8.757
	Параб.	6.926	7.194	7.395	7.611	8.583
1-2	Пластина	8.415	8.192	7.886	7.786	6.479
	Цил.	8.471	8.244	7.942	7.834	6.521
	Сфер.	8.606	8.371	8.071	7.951	6.623
	Параб.	8.490	8.262	7.957	7.850	6.535
2-2	Пластина	6.479	6.545	6.411	6.667	6.972
	Цил.	6.556	6.621	6.479	6.742	6.742
	Сфер.	6.741	6.805	6.644	6.922	7.208
	Параб.	6.593	6.658	6.513	6.777	7.067

Для пластин і пологих оболонок з Типом ламінації 1-2 максимальне значення параметра частоти досягається для схеми 2-1-2, а мінімальне значення частоти спостерігається для схеми товщини 1-8-1. Це можна пояснити тим, що для структур Типу 1-2 зовнішні шари є з ФГМ, а заповнювач є металевим.

Вплив показника степеневого закону p на параметр основної частоти $\Omega_L^{(1)} = \lambda_1 a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}/h$ для закріпленої циліндричної (k_1=0.2; k_2=0) сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологої оболонки Типу ламінації 1-2 та різних схем розподілення товщини шарів показано на Рис. 5.10. Крива 1-8-1* відповідає циліндричній оболонці з кривинами k_1=0.5; k_2=0. З Рис. 5.10 видно, що при збільшенні кривини значення частот збільшуються, що відповідає фізичному змісту задачі.

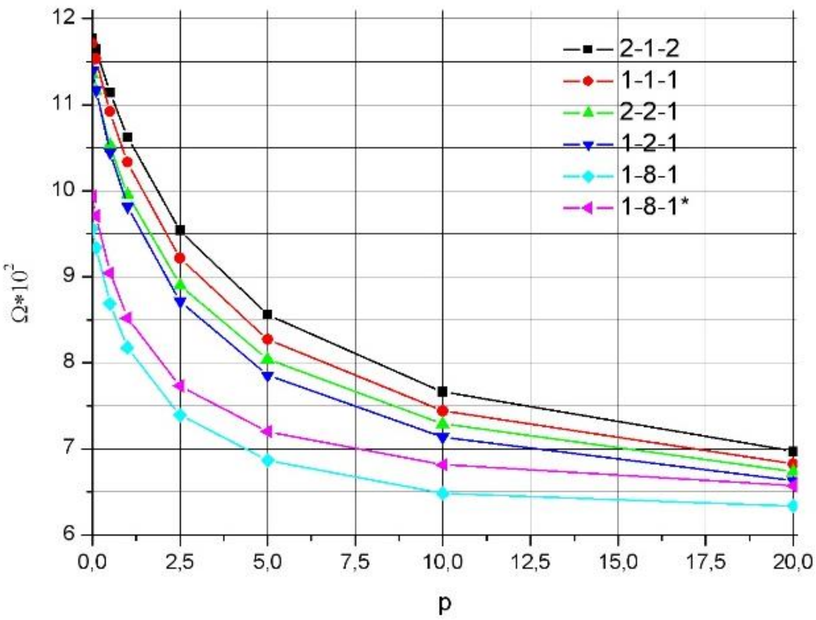


Рис. 5.10. Вплив степеневого закону на основні частотні параметри закріплених циліндричних сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) оболонок з Типом ламінації 1-2 з різною схемою розподілення товщини

Зараз зафіксуємо схему товщини 1-2-1 і проаналізуємо вплив граничних умов на поведінку безрозмірних частотних параметрів $\Omega_L^{(1)}$ сферичної сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) оболонки складної геометрії (Рис. 5.9). Результати показано на Рис. 5.11.

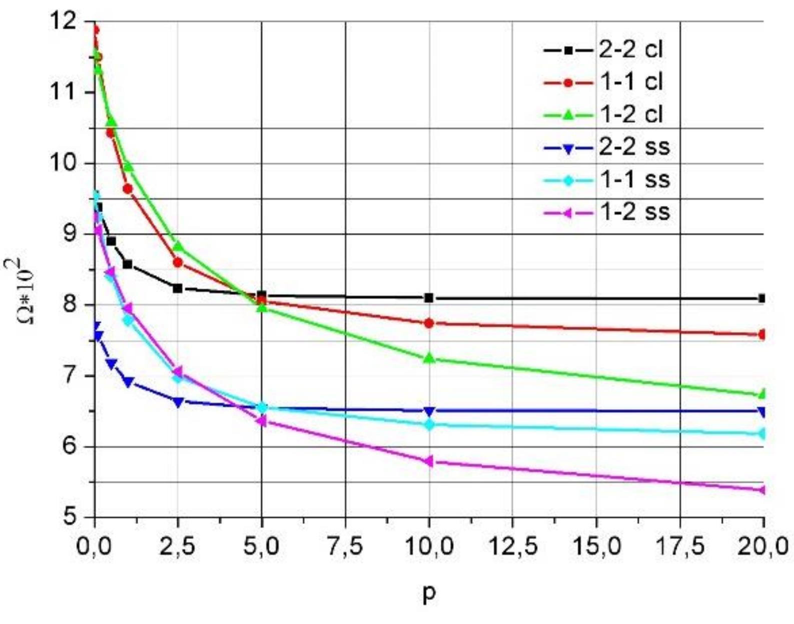


Рис. 5.11. Вплив на частотні параметри закріпленої (CL) і вільно опертої (SS) сферичної сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологої оболонки різних типів з однаковою схемою товщин 1-2-1

Як випливає з Рис. 5.11, значення параметрів основної частоти суттєво залежить від Типу ламінації оболонки та граничних умов. Очевидно, параметри основних частот для всіх розглянутих випадків зменшуються зі збільшенням показника степеневого закону. Однак для пологих оболонок з Типами ламінації 1-1 та 1-2 зниження більш істотне, ніж для оболонок з Типом ламінації 2-2.

5.4 Аналіз нелінійних коливань сендвіч ФГМ пологих оболонок

5.4.1 Нелінійні коливання ФГМ пологих оболонок двоякої кривини з квадратною формою плану

Розглянемо вільно оперту сферичну оболонку, вироблену з ФГМ Al_2O_3/Al. Обрано різні Типи ламінації оболонки, а саме 1-1, 1-2, 2-2. Відношення товщин шарів зафіксовано як 1-8-1. На Рис. 5.12 зображено скелетні криві для оболонок, що досліджуються. Показник градієнтного індекса для всіх шарів приймається однаковим $p = 1$.

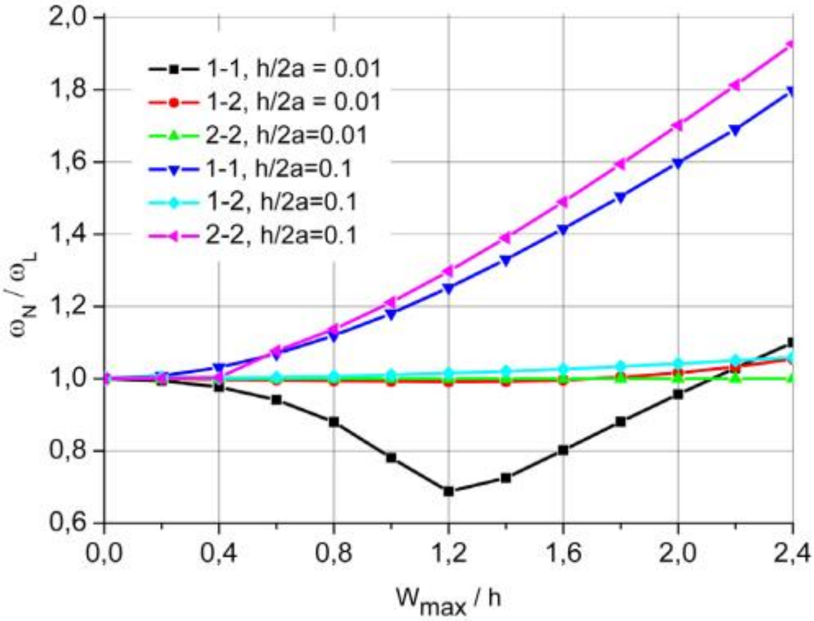


Рис. 5.12. Вплив амплітуди на частоту для різних товщин вільно опертої сферичної сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологої оболонки (1−8−1, p = 1)

Зауважимо, що основні криві якісної поведінки для оболонок Типу 1-1 аналогічні попередньому випадку. Немає відмінностей між відношеннями нелінійних частот до лінійних для оболонок Типу 1-2 як для значень відношення $h/2a$=0.01; 0.1, так і для амплітуди W_{max}/h менше 2.5. Однак для оболонок Типу 2-2 поведінка скелетних кривих істотно залежить від товщини.

Якщо відношення $h/2a$ дорівнює 0.01, то відношення нелінійних і лінійних частот залишається постійним при збільшенні відношення амплітуд W_{max}/h. Якщо відношення $h/2a$ дорівнює 0.1, то скелетна крива має поведінку жорсткого характеру. Таким чином, можна зробити висновок, що поведінка скелетних кривих багатошарових ФГМ пологих оболонок залежить від багатьох факторів: товщини, кривини, типу матеріалу заповнювача, співвідношення товщин шарів, граничних умов, геометрії плану та фізичних властивостей складових матеріалів. Це означає, що в кожному конкретному випадку необхідно проводити комп'ютерний експеримент.

5.4.2 Нелінійні коливання сендвіч ФГМ пологої оболонки з прямокутними виступами

Проведемо дослідження нелінійних коливань сендвіч прямокутних ФГМ пологих оболонок з прямокутними виступами (Рис. 5.9). Лінійні коливання цієї оболонки, власні форми та частоти було розглянуто в п.п. 5.3.3. Знайдемо залежність між максимальним прогином і відношенням нелінійної частоти до лінійної для оболонок різного Типу ламінації і фіксованої товщини за схемою 1-8-1 і для фіксованих значень показника степеня p. На Рис. 5.13 і Рис. 5.14 зображено скелетні криві для жорстко закріплених циліндричних (Рис. 5.13) і сферичних (Рис. 5.14) пологих оболонок Типів ламінації 1-1; 1-2; 2-2.

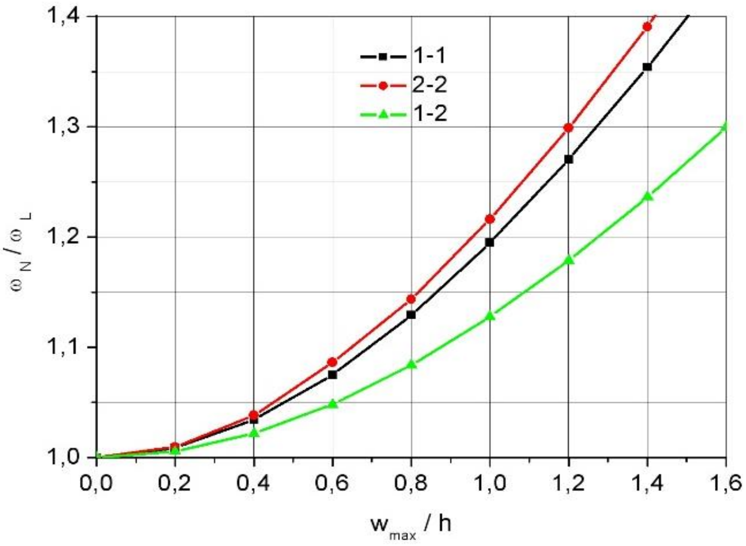


Рис. 5.13. Скелетні криві для жорстко закріплених *циліндричних* сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологих оболонок (Рис. 5.9, 1-8-1, *p*=0.5)

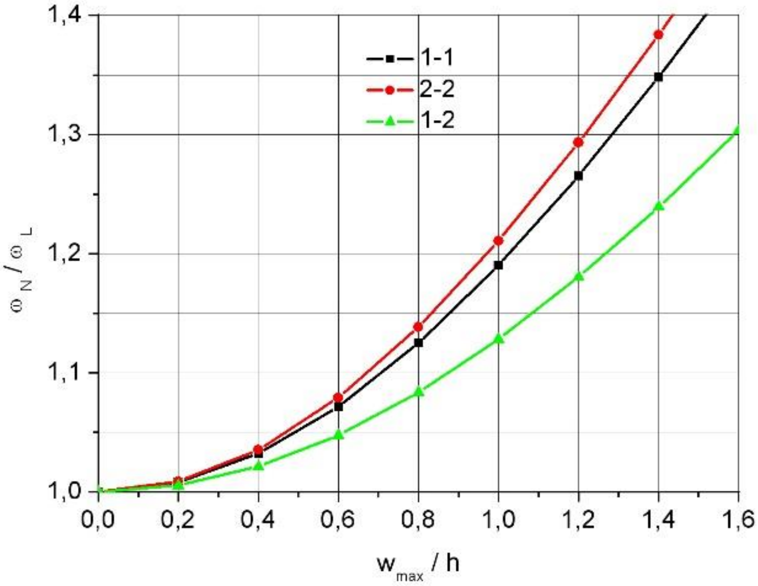


Рис. 5.14. Скелетні криві для жорстко закріплених *сферичних* сендвіч ФГМ (Al_2O_3/Al) пологих оболонок (Рис. 5.9, 1-8-1, *p*=0.5)

Зауважимо, що результати, представлені на Рис. 5.13-5.14 для циліндричних та сферичних оболонок, подібні і досить близькі. Скелетні криві мають жорсткий характер. Провівши чисельний експеримент, було встановлено, що скелетні криві для вільно опертих циліндричних та сферичних оболонок також близькі між собою.

Щоб продемонструвати різницю між поведінкою нелінійних частот для циліндричних і сферичних оболонок, наведемо залежність нелінійних частот від максимальної амплітуди коливань. На Рис. 5.15 показана ця залежність для вільно опертих ФГМ (Al_2O_3/Al) пологих оболонок різних Типів ламінації.

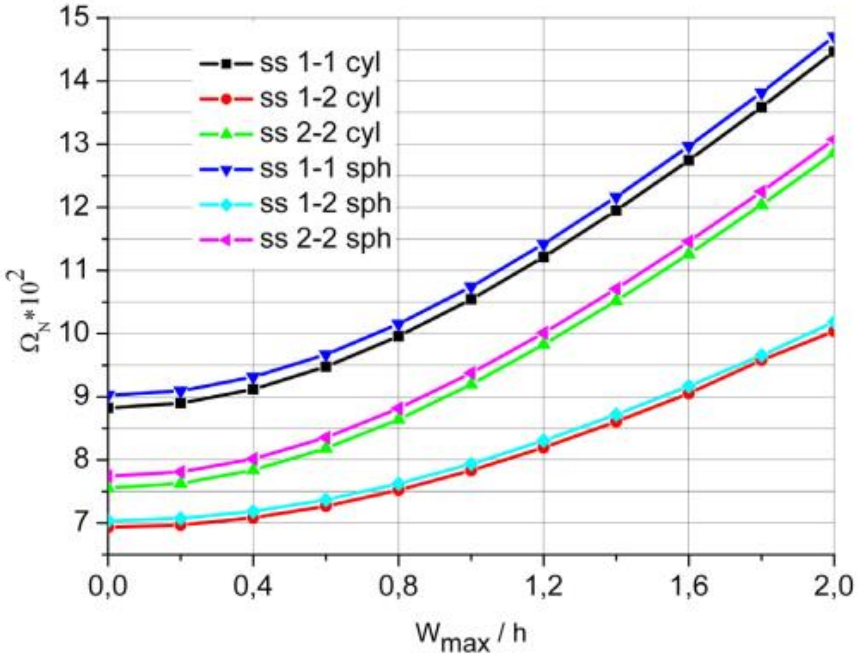


Рис. 5.15. Нелінійні частоти для вільно опертих циліндричних і сферичних ФГМ (Al_2O_3/Al) оболонок (Рис. 5.9) зі схемою розташування шарів 1−8−1, p=0.5

Як випливає з Рис. 5.15, кривина оболонок незначно впливає на нелінійні частоти, тоді як тип оболонки дає істотні зміни. Найбільше значення частот і швидкість їх зростання зі збільшенням амплітуди мають оболонки Типу ламінації 1-1, а найменше – оболонки Типу 1-2.

Висновки за Розділом 5

У даному розділі запропонований метод розвинено для дослідження ФГМ сендвіч пологих оболонок і пластин. При цьому одержано наступні результати:

1. Наведено основні положення для сендвіч структур з урахуванням різних схем розташування ФГМ та зміни об'ємної частки кераміки V_c по товщині. Розглянуто чотири можливі схеми.

2. Одержані аналітичні вирази для обчислення елементів матриць з урахуванням ефективних властивостей ФГМ для кожної схеми та аналітичні формули для обчислення параметрів I_0, I_1, I_2, які присутні в правій частині рівнянь руху. Аналітичні формули отримані для трьох теорій (CST, FSDT, HSDT).

3. За допомогою створеного програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL виконане широке тестування розробленого методу на прикладах циліндричних, сферичних та параболоїдно-гіперболічних сендвіч пологих оболонок з прямокутною формою плану для різних схем розташування ФГМ (1-1, 1-2, 2-1, 2-2), різних видів крайових умов та різних відношеннях товщин шарів, а саме при 1-0-1;1-1-1;1-2-1. Порівняння отриманих результатів з відомими показало добру узгодженість, що підтвердило вірогідність запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення.

4. Вивчено лінійні та геометрично нелінійні коливання ФГМ сендвіч пологих оболонок складної геометричної форми плану, різними типами граничних умов та ФГМ. Досліджено вплив відношення товщин шарів, значення градієнтного індексу на власні та нелінійні частоти оболонки різної кривини з отвором складної форми. Одержані власні частоти форми коливань та скелетні криві для таких оболонок з різною формою плану та різними типами крайових умов в рамках різних теорій, а саме:

- прямокутної оболонки з отвором складної геометричної форми. Отвір уявляє собою коло з трапецієвидними вирізами. Побудовані структури розв'язку для такої оболонки для різних умов закріплення;
- прямокутної сендвіч ФГМ пологої оболонки з прямокутними вирізами на кожній стороні;
- сендвіч ФГМ пологої оболонки прямокутного плану з прямокутними виступами на кожній стороні.

5. Як і в випадку одношарових пологих оболонок, для кожної оболонки обґрунтовується вірогідність результатів, завдяки аналізу збіжності та виродження розглянутої області до відомої.

6. Метод R-функцій розвинено для цього класу задач та побудовані відповідні структури розв’язків до заданих крайових умов, на базі яких отримані системи координатних функцій для методу Рітца.

7. Одержано залежність власних частот від значень показника градієнтного індексу p для розглянутих оболонок і різних типів ФГМ. В багатьох випадках цю залежність проілюстровано за допомогою графіків. Загальною особливістю поведінки частот при збільшенні показника p, є зменшення власних частот.

Як випливає з проведених досліджень, кривина жорстко закріплених оболонок незначно впливає на нелінійні частоти, тоді як Тип оболонки дає істотні зміни. Найбільше значення частот і швидкість їх зростання зі збільшенням амплітуди мають оболонки Типу 1-1, а найменше – оболонки Типу 1-2.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [314-315, 318, 347, 366-367].

РОЗДІЛ 6

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ФГМ ПОРИСТИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ТА ПЛАСТИН

Як було відзначено раніше, ФГМ виготовляють із суміші металу та кераміки шляхом спікання. Під час виробничого процесу різниця в температурах затвердіння між двома компонентами може призвести до утворення пор або мікропустот у ФГМ структурах [198], що може суттєво вплинути на їх механічні властивості, і як результат, на статичну і динамічну поведінку об'єкту. Тому дуже важливо розробити ефективні та універсальні методи розрахунку пористих елементів конструкцій, виготовлених із ФГМ.

Однак аналізуючи відповідну літературу, можна зробити висновок, що практично відсутні наукові дослідження, в яких би були запропоновані чисельно-аналітичні методи, які спроможні вивчати коливання ФГМ пористих сендвіч пластин або пологих оболонок зі складною геометрією та різними граничними умовами. Цілком доречно також дослідити вплив різних факторів, таких як тип пористості, об'ємна частка кераміки, суміші матеріалів для ФГМ, схеми ламінації шарів на лінійні та нелінійні частоти пластин та пологих оболонок. Взагалі, дослідження, що наведено у цій главі, дає більш точне уявлення про механічну поведінку пористих ФГМ пластин та пологих оболонок і може бути використаним для розробки ФГМ конструкцій із бажаними властивостями.

6.1 Моделі, які описують пористість ФГМ пластин та пологих оболонок. Виведення аналітичних виразів для обчислення елементів матриць з урахуванням ефективних властивостей пористих ФГМ

Чисельна кількість моделей розподілу пористості була запропонована в роботах [204, 205]. Наведемо найбільш поширені моделі, які описують пористість ФГМ в пластинах та пологих оболонках. При цьому розглянемо одразу сендвіч структури, враховуючи, що одношарові пористі оболонки або пластини можна одержати як частковий випадок при певних значеннях величин h_1 та h_2.

Модель I. Рівномірне розподілення пористості (even)

Використовуючи правило суміші, ефективні властивості матеріалу $P^{(r)}$ (модуль пружності E та густина матеріалу ρ r - шару (r=1, 2, 3) з рівномірно розподіленою пористістю визначаються як:

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m). \end{cases} \tag{6.1}$$

Модель II. Нерівномірне розподілення пористості (uneven)

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m)\left(1 - \frac{z+\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}+h_1}\right), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m)\left(1 - \frac{z-\frac{h}{2}}{h_2-\frac{h}{2}}\right). \end{cases} \tag{6.2}$$

Індекси m і c відповідають характеристикам металу і кераміки відповідно, значення α характеризує об'ємну частку пористості [213, 214, 294]. $V^{(r)}(z)$ – об’ємна частка кераміки r-го шару.

Як і у випадках для структурних об'єктів без наявності пористості для практичного розв’язанні задач необхідно знати вирази для обчислення коефіцієнтів, які утворюють елементи матриць [A], [B], [D], [E], [F], [H].

Нагадаємо, що елементи A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} матриць [A], [B] і [D] в рамках уточненої теорії першого порядку (FSDT) обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz\,, \\ B_{ij} &= \sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz\,, \\ D_{ij} &= \sum_{r=1}^{3}\int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Величини $Q_{ij}^{(r)}(i,j=1,2,6)$ визначаються як і раніше за формулами (5.10), але з урахуванням виразів (6.1)-(6.2) для модуля пружності $E^{(r)}$.

В даній роботі були одержані аналітичні вирази для коефіцієнтів (6.3). Наведемо ці вирази для пористих ФГМ, що були використані при застосуванні теорії першого порядку (FSDT). Вважаємо, що об'ємна частка кераміки визначається за степеневим законом (P-law), тобто за допомогою формул.

$$V^{(1)}(z)=\left(\frac{z+\frac{h}{2}}{h_1+\frac{h}{2}}\right)^p, \quad -\frac{h}{2}\le z\le h_1,$$
$$V^{(2)}(z)=1, \quad h_1\le z\le h_2, \tag{6.4}$$
$$V^{(3)}(z)=\left(\frac{z-\frac{h}{2}}{h_2-\frac{h}{2}}\right)^p, \quad h_2\le z\le \frac{h}{2}.$$

Представимо аналітичні вирази елементів A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} для двох моделей розподілення пористості.

$$A_{11}^{(1,2)}=\frac{1}{1-\nu^2}\left(A_{11}^{(com)}-E_{cm}^{(s)}P_{11}^{(1,2)}\right),\ B_{11}^{(1,2)}=\frac{1}{1-\nu^2}\left(B_{11}^{(com)}-E_{cm}^{(s)}P_{12}^{(1,2)}\right),$$
$$D_{11}^{(1,2)}=\frac{1}{1-\nu^2}\left(D_{11}^{(com)}-E_{cm}^{(s)}P_{13}^{(1,2)}\right). \tag{6.5}$$

У формулах (6.5) верхні індекси (1, 2) визначають номер відповідної моделі. Вирази $A_{11}^{(com)}$, $B_{11}^{(com)}$, $D_{11}^{(com)}$ мають однаковий вигляд для моделей пористості I (even) та II (uneven) для степеневого закону (P-law):

$$A_{11}^{(com)}=E_m h+E_{cm}\left(\frac{h+p\ h_c}{p+1}\right), \tag{6.6}$$

$$B_{11}^{(com)}=E_{cm}\left(\frac{h_2^2-h_1^2}{2}+\frac{AS1^2-AS2^2}{p+2}-\frac{h(AS1+AS2)}{2(p+1)}\right), \tag{6.7}$$

$$D_{11}^{(com)}=E_m\frac{h^3}{12}+E_{cm}\left(\frac{AS1^3-AS2^3}{p+3}-\frac{h\ (AS1^2+AS2^2)}{p+2}+\frac{h_2(AS1-AS2)}{4(p+1)}+\frac{h_2^3-h_1^3}{3}\right). \tag{6.8}$$

Запишемо вирази для доданків у формулах (6.5) $P_{11}^{(1,2)}, P_{12}^{(1,2)}, P_{13}^{(1,2)}$ для двох моделей пористості.

Для **Моделі I (even)** ці вирази визначаються як:

$$P_{11}^{(1)}=(h-h_c),\ P_{12}^{(1)}=\left(\frac{h_1^2-h_2^2}{2}\right), \quad P_{13}^{(1)}=\left(\frac{h^3}{12}-\frac{h_2^3-h_1^3}{3}\right), \tag{6.9}$$

Вирази для **Моделі II (uneven)** набувають вигляду:

$$P_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}(h - h_c), \tag{6.10}$$

$$P_{12}^{(2)} = \left(\frac{AS1^2 - AS2^2}{3} - \frac{1}{4}h(h_1 + h_2)\right), \tag{6.11}$$

$$P_{13}^{(2)} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8} + h_1^3\right) - \frac{AS1^3 + AS2^3}{4} + \frac{2h_1\ AS1^2 - h\ AS2^2}{3} - \frac{1}{2}\left(AS1\ h_1^2 + AS2\ \frac{h^2}{4}\right)\right). \tag{6.12}$$

Позначення для E_{cm}, $AS1$, $AS2$, h_c співпадають з (5.16), а вираз для $E_{cm}^{(s)}$ введено наступним:

$$E_{cm}^{(s)} = \alpha \frac{E_c + E_m}{2}.$$

Нехай об’ємна доля кераміки для сендвіч структури визначається відповідно до сигмоїдального закону (S-law), тобто як

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z + \frac{h}{2}}{h_m + \frac{h}{2}}\right)^p, & -\dfrac{h}{2} \le z \le h_m, \\ V^{(1)}(z) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z - h_1}{h_m - h_1}\right)^p, & h_m \le z \le h_1, \end{cases}$$

$$V^{(2)}(z) = 1 \qquad h_1 \le z \le h_2, \tag{6.13}$$

$$\begin{cases} V^{(3)}(z) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z - h_2}{h_n + h_2}\right)^p, & h_2 \le z \le h_n, \\ V^{(3)}(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z - \frac{h}{2}}{h_n - \frac{h}{2}}\right)^p, & h_n \le z \le \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Величини h_m та h_n визначають середини нижнього та верхнього шарів та мають наступний вигляд:

$$h_m = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h}{2}\right),\ h_n = \frac{1}{2}\left(h_2 + \frac{h}{2}\right). \tag{6.14}$$

Отримані аналітичні вирази для A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} представляються як :

$$A_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1 - \nu^2}\left(A_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{11}^{(1,2)}\right), \qquad B_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1 - \nu^2}\left(B_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{12}^{(1,2)}\right),$$

$$D_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1 - \nu^2}\left(D_{11}^{(com)} - E_{cm}^{(s)} P_{13}^{(1,2)}\right). \tag{6.15}$$

де $A_{11}^{(com)}$, $B_{11}^{(com)}$, $D_{11}^{(com)}$ мають вигляд у випадку сигмоїдального закону (S-law):

$$A_{11}^{(com)} = E_m h + \frac{1}{2} E_{cm}(h + h_c), \tag{6.16}$$

$$B_{11}^{(com)} = \frac{1}{2} E_{cm}(h_n^2 - h_m^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p+1)(p+2)}, \tag{6.17}$$

$$D_{11}^{(com)} = E_m \frac{h^3}{12} E_{cm} \left(\frac{h_n^3 - h_m^3}{3} \frac{AS2^2\left(h_2 + \frac{h}{2}\right) - AS1^2\left(h_1 - \frac{h}{2}\right)}{4(p+1)(p+2)} \right) \tag{6.18}$$

Коефіцієнти $P_{11}^{(1,2)}, P_{12}^{(1,2)}, P_{13}^{(1,2)}$ для випадку сигмоїдального закону S-law мають такий же вигляд, як і для степеневого закону P-law, тобто вигляд формул (6.9-6.12).

Коефіцієнти A_{12}, A_{66}, B_{12}, B_{66}, D_{12}, D_{66} визначаються як і раніше, тобто за допомогою формул (5.17):

$$A_{12} = \nu A_{11}, \qquad A_{22} = A_{11},\ A_{66} = \frac{1-\nu}{2} A_{11},$$

$$B_{12} = \nu B_{11}, \qquad B_{22} = B_{11}, \qquad B_{66} = \frac{1-\nu}{2} B_{11},$$

$$D_{12} = \nu D_{11}, \qquad D_{22} = D_{11},\ D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11}.$$

Значення $I_0,\ I_1,\ I_2$ в рівняннях (2.24) визначаються наступним чином:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^{3} \int_{z_r}^{z_{r+1}} \left(\rho^{(r)}\right)(1, z, z^2)\, dz.$$

Нижче наведено одержані аналітичні вирази для величин $I_0,\ I_1,\ I_2$:

$$I_0^{(1,2)} = \left(I_0^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{11}^{(1,2)}\right), \qquad I_1^{(1,2)} = \left(I_1^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{12}^{(1,2)}\right),$$

$$I_2^{(1,2)} = \left(I_2^{(com)} - \rho_{cm}^{(s)} P_{13}^{(1,2)}\right), \tag{6.19}$$

де

$$\rho_{cm}^{(s)} = \alpha \frac{\rho_c + \rho_m}{2}, \tag{6.20}$$

вирази $I_0^{(com)}, I_1^{(com)}, I_2^{(com)}$ визначаються як:

P-law:

$$I_0^{(com)} = \rho_m h + \rho_{cm} \left(\frac{h + p\ h_c}{p+1} \right),$$

$$I_1^{(com)} = \rho_{cm} \left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \frac{AS1^2 - AS2^2}{p+2} - \frac{h(AS1 + AS2)}{2(p+1)} \right), \tag{6.21}$$

$$I_2^{(com)} = \rho_m \frac{h^3}{12} + \rho_{cm} \left(\frac{AS1^3 - AS2^3}{p+3} - \frac{h\ \left(AS1^2 + AS2^2\right)}{p+2} + \frac{h_2(AS1 - AS2)}{4(p+1)} + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right).$$

S-law:

$$I_0^{(com)} = \rho_m h + \frac{1}{2}\rho_{cm}(h + h_c),\ I_1^{(com)} = \frac{1}{2}\rho_{cm}(h_n^2 - h_m^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p+1)(p+2)}, \quad (6.22)$$

$$I_2^{(com)} = \rho_m \frac{h^3}{12} + \rho_{cm}\left(\frac{h_n^3 - h_m^3}{3} + \frac{AS2^2\left(h_2 + \frac{h}{2}\right) - AS1^2\left(h_1 - \frac{h}{2}\right)}{4(p+1)(p+2)}\right).$$

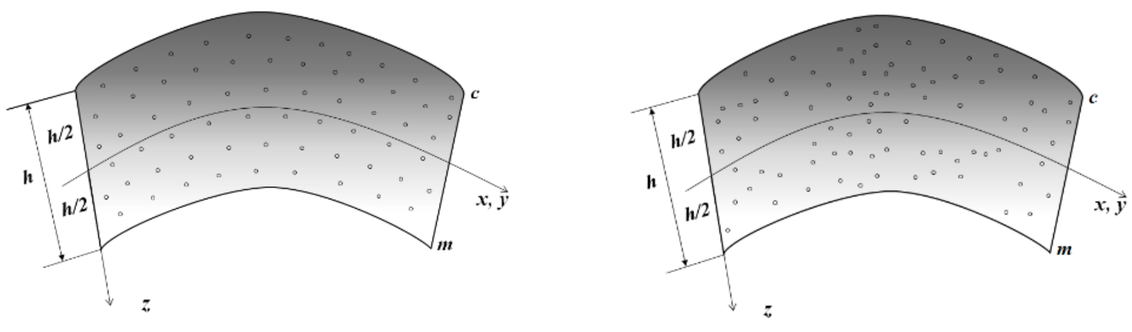
Вирази $P_{11}^{(1,2)}$, $P_{12}^{(1,2)}$, $P_{13}^{(1,2)}$ у формулах (6.19) співпадають з виразами (6.9-6.12).

6.2 Дослідження вільних лінійних коливань пористих ФГМ пологих оболонок і пластин. Тестові задачі

Для того щоб перевірити достовірність реалізації чисельно-аналітичного методу, було вирішено велику кількість тестових задач, які продемонстрували вірогідність та відмінну збіжність з результатами, доступними в літературі. Наведемо деякі з них.

6.2.1 Одношарова пориста ФГМ пологa оболонка з квадратною формою плану

Розглядається ФГМ пологa оболонка з квадратною формою плану постійної товщини h. Передбачається, що розподілення пористості відбувається відповідно до Моделі I (рівномірний розподіл, Рис.6.1а) або Моделі II (нерівномірний розподіл, Рис.6.1б) за степеневим законом (P-law).



а) б)

Рис. 6.1. Розподіл пористості в матеріалі: а) рівномірний розподіл (Модель I); б) нерівномірний розподіл (Модель II)

Ефективні властивості матеріалу: модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν та щільність ρ ФГМ (в загальних позначеннях як P) для одношарової оболонки визначаються для рівномірного розподілення пористості за формулами:

$$P(z) = (P_m - P_c)V_m + P_c - \frac{1}{2}\alpha(P_m + P_c) \quad . \tag{6.23}$$

Для нерівномірного розподілу пористості ефективні властивості знаходяться:

$$P(z) = (P_m - P_c)V_m + P_c - \frac{1}{2}\alpha\left(1 - 2\frac{|z|}{h}\right)(P_m + P_c) \quad , \tag{6.24}$$

де

$$V_m = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, \quad V_m + V_c = 1.$$

Вважаємо, що оболонка або пластина вільно оперті по всьому контуру. Розглядається ФГМ суміш Si_3N_4 /$SUS304$, механічні характеристики якої наведено в Розділі 4 у Таблиці 4.1.

Таблиця 6.1. Порівняння безрозмірної основної частоти $\Lambda = \Omega\ (2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ вільно опертої пористої квадратної ФГМ (Si_3N_4 /$SUS304$) пластини і подвійно вигнутих оболонок $a/b = 1, h/2a = 0.1$ з відомими результатами

	$\frac{2a}{R_x}$	$\frac{2a}{R_y}$	p	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.2$	
				RFM	[214]	RFM	[214]	RFM	[214]
Пластина	0	0	0	0.0249	0.0250	0.0241	0.0241	0.0231	0.0231
			2	0.0394	0.0394	0.0399	0.0399	0.0406	0.0406
			5	0.0460	0.0460	0.0477	0.0477	0.0502	0.0501
			10	0.0503	0.0503	0.0531	0.0530	0.0572	0.0571
			100	0.0567	0.0567	0.0613	0.0614	0.0688	0.0688
Сферична Оболонка	0.5	0.5	0	0.0326	0.0329	0.0314	0.0318	0.0304	0.0304
			2	0.0520	0.0524	0.0527	0.0532	0.0537	0.0542
			5	0.0607	0.0613	0.0631	0.0637	0.0665	0.0670
			10	0.0663	0.0669	0.0701	0.0706	0.0755	0.0761
			100	0.0741	0.0749	0.0802	0.0811	0.0900	0.0909
Циліндрична Оболонка	0	0.5	0	0.0269	0.0272	0.0260	0.0262	0.0249	0.0251
			2	0.0427	0.0430	0.0433	0.0436	0.0441	0.0444
			5	0.0498	0.0502	0.0517	0.0522	0.0544	0.0548
			10	0.0544	0.0549	0.0575	0.0579	0.0620	0.0625
			100	0.0612	0.0618	0.0662	0.0668	0.0743	0.0750

Для розрахунку використаємо теорію зсувних деформацій першого порядку пологих оболонок (FSDT) в поєднанні з методом Рітца та теорією R-функцій. Порівняння отриманих результатів для різних значень коефіцієнта пористості α (Модель I) та різного значення градієнтного індексу p з результатами роботи [214] наведено в Таблиці 6.1.

Наведені дані з Таблиці 6.1 підкреслюють гарний збіг результатів.

У наступних тестах розглядаються ФГМ пористі сендвіч пластини, які складаються з трьох шарів. Верхній і нижній шари виготовлені з ФГМ, а середній шар є ізотропним. Розглянемо випадок, коли заповнювач (середній шар) виготовлено з кераміки, як показано на Рис. 6.2.

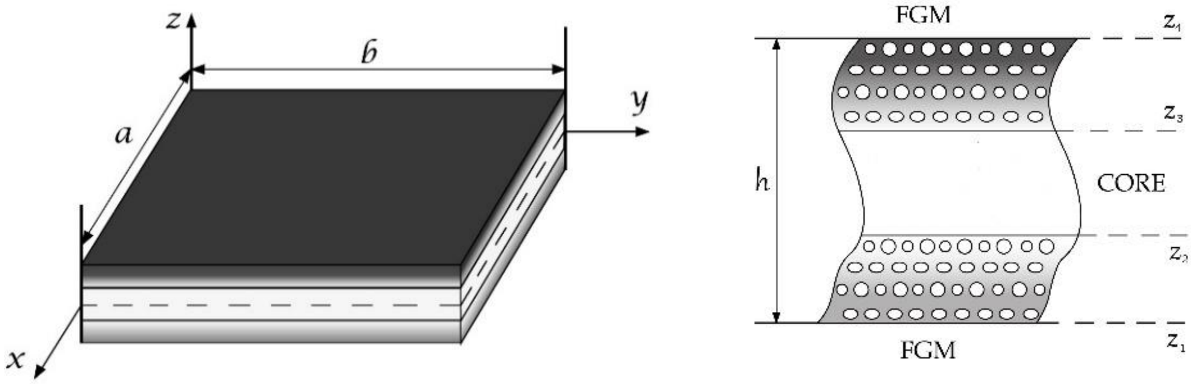


Рис. 6.2. Пориста ФГМ сендвіч пластина та розподіл її слоїв

На Рис. 6.2 позначено $z_1 = -h/2$, $z_2 = h_1$, $z_3 = h_2$, $z_4 = h/2$. Задачі розглядаються для двох моделей пористості (Модель I та Модель II), які описано формулами (6.1) та (6.2).

6.2.2 Вільно оперта пориста сендвіч пластина квадратної форми

Досліджуємо вільні лінійні коливання вільно опертої квадратної пластини із стороною a з ФГМ шарами, виготовленими з Al/Al_2O_3.

Порівняння безрозмірних частот $\Lambda = \omega_L\, a^2\sqrt{\rho_0/E_0}/h$, розрахованих за допомогою RFM, з результатами, що були отримані за допомогою МСЕ та нової гіперболічної зсувної теорії [205], показано в Таблиці 6.2, якщо градієнтний індекс p=2 та геометричні параметри a/h =10 та a/b=1. Проаналізовано два типи розподілення пористості за Моделями (6.1) і (6.2) та різні відношення товщини шарів.

Таблиця 6.2. Порівняння безрозмірних частот для вільно опертої квадратної пористої пластини з результатами роботи [205]

Тип пористості	α	Метод	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
I	0	RFM	1.0584	1.1857	1.3002	1.1195	1.2415	1.1627
		[205]	1.0615	1.1885	1.3024	1.1225	1.2439	1.1653
	0.1	RFM	0.9885	1.1271	1.2549	1.0531	1.1880	1.1001
		[205]	0.9826	1.1207	1.2493	1.0471	1.1819	1.0935
	0.2	RFM	0.8913	1.0537	1.2026	0.9684	1.1228	1.0188
		[205]	0.8787	1.4201	1.1915	0.9549	1.1105	1.0056
II	0.1	RFM	1.0561	1.1780	1.2864	1.0941	1.2277	1.1512
		[205]	1.0555	1.1708	1.2842	1.1084	1.2270	1.1512
	0.2	RFM	1.0544	1.1581	1.2717	1.0984	1.2126	1.1383
		[205]	1.0521	1.5260	1.2658	1.0939	1.2096	1.1376

Наведена Таблиця 6.2. демонструє добре узгодження отриманих результатів з відповідними з роботи [205], що знову підкреслює вірогідність запропонованого методу та розробленого програмного забезпечення.

6.2.3 Жорстко закріплені пористі сендвіч пластини квадратної форми з різних ФГ матеріалів

У цьому прикладі припускається, що зовнішні шари виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів $Si_3N_4/SUS304$ або Al/Al_2O_3.

Оскільки автору не вдалося знайти результати в доступній літературі для наведених прикладів, тому вважаємо їх новими, що можуть бути використані при застосуванні інших підходів з метою порівняння.

Будемо досліджувати вплив пористості на безрозмірну частоту ФГМ сендвіч пластин з розподілом шарів 1-2-1 і 2-1-2, а значення градієнтного індексу візьмемо рівним *p*=2. Результати досліджень показано на Рис. 6.3 і Рис. 6.4.

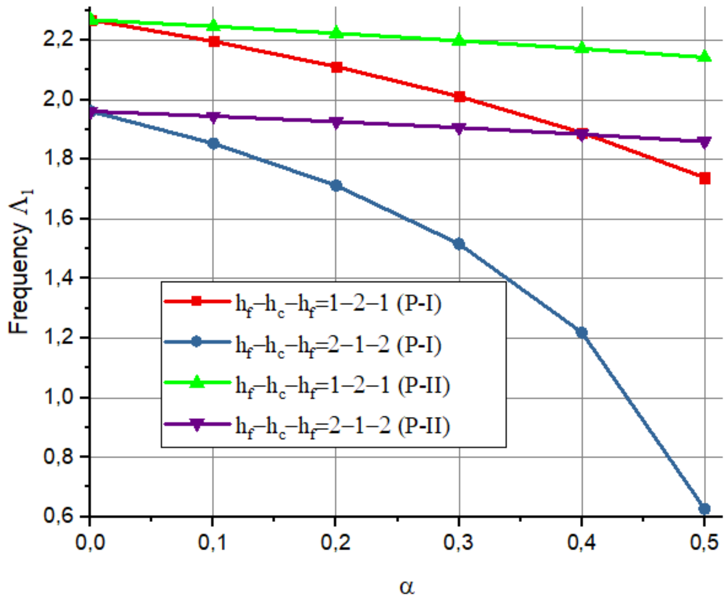


Рис. 6.3. Власні частоти для закріпленої квадратної пористої ФГМ (Al/Al_2O_3) пластини

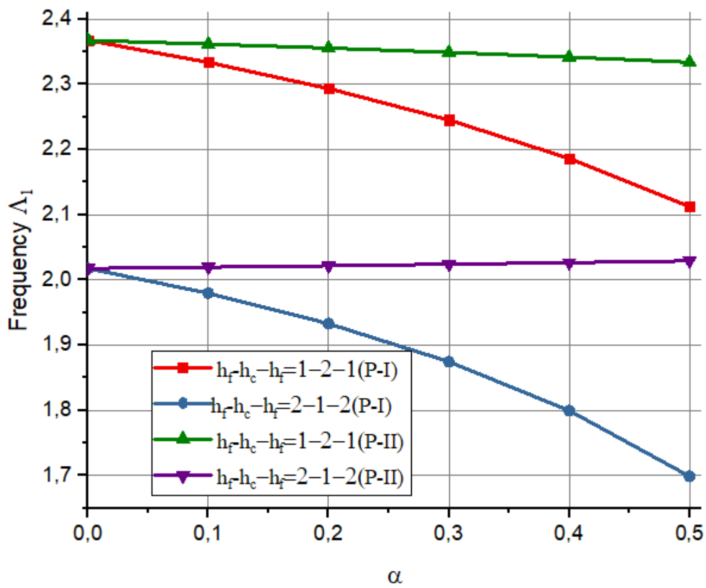
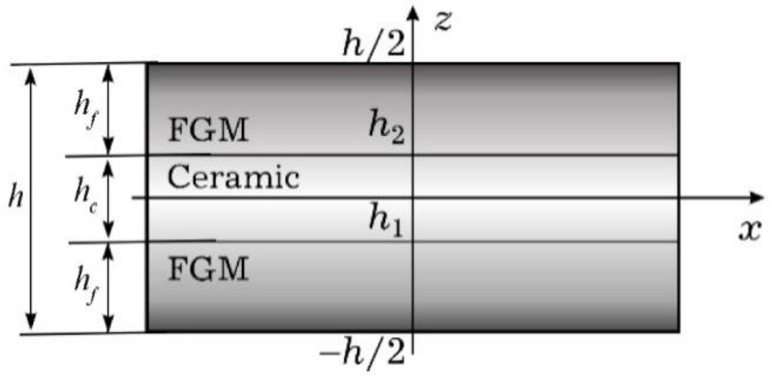


Рис. 6.4. Власні частоти для закріпленої квадратної пористої ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) пластини

Як і очікувалося, для обох ФГМ матеріалів частоти зменшуються зі збільшенням коефіцієнта пористості, тому що жорсткість пластини зменшується. Крім того, вплив першого розподілу пористості (Модель I) на частоти більш суттєвий, ніж вплив другої моделі пористості (Модель II).

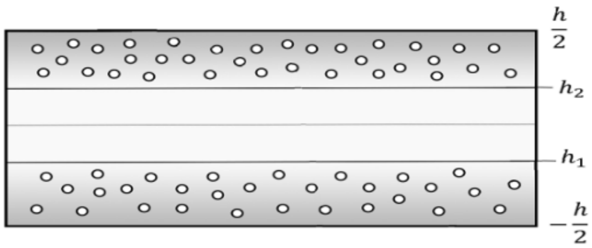
6.2.4 Сигмоїдальна квадратна вільно оперта ФГМ сендвіч пластина

Наступна тестова задача стосується дослідження лінійних коливань сендвіч пластин, якщо об’ємна доля кераміки змінюється за сигмоїдальним законом. Структура розподілу пористості, а також шари сендвіч пластини показано на Рис. 6.5. Розроблений підхід реалізовано в рамках уточненої теорії першого порядку (FSDT).



а)

б)



в)

Рис. 6.5. Структура функціонально-градієнтної сендвіч пластини: а) тип ламінації пластини; б) рівномірний розподіл пористості: в) нерівномірний розподіл пористості

Нехай нижній і верхній шари оболонки виготовлені зі сплаву $Al_2\,O_3/Al$, а заповнювач виготовлено з кераміки. Товщина шарів і показник об’ємної частки p змінюються.

Загальна товщина пластини дорівнює $h/2a = 0.1$. Граничні умови задаються такими формулами:

$$w = v = \psi_y = N_{11} = M_{11} = 0 \qquad \text{при } x = \pm a, \qquad (6.25)$$

$$w = u = \psi_x = N_{22} = M_{22} = 0 \qquad \text{при } y = \pm a. \qquad (6.26)$$

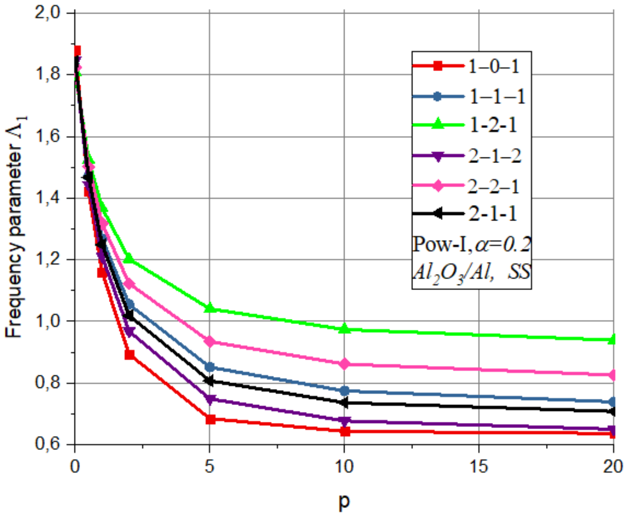
У Таблиці 6.3 наведено порівняння розрахункової безрозмірної частоти $\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h}\sqrt{\rho_0/E_0}$ з результатами роботи [204] з різними геометричними співвідношеннями товщини лицьових шарів h_f до товщини заповнювача h_c $(h_f - h_c - h_f)$.

Таблиця 6.3. Порівняння безрозмірних частот для квадратної вільно опертої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) сендвіч пластини ($p = 2,\ h/2a = 0.1$)

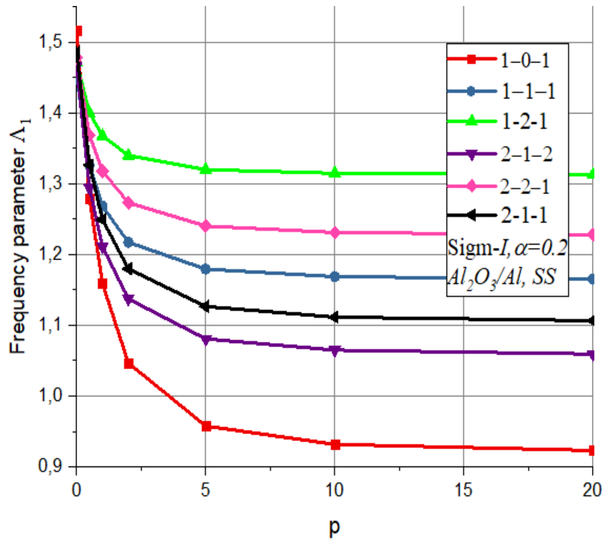
α	Метод	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
			P-ФГМ (Модель I)				
0	[204]	1.0615	1.1885	1.3024	1.1225	1.2439	1.1653
	RFM	1.0584	1.1857	1.3002	1.1195	1.2415	1.1627
0.1	[204]	0.9826	1.1207	1.2493	1.0471	1.1819	1.0935
	RFM	0.9885	1.1271	1.2549	1.0531	1.1880	1.1007
0.2	[204]	0.8787	1.0420	1.1915	1.9549	1.1105	1.0056
	RFM	0.8913	1.0551	1.2026	1.9684	1.1228	1.0188
			P-ФГМ (Модель II)				
0.1	[204]	1.0556	1.1708	1.2842	1.1084	1.2270	1.1512
	RFM	1.0565	1.1725	1.2864	1.0941	1.2277	1.1512
0.2	[204]	1.0521	1.1526	1.2658	1.0939	1.2097	1.1376
	RFM	1.0544	1.1581	1.2717	1.0984	1.2126	1.1383
			S-ФГМ (Модель I)				
0	[204]	1.1617	1.3119	1.4155	1.2427	1.3594	1.2797
	RFM	1.1588	1.3096	1.4137	1.2401	1.3573	1.2774
0.1	[204]	1.1039	1.2595	1.3718	1.1862	1.3113	1.2262
	RFM	1.1105	1.2676	1.3792	1.1942	1.3189	1.2339
0.2	[204]	1.0315	1.2011	1.3256	1.1208	1.2580	1.1632
	RFM	1.0467	1.2173	1.3399	1.1371	1.2732	1.1797
			S-ФГМ (Модель II)				
0.1	[204]	1.1615	1.2992	1.4001	1.2340	1.3470	1.2712
	RFM	1.1641	1.3029	1.4046	1.2374	1.3502	1.2740
0.2	[204]	1.1620	1.2864	1.3859	1.2255	1.3346	1.2628
	RFM	1.1699	1.2957	1.3948	1.2343	1.3424	1.2702

Порівняння даних з Таблиці 6.3 свідчить про добрий збіг отриманих результатів із відомими в літературі та вірогідність запропонованого методу і програмного забезпечення.

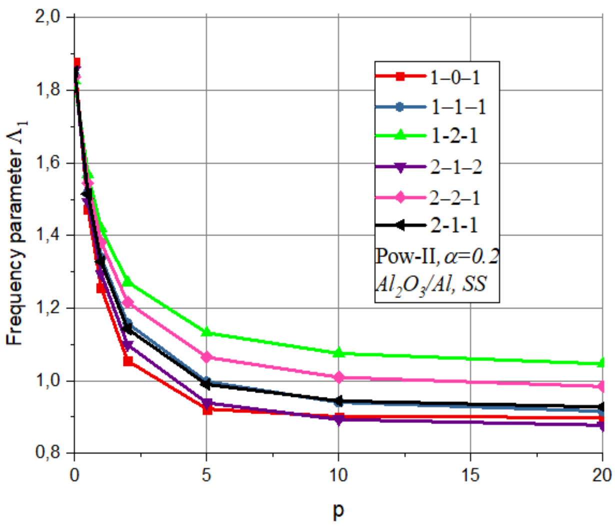
На Рис. 6.6 і Рис. 6.7 показано вплив показника об'ємної частки p на безрозмірну частоту пористої квадратної ФГМ сендвіч пластини. Наведено результати для двох моделей P-ФГМ і S-ФГМ для вільно опертих (SS, Рис. 6.6а, б, в, г) і закріплених (CL, Рис. 6.7 a, b, c, d). Коефіцієнт пористості приймається α=0.2. Вивчаються різні схеми укладки шарів.



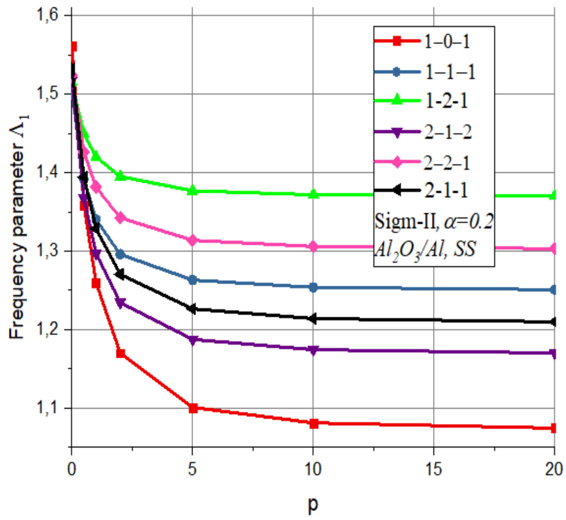
а)



б)



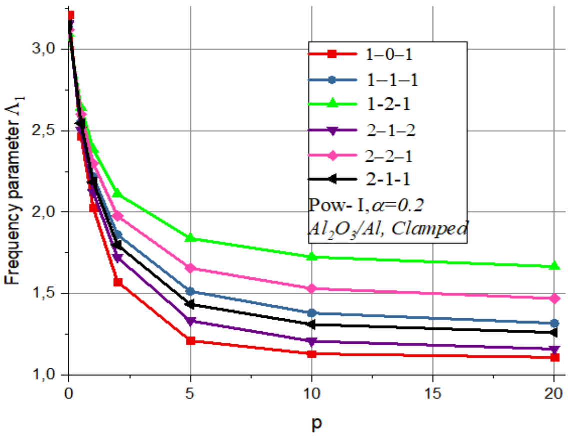
в)



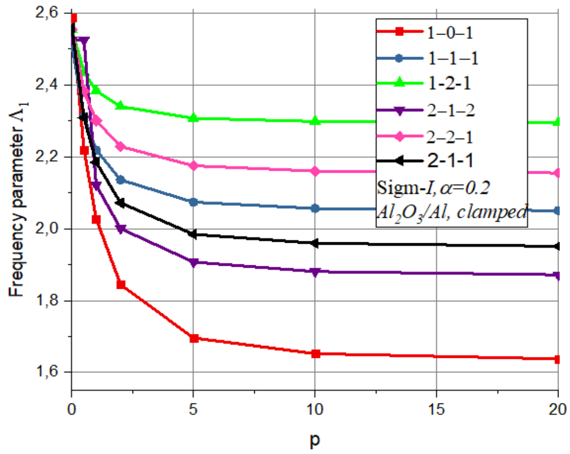
г)

Рис. 6.6. Вплив показника об'ємної частки p на безрозмірну частоту вільно опертої пористої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) сендвіч пластини (α=0.2) для різних моделей P-ФГМ і S-ФГМ: а) P-I; б) S-I; в) P-II; г) S-II

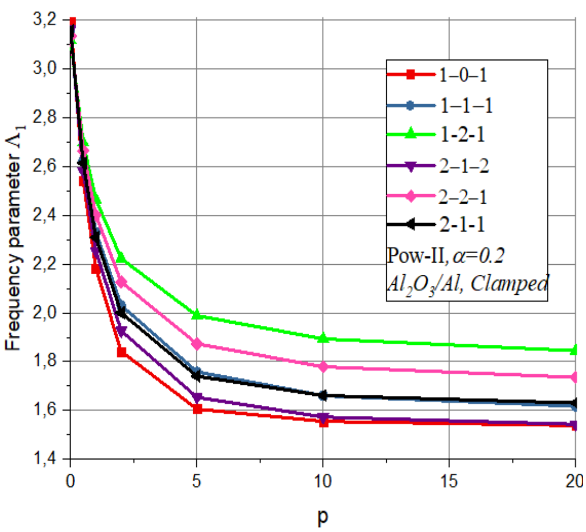
З Рис. 6.6 видно, що частоти зменшуються зі збільшенням показника об'ємної частки p для всіх розглянутих випадків, оскільки зменшується жорсткість ФГМ сендвіч пластини. Найбільше значення частот спостерігається для схеми розміщення 1-2-1 для двох випадків розподілу пористості P-ФГМ (P-I, P-II) і S-ФГМ (S-I, S-II) і обох граничних умов. Очевидно, що в цьому випадку переважає частка кераміки, а жорсткість пластини підвищується. При рівномірному розподілі пористості (P-I, S-I) значення частоти менше, ніж при нерівномірному (P-II, S-II) розподілі для всіх схем укладання. Це пов'язано з тим, що порожнечі з рівномірним розподілом займають велику площу, і жорсткість пластини знижується.



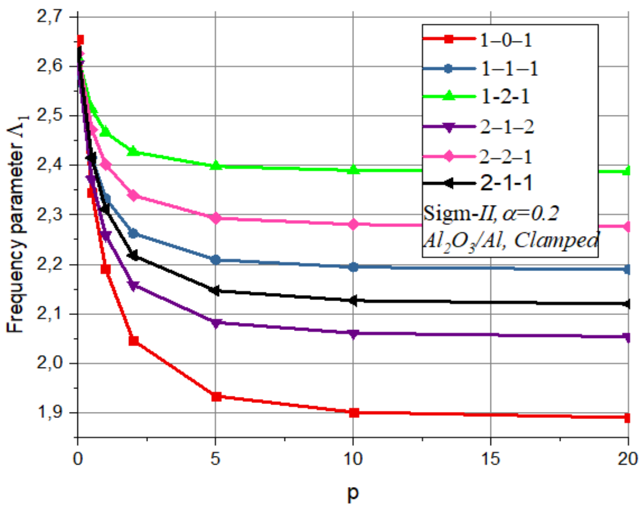
а)



б)



в)



г)

Рис. 6.7. Вплив показника об'ємної частки p на безрозмірну частоту закріпленої пористої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) сендвіч пластини (α=0.2) для різних моделей P-ФГМ і S-ФГМ: а) P-I; б) S-I; в) P-II; г) S-II

6.3 Дослідження вільних лінійних коливань пористих ФГМ пологих оболонок та пластин з отворами та вирізами

6.3.1 Прямокутна пологa оболонка з отвором складної геометричної форми

Досліджується прямокутна полога оболонка з отвором складної форми (Рис. 6.8) з ФГМ двох видів: $Si_3N_4/SUS304$ (M1) і Al/Al_2O_3 (M2). Геометричні параметри оболонки є наступними:

$$b/a = 1; \quad a_1/2a = 0.1; \quad b_1/2a = 0.15; \quad h/2a = 0.1; \quad 2a/R = 0.25;$$
$$k_1 = 2a/R_x = 0.5; \quad k_1 = 2a/R_y 2a = 0.5.$$

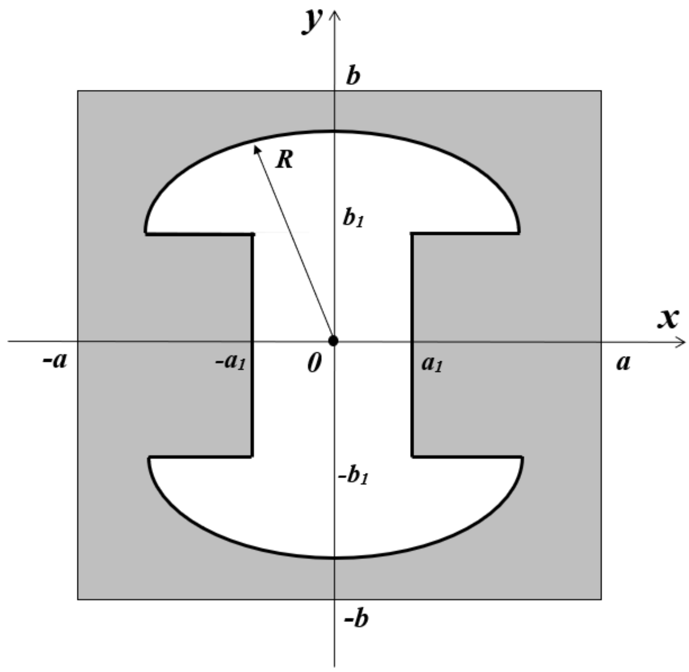


Рис. 6.8. План-форма ФГМ пологої оболонки з вирізами складної форми

Розглядаються різні граничні умови:

1) CC -оболонка закріплюється по всій границі, включаючи виріз;

2) SS-C - виріз жорстко закріплюється, зовнішня границя вільно опирається;

3) SS-F – виріз вільний, зовнішня границя вільно опирається.

Для отримання базисних функцій за допомогою RFM будемо будувати відповідну структуру розв’язків. Для граничних умов CC структура розв’язку буде наступною:

$$u = \omega\Phi_1,\ v = \omega\Phi_2,\ w = \omega\Phi_3,\ \psi_x = \omega\Phi_4,\ \psi_y = \omega\Phi_5. \qquad (6.27)$$

Для граничних умов SS-C будемо мати таку структуру:

$$u = f_2\omega_{cut}\Phi_1,\ v = f_1\omega_{cut}\Phi_2,\ w = \omega\Phi_3,\ \psi_x = f_2\omega_{cut}\Phi_4,\ \psi_y = f_1\omega_{cut}\Phi_5. \ (6.28)$$

Для граничних умов SS-F наступна структура розв’язку приймається у вигляді:

$$u = f_2\Phi_1, \quad v = f_1\Phi_2, \quad w = (f_1 \wedge_0 f_2)\Phi_3, \quad \psi_x = f_2\Phi_4, \quad \psi_y = f_1\Phi_5. \quad (6.30)$$

У формулі (6.27) $\omega = 0$ є рівнянням усієї границі. У співвідношеннях (6.28) функція $\omega_{cut} = 0$ є рівнянням вирізу. Ці рівняння побудовані за теорією R-функцій і мають такий вигляд:

$$\omega_{cut} = -\big((f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_5\big),$$

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 \omega_{cut}\ , \qquad (6.30)$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}5}$ визначаються як:

$$f_1 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0, \quad f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0, \quad f_3 = (x^2 - a_1^2)/2a_1 \geq 0,$$

$$f_4 = (b_2^2 - y^2)/2b_2 \geq 0, \quad f_5 = \big(R^2 - x^2 - y^2\big)/2R \geq 0.$$

Невизначені компоненти $\Phi_i,\ i = \overline{1{,}5}$ структур розв'язку (6.27-6.29) розкладаються в степеневий ряд. Вони апроксимуються степеневою системою (4.45) завдяки симетрії задачі. Інтегрування виконувалось за допомогою формул Гаусса по ¼ області, що відповідає 256 точкам.

Результати проведених досліджень показані на графіках (Рис. 6.9-6.12) для розподілу пористості Моделі I. Вивчаються такі показники, як вплив індексу градієнта p, параметру пористості η (зазначемо, що для цих результатів параметр пористості позначено коефіцієнтом η) та типу граничних умов на безрозмірні основні частоти $\Lambda = \lambda\ (2a)^2\sqrt{\rho_c/E_c}\ h$ ФГМ сферичної оболонки, що виготовлена з різної суміші ($S_iN_4/SUS304$, Al/Al_2O_3).

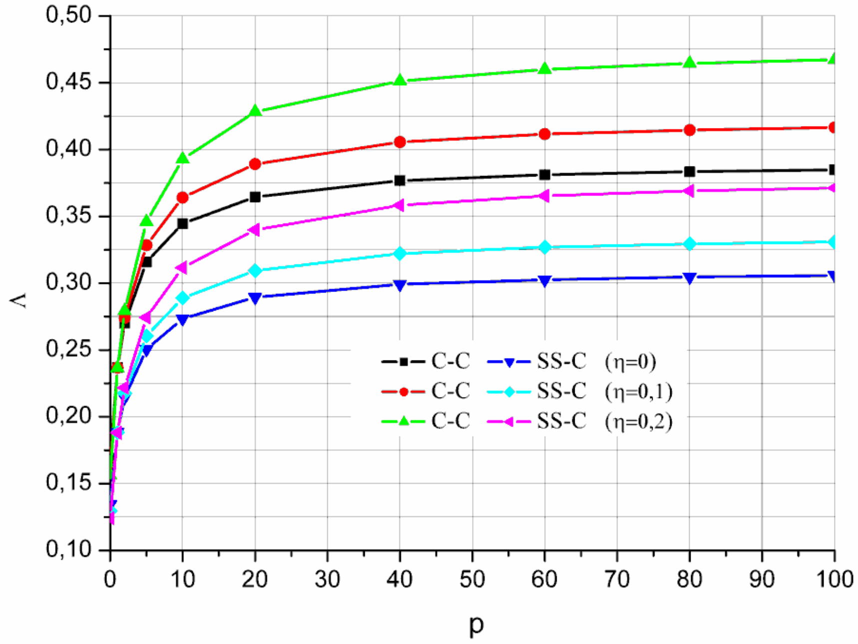


Рис. 6.9. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту для пористих (Модель I) ФГМ $Si_3N_4/SUS304$ (M1) сферичних оболонок $(\frac{a}{b} = 1, \frac{h}{2a} = 0.12a/R_x = 0.5, \quad 2a/R_y = 0.5)$

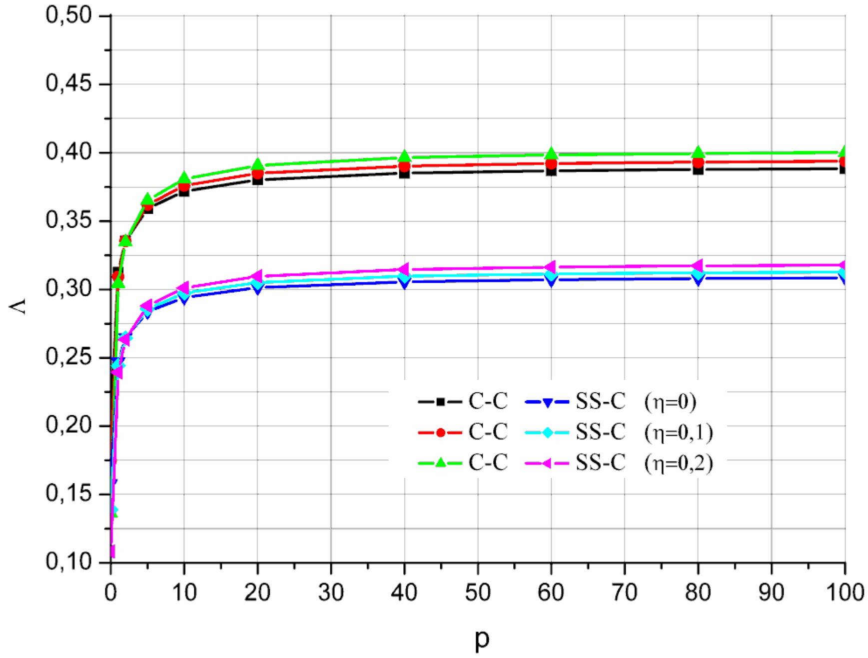


Рис. 6.10. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту для пористих (Модель I) ФГМ Al/Al_2O_3 (M2) сферичних оболонок $(\frac{a}{b} = 1, \frac{h}{2a} = 0.1,$ $2a/R_x = 0.5, \quad 2a/R_y = 0.5)$ з різними граничними умовами

Як випливає з Рис. 6.9-6.10, збільшення індексу градієнта p призводить до збільшення частки кераміки в композиті та до зменшення частки металу. Така зміна матеріальних складових призводить до збільшення значення параметра власної частоти Λ. Така сама поведінка власної частоти зберігається для певних значень α та різних граничних умов. Аналізуючи Рис. 6.9 і Рис. 6.10 бачимо, що оболонки, що закріплені на вирізі та зовнішній границі (CC), мають найбільші власні частоти. Найменший параметр частоти мають оболонки з вільним вирізом.

На Рис. 6.11 і Рис. 6.12 наведено вплив різних типів ФГМ на поведінку частот для різних значень індексу градієнта p, параметру пористості та різних граничних умов. Якісна поведінка частотних кривих однакова для обох типів граничних умов. Зі збільшенням параметра пористості відхилення між результатами для цих матеріалів є більш суттєвим, і значення частот для матеріалу M2 (Al/Al_2O_3) більші, ніж відповідні значення для матеріалу M1 ($Si_3N_4/SUS304$).

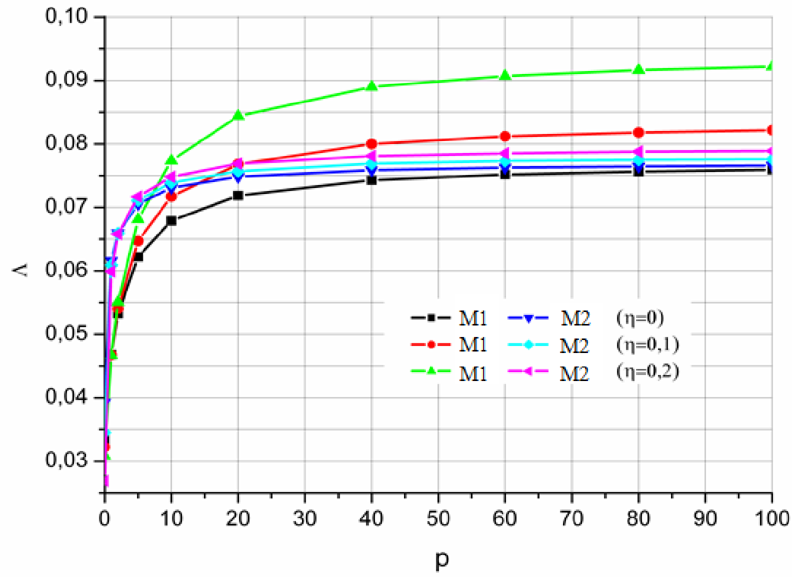


Рис. 6.11. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту для пористих (Модель I) ФГМ (суміші M1 і M2) сферичних оболонок з граничною умовою SS-F ($\frac{a}{b} = 1, \frac{h}{2a} = 0.1, 2a/R_x = 0.5, \quad 2a/R_y = 0.5$)

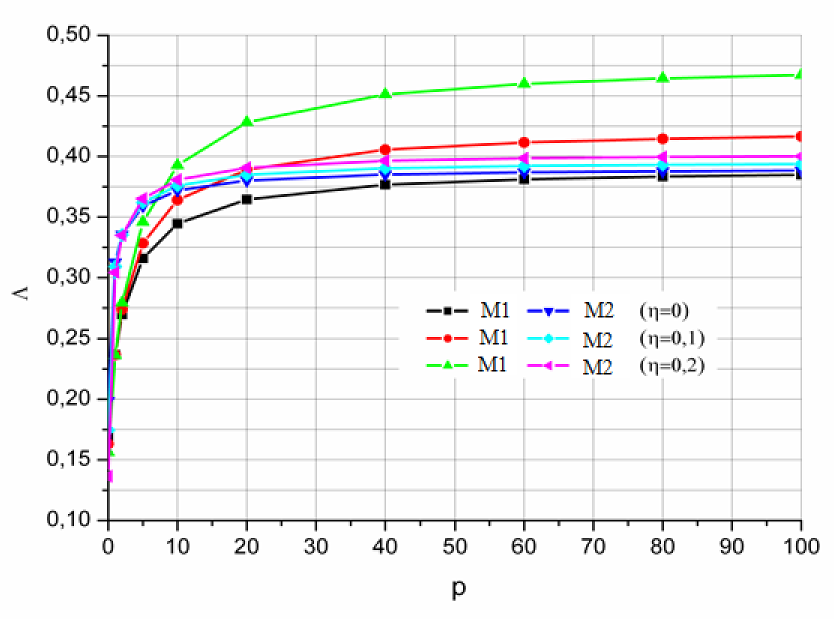


Рис. 6.12. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту для пористих (Модель I) ФГМ (суміші M1 і M2) сферичних оболонок ($\frac{a}{b} = 1, \frac{h}{2a} = 0.1,\ 2a/R_x = 0.5, \quad 2a/R_y = 0.5$) з граничною умовою CC

6.3.2 Квадратна пластина з вирізами складної форми та квадратним закріпленим отвором

Розглянемо пористу сендвіч пластину, план форми якої наведено на Рис. 6.13. Геометричні параметри є наступними:

$\frac{a}{b} = 1; \quad \frac{b_1}{2a} = 0.15; \quad \frac{d}{2a} = 0.25; \frac{a_1}{2a} = 0.15; \quad \frac{a_2}{2a} = 0.7; \ \frac{c}{2a} = 0.35; \ \frac{r}{2a} = 0.25.$

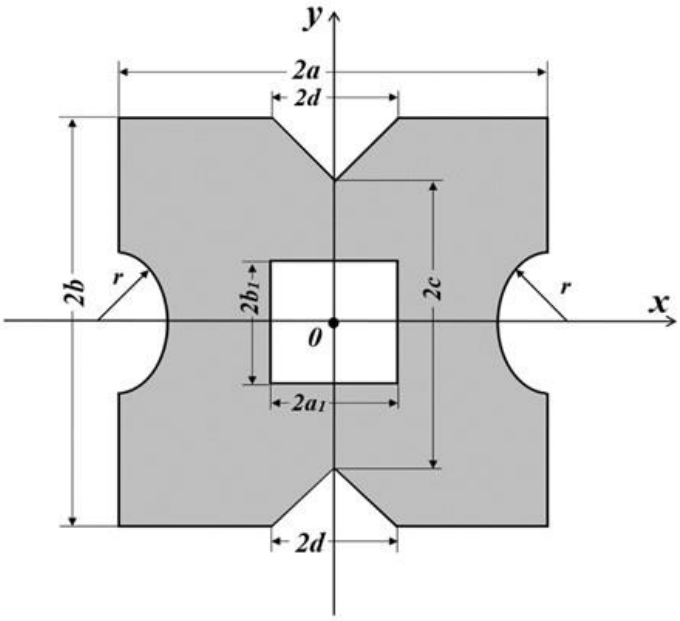


Рис. 6.13. Складна форма пористої ФГМ сендвіч пластини

Будемо аналізувати два види ФГМ: Al/Al_2O_3 і $Si_3N_4/SUS304$. Припустимо, що пластина жорстко закріплена повністю, включаючи виріз.

Структура розв’язку має вигляд (6.27). Функція $\omega(x,y)$ дорівнює нулю на границі пластини. У наведеному прикладі ця функція має такий вигляд:

$$\omega(x,y) = \Big((f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 \big((f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_5 \wedge_0 f_6)\big)\Big) \wedge_0 (f_7 \vee_0 f_8) \ \wedge_0 (f_9 \wedge_0 f_{10}), \quad (6.31)$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}10}$ визначаються наступним чином:

$$f_1 = \big((b-c)(x-d) - d(y-b)\big)/\sqrt{(b-c)^2 + d^2} \geq 0,$$

$$f_2 = \big((c-b)x - d(y-c)\big)/\sqrt{(b-c)^2 + d^2} \geq 0,$$

$$f_3 = \big((b-c)x + d(y+c)\big)/\sqrt{(b-c)^2 + d^2} \geq 0,$$

$$f_4 = (c-b)(x+d) + d(y-b)\ /\sqrt{(b-c)^2 + d^2} \geq 0,$$

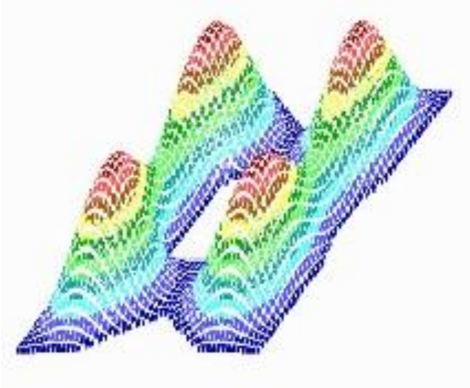
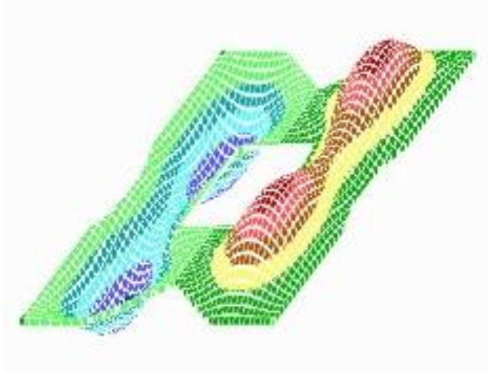
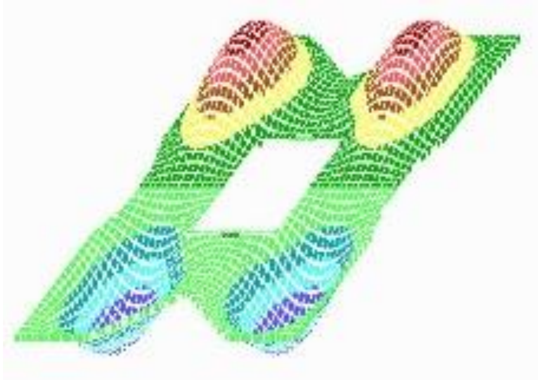
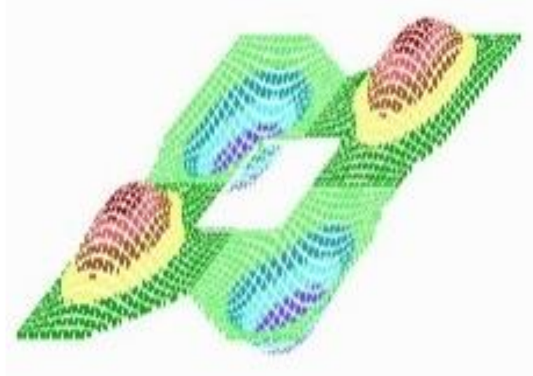
$$f_{5,6} = ((x \mp a_2)^2 + y^2 - r^2)/2r \geq 0, \qquad f_7 = (y^2 - b_1^2)/2b_1,$$

$$f_8 = (x^2 - a_1^2)/2a_1, \quad f_9 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0, \quad f_{10} = (a^2 - x^2)/2a \geq 0. \ (6.32)$$

Невизначені компоненти $\Phi_i,\ i = \overline{1{,}5}$ були розкладені в степеневий ряд з урахуванням симетрії задачі (4.45). Для апроксимації Φ_1 було збережено двадцять вісім членів ряду поліномів, а решта компонентів апроксимовано п’ятнадцятьма членами.

Перші чотири форми коливань для пористої ФГМ (Al/Al_2O_3) сендвіч пластини складної форми (Рис. 6.13) представлені в Таблиці 6.4. Пластина має тип пористості Poro-I, коефіцієнт пористості α=0.2 та розподіл шарів 1-2-1. Відповідні значення безрозмірних частот $\Lambda_i = \omega_i (2a)^2 \sqrt{\rho_c/E_c}\, h$ для ФГМ пористої сендвіч пластини за такими умовами та значенням градієнтного індексу *p*=2 при застосуванні теорії FSDT також показано в Таблиці 6.4.

Таблиця 6.4. Перші чотири форми коливань ФГМ (Al/Al_2O_3) пористої (Модель I) сендвіч пластини складної форми з розподілом шарів 1-2-1 та відповідні значення безрозмірних частот

	
Λ_1=0.2554	Λ_2=0.2558
	
Λ_3=0.2656	Λ_4=0.2660

6.3.3 Лінійні коливання пористих ФГМ сендвіч пластин з круглим отвором та різними вирізами на сторонах при зміні об’ємної долі кераміки за сигмоїдальним законом

Задача 1. Розглянемо пористу ФГМ сендвіч пластину складної форми в плані, зображену на Рис. 6.14. Припустимо, що пластина жорстко закріплена по всій границі області, включаючи отвір. Геометричні параметри даної пластини наступні:

$$\frac{h}{2a} = 0.1; \quad \frac{b}{a} = 1; \quad \frac{a_1}{a} = 0.45; \quad \frac{b_1}{a} = 0.3;$$

$$c/2a = 0.7; \quad r_1/2a = 0.1; \ , r_2/2a = 0.2828.$$

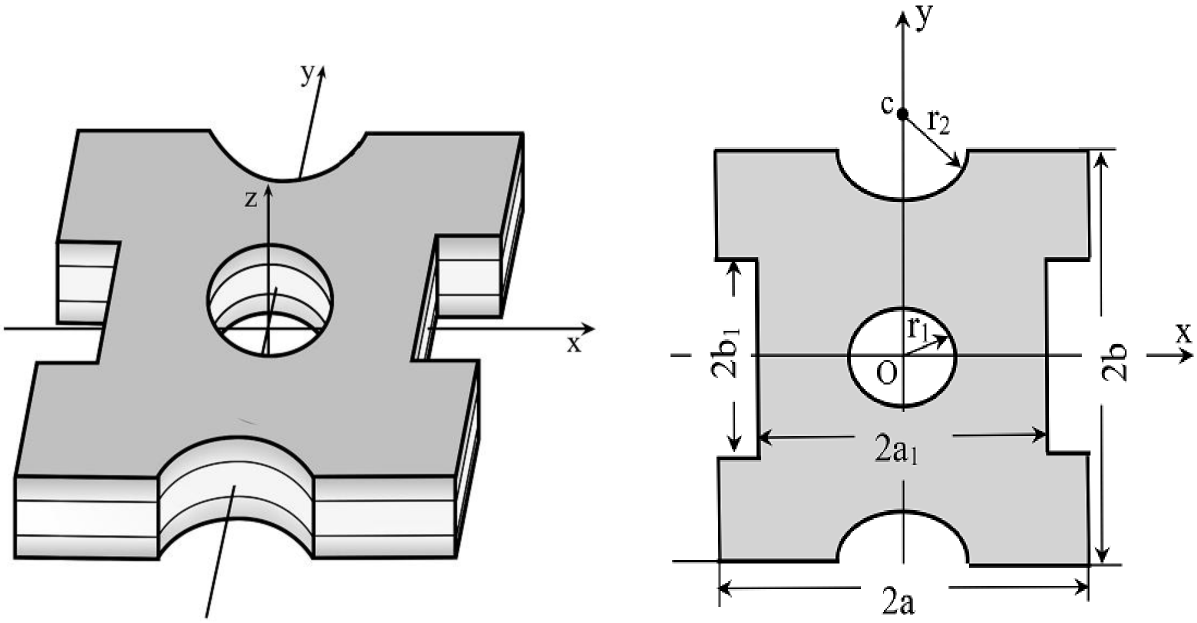


Рис. 6.14. Пориста ФГМ сендвіч пластина складної геометрії та її форма плану

Ефективні властивості ФГМ змінюються по товщині відповідно до степеневого та сигмоїдального законів. Розглянуто два типи розподілу пористості (рівномірний і лінійно нерівномірний).

Структура розв'язку, яка задовольняє умовам жорсткого закріплення, має вигляд (6.27), а рівняння границі області $\omega = 0$ визначається за допомогою функції:

$$\omega = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 \big(f_3 \wedge_0 (f_4 \wedge_0 f_5)\big) \wedge_0 (f_6 \wedge_0 f_7). \qquad (6.33)$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}7}$ визначаються наступним чином:

$$f_1 = \frac{(a_1^2 - x^2)}{2a_1} \geq 0, \quad f_2 = \frac{(b_1^2 - y^2)}{2b_1} \geq 0, \quad f_3 = \frac{(x^2 + y^2 - r_1^2)}{2r_1} \geq 0,$$

$$f_4 = \frac{(x^2 + (y - b)^2 - r_2^2)}{2r_2} \geq 0, \quad f_5 = \frac{(x^2 + (y + b_1)^2 - r_2^2)}{2r_2} \geq 0,$$

$$f_6 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0, \quad f_7 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0. \qquad (6.34)$$

Вплив показника об'ємної частки p на безрозмірну основну частоту $\Lambda = \lambda\ (2a)^2\sqrt{\rho_0/E_0}/\ h$ пористої закріпленої ФГМ пластини, виробленої з суміші $Al_2\,O_3/Al$, яка досліджується за сигмоїдальним законом показано в Таблиці 6.5

(S-I) для рівномірного розподілу пористості (Модель I) і в Таблиці 6.6 (S-II) для лінійно нерівномірного розподілу пористості (Модель II).

Таблиця 6.5. Безрозмірна основна частота пористої закріпленої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) пластини ($h/2a = 0.1, \alpha = 0.2$) з рівномірною пористістю (Модель I)

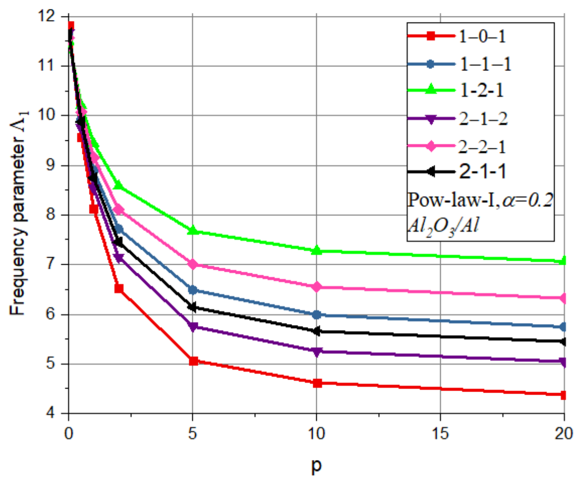
P	S-I (рівномірна пористість)					
	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
0	9.5334	9.6685	9.8711	9.5975	9.8221	9.7202
0.5	8.6490	9.1495	9.5751	8.9051	9.3755	9.0848
1	8.1282	8.8916	9.4372	8.5368	9.1551	8.7459
2	7.5926	8.6562	9.3167	8.1856	8.9555	8.4223
5	7.1318	8.4750	9.2272	7.9047	8.8028	8.1634
10	6.9918	8.4235	9.2023	7.8230	8.7596	8.0881
20	6.9435	8.4062	9.1940	7.7953	8.7450	8.0625

Таблиця 6.6. Безрозмірна основна частота пористої закріпленої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) пластини ($h/2a = 0.1, \alpha = 0.2$) з нерівномірною пористістю (Модель II)

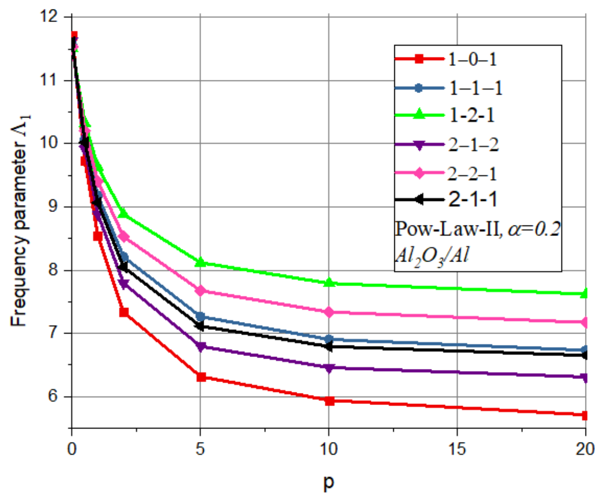
p	S-II (лінійна нерівномірна пористість)					
	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
0	9.7047	9.8532	10.026	9.7862	9.9746	9.8729
0.5	9.0032	9.4182	9.7667	9.2201	9.5948	9.3519
1	8.6111	9.2051	9.6466	8.9278	9.4104	9.0822
2	8.2281	9.0128	9.5421	8.6548	9.2448	8.8296
5	7.9041	8.8663	9.4648	8.4405	9.1193	8.6313
10	7.8094	8.8249	9.4433	8.3789	9.0839	8.5743
20	7.7771	8.8109	9.4361	8.3581	9.072	8.5551

Порівняння Таблиці 6.5 і Таблиці 6.6 показує, що для обох типів сигмоподібного розподілу пористості власні частоти зменшуються при збільшенні степеневого індексу p для розглянутих схем укладання. Безрозмірні частоти пластин зі схемою укладання 1-2-1 більші, ніж відповідні частоти пластин з іншою схемою укладання в обох випадках розподілу пористості. Для схеми розташування 1-0-1 маємо значення безрозмірних частот менше, ніж для інших схем розташування. Це пояснюється меншою жорсткістю пластини зі схемою укладання 1-0-1 порівняно з іншими розглянутими схемами.

Аналогічні результати для жорстко закріпленої ФГМ сендвіч пластини з степеневим законом показано на Рис. 6.15а (розподіл пористості Модель I, P-I) і на Рис. 6.15б (розподіл пористості Модель II, P-II). Поведінка ФГМ сендвіч пластини для розглянутого закону пористості подібна до сигмоїдального закону. Але частоти для закону (P-I, II) розподілу пористості трохи більші, ніж для сигмоїдального закону (S-I, II).



а)

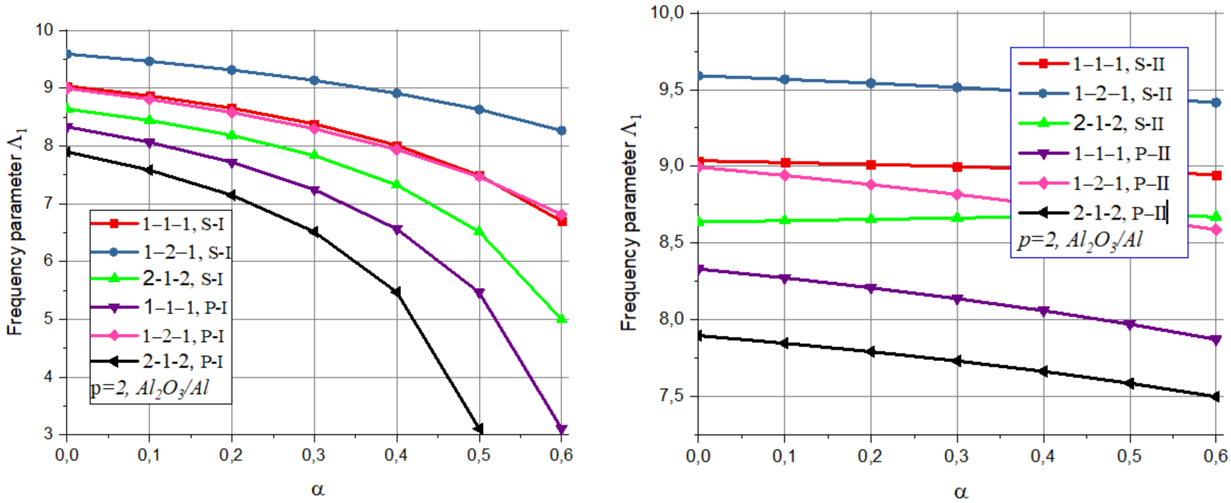


б)

Рис. 6.15. Зміна безрозмірної основної частоти пористої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) пластини за степеневим законом: а) Моделі P-I; б) Моделі P-II ($h/2a = 0.1, \alpha = 0.2$)

Рисунок 6.16 демонструє залежність безрозмірної частоти пористої закріпленої ФГМ пластини складної форми, яка досліджується за двома законами розподілу ФГМ (P-ФГМ і S-ФГМ), від параметра пористості α. Розглядаються різні схеми відношення товщини шарів (1-1-1; 1-2-1; 2-1-2) при фіксованому значенні показника об’ємної частки p=2.

Вплив різних моделей розподілу пористості на власні частоти представлено на Рис. 6.16а (моделі P-I, S-I) та на Рис. 6.16б (моделі P-II, S-II). Збільшення коефіцієнта пористості α викликає зменшення значення власних частот для всіх схем укладання шарів. Видно, що вплив коефіцієнта пористості α на частоти є більш суттєвим для рівномірного розподілу пористості, ніж для лінійно нерівномірного розподілу.

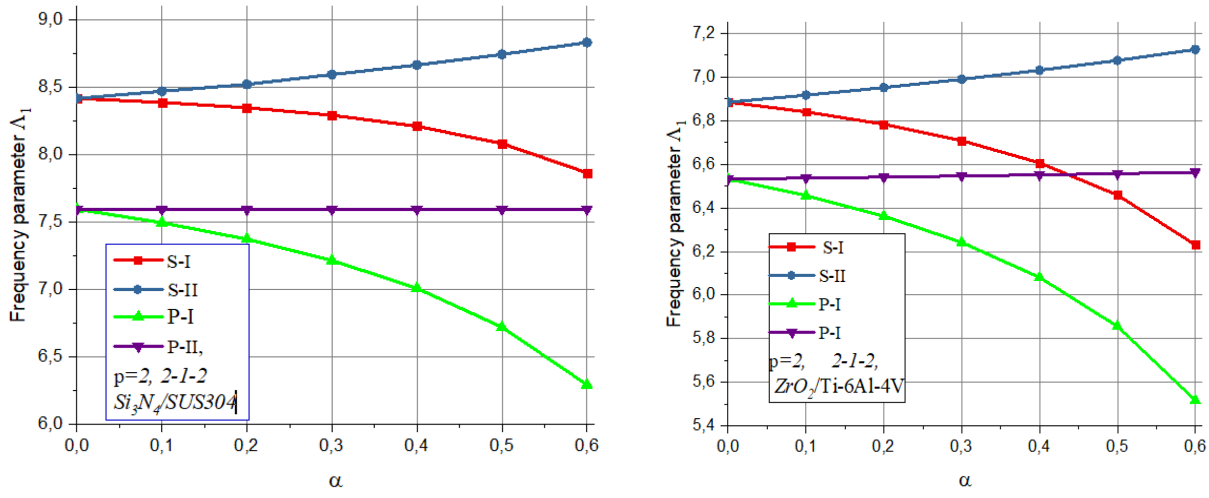


а) б)

Рис. 6.16. Вплив коефіцієнта пористості α на власні частоти закріпленої пористої ФГМ ($Al_2\,O_3/Al$) сендвіч пластини зі складною формою в плані: а) Моделі P-I, S-I; б) Моделі P-II, S-II

З графіків Рис. 6.16 (а,б) випливає, що збільшення коефіцієнта пористості викликало зменшення частот для обох законів розподілу пористості. Але у випадку лінійно нерівномірного типу пористості (P-II, S-II) це зменшення незначне.

Вплив коефіцієнта пористості α на власні частоти пластин зі сплаву $Si_3N_4/Sus304$ і $ZrO_2/Ti-6Al\text{-}4V$ з фіксованим розташуванням шарів 2-1-2 і показником об'ємної частки p=2 показано на Рис. 6.17а та Рис. 6.17б.

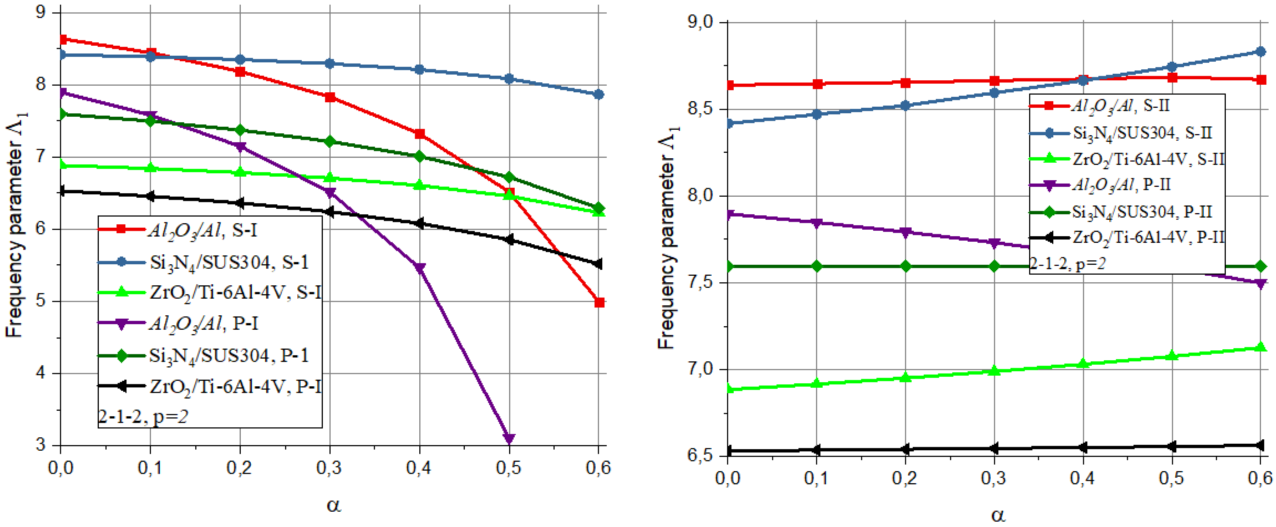


а) б)

Рис.6.17. Вплив коефіцієнта пористості α на власні частоти закріпленої пористої сендвіч пластини для сплавів: а) Si_3N_4/Sus304; б) ZrO_2/Ti-6Al-4V

Якісно поведінка власних частот зі збільшенням коефіцієнта пористості α однакова для обох матеріалів. Однак значення частоти для сплаву $Si_3N_4/SUS304$ більші, ніж відповідні значення частот для сплаву $ZrO_2/Ti\text{-}6Al\text{-}4V$. Цікаво відзначити, що для обох цих матеріалів у випадку сигмоїдної моделі лінійної нерівномірної пористості власні частоти дещо збільшуються, якщо коефіцієнт пористості α зменшується.

На Рис. 6.18а та Рис. 6.18б показано вплив коефіцієнта пористості α на власні частоти закріпленої пористої ФГМ сендвіч пластини з розподілом шарів 2-1-2 для різних сплавів $Al_2\,O_3/Al$, $Si_3N_4/SUS304$ і $ZrO_2/Ti\text{-}6Al\text{-}4V$ та різних моделей пористості при фіксованому значенні градієнтного індексу p=2. Слід зазначити, що для всіх розглянутих ФГМ матеріалів коефіцієнт пористості α більш впливає на частоти для моделі рівномірного розподілу для степеневої та сигмоїдальної ФГМ пластини.



а) б)

Рис. 6.18. Порівняння поведінки власних частот закріпленої пористої ФГМ сендвіч пластини (розподіл шарів 2-1-2, p=2) для різних типів сплавів у залежності від коефіцієнта пористості α: а) P-I, S-I; б) P-II, S-II

Задача 2. Для ілюстрації запропонованого підходу розглянемо задачу про вільні коливання пористої пластини зі складною геометричною формою, представленою на Рис. 6.19.

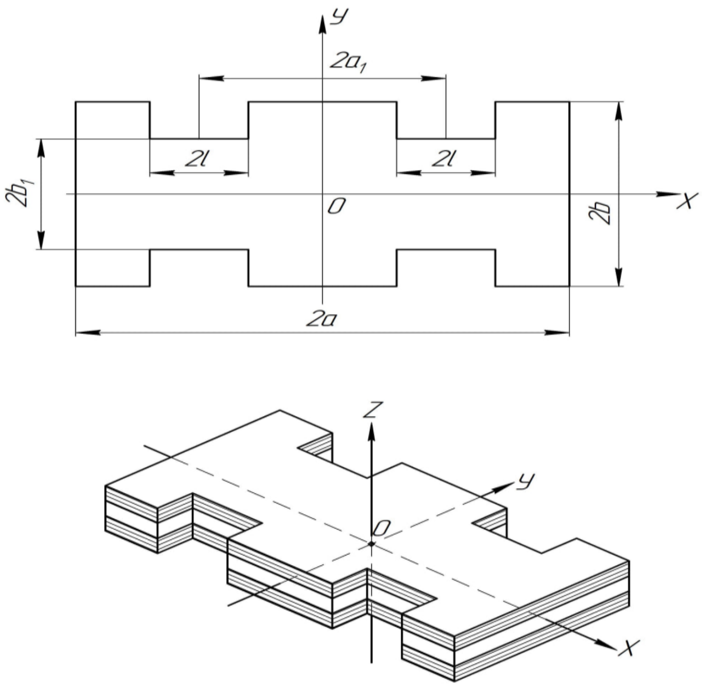


Рис. 6.19. Пориста ФГМ сендвіч пластина складної геометрії та її форма плану

Геометричні параметри прийнято наступними:

$$\frac{h}{2b} = 0.1; \quad \frac{a}{b} = 2; \quad \frac{a_1}{2b} = 0.4; \frac{b_1}{2b} = 0.35; \quad \frac{L}{2b} = 0.15.$$

Будемо розглядати різні типи ФГМ, а саме

$$Al\,/Al_2O_3;\ Si_3N_4/\,S\,U\,S304;\ ZrO_2/\,Ti-6\,Al-4\,V.$$

Механічні властивості матеріалів визначені в Таблиці 4.1.

Нехай пластина жорстко закріплена по всьому контуру. Структура розв’язку для даного випадку має вигляд (6.27):

$$u=\omega\Phi_1,\ v=\omega\Phi_2,\ w=\omega\Phi_3,\ \psi_x=\omega\Phi_4,\ \psi_y=\omega\Phi_5.$$

В наведених структурних формулах невизначені компоненти $\Phi_i\ (i=\ 1{,}2{,}3{,}4{,}5)$ розкладаються в ряд (4.45) за повною системою степеневих функцій. Функція

$$\omega=(f_1\wedge_0 f_2)\wedge_0\big((f_3\wedge_0 f_4)\vee_0 f_5\big) \tag{6.35}$$

описує рівняння всієї межі області, та побудована за допомогою теорії R- функцій.

Функції $f_i(x,y)$, $(i=\overline{1{,}5})$ визначаються як:

$$f_1=\frac{(a^2-x^2)}{2a}\ge 0,\ f_2=\frac{(b^2-y^2)}{2b}\ge 0,\ f_3=\frac{((x-a_1)^2-l^2)}{2l}\ge 0,$$

$$f_4=\frac{((x+a_1)^2-l^2)}{2l}\ge 0,\ f_5=\frac{\left(b_1^2-y^2\right)}{2b_1}\ge 0.$$

У Таблиці 6.7 представлено значення безрозмірних величин власних частот для сигмовидних сендвіч пластин для різних схем відношення товщини шарів $\left(h_f-h_c-h_f\right)$, але без наявності пористості в матеріалі $(\alpha=0)$.

Таблиця 6.7. Вплив градієнтного індексу p на значення власних частот ФГМ пластини(Al/Al_2O_3)

p	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	2.6765	2.6975	2.7505	2.6809
0.5	2.4112	2.5470	2.6605	2.4806
1	2.2787	2.4772	2.6202	2.3849
2	2.1569	2.4162	2.5857	2.2995
5	2.0621	2.3710	2.5606	2.2351
10	2.0345	2.3584	2.5536	2.2117
20	2.0234	2.3542	2.5513	2.2108

Безрозмірні значення власних частот визначаються за формулою:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1(2b)^2}{h}\sqrt{\rho_0/E_0}.$$

Як видно з Таблиці 6.7, із збільшенням градієнтного індексу p, значення власних частот зменшуються для розглянутих відношень $(h_f - h_c - h_f)$. При цьому найбільші значення частот ми маємо для відношення (1-2-1), коли товщина керамічного заповнювача перебільшує товщини зовнішніх шарів вдвічі.

У Таблиці 6.8 наведені значення власних частот для ФГМ (Al/Al_2O_3) пористої сендвіч (1-2-1) пластини для двох законів розподілення пористості: рівномірного (S- I) та нерівномірного (S-II). Значення коефіцієнта пористості прийнято рівним: $\alpha = 0.1$ та $\alpha = 0.2$.

Таблиця 6.8. Вплив градієнтного індексу p та коефіцієнту пористості α на власні значення основної частоті для різних законів розподілення пористості (S-I, S-II, 1-2-1, Al_2O_3/Al)

p	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.2$	
		S-I	S-II	S-I	S-II
0	2.7505	2.7156	2.7438	2.6759	2.7366
0.5	2.6605	2.6184	2.6509	2.5700	2.6407
1	2.6202	2.5746	2.6092	2.5222	2.5975
2	2.5857	2.5371	2.5735	2.4811	2.5606
5	2.5606	2.5097	2.5475	2.4510	2.5336
10	2.5536	2.5022	2.5403	2.4427	2.5261
20	2.5513	2.4996	2.5379	2.4399	2.5237

З Таблиці 6.8 випливає, що наявність пористості зменшує частоти, та при збільшені коефіцієнта пористості частоти зменшуються, особливо для закону S-I.

На Рис. 6.20 показано вплив градієнтного індексу p на власні частоти $\Lambda_1 = \frac{\lambda_1(2b)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$ для різних ФГМ при фіксованій схемі розташування шарів (1-2-1) та коефіцієнту пористості $(\alpha = 0.2)$. Проаналізовано рівномірне (S-I) та нерівномірне (S-II) розподілення пористості. Для всіх матеріалів частоти більш суттєво зменшуються на проміжку $0 \leq p \leq 5$. Для $p > 5$ частоти майже не змінюються Найбільш суттєво на проміжку $0 \leq p \leq 5$ частоти змінюються для ФГМ суміші Al/Al_2O_3.

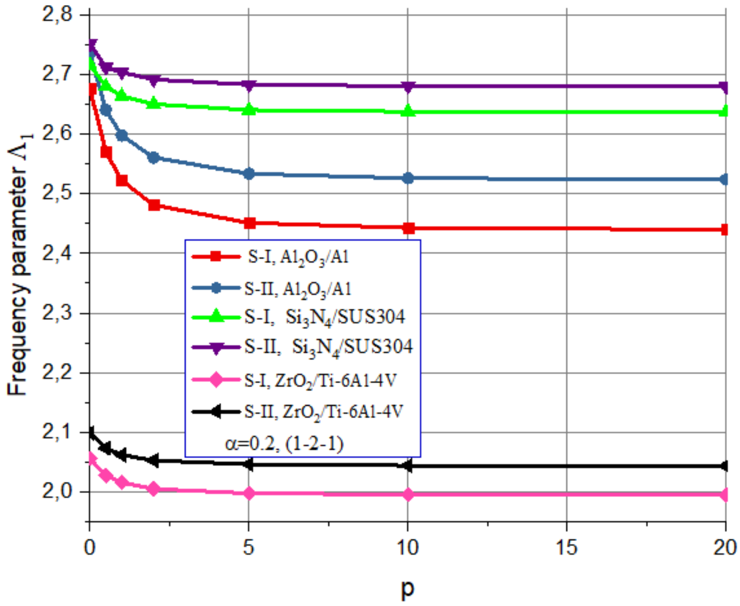


Рис. 6.20. Вплив градієнтного індексу *p* на власні частоти ФГМ пористих сендвіч пластин за сигмоїдальним законом

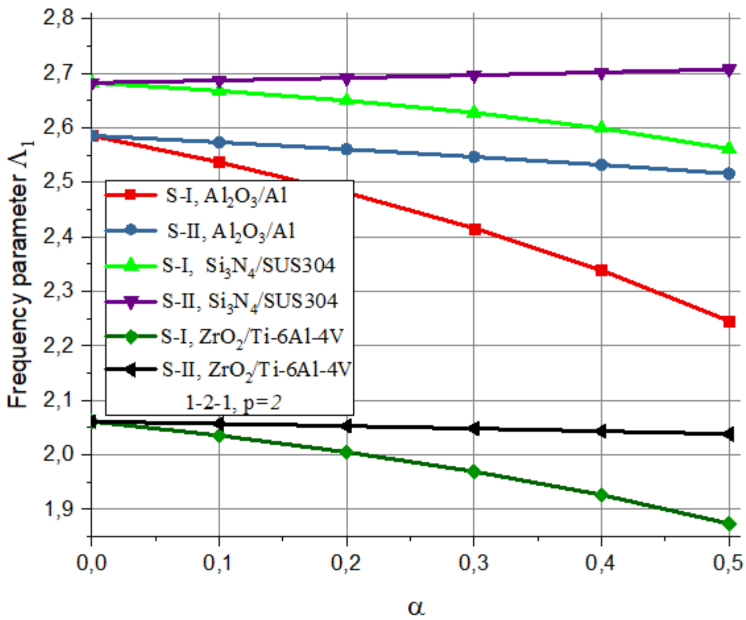


Рис. 6.21. Вплив коефіцієнту пористості на власні частоти ФГМ сендвіч пластин (1-2-1 , *p*=2) за сигмоїдальним законом

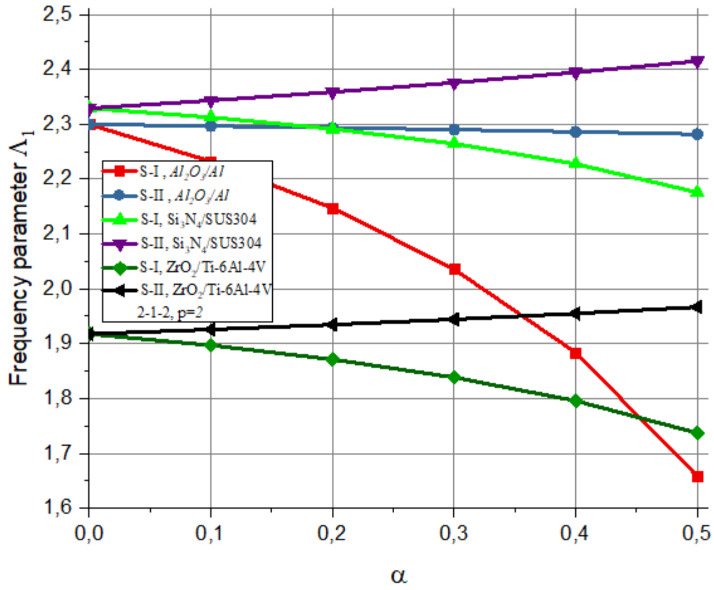


Рис. 6.22. Вплив коефіцієнту пористості на власні частоти ФГМ сендвіч пластин (2-1-2 , *p*=2) за сигмоїдальним законом

Дослідження впливу коефіцієнта пористості на поведінку власних частот представлено на Рис. 6.21 (схема відношення товщини шарів (1-2-1)) та Рис. 6.22 (схема відношення товщини шарів (2-1-2)). Треба відзначити, що в обох випадках при збільшенні коефіцієнту пористості для рівномірного розподілення пористості (S-I) частоти зменшуються, причому для випадку (2-1-2) це зменшення більш суттєве.

Поведінка частот при нерівномірному розподіленні пористості (S-II) є різною в залежності від типу ФГМ. Загальним є те, що збільшення коефіцієнту пористості практично не впливає на значення частот, а для матеріалів $Si_3N_4/\ SUS304$; $ZrO_2/\ Ti-6\,Al-4\,V$ та схеми (2-1-2) частоти несуттєво, але збільшуються.

6.4 Нелінійні вільні коливання ФГМ пористих сендвіч пластин

6.4.1 Нелінійні коливання ФГМ пористих пластин квадратної форми

У цьому прикладі досліджується вплив пористості на нелінійну частоту вільно опертої ФГМ сендвіч пластини, виробленої з Al/Al_2O_3, з розподілом шарів 1-2-1 для двох типів пористості Моделі I (Poro-I) і Моделі II (Poro-II). Значення нелінійних частот для цієї задачі наведено на Рис. 6.23 і Рис. 6.24.

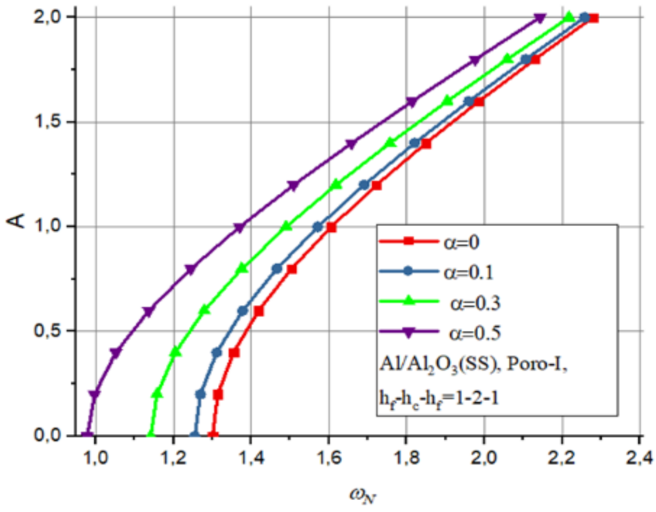


Рис. 6.23. Нелінійні частоти вільно опертої квадратної ФГМ (Al/Al_2O_3) пористої Моделі I (Poro-I) пластини

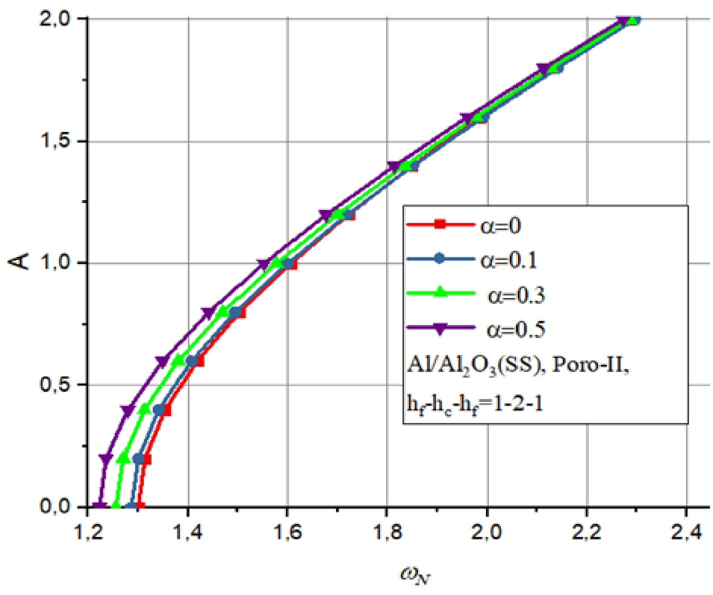


Рис. 6.24. Нелінійні частоти вільно опертої квадратної ФГМ (Al/Al_2O_3) пористої Моделі II (Poro-II) пластини

Аналізуючи Рис. 6.23-6.24, можна звернути увагу на те, що вплив типів пористості також зберігається і для нелінійних частот; тобто пористість першої моделі має більш значний вплив на поведінку нелінійних частот.

6.4.2 Нелінійний аналіз пористих сендвіч пластин складної форми

Наступні Таблиця 6.9 та Рис. 6.25 демонструють співвідношення нелінійної частоти до лінійної для ФГМ пористої сендвіч пластини складної геометрії (Рис. 6.13). Лінійна задача про коливання для такої пластини була розв’язана в п.п. 6.3.2, та наведені перші чотири форми коливань. Зараз розглядаються два типи пористості: Модель I (Poro-I) і Модель II (Poro-II), два типи ФГ матеріалу: Al_2O_3/Al і $SiN_4/SUS304$, зафіксовано значення градієнтного індексу p=2 і коефіцієнту пористості α=0.2, розподіл шарів відповідає схемі 1-1-1.

Таблиця 6.9. Співвідношення нелінійної частоти до лінійної ФГМ пористої сендвіч пластини складної геометрії для різних видів матеріалу та різних типів пористості (p=2, α=0.2, схема шарів 1-1-1, Рис. 6.13)

$\frac{W}{h}$	$\frac{\omega_N}{\omega_L}$ $(\mathrm{SiN_4/SUS304})$		$\frac{\omega_N}{\omega_L}$ $(\mathrm{Al_2O_3/Al})$	
	Poro-I	Poro-II	Poro-I	Poro-II
0	1	1	1	1
0.2	1.0043	1.0041	1.0054	1.0047
0.4	1.0172	1.0162	1.0214	1.0188
0.6	1.0383	1.0359	1.0474	1.0419
0.8	1.0670	1.0627	1.0827	1.0731
1.0	1.1026	1.0966	1.1262	1.1119
1.2	1.1446	1.1362	1.1770	1.1573
1.4	1.1921	1.1811	1.2341	1.2086
1.6	1.2444	1.2307	1.2966	1.2650
1.8	1.3010	1.2844	1.3683	1.3258
2.0	1.3613	1.3418	1.4351	1.3905

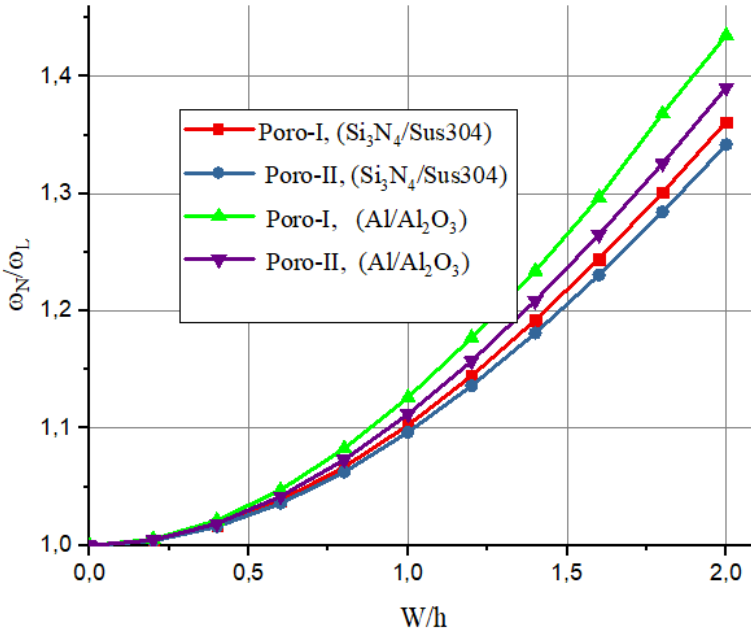


Рис. 6.25. Скелетні криві першої моди ФГМ пористої сендвіч пластини з складною формою плану (Рис. 6.13) для різних типів пористості та матеріалу (p=1, α=0.2, схема шарів 1-1-1)

З Таблиці 6.9 і Рис. 6.25 випливає, що при малих амплітудах коливань ($W/h < 1$) повністю закріплених пористих сендвіч пластин нелінійне відношення частот $\frac{\omega_N}{\omega_L}$ мало відрізняється для обох типів пористості і для різних типів ФГМ. Різниця зростає зі збільшенням амплітуди коливань. Для матеріалу $\mathrm{SiN_4}/SUS304$ співвідношення $\frac{\omega_N}{\omega_L}$ менше, ніж відповідне співвідношення для матеріалу Al_2O_3/Al для всіх амплітуд коливань.

Висновки за Розділом 6

Розв’язання лінійних та нелінійних задач пористих ФГМ пластин та оболонок є однією із актуальних проблем дослідження ФГМ об’єктів. Даний розділ якраз і присвячено цьому питанню. Основні висновки по даному розділу є наступними:

1. Розроблений у попередніх розділах метод поширюються на пористі ФГМ пластини та оболонки.
2. Побудовані варіаційні постановки задач з урахуванням пористості.

3. Одержано аналітичні вирази для обчислення елементів матриць з урахуванням ефективних властивостей пористих ФГМ для двох видів розподілення пористості (рівномірного та нерівномірного) та двох законів розподілення об'ємної частки кераміки (степеневого та сигмоїдального) в рамках теорії FSDT.

4. Проведено широке тестування теоретичних розробок та розробленого програмного забезпечення для пористих одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок і пластин. Виконано порівняння з відомими результатами та одержано добру узгодженість отриманих результатів з відомими.

5. Запропонований підхід та розроблене програмне забезпечення застосовано для розв’язання цілої низки задач. Особливу увагу будо приділено пластинам і пологих оболонкам з вирізами та отворами складної форми. Побудовані відповідні структури, які точно враховують головні крайові умови. Досліджено вплив різних параметрів на власні частоти степеневих та сигмоїдальних оболонок та пластин (градієнтного індексу p, типу ФГМ, виду крайових умов, значення коефіцієнту пористості, відношення товщин шарів та інші)

6. Виконано дослідження нелінійних коливань пористих одношарових та сендвіч ФГМ оболонок зі складною геометричною формою. Побудовані скелетні криві для різних значень геометричних та фізичних параметрів. Одержані результати можуть бути використаними, як інженерами, так і науковцями, які займаються даною темою та використовують інші методи.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [323, 328-329, 330, 351, 370-372].

РОЗДІЛ 7

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ, ЩО СПИРАЮТЬСЯ НА ПРУЖНУ ОСНОВУ

Одне з важливих питань, що виникає при проектуванні будівельних та промислових конструкцій є питання вивчення впливу контакту їх з пружною основою. Конструкції на пружній основі такі як дорожні покриття, залізничні колії, навігаційні шлюзи, різні фундаменти, широко використовуються в будівельній, аерокосмічній, цивільній, механічній та морській техніці. Завдання щодо динамічної поведінки пластин та оболонок, контактуючих з пружною основою, вивчалися багатьма вченими [217-223]. Розрахунок інженерних конструкцій, що спираються на пружний фундамент, повинні враховувати ефекти взаємодії конструкції з фундаментом, тому що ці ефекти відіграють важливу роль у їх поведінці і змінюють НДС конструкцій у порівнянні, якщо пружна основа відсутня. Одним з важливих напрямів застосування теорії розрахунку контакту конструкції з пружною основою є дослідження динамічної поведінки оболонок та пластин з композитних матеріалів. Більшість публікацій, в яких розкривається ця тематика, належить іноземним вченим [224-232].

Зауважимо, що при досить великій кількості робіт, присвячених лінійним та геометрично нелінійним коливанням ФГМ пологих оболонок, практично відсутні роботи з прикладами розв’язання задач для областей складної геометрії та з різними граничними умовами. Однією з причин, що пояснює невелику кількість публікацій, є наявність певних труднощів, пов'язаних із необхідністю математичного опису геометрії досліджуваної області, методів розв’язання нелінійних задач, побудові базисних функцій, що веде до помітного ускладнення розв’язку нелінійної системи диференціальних рівнянь.

Чисельно-аналітичний метод, що базується на теорії R-функцій (RFM), є досить альтернативним до відомих методів. Як було показано у попередніх розділах, в рамках цього методу можливо вирішувати досить великий спектр завдань теорії ФГМ пластин та пологих оболонок для практично довільної геометрії плану оболонки та різних видів граничних умов та їх комбінацій.

Тому дана глава присвячена застосуванню розробленого метода до дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок, що спираються на пружну основу.

7.1 Загальні положення

Розглянемо функціонально-градієнтні пластини та пологі оболонки, що спираються на пружну основу (Рис. 7.1).

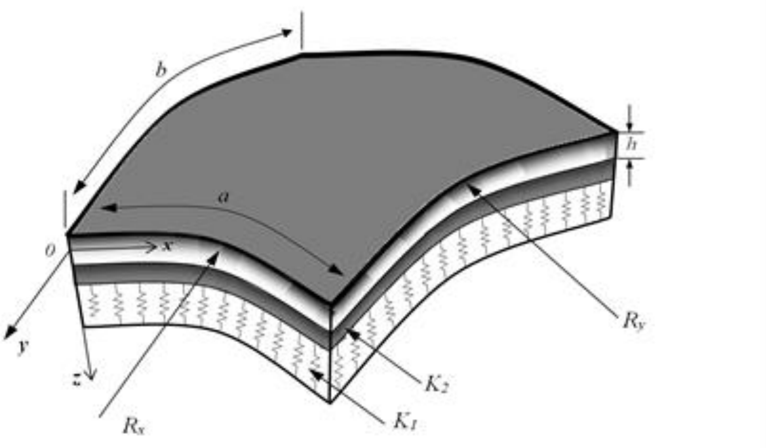


Рис. 7.1. ФГМ полога оболонка на пружній основі

Зазвичай моделювання пружної основи шаруватих структур виконується за моделями Вінклера або більш загальною двопараметричною моделлю Пастернака, а саме за допомогою співвідношення [217]:

$$p_0 = k_W w - k_P \nabla^2 w, \tag{7.1}$$

де k_w і k_p параметри пружної основи Вінклера та Пастернака відповідно.

Врахування пружної основи змінює повну потенціальну енергію системи, яка буде мати вигляд:

$$\Pi = P + V_e - T, \tag{7.2}$$

де і P і T визначаються відповідними формулами для трьох теорій, а потенціальна енергія, що одержана за наявності пружної основи представлена нижче:

$$V_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(k_w w^2 + k_p\left(\overrightarrow{\nabla w}\right)^2\right) d\Omega. \qquad (7.3)$$

Застосовуючи принцип Гамільтона до рівняння (7.2), одержимо рівняння руху оболонки в рамках різних теорій. Наприклад, для класичної теорії ці рівняння будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad (7.4)$$
$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - (k_W w - k_P \nabla^2 w) = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Аналогічно співвідношення (7.1) враховуються в рівняннях рівноваги в рамках уточненої теорії першого порядку (2.53) та теорії вищого порядку (2.73).

7.2 Розв’язання тестових задач про лінійні коливання ФГМ пластин та пологих оболонок на пружній основі

7.2.1 Дослідження вільних коливань квадратних вільно опертих ФГМ пластин з різними товщиною та параметрами пружності

Розглядаються квадратні ФГМ пластини, виготовлені з функціонально-градієнтного матеріалу Al/Al_2O_3, характеристики якого наведені в Таблиці 4.1 Розділу 4. Сторона квадрата дорівнює $2a$. Пластина вільно оперта. Порівняння отриманих результатів для безрозмірної основної частоти $\Lambda = (\lambda\ (2a)^2/h)\sqrt{\rho_M/E_M}$ з відомими наведені в Таблиці 8.1. Товщина пластини змінюється, і безрозмірні параметри пружної основи визначаються наступним чином:

$$K_w = k_w(2a)^4/D_M,\ K_P = k_p(2a)^2/D_M,\quad D_M = E_M h^3/\left(12(1-\nu^2)\right). \qquad (7.5)$$

Розглянуто два значення градієнтного індексу: p=1 і p=5.

Таблиця 7.1. Порівняння безрозмірного частотного параметра ФГМ (Al/Al_2O_3) пластин на пружній основі з відомими результатами робіт [224, 228, 295]

2a/h	Метод	$K_w = 0,$ $K_p = 0$		$K_w = 0,$ $K_p = 100$		$K_w = 100,$ $K_P = 0$		$K_w = 100,$ $K_P = 100$	
		p=1	*p*=5	*p*=1	*p*=5	*p*=1	*p*=5	*p*=1	*p*=5
5	RFM	8.135	6.884	14.441	14.358	8.567	7.413	14.689	14.635
	[295]	8.037	6.671	14.392	14.307	8.475	7.256	14.630	14.586
	[224]	8.012	6.668	14.382	14.305	8.452	7.253	14.479	14.584
	[228]	8.151	6.804	14.241	14.156	8.567	7.362	14.586	14.426
10	RFM	8.725	7.463	14.969	14.889	9.144	8.010	15.217	15.172
	[295]	8.069	7.403	14.944	14.869	9.111	7.952	15.189	15.150
	[224]	8.682	7.403	14.940	14.869	9.103	7.952	15.208	15.150
	[228]	8.818	7.553	14.963	14.889	9.228	8.087	15.150	15.167
20	RFM	8.901	7.657	15.132	15.072	9.317	8.196	15.380	15.352
	[295]	8.888	7.639	15.119	15.061	9.304	8.179	15.363	15.341
	[224]	8.886	7.639	15.178	15.061	9.302	8.179	15.429	15.341
	[228]	9.020	7.793	15.183	15.125	9.429	8.321	15.341	15.404

Як спостерігається з Таблиці 7.1, отримані результати добре узгоджуються з наведеними в літературі [224, 228, 295]. Відхилення не перебільшує 1 %.

7.2.2 Лінійні коливання вільно опертої ФГМ циліндричної пологої оболонки з квадратною формою плану

Перевіримо запропонований підхід на прикладі задачі про лінійні коливання ФГМ циліндричної пологої оболонки квадратної форми, що спирається на пружну основу. Геометричні параметри оболонки є наступними:

$$a/b=1;\ 2a/R=0.8;\ 2a/h=20;\ h=1\ mm.$$

Оболонка виготовлена з суміші ФГМ матеріалу $ZrO_2/Ti-6Al-4V$. Модулі Юнга металу E_m і кераміки E_c та щільність матеріалу ρ_m, ρ_c при кімнатній температурі $T_0 = 300\,K$ співпадають з наступними значеннями:

$$E_m = 105.6981\,GPA; \quad \rho_m = 4427\ Kg/m^3;$$
$$E_c = 168.0629\ GPA; \quad \rho_c = 3000\,Kg/m^3.$$

Коефіцієнт Пуассона приймається однаковим для металу та кераміки та вважається рівним 0.3 $(\nu_m = \nu_c = 0.3)$.

Отримані в даному тесті результати для безрозмірного частотного параметра обчислюються за формулою:

$$\Lambda = \lambda\ (2a)^2\sqrt{\rho_0/E_0}/h$$

за допомогою обох теорій (HSDT і FSDT) і порівнюються з результатами роботи [220] в Таблиці 7.1. Зауважимо, що значення E_0 і ρ_0 набувають значень E_m і ρ_m при кімнатній температурі $T_0 = 300\ K$. Значення $k_w,\ k_g$ визначаються як:

$$k_w = K_w(2a)^4/(E_m h^3),\ k_g = K_G(2a)^2/(E_m h^3). \qquad (7.6)$$

При температурі $T_t = 400$, $T_b = 400$ значення E_c і ρ_c та E_m і ρ_m визначаються за формулою (4.1-4.2).

Таблиця 7.2. Порівняння безрозмірних частот вільно опертих циліндричних ФГМ оболонок з відповідними результатами з роботи [220]

$(K_w,\ K_g)$	T_t/T_b	Метод	p=0	p=0.5	p=2	p=5
$K_w = 100$ $K_g = 0$	$T_t = 400$ $T_b = 400$	RFM (FSDT)	18.24	16.31	14.77	14.10
		RFM (HSDT)	18.45	16.50	14.93	14.28
		[220]	17.19	15.83	14.72	14.23
$K_w = 100$ $K_g = 10$	$T_t = 400$ $T_b = 400$	RFM (FSDT)	24.67	22.42	20.66	19.89
		RFM (HSDT)	24.82	22.57	20.78	20.02
		[220]	24.20	22.38	20.90	20.26

Найбільше відхилення від результатів роботи [220] дорівнює 7 % при p=0, в інших випадках воно складає менш ніж 2.5 %. Можна відзначити, що відхилення результатів при застосуванні різних теорій FSDT та HSDT не перебільшує 1.5 %.

7.2.3 Аналіз впливу товщини, крайових умов та параметрів пружної основи на значення власних частот оболонок двоякої кривини

Відзначимо, що розв'язана нижче задача не є тестовою. У цьому завданні показані дослідження впливу товщини оболонки на власні частоти для різних видів закріплень: вільно опертих оболонок (SS) та жорстко затиснутих по всій границі (CL). Значення безрозмірного частотного параметра обчислювались за формулою:

$$\Lambda = \lambda \ (2a)^2 \sqrt{\rho_0 / E_0} / h.$$

На Рис. 7.2, Рис. 7.3 показана залежність поведінки безрозмірного частотного параметра циліндричної та сферичної оболонок, виготовлених з суміші $Si_3N_4/SUS304$, ефективні властивості якої визначають при кімнатній температурі $T_b = T_t = 300 \ K$ (Таблиця 4.1.) Розглядаються різні граничні умови та різні значення характеристик пружної основи K_w, K_g.

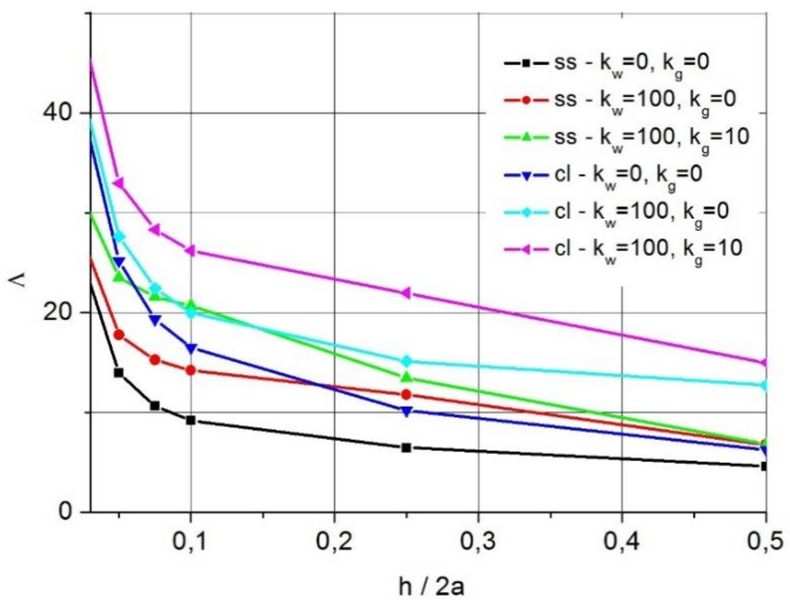


Рис. 7.2. Зміна безрозмірних частот ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) *циліндричної* оболонки при збільшенні товщини для різних граничних умов і значень характеристик пружної основи ($k_1 = \frac{2a}{R_x} = 1$; $k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0$; $a/b = 1$)

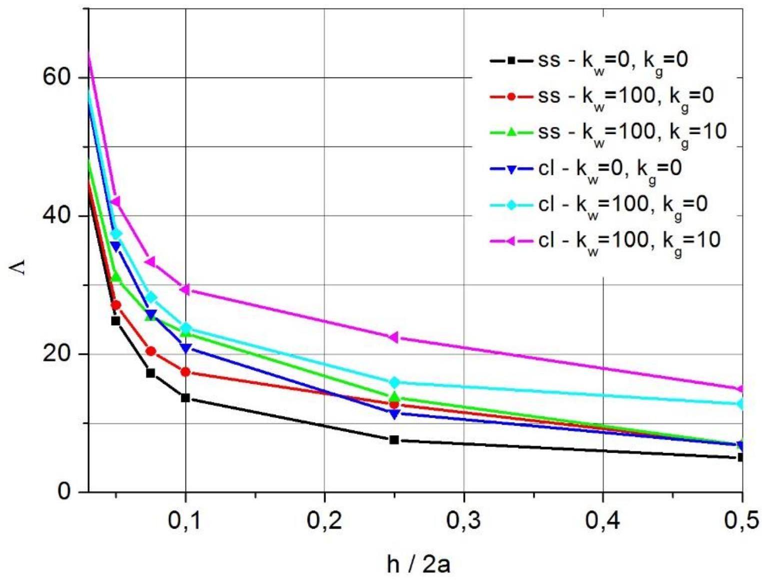


Рис. 7.3. Зміна безрозмірних частот ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) *сферичної* оболонки при збільшенні товщини для різних граничних умов і значень характеристик пружної основи ($k_1 = \frac{2a}{R_x} = 1;\ k_2 = \frac{2a}{R_y} = 1;\quad a/b = 1$)

Як показує аналіз Рис. 7.2 і Рис. 7.3, найбільший вплив на безрозмірний частотний параметр надає пружна основа. Чим більші значення її параметрів K_w, K_g, тим більше значення частотного параметра. Кривина оболонок впливає меншою мірою. Особливо це стосується жорстко закріплених оболонок. Власні частоти таких оболонок перебільшують відповідні частоти вільно опертих оболонок для всіх значень товщини.

7.3 Дослідження власних коливань ФГМ одношарових пологих оболонок складної форми

7.3.1 ФГМ полога восьмикутна оболонка з центральним квадратним отвором та круговими вирізами

Продемонструємо нові результати для ФГМ пологих оболонок зі складною формою в плані. Розглянемо пологу оболонку, що спирається на пружну основу, план якої зображено на Рис. 7.4.

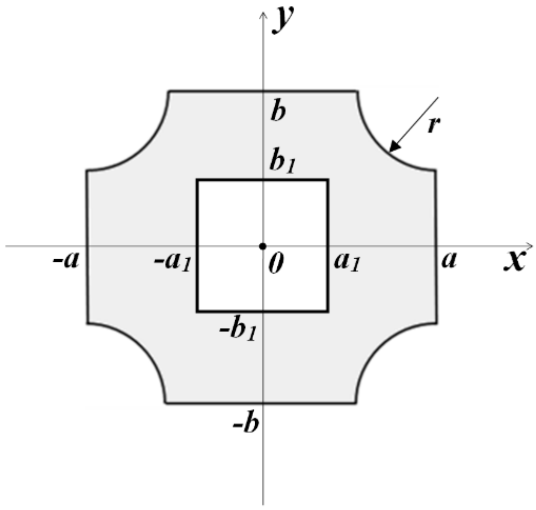


Рис. 7.4. Складна форма плану ФГМ пологої оболонки

Припустимо, що оболонка закріплена повністю, включаючи вирізи та отвір. Геометричні розміри є такими:

$$k_1 = 0.2;\ k_2 = 0;\ 0.2;\ \frac{h}{2a} = 0.1;\ \frac{a_1}{a} = 0.2;$$

$$a_1 = b_{1;}\ r/2a = 0.25.$$

Аналізуємо два види сумішей матеріалу: $Si_3N_4/SUS304$ і $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ при $T_b = T_t = 300\ K$.

Структури розв'язку для оболонок із повністю закріпленою границею записуються як і раніше у вигляді (4.29):

$$u = \omega\Phi_1,\ v = \omega\Phi_2,\ \ w = \omega\Phi_3,\ \psi_x = \omega\Phi_4,\ \psi_y = \omega\Phi_5, \tag{7.7}$$

Функція $\omega(x,y)$ побудована за допомогою теорії R-функцій і дорівнює нулю на всій границі. У даному випадку ця функція має такий вигляд:

$$\omega(x,y) = \Big((f_1 \wedge_0 f_2) \wedge \big((f_3 \wedge_0 f_4) \wedge (f_5 \wedge_0 f_6)\big)\Big) \wedge_0 (f_7 \vee_0 f_8), \tag{7.8}$$

де символи $\wedge_0$, $\vee_0$ позначають R-операції [287]. Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}8}$ визначаються як:

$$f_1 = \left(a^2\ - x^2\right)/2a \geq 0,\ \ \ f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0,$$

$$f_{3,4} = ((x \mp a)^2 + (y-b)^2 - r^2)/2r \geq 0,$$

$$f_{5,6} = ((x \pm a)^2 + (y+b)^2 - r^2)/2r \geq 0,$$

$$f_7 = (x^2 - a_1^2)/2a_1 \geq 0, \qquad f_8 = (y^2 - b_1^2)/2b_1 \geq 0.$$

Невизначені компоненти $\Phi_i,\ i=\overline{1,5}$ структури (7.7) були розкладені в степеневі ряди з урахуванням симетрії задачі (4.45). Для апроксимації невизначеної складової Φ_3 було взято двадцять вісім членів ряду поліномів, а інші невизначені компоненти були апроксимовані п'ятнадцятьма членами.

Таблиця 7.3. Значення параметра власної частоти жорстко закріплених ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричних і сферичних оболонок, що спираються на пружну основу

p	(K_w,K_g) (0,0)	(K_w,K_g) (100,0)	(K_w,K_g) (100,10)	(K_w,K_g) (100,100)	(K_w,K_g) (0,0)	(K_w,K_g) (100,0)	(K_w,K_g) (100,10)	(K_w,K_g) (100,100)
	Циліндрична ($k_1=0.2, k_2=0$)				Сферична ($k_1=0.2, k_2=0.2$)			
0	75.301	77.512	91.098	166.912	75.497	77.702	91.261	167.025
0.5	52.148	53.901	64.548	117.595	52.282	54.031	64.656	117.569
1	45.610	47.245	57.099	102.590	45.726	47.356	57.189	102.564
2	40.680	42.228	51.475	90.837	40.781	42.325	51.553	90.816
5	36.676	38.162	46.951	81.226	36.766	38.249	47.021	81.211
10	34.930	36.400	45.052	77.371	35.018	36.484	45.119	77.359

Залежність параметра власної частоти для ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричної та сферичної оболонок, що спираються на пружну основу, від об’ємної частки кераміки p і параметрів пружної основи K_w, K_g наведено в Таблиці 7.3.

Як випливає з Таблиці 7.3, вплив кривини не є суттєвим для повністю закріплених пологих оболонок. Більший ефект досягається зі збільшенням індексу градієнта p. Власні частоти зменшуються при збільшенні градієнтного індексу як для циліндричних, так і для сферичних оболонок. Результати підтверджують, що основні частоти збільшуються, коли пологі оболонки спираються на пружну основу. Вплив жорсткості фундаменту за Вінклером на власну частоту істотно менший, ніж вплив жорсткості фундаменту за Пастернаком, що характеризує зсув фундаменту.

7.3.2 Лінійні коливання ФГМ пологих оболонок на пружній основі зі змінною товщиною і вирізами різної форми

Використання варіаційного методу Рітца та теорії R-функцій сприяє дослідженню оболонок змінної товщини, які також часто зустрічаються на практиці.

Розглянемо ФГМ циліндричну пологу оболонку змінної товщини на пружній основі, форма плану якої зображена на Рис. 7.5. Геометричні параметри оболонки прийнято наступними:

$$\frac{a}{b} = 1;\ \frac{d}{2a} = 0.2;\ \frac{c}{2a} = 0.4;\ \frac{h_0}{2a} = 0.1;\ \frac{r}{2a} = 0.15;\ k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0.2; k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0.$$

Для ФГМ може бути обрана одна з наступних сумішей:

$$\textbf{M1:}\ (Al/Al_2O_3);\ \textbf{M2:}\ (Si_3N_4/SUS304);\ \textbf{M3:}\ (ZrO_2/Ti-6Al-4V). \qquad (7.9)$$

Механічні характеристики цих матеріалів надано в Таблиці 4.1.

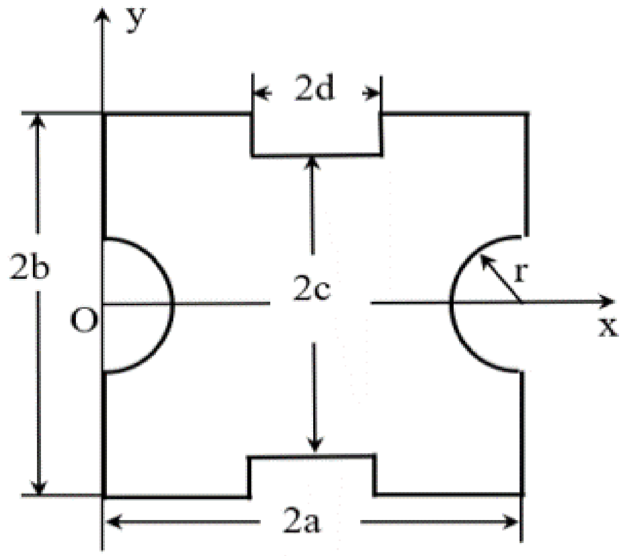


Рис. 7.5. Форма оболонки зі змінною товщиною, що спирається на пружну основу

Припустимо, що товщина оболонки змінюється за параболічним законом (Рис. 7.6), який визначається наступною формулою:

$$h(x, y) = h_0(1 - \alpha(x/a)^2), \qquad (7.10)$$

де α є параметр змінної товщини, що варіюється.

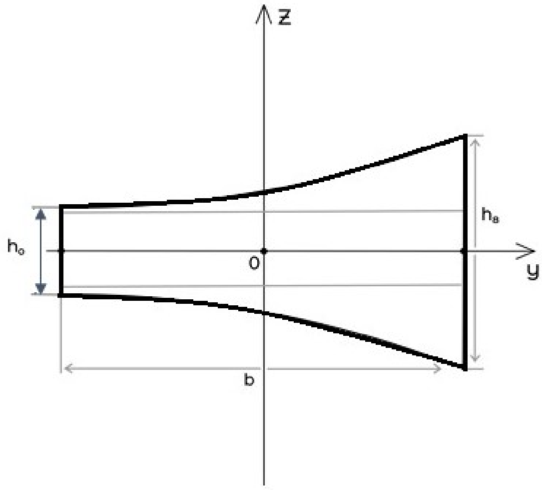


Рис. 7.6. Зміна товщини оболонки за параболічним законом

Наведемо спочатку результати, отримані для ФГМ циліндричної оболонки, виготовленої з суміші Al/Al_2O_3, квадратної форми в плані змінної товщини, що спирається на пружну основу.

Безрозмірні основні частоти $\Lambda = \lambda\ (2a)^2 h_0 \sqrt{\rho_m/E_m}$ було обчислено для $K_s^2 = 5/6$, результати наведено в Таблиці 7.4. Параметри пружної основи Вінклера і Пастернака визначаються за формулами (7.5).

Таблиця 7.4. Вплив індексу градієнта p та пружної основи на безрозмірну основну частоту закріпленої та вільно опертої ФГМ циліндричної оболонки ($k_1 = 0.2$; $k_2 = 0$, $h_0/2a$=0.1) змінної товщини

p	$K_w = 0,\ K_p = 0$			$K_w = 50,\ K_p = 0$		
	Жорстка закріплена оболонка					
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$
0	0.1966	0.1818	0.1645	0.1974	0.1827	0.1657
1	0.1522	0.1407	0.1274	0.1534	0.1421	0.1292
2	0.1381	0.1277	0.1157	0.1395	0.1294	0.1178
5	0.1287	0.1192	0.1081	0.1302	0.1211	0.1143
Вільно оперта оболонка						
0	0.1149	0.1058	0.0959	0.1163	0.1075	0.0979
1	0.0881	0.0812	0.0737	0.0902	0.0837	0.0767
2	0.0800	0.0738	0.0670	0.0824	0.0766	0.0705
5	0.0753	0.0694	0.0630	0.0780	0.0726	0.0669

Будемо вважати, що оболонка складної геометрії (Рис. 7.5) закріплена по всій границі, тому граничні умови є наступними:

$$w = u = v = \psi_x = \psi_y = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega.$$

Структура розв'язку у цьому випадку має вигляд (7.7).

Щоб отримати систему базисних функцій, необхідно побудувати рівняння границі області $\omega(x, y) = 0$. За допомогою R-функцій функція $\omega(x, y)$ визначається як:

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 \big((f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_5 \wedge_0 f_6)\big), \tag{7.11}$$

де функції f_i, $i = \overline{1,6}$ визначаються нерівностями:

$$f_1 = x(2a - x)/2a \geq 0, \quad f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0,$$

$$f_3 = ((x - a)^2 - d^2)/2d \geq 0;$$

$$f_4 = (c^2 - y^2)/2c \geq 0; \quad f_5 = ((x - 2a)^2 + y^2 - r^2)/2r \geq 0;$$

$$f_6 = (x^2 + y^2 - r^2)/2r \geq 0.$$

Для закріплених оболонок систему базисних функцій можна вибрати у такому вигляді:

$$u_k = \omega(x, y)\varphi_k^{(u)},\ k = \overline{1, N_1}, \qquad v_k = \omega(x, y)\varphi_k^{(v)},\ k = \overline{N_1 + 1, N_2},$$

$$w_k = \omega(x, y)\varphi_k^{(w)},\ k = \overline{N_2 + 1, N_3}, \quad \psi_{xk} = \omega(x, y)\varphi_k^{(\psi_x)},\ k = \overline{N_3 + 1, N_4},$$

$$\psi_{yk} = \omega(x, y)\varphi_k^{(\psi_y)},\ k = \overline{N_4 + 1, N_5},$$

де $\varphi_k^{(r)}$, $r = u, v, w, \psi_x, \psi_y$ є елементами деякої повної системи функцій Φ_i, $i =$ 1,2,3,4,5. В якості такої системи в даній роботі обрано систему степеневих поліномів.

Вплив показника степеневого закону об'ємної частки кераміки p на безрозмірну власну частоту для циліндричних оболонок, виготовлених з різних ФГМ, показано на Рис. 7.7 і Рис. 7.8. Як видно, частоти для всіх розглянутих матеріалів зменшуються зі збільшенням показника об'ємної частки, оскільки жорсткість оболонки зменшується зі збільшенням значення градієнтного індексу p.

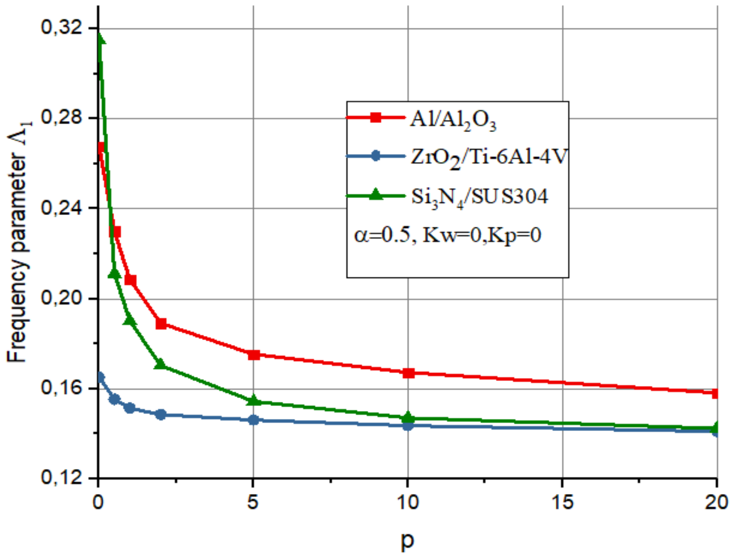


Рис. 7.7. Вплив показника степеневого закону на безрозмірну власну частоту циліндричної оболонки змінної товщини $(\alpha = 0.5)$ для різних ФГМ (*Kw*=0, *Kp*=0)

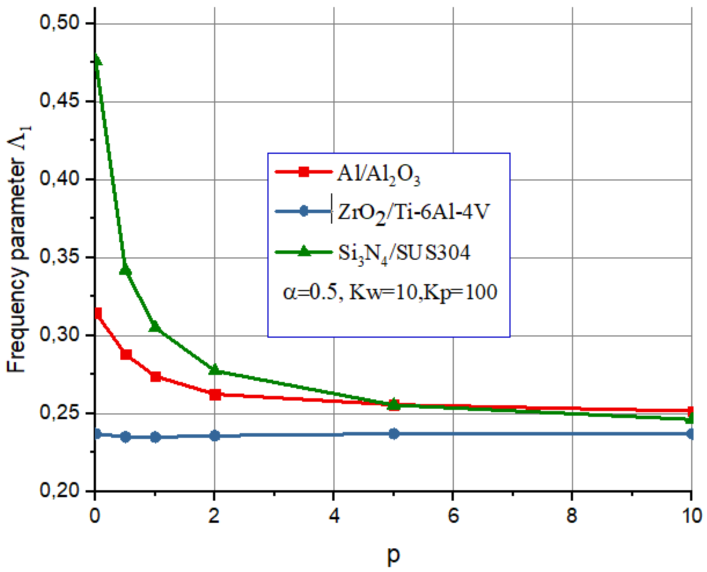


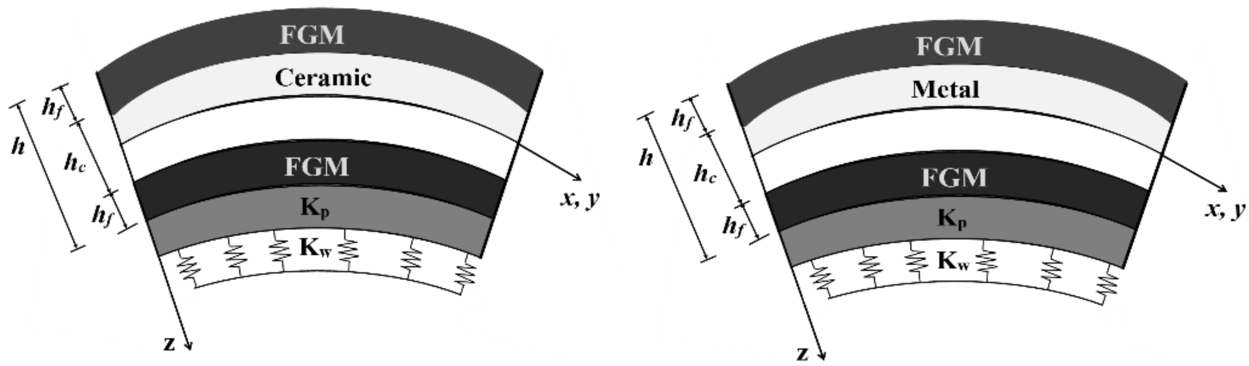
Рис. 7.8. Вплив показника степеневого закону на безрозмірну власну частоту циліндричної оболонки змінної товщини $(\alpha = 0.5)$ для різних ФГМ, що спираються на пружну основу (*Kw*=10, *Kp*=100)

Наявність пружної основи (Рис. 7.8) також значно підвищує жорсткість оболонки. Тому частоти оболонки на пружній основі більші, ніж відповідні частоти оболонок без пружної основи (Рис. 7.7).

7.4 Динамічний аналіз сендвіч пологих оболонок, що спираються на пружну основу

Розглядаються тришарові пологі оболонки з лицьовими поверхнями, зробленими з функціонально-градієнтних матеріалів. Оболонка спирається на пружну основу (Рис. 7.1), її форма плану може бути довільною.

Середній шар виготовляється з кераміки (Модель А) або металу (Модель Б). Позначимо загальну товщину оболонок через h, товщину лицьового листа через h_f і товщину серцевини (центрального шару) через h_c (Рис. 7.9а,б).



а) б)

Рис. 7.9. Тришарова полога оболонка на пружній основі: а) Модель А; б) Модель Б

Для розглянутих задач відповідні вирази частки керамічної фази для кожного шару пов'язані наступними формулами:

Модель А: Модель Б:

$$\begin{cases} V_c^{(1)} = \left(\dfrac{h+2z}{h-h_c}\right)^p, & z \in [-\dfrac{h}{2}, -\dfrac{h_c}{2}] \\ V_c^{(2)} = 1, & z \in [-\dfrac{h_c}{2}, \dfrac{h_c}{2}] \\ V_c^{(3)} = \left(\dfrac{h-2z}{h-h_c}\right)^p, & z \in \left[\dfrac{h_c}{2}, \dfrac{h}{2}\right]. \end{cases} \qquad \begin{cases} V_c^{(1)} = \left(\dfrac{h_c+2z}{h_c-h}\right)^p, & z \in [-\dfrac{h}{2}, -\dfrac{h_c}{2}] \\ V_c^{(2)} = 0, & z \in [-\dfrac{h_c}{2}, \dfrac{h_c}{2}] \\ V_c^{(3)} = \left(\dfrac{h_c+2z}{h+h_c}\right)^p, & z \in \left[\dfrac{h_c}{2}, \dfrac{h}{2}\right]. \end{cases}$$

7.4.1 Лінійні коливання квадратних ФГМ сендвіч пластин та пологих оболонок

Розглядаються коливання ФГМ сендвіч пластини і пологих оболонок (Модель А) квадратної форми. Сторона основи квадрата дорівнює $2a$.

Передбачається, що ФГМ виготовлено з суміші Al/Al_2O_3, характеристики якої наведено в Таблиці 4.1.

Для сферичних пологих оболонок і сендвіч пластин (Модель А) отримані результати наведені в Таблицях 7.5 і 7.6. Розглянуто різні схеми розташування шарів:

$$h_f - h_c - h_f = (1-1-1; \quad 1-2-1; \quad 2-1-2).$$

Безрозмірна основна частота обчислювалась за формулою:

$$\Lambda = (\lambda\ (2a)^2/h)\sqrt{\rho_M/E_M}.$$

Таблиця 7.5. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту вільно опертої ФГМ квадратної сферичної оболонки ($k_1 = k_2 = 0.5$, $h/2a$=0.2)

p	$h_f - h_c - h_f = 1-1-1$				$h_f - h_c - h_f = 1-2-1$			
	$K_w = 0$ $K_p = 0$	K_w=100 $K_p = 0$	$K_w = 0$ K_P=100	K_w =100 K_P=100	$K_w = 0$ $K_p = 0$	K_w=100 $K_p = 0$	$K_w = 0$ K_P=100	K_w =100 K_P=100
0	11.1839	11.5329	16.8053	17.0394	13.4095	13.6830	18.1044	18.3077
0.5	12.3175	12.6313	17.5639	17.7853	13.4603	13.7308	18.1512	18.3526
1	12.1490	12.4652	17.4602	17.6816	13.1552	13.4307	17.9481	18.1511
2	11.6187	11.9470	17.1289	17.3535	12.6496	12.9348	17.6163	17.8225
5	10.8819	11.2300	16.6751	16.9046	12.0001	12.2993	17.1971	17.4076
10	10.5599	10.9176	16.4765	16.7085	11.6906	11.9972	16.9984	17.2111
20	10.4011	10.7639	16.3779	16.6115	11.5207	11.8314	16.8892	17.1031

З Таблиць 7.5 і 7.6 видно, що значення власних частот істотно залежать від параметрів пружних основ і товщини шарів h_j, h_c. Чим товщій шар кераміки, тим більше частота. Вплив параметра Вінклера $\overline{K_w}$ на значення частоти значно менший, ніж вплив параметра Пастернака $\overline{K_P}$.

Таблиця 7.6. Вплив індексу градієнта p на безрозмірну основну частоту вільно опертої ФГМ квадратної пластини ($k_1 = k_2 = 0$)

p	$h_f - h_c - h_f = 2-1-2$				$h_f - h_c - h_f = 1-2-1$			
	$K_w = 0$ $K_p = 0$	K_w=100 $K_p = 0$	$K_w = 0$ K_P=100	K_w =100 K_P=100	$K_w = 0$ $K_p = 0$	K_w=100 $K_p = 0$	$K_w = 0$ K_P=100	K_w =100 K_P=100
0	4.5376	5.3884	13.6871	13.9921	12.0186	12.3240	17.1145	17.3304
0.5	9.7176	10.1360	16.1157	16.3714	12.1278	12.4287	17.1928	17.4064
1	9.9658	10.3712	16.2551	16.5066	11.8177	12.1252	16.9933	17.2087
2	9.5543	9.9733	16.0183	16.2718	11.2825	11.6031	16.6567	16.8756
5	8.8156	9.2655	15.6065	15.8652	10.5770	10.9172	16.2241	16.4482
10	8.5132	8.9773	15.4393	15.7003	10.2343	10.5850	16.0170	16.2437
20	8.3831	8.8538	15.3672	15.6291	10.0442	10.4011	15.9025	16.1307

Поведінка власних частот не є монотонною зі збільшенням показника об'ємної частки p. При збільшенні p від 0 до 2 частоти зростають, а починаючи з p = 2 плавно зменшуються. Можна звернути увагу, що власні частоти сферичної вільно опертої оболонки більші за відповідні частоти пластини, ця різниця варіюється від 5 % до 10 %.

7.4.2 Лінійні коливання ФГМ сендвіч оболонок шестикутної форми з прямокутним отвором, що спираються на пружну основу

Дослідимо коливання ФГМ пологої оболонки постійної товщини h з вирізом складної форми в плані, що зображено на Рис. 7.10. Механічні характеристики функціонально-градієнтного матеріалу Al/Al_2O_3 визначені в Таблиці 4.1. Геометричні розміри задаються як:

$$a/b = 1; \quad h/2a = 0.2; \quad b_1/2a = 0.1; \quad a_2/2a = 0.15; \quad a_1/2a = 0.25;$$

$$k_1 = \frac{2a}{R_x} = 0.5; \quad k_2 = \frac{2a}{R_y} = 0.5.$$

Розглянуто такі співвідношення між товщиною шарів:

$$h_f - h_c - h_f = (1-1-1; \quad 1-2-1; \quad 2-1-2).$$

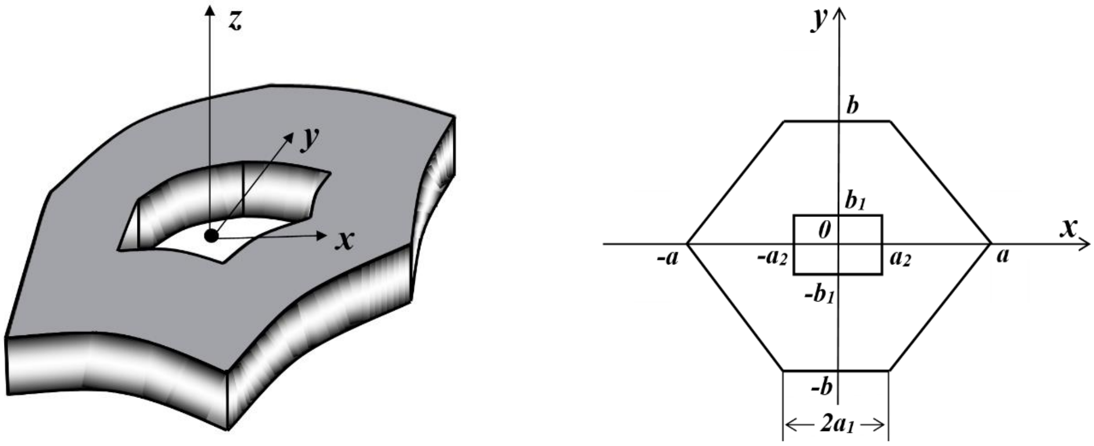


Рис. 7.10. Шестикутна ФГМ оболонка з прямокутним отвором та її форма плану

Розглянемо граничні умови двох видів:

1) C-C, оболонка закріплена по всій межі (на зовнішній границі та на вирізі);

2) C-F, оболонка закріплена на зовнішньому контурі та вільна на вирізі.

Для граничної умови C-C структура розв’язків має вигляд (7.7).

Для граничної умови C-F структура розв’язків має такий вигляд:

$$u = \omega_{ex}\Phi_1, \quad v = \omega_{ex}\Phi_2, \quad w = \omega_{ex}\Phi_3, \quad \psi_x = \omega_{ex}\Phi_4, \quad \psi_y = \omega_{ex}\Phi_5, \tag{7.12}$$

де функції $\omega(x, y)$ та $\omega_{ex}(x, y)$ будуються за допомогою теорії R-функцій

У наведеному випадку функції $\omega(x, y)$ та $\omega_{ex}(x, y)$ можуть бути побудовані як:

$$\omega(x, y) = \big((f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 f_5\big) \wedge_0 (f_6 \vee_0 f_7) \tag{7.13}$$

$$\omega_{ex}(x, y) = \big((f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 f_5\big). \tag{7.14}$$

Функції $f_i, \ i = \overline{1{,}7}$ у співвідношеннях (7.13-7.14) визначаються як:

$$f_1 = k(x - a) - y \geq 0, \quad f_2 = -k(x + a_1) - y + b \geq 0,$$

$$f_3 = -k(x + a) + y \geq 0, \quad f_4 = k(x - a_1) + y + b \geq 0,$$

$$f_5 = \big(b^2 - y^2\big)/2b \quad \geq 0, \ \ f_6 = \big(y^2 - {b_1}^2\big)/2b_1 \geq 0,$$

$$f_7 = \big(x^2 - {a_2}^2\big)/2a_2 \geq 0, \qquad k = b/(a_1 - a).$$

Наведені нижче результати отримано шляхом апроксимації невизначених компонент у структурних формулах степеневими поліномами (4.45) до 14-го та 11-го степенів для функції w та функцій u, v, ψ_x, ψ_y що відповідає збереженню 36 та 21 координатних функцій. Для обчислення інтегралів у матриці Рітца використовувалися десятиточкові формули Гауса та інтегрування проводилося по чверті області визначення.

Вплив градієнтного індексу p та параметрів пружних основ K_w, K_P на основну частоту ФГМ сферичної оболонки з вирізом складної форми показано на Рис. 7.11, 7.12, 7.13. На Рис. 7.11 представлено вплив на власну частоту пологих оболонок з наступним співвідношенням між товщинами шарів $h_f - h_c - h_f = (1 - 1 - 1)$.

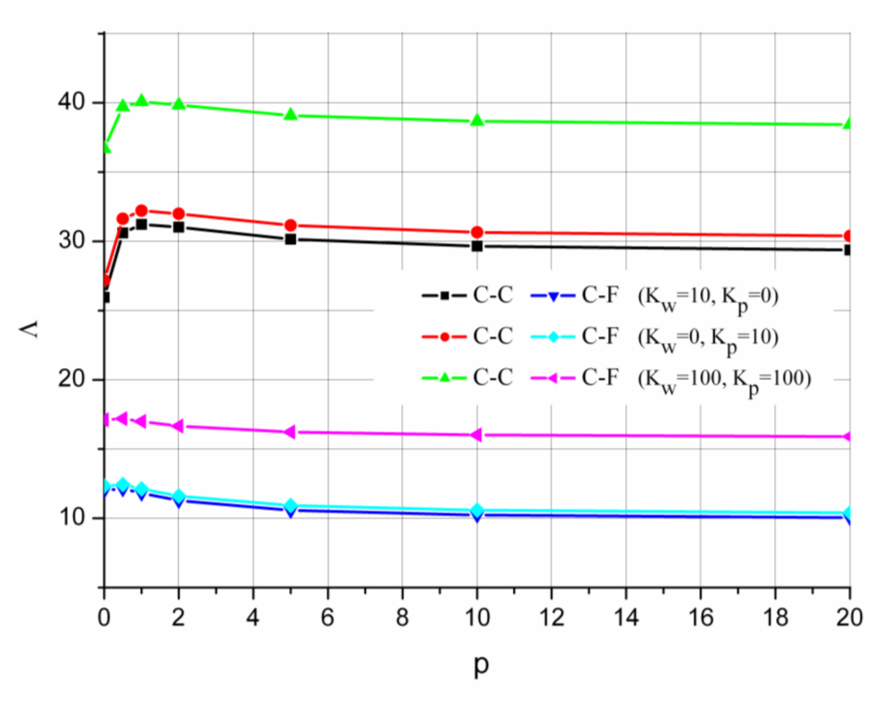


Рис. 7.11. Вплив градієнтного індексу p та параметрів пружних основ на основну частоту ФГМ сферичних оболонок з вирізом ($h_f - h_c - h_f = (1 - 1 - 1)$)

На Рис. 7.12 та 7.13 показано поведінку власної частоти ФГМ сферичної оболонки (Рис. 7.10) для розташування шарів $h_f - h_c - h_f = (1 - 2 - 1)$ та $h_f - h_c - h_f = (2 - 1 - 2)$ відповідно.

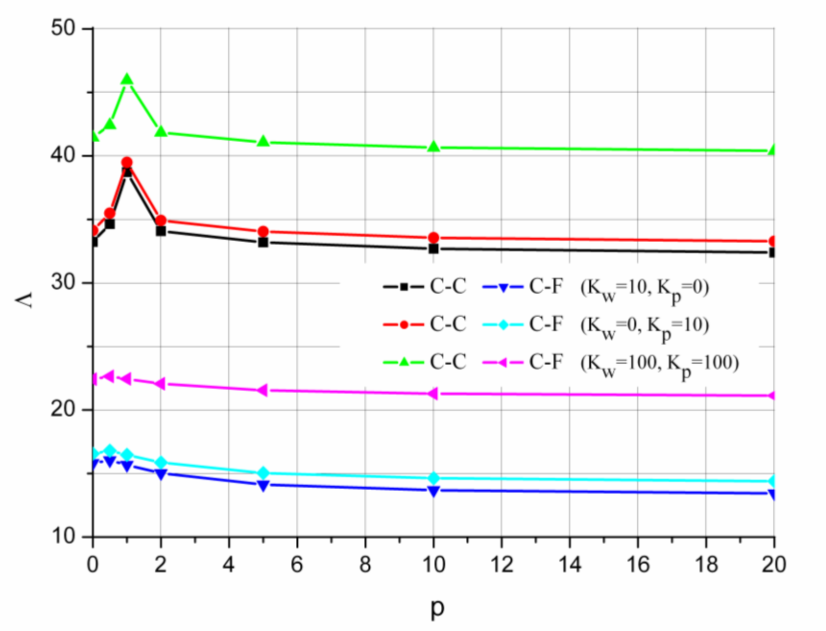


Рис. 7.12. Вплив градієнтного індексу p та параметрів пружних основ на основну частоту ФГМ сферичних оболонок з вирізом ($h_f - h_c - h_f = (1-2-1)$)

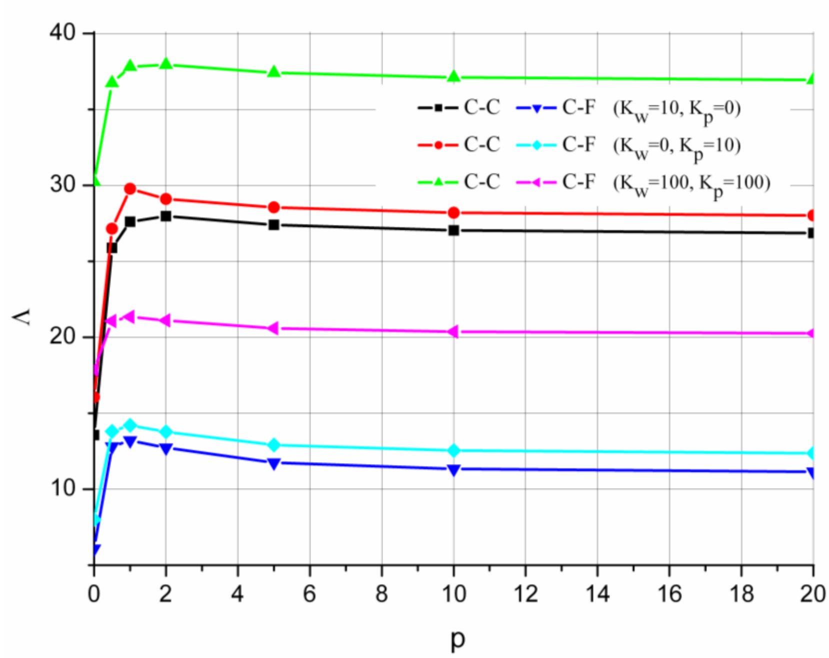


Рис. 7.13. Вплив градієнтного індексу p та параметрів пружних основ на основну частоту ФГМ сферичних оболонок з вирізом ($h_f - h_c - h_f = (2-1-2)$)

З Рисунків 7.11, 7.12, 7.13 випливає, що якісна поведінка частот у випадку складної форми ФГМ пологих оболонок подібна до попереднього випадку для оболонок квадратної форми в плані. Поки градієнтний індекс p менше 1, вони збільшуються, але якщо індекс p стає більше 1, вони зменшуються. Найбільш істотний вплив на величину частоти справляє параметр пружної основи Пастернака K_P та граничні умови.

7.5 Нелінійні вільні коливання

7.5.1 Тестові задачі. Нелінійні коливання вільно опертих циліндричних оболонок на пружній основі

Проаналізуємо нелінійні коливання циліндричної ФГМ пологої оболонки, яка описана в пункті 7.2.2.

Порівняння відношення нелінійної частоти до лінійної ω_{NL}/ω_L при температурі $T_b = T_t = 400\ K$ показано в Таблиці 7.7.

Таблиця 7.7. Порівняння відношення нелінійної частоти до лінійної ω_{NL}/ω_L з відповідними результатами роботи [220]

(K_w, K_p)	P	Метод	Λ	W_{max}/h				
				0.2	0.4	0.6	0.8	1
(100,0)	2	[220]	14.72	1.0040	1.0160	1.0356	1.0625	1.0961
		RFM	14.89	1.0023	1.0099	1.0240	1.0459	1.0765
(100,10)	0	[220]	24.20	1.0025	1.0101	1.0227	1.0399	1.0618
		RFM	24.47	1.0018	1.0073	1.0170	1.0313	1.0505
	0.5	[220]	22.38	1.0023	1.0091	1.0203	1.0358	1.0554
		RFM	22.42	1.0016	1.0068	1.0157	1.0289	1.0464
	2	[220]	20.905	1.0020	1.0080	1.0178	1.0315	1.0488
		RFM	20.747	1.0015	1.0062	1.0144	1.0262	1.0419
	5	[220]	20.26	1.0019	1.0074	1.0166	1.0294	1.0455
		RFM	20.03	1.0014	1.0059	1.0136	1.0248	1.0395

Порівняння, наведене в Таблиці 7.7, демонструє, що результати розробленого методу добре узгоджуються з існуючими результатами також у випадку дослідження нелінійних коливань оболонок на пружній основі.

7.5.2 Нелінійні коливання ФГМ пологої восьмикутної оболонки з центральним квадратним отвором та круговими вирізами

Розглядається ФГМ полога оболонка, що представлена на Рис. 7.4, лінійні коливання якої проведені в п.п. 7.3.1.

Дослідження нелінійних коливань виконано для фіксованих значень градієнтного індексу *p*=0.5 та *p*=2 та різних значень характеристик K_w, K_g пружних основ: (K_w, K_g)=(0,0); (100,0); (100,10).

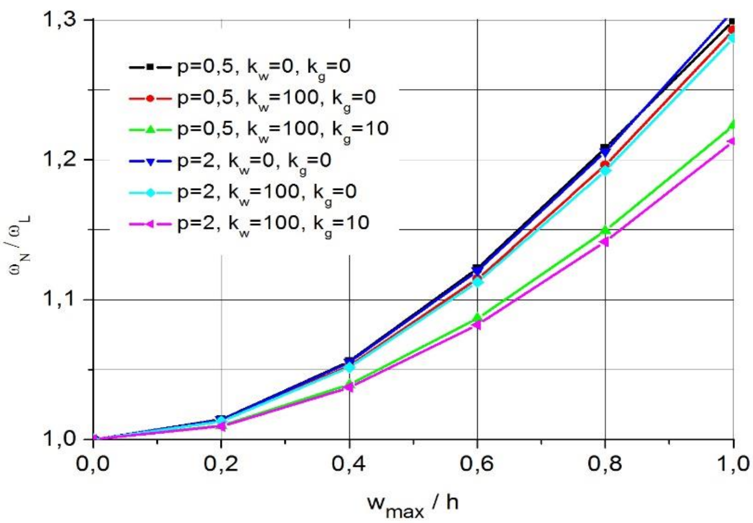


Рис. 7.14. Відношення нелінійної частоти до лінійної ω_{NL}/ω_L для закріпленої ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричної оболонки, що спирається на пружну основу

На Рис. 7.14 показано поведінку скелетних кривих для жорстко закріплених ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) циліндричних оболонок.

Як видно з Рис. 7.14, вплив характеристик пружної основи більш суттєвий, ніж значення показника градієнта.

7.5.3 Нелінійні вільні коливання ФГМ пологих оболонок змінної товщини на пружній основі

Проаналізуємо нелінійні коливання квадратної циліндричної ФГМ пологої оболонки змінної товщини, що спирається на пружну основу. Оболонка виготовлена із суміші Al/Al_2O_3, характеристики якої наведені в Таблиці 4.1.

Товщина оболонки змінюється за параболічним законом (Рис. 7.6):

$$h(x,y) = h_0(1 - \alpha(x/a)^2). \tag{7.15}$$

Безрозмірні основні частоти $\Lambda = \lambda\ (2a)^2 h_0\sqrt{\rho_m/E_m}$ було обчислено в рамках теорії першого порядку з коефіцієнтом зсуву $K_s^2 = 5/6$. Параметри пружної основи Вінклера і Пастернака визначають за допомогою формул (7.5).

Скелетні криві для квадратних закріплених (CL) і вільно опертих (SS) ФГМ циліндричних оболонок з параболічним законом зміни товщини $h(x,y) = h_0(1 - \alpha(x/a)^2)$ оболонки для значень $(\alpha = 0.5)$ та $(\alpha = 0)$ наведені на Рис. 7.15 і Рис. 7.16.

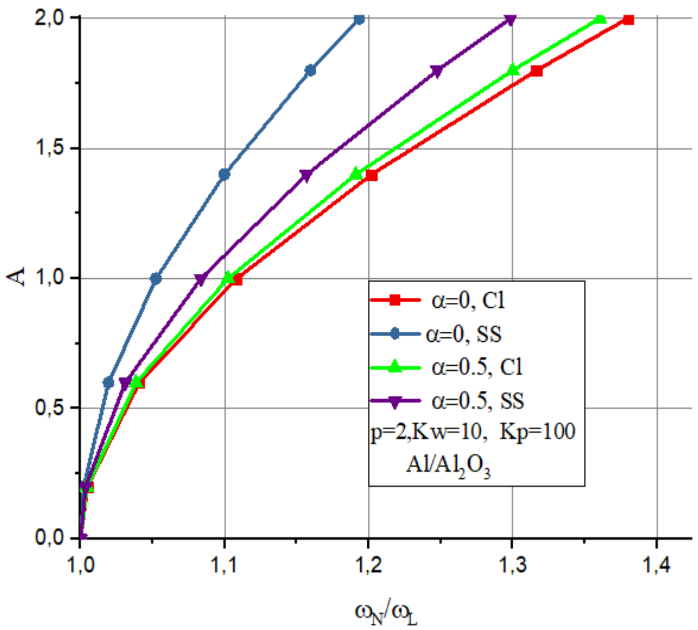


Рис. 7.15. Скелетні криві квадратної ФГМ циліндричної оболонки змінної товщини, що не спирається на пружну основу K_w=0, K_p =0 при різних умовах закріплення

Як і очікувалося, найбільше зростання нелінійних частот спостерігається для закріплених оболонок. Зменшення параметра α збільшує товщину оболонки і, відповідно, збільшує значення частот.

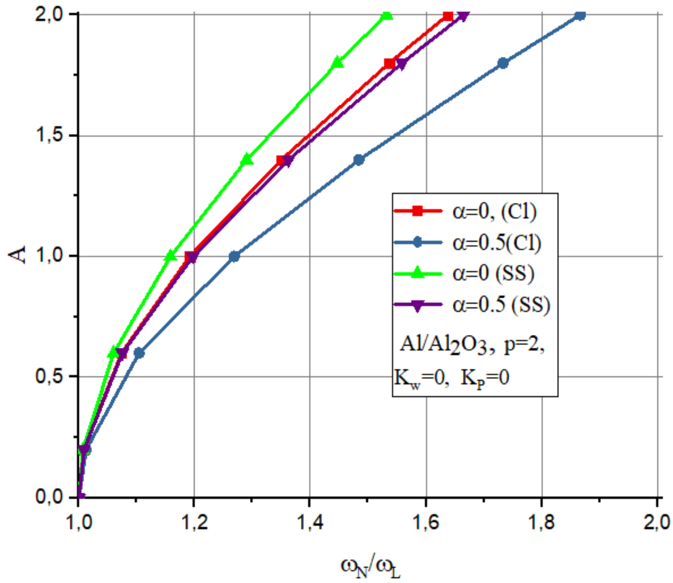


Рис. 7.16. Скелетні криві квадратної ФГМ циліндричної оболонки змінної товщини, що спирається на пружну основу K_w=10, K_p =100 при різних умовах закріплення

Наступні результати відносяться до ФГМ пологої оболонки змінної товщини з складною формою плану (Рис. 7.5). Аналізуються нелінійні коливання таких оболонок з різних функціонально- градієнтних матеріалів.

На Рис. 7.17 та Рис. 7.18 показано поведінку скелетних кривих і нелінійних частот для різних типів ФГМ для оболонок складної геометрії (Рис. 7.5) з параболічною змінною товщиною, що спираються на двопараметричну основу.

Зауважимо, що незважаючи на те, що скелетні криві для ФГМ типів M2 ($Si_3N_4/SUS304$) і M3 ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) практично збігаються, їх безрозмірні нелінійні частоти істотно відрізняються. Для суміші M2 ($Si_3N_4/SUS304$) вони більше, ніж для суміші M3 ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$).

Якщо порівняти всі три суміші FGM, то можна побачити, що зі збільшенням амплітуди нелінійна частота оболонки M1 (Al/Al_2O_3) зростає швидше, ніж відповідні частоти оболонок сумішей М2 ($Si_3N_4/SUS304$) і М3 ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$).

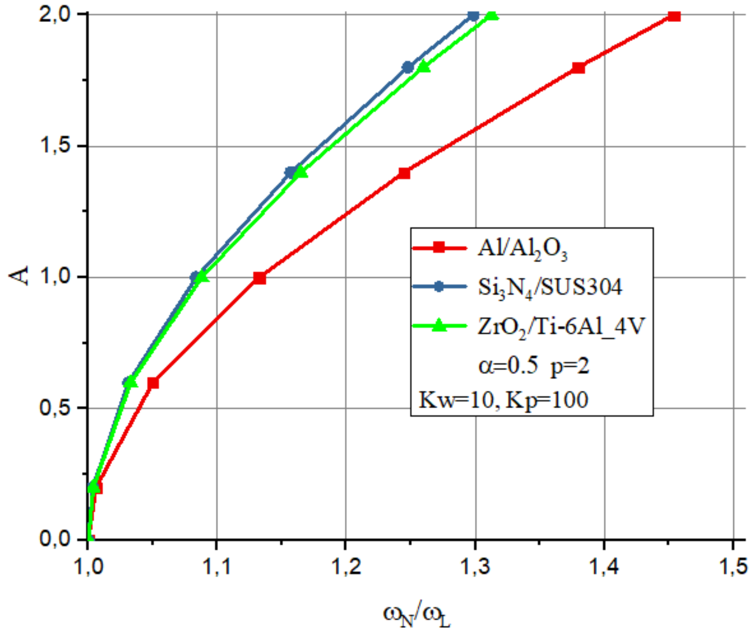


Рис. 7.17. Скелетні криві циліндричної оболонки з різних ФГМ сумішей зі змінною товщиною ($\alpha = 0.5$) і параметрами пружної основи (K_w =10, K_p=100)

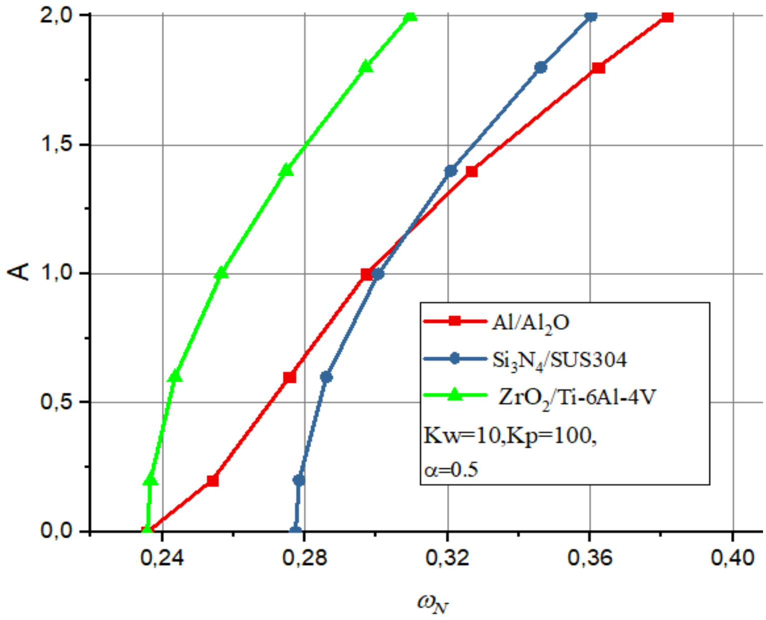


Рис. 7.18. Нелінійні частоти циліндричної оболонки з різних ФГМ сумішей зі змінною товщиною ($\alpha = 0.5$) і параметрами пружної основи (K_w =10, K_p=100)

Поведінка скелетних кривих і безрозмірних нелінійних частот для циліндричних панелей зі змінною товщиною подібна до поведінки частот оболонки з постійною товщиною. Але значення нелінійних частот для циліндричних панелей зі змінною товщиною менші, ніж для оболонки з постійною товщиною. Це відповідає фізичному змісту задачі та зміні товщини, оскільки зі збільшенням параметра α загальна товщина оболонки зменшується. Слід зазначити, що скелетні криві для повністю закріплених пологих конструкцій (сферичних або гіперболічних параболоїдних оболонок) практично такі ж, як і для циліндричних панелей, які розглядалися в цьому дослідженні.

7.6 Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану ФГМ сендвіч пластин та пологих оболонок складної форми, що спираються на пружну основу

Розглядається тришарова полога оболонка типу «сендвіч» з керамічним заповнювачем, внутрішній та зовнішній шари якої виготовлено з функціонально-ґрадієнтних матеріалів (Рис. 7.19). Оболонка знаходиться під дією поперечного навантаження $q_0(x,y)$.

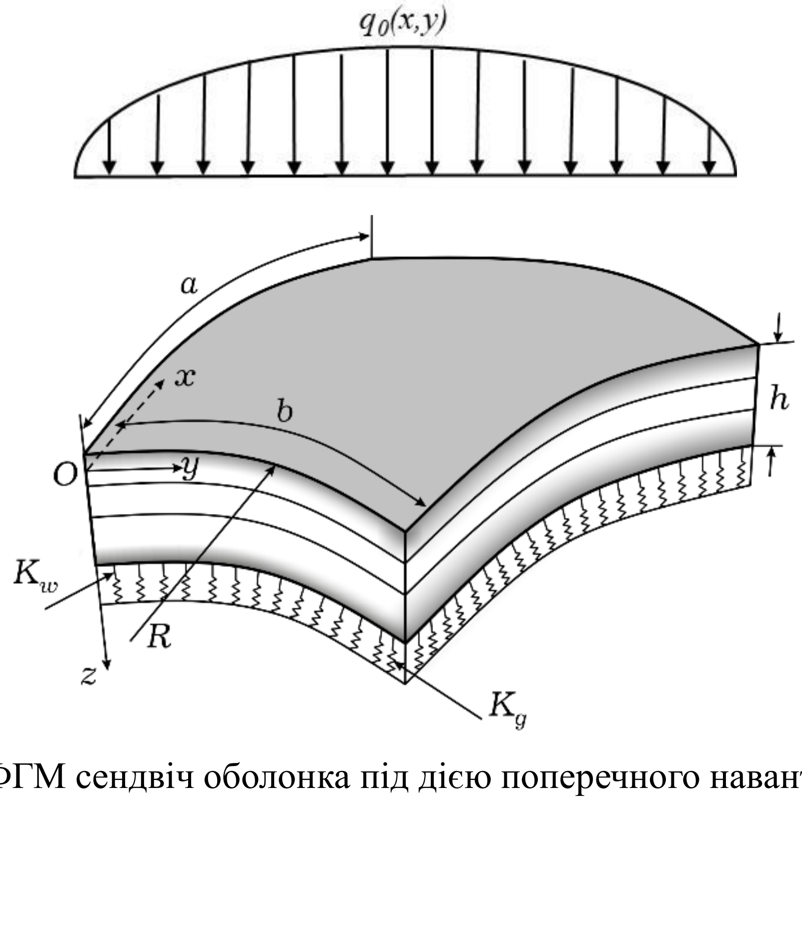


Рис. 7.19. ФГМ сендвіч оболонка під дією поперечного навантаження $q_0(x,y)$.

Для побудови математичної моделі задачі про згин пологої оболонки на пружній основі під дією поперечного навантаження використаємо уточнену теорію пологих оболонок першого порядку FSDT.

Для розв’язання задачі застосуємо варіаційний метод Рітца у поєднанні з теорією R-функцій. Варіаційна постановка сформульованої задачі зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$I = P - A,$$

де U – потенціальна енергія, а P – робота зовнішнього навантаження:

$$P = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}(N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} +$$

$$+ Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23} + k_w w + k_G(\nabla w)^2)dxdy,$$

$$A = \iint_{\Omega} q(x,y)W(x,y)dxdy.$$

Нижче наведемо розв’язки деяких тестових задач, які були розв’язано з метою перевірки вірогідності та ефективності запропонованого підходу та розробленого програмного забезпечення стосовно задач згину.

7.6.1 Тестові задачі

Задача 1. Розглянемо задачу про згин тришарової вільно опертої пластини прямокутної формі $(2a \times 2b)$ в плані під дією синусоїдального навантаження (Рис. 7.17). Нехай зовнішні шари виготовлено з ФҐМ Al/ZrO_2, а середній шар (заповнювач) виготовлено з кераміки ZrO_2.

Поперечне навантаження пластини задаємо як

$$q(x,y) = q_0 \sin\frac{\pi(a-x)}{2a}\sin\frac{\pi(b-y)}{2b} \tag{7.16}$$

або

$$q(x,y) = q_0 \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}, \tag{7.17}$$

де q_0 – інтенсивність навантаження у центрі пластини.

Геометричні параметри пластини: $h/2a = 0.1$, $a/b = 1$. Коефіцієнт зсуву $K_s^2 = 5/6$.

У Таблиці 7.8 і Таблиці 7.9 подано порівняння обчислених запропонованим підходом значень безрозмірного прогину (Таблиця 7.8) і напружень (Таблиця 7.9) у центрі вільно опертої тришарової ФГМ квадратної пластини при $E_0 = 1$ ГПа для різних значень ґрадієнтного індексу p та різних значень товщин шарів $h_f - h_c - h_f$ з результатами, наведеними у роботі [183].

Таблиця 7.8. Порівняння значень безрозмірного прогину у центрі вільно опертої тришарової ФГМ квадратної пластини для різних значень ґрадієнтного індексу p та різних значень товщин шарів

p	Метод	$\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$			
		Відношення товщин шарів $h_f - h_c - h_f$			
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
0	*RFM*	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
	[183] (*FSDT*)	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
1	*RFM*	0.32485	0.30750	0.29301	0.27167
	[183] (*FSDT*)	0.32484	0.30750	0.29301	0.27167
2	*RFM*	0.37514	0.35409	0.33441	0.30370
	[183] (*FSDT*)	0.37514	0.35408	0.33441	0.30370
5	*RFM*	0.41121	0.39419	0.37357	0.33631
	[183] (*FSDT*)	0.41120	0.39418	0.37356	0.33631
10	*RFM*	0.41920	0.40658	0.38788	0.34996
	[183] (*FSDT*)	0.41919	0.40657	0.38787	0.34996

Таблиця 7.9. Порівняння значень напружень у центрі вільно опертої тришарової ФҐМ квадратної пластини для різних значень ґрадієнтного індексу p та різних значень товщин шарів

p	Метод	$\bar{\sigma}_{11} = \frac{10h^2E_0}{(2a)^2q_0}\sigma_{11}(0,0,\frac{h}{2})$ Відношення товщин шарів $h_f - h_c - h_f$			
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
1	*RFM*	1.5679	1.4847	1.4146	1.3109
	[183] (*TSDT*)	1.57923	1.49587	1.42617	1.32309
	[183] (*FSDT*)	1.53245	1.45167	1.38303	1.28096
2	*RFM*	1.8112	1.7113	1.6165	1.4674
	[183] (*TSDT*)	1.82167	1.72144	1.62748	1.47988
	[183] (*FSDT*)	1.77085	1.67496	1.58242	1.43580
5	*RFM*	1.98268	1.90521	1.8069	1.6265
	[183] (*TSDT*)	1.99272	1.91302	1.81580	1.63814
	[183] (*FSDT*)	1.93576	1.86479	1.76988	1.59309
10	*RFM*	2.0184	1.9642	1.8760	1.6930
	[183] (*TSDT*)	2.0303	1.9712	1.88376	1.70417
	[183] (*FSDT*)	1.96780	1.92165	1.83754	1.6544

Як видно з Таблиць 7.8, 7.9 одержані результати добре співпадають з відомими.

Задача 2. Розглянемо шарувату пологу оболонку з квадратним планом і різними кривинами при дії синусоїдального навантаження (7.16). Обчислення виконано для відношення товщин шарів $h_f - h_c - h_f = 2 - 1 - 2$, значення ґрадієнтного індексу $p = 2$ при $h/2a = 0.1$ і $E_0 = 1$ГПа. Параметри пружної основи $k_w = \frac{E_c h^3}{(2a)^4} K_w$, $k_g = \frac{E_c h^3}{(2a)^2} K_g$ і кривини $k_1 = \frac{2a}{R_x}$, $k_2 = \frac{2a}{R_y}$ оболонок змінюються.

У Таблиці 7.10 подано результати обчислення прогину $\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$ в центрі пологих оболонок і пластин, які знаходяться на пружній основі під синусоїдальним навантаженням (7.16). Розрахунки виконано для вільно опертих та жорстко закріплених по всій границі оболонок. Функціонально-ґрадієнтний матеріал уявляє собою суміш алюмінію (Al) та цирконію (ZrO_2), механічні характеристики яких наведено в Таблиці 4.1.

Таблиця 7.10. Результати обчислення прогину $\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$ в центрі пологих оболонок і пластин, які знаходяться на пружній основі під синусоїдальним навантаженням

	$\bar{w} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w(0,0)$							
	(k_1, k_2)							
	(0,0)	(0.5,0)	(0.5,0.5)	$(0.5, -0.5)$	(0,0)	(0.5,0)	(0.5,0.5)	$(0.5, -0.5)$
(K_w, K_g)	Вільне опирання (**S**)				Жорстке закріплення (**C**)			
(0,0)	0.35407	0.28587	0.18118	0.35407	0.1376	0.1099	0.08465	0.09971
(10,0)	0.2307	0.1996	0.14232	0.2307	0.1163	0.09591	0.07606	0.08804
(20,0)	0.1711	0.1534	0.1171	0.1711	0.1007	0.08503	0.06904	0.07876
(50,0)	0.09639	0.09051	0.07651	0.09639	0.07165	0.06329	0.05394	0.05973
(100,0)	0.05579	0.05376	0.04849	0.05579	0.04811	0.04416	0.03938	0.04239
(0,10)	0.03064	0.03003	0.02831	0.03064	0.02614	0.02479	0.02302	0.02418
(10,10)	0.02929	0.02872	0.02715	0.02929	0.02519	0.02394	0.02289	0.02337
(20,10)	0.02805	0.02753	0.02608	0.02805	0.02431	0.2315	0.02160	0.02261
(50,10)	0.02488	0.02477	0.02332	0.02488	0.02205	0.02115	0.01976	0.02061
(100,10)	0.02095	0.02065	0.01983	0.022095	0.01899	0.01828	0.01730	0.01794

На Рис. 7.20 і Рис. 7.21 наведено залежність прогину $\bar{w}$ в центрі сферичної оболонки ($k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$) від значення ґрадієнтного індексу p для характеристик пружної основи $K_w = 50$, $K_g = 0$ (Рис. 7.20) та $K_w = 50$, $K_g = 10$ (Рис. 7.21). Припускаємо, що оболонка жорстко закріплена по всій границі або вільно оперта. Обчислення виконано для різних співвідношень товщин шарів $h_f - h_c -$

h_f. Криві ***1*–*4*** на рисунках відповідають випадку жорстко закріпленої по всьому контуру оболонки для таких співвідношень товщин:

1: 1-0-1, ***2:*** 1-1-1, ***3:*** 1-2-1, ***4:*** 2-1-2.

Криві ***5*–*8*** відповідають випадку вільно опертої оболонки для таких співвідношень товщин:

5: 1-0-1, ***6:*** 1-1-1, ***7:*** 1-2-1, ***8:*** 2-1-2.

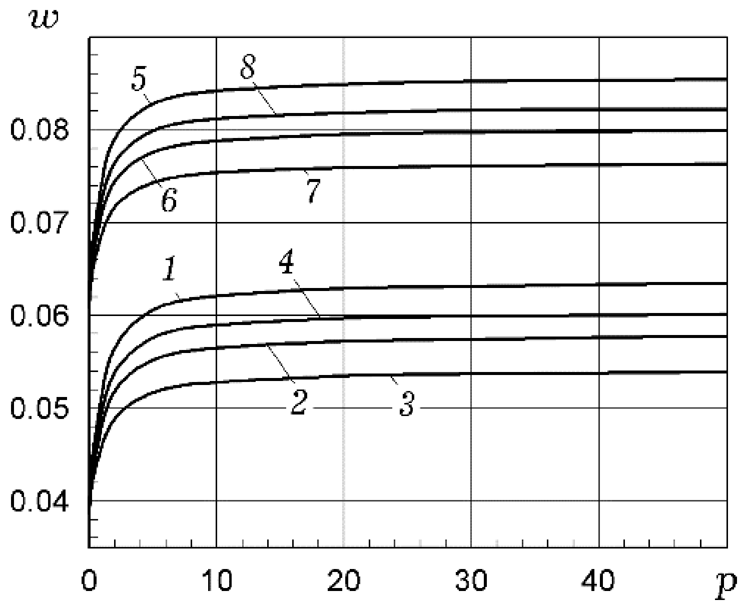


Рис. 7.20. Залежність прогину $\bar{w}$ в центрі сферичної оболонки від значення ґрадієнтного індексу p для характеристик пружної основи $K_w = 50, K_g = 0$

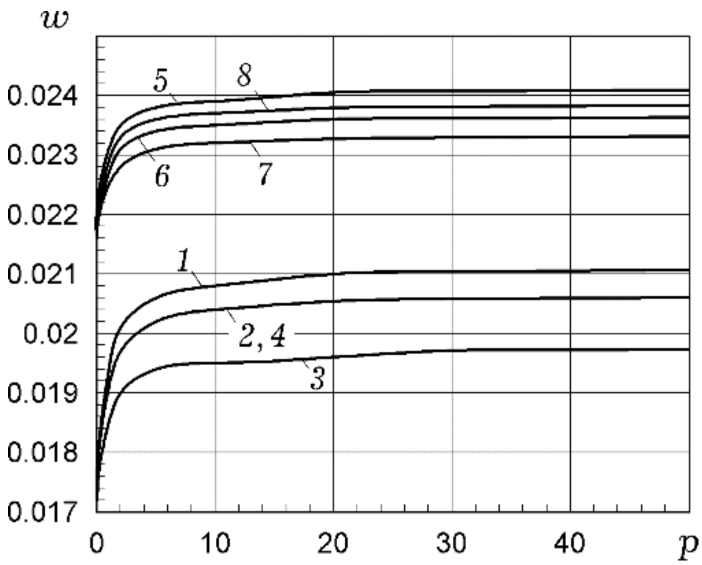


Рис. 7.21. Залежність прогину $\bar{w}$ в центрі сферичної оболонки від значення ґрадієнтного індексу p для характеристик пружної основи $K_w = 50, K_g = 10$

Бачимо, що усі криві монотонно зростають. Більше зростання прогину відбувається для $0 \leq p \leq 10$, а для $10 \leq p \leq 50$ значення прогину зростає неістотно. Значення прогину для вільно опертої оболонки є значно більшими, ніж для жорстко закріпленої оболонки, що відповідає фізичному змісту задачі. Слід звернути увагу також на вплив коефіцієнта Пастернака K_P на величини прогину. Збільшення цього коефіцієнта істотно зменшує значення прогину оболонки. При збільшенні товщини керамічного шару (серединний шар) значення прогину також зменшуються.

7.6.2 Дослідження згину ФГМ сендвіч оболонок з шестикутним центральним отвором і круговими вирізами на сторонах, що спираються на пружну основу

Дослідимо НДС пологої циліндричної оболонки типу сендвіч складної геометричної форми з отвором у вигляді шестикутника і круглими вирізами на сторонах оболонки (Рис. 7.22). Як і у *Задачах 1* та *2* приймаємо, що оболонка опирається на пружну основу і перебуває під дією поперечного навантаження. Схема укладання шарів 2-1-2.

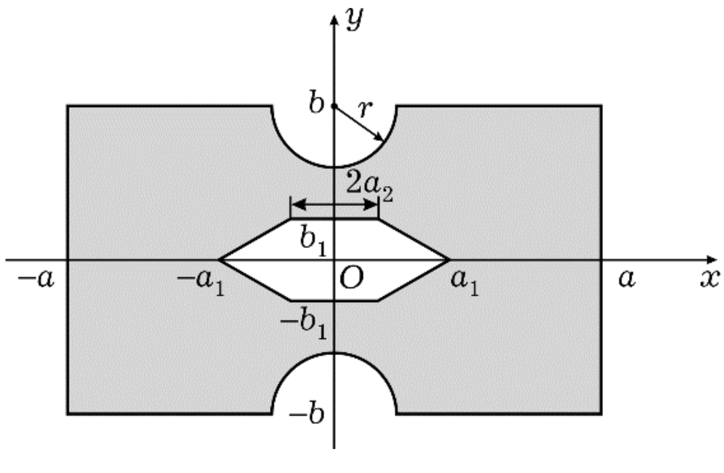


Рис. 7.22. Форма плану оболонки з отвором у вигляді шестикутника і круглими вирізами на сторонах

Геометричні розміри оболонки приймаємо такими:

$$\frac{h}{2a} = 0.1, \quad \frac{a}{b} = 1.5, \quad \frac{a_1}{2a} = 0.3, \quad \frac{a_2}{2a} = 0.15, \quad \frac{b_1}{2a} = 0.15,$$

$$\frac{r}{2a} = 0.15, \quad k_1 = 0.5, \quad k_2 = 0.$$

Знайдемо максимальні значення прогину $\bar{w}_{max}$ оболонки залежно від типу граничних умов, величин ґрадієнтного індексу та значень коефіцієнтів пружності. Ці значення обчислюються за формулою:

$$\bar{w}_{max} = \frac{10hE_0}{(2a)^2 q_0} w.$$

Для граничних умов введемо такі позначення:

CC – оболонка жорстко закріплена на зовнішньому контурі та на отворі, тобто на всій границі;

CF – оболонка жорстко закріплена на зовнішньому контурі та має вільний отвір;

FC – зовнішній контур оболонки вільний, а отвір жорстко закріплений.

У Таблиці 7.11 наведено значення максимального прогину для значень коефіцієнтів пружності $K_w = 0, K_g = 0$ і $K_w = 50, K_g = 0$.

Таблиця 7.11. Значення максимального прогину для значень коефіцієнтів пружності $K_w = 0, K_g = 0$ і $K_w = 50, K_g = 0$

	$\bar{w}_{max}$					
	$K_w = 0, K_g = 0$			$K_w = 50, K_g = 0$		
p	***CC***	***CF***	***FC***	***CC***	***CF***	***FC***
0	0.01168	0.06673	0.2211	0.01117	0.05782	0.06671
1	0.01694	0.09940	0.3364	0.01589	0.08089	0.06966
2	0.01919	0.11316	0.3847	0.01785	0.08978	0.07180
5	0.02136	0.12593	0.4282	0.01981	0.09762	0.07341
7	0.02183	0.12860	0.4369	0.02011	0.09922	0.07371
10	0.02219	0.13057	0.4431	0.02042	0.1003	0.07392

На Рис. 7.23 зображено залежності максимального прогину оболонки від ґрадієнтного індексу p для значень коефіцієнтів пружності $K_w = 50$, $K_g = 10$

(криві ***1–3*** відповідають умовам закріплення оболонки ***CC***, ***CF***, ***FC***) і $K_w = 50$, $K_g = 50$ (криві ***4–6*** відповідають умовам закріплення оболонки ***CC***, ***CF***, ***FC***).

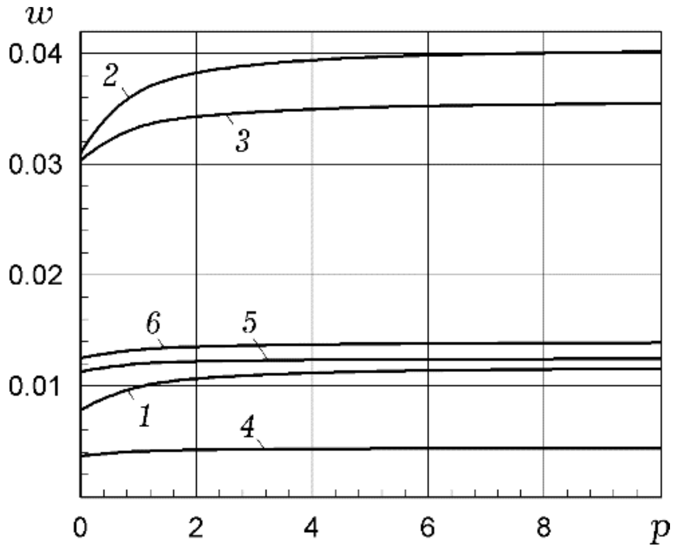


Рис. 7.23. Залежності максимального прогину оболонки від градієнтного індексу p для значень коефіцієнтів пружності $K_w = 50$, $K_g = 10$ (криві ***1-3***) та $K_w = 50$, $K_g = 50$ (криві ***4–6***)

Бачимо, що на максимальний прогин оболонки пружна основа та умови закріплення оболонки має істотний вплив. Прогин значно зменшується при збільшенні коефіцієнтів пружності, особливо коефіцієнта Пастернака K_P. При жорсткому закріпленні прогин у цьому випадку має найменші значення.

Висновки за Розділом 7

1. В даному розділі зазначено важливість розрахунку ФГМ пластин та пологих оболонок, що спираються на пружну основу. В якості моделі для пружної основи обрано двопараметричну модель Пастернака.

2. Сформульовано варіаційну постановку задачі, що відрізняється від попередніх тільки наявністю доданків $k_w w^2 + k_p\left(\nabla \overrightarrow{w}\right)^2$, при цьому аналітичні вирази для обчислення елементів матриць [A], [B], [D], [E], [F], [H] залишаються такими ж як і у випадку одношарових та сендвіч пологих оболонок відповідно. Це позитивно впливає на створення математичного забезпечення для реалізації запропонованого методу для даного класу задач.

3. Виконане тестування для одношарових та сендвіч пологих оболонок з квадратною формою плану. Порівняння з відомими результатами показало відмінний збіг одержаних результатів з відомими. При цьому були розглянуті різні значення параметрів пружної основи, різні типи ФГМ, відношення товщини шарів.

4. До нових результатів слід віднести дослідження лінійних та нелінійних коливань оболонок зі складною геометричною формою. Особливої уваги надано оболонкам з вирізами та отворами, що жорстко закріплені по всьому контуру. Це пов'язано з практичним застосуванням таких оболонок та труднощами, які виникають у разі побудови системи координатних функцій для подібних задач, якщо застосовуються інші методи. Саме такі задачі добре ілюструють переваги методу R-функцій в порівнянні з іншими методами.

5. За проведеними дослідженнями можна зробити наступні висновки:

– наявність пружної основи суттєво збільшує значення власних частот, особливо при збільшення коефіцієнта параметру Пастернака;

– при збільшенні показника степеневого закону об'ємної частки кераміки p, у всіх розглянутих випадках, частоти для одношарових оболонок зменшуються, а для сендвіч оболонок залежність поведінки частоти від градієнтного індексу не є монотонною. Якщо $0 \leq p \leq 1$, частоти збільшуються, але якщо $p > 1$, частоти починають зменшуватися;

– особливої уваги заслуговує пориста пластина змінної товщини, яка знаходиться на пружній основі. На цьому прикладі блискуче показано переваги розроблених методів та створеного програмного забезпечення.

6. Вивчено лінійні та нелінійні коливання циліндричних оболонок квадратної форми плану при наявності прямокутних та кругових вирізів на сторонах квадрату. Товщина оболонки змінюється за параболічним законом. Показано що при збільшені градієнтного індексу власні частоти монотонно зменшуються для розглянутих 3-х видів ФГМ (Al/Al_2O_3); ($Si_3N_4/SUS304$); ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$).

7. Розглянуто задачі про комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану функціонально-градієнтних сендвіч пластин та пологих оболонок. Представлено порівняння прогину та напружень з відомими результатами, яке показало добру їх узгодженість. Визначено НДС пологих оболонок складної форми, що спираються на пружну основу. Результати наведені у вигляді графіків та таблиць.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [322, 326-332, 349-350, 369].

РОЗДІЛ 8

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ СТИСНУТИХ ФГМ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Досить часто конструкції або їх складові елементи знаходяться під дією статичного або динамічного навантаження в серединній площині. Тоді виникає проблема розрахунку об'єкту на стійкість та дослідження параметричних коливань. Необхідно обчислити значення критичного навантаження пластини або оболонки, тому що перебільшення критичного значення навантаження може призвести до руйнування конструкції.

Враховуючи, що елементи конструкції можуть мати отвори та вирізи для обслуговування різних цілей та і сама форма елементів може бути нестандартною, проблема дослідження стійкості та коливань ФГМ пластин та оболонок, навантажених у серединній площині, є досить складною.

Через важливість цієї проблеми багато вчених займаються її розв'язком. Але публікації, в яких представлено дослідження функціонально-градієнтних та особливо пологих оболонок складної форми плану (з отворами та різними видами закріплення отворів) майже відсутні.

У даній роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження, стиснутих статичним навантаженням ФГМ пластин та пологих оболонок з довільною формою плану, різними видами граничних умов і способами укладання шарів. Метод ґрунтується на використанні теорії R-функцій і варіаційних методах і складається з трьох етапів та враховує наявність неоднорідного докритичного стану:

По-перше, якщо докритичний стан не є однорідним, то вирішується крайова задача, розв'язок якої дозволяє визначити докритичний стан пластини. Показано, що ця задача зводиться до розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь, які доповнюються відповідними граничними умовами. В роботі побудовані варіаційні постановки цих задач та запропоновані методи їх розв’язання. Для ФГМ пластин та оболонок такі варіаційні постановки отримані вперше.

На другому етапі алгоритму визначається значення частот та критичного навантаження. Для цього використано динамічний підхід, згідно з яким знаходження критичного навантаження зводиться до розрахунку власних частот для кожного значення варійованого параметру навантаження. Доки значення власних частот будуть дійсними, пластина або оболонка коливається біля положення рівноваги, тобто стан рівноваги є стійким. Але зі збільшенням параметру, що варіюється, можуть бути одержані нульові або уявні значення власної частоти. В такому випадку, положення рівноваги є нестійким. Критичне значення статичної стійкості буде відповідати найменшому невід’ємному значенню власної частоти.

Третій етап. Далі розв’язується задача про лінійні коливання стиснутої пластини чи оболонки, що навантажена конкретним статичним навантаженням. Розв’язання цієї задачі, як і попередньої, виконується за допомогою теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца (RFM).

Четвертий етап. Для дослідження нелінійних коливань стиснутих пластин та оболонок використано метод, який було запропоновано в 3-му розділі. Відповідно до цього методу вихідну систему нелінійних рівнянь руху зведено до нелінійного звичайного диференціального рівняння відносно часу.

Запропоновані методи було програмно реалізовано в рамках системи POLE-RL та протестовані на низці задач. Порівняння одержаних результатів з відомими підтвердило вірогідність та ефективність розроблених методів та створеного програмного забезпечення.

8.1 Алгоритм розв’язання задач статичної стійкості та коливань ФГМ пластин та пологих оболонок

У даній роботі для даного класу задач використано уточнену теорію першого порядку (FSDT). Постановка задачі в рамках цієї теорії ґрунтується на припущеннях:

1) пластина або оболонка навантажені у своїй серединній площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;

2) докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини або оболонки до втрати стійкості нехтуємо;

3) згин пластини моделюється за допомогою гіпотез Кірхгофа-Лява;

4) всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру λ.

Компоненти деформацій та зусиль, а також рівняння руху для цієї теорії співпадають з відповідними співвідношенням пункту 2.3 Розділу 2.

Система рівнянь руху доповнюється відповідними граничними умовами, при цьому на навантаженій частині контуру, при зусиллях, що стискають досліджуваний об'єкт, граничні умови мають вигляд:

$$N_n = -p, T_n = 0. \tag{8.1}$$

Величини N_n, T_n визначаються наступнім чином:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \tag{8.2}$$

$$T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{22} - N_{11})lm, \tag{8.3}$$

де l і m – напрямні косинуси нормалі до границі області:

$$l = cos\,\alpha\,, m = sin\,\alpha, \tag{8.4}$$

тут $\alpha = (n,^\wedge Ox)$ – кут між нормаллю n і віссю Ox.

Алгоритм розв'язку задач стійкості та коливань ФГМ пластин та пологих оболонок представлено на Рис. 8.1.

I. Визначення неоднорідного докритичного стану. Знаходження $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$

↓

II. Розв'язок лінійної задачі про коливання. Обчислення власних частот та функцій і форм коливань. Розрахунок критичного навантаження N_{cr}

↓

III. Розв'язок нелінійної задачі про коливання. Зведення вихідної системи до звичайного диференціального рівняння

↓

IV. Дослідження нелінійних коливань пластин або оболонок, стислих статичним навантаженням, побудова скелетних кривих

Рис. 8.1. Алгоритм розв'язку задач стійкості та коливань ФГМ пластин та пологих оболонок

Для визначення неоднорідного докритичного стану необхідно знайти зусилля $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$, що розподілені всередині пластини або оболонки. З цією метою треба розв'язати відповідну систему рівнянь.

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_x = 0,$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_y = 0. \qquad (8.5)$$

На навантаженій частині контуру система доповнюється граничними умовами (8.1). Всі останні крайові умови залежать від способу закріплення пластини і були наведені раніше.

Розв'язок системи рівнянь (8.5) будемо виконувати за допомогою методу R-функцій (RFM). З цією метою сформулюємо варіаційну постановку задачі, яка зводиться до знаходження мінімуму відповідного функціоналу:

$$I(u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Big(N_{11}^{(L)}\varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)}\varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)}\varepsilon_{12}^{(L)} + +M_{11}^{(L)}\chi_{11} + M_{22}^{(L)}\chi_{22} + M_{12}^{(L)}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}\Big)d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds \qquad (8.6)$$

де $u_n = u_1 l + v_1 m$, P_1^0– інтенсивність зовнішнього стискаючого зусилля, $\partial\Omega_1$ - частина границі області, на яку діють зовнішні зусилля.

Варіаційна постановка задачі зводиться до знаходження точки стаціонарності функціоналу (8.6), яка визначає невідомі функції $u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}$, що описують докритичний стан пластини або оболонки. Знаючи ці функції, обчислюються зусилля $\vec{N}^0 = (N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0)^T$ згідно з формулами (3.11)-(3.13) або (3.35)-(3.37).

Лінійні коливання стиснутих пластин або пологих оболонок, будемо вивчати також за допомогою методу Рітца. Як і у випадку вільних лінійних коливань ця задача зводиться до мінімізації функціоналу:

$$J = P_{max} - \omega_L^2 T_{max} \qquad (8.7)$$

де T_{max} - кінетична енергія пологої оболонки, яка визначається за формулами (3.90) або (3.96) в залежності від теорії, яка використовується, а P_{max} - повна потенціальна енергія, яка визначається для уточненої теорії першого порядку наступним чином:

$$P_{max} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Big(N_{11}^{(L)}\varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)}\varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)}\varepsilon_{12}^{(L)} + M_{11}^{(L)}\chi_{11} + M_{22}^{(L)}\chi_{22} + M_{12}^{(L)}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23} + p_{st}\left(N_{11}^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_{22}^0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{12}^0\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big)d\Omega. \qquad (8.8)$$

Результатом розв’язання задачі (8.7) є лінійні частоти ω_L та власні функції $u^e, v^e, w^e, \psi_x^e, \psi_y^e$ які відповідають заданому в серединній площині статичному навантаженню p_{st}.

Для визначення критичного навантаження застосуємо динамічний підхід, згідно з яким розв’язання даної проблеми, наприклад в рамках FSDT, можна звести до еквівалентної варіаційної проблеми про знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u,v,w,\psi_x,\psi_y) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Big(N_{11}^{(L)}\varepsilon_{11}^{(L)} + N_{22}^{(L)}\varepsilon_{22}^{(L)} + N_{12}^{(L)}\varepsilon_{12}^{(L)} +$$

$$+M_{11}^{(L)}\chi_{11} + M_{22}^{(L)}\chi_{22} + M_{12}^{(L)}\chi_{12} + Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}\Big)\,d\Omega +$$

$$+\,p_{st}\Big(N_{11}^{0}(w_{,x})^2 + N_{22}^{0}\big(w_{,y}\big)^2 + N_{12}^{0}w_{,x}\,w_{,y}\Big)\Big)\,d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2}\omega_L^2\iint_{\Omega}\Big(I_0(u^2+v^2+w^2) + I_1\big(\psi_x^2+\psi_y^2\big)\Big)\,d\Omega. \qquad (8.9)$$

У даному випадку статичне навантаження p_{st} варіюється. Значення цього параметру збільшується до тих пір, поки частота ω_L коливань буде дійсним числом. Тобто, пластина або оболонка коливається біля положення рівноваги. Якщо частота приймає нульове або комплексне значення, то положення об’єкту буде нестійким. Таким чином, значення параметру p_{st}, яке відповідає найменшому невід’ємному значенню власної частоти і визначає значення критичного навантаження N_{cr}. Зауважимо, що мінімізацію функціоналу (8.9) будемо виконувати на множині базисних функцій, побудованих за допомогою RFM, які задовольняють заданим крайовим умовам, принаймні геометричним.

Розв’язання задачі про нелінійні коливання будемо виконувати за алгоритмом, наведеним у Розділі 3. Схема цього методу представлена на Рис. 3.1. Головним пунктом підходу є зведення вихідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до звичайного нелінійного рівняння. З цією метою невідомі функції представляються у вигляді (3.121) для класичної теорії та у вигляді (3.134) для уточненої теорії першого порядку.

Виконуючи аналогічні перетворення, як і в Розділі 3, та враховуючи діючі навантаження в серединній площині, вихідні нелінійні рівняння з частинними похідними зводяться до звичайного нелінійного диференціального рівняння наступного вигляду:

$$\ddot{y}(t) + (\omega_L^2 - p_{st}\alpha)y(t) + y^2(t)\beta + y^3(t)\gamma = 0. \qquad (8.10)$$

Розв’язання рівняння (8.10) виконується за алгоритмом, розробленим у Розділі 3.

8.2 Тестові задачі дослідження ФГМ одношарових та сендвіч пологих оболонок, які стискаються одновісним або двовісним навантаженням

Задача 1. Розглянемо квадратну одношарову пластину, що виготовлена з ФГМ матеріалу Al/Al_2O_3, фізичні характеристики якого наведені в Таблиці 4.1.

Вважаємо, що пластина вільно оперта та стискується рівномірно вздовж сторін $x = \pm a$. Відношення товщини пластини до довжини сторони дорівнює 0.1, тобто $h/2a = 0.1$.

Таблиця 8.1. Порівняння значень безрозмірного частотного параметра $\Lambda = \omega_L h\sqrt{\rho_c/E_c}$ та критичного навантаження $N_{cr} = N_x^{(0)}/E_c$ ФГМ пластини з результатами роботи [166]

	Метод	Значення індексу p у степеневому законі розподілення матеріалу				
		$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 4$	$p = 10$
Λ	RFM	0.05769	0.04996	0.04419	0.03823	0.03658
	[166]	0.05777	0.04917	0.04426	0.03829	0.03642
N_{cr}	RFM	0.03421	0.02228	0.01723	0.01157	0.00975
	[166]	0.03381	0.02214	0.01698	0.01131	0.00990

У Таблиці 8.1 для різних значень показника степеневого закону p, який визначає розподілення складових матеріалу, наведено порівняння значень безрозмірного частотного параметра $\Lambda = \omega_L h\sqrt{\rho_c/E_c}$ та критичного навантаження $N_{cr} = N_x^{(0)}/E_c$ ФГМ пластини з результатами, представленими в роботі [251].

З огляду на представлені результати можна зробити висновок про їх добре узгодження.

Задача 2. Досліджуються коливання та стійкість стиснутих одношарових ФГМ оболонок, виготовлених з суміші Al/Al_2O_3. Оболонка вільно оперта і має квадратний план форми. Геометричні параметри наступні:

$$h/2a = 0.1; \quad 2a/R_x = 0.5; \quad 2a/R_y = (0;\ 0.5;\ -0.5),$$

де $2a$ — це довжина сторони квадрата. Таблиця 8.2 показує порівняння знайдених результатів для власних частот і критичного навантаження з результатами роботи [166].

Таблиця 8.2. Порівняння параметрів основної частоти та критичного навантаження квадратної вільно опертої ФГМ (*Al/Al$_2$O$_3$*) пологої оболонки з результатами роботи [166]

($2a/R_x$; $2a/R_y$)		Метод	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=4$	$p=10$	$p=\infty$
Пласт. (0;0)	N_{cr}	[166]	0.0338	0.0221	0.0169	0.0113	0.0099	0.006229
		RFM	0.0342	0.0223	0.0172	0.0115	0.0097	0.006247
	Λ	[166]	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.03642	0.02941
		RFM	0.0578	0.0491	0.0443	0.0383	0.03664	0.02942
Сфер. обол. (0.5; 0.5)	N_{cr}	[166]	0.0572	0.0395	0.0312	0.0197	0.01610	0.01054
		RFM	0.0592	0.0408	0.0315	0.0203	0.01657	0.01078
	Λ	[166]	0.0751	0.0657	0.0601	0.0503	0.04643	0.03826
		RFM	0.0754	0.0654	0.0598	0.0498	0.04614	0.03834
Цил. обол. (0.5;0)	N_{cr}	[166]	0.0392	0.0262	0.0204	0.0133	0.01134	0.00723
		RFM	0.0403	0.0269	0.0208	0.0137	0.01184	0.00724
	Λ	[166]	0.0622	0.0535	0.0485	0.0413	0.03897	0.03169
		RFM	0.0623	0.0533	0.0486	0.0412	0.03898	0.03170
Гіпер. обол. (0.5;-0.5)	N_{cr}	[166]	0.0321	0.02115	0.0161	0.0108	0.009412	0.00592
		RFM	0.0342	0.0224	0.0171	0.0116	0.009868	0.00592
	Λ	[166]	0.0563	0.0479	0.0432	0.0377	0.03551	0.02868
		RFM	0.0564	0.0479	0.0432	0.0373	0.03572	0.02867

Поправочний зсувний коефіцієнт при використанні теорії першого порядку (FSDT) було взято K_s^2=5/6. Безрозмірна частота та значення критичного навантаження обислювались за формулою:

$$\Lambda = \lambda h\sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \qquad N_{cr} = \frac{N_x^{(0)}}{E_c}.$$

Отримані результати обчислювались для пластини та трьох типів оболонки (сферичної, циліндричної і параболічно-гіперболічного типу). З Таблиці 8.2 можна побачити відмінний збіг порівняних результатів.

Задача 3. Розглядається вільна оперта сендвіч пластина квадратної форми під дією одновісного і двовісного навантаження. Припустимо, що заповнювач є керамічним, а лицьові поверхні зроблені з суміші ФГМ *Al/Al$_2$O$_3$*.

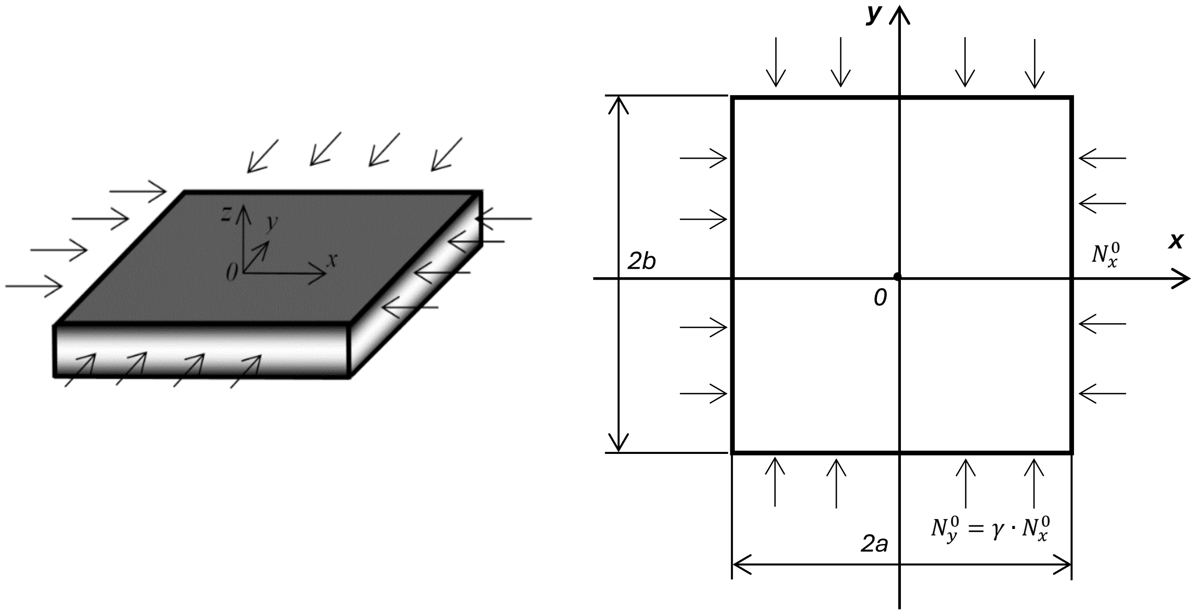


Рис. 8.2. Квадратна вільно оперта ФГМ пластина, що стискається рівномірно

Розглядаються наступні типи ламінування сендвіч ФГМ пластин: (1-0-1), (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1). Відзначимо, що при таких умовах було виконано дослідження в роботах [172, 262, 296]. Zenkour [262] використав теорію деформації синусоїдального зсуву пластини. G.Jin з співавторами [172] застосували модифікований підхід Фур'є-Рітца, а Bennoun та інші [296] розробили нову уточнену теорію пластин з п'ятьма змінними без використання коефіцієнта поправки на зсув.

Таблиця 8.3 показує порівняння отриманих безрозмірних значень критичного навантаження для вказаного типу ламінування шарів оболонки. значення критичного навантаження обчислювались за формулою:

$$N_{cr} = \frac{N_x^0 (2a)^2}{100 h^3 E_0}.$$

Таблиця 8.3. Безрозмірне двовісне критичне навантаження квадратної ФГМ пластини $(\gamma = 1)$

P	Метод	Схема ламінації шарів $h_1 - h_2 - h_3$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	*RFM*	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000	6.5000
	[262]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	[297]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	[106]	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765	6.4765
0.5	*RFM*	3.6671	3.9581	4.1012	4.2052	4.3921	4.5971
	[262]	3.6687	3.9566	4.1001	4.2052	4.3934	4.5976
	[297]	3.6819	3.9702	4.1124	4.2182	4.4051	4.6088
	[106]	3.5809	3.8581	3.9948	4.0964	4.2759	4.4711
1	*RFM*	2.5722	2.9061	3.0861	3.2192	3.4622	3.7421
	[262]	2.5712	2.9069	3.0851	3.2195	3.4629	3.7418
	[297]	2.5831	2.9197	3.0968	3.2322	3.4748	3.7536
	[106]	2.5306	2.8556	3.0273	3.1575	3.3921	3.6601
5	*RFM*	1.3191	1.5122	1.6921	1.7801	2.0482	2.3552
	[262]	1.3192	1.5113	1.6927	1.7798	2.0464	2.3574
	[297]	1.3284	1.5207	1.7014	1.7894	2.0558	2.3673
	[106]	1.3183	1.5041	1.6813	1.7651	2.0253	2.3235
10	*RFM*	1.2351	1.3632	1.5371	1.5891	1.8442	2.1312
	[262]	1.2345	1.3631	1.53712	1.5876	1.8444	2.1302
	[297]	1.2429	1.3725	1.5456	1.5969	1.8534	2.1398
	[106]	1.2360	1.3604	1.5304	1.5789	1.8308	2.1027

Порівняння отриманих значень критичного навантаження з доступними результатами в роботах [106], [262], [297] підтверджує добрий збіг результатів.

Задача 4. Розглядаємо квадратні сендвіч ФГМ пологі оболонки з різними граничними умовами. Геометричні параметри є наступними:

$$h / a = 0.1; \quad b / a = 1; \quad a / R_x = 0.2 .$$

Припускаємо, що заповнювач є металевим, а лицьові поверхні вироблені з суміші Al/Al_2O_3. Розглядаються такі граничні умови:

- оболонка закріплена по всій границі (CCCC);
- оболонка вільно закріплена вздовж усієї гранрці (SSSS);
- оболонка вільно закріплена на двох протилежних сторонах і вільна (SFSF) або закріплена (SCSC) з інших сторін.

Таблиця 8.4. показує порівняння значень основних лінійних частотних параметрів, які обчислюються за формулою:

$$\Lambda = \lambda(2a)^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$$

для циліндричних ($2a/R_x$ =0.2; $2a/R_y$ =0) і сферичних оболонок ($2a/R_x$ =0.2; $2a/R_y$=0.2) зі схемою ламінації 1-2-1 з даними роботи [262]. Порівняння показує добрий збіг результатів.

Таблиця 8.4. Основні частоти квадратних ФГМ пологих оболонок з різною кривизною та граничними умовами (схема ламінації 1-2-1)

p	Метод	Циліндрична оболонка k_1=0.2, k_2=0				Сферична оболонка k_1=k_2=0.2			
		SFSF	SSSS	CCCC	SCSC	SFSF	SSSS	CCCC	SCSC
0.6	[262]	0.6459	1.3372	2.3283	1.8784	0.6571	1.4134	2.3989	1.9254
	RFM	0.6464	1.3389	2.3402	1.8864	0.6576	1.4150	2.4103	1.9599
5	[262]	0.6042	1.2457	2.1569	1.7440	0.6133	1.3074	2.2147	1.8042
	RFM	0.6047	1.2476	2.1693	1.7523	0.6139	1.3091	2.2266	1.8121
20	[262]	0.6072	1.2483	2.1511	1.7426	0.6154	1.3043	2.2039	1.7974
	RFM	0.6078	1.2505	2.1646	1.7517	0.6160	1.3061	2.2169	1.8061

Проведене широке тестування з подальшим порівнянням отриманих результатів з відомими для ФГМ пластин та пологих оболонок, навантажених у серединній площині, дозволяє далі проаналізувати параметричні коливання систем зі складною формою.

8.3 Коливання та стійкість пластин та оболонок зі складною формою плану

8.3.1 Дослідження стійкості та коливань сендвіч ФГМ прямокутної пластини з двома кутовими врізами

Як вже було зазначено, на практиці часто використовуються пластини та пологі оболонки з вирізами або отворами. Тому нижче буде надана перевага для дослідження саме таких об’єктів.

Задача 1. Розглянемо тришарову ФГМ рівномірно стиснуту пластину, форма плану якої представлена на Рис. 8.3.

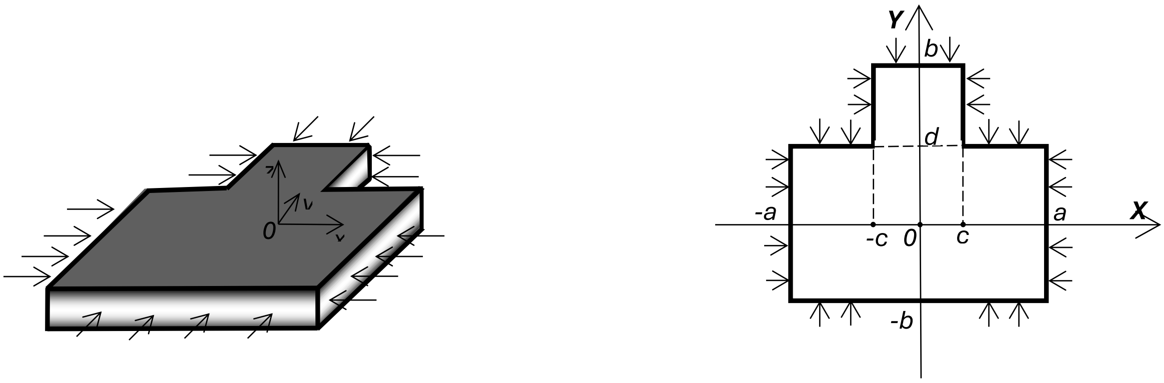


Рис. 8.3. Тришарова ФГМ рівномірно стиснута пластина та її форма плану

Припустимо, що ФГМ матеріал пластини виготовлено із суміші Al/Al_2O_3. Геометричні параметри взято наступними:

$$b/a = 1; \quad c/2a = 0.3; \quad d/2a = 0.25; \quad h/2a = 0.1.$$

Нехай пластина вільно оперта вздовж всієї границі. Тоді граничні умови мають у рамках FSDT наступний вигляд:

$$w = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega \quad .$$

$$u = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega^{(u)},$$

$$\partial\Omega^{(u)} = \{(x, y)|(y = -b,\ |x| \le a) \cup\ (y = d,\ c \le x \le a)\ \cup\ (-a \le x \le -c) \cup\ (y = b,\ |x| \le c)\}$$

$$v = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega^{(v)},$$

$$\partial\Omega^{(v)} = \{(x, y)|(x = \pm a,\ -b \le y \le d) \quad \cup\ (x = \pm c,\ d \le y \le b\ )\}$$

$$\psi_x = 0, \quad \forall(x, y) \in \partial\Omega^{(\psi_x)},$$

$$\partial\Omega^{(\psi_x)} = \{(x,y)|\ (y=-b,\ |x| \le a) \quad \cup\ (y=d,\ c \le x \le a\ \cup\ -a \le x \le -c) \cup\ (y=b,\ |x| \le c)\}$$

$$\psi_y = 0, \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega^{(\psi_y)},$$

$$\partial\Omega^{(\psi_y)} = \{(x,y)|(x=\pm a,\ -b \le y \le d) \quad \cup\ (x=\pm c,\ d \le y \le b\ )\}.$$

Враховуючи задані крайові умови, структуру обираємо у вигляді:

$$u = \omega^{(u)}\Phi_1,\ \ v = \omega^{(v)}\Phi_2,\ \ w = \omega^{(w)}\Phi_3,\ \ \psi_x = \omega^{(\psi_x)}\Phi_4,\ \ \psi_y = \omega^{\psi_y}\Phi_5, \quad (8.11)$$

Функції $\omega^{(u)}$, $\omega^{(v)}$, $\omega^{(w)}$, $\omega^{(\psi_x)}$, $\omega^{(\psi_y)}$ побудовано за допомогою теорії R-функцій в такий спосіб, щоб вони дорівнювались нулю на тій частині границі, де відповідні невідомі функції $u,\ v,\ w,\ \psi_x,\ \psi_y$ повинні дорівнювати нулю. Нижче наведено вирази для цих функцій:

$$\omega^{(w)} = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2)$$

$$\omega^{(u)} = \omega^{(\psi_x)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6) \vee_0 (f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 f_2,$$

$$\omega^{(v)} = \omega^{(\psi_y)} = (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}) \vee_0 (f_{11} \vee_0 f_{12}) \vee_0 f_1.$$

Функції $f_i,\ i = \overline{1{,}8}$ визначаються як:

$$f_1 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \ge 0, \quad f_2 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \ge 0, f_3 = (d - y) \ge 0,$$

$$f_4 = (c^2 - x^2)/2d \ge 0$$

$$f_5 = \frac{(r_1^2 - (x - c_2)^2 - (y - d)^2)}{2r_1} \ge 0,$$

$$f_6 = \frac{(r_1^2 - (x + c_2)^2 - (y - d)^2)}{2r_1} \ge 0,$$

$$f_7 = \frac{(r_2^2 - (x - c)^2 - (y - d_2)^2)}{2r_2} \ge 0,$$

$$f_8 = (r_2^2 - (x + c)^2 - (y - d_2)^2)/2r_2 \ge 0,$$

$$r_1 = (a - c)/2, \quad r_2 = (b - d)/2, \quad c_2 = (a + c)/2, \quad d_2 = (b + d)/2.$$

Невизначені компоненти $\Phi_i,\ i = \overline{1{,}5}$ в структурних формулах (8.11) представлено у вигляді розкладу в усічений ряд по деякій повній системі функцій. В даній роботі в якості такої системи використано систему степеневих поліномів. Враховуючи симетрію області відносно осі Oy ,таку систему було обрано у вигляді:

$$\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4: \quad 1, y, x^2, y^2, x^2y, y^3, x^4, x^2y^2, y^4, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \cdots \;;$$

$$\Phi_2, \Phi_5: \qquad x, xy, x^3, xy^2, x^3y, xy^3, x^5, x^3y^2, xy^4, x^5y, x^3y^3, xy^5, \cdots \quad . \quad (8.12)$$

При формуванні матриці Рітца для обчислення інтегралів було використано 10-точкові квадратурні формули Гауса. Внаслідок проведеного обчислювального експерименту було встановлено, що для досягнення збіжності результатів у третьому знаку, досить обмежитися 13 степенем поліномів для компоненти Φ_1, та 11 степенем для невизначених компонент $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$, що відповідає використанню 56 координатних функцій для прогину w, та 42 координатних функцій для переміщень u, v і кутів повороту ψ_x, ψ_y. Для перевірки вірогідності отриманих результатів в разі складної геометрії розміри геометричної форми змінювались таким чином, щоб обрана область практично не відрізнялась від квадратної, наприклад, приймаючи значення для c та d наступними: $c/2a = 0.48, d/2a = 0.48$.

У Таблиці 8.5 наведено порівняння значень одержаного критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$ для пластин Типу ламінації 1-1 та $p = 0.5$ з аналогічними результатами для квадратної пластини.

Таблиця 8.5. Порівняння значень критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$ для пластин Типу ламінації 1-1 та $p = 0.5$ з аналогічними результатами для квадратної пластини

Значення критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$							
$c/a = d/a$	Метод	Відношення товщини шарів $h_1 - h_2 - h_3$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0.96	RFM	3.673	3.961	4.104	4.210	4.398	4.6028
1	RFM	3.667	3.958	4.101	4.205	4.392	4.597
	[262]	3.6828	3.9709	4.1127	4.2185	4.4052	4.6083
	[297]	3.6783	3.9676	1.1000	4.2162	4.4030	4.6076
	[106]	3.5810	3.8581	3.9948	4.0964	4.2759	4.4711

Аналіз Таблиці 8.5 показує, що дійсно результати практично співпадають з несуттєвим збільшенням для складної форми, що відповідає фізичному змісту задачі.

У Таблиці 8.6 наведено безрозмірні значення критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$ та власної частоти $\Lambda = \omega_L(2a)^2\sqrt{\rho_0/E_0}\ /h$ в залежності від значень показника p у степеневому законі розподілення матеріалу. Досліджено тришарові ФГМ пластини різних Типів ламінації (1-1, 1-2, 2-2). Розподілення товщини шарів приймається за схемою 1-2-1.

Таблиця 8.6. Значення критичного навантаження $\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$ та власної частоти для тришарових ФГМ пластин з різними Типами ламінації (1-1, 1-2, 2-2) і показниками p

Критичне навантаження $\hat{N}_{cr}$ та власні частоти Λ							
Тип		p=0	p=0.5	p=1	p=5	p=10	p=100
1-1	$\hat{N}_{cr}$	9.915	7.205	5.966	3.905	3.560	3.245
	Λ	2.375	2.080	1.919	1.599	1.537	1.477
1-2	$\hat{N}_{cr}$	8.215	6.537	5.597	3.343	2.705	1.931
	Λ	2.330	2.138	2.009	1.603	1.454	1.240
2-2	$\hat{N}_{cr}$	5.864	4.841	4.381	3.754	3.685	3.625
	Λ	1.902	1.773	1.709	1.624	1.619	1.617

Як видно з Таблиці 8.6, тип матеріалу шарів пластини суттєво впливає на власні частоти та критичне навантаження. Для всіх значень градієнтного індексу p значення критичного навантаження для пластин Типу ламінації 1-1 перебільшує відповідне значення для пластин Типу 1-2. Для цих випадків зовнішні шари виготовлені з ФГМ, заповнювач є ізотропним. У випадку 1-1 у якості заповнювача є метал, а у випадку 1-2 – кераміка. Якщо розглядаються пластини Типу ламінації 2-2, то зовнішні шари такої пластини ізотропні, а заповнювач уявляє собою ФГМ. Зауважимо, що для пластин Типу 2-2 при значеннях показника $0 \leq p \leq 5$ критичні навантаження та власні частоти менші в порівнянні з пластинами Типів ламінації 1-1 та 1-2. Але якщо $p > 5$ то навпаки, значення критичного навантаження та значення власних частот для цього типу пластин починають перевищувати відповідні значення для пластин Типів 1-1 та 1-2.

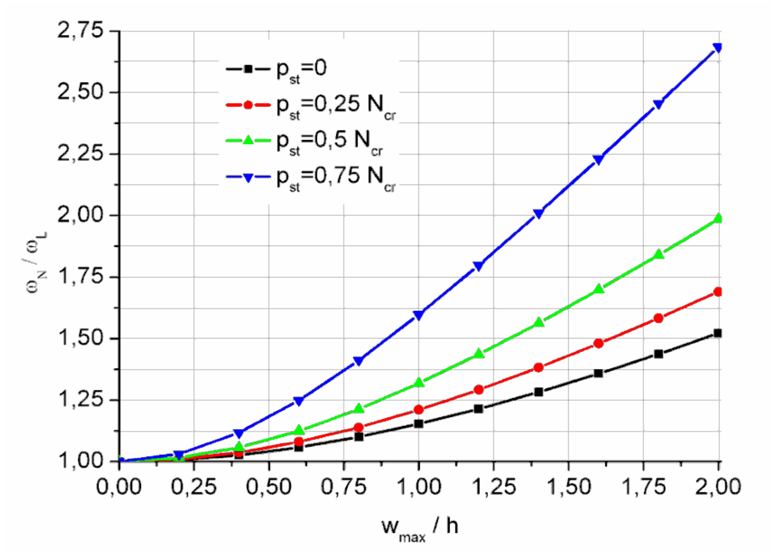
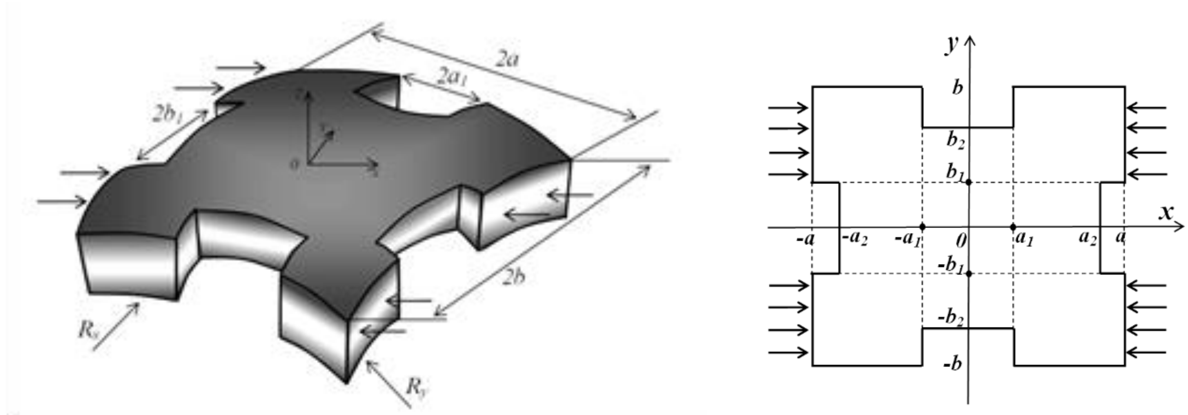


Рис. 8.3. Скелетні криві, одержані для різних значень статичного навантаження для пластин Типу 1-1

На Рис. 8.3 представлені скелетні криві, що були одержані для різних значень статичної навантаження p_{st} для пластин Типу ламінації 1-1 зі схемою відношення товщин шарів 1-2-1 та значенням показника *p=1*. Для пластин Типу 2-2 поведінка скелетних кривих подібна до Рис. 8.3. Аналізуючи ці криві можна зробити висновок, що при зростанні статичного навантаження залежність відношення нелінійної частоти до лінійної від прогину суттєво збільшується для обох Типів ламінації пластин: 1-1 та 2-2.

8.3.2 Дослідження сендвіч ФГМ пологої прямокутної оболонки з прямокутними вирізами під рівномірним одноосьовим навантаженням

Розглянемо сендвіч ФГМ пологу оболонку під дією рівномірного осьового навантаження, діючого вздовж сторін $x = \pm a$, $b_1 \le y \le b$, $-b \le y \le -b_1$ паралельно осі Ox. Оболонка, форма її плану та схема навантаження представлено на Рис. 8.4.



а) б)

Рис. 8.4. Сендвіч ФГМ полога оболонка (а) складної форми плану (б) з рівномірним одноосьовим навантаженням у середній площині

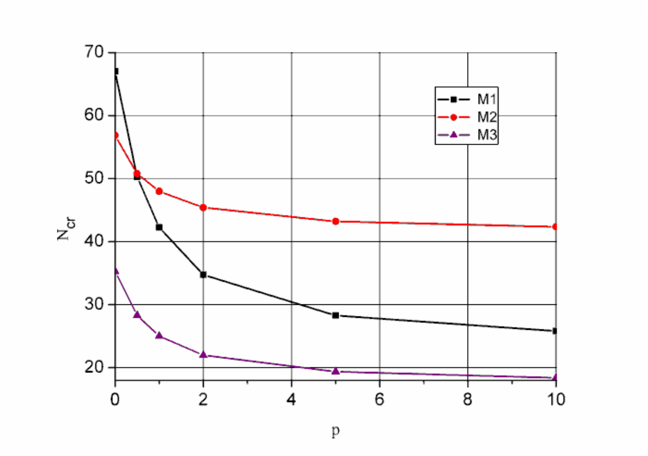
Припустимо, що заповнювач оболонки повністю керамічний, а нижній і верхній шари виготовлені з декількох видів ФГМ (розглядаються суміші M1, M2 та M3, їх характеристики наведено в п.п. 5.3.2, де також виконано розв’язок лінійної задачі для цієї оболонки). Геометричні параметри є наступними:

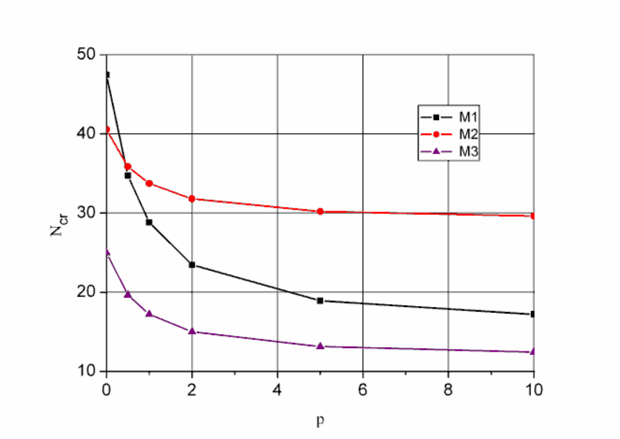
$$k_1 = R_x/2a = 0.2, \quad k_2 = R_y/2a = (0;\ 0.2;\ -0.2),$$

$$\frac{b}{a} = 1; \quad \frac{a_1}{2a} = 0.2; \quad \frac{b_1}{2a} = 0.125; \quad \frac{h}{2a} = 0.1;$$

$$a_2/2a = 0.4; \quad b_2/2a = 0.4.$$

Вплив індексу градієнта p на критичне навантаження $N_{cr} = \frac{N_x^{(0)}(2a)^2}{100h^3E_0}$ показано на Рис. 8.5 для закріплених (CCCC) і вільно опертих (SSSS) ФГМ циліндричних пологих оболонок складної форми плану (Рис. 8.4). Розподіл шарів по товщині приймається 1-2-1.





а) б)

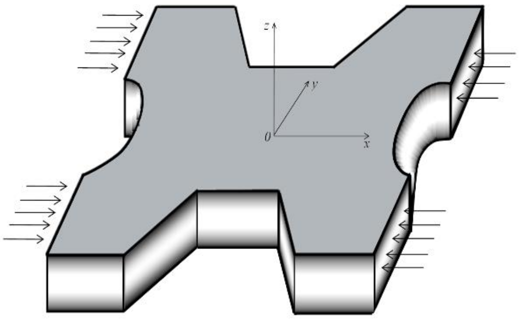
Рис. 8.5 (а, б). Вплив індексу градієнта p на критичне навантаження для різних типів матеріалів і граничних умов сендвіч ФГМ пологої оболонки: а) умови закріплення CCCC; б) умови закріплення SSSS

Спостерігається, що критичне навантаження N_{cr} зменшується зі збільшенням індексу градієнта p. Поведінка критичного навантаження однакова для обох типів граничних умов: закріплених і вільно опертих випадків. Зазначимо, що починаючи з p=0.5 значення критичного навантаження N_{cr} для матеріалу M2 ($Si_3N_4/SUS304$) більше, ніж для матеріалів M1 і M3. Значення критичного параметра N_{cr} для закріпленої циліндричної ФГМ пологої оболонки перевищують відповідні значення для вільно опертої оболонки в 1.3-1.5 рази.

8.3.3 Аналіз стійкості сендвіч ФГМ пластини з трапецієвидними та круговими вирізами

Досліджується сендвіч ФГМ пластина складної геометрії, яка знаходиться під дією одновісного навантаження (Рис. 8.6). Дослідження було проведено для двох ФГМ сумішей: Al/Al_2O_3 і $Si_3N_4/SUS304$. Пластина має наступні геометричні параметри:

$$b/a = 1,\ a_1/2a = 0.25,\ b_1/2a = 0.35,\ h/2a = 0.1,\ x_0/2a = 0.7.$$



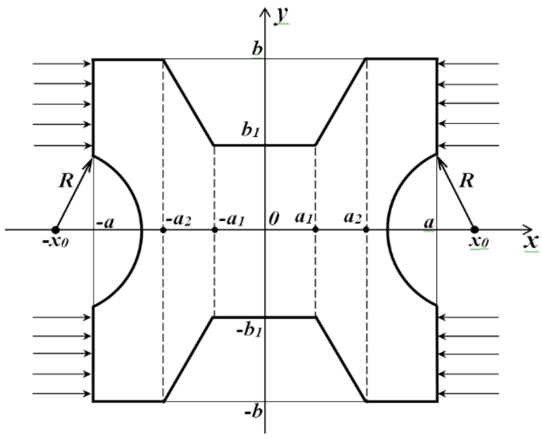


Рис. 8.6. ФГМ сендвіч-пластина зі складною геометрією та її план форма

Припустимо, що стискаюче навантаження діє вздовж прямокутної частини границі області, паралельної вісі *Ox* (Рис. 8.6). Пластина рухомо закріплена по всій межі. Тоді кінематичні (основні) граничні умови такі:

$$w(x,y)=0,\ \psi_x=0,\ \psi_y=0,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega.$$

Структура розв'язку для даного випадку може взята такою:

$$u=\Phi_1,\quad v=\Phi_2,\ w=\omega\Phi_3,\quad \psi_x=\omega\Phi_4,\quad \psi_y=\omega\Phi_5. \tag{8.13}$$

Невизначені компоненти структури $\Phi_i,\ i=\overline{1,5}$ розкладаються в ряд за степеневими поліномами (4.45) з урахуванням симетрії задачі відносно осей *Ox* та *Oy*.

Для реалізації структури розв'язку (8.13) необхідно побудувати рівняння всієї границі, яка є функцією $\omega(x,y)$:

$$\omega(x,y)=\big((f_1\vee_0 f_2)\wedge_0(f_3\vee_0 f_4)\vee_0 f_5\big)\wedge_0(f_6\wedge_0 f_7)\wedge_0(f_8\wedge_0 f_9). \tag{8.14}$$

Функції $f_i,\ i=\overline{1,9}$ у формулі (8.14) визначаються як:

$$f_1=k(x-a_1)-y+b_1\ge 0,\quad f_2=-k(x+a_1)-y+b_1\ge 0,$$

$$f_3=-k(x+a_1)+y+b_1\ge 0,\ k=(b-b_1)/(a_2-a_1).$$

$$f_4=k(x-a_1)+y+b_1\ge 0,\quad f_5=(b_1^2-y^2)/2b_1\ge 0,$$

$$f_6=\left(b^2-y^2\right)/2b\ge 0,\quad f_7=\left(a^2-x^2\right)/2a\ \ \ge 0,$$

$$f_8=((x-x_0)^2+y^2)/2b_1\ge 0,\quad f_9=((x+x_0)^2+y^2)/2b_1\ge 0.$$

Наведені нижче результати отримано шляхом апроксимації невизначених компонент у структурних формулах степеневими поліномами (4.45) до 14-го та 11-го ступенів для функції w та функцій u, v, ψ_x, ψ_y, що відповідає збереженню 36 і 21 координатних функцій відповідно. Для обчислення інтегралів у матриці Рітца використовувалися десятиточкові формули Гауса та інтегрування проводилося по чверті області визначення.

У Таблицях 8.8 і 8.9 наведено значення безрозмірної власної частоти $\Lambda = \frac{\omega_L(2a)^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$ та критичного навантаження $\bar{\bar{N}}_{\mathrm{cr}} = \frac{N_{\mathrm{cr}}}{100E_0h^3}$, що були отримані для стиснутої ФГМ (Al/Al_2O_3) пластини з Типом ламінації 1-1 та 2-1 і розташуванням шарів 2-1-2 (Рис. 8.9) при зростанні p_{st}.

Аналіз Таблиць 8.8 і 8.9 показує, що при зростанні індексу градієнта p критичне навантаження і власні частоти зменшуються для обох типів пластин. За винятком цього зміна критичного навантаження для Типу 1-1 є більш суттєвою, ніж її зміна для Типу 2-1. Зазначимо, що значення власної частоти пластини Типу ламінації 1-1 перевищують відповідні значення частоти пластини Типу 2-1, коли індекс градієнта змінюється $0 \le p \le 1$. Якщо індекс $p > 1$, тоді буде зворотня ситуація.

Таблиця 8.8. Вплив показника степеневого закону p на власну частоту стиснутої ФГМ (Al/Al_2O_3) пластини (Тип 1-1, товщина шарів 2-1-2)

p \ N_{cr}/p_{st}	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	N_{cr}
0	16.794	16.793	14.404	10.577	6.858	0.277	52.99
0.5	15.268	13.896	11.704	8.562	5.536	0.348	32.13
1	14.278	12.715	10.698	7.814	5.046	0.183	26.05
5	11.055	9.828	8.251	6.009	3.869	0.317	14.21
10	10.602	9.427	7.917	5.772	3.728	0.484	12.78
100	10.312	9.172	7.706	5.618	3.623	0.370	11.83

Таблиця 8.9. Вплив показника степеневого закону p на власну частоту ФГМ (Al/Al_2O_3) стиснутої навантаженої пластини (Тип 2-1, товщина шарів 2-1-2)

N_{cr}/p_{st} p	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	N_{cr}
0	13.743	12.220	10.260	7.476	4.815	0.409	24.08
0.5	13.424	11.938	10.027	7.309	4.716	0.531	22.43
1	13.339	11.862	9.964	7.262	4.683	0.479	21.98
5	13.237	11.779	9.899	7.222	4.661	0.507	21.22
10	13.248	11.796	9.916	7.235	4.668	0.473	21.18
100	13.143	11.834	9.951	7.263	4.688	0.470	21.21

Значення критичного навантаження та власних частот для ФГМ ($Si_3N_4/SUS304$) пластини Типу ламінації 2-1 з розташуванням шарів 2-1-2 представлені в Таблиці 8.10. Звернемо увагу, що при зростанні p_{st} частоти зманшуються. Коли вони близькі до 0, ми визначаємо p_{st}, яке визначає N_{cr}. Практично Таблиці 8.8.-8.10 визначають власні частоти пластини, навантаженої в серединній площині при різних значеннях статичного навантаження.

Таблиця 8.10. Вплив індексу градієнта p на критичне навантаження та частоту ФГМ (Si_3N_4/ SUS304) пластини (Тип 2-1, товщина шарів 2-1-2)

N_{cr}/p_{st} p	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	N_{cr}
0	11.045	10.900	9.203	6.751	4.373	0.445	36.72
0.5	10.470	10.433	8.813	6.469	4.193	0.446	36.34
1	10.203	10.199	8.636	6.339	4.109	0.421	36.17
5	9.707	9.707	8.314	6.107	3.961	0.428	35.86
10	9.601	9.600	8.247	6.059	3.932	0.449	35.80
100	9.489	9.489	8.176	6.006	3.896	0.403	35.74

Порівняння отриманих даних з Таблиць 8.9 і 8.10 показує, що значення критичного навантаження для матеріалу Al/Al_2O_3 менші за відповідні значення для матеріалу $Si_3 N_4/SUS\,3\,04$. Але значення власних частот більші для матеріалу Al/Al_2O_3.

На Рис. 8.7 та Рис. 8.8 показано залежність від товщини середнього шару (1-n-1) і товщини лицьових шарів (n-1-1, 1-1-n) для двох типів ФГМ матеріалів (Al/Al_2O_3, $Si_3 N_4/SUS\,3\,04$) та двох значень градієнтного індексу *p*=0.5, *p*=5 для пластини Типу 1-1.

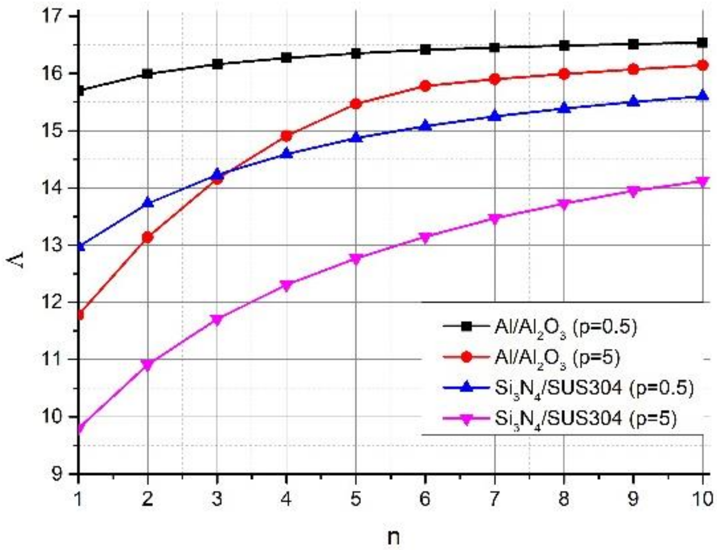


Рис. 8.7. Вплив товщини середнього шару (1-n-1) на основні частоти ФГМ пластини (*p*=0.5, *p*=5, Тип 1-1)

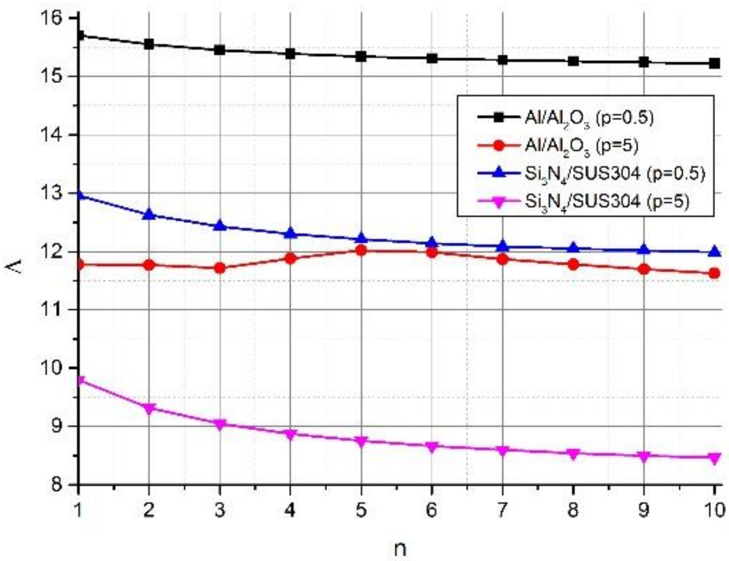


Рис. 8.8. Вплив товщини лицьових шарів (n-1-1, 1-1-n) на основні частоти ФГМ пластини (*p*=0.5, *p*=5, Тип 1-1)

На Рис. 8.9 та Рис. 8.10 представлено вплив індексу градієнта p на значення власних частот для різних статичних параметрів критичного навантаження та двох Типів 1-1 та 2-1 ФГМ пластини з товщиною шарів 2-1-2. На Рис. 8.9 зображено результати для матеріалу Al/Al_2O_3, на Рис. 8.10 зображено результати для матеріалу $Si_3\ N_4/\ SUS$ 3 04.

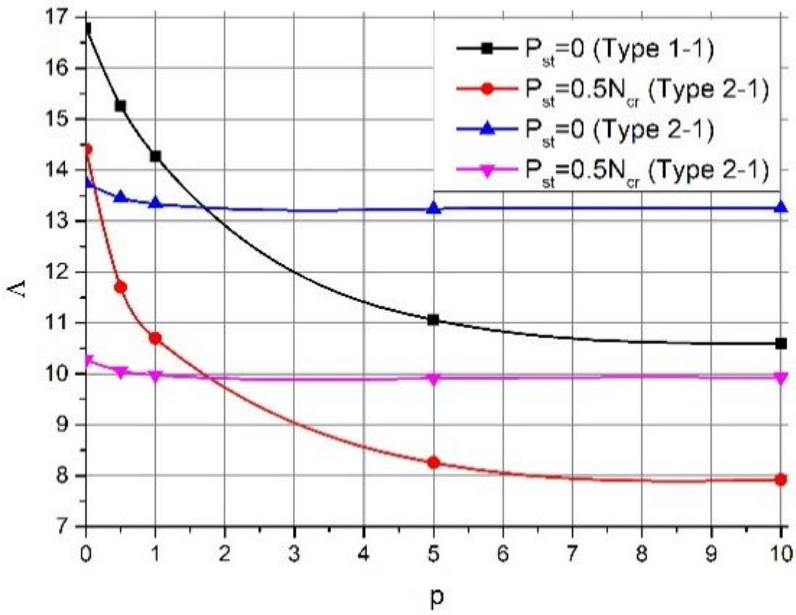


Рис. 8.9. Вплив індексу градієнта p на власні частоти стиснутих ФГМ (Al/Al_2O_3) пластин

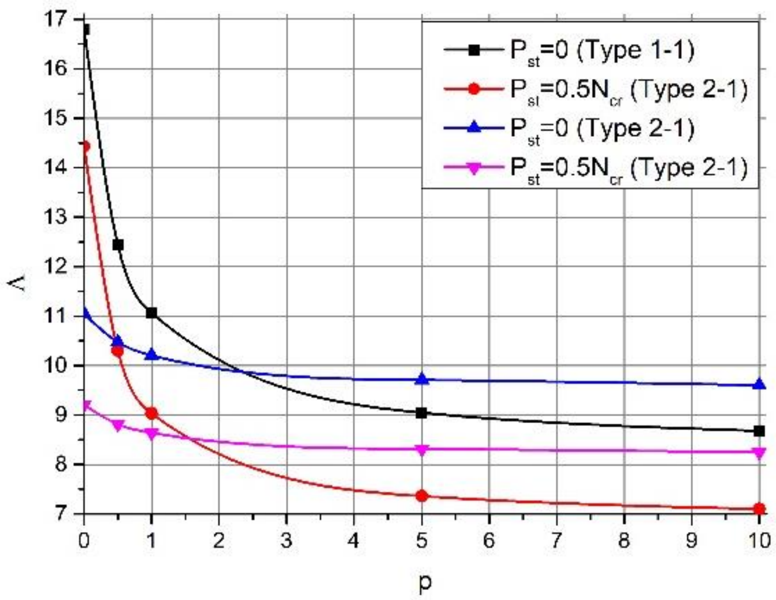


Рис. 8.10. Вплив індексу градієнта p на власні частоти стиснутих ФГМ ($Si_3\ N_4/\ SUS$ 3 04) пластин

Вплив показника степеневого закону p на критичне навантаження показано на Рис. 8.11.

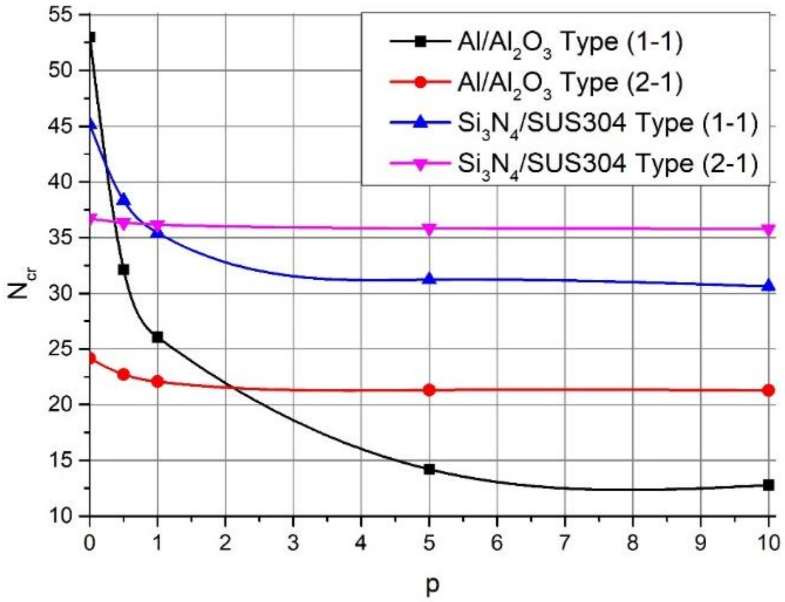


Рис. 8.11. Вплив показника степеневого закону p на критичне навантаження ФГМ пластини (Рис. 8.9, схема товщини шарів 2-1-2)

Як видно з Рис. 8.11, критичне навантаження для ФГМ пластин Типу 2-1, виготовлених з $Si_3\, N_4/\, SUS\, 3\, 04$, більше, ніж критичне навантаження для ФГМ пластин з Al/Al_2O_3 для всіх значень градієнтного індексу p. Цей висновок справедливий для пластин Типу 1-1 при значеннях показника $0 < p \leq 0.3$.

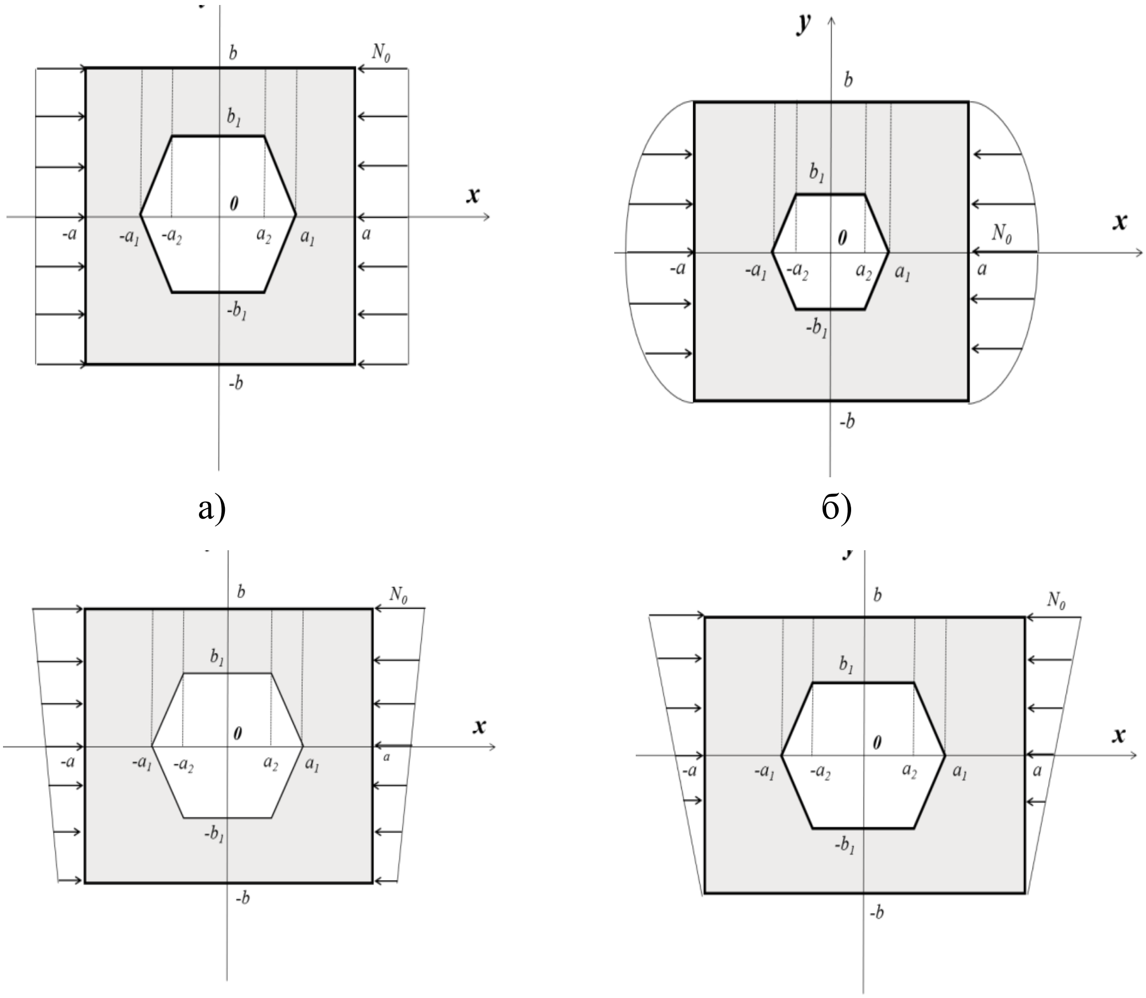
8.3.4 Втрата стійкості сендвіч пластин з вирізом складної форми

Розглянемо ФГМ сендвіч пластини з формою в плані, яка зображена на Рис. 8.12, що знаходяться під рівномірним та нерівномірним стискаючим навантаженням і спираються на двопараметричну пружну основу.

Стискаюче навантаження діє вздовж сторін $x = \pm a$ і може змінюватися за такими законами:

1) лінійне навантаження змінюється як $P = \frac{N_0}{2b}(2\, b + \gamma(y - b))$,

2) параболічне навантаження визначається формулою $P = P_0(1 - y^2/b^2)$ (Рис. 8.12б).



а) б)

в) г)

Рис. 8.12 (а-г). Форма плану ФГМ пластин з складним вирізом, що знаходяться під нерівномірним навантаженням: а) постійне навантаження; б) параболічне навантаження; в) трапецієподібне навантаження; г) трикутне навантаження

У першому випадку розглянемо значення параметра γ з відрізку [0,1]. Якщо $\gamma = 0$, то навантаження буде постійним і дорівнює N_0 (Рис. 8.12а), якщо $\gamma = 1$, то навантаження буде трикутним (Рис. 8.12г), в інших випадках навантаження буде трапецієподібним (Рис. 8.12в). Розглянуто такі співвідношення між товщинами шарів $h_f - h_c - h_f = (1-1-1; \quad 1-2-1; \quad 2-1-2)$.

Розв'язання поставленої задачі будемо виконувати в рамках класичної теорії пластин (CPT). У данному випадку докритичний стан буде неоднорідним, тому перш за все, треба вирішити цю проблему.

Граничні умови для задачі пружності приймаємо наступними:

$$N_{x_{|x=\pm a}} = P_{load}(y), \quad N_{x_{|\partial\Omega\ x=\pm a}} = 0, \quad N_{y_{|\partial\Omega}} = 0.$$

Наведена гранична умова є природньою для функціоналу (8.7), тому структуру розв'язку можна вибрати такою

$$u = \Phi_1, \quad v = \Phi_2. \tag{8.15}$$

Для задачі на власні значення (це є II етап алгоритму) розглядаються граничні умови двох видів:

1) CL, пластина закріплюється по всій межі (по зовнішньому контуру і по вирізу);
2) SS, пластина вільно опирається на зовнішньому контурі та на вирізі.

Для граничної умови CL структура розв'язку має такий вигляд:

$$w = \omega^2 \Phi_3. \tag{8.16}$$

Для граничної умови SS структура розв'язку має такий вигляд:

$$w = \omega \Phi_3, \tag{8.17}$$

де $\Phi_i,\ i = 1,2,3$ є невизначеними компонентами структури розв'язку [289, 290].

Функції $\omega(x, y)$ будуються за допомогою теорії R-функцій:

$$\omega(x, y) = -\big((f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 f_5\big) \wedge_0 (f_6 \wedge_0 f_7). \tag{8.18}$$

Функції $f_i,\ i = 1, \ldots, 7$ в рівнянні (8.18) визначаються наступним чином:

$$f_1 = k(x - a_1) - y \geq 0, \quad k = \frac{b_1}{a_2 - a_1}, \quad f_2 = -k(x + a_1) - y \geq 0,$$

$$f_3 = -k(x + a_1) + y \geq 0, \ f_4 = k(x - a_1) + y \geq 0,$$

$$f_5 = (b_1^2 - y^2)/2b_1 \geq 0, \quad f_6 = (a^2 - x^2)/2\,a, \quad f_7 = (b^2 - y^2)/2b.$$

Наведені нижче результати отримані шляхом апроксимації невизначених компонент у структурних формулах (8.15-8.17) за допомогою степеневих поліномів. Проведено апроксимації до 14-го степеня для функції *w* та 11-го степеня для функцій *u, v*. Це відповідає збереженню 36 і 21 функції координат відносно. Для обчислення інтегралів в матриці Рітца використовуються десятиточкові формули Гауса, а інтегрування виконується по чверті або половині області.

Геометричні параметри пластини є наступними:

$$\frac{a}{b} = 1; \quad \frac{a_1}{2b} = 0.2; \quad \frac{a_2}{2b} = 0.1; \quad \frac{b_1}{2b} = 0.15; \quad \frac{h}{2b} = 0.1$$

Нижче представлені результати для пластин (Рис. 8.12а) з лицьовими шарами, виготовленими з ФГМ *ZrO_2/Ti-6Al-4V*. Розташування шарів приймається 1-2-1. Для пластини, що піддається рівномірному навантаженню вздовж сторін $x = \pm a$, які спираються на пружну основу, значення безрозмірного критичного навантаження N_{cr} обчислювалось за формулою:

$$N_{cr} = \frac{N_x b^2}{100 E_0 h^3}, \quad E_0 = 1\ GPa.$$

Для випадку вільного опирання (SS) результати представлені в Таблиці 8.10, а для пластини з закріпленими сторонами результати наведено в Таблиці 8.11.

З Таблиць 8.10 і 8.11 випливає, що параметр Вінклера K_W суттєво не впливає на значення критичного навантаження, а параметр Пастернака K_P істотно збільшує значення критичного навантаження.

Таблиця 8.10. Безрозмірні критичні навантаження N_{cr} вільно опертої ФГМ пластини, навантаженої рівномірно вздовж сторін $x = \pm a$

p	$(K_w,\ K_P) = (0{,}0)$	$(K_w,\ K_P) = (100{,}0)$	$(K_w,\ K_P) = (0{,}100)$	$(K_w,\ K_P) = (100{,}100)$
0	27.6048	27.7250	39.4859	39.6013
0.5	23.8361	239564	35.7013	35.8162
1	22.1622	22.2824	34.0189	34.1335
2	20.6895	20.8097	32.5380	32.6522
5	19.4866	19.6069	31.3276	31.4416
10	19.0525	19.1727	30.8906	31.0045
20	18.8408	18.9640	30.6775	30.7913

Таблиця 8.11. Безрозмірні критичні навантаження N_{cr} закріпленої ФГМ пластини, навантаженої рівномірно вздовж сторін $x = \pm a$

p	$(K_w,\ K_P) = (0,0)$	$(K_w,\ K_P) = (100,0)$	$(K_w,\ K_P) = (0,100)$	$(K_w,\ K_P) = (100,100)$
0	53.7666	53.8698	66.0565	66.1521
0.5	46.4264	46.5235	58.7010	58.7963
1	43.1660	43.2631	55.4324	55.5275
2	40.2976	40.3947	52.5557	52.6507
5	37.9547	38.0519	50.2053	50.3002
10	37.1091	37.2062	49.3567	49.4515
20	36.6929	36.7940	48.9430	49.0378

Для наочності на Рис. 8.13(а-г) наведено залежність критичного навантаження N_{cr} від показника градієнта p, значень параметрів пружної основи K_P, K_W та виду граничних умов. Для параболічного навантаження ця залежність наведена на Рис. 8.13(б). Залежність критичного навантаження для трикутного та трапецієподібного навантажень представлено на Рис. 8.13(в) та Рис. 8.13(г) відповідно.

Порівняння критичних навантажень для різних типів стискаючих нерівномірних навантажень і двох типів граничних умов наведено в Таблиці 8.12. Значення двох параметрів пружної основи фіксовані K_w=100, K_p =100. Розташування шарів прийнято 1-2-1.

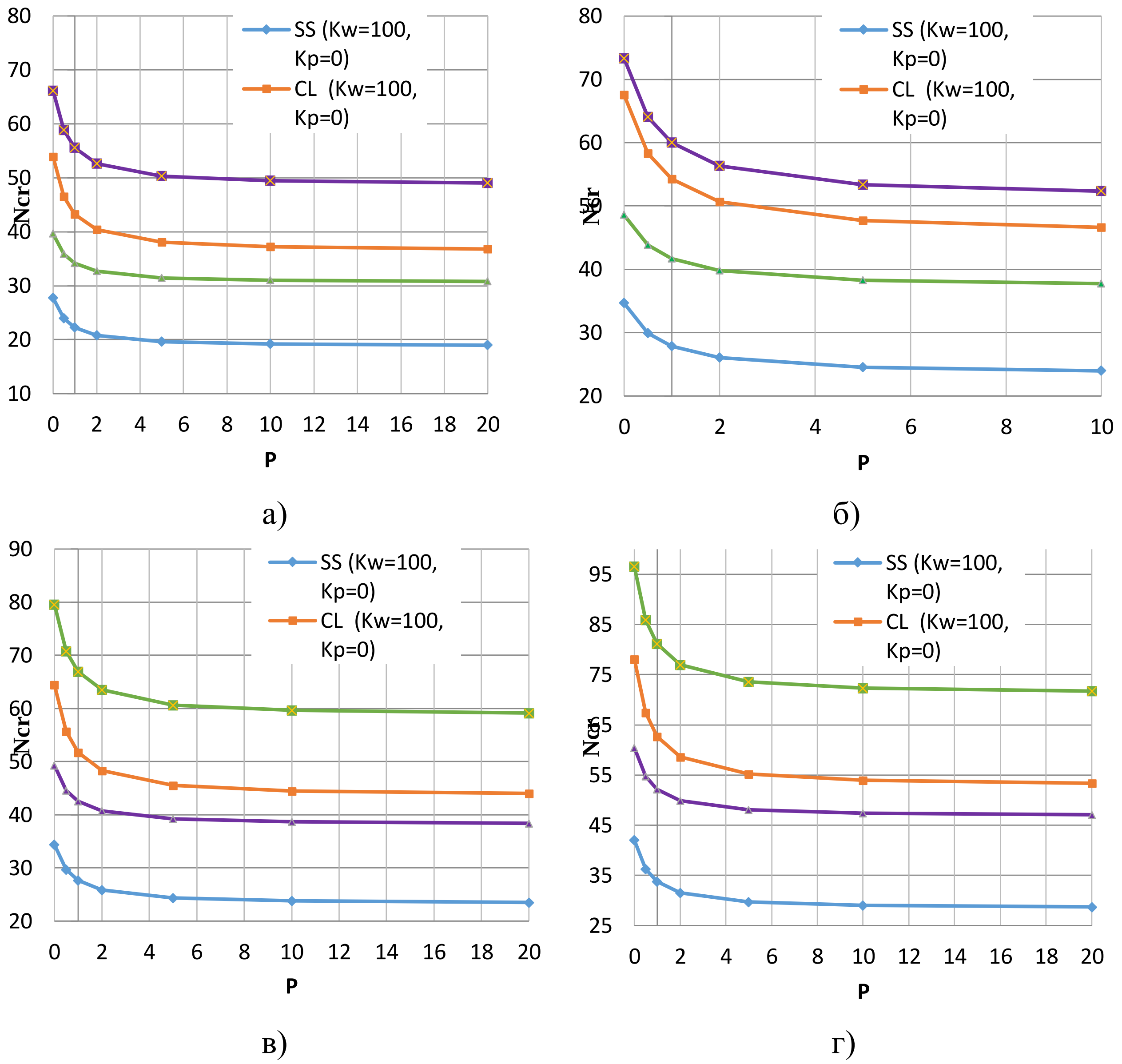


Рис. 8.13. Параметри безрозмірного критичного навантаження Ncr при різних типах навантаження: а) рівномірне осьове навантаження; б) параболічне навантаження; в) трапецієподібне навантаження; г) трикутне навантаження

Таблиця 8.12. Безрозмірні критичні навантаження N_{cr} для різних типів навантажень

	SS				CL			
p	Парабол.	Лінійне $\gamma=1$	Лінійне $\gamma=0.5$	Лінійне $\gamma=0$	Парабол.	Лінійне $\gamma=1$	Лінійне $\gamma=0.5$	Лінійне $\gamma=0$
0	48.5633	60.440	49.317	39.6013	73.3261	96.551	79.619	66.1521
0.5	43.8067	54.703	44.624	35.8162	64.0826	85.881	70.818	58.7963
1	41.6889	52.153	42.537	34.1335	59.9750	81.139	66.907	55.5275
2	39.8221	49.908	40.701	32.6522	56.3599	76.965	63.465	52.6507
5	38.2940	48.073	39.199	31.4416	53.4062	73.555	60.653	50.3002
10	37.7416	47.410	38.657	31.0045	52.3398	72.323	59.637	49.4515
20	37.4721	47.087	38.393	30.7913	51.8199	71.723	59.143	49.0378

З Таблиці 8.12 випливає, що критичне навантаження N_{cr} приймає найменше значення для рівномірного навантаження і найбільше значення для трикутного стискаючого навантаження для обох типів граничних умов. Значення критичного навантаження N_{cr} для параболічного і трапецієподібного навантажень істотно не відрізняються один від одного. Збільшення індексу градієнта p призводить до зменшення критичного навантаження N_{cr} для даного розташування шарів.

Висновки за Розділом 8

Головні результати за даним розділом полягають у наступному:

1. Розроблено та чисельно реалізовано метод визначення критичного навантаження ФГМ пластин та пологих оболонок, навантажених рівномірно або нерівномірно стискаючими зусиллями. Алгоритм чисельної реалізацій представлено у вигляді схеми.
2. Запропоновано методику визначення докритичного стану об’єкту. Для її реалізації виведено відповідні функціонали в рамках уточненої теорій (FSDT). Представлено варіаційну постановку задач для дослідження лінійних коливань

ФГМ пластин та оболонок під дією стискаючого навантаження та алгоритм знаходження критичного навантаження.

3. Дослідження нелінійних коливань проведено за попереднім алгоритмом, розглянутим у Розділі 3.

5. Розроблений підхід протестовано на великій кількості задач стійкості пологих оболонок і пластин з прямокутною формою плану, з різними крайовими умовами, різних типів ФГМ та різних значень кривини оболонок.

6. Особливої уваги надано дослідженню ФГМ оболонок та пластин з вирізами та отворами різної геометричної форми, та способів їх закріплення. Серед таких задач заслуговують уваги наступні:

– детально вивчено стійкість та коливання ФГМ тришарової пластини з вирізами по двом прямокутним кутам різних типів (1-1, 1-2. 2-2). Визначені критичні навантаження, зони стійкості, побудовані скелетні криві. Доведено вірогідність отриманих результатів шляхом виродження розглянутої пластини до прямокутної;

– досліджені сендвіч ФГМ пологі оболонки з прямокутними вирізами на кожній стороні під рівномірним одноосьовим навантаженням. Досліджено вплив величини градієнтного індексу на величину критичного навантаження та показано, що із збільшенням значення цього параметру значення критичного навантаження зменшується;

– досліджено стійкість ФГМ сендвіч пластини прямокутної форми з трапецієвидними та круговими вирізами. Побудовані відповідні структури розв’язку. Досліджено вплив значення градієнтного індексу на власні частоти та критичне навантаження. Наведені графіки залежності власних частот від товщини середнього шару та від товщини лицьових шарів для стиснутих пластин Типу 1-1;

– розглянута задача стійкості ФГМ сендвіч пластини на пружній основі, яка навантажена нерівномірно стискаючим зусиллям. Пластина має прямокутну форму та шестикутний отвір. Зміна стискаючого навантаження у серединній площині відбувається за різними законами: рівномірному, параболічному, лінійному та трапецієвидному. Досліджено стійкість пластини для різних крайових умов, в тому числі на отворі, різних видів ФГМ, різних значень параметрів пружної основи. Представлені залежності від зміни різних параметрів у вигляді графіків та таблиць.

Показано, що вплив коефіцієнту пружності Пастернака на значення частот та критичне значення суттєво більш ніж вплив коефіцієнту Вінклера. При збільшені коефіцієнту пружності Пастернака власні частоти і критичне навантаження також збільшується для різних типів ФГМ та діючого навантаження.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [301, 313, 316-317, 321, 326, 335, 367-368, 371].

РОЗДІЛ 9

ПЕРЕВІРКА ОДЕРЖАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРАКТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

У даній роботі запропоновано метод дослідження ФГМ пластин та пологих оболонок складної геометричної форми плану та різних типів граничних умов. Зрозуміло, що питання вірогідності отриманих результатів мають ключове значення. Не дивлячись на те, що для кожного класу задач (нелінійні і параметричні коливання, стійкість, згин ФГМ пологих оболонок, врахування пружної основи та пористості) було проведено широке тестування та порівняння отриманих результатів з відомими в літературі, а також перевірена їх збіжність шляхом збільшення кількості координатних функцій, та виродження області до класичної, був проведений також практичний експеримент. Проведення цього експерименту було виконано у рамках міжнародного співробітництва з італійською науковою групою під керівництвом професора Pellicano в Департаменті Інженерії «Enzo Ferrari» (Engineering Department) в Університеті Модени та Реджо-Емілії, Італія (University of Modena and Reggio-Emilia, Italy).

Експеримент було виконано для низки пластин різної геометричної форми плану та різними граничними умовами з метою дослідження їх динамічної поведінки. Для проведення експерименту пластини було виготовлено з матеріалу на 3D-прінтері. Значення отриманих власних частот та форми мод порівнювалися з відповідними характеристиками, що були обчислені методом – R-функцій та методом скінчених елементів з використанням пакету Nastran.

Треба зазначити, що в останні роки використання інноваційних методів та технологій, таких як адитивне виробництво та 3D-принтери, стає дедалі популярнішим як на етапі проектування, так і на етапі виробництва. Використання цих технологій дає, з одного боку, можливість швидше створювати прототипи чи компоненти, з другого боку, дає дизайнеру велику свободу у використанні форм і профілів, чого неможливо досягти традиційними методами виробництва. Ця свобода, однак, ускладняється при реалізації граничних умов, які часто важко визначити при створенні моделей, щоб правильно описати динамічну поведінку об’єкту. З цієї причини необхідно мати надійні та універсальні методи, що дозволяють моделювати поведінку композитних конструкцій зі складною формою та граничними умовами.

Одним із ефективних методів реалізації цієї проблеми є запропонований в роботі метод R-функцій (RFM), який уявляє собою поєднання чисельних та аналітичних методів. Основна перевага цього методу полягає в тому, що розв’язок задачі представляється в аналітичній формі у вигляді розвинення в ряди за побудованою системою базисних функцій. Коефіцієнти розкладу знаходяться чисельно за допомогою варіаційних методів. Безумовно, RFM є дуже корисним для перевірки експериментальних даних, отриманих за допомогою 3D-принтера. Значимість паралельного дослідження полягає в тому, що воно може підвищити точність та надійність динамічного аналізу 3D-друкованих конструкцій, тим самим сприяючи створенню безпечніших та ефективніших інженерних споруд. У роботі пропонується новий методологічний підхід, що поєднує в собі експериментальний та теоретичний аналіз, що пропонує цінні ідеї для галузі адитивного виробництва.

9.1 Підготовка зразків

Як було зазначено, для створення зразків використовувався 3D-принтер. (Рис. 9.1) - Delta WASP 2040 Turbo2, що має наступні технічні характеристики:

• Висота шару 0,15 мм.

• Швидкість друку: 50 мм/сек.

• Швидкість руху: 80 мм/с.

• Температура ліжка: 60 °C.

• Температура екструдера: 245 °C.

• Діаметр екструдера/сопла: 0,4 мм.

Усі зразки були виготовлені з використанням нитки PETG компанії TREED (Рис. 9.2) з наступними механічними властивостями:

• Густина: 1,20 г/см3.

• Модуль Юнг: 1,6 ГПа.

• Водопоглинання: 0,13%.

Оскільки водопоглинання може вплинути на реальну вагу зразка, щоб уникнути небажаної зміни маси, кожен зразок зважувався до і після процесу випробування. Більше того, щоб уникнути зміни модуля Юнга для всіх зразків використовувалася та сама котушка з ниткою.

Рис. 9.1. 3D-принтер Delta Wasp 2040 Turbo 2.

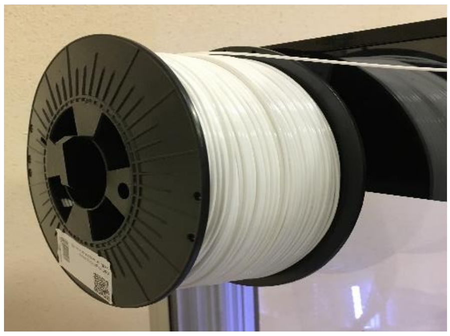


Рис. 9. 2. Деталь принтера: дріт із PETG, що використовується для процесу 3D-друку

Основною проблемою під час створення прототипу об’єкту, що досліджується, було визначення правильної граничної умови: на Рис. 9.3 показана реалізація фіксованого з'єднання шляхом фіксації зразка між VTA (адаптером вібростола), виготовленим з двох алюмінієвих рам, що мають відповідну форму, в той час як просте опорне з'єднання було створено шляхом друку більш тонкого контуру, щоб забезпечити можливість обертання та блокування зсувів. Дійсно, надгнучкі з'єднання поводяться подібно до шарнірів.

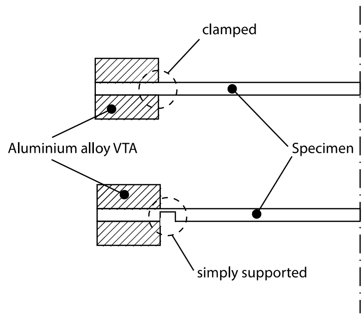


Рис. 9.3. Креслення закріпленої і вільно опертої пластини

9.2 Технічне обладнання та вихідні дані експерименту

Обладнання, що використовувалось для цього експерименту, показано на Рис. 9.4. Воно складається з електродинамічного вібростенду LDS V530 (Рис. 9.4E), керованого системою збору даних Scadas III (Рис. 9.4D) і програмного забезпечення Siemens LMS TestLab: вібрація чистого столу контролюється за допомогою одновісного акселерометра Dytran моделі 3097a2, а відгук вимірюється лазерним віброметром OFV-505 від POLYTEC (Рис. 9.4B). Вібростенд та охолодний вентилятор живляться від підсилювача потужності.

Зразки були розроблені за допомогою 3D-CAD та реалізовані на 3D-принтері з використанням програмного забезпечення для нарізки: для кожної пластини було виготовлено спеціальний алюмінієвий VTA для жорсткого з'єднання зразка з шейкером. Процес друку повторювався ітеративно, змінюючи параметри друку (швидкість екструдера та температуру) для отримання однорідного зразка. Розміри зразків були ретельно виміряні та використані для моделювання методом скінчених елементів (МСЕ) та RFM. Зразки були експериментально випробувані і модальний аналіз був виконаний з використанням близько 45 точок вимірювання для кожної пластини.

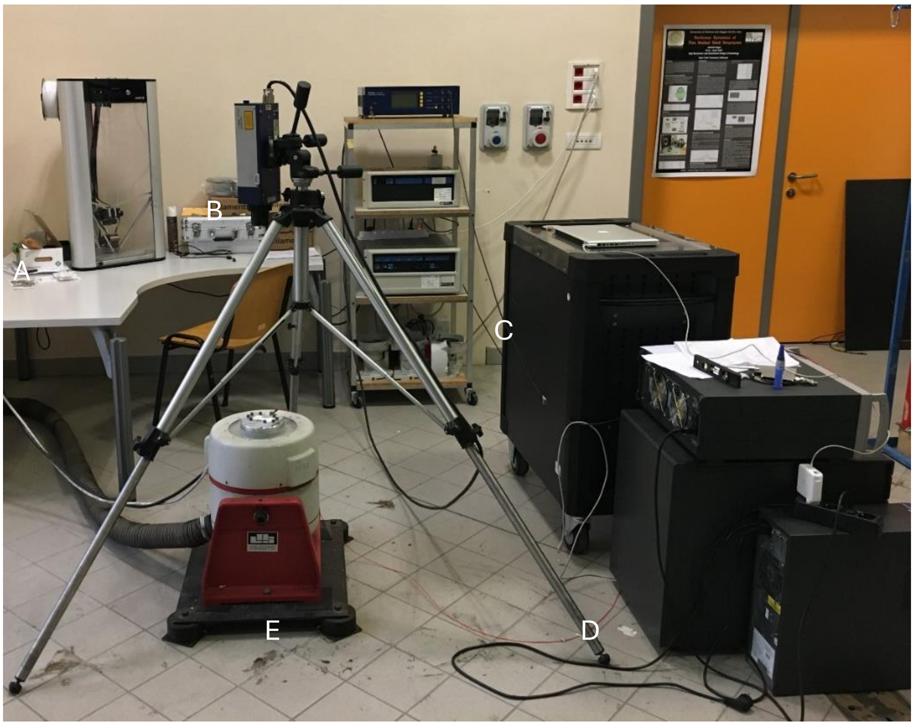


Рис. 9.4. Зображення експериментальної установки: A) 3D-принтер; B) лазерний віброметр; C) комп'ютер; D) Scadas III; E) електродинамічний шейкер

Експериментальний модальний аналіз шляхом порушення основи був обраний через невеликий розмір, високе демпфування і низьку жорсткість зразків: місце вимірювання було точно встановлено; базове прискорення здійснювалося з використанням синусоїдальної розгортки, що дозволяє рівномірно розподіляти енергію в діапазоні обраних частот; безконтактні датчики використовувалися, щоб уникнути надмірного збурення системи.

Було розглянуто чотири тестові випадки, які відрізняються геометрією та граничними умовами. У Таблиці 9.1 зазначено визначення кожного тестового прикладу і відповідні граничні умови, а в Таблиці 9.2 представлені властивості еталонного матеріалу, які використовувалися для дослідження MCE і RFM. Властивості матеріалу можуть зазнавати невеликих змін в процесі використання 3D-прінтера, наприклад завдяки водопоглинанню або температури екструзії (пресування).

Таблиця 9.1. Тестові приклади

Приклад	Опис форми	Граничні умови
1	Прямокутний	2 протилежні сторони закріплені; 2 сторони вільні
2	Прямокутний	всі сторони закріплені
3	Прямокутний	всі сторони вільно оперти
4	Прямокутні з прямокутним вирізом	2 протилежні сторони закріплені, інші сторони вільні

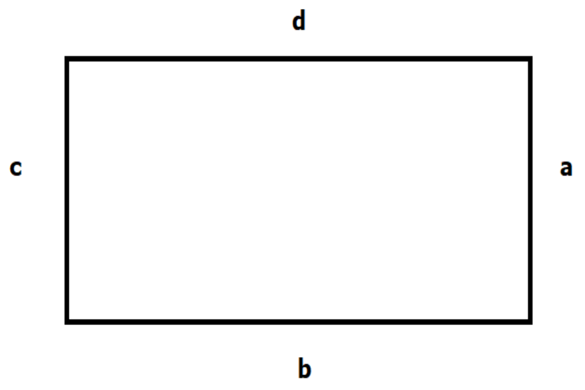
Таблиця 9.2. Властивості матеріалів, що використовуються для МСЕ та RFM моделювання

Характеристики	**G PET**
Густина маси	1,20 g/cm^3
Коефіцієнт плинності	50 MPa
Коеф. міцності на розтягування	26 MPa
Модуль Юнга	1,6 GPa
Коефіцієнт Пуассона	0,417 su
Модуль зсуву	0,564573 GPa

9.3 Приклад 1: Прямокутна пластина з двома закріпленими краями

У Таблиці 9.3 наведено виміряні геометричні розміри та граничні умови пластини для першого прикладу.

Таблиця 9.3. Геометричні розміри та граничні умови (приклад 1)

<table>
<tr><td rowspan="6">
</td><td colspan="2">Розмір
a=c = 37,60 мм
b=d = 74,70 мм

h (товщина) = 0,90 мм</td></tr>
<tr><td>Сторона</td><td>Граничні умови</td></tr>
<tr><td>a</td><td>закріплена</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Вільна</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Закріплена</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Вільна</td></tr>
</table>

1) МСЕ моделювання

Для моделювання пластини методом скінчених елементів використовувався програмне забезпечення пакету Nastran, на Рис. 9.5 показані сітка та протилежні затиснуті краї; результати наведено в Таблиці 9.4.

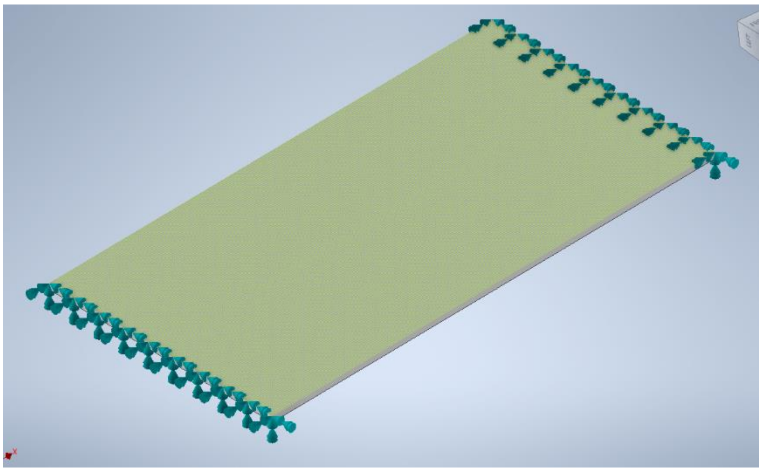
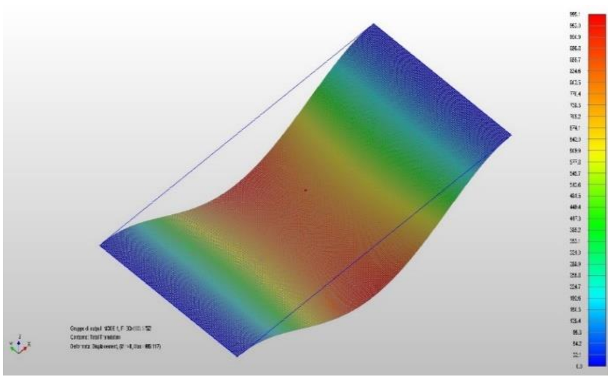
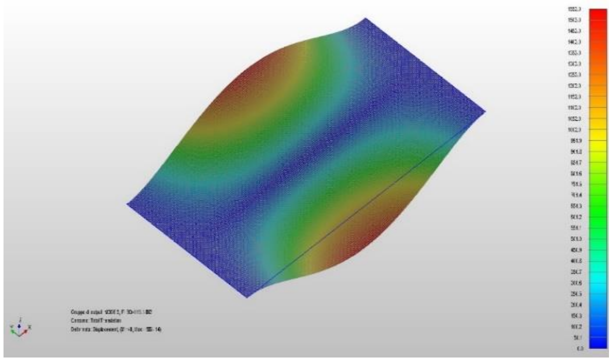
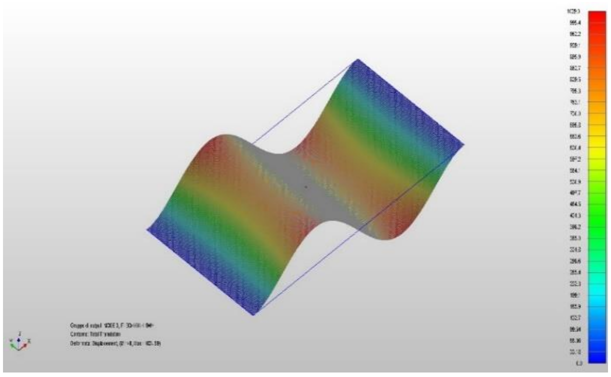
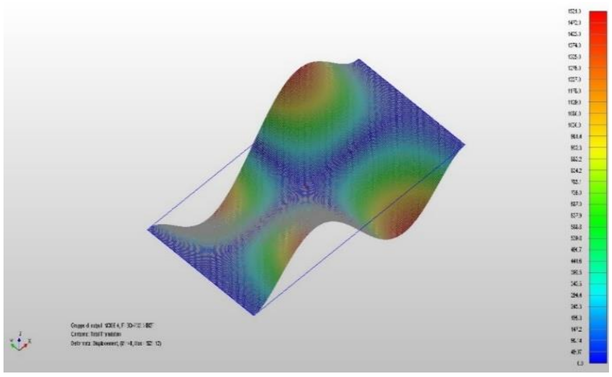
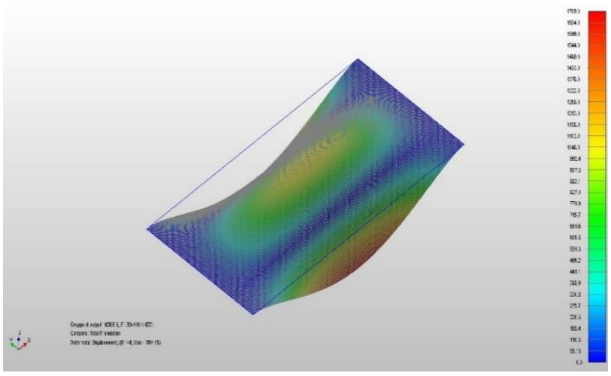
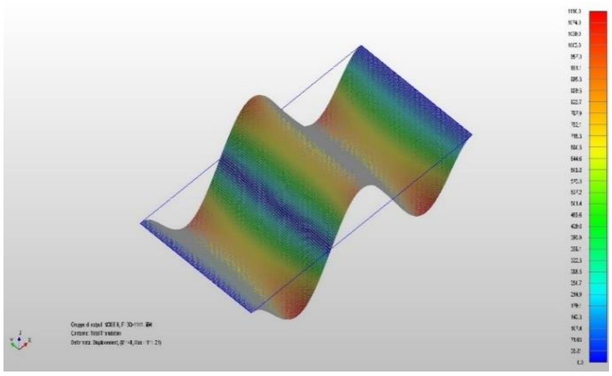
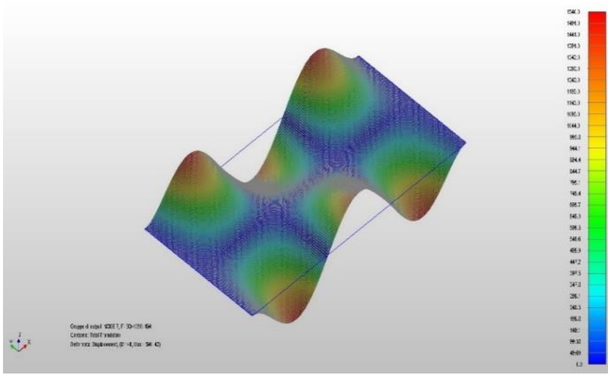
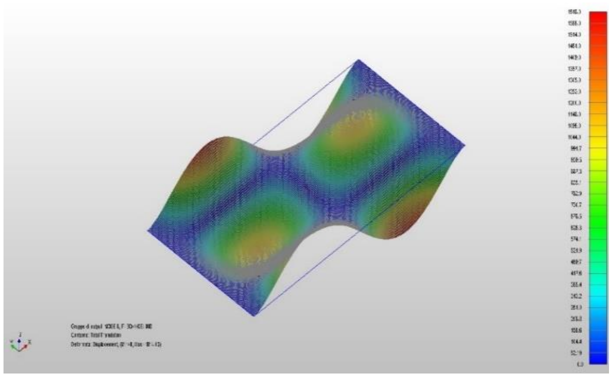


Рис. 9.5. Чисельне моделювання: сітка та затиснуті краї

Таблиця 9.4. Моди і власні частоти (приклад 1), одержані МСЕ

203,6 Hz 	315,6 Hz 
560,4 Hz 	732,6 Hz 
998,6 Hz 	1101,6 Hz 
1299,95 Hz 	1428,8 Hz 

2) Експериментальний модальний аналіз

На Рис. 9.6 показано зразок, реалізований за допомогою 3D-принтера для експериментального модального аналізу, тоді як на Рис. 9.7 представлено експериментальну функцію частотної характеристики (ФЧХ) між базовим прискоренням збудження та виміряною швидкісною реакцією кожної точки. У Таблиці 9.5 наведені результати модального аналізу.

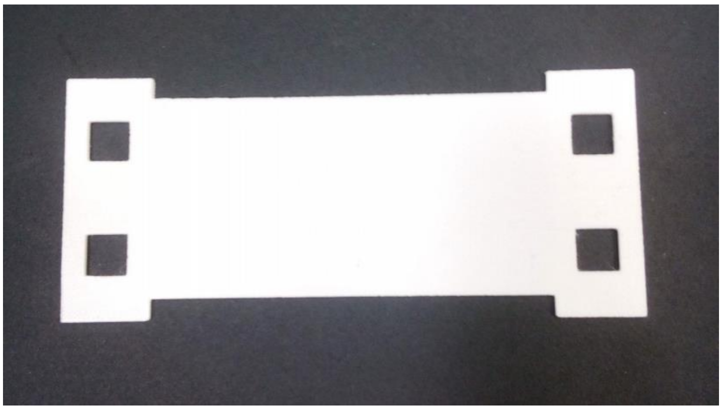


Рис. 9.6. Зразок для експериментального модального аналізу (приклад 1)

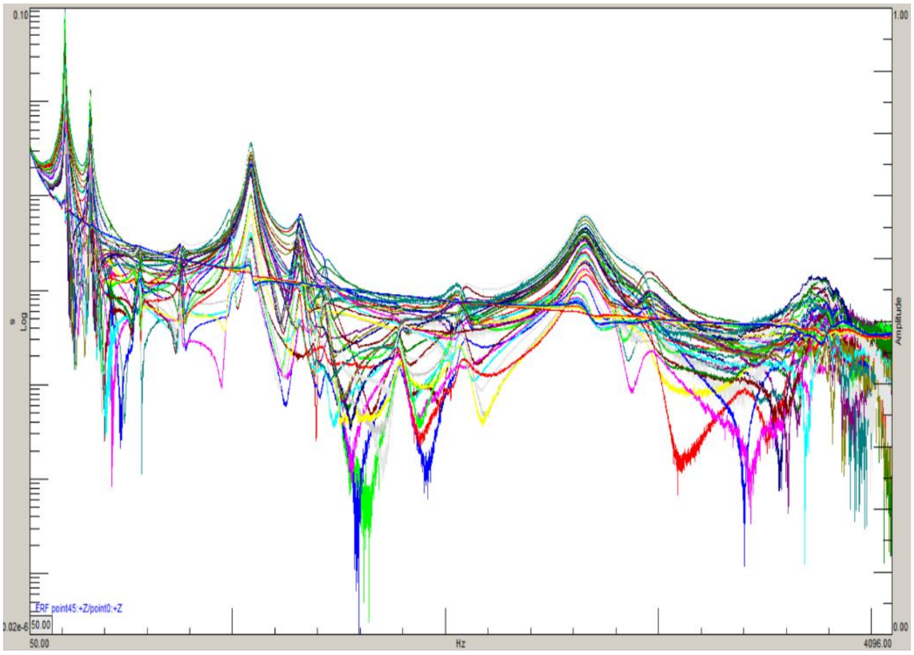
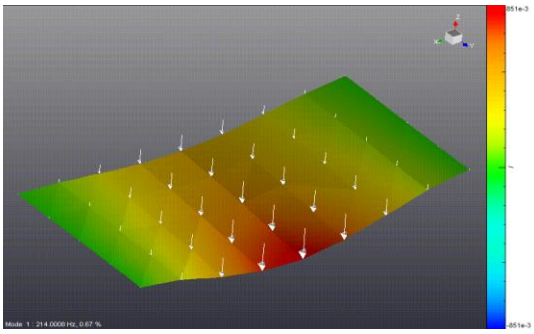
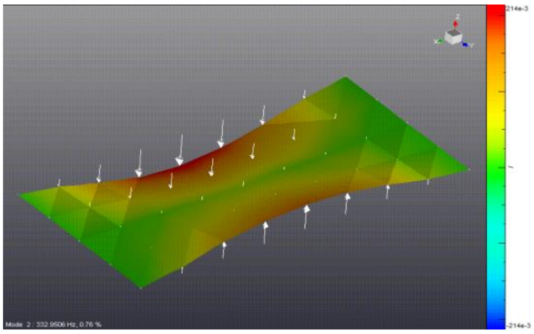
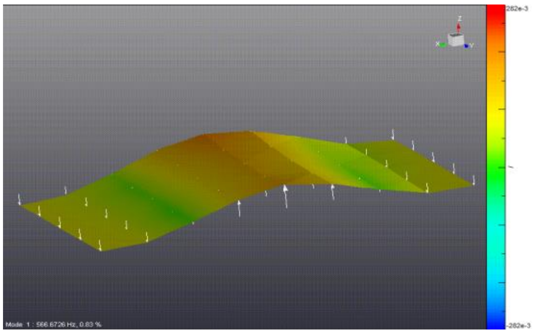
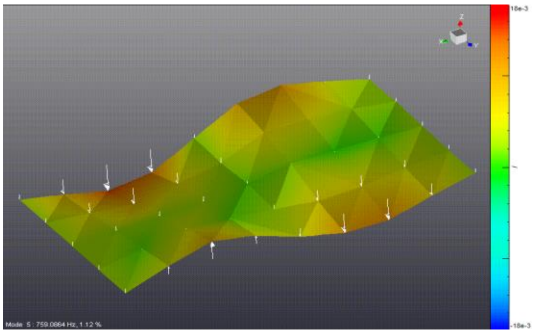
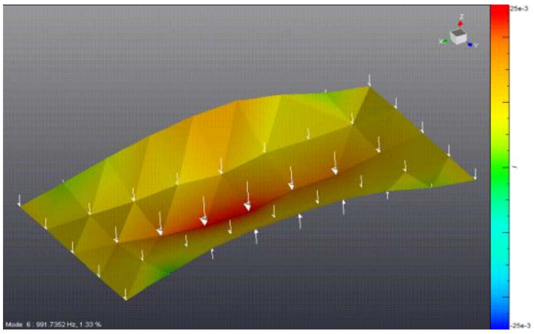
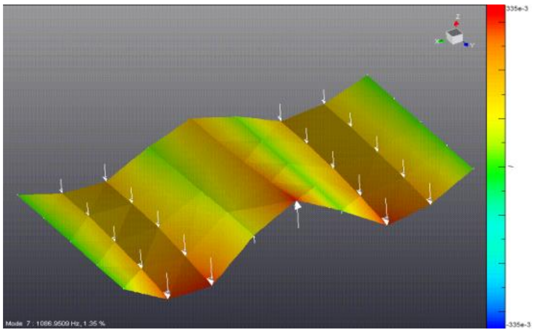
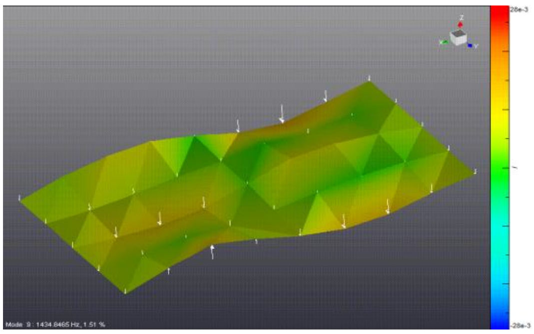
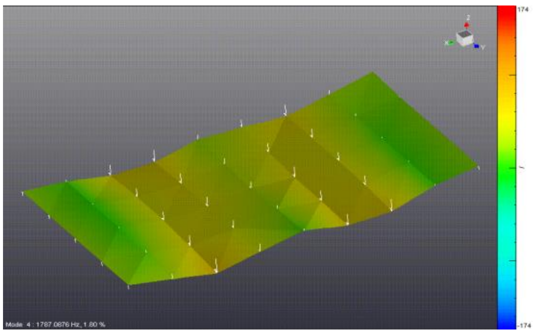


Рис. 9.7. Експериментальна частотна характеристика базової функції збудження від швидкості

Треба відзначити, що ФЧХ (Рис. 9.7) - це математичне уявлення про те, як фізична система реагує на вхідний сигнал на різних частотах. Вона широко використовується в техніці, фізиці та суміжних галузях для аналізу динаміки систем, схильних до коливань.

Таблиця 9.5. Експериментальний модальний аналіз: форми мод і власні частоти (приклад 1)

214,0 Hz 	332,95 Hz 
566,7 Hz 	759,1 Hz 
991,7 Hz 	1086,95 Hz 
1315,5 Hz 	1434,9 Hz 

Функція частотної характеристики описує зв'язок між вхідною силою та вихідним відгуком (таким як зміщення, швидкість або прискорення) у частотній області, дозволяючи визначити резонансні частоти, характеристики демпфування та інші динамічні властивості системи. Аналіз цього графіка дуже важливий для розуміння того, як поводитиметься конструкція в експлуатаційних або розрахункових умовах.

Таблиця 9.6. Порівняння чисельних та експериментальних частот (приклад 1)

МСЕ [Гц]	Експеримент [Гц]	Різниця %
203,58	214,00	4,87
315,59	332,95	5,21
560,42	566,67	1,10
732,57	759,09	3,49
998,60	991,74	-0,69
1101,56	1086,95	-1,34
1299,95	1315,54	1,19
1428,81	1434,85	0,42

З Таблиці 9.6 можна побачити, що відсоткова різниця менша за 6% для перших частот і зменшується для наступних частот.

Аналіз підтверджує добрий збіг результатів, отриманих RFM, МСЕ та за допомогою експерименту. У цьому випробуванні мета полягає в тому, щоб перевірити, що визначені властивості матеріалу та граничні умови, надруковані на 3D, створені точно.

У процесі моделювання добре відомо, що найбільш комфортними граничними умовами є нерухомі з'єднання, оскільки це дозволяє спростити аналіз, зменшивши складність розрахунків; і навпаки, в експериментальному аналізі вільні конфігурації легше перевірити, оскільки вони значно зменшують вплив взаємодії опорних рам або структурного з'єднання з адаптерами вібраційного столу.

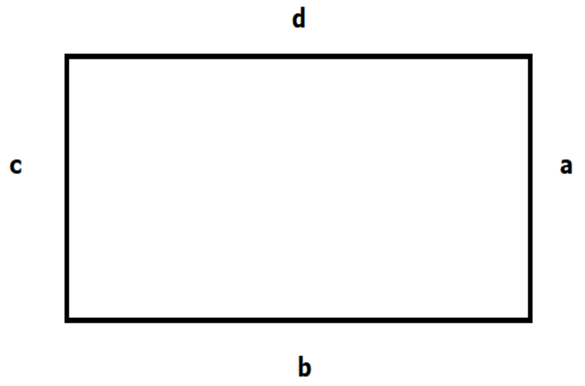
Ці міркування актуальні як з наукової точки зору, коли потрібна експериментальна перевірка моделі, так і коли потрібно змоделювати реальну структуру, яка підключена до більш складної системи. Ця серія випробувань використовується для взаємної перевірки моделі МСЕ через матеріальні невизначеності та експериментальної установки через дуже важливу експериментальну реалізацію закріплення та шарнірного опирання.

Зокрема, процес 3D-друку забезпечує високу універсальність, дозволяючи вибирати різні матеріали та декілька шаблонів і параметрів під час створення зразків; це, однак, збільшує складність зразків, вносячи невизначеності, які необхідно враховувати під час процесу моделювання.

9.4 Приклад 2: Прямокутна пластина з усіма закріпленими краями

У Таблиці 9.7 наведено виміряні геометричні розміри та граничні умови пластини для другого прикладу.

Таблиця 9.7. Геометричні розміри та граничні умови (приклад 2)

<table>
<tr><td rowspan="6">
</td><td colspan="2">Розмір
a=c = 40,8 mm
b=d = 79,00 mm
h (товщина) = 0,93 mm</td></tr>
<tr><td>Сторона</td><td>Граничні умови</td></tr>
<tr><td>a</td><td>закріплена</td></tr>
<tr><td>b</td><td>закріплена</td></tr>
<tr><td>c</td><td>закріплена</td></tr>
<tr><td>d</td><td>закріплена</td></tr>
</table>

1) МСЕ моделювання

Для моделювання МСЕ використовувався пакет Nastran, на Рис. 9.8 показані сітка та закріплення країв; результати наведено в Таблиці 9.8.

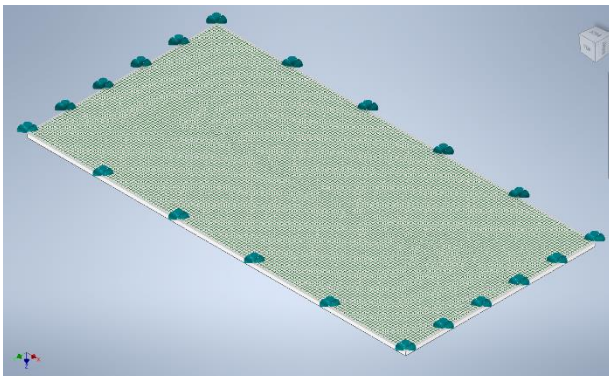
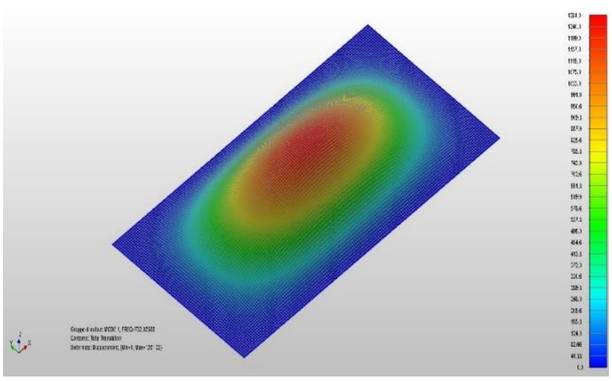
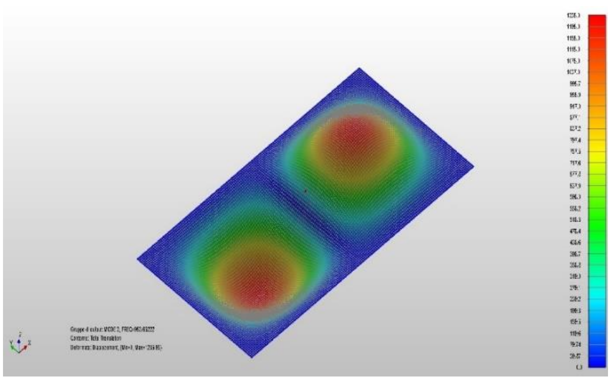
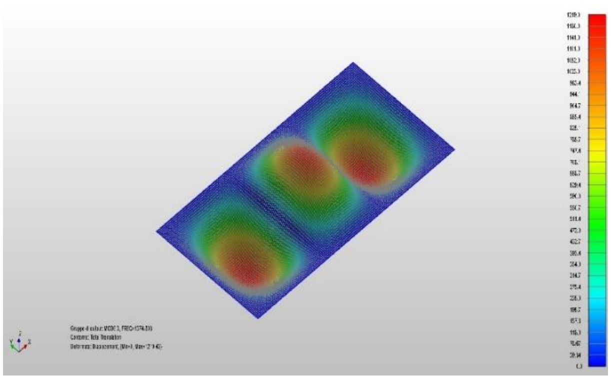
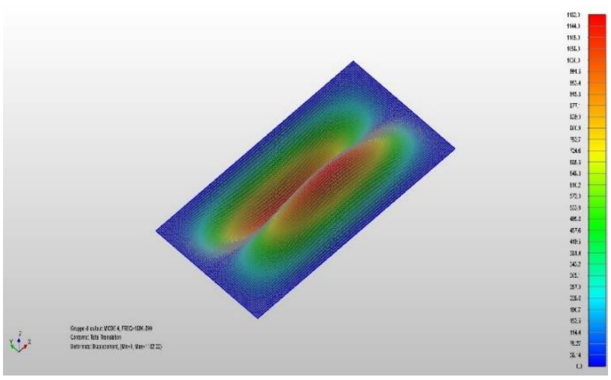
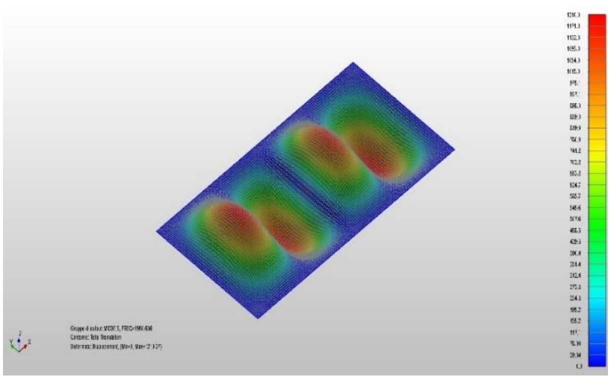
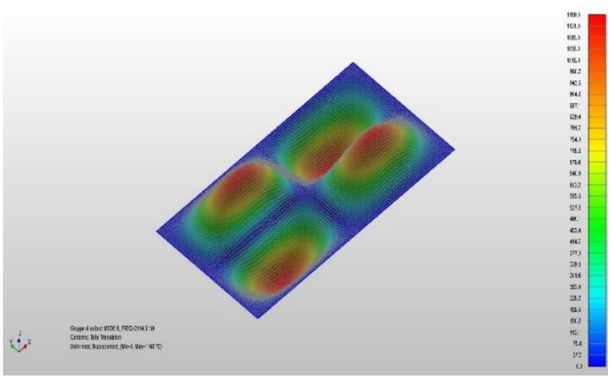
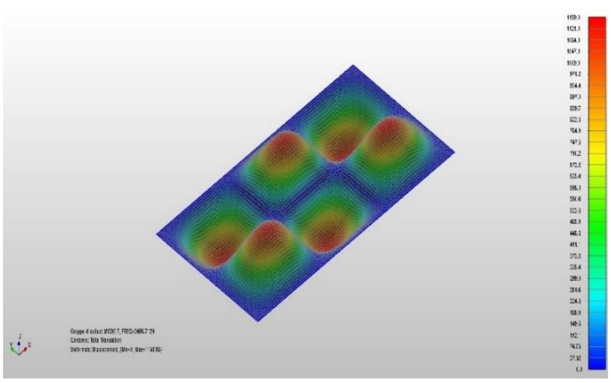
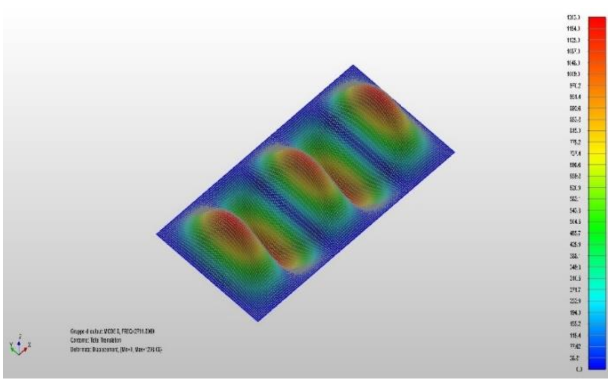


Рис. 9.8. Чисельне моделювання: сітка та закріплені краї

Таблиця 9.8. МСЕ моделювання: форми мод і власні частоти (приклад 2)

732,03 Hz 	963,65 Hz 
1374,80 Hz 	1890,89 Hz 
1960,64 Hz 	2114,51 Hz 
2498,71 Hz 	2732,03 Hz 

2) Експериментальний модальний аналіз

На Рис. 9.9 показано зразок, встановлений через VTA (адаптер вібраційного столу) на шейкер, на якому видно лазерну пляму під час процесу вимірювання. На Рис. 9.10 представлена експериментальна ФЧХ (функція частотної характеристики) між базовим прискоренням збудження та виміряною швидкісною характеристикою кожної точки. У Таблиці 9.9 наведені результати.

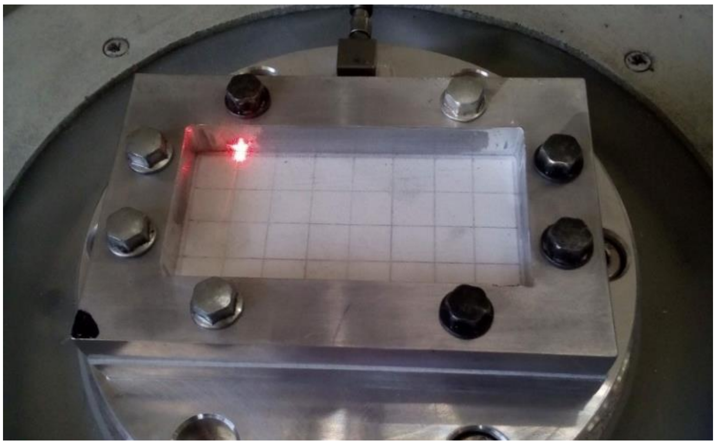


Рис. 9.9. Зразок для експериментального модального аналізу (приклад 2)

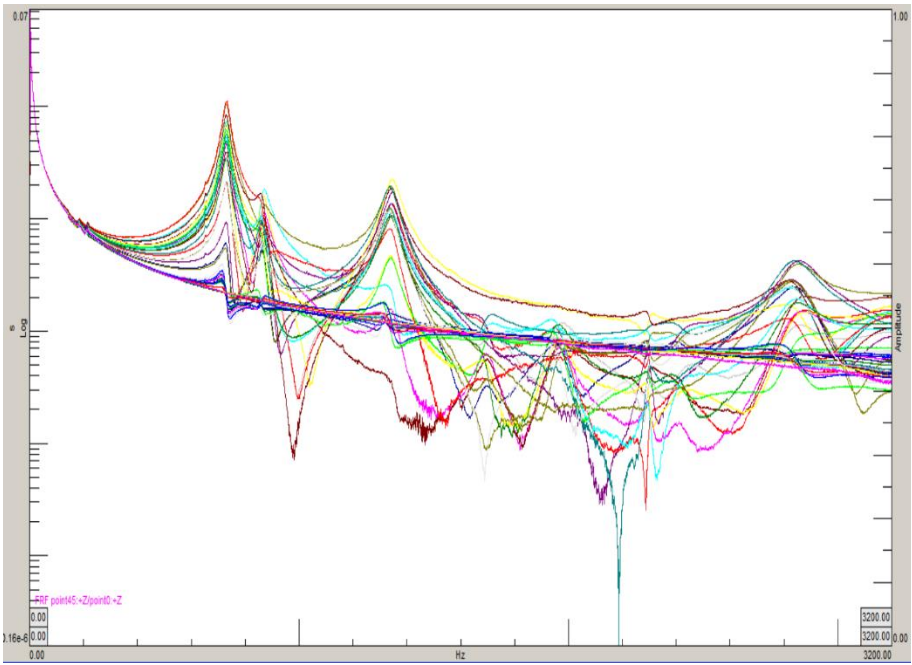
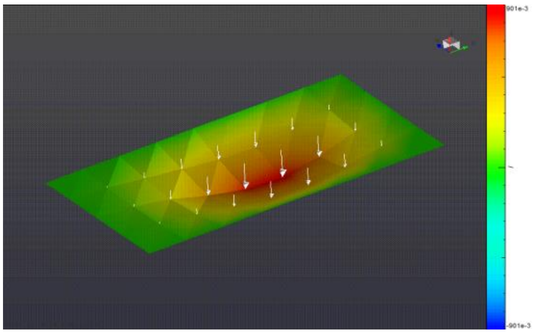
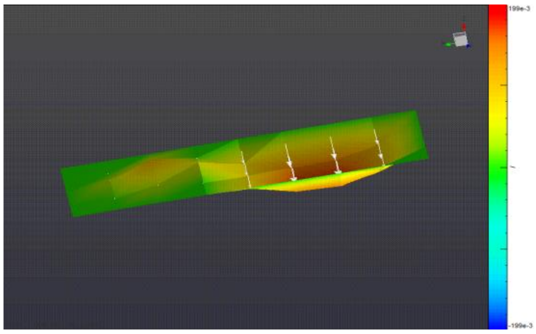
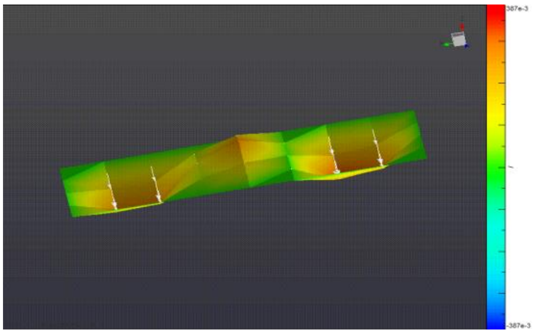
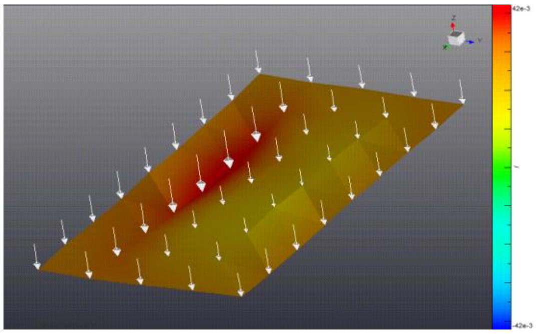
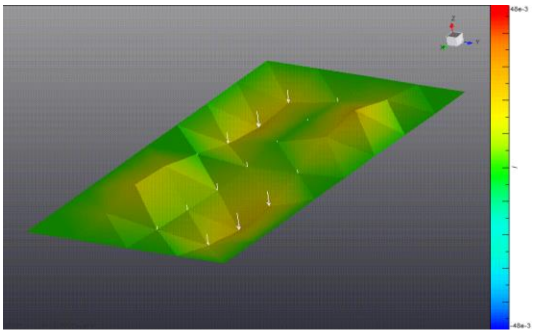
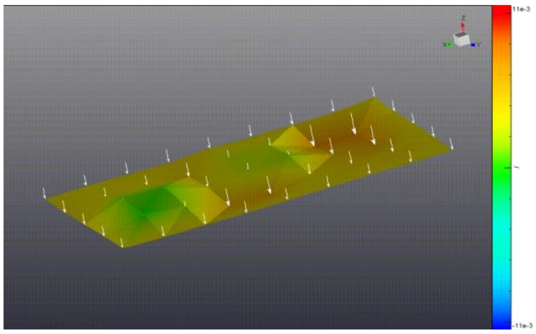
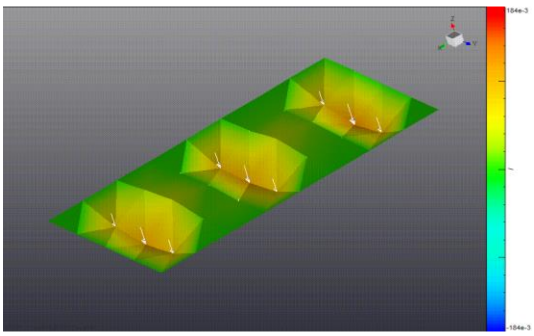


Рис. 9.10. Експериментальна частотна характеристика базової функції збудження від швидкості

Таблиця 9.9. Експериментальний модальний аналіз: форми мод і власні частоти (приклад 2)

734,38 Hz 	869,61 Hz 
1335,15 Hz 	1692,04 Hz 
1961,03 Hz 	2293,66 Hz 
2835,63 Hz 	

Таблиця 9.10. Порівняння чисельних та експериментальних частот (приклад 2)

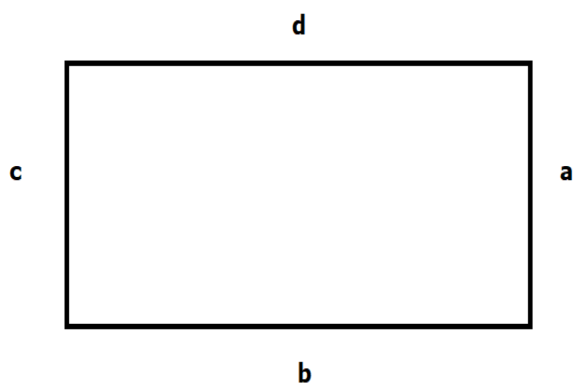
МСЕ [Гц]	Експеримент [Гц]	Різниця %
732,03	734,38	0,32
963,65	869,61	-10,81
1374,80	1335,15	-2,97
1890,89	1692,04	-11,75
1960,64	1961,03	0,02
2114,51	2293,66	7,81
2498,71	2835,63	11,88

У Таблиці 9.10 2-й, 4-й і 7-й режими мають низьку відповідність, ймовірно, через неідеальну рівномірну конфігурацію затиску вздовж країв зразка.

9.5 Приклад 3: Прямокутна вільна оперта по всій границі пластина

У Таблиці 9.11 наведено геометричні розміри та граничні умови пластини для третього прикладу.

Таблиця 9.11. Геометричні розміри та граничні умови (приклад 3)

<table>
<tr><td rowspan="6">
</td><td colspan="2">Розмір
a=c = 37.50 mm
b=d = 75.00 mm
h (товщина) = 0,90 mm</td></tr>
<tr><td>Сторона</td><td>Граничні умови</td></tr>
<tr><td>a</td><td>вільно оперта</td></tr>
<tr><td>b</td><td>вільно оперта</td></tr>
<tr><td>c</td><td>вільно оперта</td></tr>
<tr><td>d</td><td>вільно оперта</td></tr>
</table>

1) МСЕ моделювання

Для моделювання методом скінчених елементів використовувався пакет Nastran, на Рис. 9.11 показані сітка та ребра з вільною опорою; результати наведено в Таблиці 9.12.

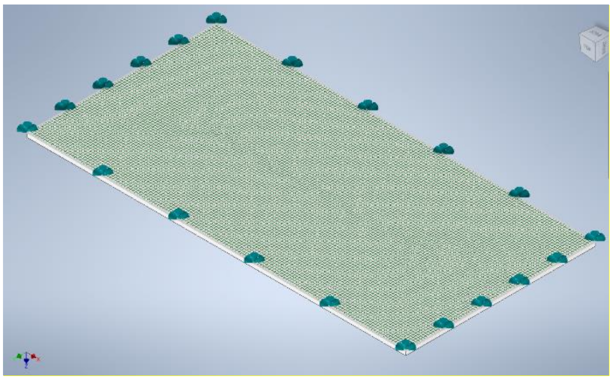
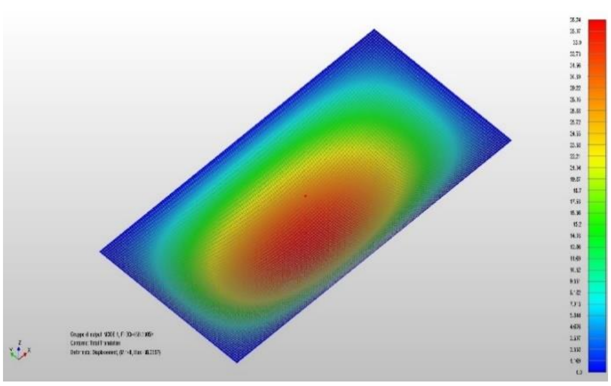
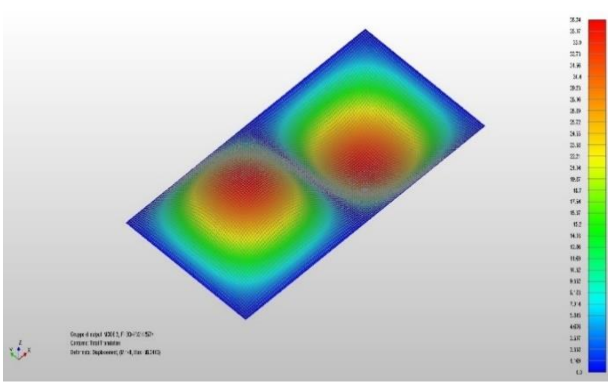
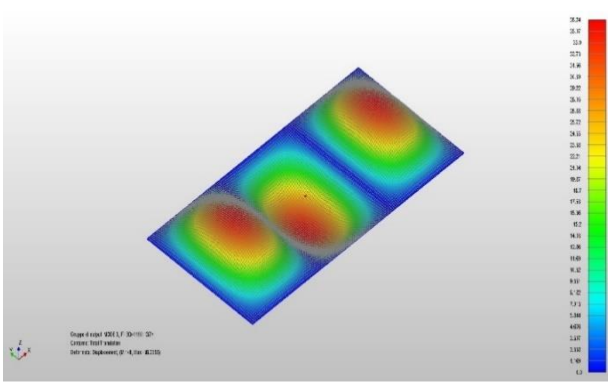
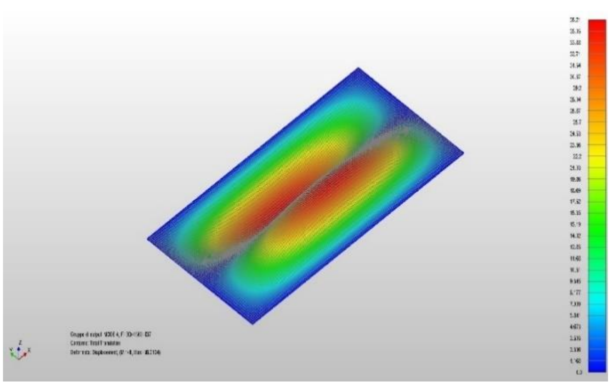
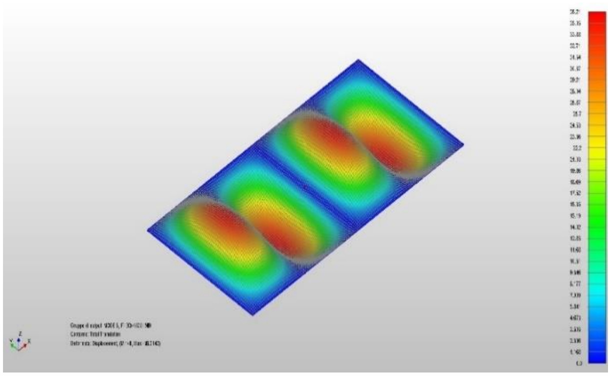
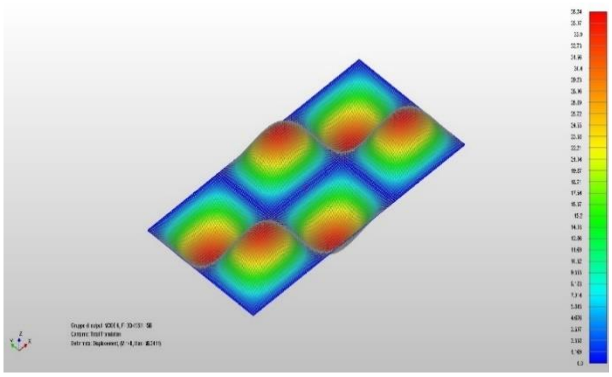
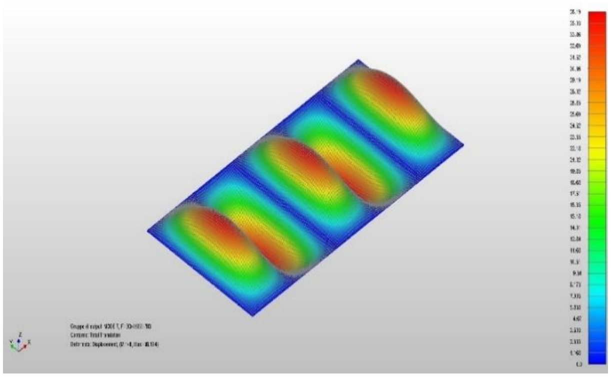
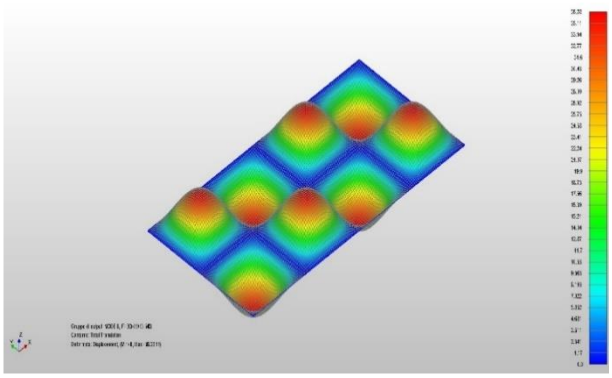


Рис. 9.11. Чисельне моделювання: сітка та ребра з вільною опорою

Таблиця 9.12. МСЕ моделювання: форми мод і власні частоти (приклад 3)

509,86 Hz 	813,04 Hz 
1320,55 Hz 	1732,29 Hz 

2030,36 Hz 	2529,29 Hz 
2939,46 Hz 	3229,01 Hz 

2) Експериментальний модальний аналіз

На Рис. 9.12 показано зразок, створений за допомогою 3D-принтера для експериментального модального аналізу, чітко видно більш тонкий граничний контур, створений для імітації безперервного шарнірного з’єднання, тоді як на Рис. 9.13 представлено експериментальну ФЧХ (функцію частотної характеристики) між базовим прискоренням збудження та виміряної швидкісної реакції кожної точки, здається, що структура має більш послаблену реакцію через більш згладжені криві поблизу резонансів. У Таблиці 9.13 наведені експериментальні результати.

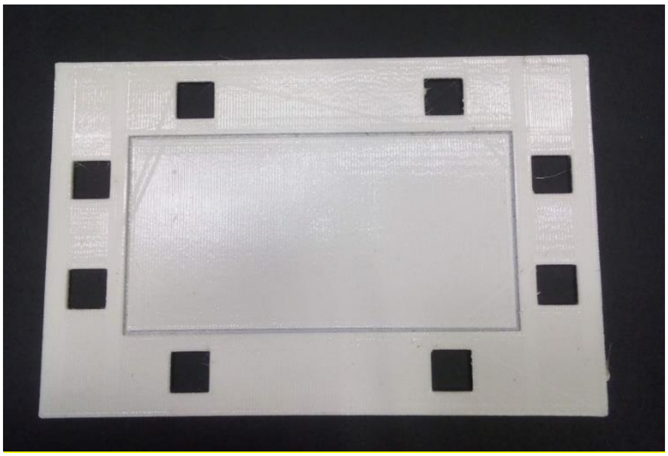


Рис. 9.12. Зразок для експериментального модального аналізу (приклад 3)

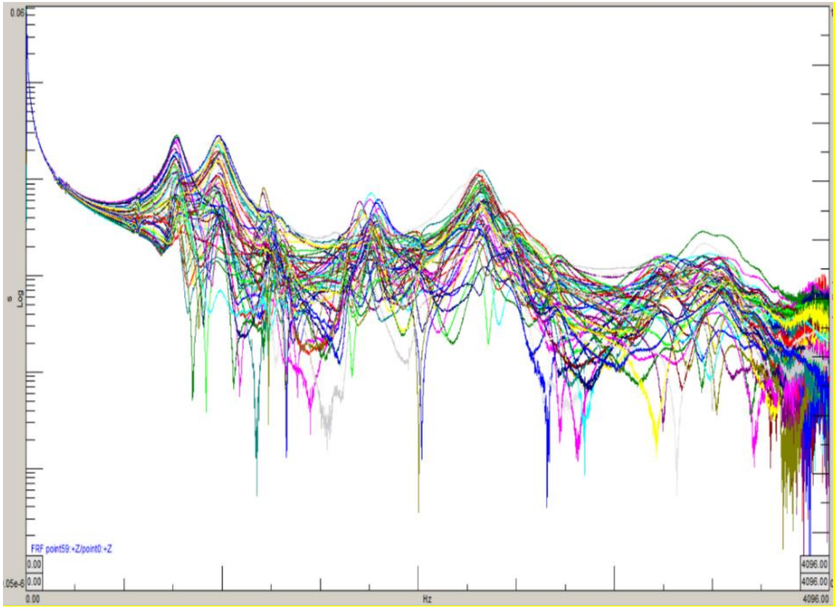
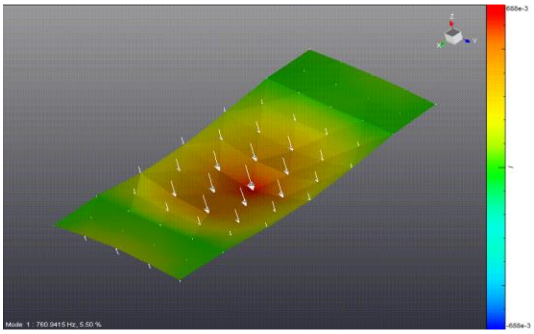
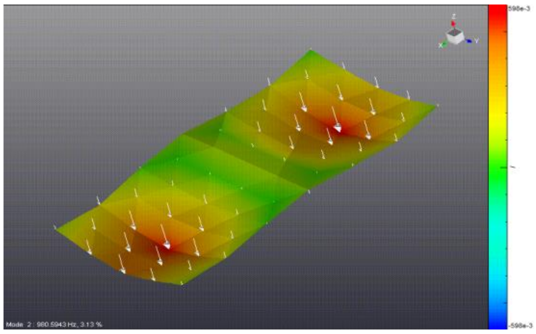
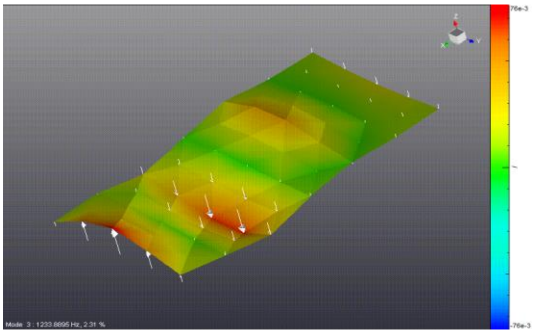
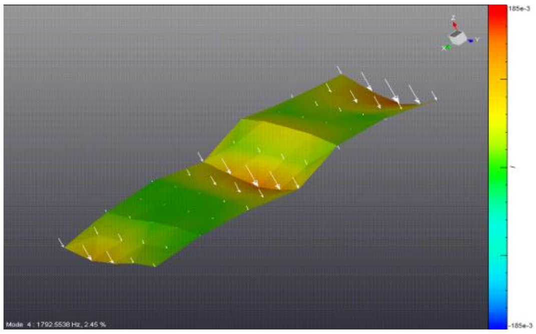
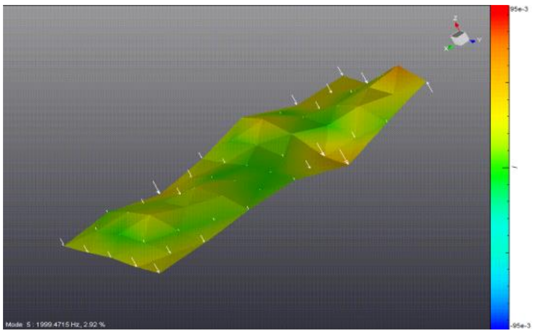
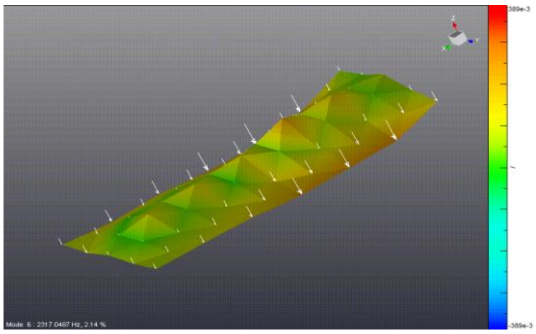
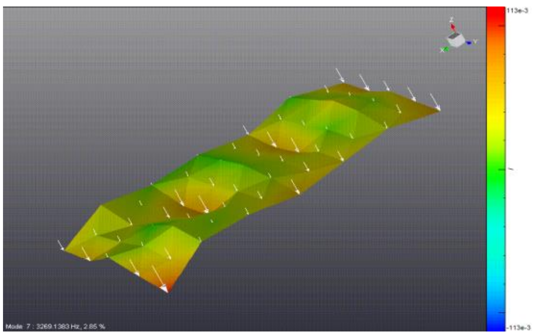
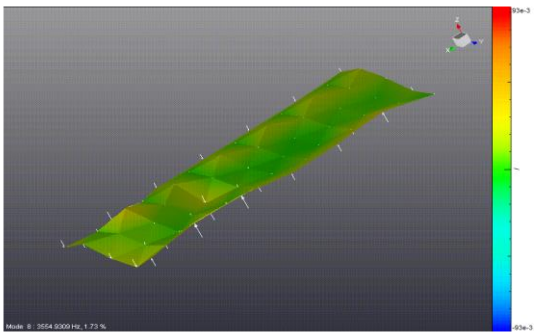


Рис. 9.13. Експериментальна частотна характеристика базової функції збудження від швидкості

Таблиця 9.13. Експериментальний модальний аналіз: форми мод і власні частоти (приклад 3)

760,94 Hz 	980,59 Hz 
1233,89 Hz 	1792,55 Hz 
1999,47 Hz 	2317,05 Hz 
3269,14 Hz 	3554,93 Hz 

Таблиця 9.14. Порівняння чисельних та експериментальних частот (приклад 3)

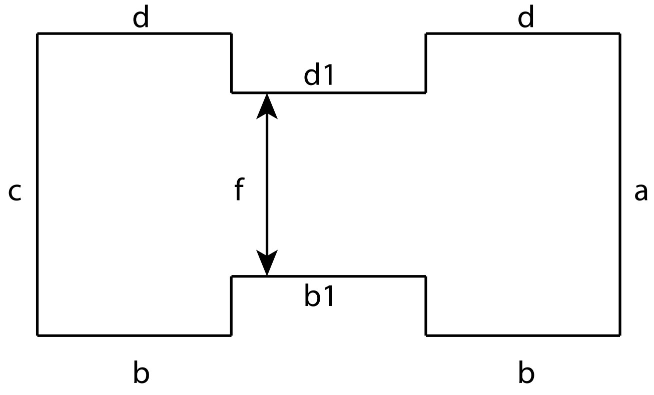
МСЕ [Гц]	Експеримент [Гц]	Різниця %
509,86	760,94	33,00
813,04	980,59	17,09
1320,55	1233,89	-7,02
1732,29	1792,55	3,36
2030,36	1999,47	-1,54
2529,29	2317,05	-9,16
2939,46	3269,14	10,08
3229,01	3554,93	9,17

Як видно з різниць у відсотках, у Таблиці 9.14 ефект граничної умови дуже присутній у найнижчій і вищій модах, частота першої моди відрізняється більше ніж на 30 %, що перевищує прийнятне значення, другий режим зменшив відсоткову різницю вдвічі щодо експериментального аналізу, інші режими не є рівномірними, і ми можемо припустити, що це пов’язано з тим, що обмеження не було точно змодельовано, або навпаки, що створення шарнірного з’єднання зразка є занадто жорстким і взаємодіє з конструкцією рами.

9.6 Приклад 4: Прямокутна пластина із симетричними прямокутними врізами

У Таблиці 9.15 наведено виміряні геометричні розміри та граничні умови пластини для четвертого прикладу.

Таблиця 9.15. Геометричні розміри та граничні умови (приклад 4)

<table>
<tr><td rowspan="8">
</td><td colspan="2">Розмір
a=c = 37.50 mm
b=d = 25.00 mm
b1=d1 = 25.00 mm
f=18.50 mm
h (товщина) = 1.10 mm</td></tr>
<tr><td>Сторона</td><td>Граничні умови</td></tr>
<tr><td>a</td><td>закріплена</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Вільна</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Закріплена</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Вільна</td></tr>
<tr><td>b1</td><td>Вільна</td></tr>
<tr><td>d1</td><td>Вільна</td></tr>
</table>

1) МСЕ моделювання

Для моделювання МСЕ використовувався пакет NASTRAN, на Рис. 9.14 показані сітка та протилежні затиснуті краї; результати наведено в Таблиці 9.16.

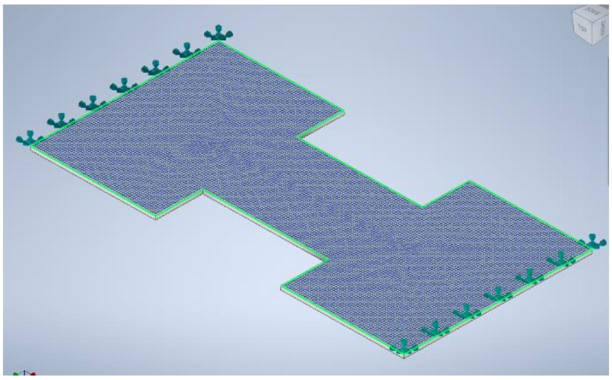
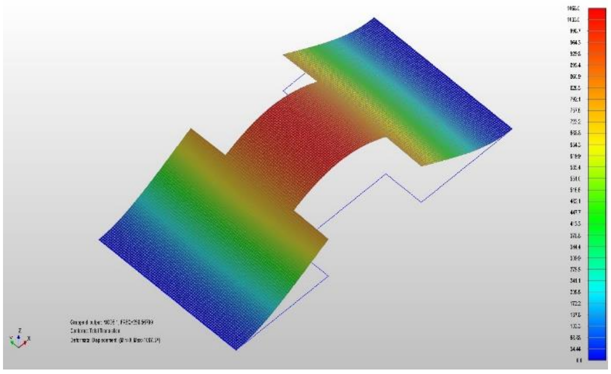
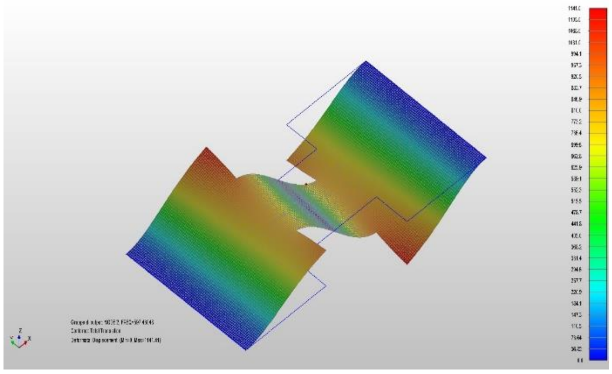
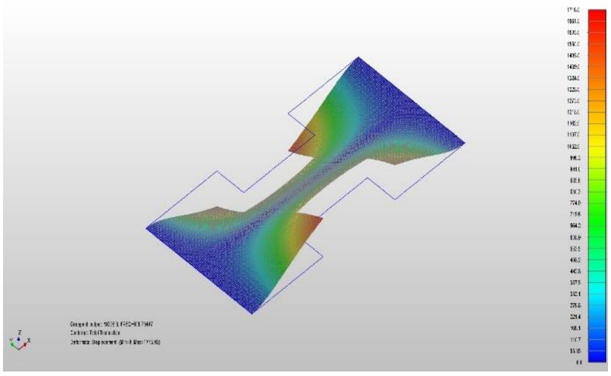
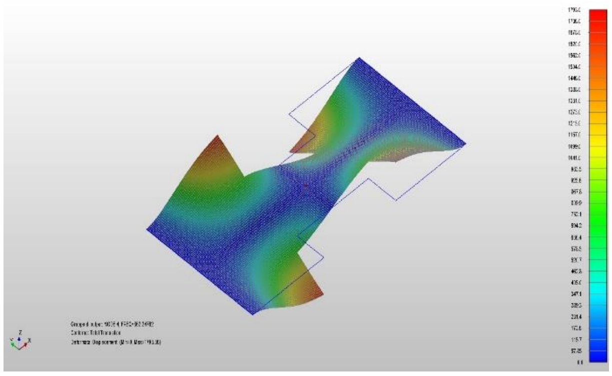
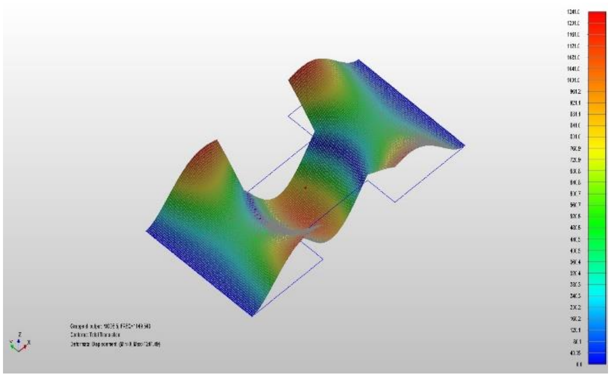
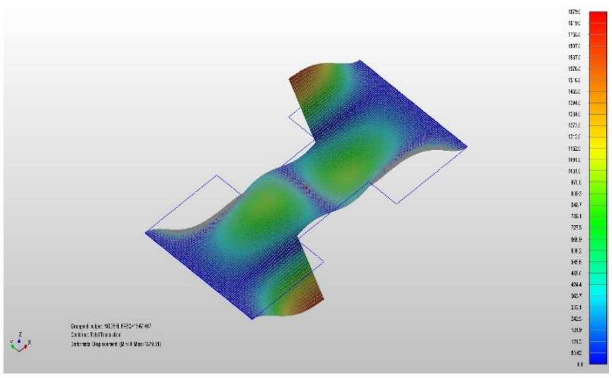
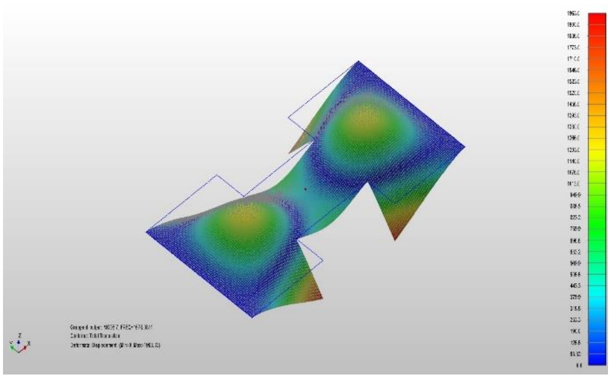
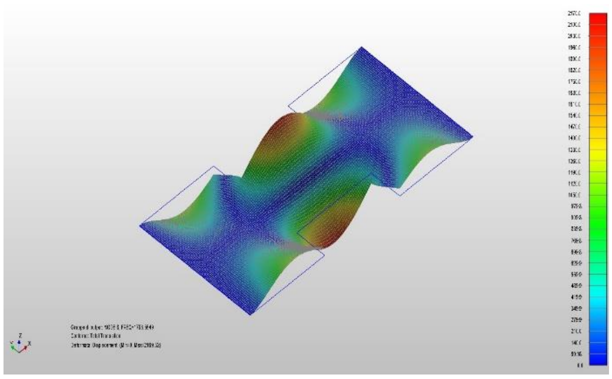


Рис. 9.14. Чисельне моделювання: сітка та закріплені краї

Таблиця 9.16. МСЕ моделювання: форми мод і власні частоти (приклад 4)

258,57 Hz 	597,43 Hz 
606,73 Hz 	862,25 Hz 
1149,54 Hz 	1547,42 Hz 
1678,08 Hz 	1783,58 Hz 

2) Експериментальний модальний аналіз

На Рис. 9.15 показано зразок, реалізований за допомогою 3D-принтера для експериментального модального аналізу, тоді як на Рис. 9.16 представлено експериментальну ФЧХ (функцію частотної характеристики) між базовим прискоренням збудження та виміряною швидкісною реакцією кожної точки. У Таблиці 9.17 наведені експериментальні результати.

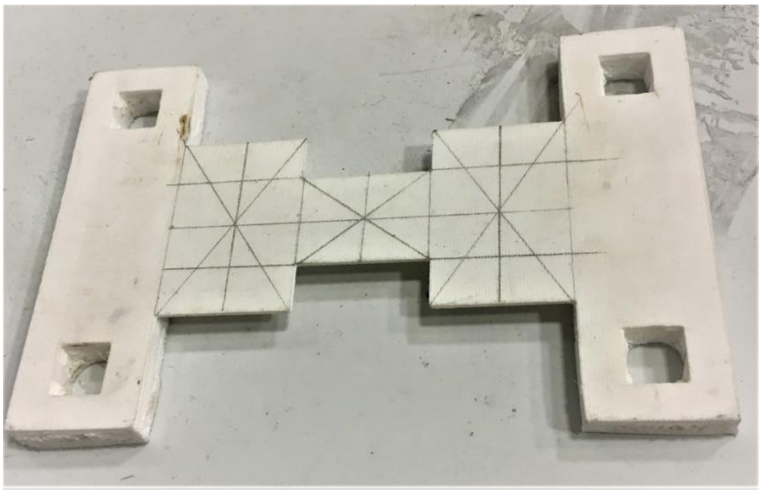


Рис. 9.15. Зразок для експериментального модального аналізу (приклад 4)

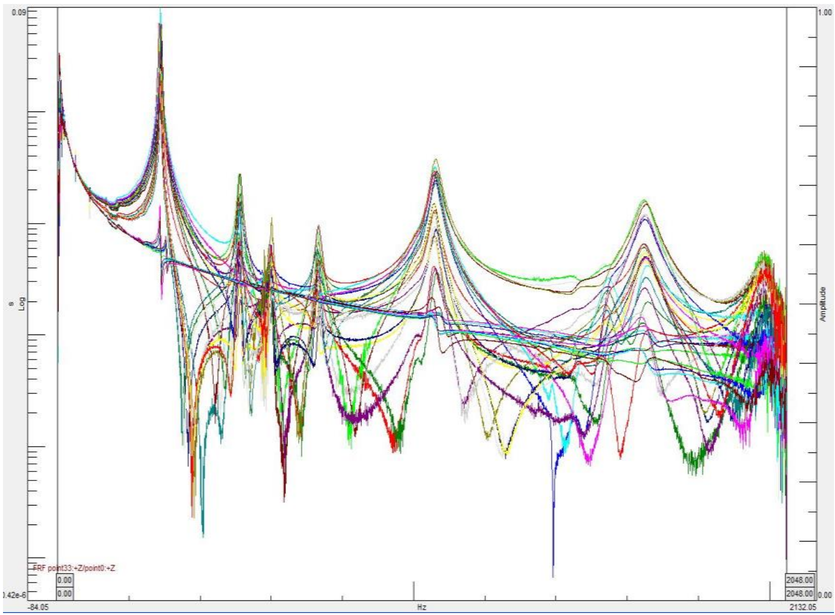
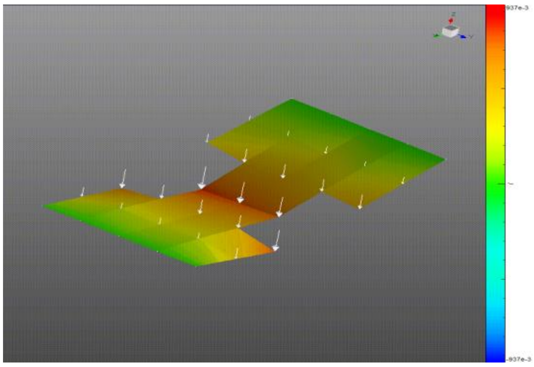
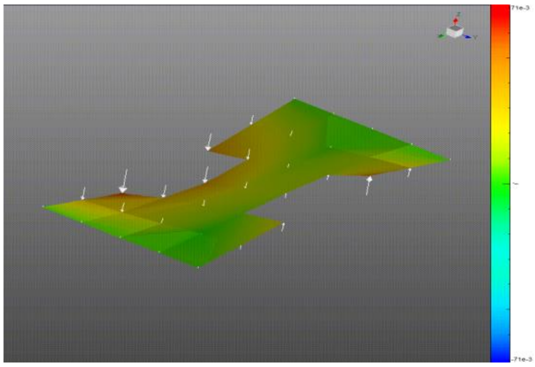
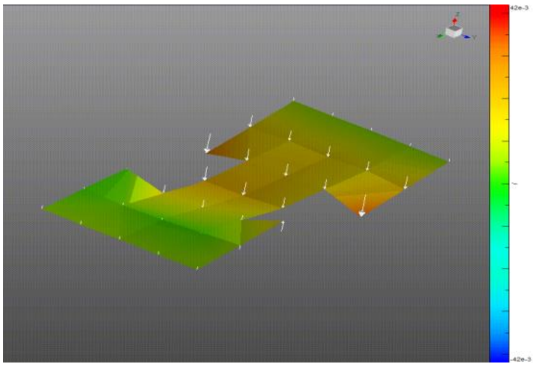
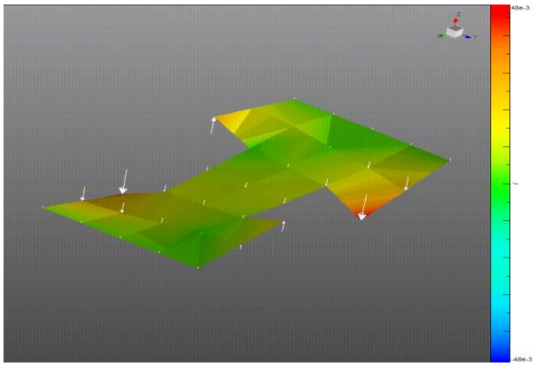
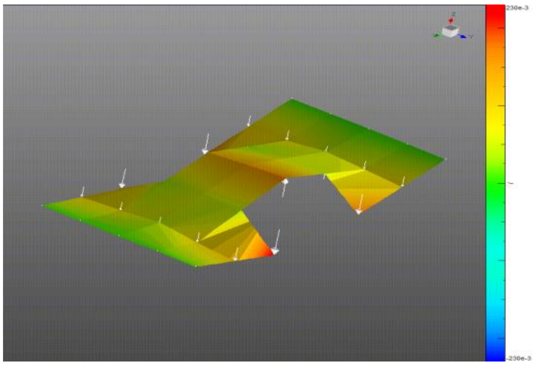
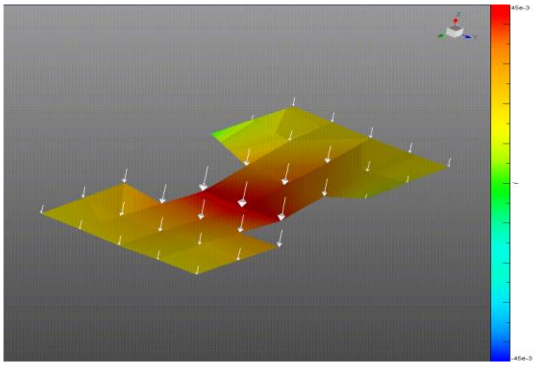
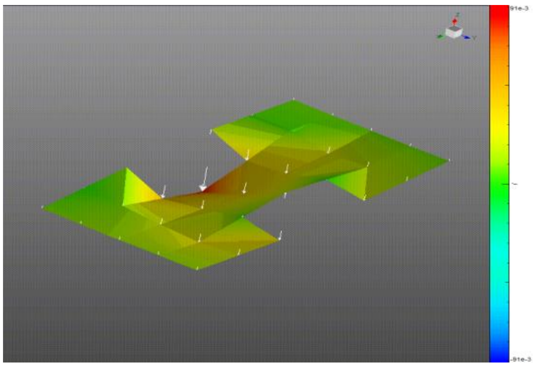
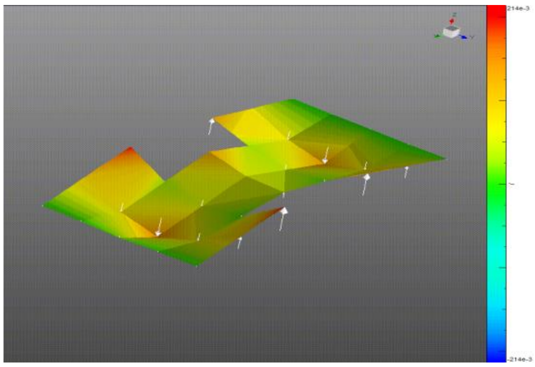


Рис. 9.16. Експериментальна частотна характеристика базової функції збудження від швидкості

Таблиця 9.17. Експериментальний модальний аналіз: форми мод і власні частоти (приклад 4)

287,82 Hz 	509,47 Hz 
598,59 Hz 	730,24 Hz 
1060,18 Hz 	1455,78 Hz 
1548,43 Hz 	1651,66 Hz 

У Таблиці 9.18 наведено порівняння між методом скінчених елементів та експериментальним модальним аналізом.

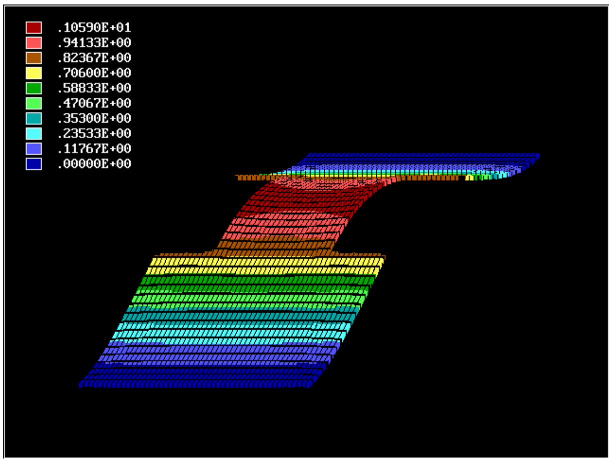
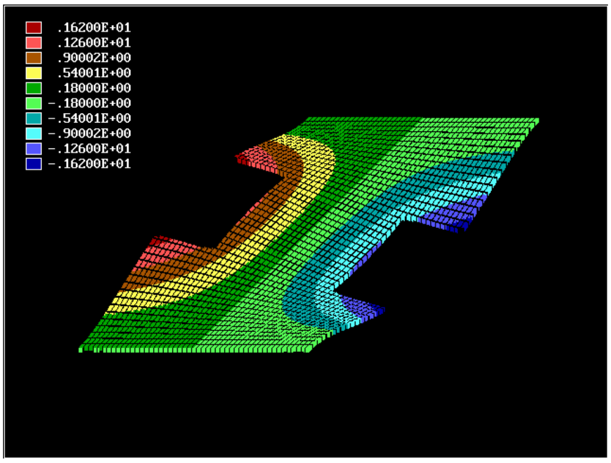
Таблиця 9.18. Порівняння МСЕ та експериментальних частот (приклад 4)

МСЕ [Гц]	Експеримент [Гц]	Різниця %
258,57	287,82	10,16
597,43	509,47	-17,27
606,73	598,59	-1,36
862,25	730,24	-18,08
1149,54	1060,18	-8,43
1547,42	1455,78	-6,29
1678,08	1548,43	-8,37
1783,58	1651,66	-7,99

9.7 Моделювання та розрахунок методом R-функцій. Порівняння експериментальних результатів

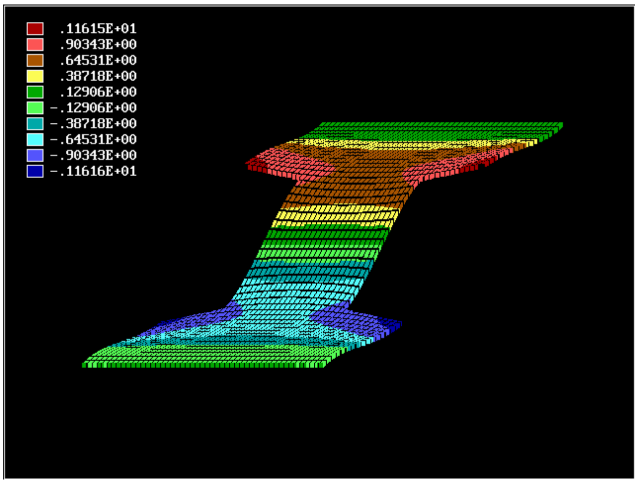
У Таблиці 9.19 наведено результати моделювання методом R-функцій.

Таблиця 9.19. Метод R-функцій: форми мод і власні частоти (приклад 4)

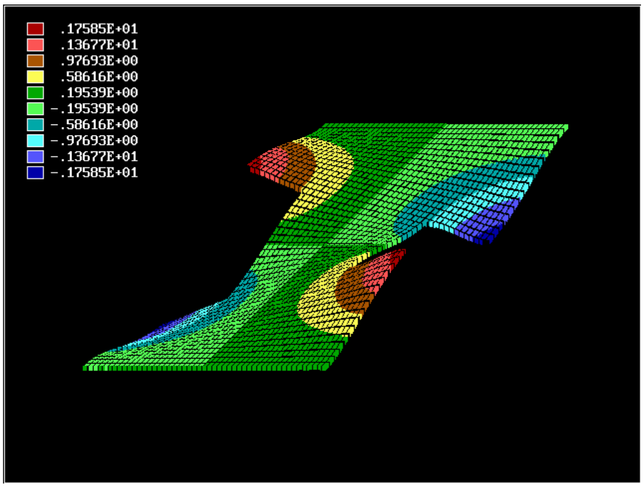
<table>
<tr><td>270.96 Hz</td><td>555.64 Hz</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Продовження Таблиці 9.19

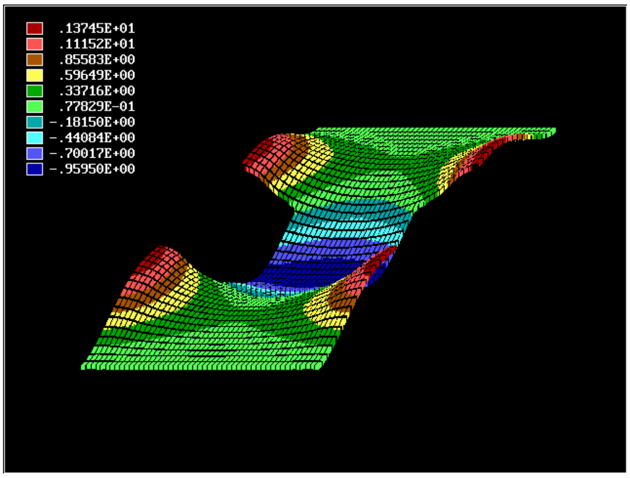
618.72 Hz



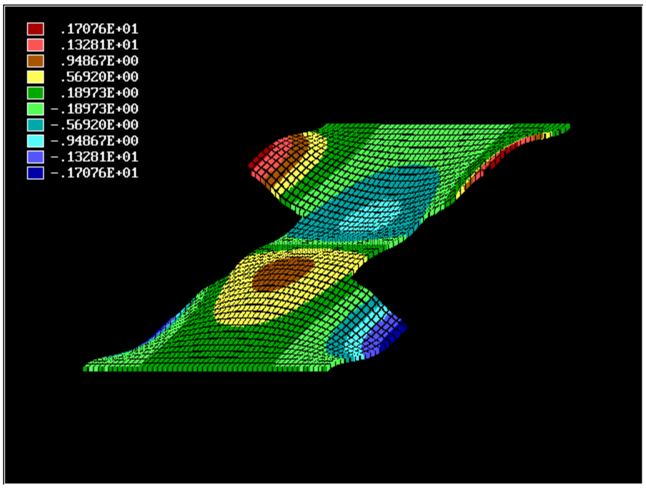
805.71 Hz



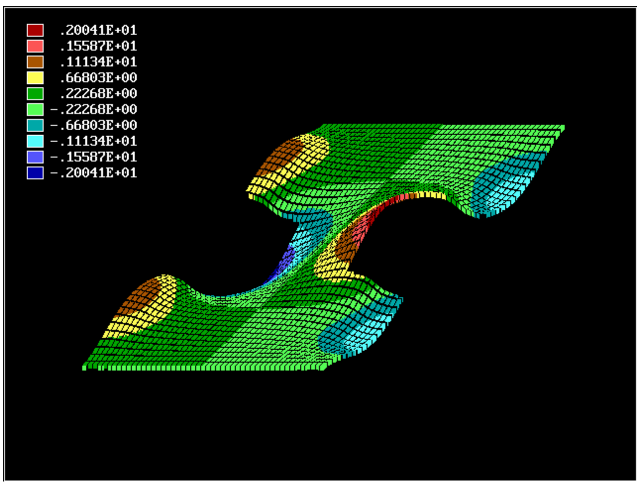
1135.85 Hz



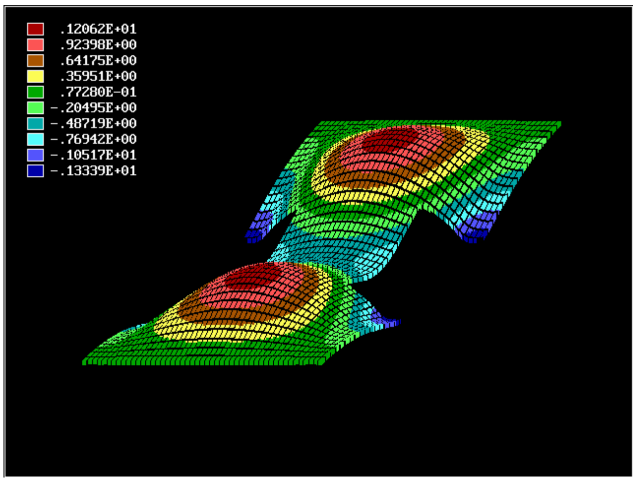
1580.06 Hz



1673.14 Hz



1736.54 Hz



Таблиця 9.20. Порівняння експериментальних, MCE і RFM частот (приклад 4)

Експеримент [Hz]	MCE моделювання [Hz]	Різниця (Експеримент-MCE)	RFM [Hz]	Різниця (Експеримент-RFM)
287.82	258.57	10.16 %	270.96	5.86 %
509.47	597.43	-17.27 %	555.64	-9.06 %
598.59	606.73	-1.36 %	618.72	-3.36 %
730.24	862.25	-18.08 %	805.71	-10.33 %
1060.18	1149.54	-8.43 %	1135.85	-7.14 %
1455.78	1547.42	-6.29 %	1580.06	-8.54 %
1548.43	1678.08	-8.37 %	1673.14	-8.05 %
1651.66	1783.58	-7.99 %	1736.54	-5.14 %

Запропонований приклад використовує переваги попереднього аналізу, використаного для взаємної перевірки обраної конфігурації, для тестування пластини складної форми з двома затиснутими сторонами. У Таблиці 9.20 представлено порівняння експериментального модального аналізу щодо методу скінченних елементів і методу R-функцій. Метод R-функцій показує кращу відповідність, середня різниця 7.2 %, щодо моделювання MCE, яке представляє середню різницю 9.7 %. Крім того, перша та друга моди краще моделюються, ніж інші, а також 4-та мода. Ці розбіжності можуть бути пов’язані зі складністю моделювання та реалізації ідеальних граничних умов.

Висновки за Розділом 9

У цій роботі виконано порівняння трьох методів для аналізу динамічної поведінки 3D-друкованих зразків зі складною формою пластини та різними граничними умовами. Використаний метод, експериментальна процедура та засоби точно задаються, а також описуються властивості матеріалу пластин. Конфігурація з двома фіксованими сторонами представляє більш точну відповідність як для прямокутної пластини, так і для пластини з прямокутними вирізами. А результати, одержані за допомогою методу R-функцій, виглядають більш подібними до експериментального випробування порівняно з аналізом скінчених елементів. Конфігурація з простою опорою демонструє труднощі в реалізації безперервних шарнірних з'єднань зразка, який потрібно правильно моделювати.

Експериментальний аналіз відображає складність правильного створення фіксованого або шарнірного з'єднання в реальному тестовому випадку, а також метод скінченних елементів розкриває ці проблеми з точки зору моделювання. Оскільки метод R-функцій представляє розв'язок в аналітичній формі, це вигідно відрізняє його від методу скінчених елементів при вирішенні нелінійних задач.

Основні результати цього розділу викладені у публікаціях автора [320, 325, 328].

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою працею, в якій запропоновано новий підхід для розв’язання важливої науково-технічної проблеми, що пов’язана з розробкою ефективних методів розрахунку та дослідженням динамічної та статичної поведінки елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються пологими оболонками та пластинами складної геометричної форми та виготовлені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів.

Узагальнені висновки за одержаними результатами можуть бути сформульовані наступним чином:

1. Розроблено новий підхід, який підвищує ефективність існуючих обчислювальних методів дослідження лінійних та геометрично-нелінійних коливань ФГМ пластин та пологих оболонок. Новизна методу полягає в тому, що завдяки використанню теорії R-функцій та варіаційних методів, він дозволяє будувати розв’язки в аналітичному вигляді для ФГМ пологих оболонок та пластин і сендвіч структур складної геометрії плану з урахуванням пористості, змінної товщини, пружної основи, рівномірного та нерівномірного стискаючого навантаження.

2. Для чисельної реалізації запропонованого методу одержано аналітичні вирази для обчислення елементів матриць, які враховують ефективні властивості функціонально-градієнтних матеріалів в рамках трьох теорій: класичної теорії, уточненої теорії першого порядку та теорії третього порядку. Аналітичні вирази виведено як для одношарових ФГМ оболонок, так і для сендвіч оболонок зі степеневим та сигмоїдальним законами розподілення об‘ємної частки кераміки, а також з урахуванням рівномірного та нерівномірного законів пористості.

3. На основі запропонованого методу отримано нові математичні моделі задач про нелінійні коливання одношарових та сендвіч оболонок у переміщеннях, які суттєво використовуються при зведенні вихідного нелінійного

диференціального рівняння з частинними похідними до звичайного нелінійного диференціального рівняння.

4. Побудовано варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язок яких використовується для реалізації запропонованого метода при дослідження геометрично нелінійних процесів.

5. Запропоновано оригінальний алгоритм зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь руху, в рамках класичної теорії, уточнених теорій першого та третього порядків, до нелінійного звичайного диференціального рівняння.

6. Виведені аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів отриманого рівняння, які уявляють собою подвійні інтеграли від функцій, що були одержані на попередніх кроках розв'язання задачі

7. Для дослідження стійкості ФГМ пологих оболонок та пластин запропоновано розрахункову модель, яка дозволяє враховувати неоднорідний докритичний стан, рівномірне та нерівномірне навантаження в серединній площині.

8. Побудовано нові варіаційні постановки задач стійкості та коливань пластин, які знаходяться під дією стискаючого навантаження, для розрахунку їх докритичного стану.

9. Створено програмне забезпечення для реалізації розробленого методу в рамках системи POLE-RL, яке було використано для розв'язання нових задач.

10. Отримано нові результати впливу об'ємної долі кераміки для одношарових та сендвіч ФГМ пологих оболонок складної геометричної форми, вивчено вплив товщини лицьових шарів та заповнювача, типу ФГМ на власні частоти та частоти нелінійних коливань.

11. Досліджено вплив різних видів пористості на динамічну поведінку ФГМ пологих оболонок з отворами та вирізами. При збільшенні коефіцієнту пористості поведінка власних частот залежить від типу сендвіч структури та товщини ФГМ шарів.

12. Проаналізовано вплив пружної основи на власні та нелінійні частоти коливань оболонок різної геометричної форми, в тому числі змінної товщини. Показано, що більш суттєво впливають на власні частоти параметри пружної основи Пастернака.

13. Визначено критичне навантаження ФГМ пластин та пологих оболонок з отворами при різних умовах їх закріплення, різних законах навантаження у серединній площині для різних законів гомогенізації ФГМ. Показано, що при збільшенні об'ємної частки кераміки значення критичного навантаження збільшується.

14. На основі проведених досліджень надано характеристику поведінки власних частот в кожному окремому випадку, що може бути використаним при проектуванні елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються ФГМ пластинами та пологими оболонками.

15. Вірогідність розробленого методу підтверджено практичним експериментом та застосуванням інших методів, які базуються на МСЕ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Koizumi M. The concept of FGM. *Ceramic Transactions*. 1993. Vol. 34. P. 3–11.

2. Niino M., Hirai T., Watanabe R. The functionally gradient materials. *Journal of the Japan Society for Composite Materials*. 1987. Vol. 13. P. 257– 264.

3. Kieback B., Neubrand A., Riedek H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering*. 2003. Vol. 362. P. 81–105.

4. Ogawa T., Watanabe Y., Sato H., Kim I.-S., Fukui Y. Theoretical Study on Fabrication of Functionally Graded Material with Density Gradient by Centrifugal Solid-Particle Method. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2006. Vol. 37, No. 12. P. 2194-2200. doi:10.1016/j.compositesa.2005.10.002

5. Paulino G.H., Jin Z.H., Dodds Jr. R.H. Failure of functionally graded materials. *Comprehensive Structural Integrity*. Vol.2 / eds. B.Karihallo and W.G.Knauss. Elsevier Science, New York, 2003. P. 607-644.

6. Jha D. K., Kant T., Singh R. K. A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates. *Composite Structures*. 2013. Vol. 96. P. 833–849.

7. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally Graded Materials: a Review of Fabrication and Properties. *Applied materials today*. 2016. Vol. 5. P. 223–245.

8. Birman V., Byrd L. W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. ASME. *Applied Mechanics Reviews*. 2007. Vol. 60(5). P. 195–216. https://doi.org/10.1115/1.2777164

9. Gupta A., Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*. 2015. Vol. 79. P. 1–14. https://doi.org/ 10.1016/j.paerosci.2015.07.001.

10. Saleh B., Jiang J., Fathi R., Al-hababi T., Xu Q., Wang L., Song D., Ma A. 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods,

Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*. 2020. Vol. 201, 108376, https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376.

11. Miyamoto Y. Functionally graded materials: design, processing and applications. Dordrecht/London/Boston: Kluwer Academic, 1999. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4.

12. Udupa G, Rao S.S., Gangadharan K.V. Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*. 2014. Vol. 5. P. 1291–1299. https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.442.

13. Zhao P., Wang S., Guo S., Chen Y., Ling Y., Li J. Bonding W and W–Cu composite with an amorphous W–Fe coated copper foil through hot pressing method. *Materials & Design*. 2012. Vol. 42. P. 21–24. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.05.057.

14. Kumar S, Reddy K.V.V.S.M., Kumar A, Devi G.R. Development and characterization of polymer – ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application. *Aerospace Science and Technology*. 2013. Vol. 26. P. 185–91. https://doi.org/10.1016/j.ast.2012.04.002.

15. Kimberly R., Oo Z., Sujan D. Microstructure analysis, physical and thermal properties of Al2O3 - Al2TiO5 functionally graded ceramics for the application of car brake rot. *Pertanika Journal of Science & Technology*. 2015. Vol. 23. P. 153–61.

16. Lengauer W., Dreyer K. Functionally graded hardmetals. *Journal of Alloys and Compounds*. 2002. Vol. 338. P. 194–212. https://doi.org/10.1016/S0925-8388(02)00232-3.

17. Pompe W., Worch H., Epple M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., et al. Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*. 2003. Vol. 362: P. 40–60. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X.

18. Miao X., Sun D. Graded/gradient porous biomaterials. *Materials*. 2010. Vol. 3. P. 26–47. https://doi.org/10.3390/ma3010026.

19. Chen W.W., Rajendran A.M., Song B., Nie X. Dynamic fracture of ceramics in armor applications. *Journal of the American Ceramic Society.* 2007. Vol. 90. P. 1005–1018. https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01515.x.

20. Huang C., Chen Y. Design and impact resistant analysis of functionally graded Al2O3 – ZrO2 ceramic composite. *Materials & Design.* 2016. Vol. 91. P. 294–305. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.11.091.

21. Müller E., Draˇsar C., Schilz J., Kaysser W.A. Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A.* 2003. Vol. 362. P. 17–39. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1.

22. Bharti I., Gupta N., Gupta K.M. Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelectric materials. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufactoring*. 2013. Vol. 1. P. 221–224. https://doi.org/10.7763/IJMMM.2013.V1.47.

23. Rityuj Singh Parihar, Srinivasu Gangi Setti and Raj Kumar Sahu. Recent advances in the manufacturing processes of functionally graded materials: a review. *Science and Engineering of Composite Materials.* 2018. Vol. 25(2): P. 309–336. DOI 10.1515/secm-2015-0395.

24. Kant T., Patil S. Numerical Analysis of Pressure Vessels using various Shell Theories. Research Report IITB/CE 79-1, 1979.

25. Basset A.B. On the Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical Thin Elastic Shells. The Royal Society, London, 1890. Series A, 181. P. 433–480.

26. Kilchevskiy N.A. Generalization of the modern theory of shells. *Applied mathematics and mechanics*. 1939. Vol 2, No. 4. P. 427-438.

27. Kilchevskiy N.A. Principal equations of the elasticity of shells and working methods of integration. Zbirnik Prat’s Ins. Mat, 1940.

28. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 80. P. 73–92. https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3.

29. Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1957. Vol. 1. P. 295–323. https://doi.org/10.1007/BF00298012

30. Njim E. K., Al-Waily M., Bakhy S.H. A Critical Review of Recent Research of Free Vibration and Stability of Functionally Graded Materials of Sandwich Plate. *IOP Publishing Conf. Series: Materials Science and Engineering.* 2021. Vol. 1094. 012081. doi:10.1088/1757-899X/1094/1/012081

31. Punera D., Kant T. A critical review of stress and vibration analyses of functionally graded shell structures. *Composite Structures*. 2019. Vol. 210. P. 787-809. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.084.

32. Swaminathan K., Naveenkumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 2015. Vol. 120. P. 10-31. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070.

33. Thai H.-T., Kim S.-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2015. Vol. 128. P. 70–86.

34. Liew K.M., Zhao X., Ferreira A.J.M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93(8). P. 2031–2041.

35. Abhigyan Dash, Kamal Kishore Joshi, Pushkar Jha, Asit Behera, Sambit Kumar Mohapatra, Rahul, Various plate theory used in the analysis of FGMs - A review. *Materials Today: Proceedings*. 2023. Vol. 78, Part 3. P. 565-569. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.11.470

36. Li D., Deng Z., Chen G., Xiao H., Zhu L. Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core. *Composite Structures.* 2017. Vol. 169. P. 29–41. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.026.

37. Singh S., Harsha S. Static Analysis of Functionally Graded Plate Using Nonlinear Classical Plate Theory with Von-Karman Strains. *International Journal of*

Applied Mechanics and Engineering. 2018. Vol. 23(3). P. 707-726. doi:10.2478/ijame-2018-0039.

38. Keddouri A., Hadji L., Tounsi A. Static analysis of functionally graded sandwich plates with porosities. *Advanced Materials Research*. 2019. Vol. 8. P. 155–177. https://doi. org/10.12989/amr.2019.8.3.155.

39. Meksi R., Benyoucef S., Mahmoudi A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R. An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2019. Vol. 21(2). P. 727–757. https://doi.org/ 10.1177/1099636217698443.

40. Taibi F.Z., Benyoucef S., Tounsi A., Bachir Bouiadjra R., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R. A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures and Materials.* 2015. Vol. 17(2). P. 99–129. https://doi.org/10.1177/1099636214554904.

41. Nguyen H.X., Tran L., Nguyen T.T., Vu-Do H.C. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. *Composite Structures.* 2011. Vol. 93(11). P. 3019–3039.

42. Valizadeh N., Natarajan S., Gonzalez-Estrada O.A., Rabczuk T., Bui T.Q., Bordas S.P.A. NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter. *Composite Structures.* 2013. Vol. 99. P. 309–326.

43. Lam K.Y., Li H., Ng T.Y., Chua CF. Generalized differential quadrature method for the free vibration of truncated conical panels. *Journal of Sound and Vibration.* 2002. Vol. 251. P. 329-348.

44. Tornabene F., Liverani A., Caligiana G. FGM and laminated doubly curved shells and panels of revolution with a free form meridian: a 2-D GDQ solution for free vibrations. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2011. Vol. 53. P. 446-470.

45. Naderi Beni N, Botshekanan Dehkordi M. An extension of Carrera unified formulation in polar coordinate for analysis of circular sandwich plate with

FGM core using GDQ method. *Composite Structures.* 2018. Vol. 185. P. 421–434. https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2017.11.044

46. Liu Bo, Ferreira A.J.M., Xing Y.F., Neves A.M.A. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method. *Composite Structures.* 2016. Vol. 136. P. 546–553. https://doi. org/10.1016/j.compstruct.2015.10.044.

47. Singh S.J., Harsha S.P. Thermo-mechanical analysis of porous sandwich S-FGM plate for different boundary conditions using Galerkin Vlasov's method: a semianalytical approach. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 150. 106668. https://doi.org/ 10.1016/j.tws.2020.106668.

48. Singh S.J., Harsha S.P. Nonlinear vibration analysis of sigmoid functionally graded sandwich plate with ceramic-FGM-metal layers. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2020. Vol. 8(1). P. 67–84. https://doi.org/10.1007/s42417-018-0058-8

49. Dung D.V., Hoa L.K., Thuyet B.T., Nga N.T. Buckling analysis of functionally graded material (FGM) sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners filled inside by elastic foundations. *Applied Mathematics and Mechanics* (English Edition). 2016. Vol. 37(7). P. 879–902. https://doi.org/10.1007/s10483-016-2097-9.

50. Barka M., Benrahou K.H., Bakora A., Tounsi A. Thermal post-buckling behavior of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on Pasternak elastic foundation. *Steel & Composite Structures*. 2016. Vol. 22(1). P. 91–112. https://doi.org/ 10.12989/scs.2016.22.1.091

51. Sofiyev A.H. Application of the FOSDT to the solution of buckling problem of FGM sandwich conical shells under hydrostatic pressure. *Composites Part B: Engineering*. 2018. Vol. 144. P. 88–98. https://doi.org/10.1016/j.compositesb: 2018.01.025.

52. Di Sciuva M., Sorrenti M. Bending and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates: An assessment of the Refined Zigzag Theory.

Journal of Sandwich Structures and Materials. 2019. Vol. 23(3). P. 760-802. doi:10.1177/1099636219843970

53. Dozio L. Natural frequencies of sandwich plates with FGM core via variablekinematic 2-D Ritz models. *Composite Structures.* 2013. Vol. 96. P. 561–568. https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2012.08.016.

54. Fazzolari F.A., Carrera E. Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. *Journal of Thermal Stresses.* 2014. Vol. 37(12). P. 1449–1481. https://doi.org/10.1080/01495739.2014.937251.

55. Fazzolari F.A. Stability analysis of FGM sandwich plates by using variablekinematics Ritz models. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23(9). P. 1104–1113. https:// doi.org/10.1080/15376494.2015.1121559

56. Thai C.H., Zenkour A.M., Abdel Wahab M., Nguyen-Xuan H. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite Structures.* 2016. Vol. 139. P. 77–95. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.066.

57. Liu N., Jeffers A.E. Isogeometric analysis of laminated composite and functionally graded sandwich plates based on a layerwise displacement theory. *Composite Structures.* 2017. Vol. 176. P. 143–153. https://doi.org/10.1016/j.compstruct. 2017.05.037

58. Wu C-P, Jiang R-Y. A state space differential reproducing kernel method for the 3D analysis of FGM sandwich circular hollow cylinders with combinations of simply-supported and clamped edges. *Composite Structures.* 2012. Vol. 94(11). P. 3401–3420. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.05.005.

59. Xiang S., Kang G.-W., Yang M.-S., Zhao Y. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures.* 2013. Vol. 96. P. 226–231. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.003.

60. Do V.N.V., Lee C.-H. Thermal buckling analyses of FGM sandwich plates using the improved radial point interpolation mesh-free method. *Composite Structures.* 2017. Vol. 177. P. 171–186. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.054.

61. Do T.V., Bui T.Q., Yu T.T., Pham D.T., Nguyen C.T. Role of material combination and new results of mechanical behavior for FG sandwich plates in thermal environment. *Journal of Computational Science*. 2017. Vol. 21. P. 164–181. https://doi.org/10.1016/j. jocs.2017.06.015.

62. Taj M.N.A.G., Chakrabarti A., Talha M. Bending analysis of functionally graded skew sandwich plates with through-the thickness displacement variations. *Journal of Sandwich Structures and Materials.* 2014. Vol. 16(2). P. 210–248. https://doi.org/10.1177/1099636213512499

63. Nguyen T.-K., Nguyen V.-H., Chau-Dinh T., Vo T.P., Nguyen-Xuan H. Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*. 2016. Vol. 107. P. 162–73. https://doi. org/10.1016/j.compositesb:2016.09.058

64. Garg A., Chalak H.D., Chakrabarti A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using HOZT including transverse displacement effects. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2020. Vol. 50(10), P. 3563–3577. https://doi.org/10.1080/ 15397734.2020.1814157

65. Pandey S., Pradyumna S. A finite element formulation for thermally induced vibrations of functionally graded material sandwich plates and shell panels. *Composite Structures.* 2017. Vol. 160. P. 877–886. https://doi.org/10.1016/ j.compstruct.2016.10.040.

66. Yan Qing Wang, Jean W. Zu. Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities. *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 119. P. 911-924. https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.08.012.

67. Zhang Y.F., Liu J.T. A widespread internal resonance phenomenon in functionally graded material plates with longitudinal speed. *Scientific Reports* 9. 2019. N 1907. https://doi.org/10.1038/s41598-018-37921-9

68. Wang Yan Qing, Zu Jean W. Nonlinear Dynamics of a Translational FGM Plate with Strong Mode Interaction. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2018. Vol. 18(3). 1850031. https://doi.org/10.1142/S0219455418500311

69. Aron H. Das Gleichgewict und die Bewegung Einer Unedich Dunnen, Beliebig Gekeummten Elastischen Sehale. *Journal für Mathematik-Didaktik.* 1874. Vol. 78. P. 136–174.

70. Love A.E.H. On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society.* 1888. Vol. 179. P. 491–549.

71. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. English translation by T. Cheron / ed. J.E. Ashton. Technomic Publishing Co, Stamford, 1970.

72. Sanders J.L. An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells. 1959. doi:TRR-24.

73. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Symp. Theory Thin Elastic Shells, IUTAM. Amsterdam: North Holland Pub. Co.; 1960. P. 12–33.

74. Chi S.H., Chung Y.L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures.* 2006. Vol. 43(13): P. 3657–3674.

75. Chi S.H., Chung Y.L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part II: *International Journal of Solids and Structures.* 2006. Vol. 43(13): P. 3675–3691.

76. Javaheri R., Eslami M.R. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002. Vol. 82. P. 277–283.

77. Mohammadi M., Said A.R., Jomehzadeh E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Applied Composite Materials*. 2010. Vol. 17. P. 81–93.

78. Hu Y., Zhang X. Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2011. Vol. 39. P. 367–377.

79. Ghannadpour S.A.M., Ovesy H.R., Nassirnia M. Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & Structures*. 2012. Vol. 108–109. P. 93–99.

80. Michalska K.K., Mania R. Static and dynamic thermo-mechanical buckling loads of functionally graded plates. *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 17. P. 99–112.

81. Damanpack A.R., Bodaghi M., Ghassemi H., Sayehbani M. Boundary element method applied to the bending analysis of thin functionally graded plates. *Latin American Journal of Solids and Structures.* 2013. Vol. 10. P. 549–570.

82. Zhang D., Zhou Y. 2008 A Theoretical Analysis of FGM Thin Plates Based on Physical Neutral Surface. *Computational Material Science*. 2008. Vol. 44. P. 716–720.

83. Liu D.Y., Wang C.Y., Chen W.Q. Free Vibration of FGM Plates with in-Plane Material Inhomogeneity. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92(5). P. 1047–1051.

84. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Diskovsky A. A. Mathematical models of vascular stents with FG bridges aimed on reduction of in-stent restenosis. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2024. Vol. 104(12). e202400518.

85. Yang J., Shen H.S. Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates. *Composite Structures*. 2002. Vol 54(4). P. 497–508.

86. Baferani A.H., Saidi A.R., Jomehzadeh E. An Exact Solution for Free Vibration of Thin Functionally Graded Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015. Vol 225(3). P. 526–536.

87. Arshad S.H., Naeem M.N., Sultana N. Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proceedings of*

the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2007. Vol. 221(12). P. 1483–1495.

88. Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustics.* 2000. Vol. 61(1). P. 111–129.

89. Naeem M.N., Arshad S.H., Sharma C.B. The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.* 2010. Vol. 224(1). P. 43–54.

90. Du C., Li Y., Jin X. Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 78. P. 26–36.

91. Du C., Li Y. Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*. 2013. Vol. 102. P. 164–174.

92. Ebrahimi M.J., Najafizadeh M.M. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling.* 2014. Vol. 38(1). P. 308–324.

93. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration.* 2011. Vol. 330(7). P. 1432–1454.

94. Nguyen D.D., Tran Q.Q. Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperature dependent properties on elastic foundation. *Journal of Vibration and Control.* 2013. http:// dx.doi.org/10.1177/1077546313494114.

95. Nguyen D.D., Tran Q.Q. Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments. *Mechanics of Composite Materials*. 2012. Vol. 48(4). P. 435–448.

96. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2009. Vol. 51. P. 131–144. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.004.

97. Arciniega R.A., Reddy J.N. Large deformation analysis of functionally graded shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44(6). P. 2036–2052.

98. Dai H-L., Rao Y-N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures.* 2016. Vol. 152. P. 199–225. https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.05.042

99. Marchuk A. V., Shevchuk L. O. Free and forced vibrations of functionally graded shallow shells based on the 3D elasticity theory. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233(11). P. 1-18. DOI: 10.1007/s00707-022-03346-9.

100. Hosseini-Hashemi S., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Omidi M. Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates Using First–Order Shear Deformation Plate Theory. *Journal of Applied Mathematical Modelling*. 2010. Vol. 34(5). P. 1276–1291.

101. Trung–Kien Nguyen, Karam Sab, Guy Bonnet. First–Order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials. *Composite Structures*. 2008. Vol. 83(1). P. 25–36.

102. Nguyen T.K., Vo T.P., Thai H.T. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates with improved transverse shear stiffness based on the first-order shear deformation theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.* 2013. Vol. 228(12). P. 2110-2131. https://doi.org/10.1177/0954406213516088.

103. Nguyen H.N., Tran T.H., Pham V.V., Nguyen D.Q., Do V.T. A Refined Simple First-Order Shear Deformation Theory for Static Bending and Free Vibration Analysis of Advanced Composite Plates. *Materials*. 2019. Vol.1 (15). 2385. https://doi.org/10.3390/ma12152385.

104. Thai H.T., Nguyen T.K., Vo T.P., Lee J. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2014. Vol. 45. P. 211-225. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol. 2013.12.008.

105. Zenkour A.M. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2009. Vol. 51. P. 869–880.

106. Li Q., Iu V., Kou K. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 311. P. 498–515.

107. Praveen G.N., Reddy J.N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *International Journal of Solids and Structures.* 1998. Vol. 35(33). P. 4457–4476.

108. Singha M.K., Prakash T., Ganapathi M. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2011. Vol. 47(4). P. 453–460.

109. Prakash T., Singha M.K., Ganapathi M. Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates. *Computational Mechanics*. 2009. Vol. 43(3). P. 341–350.

110. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21(6). P. 593–626.

111. Shahsiah R., Eslami M.R. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *Journal of Thermal Stresses.* 2003. Vol. 26(3). P. 277–294.

112. Shahsiah R., Eslami M.R. Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equations. *AIAA Journal*. 2003. Vol. 41(9). P. 1819–1826.

113. Samsam Shariat B.A., Eslami M.R. Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates. *Journal of Thermal Stresses.* 2005. Vol. 28(12). P. 1183–1198.

114. Kiani Y., Shakeri M., Eslami M.R. Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace–Fourier transformation. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223(6). P. 1199–1218.

115. Xiang S., Chen Y., Kang G. Local collocation method for prediction of natural frequency of functionally graded cylindrical shells. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2014. http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2014.884658.

116. Isvandzibaei M.R., Jamaluddin H., Hamzah R.I.R. Vibration analysis of supported thick-walled cylindrical shell made of functionally graded material under pressure loading. *Journal of Vibration and Control*. 2014. Vol. 22(4). P. 1023-1036. doi:10.1177/1077546314538297.

117. Marchuk A.V. Analytical solution of the problem on the thermally stressed state of functionally graded plates based on the 3D elasticity theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications.* 2021. Vol.2(4). P. 37–62. DOI: 10.1007/s11029-019-09801-4.

118. Nguyen D.D., Pham T.T. Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations. *Aerospace Science and Technology.* 2015. Vol. 40. P. 115–127.

119. Pradyumna S., Nanda N. Geometrically nonlinear transient response of functionally graded shell panels with initial geometric imperfection. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2012. Vol. 20(3). P. 217–226.

120. Aydogdu M. Comparison of Various Shear Deformation Theories for Bending, Buckling, and Vibration of Rectangular Symmetric Cross–ply Plate with Simply Supported Edges. *Journal of Composite Materials*. 2006. Vol. 40. P. 2143-2155.

121. Zhang D.G. Modeling and Analysis of FGM Rectangular Plates Based on Physical Neutral Surface and High Order Shear Deformation Theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 68. P. 92–104.

122. Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Taher H.R.D. Exact Solutions for Free Flexural Vibration of Levy–Type Rectangular Thick Plates Via Third Order Shear Deformation Plate Theory. *Applied Mathematical Modelling*. 2011. Vol 35(2). P. 708–727.

123. Nuttawit Wattanasakulpong, Gangadhara Prusty, Donald W. Kelly. Thermal Buckling and Elastic Vibration of Third–Order Shear Deformable Functionally Graded Beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011. Vol 53(9). P. 734–743.

124. Shimpi R.P., Patel H.G. Free Vibrations of Plate using Two Variable Refined Plate Theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol 296. P. 979–999.

125. Novozhilov V.V. Thin shell theory. Dordrecht: Springer Netherlands; 1964. https://doi.org/10.1007/978-94-017-5352-4.

126. Goldenveizer A.L. Theory of elastic thin-shells. Pergamon Press, 1961.

127. Vlasov V.Z. General Theory of Shells and Its Applications in Engineering. NASA-TTF-99, 1964.

128. Mushtari K.M, Galimov K.Z. Non-linear theory of thin elastic shells. Washington D.C.: Israel program for Scientific Translations for the National Science Foundation and the National Aeronautics and Space Administration U.S.A., 1961.

129. Donnell L.H. Beams, plates and shells. New York: Mc Graw Hills; 1976.

130. Mushtari K.M. Some generalization of the theory of thin shells with application to the stability of elastic equilibrium. Izv Fiz-Mat Ob-va Pri Kazan Unte 1938, II:71–15.

131. Mantari J.L., Guedes Soares C. Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 56. P. 126–136. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.07.027

132. Mantari J.L. Computational development of a 4-unknowns trigonometric quasi-3D shear deformation theory to study advanced sandwich plates and shells. *International Applied Mechanics.* 2016. Vol. 8(4). 1650049. https://doi.org/10.1142/S1758825116500496

133. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Jorge R.M.N., Soares CMM. Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering Zig-Zag and warping effects. *Advances in Engineering Software.* 2012. Vol. 52. P. 30–43. https:// doi.org/10.1016/j.advengsoft.2012.05.005

134. Tounsi A., Houari M.S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace Science and Technology.* 2013. Vol. 24(1). P. 209–220. https://doi.org/ 10.1016/j.ast.2011.11.009.

135. Thai H-T., Vo T.P. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37. P. 3269-3281. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.008

136. Nguyen T-K., Truong-Phong Nguyen T., Vo T.P., Thai H-T. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*. 2015. Vol. 76. P. 273–285. https://doi.org/10.1016/ j.compositesb:2015.02.032.

137. Nguyen T.-K., Vo T.P., Nguyen B.-D., Lee J. An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory. *Composite Structures*. 2016. Vol. 156. P. 238–252. https://doi.org/10.1016/ j.compstruct.2015.11.074.

138. Fazzolari F.A. Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*. 2018. Vol. 136. P. 254–271. https://doi.org/10.1016/ j.compositesb:2017.10.022

139. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Roque C.M.C., Cinefra M., Jorge R.M.N. A Quasi–3D Sinusoidal Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43(2). P. 711–725.

140. Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. A High–Order Theory of Plate Deformation Part 1: Homogeneous Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1977. Vol. 44(4). P. 663–668.

141. Kant T. Numerical Analysis of Thick Plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1982. Vol. 31(1). P. 1–18.

142. Reddy J.N. A General Nonlinear Third–Order Theory of Functionally Graded Plates. *International Journal of Aerospace and Light weight Structures*. 2011. Vol. 1(1). P. 1–21.

143. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. Free Vibration Response of Functionally Graded Thick Plates with Shear and Normal Deformations Effects. *Composite Structures*. 2013. Vol. 96. P. 799– 823.

144. Talha M., Singh B.N. Static Response and Free Vibration Analysis of FGM Plates Using Higher Order Shear Deformation Theory. *Applied Mathematical Modelling.* 2010. Vol. 34(12). P. 3991–4011.

145. Natarajan S., Manickam G. Bending and Vibration of Functionally Graded Material Sandwich Plates using an Accurate Theory. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. Vol 57. P. 32-42.

146. Bhimaraddi A., Stevens L.K. A Higher Order Theory for Free Vibration of Orthotropic, Homogeneous, And Laminated Rectangular Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol 51(1). P. 195-198.

147. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. *Applied Mechanics Reviews*. 1989. Vol 42. P. 1–13.

148. Mahi A., Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling.* 2015. Vol. 39. P. 2489–2508.

149. Fakhari V., Ohad A., Yousefian P. Nonlinear Free and Forced Vibration Behavior of Functionally Graded Plate with Piezoelectric Layers in Thermal Environment. *Composite Structures*. 2011. Vol 93(9). P. 2310–2321.

150. Pradyumna S., Bandyopadhyay J.N. Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 318. P. 176-192.

151. Yakovlev S. V. The concept of modeling packing and covering problems using modern computational geometry software. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2023. Vol. 59(1). P. 108-119. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00547-5.

152. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2000. Vol. 47(1–3). P. 663–684.

153. Shen H.S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 44(3). P. 561–584.

154. Yang J., Shen H.S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*. 2003. Vol. 34(2). P. 103–115.

155. Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S. Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory. *Computational Mechanics*. 2004. Vol. 33(4). P. 305–315.

156. Akbarzadeh A.H., Zad S.H., Eslami M.R., Sadighi M. Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of mechanical engineering science.* 2011. Vol. 225(2). P. 326–333.

157. Zhang D.G. Nonlinear bending analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on two-parameter elastic foundations. *Archive of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 84(1). P. 1–20.

158. Bodaghi M., Saidi A.R. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling.* 2010. Vol. 34(11). P. 3659–3673.

159. Saidi A.R., Bodaghi M., Atashipour S.R. Levy-type solution for bendingstretching of thick functionally graded rectangular plates based on thirdorder shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2012. Vol. 19(8). P. 577–589.

160. Kim Y.W. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 284(3–5). P. 531–549.

161. Shen H.S., Noda N. Postbuckling of pressure-loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*. 2007. Vol. 77(4). P. 546–560.

162. Shen H.S., Yang J., Kitipornchai S. Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *European Journal of Mechanics A/Solids.* 2010. Vol. 29(3). P. 448–460.

163. Shen H.S. Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *Journal of Engineering Mechanics.* 2013. Vol. 139(8). P. 979–991.

164. Oktem A.S., Mantari J.L., Soares C.G. Static response of functionally graded plates and doubly-curved shells based on a higher order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids.* 2012. Vol. 36. P. 163–172.

165. Hoang VT, Nguyen DD. Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions. *Applied Mathematical Modelling.* 2014. Vol. 38(11–12). P. 2848–2866.

166. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. 2008. *Composite Structures.* Vol. 84. P. 132–146.

167. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures.* 2010. Vol. 93(1). P. 14–31.

168. Sahu S.K., Datta P.K. Research advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987–2005. Part 1: Conservative system. *Applied Mechanics Reviews*. 2007. Vol. 60. P. 65–75. https://doi.org/10.1115/1.2515580.

169. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014. Vol. 58. P. 233–257.

170. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694.

171. Zhang Y.X., Yang C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*. 2009. Vol. 88 (1). P. 147–157.

172. Jin G., Shi Sh., Su Zh., Li Sh., Liu Zh. A modified Fourier-Ritz approach for free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with general

boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2015. Vol. 93. P. 256-269.

173. Zuyev A., Sawodny O. Modelling and control of a shell structure based on a finite dimensional variational formulation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems.* 2015. Vol. 21 (6). P. 591–612.

174. Woo J., Meguid S.A. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. P. 7409–7421.

175. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly curved shallow shell of elliptical plan-form. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92. P. 2573–2581.

176. Strozzi M., Pellicano F. Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2013. Vol. 67. P. 63–77.

177. Zhang L.W., Lei Z.X., Liew K.M., Yu J.L. Large deflection geometrically nonlinear analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 273. P. 1–18.

178. Birman V., Kardomateas G.A. Review of current trends in research and applications of sandwich structures. *Composites Part B: Engineering*. 2018. Vol. 142. P. 221–40. https://doi.org/10.1016/j.compositesb:2018.01.027.

179. Zhang N., Khan T., Guo H., Shi S., Zhong W., Zhang W. Functionally graded materials: an overview of stability, buckling, and free vibration analysis. *Advances in Materials Science and Engineering.* 2019. Vol. 2019(5). P. 1–18. https://doi.org/10.1155/2019/1354150

180. Garg A., Chalak H.D. A review on analysis of laminated composite and sandwich structures under hygrothermal conditions. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 142. P. 205–226. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.05.005.

181. Ghatage P.S., Kar V.R., Sudhagar P.E. On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures: a review.

Composite Structures. 2020. Vol. 236. 111837. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111837.

182. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М.Григоренко, Г.Г.Влайков, А.Я.Григоренко. Киев: Академпериодика. 2006. 472 с.

183. Zenkour A.M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 – Deflection and stresses. *International Journal of Solids and Structures.* 2005. Vol. 42(18–19). P. 5224–5242.

184. Zenkour A.M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling.* 2006. Vol. 30(1). P. 67–84.

185. Zhang D.G., Zhou H.M. Nonlinear Bending Analysis of FGM Circular Plates Based on Physical Neutral Surface and Higher–Order Shear Deformation Theory. *Aerospace Science and Technology*. 2015. Vol. 41. P. 90–98.

186. Sobhy V. Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions. *Composite Structures*. 2013. Vol. 99. P. 76-87. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.018

187. Yaghoobi H., Yaghoobi P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*. 2013. Vol. 48(8). P. 2019–2035. https://doi.org/10.1007/ s11012-013-9720-0

188. Zenkour A.M., Sobhy M. Thermal Buckling of Various Types of FGM Sandwich Plates. *Composite Structures.* 2010. Vol. 93(1). P. 93–102.

189. Zenkour A.M., Sobhy M. Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations Using the Trigonometric Theory. *Journal of Thermal Stresses*. 2011. Vol. 34(11). P. 1119–1138.

190. Pandey S., Pradyumna S. Free Vibration of Functionally Graded Sandwich Plates in Thermal Environment Using a Layerwise Theory. *European Journal of Mechanics A/Solids.* 2015. Vol 51. P. 55-66, https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.12.001.

191. Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M. Refined and advanced models for multilayered plates and shells embedding functionally graded material layers. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2010. Vol. 17(8). P. 603–621.

192. Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering.* 2011. Vol. 42(2). P. 123–133.

193. Shen H.-S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells (1st ed.). CRC Press, 2011. https://doi.org/10.1201/9781420092578

194. Amabili M. Non-linear vibrations of doubly curved shallow shells, Internat. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2005. Vol. 40 (5). P. 683–710.

195. Alijani F., Amabili M. Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*. 2014. Vol. 113. P. 89–107.

196. Alijani F., Amabili M. Nonlinear dynamic instability of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2013. Vol. 50. P. 109–126.

197. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new thirdorder thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 69. P. 109–128.

198. Zhu J., Lai Z., Yin Z., Jeon J., Lee S. Fabrication of ZrO2–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials Chemistry and Physics.* 2001. Vol. 68. P. 130–135.

199. Kim J., Zur K.K., Reddy J.N. Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates. *Composite Structures*. 2019. Vol. 209. P. 879–888.

200. Duc N.D., Quang V.D., Nguyen P.D., Chien T.M. Nonlinear dynamic response of functionally graded porous plates on elastic foundation subjected to

thermal and mechanical loads. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2018. Vol. 4. P. 245–259.

201. Liu Y.F., Wang Y.Q. Thermo-Electro-Mechanical Vibrations of Porous Functionally Graded Piezoelectric Nanoshells. *Nanomaterials*. 2019. Vol. 9. P. 301.

202. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104. P. 1007–1021.

203. Hao Y., Li Z., Zhang W., Li S., Yao M. Vibration of functionally graded sandwich doubly curved shells using improved shear deformation theory. *Science China Technological Sciences.* 2018. Vol. 61. P. 1–18.

204. Daikh A.A., Zenkour A.M. Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded plates using a simple higher-order shear deformation theory. *Materials Research Express.* 2019. Vol. 6. 115707.

205. Vinh P.V., Huy L.Q. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via a new hyperbolic shear deformation theory. *Defence Technology*. 2022. Vol. 18(3). P. 490-508. https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.03.006.

206. Cong P.H., Trinh M.C., Khoa N.D., Duc N.D. Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy’s HSDT. *Aerospace Science and Technology*. 2018. Vol. 77. P. 419-428.

207. Żur K.K., Jankowski P. Multiparametric Analytical Solution for the Eigenvalue Problem of FGM Porous Circular Plates. *Symmetry*. 2019. Vol. 11(3). P. 429. http://doi.org/10.3390/sym11030429.

208. Li H., Pang F., Du Y. Vibration analysis of functionally graded porous cylindrical shell with arbitrary boundary restraints by using a semi analytical method. *Composites Part B: Engineering.* 2019. Vol. 164. P. 249-264.

209. Wang Y., Wu D. Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory. *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 66. P. 83-91.

210. Rezaei A.S., Saidi A.R. Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*. 2015. Vol. 134. P. 1051–1060.

211. Rezaei A.S., Saidi A.R. Application of Carrera Unifed Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates. *Composites Part B: Engineering*. 2016. Vol. 91. P. 361–370.

212. Zenkour A.M. A quasi-3D refned theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities. *Composite Structures*. 2018. Vol. 201. P. 38–48.

213. Trinh M.C., Duc N.D., Kim S.E. Effects of porosity and thermomechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature. *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 87. P. 119-132.

214. Trinh M.C., Kim S.E. A three variable refined shear deformation theory for porous functionally graded doubly curved shell analysis. *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 94. 105356.

215. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. (2019). Design optimization of FGM beam in stability problem. *Engineering Computations*. Vol. 36(1). P. 248-270. https://doi.org/10.1108/EC-03-2018-0108.

216. Balak M., Jafari Mehrabadi S., Mohseni Monfared H. Free vibration behavior of an elliptical sandwich microplate, consisting of a saturated porous core and two piezoelectric face layers, standing on an elastic foundation. *Acta Mechanica.* 2022. Vol. 233(6). P. 3253–3290. DOI:10.1007/s00707-022-03227-1.

217. Zenkour A.M., Radwan A.F. On the simple and mixed first-order theories for functionally graded plates resting on elastic foundations. *Meccanica*. 2013. Vol. 48. P. 1501-1516.

218. Mohammadi M., Arefi M., Dimitra R., Tornabene F. Higher-order thermo-elastic analysis of FG-CNTR cylindrical vessels surrounded by Pasternak foundation. *Nanomaterials.* 2019. Vol. 9(1). P. 79.

219. Shantaram M., Ghumare Atteshamuddin, S.Sayyad. Analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation and subjected to non-linear hygro-thermo-mechanical loading. *JMST Advances.* 2019. Vol. 1. P. 233-248.

220. Shen H., Wang H. Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 60. P. 167-177.

221. Amini M.H., Soleimani M., Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Materials and Structures.* 2009. Vol. 18. P. 1-9. http://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/18/8/085015.

222. Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*. 2009. Vol. 89. P. 367-373.

223. Baferani A.H., Saidi A.R., Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. P. 1842-1853.

224. Thai H.-T., Choi D.-H. A simple refined theory for bending, buckling and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 73. P. 40-52.

225. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik*. 1889. Vol. 274. P. 573–587.

226. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*. 1973. Vol. 21. P. 571–574.

227. Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J.N. Winkler–Pasternak foundation effect on the static and dynamic analyses of laminated doubly-curved and degenerate shells and panels. *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 57. P. 269–296.

228. Mantari J.L., Granados E.V., Hinostroza M.A., Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Composite Structures*. 2014. Vol. 118. P. 455–471.

229. Singh S.J., Harsha S.P. Exact solution for free vibration and buckling of sandwich S-FGM plates on pasternak elastic foundation with various boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019. Vol. 19. DOI:10.1142/S0219455419500287.

230. Malekzadeh P., Karami G. Vibration of non-uniform thick plates on elastic foundation by differential quadrature method. *Engineering Structures*. 2004. Vol. 26. P. 1473–1482.

231. Nguyen D.D., Vu D.Q., Pham D.N, Trinh M.C. Nonlinear dynamic response of functionally graded porous plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2018. Vol. 4(4). P. 245-259.

232. Kumar V., Singh S.J., Saran V.H., Harsha S.P. Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids.* 2021. Vol. 85. 104124.

233. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М: Гостехиздат, 1950. 416с.

234. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1981. 916с.

235. Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 503с.

236. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колеаний. М.: Наука, 1964. 431с.

237. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 530с.

238. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М: Гостехтеоретиздат, 1956. 600с.

239. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.

240. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. К.: Вища школа, 1989. 208с.

241. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

242. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

243. Kiseleva O., Yakovlev S., Chumachenko D., Kuzenkov O. Exploring Bifurcation in the Compartmental Mathematical Model of COVID-19 Transmission. Computation. 2024. Vol. 12(9). P. 186. https://doi.org/10.3390/computation12090186.

244. Bateni M., Kiani Y., Eslami M.R. A Comprehensive Study on Stability of FGM Plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 75. P. 134–144.

245. Lee Y.Y., Zhao X., Reddy J.N. Postbuckling Analysis of Functionally Graded Plates Subject to Compressive and Thermal Loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2010. Vol. 199(25–28). P. 1645–1653.

246. Fekrar A., El Meiche N., Bessaim A., Tounsi A., Adda Bedia E.A. Buckling Analysis of Functionally Graded Hybrid Composite Plates Using a New Four Variable Refined Plate Theory. *Steel and Composite Structures*. 2012. Vol 13(1). P. 91–107.

247. Reddy B.S., Kumar J.S., Reddy C.E., Reddy K.V.K. Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Higher Order Shear Deformation Theory. *Journal of Composites*. 2013. 808764. Doi: 10.1155/2013/808764

248. Kettaf F.Z., Houari M.S.A., Benguediab M., Tounsi A. Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel & Composite Structures*. 2013. Vol. 15. P. 399–423.

249. Nguyen V.H., Nguyen T.K., Thai H.T., Vo T.P. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 66. P. 233–246.

250. Akavci S.S. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering.* 2016. Vol. 96. P. 136-52.

251. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Jorge R.M.N., Mota Soares C.M., Araújo A.L. Influence of zig-zag and warping effects on buckling of functionally graded sandwich plates according to sinusoidal shear deformation theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2017. Vol. 24. P. 360–376.

252. Tung H.V. Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties. *Composite Structures*. 2015. Vol. 131. P. 1028–1039. https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2015.06.043

253. Mozafari H., Ayob A. Effect of Thickness Variation on the Mechanical Buckling Load in Plates Made of Functionally Graded Materials. *Procedia Technology*. 2012. Vol. 1. P. 496–504.

254. Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.H. Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions. *Elsevier.* 2000.

255. Samsam Shariat B.A., Eslam M.R. Buckling of Thick Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal Loads. *Composite Structures*. 2007. Vol. 78(3). P. 433–439.

256. Birman V. Buckling of Functionally Graded Hybrid Composite Plates. *Engineering mechanics*. 1995. P. 1199–1202.

257. Marchuk A.V., Onyshchenko A.M., Plazii I.P. Stability analysis of functionally graded plates based on the three-dimensional theory of elasticity. *Composites Part C: Open Access*. 2021. Vol. 6. 100200. https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100200.

258. Wu L. Thermal Buckling of A Simply Supported Moderately Thick Rectangular FGM Plate. *Composite Structures*. 2004. Vol. 64(2). P. 211–218.

259. Czechowski L., Kołakowski Z. The Study of Buckling and Post–Buckling of a Step– Variable FGM Box. *Materials*. 2019. Vol. 12(6). P. 918.

260. Skob Y., Yakovlev S., Korobchynskyi K., Kalinichenko M. Numerical Assessment of Terrain Relief Influence on Consequences for Humans Exposed to Gas Explosion Overpressure. *Computation*. 2023. Vol. 11(2). P. 19.

261. Shi-Rong Li, Bouazza Fahsi Abdelouahed Tounsi, Samy R. Mahmoud. Correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogeneous Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 82(11). https://doi.org/10.1115/1.4031186

262. Zenkour A.M. A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2–Buckling and Free Vibration. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42(18–19). P. 5243-5258.

263. Shen H.S., Li S.R. Post–Buckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets and Temperature–Dependent Properties. *Composites Part B: Engineering*. 2008. Vol. 39(2). P. 332-344.

264. Kiani Y., Bagherizadeh E., Eslami M.R. Thermal and Mechanical Buckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets Resting on the Pasternak Elastic Foundation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2011. Vol. 226(1). P. 32–41.

265. Na K.S., Kim J.H. Three–Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Materials. *Composites Part B: Engineering*. 2004. Vol. 35(5). P. 429–437.

266. Na K.S., Kim J.H. Thermal Postbuckling Investigations of Functionally Graded Plates Using 3–D Finite Element Method. *Finite Elements in Analysis and Design.* 2006. Vol. 42(8–9). P. 749-756.

267. Tung H.V., Duc N.D. Nonlinear Analysis of Stability for Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal Loads. *Composite Structures*. 2009. Vol 92(5). P. 1184-1191.

268. Park J.S., Kim J.H. Thermal Postbuckling and Vibration Analyses of Functionally Graded Plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 289(1–2). P. 77–93.

269. Kiani Y., Eslami M.R. Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*. 2012. Vol. 82(7). P. 891–905. https://doi.org/10.1007/s00419-011-0599-8

270. Duc N.D., Seung-Eock K., Chan D.Q. Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT. *Journal of Thermal Stresses***.** 2018. Vol. 41(3). P. 331–365. https://doi.org/ 10.1080/01495739.2017.1398623

271. Wang Z.-X., Shen H.-S. Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93(10). P. 2521–2532. https://doi. org/10.1016/j.compstruct.2011.04.014

272. Tu B.T., Dong D.T., Duc V.M., Nam V.H. Nonlinear Buckling and Postbuckling Response of Porous FGM Shallow Spherical Caps and Circular Plates with Nonlinear Elastic Foundation Effects Using the Ritz Energy Method. *Mechanics of Composite Materials.* 2024. Vol. 60. P. 417–432. https://doi.org/10.1007/s11029-024-10200-7

273. Nguyen T.N., Thai C.H., Nguyen-Xuan H. A novel computational approach for functionally graded isotropic and sandwich plate structures based on a rotation free meshfree method. *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 107. P. 473–488. https://doi.org/ 10.1016/j.tws.2016.06.011.

274. Thai C.H., Do V.N.V., Nguyen-Xuan H. An improved Moving Kriging-based meshfree method for static, dynamic and buckling analyses of functionally graded isotropic and sandwich plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 64. P. 122-136. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.12.003.

275. Sobhy M. An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016. Vol. 110. P. 62–77. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.03.003.

276. Daikh A.A., Megueni A. Thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Journal of Thermal Stresses.* 2018. Vol. 41(2). P. 139–159. https://doi.org/ 10.1080/01495739.2017.1393644.

277. Zenkour A.M., Radwan A.F. Bending response of FG plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment with porosities. *Composite Structures*. 2019. Vol. 213. P. 133–143. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.065

278. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation accounting for through

the thickness deformations. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2013. Vol. 37. P. 24-34.

279. Einaudi R. Sulle configurazioni di equilibrio instabili di una piastra sollecitata da sforgi tangenziale pulsanti. *Atti Accad. Gioenia J. Memoria*. 1936. Vol. 20. P. 1–5.

280. Zhang J., Li T., Zhu X. Free vibration analysis of FGM plates based on Rayleigh-Ritz method. *Vibroengineering PROCEDIA*. 2018. Vol. 21. P. 53–58. https://doi.org/10.21595/vp.2018.20368

281. Kumar Y. The Rayleigh – Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review. *Journal of Vibration and Control*. 2017. Vol. 24(7). P. 1205–1227. https://doi.org/10.1177/1077546317694724

282. Mikhlin Yu. Matching of local expansions in the theory of nonlinear vibrations. *Journal of Sound and Vibration*. 1995. Vol. 182(4). P. 577-588.

283. Avramov K.V., Papazov S.V., Breslavsky I.D. Dynamic instability of shallow shells in three-dimensional incompressible inviscid potential flow. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 394. P. 593–611. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.01.048

284. Awrejcewicz J., Krys'ko A.V. Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubniv-Galerkin approach. *Applied Mechanics*. 2003. Vol. 73. P. 495- 504.

285. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. New York: Wiley, 1998.

286. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Spinger-Verlag, 1990.

287. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982.

288. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. Киев: Техника, 1988. 197 с.

289. Рвачев В.Л., Курпа Л.В., Склепус Н.Г., Учишвили Л.А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Киев: Наук. Думка, 1972. 123 с.

290. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функци в задачах теории пластин. Киев: Наук.думка, 1987. 176 с.

291. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. 408 с.

292. Kobayashi Y., Leissa W. Large amplitude free vibration of thick shallow shells supported by shear diaphragms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1995. Vol. 30(1). P. 57-66.

293. Kar V.R., Panda S. Geometrical nonlinear free vibration analysis of FGM spherical panel under nonlinear thermal loading with TD and TID properties. *Journal of Thermal Stresses.* 2016. Vol. 39(8). P. 942-959.

294. Merdaci S., Hadj M. A., Merazi M., Belghoul H., Hellal H., Boutaleb S. Effects of even pores distribution of functionally graded plate porous rectangular and square. *Procedia Structural Integrity*. 2020. Vol. 26. P. 35-45.

295. Akavci S.S. An efficient shear deformation theory for free vibration of the functionally gradient thick rectangular plates on elastic foundations. *Composite Structures*. 2014. Vol. 108. P. 667-676.

296. Bennoun M., Houari M.S.A., Tounsi A. A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2016. Vol. 23(4). P. 423-431.

297. Meiche N.E., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E.A. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011. Vol. 53(4). P. 237-247.

298. Дисковський, О. А., Борзов, С.О., Шапка І.В. (2023). Аналіз метода гомогенізації при розрахунку конструкцій з функціонально-градієнтних матеріалів. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. № 2(37). С. 30-38. https://doi.org/10.15421/4223214

299. Wang, J., Chang, Z., Liu, T. *et al.* A review of linear and nonlinear vibration analysis of composite laminated structures by computational approaches: 2015–2024. *Nonlinear Dynamics.* 2025. Vol. 113. P. 10839–10859. https://doi.org/10.1007/s11071-024-10837-y

300. Pasha A., Rajaprakash B.M. Functionally graded materials (FGM) fabrication and its potential challenges & applications. *Materials Today: Proceedings*. 2022. Vol. 52. P. 413–418.

301. Mikhlin Y.V., Shmatko T.V., Manucharyan G.V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82. Is. 31-32. P. 2733-2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082 *(квартиль Q1)*.

302. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufrienko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with complex form. *Mathematical Problems in Engineering*. 2006. Vol. 2006. P. 125–138 doi:10.1155/MPE/2006/26081 *(квартиль Q1)*.

303. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Timchenko G.N. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures.* 2010. Vol.93. P. 225-233 *(квартиль Q1)*.

304. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness. *Latin American Journal of Solid and Structures.* 2013. Vol. 10. P. 147-160 *(квартиль Q2).*

305. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2014. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol.3. P.305-308.

306. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P.575–585 *(квартиль Q1)*.

307. Shmatko T., Kurpa L., Bhaskar A. Geometrical analysis of vibrations of functionally graded shell panels using the R-functions theory. *Proceeding of 24-th*

International Congress on Sound and Vibration, ICSV. 2017. London, UK. ISBN: 978-1-5108-4585-5. P. 6298-6305.

308. Shmatko T.V., Bhaskar A. Using the R-functions theory for investigation of nonlinear vibrations of FGM shallow shells. *Shell Structures: Theory and Applications.* 2017. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 4. P. 333-336 https://doi.org/10.1201/9781315166605.

309. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. P. 1648-1668. DOI: 10.1590/1679-78253817 (*квартиль Q2)*.

310. Shmatko T., Bhaskar A. R-functions theory applied to investigation of nonlinear free vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93. P. 189–204. DOI:10.1007/s11071-017-3922-2 *(квартиль Q1).*

311. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93, P. 133–147. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3930-2 *(квартиль Q1)*.

312. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 107. P. 161-169. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013 *(квартиль Q1).*

313. Mikhlin Y.V., Plaksiy K.Y., Shmatko T.V., Rudneva G.V. Normal modes of chaotic vibrations and transient normal modes in nonlinear systems. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials. Advanced Structured Materials* / eds. Andrianov I., Manevich A., Mikhlin Y., Gendelman O. Springer, Cham, 2019. Vol. 94. P.85-100. DOI: 10.1007/978-3-319-92234-8_6.

314. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 16, №1. DOI: 10.1590/1679-78254911 *(квартиль Q2).*

315. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the R-functions theory and variational methods. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 249, № 3. P. 496–520. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2 *(квартиль Q4)*.

316. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. Is. 20. P. 4582-4593. https://doi.org/10.1177/0954406220936304 *(квартиль Q2)*.

317. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of functionally graded sandwich plates with complex forms. *New Trends in Nonlinear Dynamics* / eds. Lacarbonara W., Balachandran B., Ma J., Tenreiro Machado J., Stepan G. Springer, Cham, 2020. Vol. 3. 66-77. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34724-6_8.

318. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions in free vibration analysis of FGM plates and shallow shells with temperature dependent properties. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 101. Is. 3. DOI: 10.1002/zamm.202000080 *(квартиль Q2)*.

319. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Nonlinear vibration of the three-layered FGM plates with variable thickness of layers and different boundary conditions. *Nonlinear Mechanics of Complex Structures, Advanced Structured Materials*. 2021. Vol. 157. P. 57-74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_4.

320. Zippo A., Iarriccio G., Pellicano F., Shmatko T. Vibrations of plates with complex shape: experimental modal analysis, finite element method, and R-functions method. *Shock and Vibration*. 2020. Vol. 2020. P. 1-23. https://doi.org/10.1155/2020/8882867 *(квартиль Q2)*.

321. Kurpa L., Shmatko T. Chapter 11 - Parametric vibrations of axially compressed functionally graded sandwich plates with a complex plan form. *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. Igor Andrianov, Simon Gluzman,

Vladimir Mityushev. Academic Press, 2022. P. 213-232. https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00016-5.

322. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1895–1910. https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y *(квартиль Q2).*

323. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G., Morachkovska I. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. Vol. 9. № 4. P. 1144-1155. doi: 10.22055/jacm.2023.43435.4082 (*квартиль Q1)*

324. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method and shell theory of the higher-order to study free vibration of functionally graded shallow shells. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / eds. Altenbach, H., et al. Springer, Cham, 2023. P. 188–197. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_19.

325. Zippo A., Shmatko T., Pellicano F., Kurpa L. Free vibration analysis of FGM plates and shallow shells by the R-functions method. *Proceedings of the International Conference on Condition Monitoring and Asset Management*, 19th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management, September 2023. P. 1-5. https://doi.org/10.1784/cm2023.4d7.

326. Kurpa L., Shmatko T., Linnik A. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on an elastic foundation and subjected to a nonuniform loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 645–658. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10122-w *(квартиль Q1)*

327. Shmatko T.V. Computer simulation of the stress-strain state of functionally graded sandwich plates and shallow shells of complex shape resting on the elastic foundation. *Journal of Mathematical Sciences* (United States). 2023. Vol. 277. P. 95–108 *(квартиль Q4)*

328. Kurpa L, Pellicano F, Shmatko T, Zippo A. Free vibration analysis of porous functionally graded material plates with variable thickness on an elastic

foundation using the R-functions method. *Mathematical and Computational Applications*. 2024. Vol. 29. № 1. https://doi.org/10.3390/mca29010010

329. Kurpa L., Shmatko T. Research of vibration behavior of porous FGM panels by the Ritz method. *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials* / eds. Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A.Y., Kushnir, R.M., Nazarenko, V.M., Eremeyev, V.A. Springer, Cham, 2024. Vol. 204. P. 325-338. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_22

330. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Perspectives in Dynamical Systems II — Numerical and Analytical Approaches. DSTA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* / eds. Awrejcewicz J. Springer, Cham, 2024. Vol 454. P. 593–605. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56496-3_38

331. Курпа Л.В., Онуфриенко О.Г., Шматко Т.В. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы. *Доклады НАН Украины*. 2005. № 3. С. 42–46.

332. Курпа Л.В., Осетров А.А., Шматко Т.В. Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью теории R-функций и сплайн-аппроксимации. *Вісник НТУ «ХПІ» Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях»*. Харків: НТУ "ХПІ". 2014. № 6. С. 99-110.

333. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».* Харків: НТУ "ХПІ". 2015. №6 (1115). С.56-66.

334. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Исследование геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих со сложной формой плана. *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки.* Запоріжжя: Запорізький національний університет. 2015. С. 89-97.

335. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Linnik A.B. Analysis of stability and vibrations of porous power and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions

method. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. № 4.P. 38-49. DOI: https://doi.org/10.15407/pmach2023.04.038.

336. Курпа Л., Шматко Т., Ліннік Г.Б., Морачковська І.О., Тимченко Г.М. Динамічний аналіз функціонально-градієнтних пористих сигмовидних сендвіч пластин. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин* /Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Dynamics and Strength of Machines: збірник наукових праць. Харків: НТУ "ХПІ", 2023. № 1. С. 39-44. https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/73892.

337. Kurpa L.V., Onufrienko O.G., Shmatko T.V. Researches of nonlinear vibrations of orthotropic plates with arbitrary form by the R-functions method. *Research and Education:* Proceedings of the 2-nd International Conference, Miscolc, March 17–19, 2004. Miscolc, Egyetemvarioos, 2004. P.109–115.

338. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Нелинейная динамика:* труды Международной конференции, Харьков, 14–16 сент. 2004. Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. P.108–112.

339. Shmatko T.V. Stability Investigation of Vibration Modes of Laminated Shallow Shells with Complex Plan Form. *Dynamical System. Theory and Applications:* Proceedings of 10th Conference on Dynamical System. Theory and Applications, DSTA-2009, Lodz, Poland, December 07-10, 2009. Lodz, 2009. Vol.1. P. 467 – 472.

340. Курпа Л.В., Шматко Т.В., Тимченко Г.Н. Исследование геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек с отверстиями. *Збірник наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла».* Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. Вип. 10. С. 179-185.

341. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibration of orthotropic shallow shells of the complex shape with variable thickness. *Dynamical Systems. Theory and Applications:* Abstracts of the 11th Conference on Dynamical Systems.

Theory and Applications, DSTA-2011, Łódź, Poland, December 5-8, 2011. Wydawnictwo politechniki Lodzkiej. Łódź, 2011. Book 1. P. 243-248.

342. Kurpa L., Shmatko T. Investigation of geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness by meshless approach. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013:* Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013, Sevastopol, Ukraine, June 19-22, 2013. Sevastopol, 2013. P. 277-283.

343. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Донецк. № 8 (54). С.77-86.

344. Курпа Л., Шматко Т. Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Вып.55. № 9. С.59-70.

345. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Vibration of functionally graded shallow shells with complex shape. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracs of the 13-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA-2015, Lodz, Poland, December 7-10, 2015. Lodz, 2015. P. 57-68.

346. Shmatko T., Bhaskar A. Geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016:* Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016, Kharkov, Ukraine, September 27-30, 2016. Kharkiv, 2016. P. 485-492.

347. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells by the R-functions method. *Dynamical Systems: Theory and Applications*: Book of abstracts of the 14-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA 2017, Łódź, Poland, December 11-14, 2017. Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis. Lodz, 2017. V.2. P. 311-322.

348. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method for vibration and buckling analysis of functionally graded plates and shallow shells with

complex planform. Literature review from 2014 to 2020. *Dynamics of hybrid systems of complex structures* / ed. Katica R. (Stevanovi´c) Hedrih. Belgrad, 2022. P. 237-261.

349. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Nonlinear Vibration of Functionally Graded Shallow Shells Resting on Elastic Foundations. *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara, W., Balachandran, B., Leamy, M.J., Ma, J., Tenreiro Machado, J.A., Stepan, G. Springer, Cham, 2022. P. 385-394. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_34

350. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G. Nonlinear free vibration of functionally graded shallow shells with variable thickness resting on elastic foundation. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 191-201. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_17

351. Shmatko T., Kurpa L., Lacarbonara W. Nonlinear free vibrations of functionally graded porous sandwich plates with complex shape. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 203-215. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_18

352. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Nonlinear Dynamics:* Book of abstracts of conference on Nonlinear Dynamics, Kharkiv, Ukraine, September 14-16, 2004. Kharkiv, 2004. P.50–51.

353. Курпа Л.В., Онуфрієнко О.Г., Шматко Т.В. Дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної планформи за допомогою R–функцій. *Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові:* Тези доповідей 7-го Міжнародного симпозіума, Львів, Україна, 18-20 травня 2005р. Львів, 2005. С. 23.

354. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Исследование динамического поведения ортотропных пластин и пологих оболочек, опирающихся на план сложной. *Актуальні проблеми механіки суцільного*

середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. С. 264.

355. Шматко Т.В. Исследование устойчивости форм колебаний многослойных пологих оболочек. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2009:* Abstracts of the conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 27-29, 2009. Kyiv, 2009. C. 264.

356. Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек переменной толщины. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2011:* Abstracts of conference reports of the XV International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 25-27, 2011. Kyiv, 2011. C. 141.

357. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Метод R-функций для исследования нелинейных колебаний ортотропных оболочек переменной толщины. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: Тези доповідей XIX міжнародної науково-практичної конференції, Харків, Україна, 01-03 червня 2011р. / за ред. проф. Товажнянського Л.Л. Харків: НТУ "ХПІ", 2011. Ч.1. С. 53.

358. Шматко Т.В., Шматко А.В. Геометрически нелинейные колебания многослойных пластин с переменной толщиной слоев. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2013*: Abstracts of conference reports of the XVI International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 29-31, 2013. Kyiv, 2013. C. 148.

359. Шматко Т., Шматко О. Нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини. *Сучасні проблеми механіки та математики:* Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 21-25 травня 2013р. / під ред. Р.М.Кушніра, Б.Й.Пташника. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України. Львів, 2013. Т.2. С. 185-186.

360. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник праць IX Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 15-19 вересня 2014. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2014. С.363-365.

361. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex planform in thermal environments. *European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017:* Proceeding of the 9-th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017, Budapest, Hungary, June 25-30, 2017. Budapest, 2017. P. 70-72.

362. Курпа Л., Шматко Т. Застосування теорії R-функцій для дослідження нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища. *Сучасні проблеми механіки та математики*: Тези доповідей міжнародної конференції, Львів, Україна, 22-25 травня 2018р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018. Т. 1. С. 177-178.

363. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек в температурной среде. *Динаміка, міцність та моделювання у машинобудуванні:* Тези доповідей I-й Міжнародної конференції, Харків, Україна, 10-14 вересня 2018р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 2018. С.134-135.

364. Шматко Т. Дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок методом R-функцій. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей II-ї міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпро, Україна, 10-12 жовтня 2019. Дніпро, 2019. С. 235.

365. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Free vibration analysis of FGM shell with complex planform in thermal environments. *Dynamical Systems: Theory*

and Applications: Book of abstracts of 15th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2019, Lodz, Poland, December 2-5, 2019. Lodz, 2019, P. 207.

366. Курпа Л., Шматко Т. Вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з функціонально-градієнтними шарами. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур:* Збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 17-19 вересня 2019р. Львів, 2019. С. 61.

367. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Research of stability and nonlinear vibrations of sandwich plates with functionally graded core by Ritz's method and the R-functions theory. *Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih":* Booklet of abstracts Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih", Belgrade, Serbia, September 04-06, 2019. Belgrade, 2019. P. 19-20.

368. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of the functionally graded sandwich plates with complex form. *Nonlinear Dynamics NODYCON 2019:* Book of abstract of the First International Nonlinear Dynamics Conference NODYCON 2019, Rome, Italy, February 17-20, 2019. Rome, 2019. P.409-410.

369. Шматко Т.В. Исследование свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек на упругом основании. *Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering:* Theses of the Second International Science and Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, October 05–08, 2020. ІПМаш НАН України, Харків, 2020. С. 310-313.

370. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracts of 16th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2021, Lodz, Poland, December 6-9, 2021. Lodz, 2021. P. 629-630.

371. Курпа Л., ШматкоТ., Лінник Г. Аналіз стійкості та коливань пористих функціонально-градієнтних пластин з використанням теорії R-функцій. *Сучасні*

проблеми механіки та математики: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 23-25 травня 2023р. Львів, 2023. С.194.

372. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Згин та коливання функціонально-градієнтних пористих сендвіч пологих оболонок з отворами та вирізами. *Actual problems of mechanics – 2023:* Proceedings of International scientific conference dedicated to the 145-th anniversary of the birth of S.P.Timoshenko, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine, November 14-16, 2023. Kharkiv, 2023.С. 420-421.

373. Курпа Л, Шматко Т., Лінник Г., Морачковська І. Вільні коливання сендвіч пластин з ауксетичним сотовим заповнювачем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 24-26 вересня 2024р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. С. 101-102.

374. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Застосування теорії R-функцій до розв'язання нелінійних задач динаміки багатошарових пластин: монографія. Харків: ООО «В деле», 2016. 492 с.

ДОДАТОК А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Mikhlin Y.V., Shmatko T.V., Manucharyan G.V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82. Is. 31-32. P. 2733-2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082 *(квартиль Q1)*.

2. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufrienko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with complex form. *Mathematical Problems in Engineering*. 2006. Vol. 2006. P. 125–138 doi:10.1155/MPE/2006/26081 *(квартиль Q1)*.

3. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Timchenko G.N. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures*. 2010. Vol.93. P. 225-233 *(квартиль Q1)*.

4. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness. *Latin American Journal of Solid and Structures*. 2013. Vol. 10. P. 147-160 *(квартиль Q2)*.

5. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2014. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol.3. P.305-308.

6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P.575–585 *(квартиль Q1)*.

7. Shmatko T., Kurpa L., Bhaskar A. Geometrical analysis of vibrations of functionally graded shell panels using the R-functions theory. *Proceeding of 24-th International Congress on Sound and Vibration, ICSV*. 2017. London, UK. ISBN: 978-1-5108-4585-5. P. 6298-6305.

8. Shmatko T.V., Bhaskar A. Using the R-functions theory for investigation of nonlinear vibrations of FGM shallow shells. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 4. P. 333-336 https://doi.org/10.1201/9781315166605.

9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. P. 1648-1668. DOI: 10.1590/1679-78253817 (*квартиль Q2)*.

10. Shmatko T., Bhaskar A. R-functions theory applied to investigation of nonlinear free vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93. P. 189–204. DOI:10.1007/s11071-017-3922-2 *(квартиль Q1).*

11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 93, P. 133–147. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3930-2 *(квартиль Q1)*.

12. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 107. P. 161-169. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.013 *(квартиль Q1).*

13. Mikhlin Y.V., Plaksiy K.Y., Shmatko T.V., Rudneva G.V. Normal modes of chaotic vibrations and transient normal modes in nonlinear systems. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials. Advanced Structured Materials* / eds. Andrianov I., Manevich A., Mikhlin Y., Gendelman O. Springer, Cham, 2019. Vol. 94. P.85-100. DOI: 10.1007/978-3-319-92234-8_6.

14. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 16, №1. DOI: 10.1590/1679-78254911 *(квартиль Q2)*.

15. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the R-functions theory and variational

methods. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, № 3. P. 496–520. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2 *(квартиль Q4)*.

16. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. Is. 20. P. 4582-4593. https://doi.org/10.1177/0954406220936304 *(квартиль Q2)*.

17. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of functionally graded sandwich plates with complex forms. *New Trends in Nonlinear Dynamics* / eds. Lacarbonara W., Balachandran B., Ma J., Tenreiro Machado J., Stepan G. Springer, Cham, 2020. Vol. 3. 66-77. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34724-6_8.

18. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions in free vibration analysis of FGM plates and shallow shells with temperature dependent properties. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 101. Is. 3. DOI: 10.1002/zamm.202000080 *(квартиль Q2)*.

19. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Nonlinear vibration of the three-layered FGM plates with variable thickness of layers and different boundary conditions. *Nonlinear Mechanics of Complex Structures, Advanced Structured Materials*. 2021. Vol. 157. P. 57-74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_4.

20. Zippo A., Iarriccio G., Pellicano F., Shmatko T. Vibrations of plates with complex shape: experimental modal analysis, finite element method, and R-functions method. *Shock and Vibration*. 2020. Vol. 2020. P. 1-23. https://doi.org/10.1155/2020/8882867 *(квартиль Q2)*.

21. Kurpa L., Shmatko T. Chapter 11 - Parametric vibrations of axially compressed functionally graded sandwich plates with a complex plan form. *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. Igor Andrianov, Simon Gluzman, Vladimir Mityushev. Academic Press, 2022. P. 213-232. https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00016-5.

22. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1895–1910. https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y *(квартиль Q2)*.

23. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G., Morachkovska I. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. Vol. 9. № 4. P. 1144-1155. doi: 10.22055/jacm.2023.43435.4082 (*квартиль Q1)*

24. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method and shell theory of the higher-order to study free vibration of functionally graded shallow shells. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / eds. Altenbach, H., et al. Springer, Cham, 2023. P. 188–197. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_19.

25. Zippo A., Shmatko T., Pellicano F., Kurpa L. Free vibration analysis of FGM plates and shallow shells by the R-functions method. *Proceedings of the International Conference on Condition Monitoring and Asset Management*, 19th International Conference on Condition Monitoring and Asset Management, September 2023. P. 1-5. https://doi.org/10.1784/cm2023.4d7.

26. Kurpa L., Shmatko T., Linnik A. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on an elastic foundation and subjected to a nonuniform loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 645–658. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10122-w *(квартиль Q1)*

27. Shmatko T.V. Computer simulation of the stress-strain state of functionally graded sandwich plates and shallow shells of complex shape resting on the elastic foundation. *Journal of Mathematical Sciences* (United States). 2023. Vol. 277. P. 95–108 *(квартиль Q4)*

28. Kurpa L, Pellicano F, Shmatko T, Zippo A. Free vibration analysis of porous functionally graded material plates with variable thickness on an elastic foundation using the R-functions method. *Mathematical and Computational Applications*. 2024. Vol. 29. № 1. https://doi.org/10.3390/mca29010010

29. Kurpa L., Shmatko T. Research of vibration behavior of porous FGM panels by the Ritz method. *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials* / eds. Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A.Y., Kushnir, R.M., Nazarenko, V.M., Eremeyev, V.A. Springer, Cham, 2024. Vol. 204. P. 325-338. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_22

30. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Perspectives in Dynamical Systems II — Numerical and Analytical Approaches. DSTA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* / eds. Awrejcewicz J. Springer, Cham, 2024. Vol 454. P. 593–605. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56496-3_38

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

31. Курпа Л.В., Онуфриенко О.Г., Шматко Т.В. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы. *Доклады НАН Украины*. 2005. № 3. С. 42–46.

32. Курпа Л.В., Осетров А.А., Шматко Т.В. Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью теории R-функций и сплайн-аппроксимации. *Вісник НТУ «ХПІ» Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях»*. Харків: НТУ "ХПІ". 2014. № 6. С. 99-110.

33. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».* Харків: НТУ "ХПІ". 2015. №6 (1115). С.56-66.

34. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Исследование геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих со сложной формой плана. *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки.* Запоріжжя: Запорізький національний університет. 2015. С. 89-97.

35. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Linnik A.B. Analysis of stability and vibrations of porous power and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-

functions method. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. № 4.P. 38-49. DOI: https://doi.org/10.15407/pmach2023.04.038.

36. Курпа Л., Шматко Т., Ліннік Г.Б., Морачковська І.О., Тимченко Г.М. Динамічний аналіз функціонально-градієнтних пористих сигмовидних сендвіч пластин. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин* /Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Dynamics and Strength of Machines: збірник наукових праць. Харків: НТУ "ХПІ", 2023. № 1. С. 39-44. https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/73892.

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій:

37. Kurpa L.V., Onufrienko O.G., Shmatko T.V. Researches of nonlinear vibrations of orthotropic plates with arbitrary form by the R-functions method. *Research and Education:* Proceedings of the 2-nd International Conference, Miscolc, March 17–19, 2004. Miscolc, Egyetemvarioos, 2004. P.109–115.

38. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Нелинейная динамика:* труды Международной конференции, Харьков, 14–16 сент. 2004. Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. P.108–112.

39. Shmatko T.V. Stability Investigation of Vibration Modes of Laminated Shallow Shells with Complex Plan Form. *Dynamical System. Theory and Applications:* Proceedings of 10th Conference on Dynamical System. Theory and Applications, DSTA-2009, Lodz, Poland, December 07-10, 2009. Lodz, 2009. Vol.1. P. 467 – 472.

40. Курпа Л.В., Шматко Т.В., Тимченко Г.Н. Исследование геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек с отверстиями. *Збірник наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла».* Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. Вип. 10. С. 179-185.

41. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibration of orthotropic shallow shells of the complex shape with variable thickness. *Dynamical Systems.*

Theory and Applications: Abstracts of the 11th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications, DSTA-2011, Łódź, Poland, December 5-8, 2011. Wydawnictwo politechniki Lodzkiej. Łódź, 2011. Book 1. P. 243-248.

42. Kurpa L., Shmatko T. Investigation of geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness by meshless approach. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013:* Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2013, Sevastopol, Ukraine, June 19-22, 2013. Sevastopol, 2013. P. 277-283.

43. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Донецк. № 8 (54). С.77-86.

44. Курпа Л., Шматко Т. Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. Вып.55. № 9. С.59-70.

45. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Vibration of functionally graded shallow shells with complex shape. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracs of the 13-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA-2015, Lodz, Poland, December 7-10, 2015. Lodz, 2015. P. 57-68.

46. Shmatko T., Bhaskar A. Geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells. *Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016:* Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016, Kharkov, Ukraine, September 27-30, 2016. Kharkiv, 2016. P. 485-492.

47. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells by the R-functions method. *Dynamical Systems: Theory and Applications*: Book of abstracts of the 14-th International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA 2017, Łódź, Poland, December 11-14, 2017. Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis. Lodz, 2017. V.2. P. 311-322.

48. Kurpa L., Shmatko T. Application of the R-functions method for

vibration and buckling analysis of functionally graded plates and shallow shells with complex planform. Literature review from 2014 to 2020. *Dynamics of hybrid systems of complex structures* / ed. Katica R. (Stevanovi´c) Hedrih. Belgrad, 2022. P. 237-261.

49. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Nonlinear Vibration of Functionally Graded Shallow Shells Resting on Elastic Foundations. *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara, W., Balachandran, B., Leamy, M.J., Ma, J., Tenreiro Machado, J.A., Stepan, G. Springer, Cham, 2022. P. 385-394. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_34

50. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J., Timchenko G. Nonlinear free vibration of functionally graded shallow shells with variable thickness resting on elastic foundation. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 191-201. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_17

51. Shmatko T., Kurpa L., Lacarbonara W. Nonlinear free vibrations of functionally graded porous sandwich plates with complex shape. *Advances in Nonlinear Dynamics, Volume I. ICNDA 2023. NODYCON Conference Proceedings Series* / eds. Lacarbonara W. Springer, Cham, 2024. P. 203-215. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50631-4_18

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

52. Kurpa L., Onufrienko O., Shmatko T. Research of the nonlinear forced vibrations of orthotropic plates with complex form. *Nonlinear Dynamics:* Book of abstracts of conference on Nonlinear Dynamics, Kharkiv, Ukraine, September 14-16, 2004. Kharkiv, 2004. P.50–51.

53. Курпа Л.В., Онуфрієнко О.Г., Шматко Т.В. Дослідження нелінійних коливань ортотропних пластин складної планформи за допомогою R–функцій. *Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові:* Тези доповідей 7-го Міжнародного симпозіума, Львів, Україна, 18-20 травня 2005р. Львів, 2005. С. 23.

54. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Исследование динамического поведения ортотропных пластин и пологих оболочек, опирающихся на план сложной. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. С. 264.

55. Шматко Т.В. Исследование устойчивости форм колебаний многослойных пологих оболочек. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2009:* Abstracts of the conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 27-29, 2009. Kyiv, 2009. С. 264.

56. Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пологих оболочек переменной толщины. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2011:* Abstracts of conference reports of the XV International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 25-27, 2011. Kyiv, 2011. С. 141.

57. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Шматко Т.В. Метод R-функций для исследования нелинейных колебаний ортотропных оболочек переменной толщины. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я*: Тези доповідей XIX міжнародної науково-практичної конференції, Харків, Україна, 01-03 червня 2011р. / за ред. проф. Товажнянського Л.Л. Харків: НТУ “ХПІ”, 2011. Ч.1. С. 53.

58. Шматко Т.В., Шматко А.В. Геометрически нелинейные колебания многослойных пластин с переменной толщиной слоев. *Dynamical System Modeling and Stability Investigation, DSMI-2013:* Abstracts of conference reports of the XVI International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Kyiv, Ukraine, May 29-31, 2013. Kyiv, 2013. С. 148.

59. Шматко Т., Шматко О. Нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини. *Сучасні проблеми механіки та математики:* Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 21-25 травня 2013р. / під ред. Р.М.Кушніра, Б.Й.Пташника. Інститут прикладних проблем

механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України. Львів, 2013. Т.2. С. 185-186.

60. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Нелінійні коливання функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною формою плану. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник праць IX Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 15-19 вересня 2014. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2014. С.363-365.

61. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex planform in thermal environments. *European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017:* Proceeding of the 9-th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2017, Budapest, Hungary, June 25-30, 2017. Budapest, 2017. P. 70-72.

62. Курпа Л., Шматко Т. Застосування теорії R-функцій для дослідження нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з урахуванням температурного середовища. *Сучасні проблеми механіки та математики*: Тези доповідей міжнародної конференції, Львів, Україна, 22-25 травня 2018р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018. Т. 1. С. 177-178.

63. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к исследованию свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек в температурной среде. *Динаміка, міцність та моделювання у машинобудуванні:* Тези доповідей I-й Міжнародної конференції, Харків, Україна, 10-14 вересня 2018р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 2018. С.134-135.

64. Шматко Т. Дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок методом R-функцій. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей II-ї міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В.І. Моссаковського, Дніпро, Україна, 10-12 жовтня 2019. Дніпро, 2019. С. 235.

65. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Free vibration analysis of FGM shell with complex planform in thermal environments. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracts of 15th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2019, Lodz, Poland, December 2-5, 2019. Lodz, 2019, P. 207.

66. Курпа Л., Шматко Т. Вільні коливання багатошарових циліндричних панелей з функціонально-градієнтними шарами. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур:* Збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 17-19 вересня 2019р. Львів, 2019. С. 61.

67. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Research of stability and nonlinear vibrations of sandwich plates with functionally graded core by Ritz's method and the R-functions theory. *Symposium "Nonlinear dynamics –scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih":* Booklet of abstracts Symposium "Nonlinear dynamics – scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanović) Hedrih", Belgrade, Serbia, September 04-06, 2019. Belgrade, 2019. P. 19-20.

68. Kurpa L., Shmatko T., Awrejcewicz J. Parametric vibrations of the functionally graded sandwich plates with complex form. *Nonlinear Dynamics NODYCON 2019:* Book of abstract of the First International Nonlinear Dynamics Conference NODYCON 2019, Rome, Italy, February 17-20, 2019. Rome, 2019. P.409-410.

69. Шматко Т.В. Исследование свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек на упругом основании. *Dynamics, Strength and Modelling in Mechanical Engineering:* Theses of the Second International Science and Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, October 05–08, 2020. ІПМаш НАН України, Харків, 2020. С. 310-313.

70. Shmatko T. Effect of porosity on free vibration of FG shallow shells with complex plan form. *Dynamical Systems: Theory and Applications:* Book of abstracts of 16th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications DSTA 2021, Lodz, Poland, December 6-9, 2021. Lodz, 2021. P. 629-630.

71. Курпа Л., ШматкоТ., Лінник Г. Аналіз стійкості та коливань пористих функціонально-градієнтних пластин з використанням теорії R-

функцій. *Сучасні проблеми механіки та математики:* Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 23-25 травня 2023р. Львів, 2023. С.194.

72. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Згин та коливання функціонально-градієнтних пористих сендвіч пологих оболонок з отворами та вирізами. *Actual problems of mechanics – 2023:* Proceedings of International scientific conference dedicated to the 145-th anniversary of the birth of S.P.Timoshenko, Kyiv, Dnipro, Lviv, Kharkiv, Ukraine, November 14-16, 2023. Kharkiv, 2023.С. 420-421.

73. Курпа Л, Шматко Т., Лінник Г., Морачковська І. Вільні коливання сендвіч пластин з ауксетичним сотовим заповнювачем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції, Львів, Україна, 24-26 вересня 2024р. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. С. 101-102.

Монографії

74. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Застосування теорії R-функцій до розв'язання нелінійних задач динаміки багатошарових пластин: монографія. Харків: ООО «В деле», 2016. 492 с.

ДОДАТОК Б

ЗАТВЕРДЖУЮ

ПРОРЕКТОР З НАУКОВОЇ РОБОТИ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ "ХАРКІВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

__________ А.П. Марченко

20 грудня 2024 р.

АКТ

із застосування розробок та результатів досліджень дисертаційної роботи
Шматко Тетяни Валентинівни

Розробки та результати дисертаційної роботи Тетяни Валентинівни Шматко були використані при виконані держбюджетних тем: "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних та нелінійних задач механики для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти та науки України (№ 960 від 22.12.2004), ДР №0105U000573 (в період з 2005р. по 2007р); "Створення на базі теорії R-функцій методів розв'язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№ 1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.); "Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багатошарових пластин та пологих оболонок" згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту Українч (№1177, від30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.), а також на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ" у навчальному процесі при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики".

Завідувач кафедри
прикладної математики НТУ "ХПІ",
к.т.н., проф. В'ячеслав БУРЛАЄНКО

Ганна ЛІННИК

Директор Навчально-наукового
інституту комп'ютерного моделювання,
прикладної фізики та математиги НТУ "ХПІ",
д.т.н., проф. Олексій ЛАРІН

ЗАТВЕРДЖУЮ

ПРОРЕКТОР З НАУКОВОЇ РОБОТИ НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

_____________ А.П. Марченко

20 грудня 2024 р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів досліджень дисертаційної роботи
Шматко Тетяни Валентинівни

Наукові результати дисертаційної роботи Тетяни Валентинівни Шматко на тему "Математичне моделювання та розробка чисельно-аналітичних методів дослідження функціонально-градієнтних пологих оболонок та пластин з використанням теорії R-функцій", а саме методи та алгоритми обчислення власних значень та власних функцій задач про власні коливання функціонально-градієнтних пластин та пологих оболонок довільної геометричної форми плану та різними граничними умовами знайшли успішне застосування при виконанні науково-дослідної роботи «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій» за проектом Програми НАТО «Наука заради миру та безпеки», виконавцем якої вона була згідно договору М/98-2024 від 28.06.2024 р.

Завідувач кафедри
прикладної математики НТУ "ХПІ",
к.т.н., проф. В'ячеслав БУРЛАЄНКО

Ганна ЛІННИК

Директор Навчально-наукового
інституту комп'ютерного моделювання,
прикладної фізики та математики НТУ "ХПІ",
д.т.н., проф. Олексій ЛАРІН

ДОДАТОК В

КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ RFM ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗГИНУ, ЛІНІЙНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ФГМ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ВХІДНІЙ МОВІ ПРОГРАМУЮЧОЇ СИСТЕМИ POLE-RL

В.1 Загальні відомості про вхідну мову системи POLE-RL

Програмуюча система POLE-RL була створена академіком НАН України В.Л. Рвачовим та його учнем проф. О.М. Шевченко. Детальний опис цієї системи представлено в монографії [288]. Система POLE-RL надає широкі можливості для розв'язку крайових задач математичної фізики, що моделюються диференціальними рівняннями з частинними похідними. Система призначена для реалізації варіаційних методів у сполученні з теорією R-функцій. Користувач цієї системи повинен задавати вихідну інформацію спеціальною вхідною мовою RL. При складанні програми вхідною мовою RL необхідно пам'ятати, що оператори вхідної мови об'єднуються в розділи, які розташовані у такому порядку:

1) розділ описів **DECLARE**;
2) розділи для завдання геометричної інформації й структури розв'язку **FUNCTION, OMEGA**;
3) розділ **PROGRAM**;
4) розділ значень **VALUE.**

У розділі описів класифіковані змінні, які зустрічаються в тексті наступних розділів. Цей розділ може виглядати таким чином:

DECLARE

BANDX F1; BANDY F2; LINE F3;

CIRCL F4; ELLYX F5; ELLYY F6;

Тут BANDX F1 – смуга, розташована паралельно осі абсцис півшириною a, центр якої визначається абсцисою $x = x_0$. У розділі VALUE змінна F1 визначається як $F1 = x_0, a$;

BANDY F2 – смуга, розташована паралельно осі ординат, центр якої визначається ординатою $y = y_0$, півширина b. У розділі VALUE змінна F2 визначається як : $F2 = y_0, b$;

LINE F3 – півплощина, розташована ліворуч від орієнтованої прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ й $B(x_2, y_2)$. Представлення інформації для такої прямої в розділі VALUE має вигляд: $F3 = x_1, y_1, x_2, y_2$;

CIRCL F4 – частина площини, розташована в середині кола радіусом R із центром у точці x_0, y_0. Ця змінна у розділі VALUE має вигляд: $F4 = x_0, y_0, R$;

ELLYX F5 – частина площини, розташована в середині еліпса, більша вісь якого $2a$ паралельна осі абсцис, менша $2b$ паралельна осі ординат і центр знаходиться в точці x_0, y_0. У розділі VALUE інформація про еліпс записується як: $F5 = x_0, y_0, a, b$;

ELLYY F6 – частина площини, розташована в середині еліпса $(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1$. У цьому випадку змінна F6 у розділі VALUE представляється як: $F6 = x_0, y_0, a, b$.

У розділі DECLARE також описується повна система функцій $\{\varphi_i\}$ у вигляді SF P (степеневі поліноми), SFTH P (поліноми Чебишева), SPLI (сплайни), яку обрано для апроксимації невизначених компонент структури розв’язку. У розділі VALUE для змінної P необхідно вказати прямокутник, описаний навколо заданої області Ω. Це завдання здійснюється так: $P = k, x_1, y_1, x_2, y_2$, де k – номер полінома; (x_1, y_1) – координати лівої нижньої вершини прямокутника, (x_2, y_2) – координати правої верхньої вершини цього прямокутника.

У розділах OMEGA задається геометрична інформація про форму області й ділянки її границь у вигляді логічних формул, наприклад, функція $\omega = (F_1 \wedge F_2) \wedge ((F_3 \wedge F_4) \vee (F_5 \wedge F_6))$ на мові RL, буде мати наступний вигляд: $\omega = (F_1 \&_2) \& ((F_3 \& F_4)!(F_5 \& F_6))$.

У розділах FUNCTION задаються структурні формули шуканого розв'язку задачі у вигляді математичних формул, описуються функції, які уявляють власні вектори, прогин та інші.

У розділі PROGRAM задається система Рітца або Гальоркіна за допомогою спеціальних операторів та функцій. Обчислення подвійних інтегралів виконується за допомогою операторів gauss(s1,fa,fb); або gausp(s1,fa,fb); а обчислення контурних інтегралів - за допомогою операторів gil(s2,fbk1); gic(s2,fbk1). У дужках команди gauss вказано область інтегрування s1 та вигляд лівої fa та правої частин fb матриці Рітца. Інформація для s1 задається в розділі VALUE у вигляді s1=к,а1,в1,а2,в2;, к-вказує на порядок формул Гауса, а наступні значення а1,в1,а2,в2 описують значення прямокутника, в якому відбувається інтегрування. Для оператора gausp, який виконує інтегрування у полярній системі координат змінна s1 задається як s1=к,x0,y0, Rad, а1,в1,а2,в2.

При розв'язанні нелінійних задач необхідно запам'ятати коефіцієнти, які визначають власні функції. За допомогою оператора mwko(rk1) масив rk1 визначає місце для запису власного вектору і задається у блоці VALUE.

У проблемно-орієнтованій мові RL і системі POLE-RL є широкий набір засобів візуалізації результатів. Різні інтегральні й диференціальні характеристики, що задаються у вигляді аналітичних формул, можуть бути показані на моніторі у вигляді таблиць, графіків, картин ліній рівня, аксонометричних побудов.

Для перегляду результатів розрахунків у системі POLE-RL використовується наступні оператори:

Filexy (pr, Fun), де змінна pr = nx,X_{min},Y_{min},$X_{max,}$$Y_{max}$ - прямокутник, що містить задану область, X_{min},Y_{min} – координати його нижньої лівої вершини; $X_{max,}$$Y_{max}$ – координати його правої верхньої вершини, nx – число розбивок області на елементарні прямокутники. Для практичних досліджень досить покласти nx=20 або 30. Інформація про цю змінну задається у розділі VALUE; Fun – аналітичний вигляд досліджуваної функції, який повинно бути представленим у розділі PROGRAM. Оператор Filexy (pr, Fun) створює файли з розширенням .3m, для перегляду яких досить натиснути Enter. Цей оператор підключає до робочої програми діалогову графічну систему, що дозволяє проводити побудову аксонометричних проекцій, креслити картини ліній рівня функції, будувати графіки у різних перетинах; можливий запис графічної інформації у файл.

Записана в зовнішній пам'яті графічна й числова інформація може бути оброблена спеціальною системною програмою DEMO.

Нижче наведені приклади вхідних програм, записаних на мові POLE-RL, які було створено для задач про власні коливання ФГМ пластин та пологих оболонок.

В.2. Лінійні коливання ФГМ оболонки для різних схем укладання шарів та Типів розподілення об'ємної частки кераміки в рамках теорії FSDT з урахуванням пористості та пружної основи

Коментар міститься між символами: > coment;

```
declare
corteg lk;
pol0 nu1,nu2,EC,EM,num,nuc, EC_b,EM_b,kp1,alfa,
kr1,kr2,ka42,a,b,h0,Rom,Roc, N_L,alf_th,bet_th
ka52,ro,KW, KG;
sf p1,p2,p3,p4,p5;
sf0 p01,p02,p03,p04,p05;
>Declare of the auxilary subdomains;
bandy f1;  bandx f2,f4;Mbandy f3;mcircl f5,f6;
omega
w=(f3!f4)&(f5&f6)&(f1&f2);
function
ficp=nu1;
function
pi=3.1415926536;
```

```
h=h0*(1-alf_th*(x**2));> якщо змінна товщина, parabolic law;
h2=h*h; h3=h*h*h; nufg=num;
dom2=1/(1-num*num); dom1=(1+num);
>**********************************************************;
 >   1 layer  FGM, top-ceramic, bottom-metal;
>**********************************************************;
>h1s=h/2;>h2s=h/2;
>*********************************************************;
> Definition values h1s and H2s для сендвіч об’єктів;
ZN=2*(N_L+2); > для схеми n-1-1; >h1s=h*(N_L-2)/ZN; >  h2s=h*N_L/ZN;
>для схеми 1-n-1; h1s=-h*N_L/ZN;  h2s=h*N_L/ZN;
        >для схеми  1-1-n; >h1s=-h*N_L/ZN; >h2s=h*(2-N_L)/ZN;
>************************************;
>1- 1-type,  FGM-Ceramic-FGM;
>************************************************************;
> law is (Ec-Em)Vc**p+Em-(Ec+Em)Vc*1 *alfa/2;
> alfa - коефіцієнт пористості, який задається у блоці »Value»;
hc=h2s-h1s; hf=(h-hc)/2;
h1s_2=h1s*h1s; h2s_2=h2s*h2s;
h1s_3=h1s_2*h1s; h2s_3=h2s_2*h2s;
as1=h1s+h/2; as1_2=as1*as1; as1_3=as1_2*as1;
as2=h2s-h/2; as2_2=as2*as2;as2_3=as2_2*as2;
RoCM=Roc-RoM; ECM=EC-EM;
ECM_S=(EC+EM)*alfa/2;
RoCM_s=(RoM+ROC)*alfa/2;
>Porosity 1, Even porosity ;
>E1=dom2* (Em*H+Ecm* (h+kp1*hc)/(kp1+1) -ECM_s*(h+h1s-h2s)) ;
>E2=dom2*(Ecm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) -ECM_s*(h1s_2-h2s_2 )/2 );
>E3=dom2*( ECM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
```

```
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Em*h3/12 -ECM_s*(h1s_3-h2s_3+h3/4)/3);
>I0= (Rom*H+Rocm* (h+kp1*hc)/(kp1+1)-Rocm_s*(h+h1s-h2s));
>I1=Rocm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) -Rocm_s*(h1s_2-h2s_2)/2 ;
>I2= RoCM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Rom*h3/12 -RoCM_s*(h1s_3-h2s_3+h3/4)/3;
>Porosity (uneven);
>NEW P_EI ZENC;
P_E1=(H+H1S-H2S)/2;
P_E2=(h1s+h2s)*(h1s-h2s+h/12)/3;
P_E3= ( (h1s_3+h3/8)/3-(as1_3+as2_3)/4+
(2*as1_2*h1s-as2_2*h)/3-(as1*h1s_2+as2*h2/4)/2);
E1=dom2* (Em*H+Ecm* (h+kp1*hc)/(kp1+1) )-
dom2*ECM_s*P_E1;
E2=dom2*(Ecm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) )-dom2*ECM_s*P_E2;
E3=dom2*( ECM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Em*h3/12) -dom2* ECM_S*P_E3;
I0= (Rom*H+Rocm* (h+kp1*hc)/(kp1+1))-
RoCM_s*P_E1 ;
I1=Rocm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) - RoCM_s* P_E2;
I2= ( RoCM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Rom*h3/12 ) - RoCM_s* P_E3;
>Обчислення ефективних властивостей ФГМ сендвіч об’єктів;
AC1_s=E1;AC12_s=nufg*E1; AC16_s=0;
```

```
AC2_s=E1; AC26_s=0; AC6_s=E1*(1-nufg)/2;
AK1_s=E2; AK12_s=nufg*E2; Ak16_s=0;
AK2_s=E2; AK26_s=0; AK6_s=E2*(1-nufg)/2;
AD1_s=E3;AD12_s=nufg*E3; AD16_s=0;
AD2_s=E3; AD26_s=0; AD6_s=E3*(1-nufg)/2;
kvc2=1;
>*******************************************;
Function >структури розв'язку;
help1=kvc2; u0=0; v0=0; Ftx0=0; Fty0=0; Wp0=0;
om=w; wx=dx(om);wy=dy(om);
>clamped vezde;
omw=om; omu=om; omv=om; omfx=omu; omfy=omv;
> структура для граничних умов clamped sharnir;
 >omu=f2; >omv=f1;>square;
Ftx=p01#p02#p03#omfx*p4#p05;
Fty=p01#p02#p03#p04#omfy*p5;
Wp=omw*p1#p02#p03#p04#p05;
u1=p01#omu*p2#p03#p04#p05;
v1=p01#p02#omv*p3#p04#p05;
str1=1;
function
>Обчислення власних векторів після розв'язку системі Рітца;
rvs=str1; vr=sum(1,0,v1); Wpr=sum(1,0,Wp); Ftyr=sum(1,0,Fty);
Ftxr=sum(1,0,Ftx);ur=sum(1,0,u1); uu=1; end
>*************** PROGRAM *******************;
program
>an eigenvalue problem (linear);
        gauss(s1,fa1,fb1);  val;  stv(1); wv(lk);
 mwko(rk1); >koef;> filexy(ll1,wur);
title('first dimensionless frequency'); tabp(ss1,fs1);
```

```
title(' frequency'); tabp(ss1,fs2);
>stv(2); >wv(lk);   >mwko(rk2); >koef;> filexy(ll1,wur);
>title('second dimensionless frequency');> tabp(ss1,fs1);
title('  frequency'); >tabp(ss1,fs2);
>stv(3); >wv(lk); >mwko(rk3); >koef; >filexy(ll1,wur);
>title('dimensionless frequeny');> tabp(ss1,fs1);
>title(' frequency'); >tabp(ss1,fs2);
>**************** end of the block  program ******************;
>Declare printed elements, using in block program;
> Формули для представлення результатів власних частот;
lm2=sqrt(lk*12*(1-nufg*nufg)*roc/ec)/h0/pi**2;
lm1=sqrt(lk*rom/EM)*h0;
lambda=12*(1-nufg*nufg);
fs1(ficp)=lm1; fs2(ficp)=lm2; fww(uu)=wpr(1)*wpr(1);
>Formulas for RESULTS; fw(w)=w; >fw(v1)=om;
fomv(str1)=omv; fomu(str1)=omu; wur(uu)=wpr(1);
>Declare elements of matrix in block Program;
>******************************************;
e11i=u1(i,2)+kr1*wp(i,1); e11j=u1(j,2)+kr1*wp(j,1);
e22i=v1(i,3)+kr2*wp(i,1); e22j=v1(j,3)+kr2*wp(j,1);
e12i=v1(i,2)+u1(i,3); e12j=v1(j,2)+u1(j,3);
f11i=ftx(i,2); f22i=fty(i,3); f11j=ftx(j,2); f22j=fty(j,3);
f12i=ftx(i,3); f21i=fty(i,2); ffsi=f21i+f12i;
f12j=ftx(j,3); f21j=fty(j,2); ffsj=f21j+f12j;
Nxi=AC1_s*e11i+AC12_s*e22i+AC16_s*e12i+
Ak1_s*f11i+Ak12_s*f22i+ak16_s*ffsi;
Nxj=AC1_s*e11j+AC12_s*e22j+AC16_s*e12j+
Ak1_s*f11j+Ak12_s*f22j+ak16_s*ffsj;
Nyi=AC12_s*e11i+AC2_s*e22i+AC26_s*e12i+
Ak12_s*f11i+Ak2_s*f22i+ak26_s*ffsi;
```

```
Nyj=AC12_s*e11j+AC2_s*e22j+AC26_s*e12j+
Ak12_s*f11j+Ak2_s*f22j+ak26_s*ffsj;
Nxyi=AC16_s*e11i+AC26_s*e22i+Ac6_s*e12i+
Ak16_s*f11i+Ak26_s*f22i+ak6_s*ffsi;
Nxyj=AC16_s*e11j+AC26_s*e22j+Ac6_s*e12j+
Ak16_s*f11j+Ak26_s*f22j+ak6_s*ffsj;
Mxi=Ad1_s*f11i+Ad12_s*f22i+AD16_s*ffsi+
Ak1_s*e11i+Ak12_s*e22i+ak16_s*e12i;
Mxj=Ad1_s*f11j+Ad12_s*f22j+AD16_s*ffsj+
Ak1_s*e11j+Ak12_s*e22j+ak16_s*e12j;
Myi=Ad2_s*f22i+Ad12_s*f11i+AD26_s*ffsi+
Ak12_s*e11i+Ak2_s*e22i+ak26_s*e12i;
Myj=Ad2_s*f22j+Ad12_s*f11j+AD26_s*ffsj+
Ak12_s*e11j+Ak2_s*e22j+ak26_s*e12j;
MXYi=AD16_s*f11i+AD26_s*f22i+ Ad6_s*ffsi+
Ak16_s*e11i+Ak26_s*e22i+ak6_s*e12i;
MXYj=AD16_s*f11j+AD26_s*f22j+ Ad6_s*ffsj+
Ak16_s*e11j+Ak26_s*e22j+ak6_s*e12j;
e13i=wp(i,2)+ftx(i,1); e13j=wp(j,2)+ftx(j,1);
e23i=wp(i,3)+fty(i,1);  e23j=wp(j,3)+fty(j,1);
QXi=ka42*E1*(1-nufg)/2*e13i; QXj=ka42*E1*(1-nufg)/2*e13j;
Qyi=ka42*E1*(1-nufg)/2*e23i; Qyj=ka42*E1*(1-nufg)/2*e23j;
>Matr RITZ for linear problem of an eigenvalue problem;
>коефіцієнти пружної основи kwr, kgr;
kwr=KW*EM_B*h0**3/((2*b)**4)/(12*(1-nu1*nu2));
kgr=KG*EM_B*h0**3/((2*b)**2)/(12*(1-nu1*nu2));
kgr=KG*EM_B*h3/((2*b)**2);
>Елементи матриць в системі Рітца;
fa1(str1)= 0.5*(Nxi*e11j+Nxj*e11i+Nyi*e22j+Nyj*e22i+
 Nxyi*e12j+Nxyj*e12i+Mxi*ftx(j,2)+Mxj*ftx(i,2)+
```

```
Myi*fty(j,3)+Myj*fty(i,3)+Mxyi*ffsj+Mxyj*ffsi+
 Qxi*e13j+Qxj*e13i+ Qyi*e23j+Qyj*e23i)+
kwr*wp(i,1)*wp(j,1)+kgr*(wp(i,2)*wp(j,2)+wp(i,3)*wp(j,3)) ;
fb1(str1)=I0*(u1(i,1)*u1(j,1)+v1(i,1)*v1(j,1)+Wp(i,1)*wp(j,1))+
        I1*(u1(i,1)*ftx(j,1)+u1(j,1)*ftx(i,1)+v1(i,1)*fty(j,1)+v1(j,1)*fty(i,1))+
I2*(ftx(i,1)*ftx(j,1)+fty(i,1)*fty(j,1));
aa=ai(1); bb=bi(1);
>*******************************************;
fortran
      subroutine tabp(iu,f)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /arg/ x,y
      common /array/ st(30000)
      common /fix/ inf(301)
      common /an/ in(300)
      common /gau/ k,kdummy,t(8),a(8)
100   format (10x,4h sq=,e23.16,4h  k=,i4)
      n=in(iu)
      i=inf(iu)
      do 10 j=1,n,2
      ij=i+j
      x=st(ij)
      y=st(ij+1)
      r=f(x,y)
      kk=k-1
10    print 100,r,kk
      write (5,100) r,kk
      return
      end
end
```

```
>******************************************;
value
const=5,1,1,5,5200,2,1;
>tabl=nw,1,1,2,2,nu,1,1,1,2,nv,1,2,1,2,nfx,1,1,1,2,nfy,1,2,1,2,  0,1,5,0,0 ;
tabl=nw,1,1,1,2,nu,1,1,1,2,nv,1,2,1,2,nfx,1,1,1,2,nfy,1,2,1,2,  0,1,5,0,0;
nu=8;nv=nu; nfx=nu; nfy=nv; nw=9;
pr=0,-b,a2,b; a=0.5;  b=0.5;a2=1;
 >am=a-d;>ap=a+d; c=0.4;d=0.2; rad=0.15; am=0.3; ap=0.7;
f1=a,a; f2=0,b; f3=a,d;f4=0,c; f5=a2,0,rad; f6=0,0,rad;
k_int=3;
s1=k_int,0,0,am,b,am,0,ap,c,ap,0,a2,b;
s31=5,a,-b,a,b; s32=5,0,-b,0,b; s33=5,-a,b,a,b;s34=5,-a,0,a,0;
p1=1,pr; p2=2,pr; p3=3,pr; p4=4,pr; p5=5,pr;
p01=1; p02=2; p03=3; p04=4; p05=5;
rk1=1,1,1; rk2=1,1,1; rk3=1,1,1;
ss1=0.5,0, 0.49999, 0.49999;    ro=1;
ll1=250,pr; svid=5,5,0,-b,a2,b;sfv=kx,-a,a; kx=21; ssfy=3,21,pr;
>****Material properties of constituent FGM****;
>Isotropic;
>e1=1; >e2=1; >g12=0.38461; >g13=0.38461; >g23=0.38461;
>nu1=0.3; >nu2=0.3;
>**FGM***Al/Al2O3*****************************;
nu1=0.3; nu2=0.3;num=0.3; nuc=0.3;
EM=70;EC=380;  RoM=2707; RoC=3800;
>*****************************************;
g13=0.5; g23=0.5;g12=0.6; ka42=0.833333;> 5/6;
> ka42=0.8224185;>pi**2/12;    ka52=ka42;
kp1=2; >градієнтний індекс;
N_L=2; kr1=0.2;  kr2=0; >кривини оболонки;
h0=0.1; > загальна товщина оболонки;
```

```
KW=10;Kg=50; alfa=0.3;
EM_b=EM;  RoM_b=RoM;   EC_b=Ec;>t=300;
>alf_th=(0.15,0.25,0.5); >bet_th=(0,0.15,0.25);
>bet_th=0.5; bet_th=0; alf_th=0.5; > параметри для завдання закону зміни товщини;
End
```

В.3 Нелінійні коливання сендвіч ФГМ пологих оболонок змінної товщини зі складною формою плану з урахуванням пористості та пружної основи

```
declare
corteg lk;
pol0 nu1,nu2,EC,EM,num,nuc, EC_b,EM_b,kp1,alfa,
kr1,kr2,ka42,a,b,h0,Rom,Roc, N_L,alf_th,bet_th,
ka52,ro,KW, KG;
pol0 wmax,w02,wnorm2;
sf  p1,p2,p3, p4,p5; sf0 p01,p02,p03,p04,p05;
>Declare of the auxilary subdomains;
bandy f1;  bandx f2,f4;Mbandy f3; mcircl f5,f6;
omega
>w=f1&f2; w=(f3!f4)&(f5&f6)&(f1&f2);
function
ficp=nu1;
>Calculation of the koefficients regity;
function
pi=3.1415926536; h=h0*(1-alf_th*(x**2));> parabolic law;
>h=h0*(1-alf_th*x)*(1-bet_th*y);> bi-linear law;
>h=h0; h2=h*h;h3=h*h*h;
nufg=num;
dom2=1/(1-nufg*nufg); dom1=(1+nufg);
```

```
RoCM=Roc-RoM; ECM=EC-EM;EcM_S=(EC+EM)*alfa/2;
RoCM_s=(RoM+ROC)*alfa/2;
>***************************************************************;
>   1 layer  FGM, top-ceramic, bottom-metal;
>*************************************************************;
>h1s=h/2; >h2s=h/2; > single layer;
>***********************************************************;
>Для сендвіч оболонок h1s, h2s границі середнього шару;
hc=h2s-h1s; hf=(h-hc)/2;
ZN=2*(N_L+2);
 >N_L  n-1-1; >h1s=h*(N_L-2)/ZN; >  h2s=h*N_L/ZN;
  >N_L  1-n-1; h1s=-h*N_L/ZN;  h2s=h*N_L/zn;
  >N_L  1-1-n; >h1s=-h*N_L/ZN; >h2s=h*(2-N_L)/ZN;
>**********************************;
>1- 1-type,  FGM-Ceramic-FGM ;
>*********************************************************;
> law is (Ec-Em)Vc**p+Em-(Ec+Em)Vc*1 *alfa/2;
hc=h2s-h1s; hf=(h-hc)/2;
h1s_2=h1s*h1s; h2s_2=h2s*h2s;
h1s_3=h1s_2*h1s; h2s_3=h2s_2*h2s;
as1=h1s+h/2; as1_2=as1*as1; as1_3=as1_2*as1;
as2=h2s-h/2; as2_2=as2*as2;as2_3=as2_2*as2;
RoCM=Roc-RoM; ECM=EC-EM;
ECM_S=(EC+EM)*alfa/2;
RoCM_s=(RoM+ROC)*alfa/2;
>Porosity  ( even);
>E1=dom2* (Em*H+Ecm* (h+kp1*hc)/(kp1+1) -ECM_s*(h+h1s-h2s)) ;
>E2=dom2*(Ecm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) -ECM_s*(h1s_2-h2s_2 )/2 );
>E3=dom2*( ECM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
```

```
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Em*h3/12 -ECM_s*(h1s_3-h2s_3+h3/4)/3);
>I0= (Rom*H+Rocm* (h+kp1*hc)/(kp1+1)-Rocm_s*(h+h1s-h2s));
>I1=Rocm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) -Rocm_s*(h1s_2-h2s_2)/2 ;
>I2= RoCM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Rom*h3/12 -RoCM_s*(h1s_3-h2s_3+h3/4)/3;
>Porosity (uneven);
> NEW P_EI ZENC;
P_E1=(H+H1S-H2S)/2; P_E2=(h1s+h2s)*(h1s-h2s+h/12)/3;
P_E3= ( (h1s_3+h3/8)/3-(as1_3+as2_3)/4+
(2*as1_2*h1s-as2_2*h)/3-(as1*h1s_2+as2*h2/4)/2);
E1=dom2* (Em*H+Ecm* (h+kp1*hc)/(kp1+1) )-
dom2*ECM_s*P_E1;
E2=dom2*(Ecm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) )-dom2*ECM_s*P_E2;
E3=dom2*( ECM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Em*h3/12) -dom2* ECM_S*P_E3;
I0= (Rom*H+Rocm* (h+kp1*hc)/(kp1+1))- RoCM_s*P_E1 ;
I1=Rocm*((h2s_2-h1s_2)/2+(as1_2-as2_2)/(kp1+2)-
h*(as1+as2)/2/(kp1+1)) - RoCM_s* P_E2;
I2= ( RoCM*(  (as1_3-as2_3)/(kp1+3)-
h*(as1_2+as2_2)/(kp1+2) +h2*(as1-as2)/4/(kp1+1)+
(h2s_3-h1s_3)/3)+Rom*h3/12 ) -RoCM_s* P_E3;
>*****************************************************;
AC1_s=E1;AC12_s=nufg*E1; AC16_s=0;
AC2_s=E1; AC26_s=0; AC6_s=E1*(1-nufg)/2;
AK1_s=E2; AK12_s=nufg*E2; Ak16_s=0;
```

```
AK2_s=E2; AK26_s=0; AK6_s=E2*(1-nufg)/2;
AD1_s=E3;AD12_s=nufg*E3; AD16_s=0;
AD2_s=E3; AD26_s=0; AD6_s=E3*(1-nufg)/2;
A44=Ac6_s;
kvc2=nu1;
function
help1=kvc2; u0=0; v0=0; om=w; Ftx0=0; Fty0=0; Wp0=0;
om=w; wx=dx(om);wy=dy(om);
>clamped vezde; omw=om; omu=om; omv=om;
>clamped sharnir; >omu=f2; >omv=f1;   > f2_bandx, f1_bandy;
omfx=omu; omfy=omv;
>Структури розв'язку;
Ftxn=p01#p02#p03#omu*p4#p05; Ftyn=p01#p02#p03#p04#omv*p5;
u1n=p01#(omu*p2)#p03#p04#p05; v1n=p01#p02#(omv*p3)#p04#p05;
w1=(omw*p1)#p02#p03#p04#p05;
function
uw1s=sum(1,0,w1); ufx1s=sum(1,0,ftxn); ufy1s=sum(1,0,ftyn);
     uu1s=sum(1,0,u1n);      uv1s=sum(1,0,v1n);
function
>Creating of right part For elasticity problem;
>STR for elasticity problem;
help1=kvc2; rrr=uv1s; om=w;
omx=dx(om); omx2=omx*omx; omy=dy(om); omy2=omy*omy;
omxy=omx*omy; romxy2=omx2-omy2;
ruv1s=uv1s; ruw1s=uw1s;ruu1s=uu1s;
rftx1=ufx1s; rfty1=ufy1s; w1x=dx(ruw1s); w1y=dy(ruw1s);
w1x2=w1x*w1x;  w1y2=w1y*w1y;
w1xw1y=w1x*w1y; w1xx=dx(w1x);w1yy=dy(w1y); w1xy=dx(w1y);
u1sx=dx(ruu1s); u1sy=dy(ruu1s); v1sx=dx(ruv1s); v1sy=dy(ruv1s);
e11L1=dx(ruu1s)+kr1*ruw1s; e22L1=dy(ruv1s)+kr2*ruw1s;
```

```
e12L1=dx(ruv1s)+dy(ruu1s);
x11=dx(rftx1); x22=dy(rfty1); x12=dy(rftx1)+dx(rfty1);
N11L1=Ac1_s*e11L1+Ac12_s*e22L1+(Ak1_s*x11+Ak12_s*x22);
N22L1=Ac12_s*e11L1+Ac2_s*e22L1+ Ak12_s*x11+Ak2_s*x22;
N12L1=Ac6_s*e12L1+ Ak6_s*x12;
NXN11=0.5* (ac1_s*w1x2+ac12_s*w1y2);
NyN11=0.5*(ac12_s*w1x2+ac2_s*w1y2);Nxy11=ac6_s*w1xw1y;
MXN11=0.5* (Ak1_s*w1x2+Ak12_s*w1y2);
MyN11=0.5* (Ak12_s*w1x2+Ak2_s*w1y2);Mxy11=Ak6_s*w1xw1y;
NL1w1=(dx(NxN11)+dy(Nxy11) ) ;NL2w1=(dx(Nxy11)+dy(NyN11) ) ;
NL3w1=(dx(MxN11)+dy(Mxy11) ) ;NL4w1=(dx(Mxy11)+dy(MyN11) ) ;
sigm1=NxN11*omx2+NyN11*omy2+2*Nxy11*omxy;
ST1=Nxy11*(omx2-omy2)+(Nyn11-NxN11)*omxy;
MNB=MxN11*omx2+MyN11*omy2+2*Mxy11*omxy;
MNBT=Mxy11*(omx2-omy2)+(Myn11-MxN11)*omxy;
> Structure for elasticity problem;
u0=0; v0=0;
>not movible edge, or clamped edge;
omw=om;
omu=om; omv=om; omfx=omu; omfy=omv;
u1=omu*p2#p03#p04#p05; v1=p02#p3*omv#p04#p05;
ftx=p02#p03#omfx*p4; fty=p02#p03#p04#omfy*p5;
v1ter=1;
end
function
ruvr=v1ter;
v11=sum(2,0.0,v1); u11=sum(2,0.0,u1);
ftx11=sum(2,0.0,ftx); fty11=sum(2,0.0,fty);
>for results;
exr=dx(u11)+w1x2/2; eyr=dy(v11)+w1y2/2;
```

```
exyr=dy(u11)+dx(v11)+w1xw1y;
x11_2=dx(ftx11); x22_2=dy(fty11); x12_2=dy(ftx11)+dx(fty11);
Nxr=AC1_s*exr+AC12_s*eyr+(Ak1_s*x11_2+Ak12_s*x22_2);
Nyr=AC12_s*exr+AC2_s*eyr+(Ak12_s*x11_2+Ak2_s*x22_2);
Nxyr=Ac6_s*exyr+ Ak6_s*x12_2;
e11L_2=dx(u11);e22L_2=dy(v11);e12L_2=dy(u11)+dx(v11);
N11L_2=Ac1_s*e11L_2+Ac12_s*e22L_2+(Ak1_s*x11_2+Ak12_s*x22_2);
N22L_2=Ac12_s*e11L_2+Ac2_s*e22L_2+Ac26_s*e12L_2+
    (Ak12_s*x11_2+Ak2_s*x22_2+2*Ak26_s*x12_2);
N12L_2=Ac6_s*e12L_2+ Ak6_s*x12_2;
F1y2_V=ka42*Ac6_s*(x11_2+x22_2)+
N11L1*w1xx+N22L1*W1yy+2*N12L1*w1xy;
F1y3_v=Nxr*w1xx+Nyr*W1yy+2*Nxyr*w1xy;
wmax2=wmax*wmax;
mk1=-h0*h0/(w02*wnorm2*wmax2*I0); >proba;
mk= h0 /(w02*wnorm2*wmax*I0); w0L=sqrt(w02);
cond=1; end
>*****************************************;
```

Program

```
>title(' the first form of the vibration');
 mrko(rk1);> зчитування коефіцієнтів koef;
title(' Norm_W'); gauss(s1,fw11); pint;
>reshenie zadachi teorii uprugosti s NELIN pravoy chast'u;
> 1-problem;
ama; >maz; gauss(s1,fauv,fbw11);  gil(skon,fbk_1); >matr;
sis(aa,bb);>koef; title ('koef at y1^2'); gauss(s1,F1y2); pint;
title ('koef at y1^3'); gauss(s1,F1y3); pint;
>opisanie RESULTS FOR VIDACHI;
fom(w)=w;
>Declare of matrix elements of the elasticity problem;
```

```
Npr1(v1ter)=NL1w1; NPR2(v1ter)=NL2w1;
e11i=u1(i,2); e11j=u1(j,2); e22i=v1(i,3); e22j=v1(j,3);
e12i=v1(i,2)+u1(i,3); e12j=v1(j,2)+u1(j,3);
f11i=ftx(i,2); f22i=fty(i,3); f11j=ftx(j,2); f22j=fty(j,3);
f12i=ftx(i,3); f21i=fty(i,2); ffsi=f21i+f12i;
f12j=ftx(j,3); f21j=fty(j,2); ffsj=f21j+f12j;
Nxi=AC1_s*e11i+AC12_s*e22i+Ak1_s*f11i+Ak12_s*f22i;
Nxj=AC1_s*e11j+AC12_s*e22j+Ak1_s*f11j+Ak12_s*f22j;
Nyi=AC12_s*e11i+AC2_s*e22i+Ak12_s*f11i+Ak2_s*f22i;
Nyj=AC12_s*e11j+AC2_s*e22j+Ak12_s*f11j+Ak2_s*f22j;
Nxyi=Ac6_s*e12i+ak6_s*ffsi; Nxyj=Ac6_s*e12j+ak6_s*ffsj;
Mxi=Ad1_s*f11i+Ad12_s*f22i+Ak1_s*e11i+Ak12_s*e22i;
Mxj=Ad1_s*f11j+Ad12_s*f22j+Ak1_s*e11j+Ak12_s*e22j;
Myi=Ad2_s*f22i+Ad12_s*f11i+Ak12_s*e11i+Ak2_s*e22i;
Myj=Ad2_s*f22j+Ad12_s*f11j+Ak12_s*e11j+Ak2_s*e22j;
MXYi= Ad6_s*ffsi+ak6_s*e12i; MXYj= Ad6_s*ffsj+ak6_s*e12j;
e13i=ftx(i,1); e13j=ftx(j,1); e23i=fty(i,1); e23j=fty(j,1);
QXi=ka42*A44*e13i; QXj=ka42*A44*e13j;
Qyi=ka42*A44*e23i; Qyj=ka42*A44*e23j;
fauv(v1ter)=0.5*(Nxi*e11j+Nxj*e11i+Nyi*e22j+Nyj*e22i+
Nxyi*e12j+Nxyj*e12i+
Mxi*f11j+Mxj*f11i+Myi*f22j+Myj*f22i+Mxyi*ffsj+Mxyj*ffsi+
    QXi*e13j+Qxj*e13i+Qyi*e23j+Qyj*e23i);
>uij(n),vij(n);
u1Nkr=(u1(i,1)*omx+v1(i,1)*omy);v1Nkr=(v1(i,1)*omx-u1(i,1)*omy);
ftxkr=(ftx(i,1)*omx+fty(i,1)*omy);ftykr=(fty(i,1)*omx-ftx(i,1)*omy);
fbw11(v1ter)=(NL1W1*u1(i,1)+NL2W1*v1(i,1)+
NL3w1*ftx(i,1)+NL4W1*fty(i,1));
fbk_1(v1ter)=Sigm1*u1Nkr+St1*v1Nkr+MNB*ftxkr+MNBT*ftykr;
fw(w)=w; aa=ai(1); bb=bi(1);
```

```
>norma sobstvennoj funkzii W1;
fw11(uv1s)=uw1s(1)*uw1s(1);
>norma sobstvennogo vektora peremeshenij U;
fUN(uv1s)=uw1s(1)*uw1s(1)+uu1s(1)*uu1s(1)+uv1s(1)*uv1s(1);
>coef. beta (for y(t)^2); f1y2(cond)=f1y2_v*uw1s(1)*mk;
>coef. gamma (for y(t)^3);
N322=uw1s(4)*NXr+2*uw1s(5)*Nxyr+uw1s(6)*NYr;
f1y3(cond)=f1y3_v*uw1s(1)*mk1;
fw02(cond)=w02;
end
>******************************************;
value
const=5,2,1,5,5200,1,1;
tabl=nw,1,1,1,2,nu,1,1,1,2,nv,1,2,1,2,
nfx,1,1,1,2,nfy,1,2,1,2,  0,1,5,0,0, 0,2,4,0,0 ;
nu=8; nv=nu; nw=9; nfx=nu; nfy=nu;
>pr=-a,-b,a,b;
pr=0,-b,a2,b;
kint=3; k_int=3;
a=0.5;  b=0.5;a2=1;  >am=a-d;>ap=a+d; am=0.3; ap=0.7;
c=0.4;d=0.2; rad=0.15;
f1=a,a; f2=0,b; f3=a,d;f4=0,c; f5=a2,0,rad; f6=0,0,rad;
s1=k_int,0,0,am,b,am,0,ap,c,ap,0,a2,b;
skon=k1,a2,0,a2,b,0,b;
p1=1,pr; p2=2,pr; p3=3,pr; p4=4,pr; p5=5,pr;
p01=1; p02=2; p03=3; p04=4; p05=5;
rk1=1,1,1; rk2=2,1,1; rk3=3,1,1; rk4=4,1,1; rk5=5,1,1;
rk6=6,1,1; rk7=7,1,1; rk8=8,1,1; rk9=9,1,1;
ro=1;
>ka42=pi**2/12;ka42=0.833333; ka52=ka42;
```

```
>****FGM Al/Al2O3********************************;
nu1=0.3; nu2=0.3; num=0.3; nuc=0.3;
EM=70; EC=380;  RoM=2707;  RoC=3800;
>**********************************;
kp1=2; N_L=2;  kr2=0;   kr1=0.2; h0=0.1;
KW=10;Kg=50;
alfa=0.3; bet_th=0;alf_th=0;> 0.5;
w02= 0.18855; wnorm2=0.0020795; wmax=0.18855;
end
```