

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет
"Харківський авіаційний інститут"
Національна академія наук України
Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Ткаченко Денис Анатолійович

УДК 539.3:517.958:629.7.02(043)

ДИСЕРТАЦІЯ

Аналітико-чисельні методи аналізу деформування
складних пластинчатих систем

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

113 – Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.



Ткаченко Денис Анатолійович

Науковий керівник

Минтюк Віталій Борисович

кандидат технічних наук

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Ткаченко Д. А. Аналітико-чисельні методи аналізу деформування складних пластинчатих систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Міністерство освіти і науки України Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»; Національна академія наук України Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного; Харків; 2025.

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітичних і аналітико-чисельних методів для розв'язання крайових задач, застосовуваних до аналізу напружено-деформованого стану тонкостінних конструкцій. Для більшості таких задач точний розв'язок не відомий. На практиці доводиться користуватися наближеними розв'язками варіаційних формулювань цих крайових задач, отриманих за допомогою комерційного програмного забезпечення, яке реалізує метод скінченних елементів (МСЕ). Основна проблема полягає в повільній збіжності наближених розв'язків і, як наслідок, низькій точності та трудомістких витратах на дослідження достовірності. Із цього погляду аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки крайових задач мають незаперечні переваги над числовими.

Актуальність теми визначається широким використанням тонкостінних конструкцій у галузях авіації, космічної техніки, кораблебудування та будівництва, де забезпечення високої міцності при збереженні мінімальної маси конструкції є критично важливим. Отримання та використання найбільш точних розв'язків сприяє виконанню цієї антагоністичної вимоги. Отже, попри широке використання МСЕ в інженерній практиці, розробка аналітичних, наближених аналітичних та аналітико-числових розв'язків є актуальною тенденцією як у науковій, так і в інженерній сферах.

Мета дослідження полягає у розробці та вдосконаленні методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, а також отриманні досі невідомих розв'язків крайових задач для прямокутних пластин

з використанням комбінації аналітичних та числових підходів, що забезпечить підвищення точності та ефективності розрахунків.

У дисертації було проведено ґрунтовний аналіз поточного стану розвитку методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій. Огляд наукової літератури останніх 5-10 років показав, що існує значна кількість як аналітичних, так і чисельних методів, які застосовуються для розв'язання задач напружено-деформованого стану. Аналітичні підходи забезпечують високу точність розв'язків за рахунок використання апроксимаційних функцій, що виконують крайові умови. Проте їх застосування обмежене складністю обчислень для реальних конструкцій з нерегулярною геометрією та умовами навантаження.

У дисертації наводиться два підходи до аналізу напружено-деформованого стану просторової тонкостінної конструкції – декомпозиційний та системний. Перший підхід удосконалює застосування методу ідентифікації крайових умов (МІКУ) і залучає до побудови розв'язку метод сполучення конструктивних елементів (МСКЕ), метод розширення області до канонічної (МРОК) та метод редукції (МР). За цим підходом повністю неоднорідна крайова задача розв'язується на основі простіших напіводнорідних задач для окремих конструктивних елементів, як-от пластини або пластини з балками. Тому повний розв'язок задачі записується через суму спеціального часткового розв'язку, функцій продовження крайових умов з границі в область та коригувального розв'язку. На кінцевому етапі всі невідомі параметри в розв'язку знаходяться при відтворенні умов взаємодії між елементами та неоднорідними умовами на зовнішній границі системи. Основні труднощі цього підходу пов'язані з особливими вимогами до функцій та складністю виконання вимоги сполучення конструктивних елементів, коли мають бути узгоджені функції різних класів.

Системний підхід, на відміну від декомпозиційного, пропонує будувати розв'язок для всієї системи елементів сукупно, без розбиття на підзадачі. Такий розв'язок визначається за допомогою універсальних функцій, що виконують як крайові, так і контактні умови між елементами. Основною проблемою

є підбір функцій, які б автоматично забезпечували виконання цих умов. Реалізований у дисертації алгоритм визначає шлях її подолання. У межах цього підходу надано аналітичні розв'язки задач, яких раніше не існувало, що становить наукову новизну і не має аналогів.

Побудова розв'язку для просторової тонкостінної конструкції приводить до необхідності розв'язувати напівводнорідну крайову задачу з однорідними головними крайовими умовами та неоднорідною правою частиною диференціального рівняння. У дисертації на прикладі розв'язання цієї задачі в подвійних рядах було проаналізовано, які системи координатних функцій мають найкращі апроксимативні властивості. Після проведення розрахунків отримано висновок, що найбільш якісними є сімейства поліноміальних функцій С.А. Халілова та В.Б. Минтюка, які є зручними для програмування. Також у роботі наведено інші типи розв'язків, які можуть бути застосовані до цієї задачі: наближений аналітичний розв'язок типу Нав'є, наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах типу Моріса Леві, наближений аналітичний розв'язок, побудований на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису, наближений аналітичний розв'язок базової задачі, поданий через власні функції бігармонічного оператора.

Було проведено дослідження точності та збіжності аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором. Показано, що на цю точність значно впливають властивості гладкості, лінійної незалежності та повноти систем координатних функцій. Під час використання аналітико-чисельних методів виникає проблема вибору базисних функцій, які повинні забезпечувати експоненціальну збіжність, стійкість наближених розв'язків, зменшення обсягу обчислень та зручність.

У дисертації реалізовано і досліджено використання МР для аналізу тонкостінних просторових систем у рамках декомпозиційного підходу. Для цього підходу сформульовано алгоритм дослідження напружено-деформованого стану багатострингової панелі. Імплементация цього алгоритму виконана на прикладі задачі вигину прямокутної пластини з неоднорідними

крайовими умовами, уточнення яких виконується шляхом попереднього розрахунку конструкції, до складу якої входить ця пластина. Побудовано аналітико-чисельний розв'язок цієї повністю неоднорідної крайової задачі з використанням МКУ у формі методу редукції, де ідентифікацію крайових умов виконано за допомогою розрахунків за МСЕ. Аналіз результатів чисельних експериментів показав, що побудований аналітико-чисельний розв'язок стійкий, має високий ступінь збіжності та забезпечує високу точність як самого розв'язку, так і його похідних. Порівняння результатів, запропонованих у роботі, з результатами критеріального розв'язання, показало істотне підвищення точності визначення компонент напружено-деформованого стану розглянутих пластин у порівнянні з МСЕ-розв'язком. Показано, що МКУ може суттєво підвищити точність розв'язків, отриманих за допомогою МСЕ, особливо для задач з неоднорідними крайовими умовами. Реалізований при розв'язанні повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини метод редукції дозволив зменшити обчислювальні витрати та підвищити точність розрахунків.

Розроблено системний підхід до розв'язання крайових задач для напружено-деформованого стану стрингерних панелей, включно з умовами сполучення на ребрі, і побудовано функції, що задовольняють неоднорідні головні крайові умови у квадраті. У роботі запропоновано алгоритм добору універсальних функцій, що забезпечують стійкість розв'язків і швидку збіжність у порівнянні з чисельними методами. Ці функції дозволяють ефективно розв'язувати крайові задачі для складних систем з високою точністю розрахунків. Невідомі параметри в записі універсальних функцій знаходяться за процедурою Рітца після мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії всієї системи. Цей підхід реалізовано на прикладі декількох моделей трьох різних стрингерних панелей. Досліджено напружено-деформований стан пластини, підкріпленої системою балок (мультиелементна панель), де отримані результати підтвердили ефективність застосованих методів.

При аналізі панелі, яка складається з набору двовимірних або одновимірних і двовимірних елементів, виникає проблема узгодження функцій різного

класу просторів (сполучення мембранних і згинальних функцій переміщень). Запропоновано два підходи до вирішення цього питання. У першому підході функція мембранних переміщень задається, як і функція прогину, і зв'язується із заданою на границі функцією тільки за переміщеннями. У другому підході степінь апроксимувального полінома функції мембранних переміщень на границі піднімається до степеня заданої функції із наступним перерахунком коефіцієнтів. Достовірність результатів підтверджується шляхом порівняння одержуваного аналітико-чисельного розв'язку з розв'язком, отриманим за допомогою МСЕ.

Практична цінність дисертаційної роботи полягає у значному підвищенні точності та ефективності обчислень при моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних просторових конструкцій. Запропоновані підходи та методи дозволяють отримувати високоточні розв'язки для конструкцій з довільними крайовими умовами, а також для конструкцій із нерегулярною геометрією. Це робить дослідження цінним для інженерних галузей, орієнтованих на розрахунок і проектування міцності та стійкості конструкцій, таких як авіація та космонавтика.

Отримані результати підтверджені чисельними експериментами, а також впроваджені на підприємствах. Основні наукові результати опубліковані у фахових виданнях та представлені на наукових конференціях.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в подальшому розвитку методу сполучення конструктивних елементів і методу ідентифікації крайових умов та методу редукції, що в комплексі дозволяють будувати аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки для складних тонкостінних просторових конструкцій у межах двох підходів до розгляду конструкції – декомпозиційного і системного.

1. У рамках декомпозиційного підходу вперше було використано МІКУ у формі методу редукції, де ідентифікацію крайових умов по границях елементів виконано за допомогою розрахунків за МСЕ, для перетворення неоднорідної крайової задачі на суму розв'язків напіводнорідних задач, а також

використано МСКЕ для формулювання умов сполучення окремих конструктивних елементів у систему. У роботі запропоновано способи отримання розв'язку напівводнорідної крайової задачі (крайові умови типу Діріхле) для прямокутної пластини, що перебуває під впливом зовнішнього тиску. Досліджено характеристики системи координатних функцій, за яких забезпечується висока стійкість процедури отримання розв'язків, стабільна збіжність, прагнення нев'язки в рівнянні рівноваги до нуля та забезпечення заздалегідь потрібної точності (встановлення незмінних значущих цифр у мантисі результатів розв'язування під час зміни кількості утримуваних невідомих у розв'язку). Сполучення елементів конструкції в єдине ціле виконано шляхом визначення поки що невідомих параметрів на лініях сполучення елементів з умов їхньої взаємної роботи в цілій конструкції.

2. Запропоновано алгоритм добору і складання універсальних функцій, які свідомо виконують як крайові умови для всієї системи, так і умови взаємодії, контактів між її структурними компонентами, для реалізації системного підходу, який полягає в тому, що тонкостінна просторова система сама по собі виступає неподільним «конструктивним елементом».

3. Запропоновано новий метод побудови аналітичного базису для областей, гомеоморфних прямокутнику, з довільними умовами на границі.

4. Досліджено низку наявних функцій, а також надано розширені приклади функцій Минтюка з погляду їхніх апроксимувальних властивостей, ортогональності та чисел обумовленості матриці Грама. Виходячи з результату дослідження, визначено, що найкращими є поліноміальні функції Халілова і Минтюка – сильно мінімальні, ортонормовані або майже ортонормовані в енергетичних метриках відповідних диференційних операторів аналітичні базиси, які виконують однорідні крайові умови.

5. Побудовано ортонормований базис в енергетичному просторі бігармонічного оператора в прямокутнику за однорідних головних крайових умов на контурі за різними вихідними координатними системами. За допомогою цього базису розв'язано задачу жорстко затиснутої прямокутної пластини за

допомогою ітераційної процедури Грама-Соніна-Шмідта, автори якої наголошують на проблемах з її збіжністю, які нам вдалося подолати, виконуючи розв'язки у вигляді замкнутих аналітичних виразів. Розглянутий приклад вигину жорстко затиснутої по всьому контуру прямокутної пластини під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження наочно показав перевагу застосування ортонормованого в енергетичному просторі базису.

6. Уперше виконано розв'язання для системи в цілому на конкретних прикладах (підкріплена ребрами балками жорсткості пластина, панель, що складається з пластин, з'єднаних балками, і набір з'єднаних між собою пластин). Наші розв'язки не тільки розширюють атлас аналітичних розв'язків, а й дають змогу уточнити розв'язок за МСЕ в області самого елемента, тобто подолати обмеження МСЕ, пов'язані з відсутністю точного розв'язку скрізь в елементі, за винятком його вузлових точок.

Практичне значення отриманих результатів. Розвинуті в роботі методи сполучення конструктивних елементів, метод ідентифікації крайових умов С. А. Халілова та метод редукції дозволяють значно підвищити точність і ефективність розрахунків, що є особливо важливим для вирішення задач механіки складних просторових тонкостінних систем. Ці методи також мають потенціал для поширення на різні моделі матеріалів, включаючи трансверсально-ізотропні, ортотропні та анізотропні (композитні), а також на інші типи задач, такі як втрати стійкості, вільні коливання, поперечно-поздовжній вигин.

Цінність отриманих результатів полягає у внеску до загальної теорії наближених методів, функціонального аналізу, математичної фізики та числових методів. Зокрема, нові методи дозволяють отримувати розв'язки крайових задач з високою точністю, використовувати системи базисних функцій, які ортогональні в енергетичній метриці, та забезпечувати еталонні розв'язки для числових методів.

Практична цінність результатів підтверджується їх здатністю підвищити надійність та безпеку конструкцій, а також знизити витрати на їх розробку та експлуатацію, особливо в аерокосмічній техніці. Це робить дослідження

вагомим внеском у розвиток методів аналізу тонкостінних конструкцій, зокрема для задач міцності силових конструкцій. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення використання цих методів для нелінійних моделей, а також на вдосконалення базисних систем функцій для виконання як головних, так і природних крайових умов. Крім того, методи ідентифікації крайових умов та метод сполучення конструктивних елементів можуть бути інтегровані в оригінальне програмне забезпечення, що сприятиме їх практичному застосуванню.

Окремі результати роботи впроваджено на АТ «Антонов», про що отримані відповідні акти (2017, 2019).

Ключові слова: система прямокутних пластин; панель, підкріплена балками; аналітико-числовий розв'язок; неоднорідна крайова задача; бігармонічний оператор; ідентифікація крайових умов; стійкість, збіжність і точність обчислювальних процедур.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій, у яких опубліковані основні наукові результати дисертаційної роботи

Статті в наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України

1. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження аналітико-числового вирішення задачі про вигин жорстко защемленої прямокутної пластини // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології: зб. наук. пр. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2011. Вип. 49. С. 81–94.

2. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження наближеного аналітичного розв'язання бігармонічної проблеми у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах // Авіаційно-космічна

техніка і технологія. 2013. № 2 (99). С. 40–49.

3. Халілов С. А., Мінтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Наближене аналітичне розв’язання бігармонічної проблеми в прямокутнику при однорідних головних крайових умовах на двох протилежних сторонах і довільних – на двох інших // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2013. № 5 (102). С. 40–49.

4. Ткаченко Д. А. Ортонормований в енергетичному просторі бігармонічного оператора базис у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах по границі // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2014. № 3 (110). С. 41–51.

5. Власний спектр бігармонічного оператора у прямокутнику при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Мінтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2014. № 5 (112). С. 70–78.

6. Узагальнена задача на власні значення в прямокутнику з бігармонічним оператором при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Мінтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2014. № 6 (113). С. 36–47.

7. Аналітико-чисельне розв’язання основної крайової задачі про спектр у прямокутнику для складеного оператора з бігармонічним у головній частині / С. А. Халілов, В. Б. Мінтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2015. № 1 (118). С. 60–67.

8. Функція Гріна основної крайової задачі для бігармонічного оператора у прямокутнику / С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Мінтюк, Д. А. Ткаченко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2015. № 6 (123). С. 12–22.

9. Задача Діріхле для трансверсально-ізотропної прямокутної пластини / С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Мінтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2017. № 2 (137). С. 4–21.

10. Синтез методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів. Прямокутні пластини / С. А. Халілов, В. Б. Мінтюк, Д. А. Ткаченко,

В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2017. № 4 (139). С. 4–26.

11. Числове дослідження базисних систем при розв'язуванні аналітико-числовими методами крайових задач на відрізку / С. А. Халілов, Д. А. Ткаченко, Н. В. Бондарева, В. Б. Минтюк // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2019. № 6 (158). С. 20–32. DOI: 10.32620/aktt.2019.6.04.

Статті в наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію

12. Spectral Methods Application in Problems of the Thin-Walled Structures Deformation / D. Tkachenko, Y. Tsegelnyk, S. Myntiuk, V. Myntiuk // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2022. № 8 (2). P. 641–654. DOI: 10.22055/JACM.2021.38346.3207.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

13. Ткаченко Д. А. Власний спектр і узагальнені задачі на власні значення з бігармонічним оператором у прямокутнику за головних крайових умов // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2014 : тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2014. Т. 1. С. 35.

14. Основна крайова задача теорії відкритих оболонок / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 15–16 квіт. 2015 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. С. 41–44.

15. Ткаченко Д. А. Континуальні аналоги методів сил і переміщень будівельної механіки в плоскій задачі теорії пружності та задачі вигину пластин // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2015 :

тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. Т. 1. С. 12–13.

16. Ткаченко Д. А. Сучасні методи аналізу конструкцій літальних апаратів. Статика, коливання, стійкість // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 21–21 квіт. 2017 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. С. 72–73.

17. Ткаченко Д. А. Аналіз класичної та некласичної моделей ексцентрично перехресно підкріплених пластин методом ідентифікації крайових умов із залученням методу скінченних елементів // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2017 : зб. матеріалів Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. Т. 1. С. 10–12.

18. Халілов С. А., Ткаченко Д. А. Математичні проблеми в задачах із двовимірним бігармонійним оператором // Сучасні проблеми ракетно-космічної техніки і технології : тез. доп. XVI Наук.-техн. конф. ф-ту ракетно-космічної техніки, 10–12 квіт. 2019 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2019. С. 13.

Список наукових публікацій, які додатково відображають наукові результати дисертації

19. Нові математичні методи дослідження полів, станів і процесів механіки суцільних середовищ для розвитку сучасних аерокосмічних технологій. Т. 2. Метод ідентифікації крайових умов : звіт про НДР (заключ.) : Г405-16/2009 / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Кривцов В., Минтюк В., Кравченко С., Ткаченко Д. Харків, 2011. 188 с. ДР 0109U001394. Інв. № 0212U000240.

20. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та

чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (проміжн.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д. Харків, 2012. 96 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0213U001806.

21. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (проміжн.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д., Копичко В. Харків, 2013. 140 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0214U006196.

22. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (заключ.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О.; викон. : Халілов С., Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д., Копичко В. Харків, 2014. 155 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0215U006163.

23. Методи аналізу лінійних та нелінійних математичних моделей тонкостінної просторової системи : звіт про НДР (заключ.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. Б., Халілов С. А. ; викон.: Ткаченко Д. А., Бондарева Н. В., Колодійчик Д. С. Харків, 2019. 96 с. № ДР 0117U002502. Інв. № 0220U101091.

24. Методи побудови аналітичних і аналітико-числових вирішень крайових задач для відкритих та замкнутих гладких та ребристих оболонок і пластин при неоднорідних головних граничних умовах : звіт про НДР (проміж.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. ; під заг. ред. Халілова С. ; викон.: Ткаченко Д., Копичко В., Трофимова І., Бондарєва Н. Харків, 2017. 219 с. № ДР

0117U002502. Інв. № 0218U003532.

25. Теоретичні та конструктивні дослідження лінійних та нелінійних моделей тонкостінних конструктивних елементів : звіт про НДР (проміж.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. ; викон.: Халилов С., Бондарєва Н., Ткаченко Д., Колодійчик Д., Гончаренко А. Харків, 2018. 126 с. № ДР 0117U002502. Інв. № 0219U003578.

ABSTRACT

Tkachenko Denys Anatoliiovych. Analytical and numerical methods of deformation analysis of complex plate systems. – Qualifying scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solid Body. – National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute» of the Ministry of Education and Science of Ukraine; A. M. Podgorny Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine; Kharkiv, 2025.

This thesis is devoted to the development of analytical and analytical-numerical methods for solving boundary value problems used to analyse the stress–strain state of thin-walled structures. For most of these problems, the exact solution is not known. In practice, one must rely on approximate solutions derived from variational formulations of these boundary value problems using commercial software that implements the finite element method (FEM). The main challenges are the slow convergence of approximate solutions, which results in low accuracy and labour-intensive validation studies. In this context, analytical and analytical-numerical solutions offer undeniable advantages over purely numerical ones.

The relevance of the topic is determined by the widespread use of thin-walled structures in aviation, space technology, shipbuilding, and construction, where ensuring high strength while maintaining minimal weight is critical. Obtaining and using the most accurate solutions helps to meet this antagonistic requirement. Thus,

despite the widespread use of the FEM in engineering practice, the development of analytical, approximate analytical, and analytical-numerical solutions remains a current trend in both scientific and engineering fields.

The purpose of this study is to develop and improve methods for solving elasticity boundary value problems for thin-walled structures and to derive previously unknown solutions to boundary value problems for rectangular plates using a combination of analytical and numerical approaches. This, in turn, will improve the accuracy and efficiency of calculations.

This thesis provides a thorough analysis of the current state of methods for solving boundary value problems in elasticity for thin-walled structures. A review of the scientific literature from the past 5–10 years shows that a significant number of both analytical and numerical methods are employed to solve stress–strain problems. Analytical approaches offer high accuracy because they employ approximation functions that satisfy the boundary conditions. However, their application is limited by the complexity of calculations for real structures with irregular geometry and loading conditions.

The thesis presents two approaches to the analysis of a spatial thin-walled structure—decomposition and systematic. The first approach enhances the application of the method of identification of boundary conditions (MIBC) and involves the method of combining of structural elements (MCSE), the method of expansion of the domain to a canonical one (MEDC), and the method of reduction (MR) in constructing the solution. In this approach, a fully inhomogeneous boundary value problem is solved by reducing it to simpler, semi-homogeneous problems for individual structural elements, such as plates or plates with beams. Consequently, the complete solution is expressed as the sum of a special partial solution, boundary-extension functions, and a correction solution. At the final stage, all unknown parameters are determined by enforcing the interaction conditions between the elements and the inhomogeneous conditions at the system's outer boundary. The main difficulties of this approach arise from the stringent requirements on the functions and the

complexity of coordinating structural elements when functions from different classes must be combined.

Unlike the decomposition approach, the systematic approach constructs a solution for the entire system of elements as a whole, without dividing it into subproblems. This solution is determined using universal functions that satisfy both boundary and contact conditions between elements. The primary challenge lies in selecting functions that automatically ensure these conditions are met. The algorithm developed in this thesis provides a method to overcome this issue. Within this approach, analytical solutions to previously unsolved problems are presented, constituting a scientific novelty with no known analogues.

The construction of a solution for a spatial thin-walled structure requires solving a semi-homogeneous boundary value problem with homogeneous main boundary conditions and a non-homogeneous right-hand side of the differential equation. In this thesis, using the example of solving this problem in double rows, we analyze which systems of coordinate functions exhibit the best approximation properties. The calculations demonstrate that the families of polynomial functions developed by S.A. Khalilov and V.B. Myntyuk provide the highest accuracy and are particularly convenient for programming. Additionally, the thesis presents other solution types applicable to this problem, including an approximate analytical solution of the Navier type, an approximate analytical solution in single series of the Maurice Levy type, an approximate analytical solution based on an orthonormalized basis in the energy space, and an approximate analytical solution of the basic problem represented by the eigenfunctions of a biharmonic operator.

The accuracy and convergence of analytical-numerical and approximate analytical solutions of boundary value problems in a rectangle with a biharmonic operator are investigated. It is shown that the accuracy is significantly influenced by the properties of smoothness, linear independence, and completeness of the systems of coordinate functions. When employing analytical and numerical methods, the challenge of selecting basis functions arises—these functions must ensure exponential

convergence, stability of approximate solutions, reduced computational complexity, and practical applicability.

In this thesis, the use of the reduction method (MR) for analysing thin-walled spatial systems within the framework of the decomposition approach is implemented and studied. An algorithm for evaluating the stress–strain state of a multi-stringer panel is formulated for this approach. This algorithm is applied to the bending problem of a rectangular plate with inhomogeneous boundary conditions, which are determined through a preliminary calculation of the structure that includes this plate. An analytical-numerical solution to this fully inhomogeneous boundary value problem is constructed using the finite element method within the reduction method framework, where boundary conditions are identified through FEM calculations.

The analysis of numerical experiments demonstrates that the constructed analytical-numerical solution is stable, exhibits a high degree of convergence, and provides high accuracy for both the solution and its derivatives. A comparison of the results obtained in this study with those of the criterion solution reveals a significant improvement in the accuracy of stress–strain component determination for the analysed plates compared to the FEM solution alone. It is shown that FEM can substantially enhance the accuracy of solutions, particularly for problems with inhomogeneous boundary conditions. The application of the reduction method to solving the fully inhomogeneous boundary value problem of bending a rectangular plate has led to reduced computational costs and increased calculation accuracy.

A systematic approach to solving boundary value problems for the stress–strain state of stringer panels, including coupling conditions along the edges, is developed. Functions that satisfy the heterogeneous main boundary conditions in a square domain are constructed. The thesis proposes an algorithm for selecting universal functions that ensure solution stability and rapid convergence compared to numerical methods. These functions enable efficient and highly accurate solutions to boundary value problems for complex systems. The unknown parameters in the universal functions are determined using the Ritz procedure after minimizing the total potential energy functional of the entire system. This approach is applied to

several models of three different stringer panels. The stress–strain state of a plate supported by a system of beams (multi-element panel) is analysed, with results confirming the effectiveness of the proposed methods.

When analysing a panel composed of a combination of two-dimensional elements or both one-dimensional and two-dimensional elements, the challenge of matching functions from different function spaces arises—specifically, the combination of membrane and bending displacement functions. Two approaches are proposed to address this issue. In the first approach, the membrane displacement function is defined as the deflection function and is linked to the function specified at the boundary solely in terms of displacements. In the second approach, the degree of the approximating polynomial for the membrane displacement function at the boundary is increased to match the degree of the specified function, followed by a recalibration of the coefficients. The validity of these approaches is confirmed by comparing the analytical-numerical solution with the FEM-generated solution.

The practical significance of this thesis lies in the substantial improvement in the accuracy and efficiency of computations for modelling the stress–strain state of thin-walled spatial structures. The proposed approaches and methods enable the derivation of highly accurate solutions for structures with arbitrary boundary conditions as well as those with irregular geometries. This makes the research particularly valuable for engineering disciplines concerned with structural strength and stability calculations, such as aviation and astronautics.

The results obtained have been validated through numerous experiments and implemented in industrial applications. The primary scientific findings have been published in professional journals and presented at scientific conferences.

The scientific novelty of the obtained results lies in the further development of the method of coupling structural elements, the method of identifying boundary conditions, and the reduction method. Together, these methods enable the construction of analytical and analytical-numerical solutions for complex thin-walled spatial structures within two structural analysis approaches: decomposition and systematic.

1. For the first time, the finite element method has been utilized within the reduction method framework, where boundary conditions along the element boundaries are identified using FEM calculations. This approach transforms a nonhomogeneous boundary value problem into a sum of semi-homogeneous problem solutions. Additionally, FEM is used to formulate the conditions for connecting individual structural elements into a system. The thesis presents methods for solving a semi-homogeneous boundary value problem (with Dirichlet-type boundary conditions) for a rectangular plate subjected to external pressure. The study investigates the characteristics of coordinate function systems that ensure high procedural stability, stable convergence, a tendency toward equilibrium in the equilibrium equation, and predefined accuracy (i.e., maintaining a consistent number of significant figures in the mantissa of the solution results as the number of unknowns changes). The structural elements are integrated into a unified system by determining unknown parameters along the connection lines based on their mutual interaction within the entire structure.

2. To implement the systematic approach, an algorithm is proposed for selecting and constructing universal functions that explicitly satisfy both the boundary conditions of the entire system and the interaction and contact conditions between its structural components. In this approach, the thin-walled spatial system is treated as an indivisible "constructive element."

3. A new method is proposed for constructing an analytical basis for domains that are homoeomorphic to a rectangle with arbitrary boundary conditions.

4. A detailed analysis of various existing functions is conducted, with an extended study of Myntyuk functions in terms of their approximation properties, orthogonality, and Gram matrix conditioning numbers. Based on this analysis, the Khalilov and Myntyuk functions are identified as the most effective polynomial functions – strongly minimal, orthonormalized or nearly orthonormalized in the energy metrics of corresponding differential operators. These functions form analytical bases that satisfy homogeneous boundary conditions.

5. An orthonormalized basis in the energy space of a biharmonic operator in a rectangle with homogeneous primary boundary conditions along the contour is constructed for different initial coordinate systems. Using this basis, the problem of a rigidly clamped rectangular plate is solved via the Gram-Sonin-Schmidt iterative procedure. While previous research has highlighted convergence issues with this method, the thesis successfully overcomes these limitations by deriving closed-form analytical expressions. The bending example of a rigidly clamped rectangular plate under a uniformly distributed normal load clearly demonstrates the advantages of using an orthonormalized basis in the energy space.

6. For the first time, solutions for entire systems are derived using specific examples, including a plate supported by stiffening beams, a panel consisting of plates connected by beams, and a set of interconnected plates. These solutions not only expand the collection of available analytical solutions but also enhance the accuracy of FEM results within the element itself. This advancement helps overcome a key limitation of FEM, where the exact solution is typically available only at nodal points but not throughout the element.

Practical significance of the results. The application of MIBC, MCSE, and MR developed in this work significantly enhance the accuracy and efficiency of calculations. This is especially important for solving problems of mechanics for complex spatial thin-walled systems. Additionally, these methods have the potential to be extended to various material models, including transversely isotropic, orthotropic, and anisotropic (composite) materials, as well as to other types of problems, such as stability loss, free vibration, and transverse-longitudinal bending.

The value of the obtained results lies in their contribution to the general theory of approximate methods, functional analysis, mathematical physics, and numerical methods. In particular, the new methods enable high-accuracy solutions to boundary value problems by utilizing systems of basic functions that are orthogonal in the energy metric, thereby providing reference solutions for numerical methods.

The practical significance of these results is confirmed by their ability to enhance the reliability and safety of structures while reducing development and

operational costs, particularly in aerospace engineering. This research represents a significant advancement in methods for analysing thin-walled structures, especially for addressing strength-related problems in load-bearing systems. Future research could focus on extending these methods to nonlinear models and improving the basis function systems to satisfy both essential and natural boundary conditions.

Furthermore, the methods for identifying boundary conditions and coupling structural elements can be integrated into proprietary software, facilitating their practical application. Some of the findings from this study have already been implemented at SE Antonov, as confirmed by official reports from 2017 and 2019.

Key words: system of rectangular plates; beam-reinforced panel; analytical-numerical solution; nonhomogeneous boundary-value problem; biharmonic operator; identification of boundary conditions; stability, convergence, and accuracy of computational procedures.

ЗМІСТ

ВСТУП	26
РОЗДІЛ 1 Методи та розв'язки задач визначення напружено-деформованого стану тонкостінних просторових систем	36
1.1 Аналіз стану питання.....	36
1.2 Формулювання проблеми та шляхи її вирішення	40
1.2.1 Диференціальне формулювання задач механіки деформівного твердого тіла.....	43
1.2.2 Варіаційне формулювання задач механіки деформівного твердого тіла	45
1.2.3 Методи розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла для конструктивної одиниці	47
1.3 Методи розв'язання системних задач механіки деформівного твердого тіла	50
1.3.1 Чисельні методи.....	51
1.3.2 Метод сполучення конструктивних елементів	54
1.3.3 Метод розширення області до канонічної.....	56
1.3.4 Метод ідентифікації крайових умов	57
Висновки до розділу 1	62
РОЗДІЛ 2 Формулювання і побудова розв'язку задачі типу Діріхле для тонкостінної просторової конструкції	64
2.1 Формулювання задачі Діріхле в прямокутнику для систем рівнянь високого порядку	65
2.2 Декомпозиційний підхід. Метод редукції розв'язку загальної задачі Діріхле в прямокутнику.....	70
2.3 Формулювання задачі типу Діріхле для прямокутної ребристої панелі	79
2.4 Системний підхід. Метод побудови універсальних функцій.....	82
2.4.1 Побудова базису для елементів конструкцій.....	84
2.4.2 Сполучення конструктивних елементів	87
Висновки до розділу 2	92

РОЗДІЛ 3 Формулювання базових крайових задач типу Діріхле в прямокутнику та побудова їхніх аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків	94
3.1 Формулювання і розв'язання базової крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику	95
3.2 Аналітико-чисельні та наближені аналітичні розв'язки базової крайової задачі в прямокутнику	97
3.2.1 Аналітико-чисельні розв'язки у подвійних рядах за системами спеціальних функцій	97
3.2.2 Наближений аналітичний розв'язок типу Нав'є базової крайової задачі у прямокутнику	100
3.2.3 Наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах типу Моріса Леві	101
3.2.4 Наближений аналітичний розв'язок, побудований на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису	104
3.2.5 Наближений аналітичний розв'язок базової задачі, поданий через власні функції бігармонічного оператора	108
3.3 Дослідження точності та збіжності аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором	111
3.3.1 Числа обумовленості матриці Грама використовуваних координатних функцій	114
3.3.2 Властивість квазіортогональності базисних функцій	116
3.3.3 Аналіз аналітико-чисельного розв'язку в подвійних рядах	121
3.3.4 Аналіз наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є бігармонічної проблеми в прямокутнику за однорідних головних крайових умов	126
3.3.5 Аналіз розв'язку типу Моріса Леві крайової задачі в прямокутнику з бігармонічним оператором	132

3.3.6 Аналіз наближеного аналітичного розв'язку, побудованого на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису	134
3.3.7 Аналіз розв'язку базової крайової задачі, побудованого за допомогою власних функцій бігармонічного оператора	139
Висновки до розділу 3	147
РОЗДІЛ 4 Аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних просторових систем	151
4.1 Застосування декомпозиційного підходу до аналізу напружено-деформованого стану багатострингерової панелі	152
4.2 Реалізація синтезу методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів для розв'язання задачі вигину прямокутної пластини	157
4.2.1 Доповнення методу ідентифікації крайових умов методом скінченних елементів	158
4.2.2 Доповнення методу скінченних елементів методом ідентифікації крайових умов	159
4.2.3 Реалізація методу редукції при розв'язанні повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини	160
4.2.4 Числові результати розв'язання задачі вигину прямокутної пластини за допомогою комбінації методів МІКУ і МСЕ	165
4.3 Системний розв'язок крайової задачі напружено-деформованого стану стрингерової панелі. Умови сполучення на ребрі	178
4.3.1 Побудова функцій, що виконують неоднорідні головні крайові умови у квадраті	179
4.3.2 Результати розрахунків, їх точність і збіжність	183
4.3.3 Дослідження напружено-деформованого стану пластини, підкріпленої системою балок (мультиелементна панель)	187
4.3.4 Дослідження напружено-деформованого стану підкріпленої панелі	192
Висновки до розділу 4	201

ВИСНОВКИ.....	205
Список використаних джерел	210
ДОДАТОК А Концепція побудови одновимірних базисів.....	229
ДОДАТОК Б Задачі вигину пластини при різних однорідних крайових умовах.....	231
Б.1 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а дві інші – вільно обперті	231
Б.2 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а дві інші – вільні	234
Б.3 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, одна вільно обперта, а інша вільна	235
Б.4 Вигин прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а четверта – вільно обперта	237
Б.5 Вигин прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а четверта – вільна	238
ДОДАТОК В Результати числових експериментів	240
ДОДАТОК Г Функції, які виконують неоднорідні головні крайові умови на відрізку	247
ДОДАТОК Д Акти впровадження результатів роботи	251

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Математичні моделі багатьох процесів і об'єктів різної природи (в тому числі і задачі міцності силових конструкцій) формуються у вигляді крайових задач. Для більшості з них точний розв'язок не відомий. На практиці доводиться користуватися наближеними розв'язками варіаційних формулювань цих крайових задач. Більшість цих розв'язків нині знаходять за допомогою комерційного програмного забезпечення, яке реалізує метод скінченних елементів (МСЕ). Основна проблема, яка закладена в саму ідею МСЕ, полягає в повільній збіжності наближених розв'язків і, як наслідок, низькій точності та трудомістких витратах на дослідження достовірності. Із цього погляду аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки крайових задач мають незаперечні переваги над числовими. Для багатьох задач механіки такі розв'язки стали еталонними (критеріальними), і накопичилась їх велика кількість. Але застосування цих методів обмежене простими областями зі стандартними умовами обпирання, що унеможливорює їх поширення на складні системи. Тому розробка і впровадження програмно реалізованих методів, що поєднують переваги аналітичних і числових підходів, є актуальним завданням для сучасної інженерної практики.

Вибір теми дослідження зумовлений необхідністю вдосконалення методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, які мають широке застосування у багатьох інженерних галузях. Тонкостінні конструкції використовують у багатьох сферах, таких як авіація, космонавтика, кораблебудування та будівництво, де точність і надійність розрахунків є критично важливими для забезпечення ефективності та безпечної експлуатації конструкцій.

Мета, завдання, об'єкт та предмет дослідження

Тема дисертації пов'язана з проблемою підвищення точності моделю-

вання поведінки системи, що складається з прямокутних пластин та балок, під впливом зовнішнього середовища. Розглядається сукупність взаємодіючих конструктивних елементів, математичними моделями яких є крайові задачі (або еквівалентні варіаційні) для рівнянь або їх систем зі звичайними та власними похідними з крайовими умовами, які дозволяють об'єднати ці елементи в єдину композицію.

Мета дослідження полягає у розробці та вдосконаленні методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, а також отриманні досі невідомих розв'язків крайових задач для прямокутних пластин з використанням комбінації аналітичних та числових підходів, що забезпечить підвищення точності та ефективності розрахунків.

Завдання дослідження включають:

1. Проведення критичного аналізу сучасних методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій.
2. Побудова та обґрунтування математичних моделей окремих елементів тонкостінних конструкцій, які точно описують їхню поведінку, з урахуванням неоднорідних крайових умов та рівня декомпозиції конструкції.
3. Розробка та обґрунтування вибору методів сполучення конструктивних елементів (МСКЕ) і методу редукції (МР) для підвищення точності розрахунків, а також розвиток методу ідентифікації крайових умов С. А. Халілова (МКУ) та їх застосування для синтезу математичних моделей елементів у єдину модель всієї конструкції.
4. Розробка системного підходу для визначення напружено-деформованого стану стрингерних панелей, отриманих комбінацією прямокутних пластин, та пластин, підкріплених системою балок.
5. Проведення чисельних експериментів для підтвердження ефективності запропонованих методів та аналіз їх результатів.
6. Створення нових та розвиток існуючих методів аналізу крайових задач для окремих елементів з метою отримання аналітико-чисельних розв'язків.

7. Побудова системи ортонормованих функцій в енергетичному просторі оператора крайової задачі, яка б забезпечувала стійкість, збіжність та точність аналітико-чисельних розв'язків.

8. Розробка регулярної процедури побудови універсальних функцій, що виконують довільні неоднорідні крайові умови на границі конструктивного елемента.

9. Оцінка точності та ефективності запропонованих методів у порівнянні з традиційними методами, такими як МСЕ.

Об'єкт дослідження – поля, стани та процеси, які виникають при деформуванні складних механічних тонкостінних систем.

Предмет дослідження – нові високоточні методи розв'язання неоднорідних крайових задач для аналізу напружено-деформованого стану окремих прямокутних пластин і тонкостінних пластинчатих конструкцій.

Наукова новизна отриманих результатів

Наукова новизна отриманих результатів полягає в подальшому розвитку методу сполучення конструктивних елементів і методу ідентифікації крайових умов та методу редукції, що в комплексі дозволяють будувати аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки для складних тонкостінних просторових конструкцій у межах двох підходів до розгляду конструкції – декомпозиційного і системного.

1. У рамках **декомпозиційного** підходу вперше було використано МІКУ у формі методу редукції, де ідентифікацію крайових умов по границях елементів виконано за допомогою розрахунків за МСЕ, для перетворення неоднорідної крайової задачі на суму розв'язків напіводнорідних задач, а також використано МСКЕ для формулювання умов сполучення окремих конструктивних елементів у систему. У роботі надано способи отримання розв'язку напіводнорідної крайової задачі (крайові умови типу Діріхле) для прямокутної пластини, що перебуває під впливом зовнішнього тиску. Досліджено характеристики системи координатних функцій, за яких забезпечується висока стійкість

процедури отримання розв'язків, стабільна збіжність, прагнення нев'язки в рівнянні рівноваги до нуля та забезпечення заздалегідь потрібної точності (встановлення незмінних значущих цифр у мантисі результатів розв'язування під час зміни кількості утримуваних невідомих у розв'язку). Сполучення елементів конструкції в єдине ціле виконано шляхом визначення поки що невідомих параметрів на лініях сполучення елементів з умов їхньої взаємної роботи в цільній конструкції.

2. Запропоновано алгоритм добору і складання універсальних функцій, які автоматично виконують як крайові умови для всієї системи, так і умови взаємодії, контактів між її структурними компонентами, для реалізації **системного** підходу, який полягає в тому, що тонкостинна просторова система сама по собі виступає неподільним «конструктивним елементом».

3. Запропоновано новий метод побудови аналітичного базису для областей, гомеоморфних прямокутнику, з довільними умовами на границі.

4. Досліджено низку наявних функцій, а також надано розширені приклади функцій Минтюка з погляду їхніх апроксимувальних властивостей, ортогональності та чисел обумовленості матриці Грама. Виходячи з результату дослідження, визначено, що найкращими є поліноміальні функції Халілова і Минтюка – сильно мінімальні, ортонормовані або майже ортонормовані в енергетичних метриках відповідних диференціальних операторів аналітичні базиси, які виконують однорідні крайові умови.

5. Побудовано ортонормований базис в енергетичному просторі бігармонічного оператора в прямокутнику за однорідних головних крайових умов на контурі за різними вихідними координатними системами. За допомогою цього базису розв'язано задачу жорстко затиснутої прямокутної пластини за допомогою ітераційної процедури Грама-Соніна-Шмідта, для якої в літературі відзначалися проблеми зі збіжністю, які вдалося подолати, виконуючи розв'язки у вигляді замкнутих аналітичних виразів. Розглянутий приклад вигину жорстко затиснутої по всьому контуру прямокутної пластини під дією рівномірно

розподіленого нормального навантаження наочно показав перевагу застосування ортонормованого в енергетичному просторі базису.

6. Уперше виконано розв'язання для системи в цілому на конкретних прикладах (підкріплена ребрами-балками жорсткості пластина, панель, що складається з пластин, з'єднаних балками, і набір з'єднаних між собою пластин). Наші розв'язки не тільки розширюють атлас аналітичних розв'язків, а й дають змогу уточнити розв'язок за МСЕ в області самого елемента, тобто подолати обмеження МСЕ, пов'язані з відсутністю точного розв'язку скрізь в елементі, за винятком його вузлових точок.

Ці результати свідчать про важливий внесок у розвиток методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій, що має значний потенціал для подальшого наукового розвитку та практичного застосування.

Практичне значення отриманих результатів

Розвинуті в роботі методи сполучення конструктивних елементів, метод ідентифікації крайових умов та метод редукції дозволяють значно підвищити точність і ефективність розрахунків, що є особливо важливим для аналізу напружено-деформованого стану складних тонкостінних систем. Ці методи також мають потенціал для поширення на різні моделі матеріалів, включаючи трансверсально-ізотропні (що вже було здійснено автором у роботах [1], [2]), ортотропні та анізотропні (композитні), а також на інші типи задач, такі як втрати стійкості, аналіз вільних коливань, поперечно-поздовжній вигин (наприклад, [3]).

Цінність отриманих результатів полягає у внеску до загальної теорії наближених методів, функціонального аналізу, математичної фізики та числових методів. Зокрема, нові методи дозволяють отримувати розв'язки крайових задач з високою точністю, використовувати системи базисних функцій, які ортогональні в енергетичній метриці, та забезпечувати еталонні розв'язки для числових методів.

Практична цінність результатів підтверджується їх здатністю підвищити надійність та безпеку конструкцій, а також знизити витрати на їх розробку та експлуатацію, особливо в аерокосмічній техніці. Це робить дослідження вагомим внеском у розвиток методів аналізу тонкостінних конструкцій, зокрема для задач міцності силових конструкцій. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення використання цих методів для нелінійних моделей, а також на вдосконалення базисних систем функцій для виконання як головних, так і природних крайових умов. Крім того, методи ідентифікації крайових умов та метод сполучення конструктивних елементів можуть бути інтегровані в оригінальне програмне забезпечення, що сприятиме їх практичному застосуванню.

Окремі результати роботи впроваджено на АТ «Антонов», про що свідчать отримані відповідні акти (2017, 2019) (Додаток Д).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

В основу дисертації покладено матеріали, що узагальнюють дослідження, виконані автором при реалізації держбюджетних тем Міністерства освіти і науки України: «Нові математичні методи дослідження полів, станів і процесів механіки суцільних середовищ для розвитку сучасних аерокосмічних технологій. Метод ідентифікації крайових умов» (№ ДР 0109U001394); «Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем» (№ ДР 0112U002135); «Нові аналітико-числові методи в задачах статички, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів. Методи аналізу лінійних та нелінійних математичних моделей тонкостінної просторової системи» (№ ДР 0117U002502). Окремі результати були апробовані автором у рамках проєкту «ACTIVE – Atlantic Caucasus Technical

universities Initiative for Valuable Education Erasmus Mundus Action 2 – Erasmus Mundus Partnerships» (2015-2016, Прага, Чехія).

Особистий внесок здобувача

Дисертаційне дослідження виконано самостійно: обґрунтовано загальну концепцію роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, обрано підходи до вирішення сформульованих завдань, здійснено обчислення, проаналізовано результати.

У працях, написаних у співавторстві, авторів дисертації належить таке: у високих наближеннях отримано розв'язок «жорсткої» крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутній області з однорідними граничними умовами, а також зроблено висновок про якість апроксимувальних властивостей систем координатних функцій на підставі проведеного чисельного аналізу [4]; побудовано наближений аналітичний розв'язок бігармонічної задачі в прямокутнику за однорідних головних крайових умов, виконано повне дослідження точності та збіжності отриманого розв'язку в різних метриках [5], [6]; побудовано та досліджено нелінійні розв'язки плоского вигину балки з урахуванням деформації осі [7]; досліджено напружено-деформований стан і стійкість гладких та ексцентрично підкріплених пластин [8], [9]; запропоновано наближений аналітичний розв'язок для крайових задач з бігармонічним оператором у прямокутнику, на двох протилежних боках якого задано умови типу Діріхле, а на двох інших крайові умови довільні, виконано порівняння результатів пропонуванних розв'язків з результатами, отриманими за методом скінченних елементів [10]; побудовано ортонормовані в енергетичному просторі бігармонічного оператора базиси в прямокутнику для трьох різних вихідних координатних систем за однорідних головних крайових умов, для елементів базису отримано замкнуті вирази з абсолютно точними параметрами [8], [11]; у високих наближеннях визначено власний спектр основної крайової задачі в прямокутнику для бігармонічного оператора за головних крайових умов і різних значень параметра подовження [8], [12]; запропоновано процедуру, що

дозволяє спростити без втрати точності структуру власних функцій, отримано з наперед заданою точністю розв'язки восьми крайових задач, що описують проблему стійкості прямокутних пластин при комбінованому навантаженні, точні розв'язки яких не відомі донині [13]; дано розв'язок задачі про спектр у прямокутнику для складеного оператора за головних крайових умов, запропоновано процедуру спрощення структури власних функцій шляхом виявлення їхніх компонент типу «білого шуму», створено оригінальну програму для виконання обчислень [3], [14]; побудовано аналітико-чисельну функцію Гріна основної крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутній області, яка складається із суми фундаментального і регулярного розв'язків [14], [15]; сформульовано і досліджено задачу типу Діріхле для систем рівнянь високого порядку в областях, топологічно еквівалентних прямокутнику, а також у класичній та неklasичній теорії відкритих оболонок, розбудовано алгоритм методу редукції для побудови розв'язку даної задачі [16], [17]; запропоновано кілька способів продовження крайових функцій із границі в область і дано порівняльний аналіз їхньої ефективності [2]; побудовано аналітико-чисельний розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини з використанням МПКУ у формі МР, ідентифікацію крайових умов виконано за допомогою розрахунків за МСЕ, проведено аналіз результатів низки чисельних експериментів [18]; проведено комплексне порівняння одинадцяти базисних систем, побудованих на основі поліномів Лежандра, Чебишева, інтерполяційних поліномів Лагранжа – Лобатто, тригонометричних функцій, степневих функцій і функцій методу скінчених елементів, для визначення найбільш ефективної базисної системи з точки зору швидкості збіжності наближених розв'язків, нев'язки в рівняннях крайових задач і чисел обумовленості матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь [9], [19]; розроблено модифіковані базисні системи, які виконують як головні, так і природні крайові умови [20].

Апробація матеріалів дисертації

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Ткаченко Д. А. Власний спектр і узагальнені задачі на власні значення з бігармонічним оператором у прямокутнику за головних крайових умов // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2014 : тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2014. Т. 1. С. 35.
2. Основна крайова задача теорії відкритих оболонок / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 15–16 квіт. 2015 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. С. 41–44.
3. Ткаченко Д. А. Континуальні аналоги методів сил і переміщень будівельної механіки в плоскій задачі теорії пружності та задачі вигину пластин // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2015 : тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2015. Т. 1. С. 12–13.
4. Ткаченко Д. А. Сучасні методи аналізу конструкцій літальних апаратів. Статика, коливання, стійкість // Проблеми створення та забезпечення життєвого циклу авіаційної техніки : тези доп. міжнар. наук.-техн. конф., 21–21 квіт. 2017 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. С. 72–73.
5. Ткаченко Д. А. Аналіз класичної та некласичної моделей ексцентрично перехресно підкріплених пластин методом ідентифікації крайових умов із залученням методу скінченних елементів // Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні. ІКТМ'2017 : зб. матеріалів Всеукр. наук.-техн. конф. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2017. Т. 1. С. 10–12.
6. Халілов С. А., Ткаченко Д. А. Математичні проблеми в задачах із двовимірним бігармонічним оператором // Сучасні проблеми ракетно-

космічної техніки і технології : тез. доп. XVI Наук.-техн. конф. ф-ту ракетно-космічної техніки, 10–12 квіт. 2019 р. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2019. С. 13.

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та додатків. Повний обсяг дисертації складає 252 сторінки, з яких основного тексту 184 сторінки, у тому числі: 53 рисунки, 14 таблиць; список використаних джерел із 152 найменувань на 17 сторінках, додатки на 24 сторінках.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДИ ТА РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОСТІННИХ ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМ

1.1 Аналіз стану питання

Двовимірні задачі механіки деформівного твердого тіла у визначеній області $\Omega = \{x, y\}$ описуються диференціальними рівняннями або системами таких рівнянь у частинних похідних. Розв'язання цих рівнянь має виконувати крайові умови, задані на границі Γ області Ω . Для границі Γ висуюються певні вимоги гладкості. Мінімальна вимога: границя повинна бути принаймні ліпшицевою. Навантаження, що діють в області та на її границі, можуть бути довільними щодо гладкості, але мають виконувати деякі умови однозначної розв'язності крайової задачі. З позиції механіки ця вимога зводиться до виконання всіх рівнянь рівноваги загалом.

Розв'язки крайових задач механіки деформівного твердого тіла зазвичай не вдається отримати в замкнутому вигляді, тобто у вигляді аналітичного виразу. Тому застосовуються прямі та чисельні методи (варіаційні методи, методи скінченних різниць, метод скінченних елементів, зведення до звичайних диференціальних рівнянь, методи граничних інтегральних рівнянь тощо). При цьому постає важлива проблема оцінки точності, збіжності та стійкості обчислювальних процедур.

Варто відзначити, що активний розвиток як прямих, так і чисельних методів розпочався у минулому столітті [21], [22], [23], [24]. На сьогодні перевага залишається на боці розвитку аналітичних та наближених аналітичних методів і підходів до аналізу складних конструкцій та їх окремих конструктивних елементів. Величезна кількість робіт, присвячених розвитку зазначеного напрямку, підкреслює актуальність обраної теми дослідження цієї дисертації.

Напрямок, пов'язаний з розвитком чисельних методів аналізу, за останнє 20-ліття посів провідне місце в практиці інженерних розрахунків завдяки

швидкому розвитку обчислювального обладнання і технологій. Серед різноманіття чисельних методів найширше застосування та популярність отримав метод скінченних елементів (МСЕ) [25], [26], [27], а точніше його h -версія (h -МСЕ). У цій версії розв'язок уточнюється за рахунок зменшення розміру елемента. Метод набув поширення завдяки своїй універсальності та наявності просунутого програмного забезпечення (ANSYS, Nastran, Abacus та ін.). Аналітико-чисельні методи мають незаперечну перевагу над h -МСЕ у швидкості прагнення наближених розв'язків до точних. Так, якщо h -МСЕ призводить до алгебраїчної збіжності, то аналітико-чисельний розв'язок має експоненціальну (нескінченну) збіжність [28], [29]. Обмежене застосування цих методів пояснюється підвищеними вимогами до гладкості границі, граничних умов, коефіцієнтів диференціальних рівнянь і правих частин. Виконання цих вимог забезпечує нескінченну збіжність наближеного розв'язку. Найчастіше ці методи дослідники використовують для розв'язання задач в однозв'язних областях і з однорідними граничними умовами. Таких обмежень немає в p -версії МСЕ (p -МСЕ) [30], [31]. У цій версії розв'язок уточнюється завдяки підвищенню ступеня апроксимувального полінома.

Над кожним із цих напрямів працювало багато вчених. Варто зазначити, що ретельні всеосяжні огляди літератури минулого століття з кожного з напрямків були представлені в дисертаційних роботах [32], [33], [34].

Аналіз літературних джерел показує, що інтерес дослідників до аналітико-чисельних методів останніми роками зріс. Зробити критичний огляд робіт, у яких так чи інакше фігурують аналітико-чисельні методи, не є можливим з огляду на їхню величезну кількість. Тому було зроблено вибірку робіт, у яких аналітико-чисельні методи¹, а також p -версія МСЕ і метод спектрального елемента були використані для розв'язання конкретних практичних або тестових задач.

¹ В англomовній літературі вживається назва «спектральні методи» (англ. «Spectral Methods»)

Метод спектрального елемента [35] був включений до розглянутих методів через те, що його основною відмінністю від інших є лише форма апроксимувального полінома. У цьому методі використовуються апроксимувальні поліноми Лежандра-Чебишева (або Лагранжа-Лобатто).

Не розглядалися методи, які не приводять до симетричної роздільної матриці (метод колокацій, τ -метод та ін.).

Задачі деформування тонкостінних конструкцій, що складаються з балок, пластин і оболонок, зводяться до систем крайових задач із диференціальними операторами парного порядку ($2m$), довільними заданими головними і природними крайовими умовами в одновимірних і двовимірних областях. Кількість крайових умов відповідає порядку диференціального оператора. Під час переходу до слабкого формулювання обов'язковою для виконання залишається частина крайових умов, а саме – тільки головні. На границі, де має місце з'єднання конструктивних елементів, кількість обов'язкових до виконання головних крайових умов (умов сполучення) дорівнює m . Тут важливо, що ці умови неоднорідні. Вони являють собою довільно задані функції, вид яких з'ясовується в результаті розв'язання. Тому літературні джерела, наведені в табл. 1.1 – 1.3, були згруповані за порядком диференціального оператора задачі, за розмірністю області, в якій задано диференціальний оператор, а також за видом базису, який було використано.

Таблиця 1.1 – Класифікація робіт за порядком диференціального оператора крайової задачі, що розглядається

№	Порядок диференціального оператора крайової задачі	Роботи
1	2	[36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73]
2	4	[74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [69], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [104], [105], [106], [107], [108], [109]

Аналіз наведених джерел показує, що найчастіше розв'язувані аналітико-чисельними методами є задачі з диференціальним оператором другого

порядку в двовимірній області. У цю групу входять усі роботи, в яких використовується класичний метод спектрального елемента (базисні функції – рядок 1, табл. 3), і більшість робіт, в яких використовується р-версія МСЕ. Задачі з диференціальним оператором четвертого порядку розглядаються рідше і, як правило, при цьому використовуються аналітико-чисельні методи.

Таблиця 1.2 – Класифікація робіт за розмірністю області розв'язуваної крайової задачі

№	Область	Роботи
1	одновимірна	[37], [38], [39], [49], [53], [54], [58], [62], [65], [66], [75], [77], [87]
2	двовимірна	[36], [37], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [50], [51], [52], [55], [56], [57], [59], [60], [61], [65], [66], [67], [69], [72], [73], [74], [76], [78], [79], [80], [81], [82], [85], [86], [88], [89], [90], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101], [103], [104], [105], [106], [107], [108], [109], [110]
3	тривимірна	[40], [60], [63], [65], [66], [68], [70], [71], [91], [102]

Таблиця 1.3 – Класифікація робіт за видом базисних функцій, що використовуються для побудови розв'язку

№	Використовуваний базис	Роботи
1	апроксимувальний поліном Лагранжа (Чебишева, Лежандра, Лобатто)	[36], [38], [39], [42], [45], [48], [49], [53], [57], [58], [61], [83]
2	лінійні комбінації поліномів Лежандра (інтеграли від поліномів Лежандра)	[40], [41], [43], [44], [46], [47], [52], [54], [55], [62], [63], [65], [67], [68], [76], [78], [82], [85], [86], [87], [88], [105]
3	тригонометричний	[37], [56], [70], [77], [79], [80], [84], [89], [90], [91], [93], [94], [97], [100], [101], [102], [103], [104], [105], [106], [107], [108], [109], [110]
4	довільні функції; функції, помножені на функції форми; сплайни	[50], [55], [59], [69], [71], [72], [73], [92], [96], [98], [99]
5	власні функції диференціальних операторів	[60], [66], [95]

Найчастіше дослідники використовують базисні функції, що являють собою лінійні комбінації поліномів Лежандра і Чебишева. Це пояснюється простотою їхнього використання і чудовими властивостями, які вони мають [111].

Тригонометричні функції мають перевагу над поліноміальними тільки в разі, коли їхнє використання призводить до розділення змінних і отримання аналітичного розв'язку або зменшення розмірності задачі. Їх застосування обмежене наявністю специфічних крайових умов. Зняття цього обмеження

шляхом множення їх на функції, що виконують крайові умови [49] (як і решта базисів такого типу в рядку 4, табл. 3), призводить до швидкого зростання числа зумовленості матриць, що розв'язують задачу. Крім цього, тригонометричний базис має гірші апроксимативні властивості, ніж поліноміальний.

1.2 Формулювання проблеми та шляхи її вирішення

Як зазначає академік О.А. Самарський у вступі до монографії [112], «безперечно, питання точності є основним питанням як для теорії, так і для практики наближених методів взагалі». Особливої актуальності проблема точності набуває в авіації та космонавтиці, оскільки в цій галузі існують дві антагоністичні вимоги: мінімальна маса та максимальна міцність. На жаль, отримати апріорну оцінку точності вдається дуже рідко, і навіть коли це можливо, така оцінка не має практичного значення через невідомі величини констант Ліпшиця, що містяться в ній (відомо лише, що ці константи дуже великі).

Отримання апостеріорних оцінок точності також проблематичне: точний розв'язок задачі невідомий (немає з чим порівнювати), а експериментальна перевірка вимагає значних витрат, не тільки фінансових. Існує помилкова практика приймати як критеріальні такі розв'язки, які були отримані за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), оскільки похибка цього розв'язку не визначена. Іншими словами, порівнюючи розв'язки за МСЕ, отримані на різних сітках, ми не можемо зробити жодного висновку про їх точність через невідому швидкість їх збіжності.

На перший погляд, постає безвихідна ситуація: потрібно оцінити точність наближеного розв'язку, не маючи альтернативи для порівняння. Вихід з цієї ситуації полягає в побудові шуканих розв'язків у високих наближеннях за допомогою різних методів і подальшому їх порівнянні. При цьому розв'язок, що має необхідну точність, але отриманий з меншими витратами, слід вважати критеріальним.

Такі розв'язки далі будуть побудовані для прямокутної пластини у випадках різних умов опирання і стануть основою для наближеного розв'язання

крайової задачі, яка є математичною моделлю будь-якого силового елемента конструкції. Однак враховуючи складну взаємодію цих окремих елементів у складі системи, адекватний облік цієї взаємодії на сучасному теоретичному рівні стає складною задачею. Високої точності можна досягнути, якщо відомі розв'язки крайових задач для кожного елемента системи окремо. Композиція цих розв'язків у систему здійснюється за допомогою методу сполучення конструктивних елементів (МСКЕ) [113], розробленого та застосовуваного в науковому підрозділі університету, у якому виконано цю роботу. Подальший аналіз напружено-деформованого стану проводиться за допомогою системних методів, таких як метод ідентифікації крайових умов (МІКУ), метод розширення області до канонічної (МРОК), а також методу редукції (МР).

Для пояснення наведемо приклади несних конструкцій крила (рис. 1.1) та фюзеляжу (рис. 1.2) великовантажного літака (типу «АН»). Ці складні тонкостінні системи складаються з конструктивних елементів, математичними моделями яких є крайові задачі теорії оболонок, пластин, кривих та прямих брусів та стрижнів. Причому крайові умови (умови на лініях сполучення) можуть бути задані як у переміщеннях, зусиллях і моментах, так і в змішаному вигляді. Функції, що входять у зазначені крайові умови, невідомі та підлягають подальшому визначенню із умов пружного сполучення.

Ця робота присвячена побудові наближених аналітичних розв'язків задач теорії пружності, коливань і стійкості пластин, які мають топологічну еквівалентність прямокутнику як основному конструктивному елементу тонкостінних просторових систем, якими є сучасні продукти машинобудування, зокрема авіації: крилові поверхні літаків, вертольотів, підлоги та перекриття у їх фюзеляжах. Для розв'язання повністю неоднорідної крайової задачі достатньо знати розв'язок однієї з напіводнорідних крайових задач: диференціальне рівняння неоднорідне, крайові умови однорідні; диференціальне рівняння однорідне, крайові умови довільні. У механіці деформівного твердого тіла розглядаються два формулювання досліджуваної проблеми: 1) диференціальне

(ставиться крайова задача), 2) варіаційне (ставиться проблема стаціонарності деякого функціоналу за певних додаткових умов).

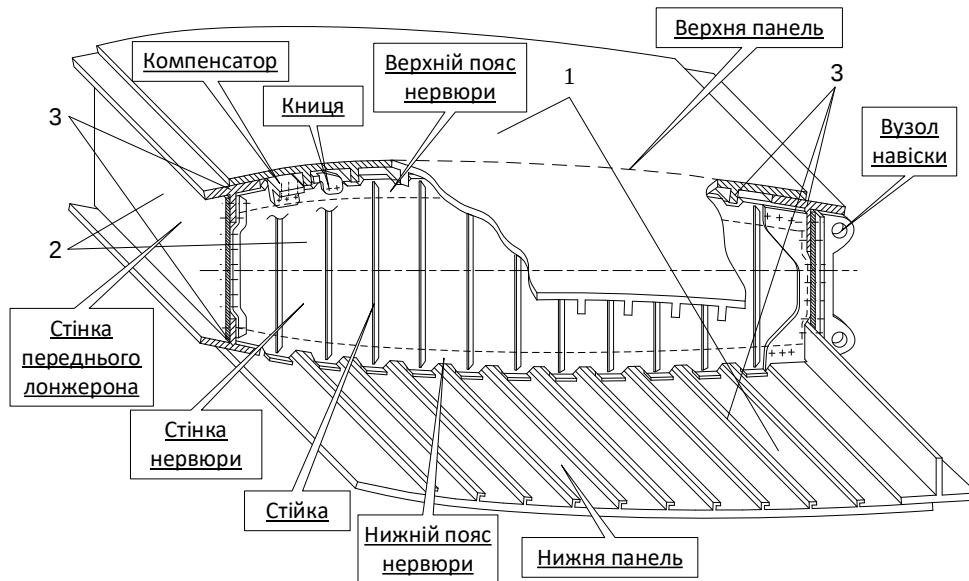


Рисунок 1.1 – Тонкостінна просторова система відсіку крила:

- 1) оболонка або пластина (обшивка); 2) пластина (стілки лонжеронів, нервюр);
3) балка (пояси лонжеронів, стрінгери)

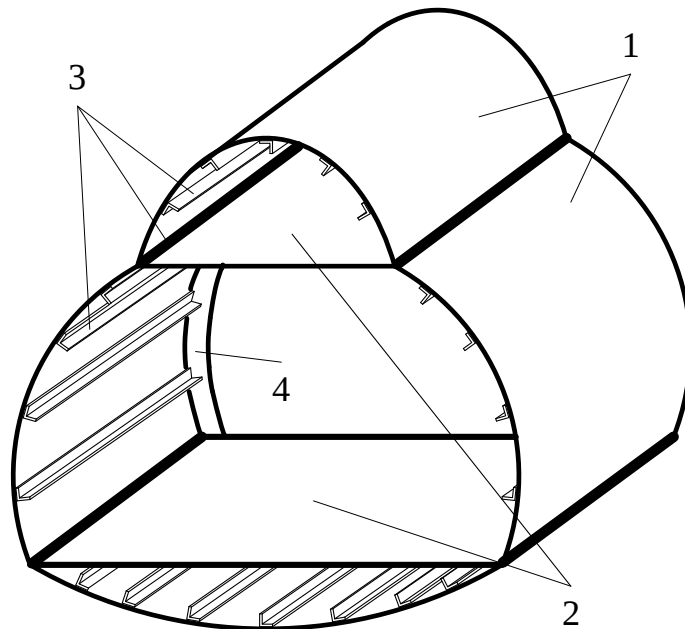


Рисунок 1.2 – Тонкостінна просторова система відсіку фюзеляжу:

- 1) оболонка (обшивка); 2) пластина (підлоги); 3) балка (лонжерони, стрінгери, бімси); 4) кругова балка (шпангоут)

Далі буде коротко розглянуто ці два формулювання.

1.2.1 Диференціальне формулювання задач механіки деформівного твердого тіла

У загальному вигляді крайову задачу для рівнянь математичної фізики можна сформулювати так. Нехай у n -вимірному евклідовому просторі R^n (координати точок якого можуть містити часову змінну) багатовимірна багатозв'язна область Ω обмежена (гіпер)поверхнею Γ . В області Ω визначено деяке диференціальне рівняння в частинних похідних

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

де $L = (L_1, \dots, L_m)$ - лінійний векторний диференціальний оператор, $u(x)$ і $f(x)$ – елементи деяких векторних функціональних просторів $R_1(\Omega)$ і $R_2(\Omega)$ відповідно. Нехай на поверхні Γ визначено оператор l співвідношенням

$$lu(x)|_{\Gamma} = \psi(y), \quad y \in \Gamma, \quad (1.2)$$

де $\psi(y)$ – елемент векторного функціонального простору $R_3(\Gamma)$.

Поверхня Γ може містити окремі незамкнуті поверхні, нескінченно віддалену точку (зовнішні крайові задачі), поверхні, що є геометричним місцем внутрішніх точок області Ω – внутрішніми границями (контактні крайові задачі) тощо. Поверхня Ω може не охоплювати всю границю області (наприклад, для конкретних випадків наявності часових змінних).

Як правило, визначити $u(x)$ з рівнянь (1.1), (1.2) у випадку заданих правих частин $f(x)$ і $\psi(y)$ в елементарних функціях не вдається, і для розв'язання крайової задачі (1.1), (1.2) слід застосовувати наближені методи. Одним із таких методів є метод розкладання за неортогональними функціями. Основна ідея наближеного розв'язання крайових задач (1.1), (1.2) методом розкладання в скінченний ряд за системою функцій $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$, $\psi_k \in R_1$ полягає в заміні простору $R_1(\Omega)^2$ його скінченновимірним підпростором $R^N(\Omega)$ – лінійною оболонкою системи функції $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$. Наближений розв'язок $u^N(x)$ шукається у вигляді ряду

² Часто як функціональні простори $R_1(\Omega)$ і $R_2(\Omega)$ для диференціальних рівнянь другого і (або) четвертого порядку беруться простори С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ і $W_2^2(\Omega)$ відповідно.

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(x); \quad (1.3)$$

коефіцієнти розкладання $a_k^{(N)}$ знаходяться шляхом мінімізації функціоналу

$$\|Lu^N(x) - f(x)\|_{R_2(\Omega)} + K_N \|lu^N(y) - \psi(y)\|_{R_3(\Gamma)}, \quad (1.4)$$

де постійна K_N показує, з якою «вагою» мають виконуватися крайові умови. На практиці вона суттєво впливає на наближений розв'язок. Якщо метою є отримання розв'язку поблизу границі Γ , доцільно забезпечити максимально точне апроксимування крайових умов, що, у свою чергу, потребує вибору великого значення для K_N . Навпаки, коли нас цікавить розв'язок далеко від границі Γ або похідні від розв'язку, пріоритетом стає точність апроксимації диференціального рівняння, що досягається за умови малого значення K_N . У разі тотожного оператора l , оптимальне в певному сенсі значення параметра K_N є досить великим і залежить від вибору функціонального простору $R^N(\Omega)$ та його розмірності. Виберемо у функціональних просторах $R_2(\Omega)$ і $R_3(\Gamma)$ відповідно тотальні³ лінійні системи $\{\omega_j\}$ і $\{W_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) функціоналів. Коефіцієнти $a_k^{(N)}$ можна отримати шляхом розв'язання лінійної системи

$$A_j \omega_j [Lu^*(x) - f(x)] + B_j W_j [lu^N(y) - \psi(y)] = 0 \quad (1.5)$$

або

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \{A_j \omega_j [L\psi_k(x)] + B_j W_j [l\psi_k(y)]\} = \\ = A_j \omega_j [f(x)] + B_j W_j [\psi(y)], j = 1, \dots, N_1; \quad N_1 \geq N; \end{aligned} \quad (1.6)$$

де A_j і B_j – (невід'ємні) вагові множники.

При $R_2(\Omega) = L_2(\Omega)$ і $R_3 = L_2(\Gamma)$ цей метод наближеного розв'язання крайових задач збігається з методом найменших квадратів.

Дуже важливою перевагою методу найменших квадратів у вигляді (1.4) або (1.5) є те, що ці елементи $\psi_k(x)$ необов'язково мають виконувати крайові

³ Система функціоналів $\omega_j (j = 1, 2, \dots)$ називається тотальною в просторі R , якщо для будь-якого $\alpha \in R$ з умов $\omega_j(\alpha) (j = 1, 2, \dots)$ випливає $\alpha = 0$.

умови (1.2). Істотним недоліком цього методу вважаємо те, що матриця лінійної системи для визначення коефіцієнтів $a_k^{(N)}$ має числа обумовленості, що дорівнюють приблизно квадрату числа обумовленості відповідної матриці в методі Гальоркіна. Менш суттєвою є та обставина, що елементи $\psi_k(x)$ в (1.4) або (1.5) мають бути елементами простору Соболева $W_2^2(\Omega)$, тоді як у методі Гальоркіна $\psi_k(x) \in W_2^1(\Omega)$, де W_2^1 – сукупність функцій $W_2^1(\Omega)$, що задовольняють однорідним крайовим умовам (1.2) (при $\psi(y) \equiv 0$).

У загальному випадку при довільному крайовому операторі l постає дуже складне питання про оптимальний вибір у (1.4) постійної K_N . Крім того, обчислювальний процес мінімізації функціонала (1.4), що складається з двох доданків, значно важчий, ніж мінімізація окремо кожного з цих доданків. З огляду на ці труднощі й ту обставину, що неоднорідна крайова задача (1.1), (1.2) легко зводиться або до крайової задачі з однорідними умовами обпирання на границі й неоднорідним рівнянням:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ lu(x)|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

або до крайової задачі з неоднорідними умовами обпирання по границі й однорідним рівнянням:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ lu(x)|_\Gamma &= \psi(y), \end{aligned} \tag{1.8}$$

замість крайової задачі (1.1), (1.2) розв'язують одну з крайових задач (1.7), (1.8).

1.2.2 Варіаційне формулювання задач механіки деформівного твердого тіла

Варіаційні методи, як правило, використовуються для наближеного розв'язання крайової задачі (1.7). Розв'язок тут також знаходять у вигляді

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k(x), \tag{1.9}$$

де $\psi_k(x)$ – елементи лінійної оболонки системи $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, кожна функція якої виконує крайову умову задачі (1.7):

$$l\psi_k(x)|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

а коефіцієнти $b_k^{(N)}$ знаходять шляхом мінімізації функціоналу

$$\|Lu^N(x) - f(x)\|_{R_2(\Omega)}. \quad (1.11)$$

У випадку, коли $R_2(\Omega)$ є енергетичним простором (а для цього необхідно, щоб оператор L у (1.7) був додатно визначеним), для знаходження коефіцієнтів $b_k^{(N)}$ отримуємо систему

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} [\psi_k(x), \psi_j(x)] = (f(x), \psi_j(x)), \quad (1.12)$$

де праворуч стоїть звичайний скалярний добуток, а ліворуч, у квадратних дужках – скалярний добуток у відповідному енергетичному просторі.

У загальному випадку коефіцієнти $b_k^{(N)}$ знаходять із системи

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \omega_j [\psi_k(x)] = \omega_j [f(x)]. \quad (1.13)$$

Більшість варіаційних методів застосовуються для крайової задачі (1.7), а не для задачі (1.8). Річ у тім, що якщо як систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ взяти систему функцій $\{\omega(x)\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, де $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ повна система в Ω , а функція $\omega(x)$ з безперервними першими і другими похідними виконує умови:

$$\omega(x) > 0, \quad x \in \Omega,$$

$$l\omega(x)|_{\Gamma} = 0,$$

то можна показати для деяких окремих випадків, що система $\{\omega(x)\varphi_k(x)\}$ повна. При тотожному операторі $l(l\omega = \omega)$ функція ω для кола й опуклого багатокутника виписується явно, що дає можливість стежити лише за виконанням основного рівняння $Lu = f$, не враховуючи умов по границі, які виконуватимуться автоматично (слід зауважити, що для довільних областей добір функцій ω – складне завдання).

Ідея поміняти ролями основне рівняння і крайові умови, тобто стежити за виконанням крайових умов, не враховуючи при цьому основне рівняння,

приваблива з багатьох причин. Однак при цьому треба мати систему функцій $\{\psi_k(x)\}$, що має такі властивості:

1) кожна функція $\psi_k(x)$ повинна виконувати однорідне рівняння $L\psi_k(x) = 0$;

2) система базисних функцій $\{l\psi_k(y)\}$ має бути лінійно незалежною та повною в $R_3(\Gamma)$.

У більшості задач теорії пружності оператор L є еліптичним, а, отже, додатно визначеним. Тоді повна неоднорідна задача (1.1), (1.2) еквівалентна деякій варіаційній (одержуваній, наприклад, із принципу мінімуму повної потенціальної енергії), формульованій у такий спосіб: серед усіх функцій $u \in R_1(\Omega)$ знайти таку, що виконує умову

$$J(u) = \inf_{v \in R_1(\Omega)} J(v), \quad (1.14)$$

де множина $R_1(\Omega)$ допустимих переміщень – замкнута опукла підмножина гільбертового простору, а енергія системи J визначається рівністю

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v), \quad (1.15)$$

де $a(\cdot, \cdot)$ – симетрична білінійна форма і f – лінійна форма, визначені та безперервні на гільбертовому просторі. Саме такому формулюванню зобов'язане виникнення МСЕ (і не тільки МСЕ).

1.2.3 Методи розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла для конструктивної одиниці

Наведемо лінійні системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладання $b_k^{(N)}$, відповідні до різних наближених методів [114], [21]. За допомогою цих методів уже отримано цілу енциклопедію розв'язків для окремих елементів, таких як оболонки, пластини, балки.

1. *Метод Рітца*. Система для знаходження коефіцієнтів має вигляд (1.12) і, з огляду на визначення енергетичного скалярного добутку, може бути записана таким чином:

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} (L\psi_k, \psi_j) = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.16)$$

Зазначимо, що сучасне формулювання задачі з МСЕ в переміщеннях відповідає методу Рітца.

2. *Метод найменших квадратів.* Для крайової задачі (1.7) коефіцієнти розкладання знаходяться із системи (1.6).

3. *Метод моментів.* Нехай B – лінійний оператор, область визначення якого $D(B)$ збігається з областю визначення $D(L)$ оператора L . Коефіцієнти наближеного розв'язку

$$u^N = \sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k$$

знаходяться з лінійної системи

$$(Lu^N, B\psi_j) = (f, B\psi_j)$$

або

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} (L\psi_k, B\psi_j) = (f, B\psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.17)$$

Для збіжності методу моментів, крім звичайних умов, від оператора B вимагається, щоб оператор B^{-1} був обмежений, а оператор $(L - B)B^{-1}$ – цілком безперервний. Зрозуміло, якщо в якості системи $\{\psi_k\}$ взяти систему власних функцій оператора B , то, скорочуючи обидві частини (1.17) на власні значення μ_j оператора B ($B\psi_j = \mu_j \psi_j$), отримуємо систему (1.16), що відповідає методу Рітца.

4. *Метод ортогональних проєкцій.* Нехай $R_1(\Omega)$ – гільбертовий простір розв'язків рівняння

$$Lu = f. \quad (1.18)$$

Припустімо, що розв'язок u відновлюється за розв'язком допоміжного рівняння (більш простого виду)

$$Bv = f, \quad (1.19)$$

де $v \in H(\Omega)$, $H(\Omega)$ – інший гільбертовий простір, B – деякий оператор у H . Позначимо через $H_2(\Omega)$ (лінійну) множину розв'язків однорідного рівняння

$$Bv = 0, \quad (1.20)$$

розширеного його граничними елементами, а через $H_1(\Omega)$ – ортогональний йому простір розв'язків v рівняння (1.19). Нехай $\bar{v}$ – який-небудь розв'язок

рівняння (1.19). Тоді різниця $\omega = V - v$ є елемент простору $H_2(\Omega)$, бо $B\omega = BV - Bv = 0$. З рівності $V = v + \omega$ випливає, що v є ортогональна проекція елемента V на підпростір $H_1(\Omega)$, а ω – ортогональна проекція V на $H_2(\Omega)$. Тому, взявши в просторах $H_1(\Omega)$ і $H_2(\Omega)$ повні системи $\{\varphi_k\}$ і $\{\psi_k\}$, можна знайти коефіцієнти розкладання $v = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k$, мінімізуючи вираз

$$\left\| V - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k \right\|, \quad (1.21)$$

або коефіцієнти розкладання $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$, мінімізуючи вираз

$$\left\| V - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k \right\| \quad (1.22)$$

а потім визначити v з виразу

$$v = V - \omega = V - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k.$$

Відомо, що знаходження елемента v рівнозначно такій варіаційній задачі: знайти розв'язок рівняння (1.19), що має найменшу норму. Отже, для знаходження v можна скористатися мінімізацією функціоналу

$$\|Bv - f\| + \alpha \|v\|, \quad (1.23)$$

(де α – так званий параметр регуляризації), що призводить до стійких схем рахунку. Становить певний інтерес використання функціонала (1.23) під час чисельної реалізації методу ортогональних проекцій.

5. Метод Треффтца. У цьому методі по суті розв'язується крайова задача (1.8). На розв'язках однорідного рівняння $Lu = 0$ будується функціонал $\varphi(u)$, мінімум якого досягається на розв'язку розглянутої крайової задачі. Для рівняння Лапласа такий функціонал має вигляд

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dv, \quad (1.24)$$

і для знаходження коефіцієнтів розкладання $c_k^{(N)}$ наближеного розв'язку

$$u^N = \sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \psi_k,$$

де $\{\psi_k\}$ – система гармонічних функцій, розв'язується система рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \left(\psi_k, \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right) = \left(\psi, \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.25)$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна за зовнішньою нормаллю, а скалярні добутки в (1.25) визначаються на границі Γ .

Метод застосовується досить рідко через труднощі побудови розв'язків основного диференціального рівняння. Так, наприклад, у роботі [115] для розв'язування плоскої задачі теорії пружності в прямокутнику цим методом використано бігармонічні поліноми, однак у цій самій монографії точність одержаних результатів під час розгляду конкретних задач є невисокою. Як написано у роботі [114], «...збіжність методу в цілому не гарантується. Чисельні розрахунки дають абсолютно незадовільні результати навіть у вельми "поміркованих" випадках». Слід зазначити, що метод Треффтца прилягає до методу найменших квадратів по границі і в багатьох випадках еквівалентний йому.

6. *Метод колокації*. Лінійна система для визначення коефіцієнтів $b_k^{(N)}$ розкладання в цьому методі визначаються з (1.13), якщо запропонувати, що функціонали ω_j вибрані з умови

$$\omega_j[f(x)] = f(x_j), \quad (1.26)$$

де $f(x)$ – довільна функція з $R_2(\Omega)$, а x_j – вузли колокації. Ясно, що коли вони вибрані всюди щільно на Ω , то система $\{\omega_j\}_{k=1}^\infty$ тотальна в просторі $C(\Omega)$ усіх безперервних на Ω функцій. Система (1.13) для цього випадку набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k(x_j) = f(x_j). \quad (1.27)$$

1.3 Методи розв'язання системних задач механіки деформівного твердого тіла

В аерокосмічній техніці гладкі та підкріплені пластини входять до складу просторових тонкостінних систем (несні елементи крила, оперення, фюзеляжу, гермокабіни тощо). У цих системах вони складним чином взаємодіють на суміжних границях між собою, а також з оболонковими і

стрижневими елементами. Така взаємодія створює необхідність у застосуванні методів, спрямованих на розв'язання системних задач, що враховують складні взаємозв'язки між усіма конструктивними елементами.

1.3.1 Чисельні методи

Для розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла застосовуються різні чисельні методи, кожен з яких має свої переваги та обмеження. Нижче наведено огляд основних методів, які широко використовуються у цій галузі.

1. Метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним з найпоширеніших та найефективніших чисельних методів. Він полягає у розбитті складної області на скінченну кількість простіших підобластей, званих скінченними елементами. Кожен з цих елементів аналізується окремо, а потім результати об'єднуються для отримання загальної картини напружено-деформованого стану всієї області. МСЕ широко застосовується для моделювання напружень, деформацій та поведінки матеріалів під впливом зовнішніх навантажень. З його допомогою можна ефективно розв'язувати задачі зі складною геометрією і різноманітними умовами навантаження.

Область, що досліджується, розбивається на скінченні елементи, які мають просту геометричну форму, таку як трикутник, квадрат, тетраедр або куб. Кожному скінченному елементу відповідають спеціальні функції форми, що апроксимують розв'язок у межах елемента. Ці функції зазвичай є поліномами і повинні забезпечувати неперервність і гладкість розв'язку на межах між елементами. Наприклад, для лінійного трикутного елемента функції форми можуть бути задані як

$$N1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta,$$

$$N2(\xi, \eta) = \xi,$$

$$N3(\xi, \eta) = \eta,$$

де ξ і η – локальні координати в межах елемента.

На основі функцій форми і властивостей матеріалу будується система алгебраїчних рівнянь. Для цього використовуються принципи варіаційного числення, такі як принцип мінімуму потенціальної енергії або принцип Гальоркіна. Математично це виражається як інтегральні рівняння, що перетворюються на систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Kd = f$$

де K – матриця жорсткості, d – вектор переміщень вузлів, f – вектор зовнішніх сил.

Крайові умови накладаються на систему рівнянь. Це може включати фіксування переміщень або зусиль на границях області. Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою чисельних методів, таких як метод Гаусса, метод сполучених градієнтів, чи інших ефективні алгоритмів для розв'язання великих систем лінійних рівнянь. Отримані результати, такі як поля переміщень, напружень і деформацій, аналізуються для кожного скінченних елементів та для всієї конструкції в цілому. Це дозволяє зробити висновки про поведінку конструкції під дією зовнішніх навантажень.

Цей метод має високу обчислювальну складність і потребує значних ресурсів для складних задач, а якість розв'язку сильно залежить від вибору та якості сітки скінченних елементів. Незважаючи на ці недоліки, МСЕ залишається одним з найпоширеніших і ефективних інструментів для аналізу механічних властивостей деформівних твердих тіл і широко застосовується в різних галузях науки і техніки.

2. Метод скінченних різниць

Метод скінченних різниць апроксимує диференціальні рівняння різницеви аналогами на сітці точок усередині області. Цей метод є ефективним для розв'язання рівнянь у частинних похідних у просторах великої розмірності. МСР широко застосовується для задач теплопровідності, хвильових процесів та динаміки рідин, забезпечуючи високу точність при відповідному виборі сітки та кроку різницювання.

3. Метод граничних елементів

Метод граничних елементів відрізняється від інших методів тим, що область розбивається на скінченні елементи лише на її межі. Цей підхід дозволяє зменшити розмірність задачі, зосереджуючись на поведінці на границі області. МГЕ є особливо ефективним для задач з осесиметричною геометрією та для аналізу проблем, де основну роль відіграють крайові умови. Він застосовується в задачах електростатики, потенціальної течії та теплопровідності.

Наведені чисельні методи демонструють різноманітність підходів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Вибір методу залежить від специфіки задачі, вимог до точності та обчислювальних ресурсів. Метод скінченних елементів є універсальним та широко застосовуваним, тоді як метод скінченних об'ємів, метод скінченних різниць та метод граничних елементів мають свої ніші застосування, забезпечуючи ефективне розв'язання певних класів задач. Розуміння особливостей кожного з методів дозволяє обирати найбільш адекватний підхід для конкретних проблем механіки деформівного твердого тіла.

Ці методи часто комбінуються з алгоритмами розв'язування нелінійних рівнянь і методами оптимізації для розв'язування широкого спектра задач механіки деформівного твердого тіла.

Під час розв'язання задач теорії пружності чисельні методи, незважаючи на їхню ефективність і широке застосування, мають певні недоліки порівняно з аналітичними методами. Одним із ключових обмежень є апроксимація, яка призводить до втрати точності вихідної математичної моделі. Зокрема, чисельні методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ), використовують дискретизацію областей і спрощені моделі матеріалів, що може призвести до втрати деяких деталей або особливостей поведінки матеріалу.

Крім того, чисельні методи зазвичай вимагають значних обчислювальних ресурсів, особливо при моделюванні складних геометрій або нелінійних матеріалів. Це може призвести до обмежень у швидкості розрахунку і доступності моделювання для застосування в реальному часі або у великих масштабах. Тому розробка аналітичних методів є актуальною.

Про деякі аналітичні методи йтиметься в наступних підрозділах роботи.

1.3.2 Метод сполучення конструктивних елементів

Метод сполучення конструктивних елементів [116], [113] – це метод аналізу складних систем, що базується на методі переміщень, який застосовують у механіці деформівних тіл, включно з методом скінченних елементів і варіаційно-різницевиими методами. На відміну від інших підходів, МСКЕ подає систему як ансамбль конструктивних елементів, які взаємодіють по лініях і точках. Це дає змогу використовувати аналітичні розв'язки крайових задач і відрізняє його від суперелементних методів. Процедура розв'язання в переміщеннях має кілька переваг: не потрібно виконувати рівняння спільності деформацій, одержуються всі елементи напружено-деформованого стану, обчислювальні операції прості й доступні для огляду, а також граничні умови можуть бути легко враховані. Основні невідомі – кінематичні функції переміщення і кута повороту, що апроксимуються функціональними рядами між вузловими точками. Розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь високого порядку, отриманих виконанням статичних умов сполучення між конструктивними елементами.

Для зменшення складності розрахунку конструкції порядок системи лінійних рівнянь можна знизити шляхом попереднього з'єднання конструктивних елементів у підструктури, такі як відсіки, шпангоути і нервюри. Однак навіть у цьому випадку система залишається складною, що призводить до труднощів під час розв'язання. У зв'язку з цим розглядається ітераційний метод, який полягає в послідовних наближеннях. Цей метод має перевагу перед прямим методом, оскільки не потребує застосування складних систем рівнянь. Залежно від характеристик конструкції ітераційний процес може бути збіжним чи не досягати збіжності. В останньому випадку його можна модифікувати з використанням методів неповної релаксації для забезпечення збіжності.

Метод розрахунку конструкції в переміщеннях базується на побудові загальних розв'язків для рівнянь рівноваги елементів конструкції, таких як

оболонки, пластини і балки. Для балок розв'язок може бути знайдений аналітично, тоді як для елементів у вигляді оболонок і пластин це пов'язано з розв'язуванням складної крайової задачі для системи рівнянь із частинними похідними. Використовуються розрахункові моделі з лінійної теорії деформування балок, пластин і оболонок, а також варіаційний метод Бубнова-Гальоркіна для побудови аналітичних розв'язків. Ці методи разом дають змогу отримати точний розв'язок задачі за умови використання сучасних комп'ютерів.

Конструкцію розбирають на елементи та вузли шляхом видалення ідеальних кінематичних зв'язків на лініях та в точках сполучення її частин (рис. 1.3). Вузлам і елементам присвоюють відповідні кінематичні ступені свободи у вигляді констант і функцій. Як вузловим точкам, так і кожній кінцевій точці осьової лінії балки присвоюють шість кінематичних ступенів свободи. Кожній осьовій лінії призначають чотири функціональні ступені свободи, включно з трьома переміщеннями і кутом закручування. Кожному краю оболонки і пластини присвоюється чотири функціональні ступені свободи, включно з трьома переміщеннями і частинною похідною.

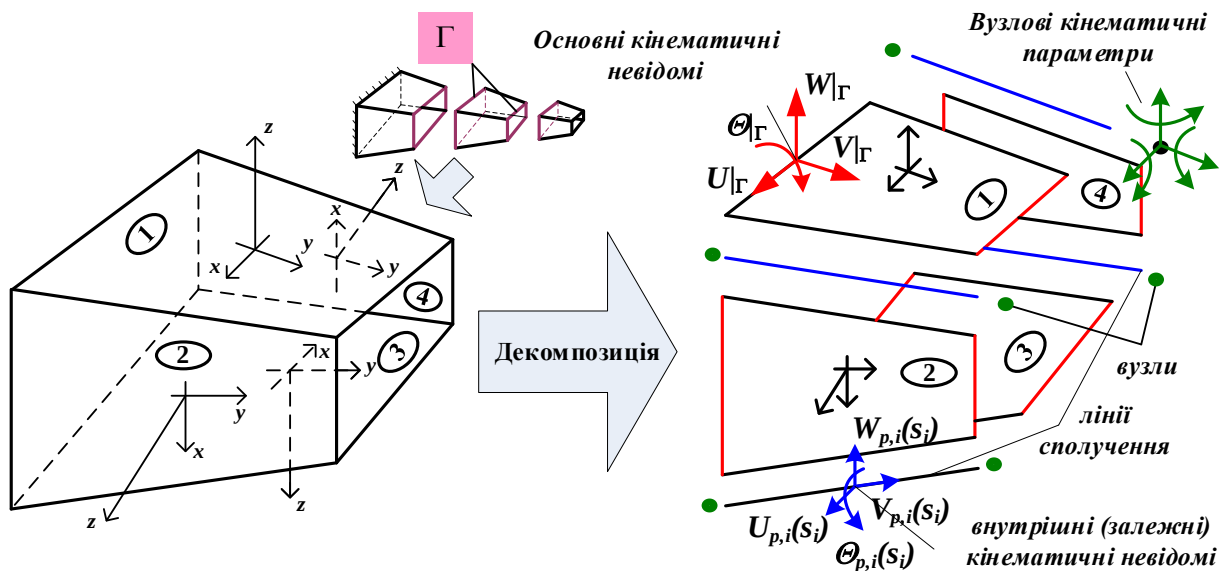


Рисунок 1.3 – Декомпозиція складної системи на складові блоки

Видалення ідеальних кінематичних зв'язків призводить до появи погонних зусиль і моментів на краях поверхонь елементів, а також зосереджених

сил у кутових точках. Ці реакції розподіляються між балками та вузлами відповідно. Загальний розв'язок для кожного елемента конструкції виражається через крайові функції та параметри. Шляхом диференціювання отримують аналітичні вирази для погонних зусиль і моментів, а також для зосереджених сил у кутових точках і кінцевих параметрів брусів. Ці дані використовуються для синтезу ансамблю елементів і вузлів у конструкцію.

Для з'єднання елементів і вузлів конструкції із зовнішнім навантаженням необхідно виконати лише статичні умови на сітці ліній сполучення і у вузлових точках, що забезпечують рівновагу всіх елементів і вузлів. Метод переміщень автоматично виконує кінематичні умови сполучення. Процес сполучення полягає в забезпеченні рівноваги кожного вузла шляхом складання шести алгебраїчних рівнянь рівноваги. Загальний розв'язок для елементів конструкції виражається через крайові функції та параметри. Розрахунок можна виконати прямим або ітераційним способом. За прямого способу потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь, яка може виявитись громіздкою. Ітераційний метод вимагає послідовних наближень, але має перевагу в нижчому порядку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.3.3 Метод розширення області до канонічної

Метод розширення області до канонічної [117], [118] детально розглянуто в роботі [6] на прикладі трапецієподібної області Ω з ліпшицевою межею $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$ (рис.1.4), де потрібно відшукати функцію $u(x, y)$, що виконує бігармонічне рівняння і крайові умови на контурі Γ , задані у напруженнях: $\sigma_n|_{\Gamma_i} = \sigma_i(s_i)$, $\tau_n|_{\Gamma_i} = \tau_i(s_i)$. Додатні напрями нормальних і дотичних напружень, що діють на границі, наведено на рис.1.5.

Для однозначної розв'язності сформульованої крайової задачі необхідно, щоб система навантажень, що діє на границі області, перебувала в рівновазі, і виконувалися умови узгодження в кутових точках. Узгодженість напружень у непрямому куті означає таке: сума проекцій напружень у кутовій точці однієї сторони на нормаль другої сторони має дорівнювати сумі проекцій напружень

у тій самій точці другої, що належить другій стороні, на нормаль першої. Якщо кут прямий, то ці умови перетворюються на умови парності дотичних напружень. Вимога узгодженості крайових умов у кутових точках є наслідком підходу до розв'язування задачі, що розглядається, з позицій безмоментної (симетричної) теорії пружності. Порушення умов узгодження призведе до появи навіколо кута особливості розв'язку, характер якої заздалегідь невідомий і, отже, не може бути заздалегідь врахований. В узгодженості крайових умов не буде необхідності під час розв'язання задачі методами несиметричної теорії пружності (середовище Коссера) [119], [120], [121], [122], [123].

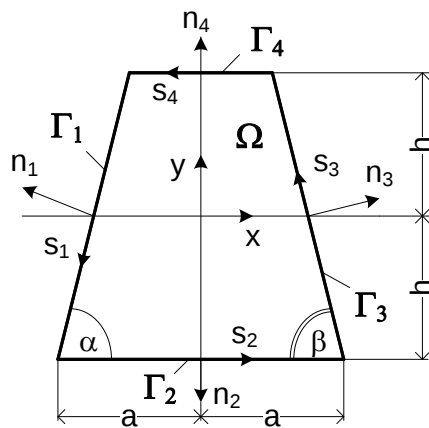


Рисунок 1.4 – Основні позначення

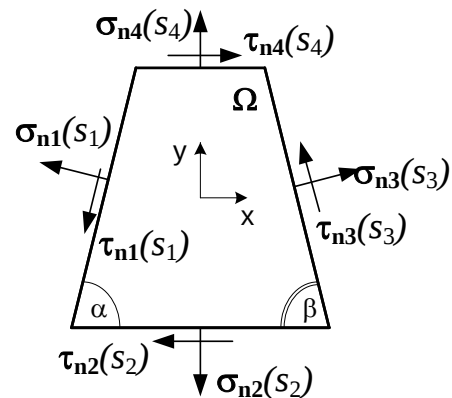


Рисунок 1.5 – Напруження

Для визначення функції напружень $u(x, y)$ вихідну область розширюють до канонічної (прямокутної), у якій уже відомий розв'язок плоскої задачі теорії пружності. Застосування в розширеній області додаткових фіктивних впливів і варіація їхньої інтенсивності за допомогою методу найменших квадратів дає змогу домогтися виконання граничних умов у вихідній області.

Вважається, що зовнішні навантаження (нормальні й дотичні), як ті, що діють на вихідний об'єкт, так і фіктивні, виконують умови Діріхле, тобто можуть бути розкладені в узагальнені ряди Фур'є.

1.3.4 Метод ідентифікації крайових умов

Метод ідентифікації крайових умов (МІКУ) можна віднести до аналітико-чисельних методів (у науці їх також називають спектральними). Цей

метод покликаний розв'язувати проблеми пружної стійкості та пружних коливань, що виникають насамперед під час проєктування, виробництва та експлуатації аерокосмічної техніки, де ці проблеми стоять найгостріше.

За допомогою цього методу було вперше розв'язано непросту задачу про стійкість нервюр, що працюють у складі силового кесона крила [124], [125]. Згодом (і також уперше в галузі) було сформульовано доволі складну задачу про стійкість відсіку силового кесона крила [33], [34].

Основна ідея МІКУ полягає в тому, що дослідження будь-якої складної системи (не обов'язково механічної) можна звести до аналізу одного виділеного її блок-елемента, як тільки адекватно встановлені нетривіальні умови взаємодії блоку з рештою системи. Через зазначені умови взаємодії всі властивості системи, що залишилися, трансформуються до виділеного блоку. Спочатку метод було призначено для розв'язання питань стійкості та коливань [33] з невідомим параметром (критичного навантаження або власних частот). У багатьох випадках МІКУ виявляється більш оперативним і більш точним порівняно з іншими методами, наприклад, з МСЕ. МІКУ слід називати системним методом, оскільки для розв'язання інженерних задач процедура методу ідентифікації крайових умов перегукується з описаними раніше методами та підходами, які органічно входять до нього як складові частини.

Метод реалізується в **три етапи**:

Перший етап – визначення вихідного (незбудженого) стану системи, стійкість якого підлягає дослідженню надалі. Методом дослідження на цьому етапі є метод сполучення конструктивних елементів (МСКЕ). Аналіз конструктивних елементів неканонічної форми виконується методом розширення заданої області до канонічної (МРОК) у поєднанні з методом найменших квадратів на межі.

Другий етап методу – формулювання і розв'язання так званих проміжних задач. Це задачі визначення жорсткості (піддатливості) граничного контуру як окремого елемента деякої системи (підсистеми), так і всієї системи (підсистеми загалом).

Припустімо, що із заданої системи виділено блок (підсистему), що цікавить дослідника, яка взаємодіє на своїй границі Γ_1 з рештою системи, що також являє собою деяку систему. Назвемо цю систему прикордонною підсистемою. Цю ситуацію зображено (умовно) на рис. 1.6.

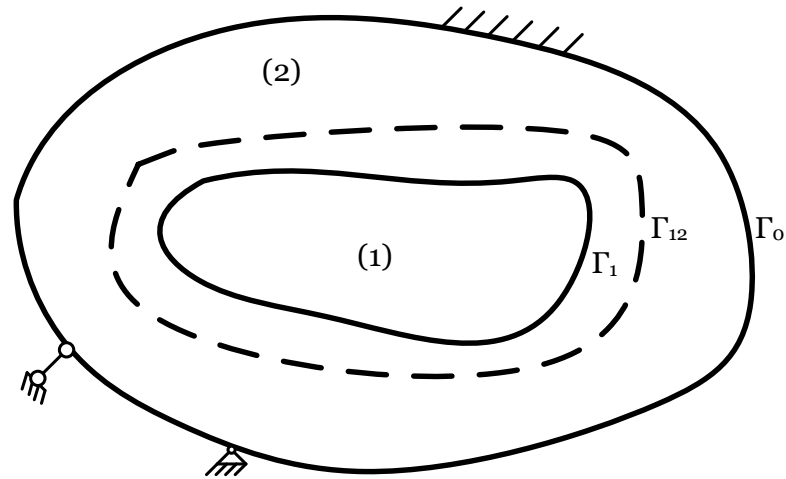


Рисунок 1.6 – Виділений блок (1) і прикордонна підсистема (2)

Нехай дана система є силовою, і по своїй границі Γ_0 вона закріплена так, що усунені її переміщення як жорсткого цілого. Не виключається випадок, коли частина границі Γ_1 виділеного блоку є частиною границі Γ_0 всієї системи. Уся система попередньо напружена так, що її напружено-деформований стан (НДС) є переважно безмоментним і підлягає випробуванню на стійкість і коливання.

Основне положення системного аналізу відкриває шлях, що дає змогу редукувати аналіз усієї системи до аналізу окремо взятої її підсистеми (1), якщо тільки правильно встановлені умови її взаємодії з підсистемою (2), тобто ідентифіковано крайові умови на границі Γ_1 (такі умови називаються внутрішніми крайовими умовами).

Припустимо далі, що області (1) і (2) моделюються двовимірними елементами (оболонки, пластини). Тоді на границі Γ_1 мають місце чотири кінематичні функції, що визначають вектор $\vec{U}(u, v, w, \phi)$, компоненти якого є функціями двох змінних, і чотири статичні функції (зусилля і моменти), що

визначають вектор $\vec{F}(f_1, f_2, f_3, m)$, компоненти якого є погонні зусилля f_i і погонний момент m .

Нехай тепер на межі Γ_1 задано невідомий вектор $\vec{U}$. Тоді цим вектором однозначно визначено вектор $\vec{F}$, але зв'язок між цими векторами невідомий. Завдання ідентифікації крайових умов і полягає у встановленні цього зв'язку (метод переміщень).

Аналогічні зв'язки (через теорему єдності) мають місце в методі сил, і в методі змішаному.

Таким чином, ідентифіковані крайові умови являють собою природні крайові умови для задачі в області (1), а це відкриває великі перспективи в розв'язанні задач для блоку (підсистеми). Це власне задачі стійкості та коливань.

Третій етап методу – це формулювання і розв'язання власне задач пружної стійкості та пружних коливань. Задачі цього етапу допускають систематизацію, і вони можуть бути каталогізовані, тобто внесені в єдиний каталог стандартизованих задач. Стосовно силової системи, наприклад, планера літака – це задачі стійкості для панелей, нервюр, лонжеронів, шпангоутів оболонок фюзеляжу тощо. Це дає змогу розробити єдиний системний обчислювальний комплекс для дослідження стійкості та коливань тримальної силової конструкції планера літального апарата.

Аналіз задач, що стоять на кожному етапі реалізації методу, з теоретичного погляду базується на сучасному аналізі (функціональний аналіз, теорія крайових задач для систем рівнянь із частинними похідними високого порядку, теорія операторів у гільбертових просторах Соболева та Соболева-Слободецького, теореми вкладення, продовження та теореми про сліди, леми Лакса-Мільграма та Брембля-Гільберта).

Як з'ясувалося [18], МІКУ ефективний не тільки під час розв'язування задач стійкості та коливань складних систем, а й у задачах статки, у яких відсутній невідомий параметр, що набагато полегшує проведення методу. Але проблема ідентифікації крайових умов при цьому зберігається. Процедура

ідентифікації істотно може бути спрощена й оптимізована, якщо скористатися послугами МСЕ. У цьому й полягає ідея синтезу МІКУ з МСЕ, яка буде розглянута далі в роботі. Якщо в оригінальному МІКУ розгляд проводився за схемою: «система $\rightarrow$ виділений блок-елемент і частина системи, що залишилася $\rightarrow$ аналіз системи, що залишилася, за МСКЕ із залученням МРОК $\rightarrow$ ідентифікація крайових умов для блок-елемента $\rightarrow$ аналіз блок-елемента», то тепер у задачах статички із залученням МСЕ ця схема набагато спрощується: «аналіз усієї системи за допомогою МСЕ $\rightarrow$ ідентифікація крайових умов для блок-елемента за МСЕ $\rightarrow$ аналіз виділеного блок-елемента за МСКЕ із залученням методу редукції (МР)».

Для отримання розв'язків повністю неоднорідних крайових задач в аналітико-обчислювальній формі в роботі застосовується метод редукції (МР), сутність якого полягає у зведенні повністю неоднорідної крайової задачі до напіводнорідної з однорідними крайовими умовами та ненульовою правою частиною системи розв'язних рівнянь (або одного рівняння для потенціальної функції, якщо її можна ввести). Під аналітико-обчислювальним розв'язком тут розуміють розв'язок, виписаний явно у вигляді аналітичної структури або конструкції, параметри якого визначають із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому актуальною видається проблема отримання з необхідною точністю наближених аналітичних та аналітико-обчислювальних розв'язків складних двовимірних крайових задач, якими є задачі теорії оболонок і пластин довільної геометрії.

Для аналізу напружено-деформованого стану панелі крила, побудови аналітико-чисельного розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі для виділеного конструктивного елемента – прямокутної пластини та розв'язання низки інших прикладних задач у даній роботі основну роль відіграє МІКУ у формі методу редукції. Тому далі в роботі буде описана процедура МР стосовно розв'язування повністю неоднорідних крайових задач теорії пружності прямокутних пластин, що описуються диференціальними рівняннями другого –

плоска задача теорії пружності та четвертого порядків – задача вигину (цього достатньо для опису багатьох задач механіки деформівного твердого тіла).

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертації було проведено ґрунтовний аналіз поточного стану розвитку методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій. Огляд наукової літератури показав, що існує значна кількість як аналітичних, так і чисельних методів, які застосовуються для розв'язання задач дослідження напружено-деформованого стану. Аналітичні підходи забезпечують високу точність розв'язків за рахунок використання апроксимаційних функцій, що виконують крайові умови. Проте їх застосування обмежене складністю обчислень для реальних конструкцій з нерегулярною геометрією та умовами навантаження.

Аналіз чисельних методів виявив, що метод скінченних елементів залишається найбільш широко застосовуваним та індустріально реалізованим підходом для розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Однак, як зазначено, цей метод має свої обмеження, зокрема, труднощі з забезпеченням точності і збіжності розв'язків, пов'язані з поданням неперервного суцільного середовища у вигляді системи дискретних елементів.

Відзначено також важливість розробки та застосування нових підходів до експериментальної верифікації числових моделей, що є ключовим для підтвердження їх адекватності та надійності.

У цій дисертації обґрунтовано вибір методів, які будуть застосовуватися для розв'язання задач теорії пружності тонкостінних конструкцій. Зокрема, метод сполучення конструктивних елементів та метод редукції дозволяють будувати розв'язки задач аналізу складних систем на основі композиції розв'язків для окремих елементів. Цей підхід забезпечує можливість точного урахування взаємодії елементів у системі та сприяє підвищенню точності отримуваних результатів. Також для підвищення точності розрахунків тонкостінних просторових систем є можливість реалізації зв'язку між досліджуваними

аналітичними методами (МІКУ, МСКЕ, МР) та методом скінчених елементів, який має численні реалізації у вигляді інженерного програмного забезпечення.

Таким чином, проведений аналіз підтвердив актуальність та доцільність використання зазначених методів у дослідженні пружних характеристик тонкостінних конструкцій. Подальші розділи дисертації будуть присвячені детальному опису реалізації цих методів та їх застосуванню до конкретних прикладних задач.

РОЗДІЛ 2

ФОРМУЛЮВАННЯ І ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ТОНКОСТІННОЇ ПРОСТОРОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Відома задача Діріхле описується диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку і відомими значеннями шуканої функції на границі досліджуваної області. Задачі, що розглядаються й розв'язуються в цій роботі, можна назвати задачами типу Діріхле, але високого порядку $2m$. При формулюванні задач типу Діріхле високого порядку також вважають відомими значення шуканого розв'язку аж до похідних порядку $2m - 1$ від нього на межі розглянутої області. Розв'язувана тут задача є повністю неоднорідною, а саме: ненульовими є як крайові умови, так і права частина диференціального рівняння – рівняння рівновеликості деякої просторової системи.

Аналітико-чисельні варіаційні методи, як було зазначено в розділі 1, останнім часом набули назву «спектральні методи» [28]. Нині спектральним методом ми називаємо низку методик і способів, які дають змогу одержувати шуканий аналітичний розв'язок, записаний у вигляді набору базисних функцій, помножених на поправочні коефіцієнти, визначення яких відбувається після розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь. Відмінність аналітико-чисельних методів від чисельних полягає у визначенні використовуваних базисних функцій: у спектральних методах функції ненульові в усій області, а, наприклад, в методі скінченних елементів – апроксимувальні функції не дорівнюють нулю тільки в малих підобластях.

У цьому розділі подано опис і подальший розвиток двох аналітико-чисельних методів: методу ідентифікації крайових умов у формі методу редукції та глобального спектрального методу, у якому використовують комбіновані функції, що заздалегідь виконують усі крайові умови.

Для розв'язання складної системи загалом необхідно скласти систему рівнянь високого порядку, що є трудомістким завданням. У зв'язку з цим існують два практичні підходи до аналізу конструкції: системний і

декомпозиційний. Декомпозиційний підхід, залежно від мети і складності завдання, може бути реалізовано за допомогою методів МСКЕ, МРОК, МІКУ і методу редукції, застосовуваного в цій роботі. Метод редукції передбачає заміну системи рівнянь високого порядку на окремо розглянуті підсистеми меншої розмірності та обчислювальної складності, які є розв'язаннями задач для окремих елементів. Узгодження роботи цих конструктивних елементів здійснюється шляхом знаходження невідомих як в області самого елемента, справляючи рівняння рівноваги, так і на границі, підкоряючись зовнішнім крайовим умовам і умовам контакту на лініях сполучення конструктивних елементів.

Системний метод передбачає, що для розв'язання системи рівнянь високого порядку, які можна скласти для конструкції загалом, необхідно дібрати універсальну функцію. Ця функція повинна автоматично виконувати умови обпирання на зовнішні границі конструкції – складальної одиниці, а також усі умови контактної взаємодії між деталями збірки, у разі тонкостінних просторових конструкцій – по лініях їх сполучення. Цей метод можна назвати методом підбору універсальної функції, що включає, наприклад, метод Рітца – Міхліна [22], [21].

Наступні підрозділи присвячено опису цих підходів: декомпозиційний підхід розглянуто у підрозділах 2.1, 2.2, а системний – у підрозділах 2.3 та 2.4.

2.1 Формулювання задачі Діріхле в прямокутнику для систем рівнянь високого порядку

Розглядається задача Діріхле для систем високого (але скінченного) порядку. Діагональні (провідні) оператори в теорії оболонок і пластин мають або другий, або четвертий порядки. Симетричність і тим більше додатна визначеність цих операторів не потрібна, а їхні коефіцієнти – функції двох змінних – можуть бути як змінними, так і постійними. Гладкість цих коефіцієнтів поки не обговорюється. Однак зрозуміло: чим вона вища, тим вища і гладкість шуканих розв'язків. У такому загальному формулюванні розглянута задача може

і не мати розв'язку в класичному його розумінні. Крім того, границя прямокутника має кутові точки, тобто область Ω як опуклий багатокутник є областю Ліпшиця, а в кутових точках границі можуть виникати сингулярні однорідні розв'язки (особливості). Але незалежно від наявності кутових точок границі розв'язок залишає скінченною енергію деформування (це умова його існування). Отже, дано систему двовимірних диференціальних рівнянь у частинних похідних у прямокутній області $\Omega^* = \{(x, y): x \in (-a; +a), y \in (-b; +b)\}$ відносно вектор-функції $\mathbf{g}(x, y) = (\underbrace{g_1, g_2, \dots, g_{k_1}}_{k_1 \text{ раз}}, \underbrace{g_{k_1+1}, \dots, g_{k_1+k_2}}_{k_2 \text{ раз}})$:

$$L\mathbf{g} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} g_j = f_j \quad \text{в } \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, k_1 + k_2. \quad (2.1)$$

Тут діагональні оператори L_{ii} для $i = 1 \dots k_1$ мають другий порядок, а для $i = k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2$ – четвертий порядок; отже, сумарний порядок усієї системи дорівнює $N = 2k_1 + 4k_2$, що відповідає всім відомим операторам в задачах оболонок і пластин у тому розумінні, що система рівнянь (2.1) еквівалентна одному рівнянню порядку N . Додатково зазначимо, що оператори для k_1 -невідомих – споріднені з оператором Лапласа або Гельмгольца, а решта операторів L_{ii} – з бігармонічним оператором. Існування випадку $k_1 = 0$ (або $k_2 = 0$) не виключено, але якщо $k_1 = 0$, то $k_2 \neq 0$ і навпаки, тобто всі оператори L_{ii} мають або другий, або четвертий порядки, які зустрічаються в багатьох задачах теорії пружності пластин та оболонок [126], [127]. Оператори L_{ij} за $i \neq j$ можуть мати порядок вищий, ніж порядок оператора L_{ii} , якщо останній оператор другого порядку, але не вищий за четвертий, якщо оператор L_{ii} четвертого порядку. Це має місце, наприклад, у класичній теорії непологих оболонок у якій оператор L_{23} має третій порядок і діє на третю компоненту вектора переміщень «w», але в третьому рівнянні діагональний оператор L_{33} , який діє на ту саму компоненту «w», має вже четвертий порядок. Тому під час підрахунку порядку всієї системи враховуються тільки порядки головних (діагональних) операторів L_{ii} .

Слід зазначити, що описані в роботі методи мають універсальний характер і можуть бути застосовані для розв'язання будь-яких стаціонарних крайових задач природничих наук.

Для формулювання крайових умов розіб'ємо невідомі компоненти розв'язку на дві групи: перша група містить усі невідомі з оператором L_{ii} другого порядку (представника цієї групи позначимо через $\mathcal{E}$), а в другу групу входять невідомі, які відповідають діагональному оператору L_{ii} , що має четвертий порядок (представника цієї групи позначимо через $\mathcal{Y}$). Таким чином, для невідомих першого типу на границі Γ^* області Ω^* необхідно задавати тільки їхні величини (функції від контурної координати), а для невідомих другого типу – як самі величини, так і нормальні похідні від них. Завдяки введеним позначенням крайові умови задачі Діріхле запишуться в компактній формі $((x, y) \in \Gamma^*)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \bar{\mathcal{E}}; \\ \mathcal{Y} &= \bar{\mathcal{Y}}, \quad \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial n} = \tilde{\mathcal{Y}}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Тут значення заданих функцій $\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{Y}}$, $\tilde{\mathcal{Y}}$ повинні виконувати очевидні умови узгодження як у кутових точках границі Γ^* , так і на її сегментах $(-a; +a)$ при $y = \text{const}$ і $(-b; +b)$ при $x = \text{const}$.

З механічного змісту функцій крайових умов (2.2) випливає, що функції типу $\bar{\mathcal{E}}$ і $\tilde{\mathcal{Y}}$ мають бути неперервними, а функція $\bar{\mathcal{Y}}$ – неперервно диференційована. Що ж стосується гладкості правих частин рівняння (2.1), то компоненти вектора-функції $\mathbf{f}$ є функціоналами. Це означає, що у складі цих функцій можуть бути присутніми не тільки розподілені по всій поверхні пластини безперервні функції, але й функції розривні: розподілені по частині поверхні пластини (виражені через двовимірні функції Хевісайда), розподілені за деякими лініями, які лежать на серединній поверхні пластини (добуток одновимірної функції Хевісайда вздовж лінії на одновимірну Дельта-функцію), а також зосереджені сили (двовимірні Дельта-функції). Якщо вимоги гладкості вхідних даних дотримано, то з умови скінченності енергії деформації випливає, що шукана вектор-функція $\mathbf{u}$ є елементом простору С. Л. Соболева:

$$V(\Omega^*)\mathbf{g} \in V(\Omega^*) = \left(H^{(1)}(\Omega^*)\right)^{k_1} \times \left(H^{(2)}(\Omega^*)\right)^{k_2},$$

де $H^{(m)}(\Omega^*)$ – простір С. Л. Соболева (він же $H^{(m)}(\Omega^*) \equiv W_2^{(m)}(\Omega^*)$) функцій, похідні яких до порядку m інтегруються з квадратом у Ω^* , тобто є елементами гільбертового простору $L_2(\Omega^*)$. Це попередні відомості про гладкість вхідних даних і апіорні відомості про гладкість шуканих розв'язків. Але тут є суперечність (якщо виходити з розв'язку крайової задачі (2.1) – (2.2), оскільки елементами матричного диференціального оператора $\mathbf{L}$ є оператори L_{ij} другого і (або) четвертого порядків, то шукані функції повинні допускати необхідний для цих операторів порядок диференціювання. Але в такому формулюванні крайова задача (2.1) – (2.2) може й не мати розв'язку, а наведені вище апіорні висновки про гладкість розв'язку стосуються так званого слабкого розв'язку (узагальненого), для одержання якого треба накласти на оператор $\mathbf{L}$ деяку додаткову вимогу та скористатися теоремою Лакса-Мільграма, яка узагальнює теорему Рісса [114]. Нехай оператор $\mathbf{L} \in \mathbf{V}$ – еліптичний у тому розумінні, що $L(g, g) \geq \alpha^2 \|g\|^2$.

Припустімо далі, посилаючись на теорему про продовження функції з границі в область [128], що існує вектор-функція $\mathbf{g}$, яка виконує крайові умови (2.2). Таких функцій можна побудувати багато. Нехай одна з них побудована на підставі загальної теореми про продовження функції з границі в область⁵ [129]: «За будь-якими заданими на поверхні S функціями $\varphi_j \in W_p^{l-j-1/p}(S)$, $j = 0, \dots, l-1$, можна знайти таку функцію $u \in W_p^l(\Omega)$, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} &= \varphi_j, \quad j = 0, \dots, l-1, \\ \|u\|_{W_p^l(\Omega)} &\leq c \sum_{j=0}^{l-1} \|\varphi_j\|_{W_p^{l-j-\frac{1}{p}}(S)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Розглядається область, яка є частиною n -вимірного Евклідового простору ($n = 2$), з границею $S \equiv \Gamma^*$; $W_p^l(\Omega)$ – простір С. Л. Соболева функцій,

⁴ Тут, на відміну від теорем Рісса, не вимагається симетричність оператора $\mathbf{L}$ і тим паче його додатна визначеність. Але, на щастя, оператор $\mathbf{L}$ є і додатно визначеним – наслідок з існування скінченної (додатно визначеної) енергії деформування.

⁵ Границя Γ^* області Ω^* є границею класу Ліпшиця.

інтегрованих зі ступенем p разом із похідними до порядку l . Якщо l – дробове число, то цей простір називається простором із дробовим індексом С. Л. Соболева – Л. М. Слободецького. Виконується і обернена теорема, так звана теорема про сліди.

У нашій ситуації $p = 2$ і $W_p^l(\Omega) \equiv H^{(l)}(\Omega^*)$, тобто $H^{(l)}(\Omega^*)$ – гільбертовий простір (простір зі скалярним добутком) [114]; верхній індекс l відповідає значенням k_1, k_2 . У теоремі 17' [129] обговорюється гладкість границі. У розглянутому випадку Ω^* – ліпшицева область, і нормаль до границі визначена майже всюди на Γ^* за винятком її кутових точок (з точністю до нульової міри Лебега). Тому в кутових точках границі проводять дві нормалі, а похідні за нормаллю беруть за напрямком однієї з них із дотриманням умов узгодження даних у кутових точках.

Апріорна інформація про гладкість шуканих розв'язків ($g \in V(\Omega^*)$) з урахуванням теореми про продовження функції з границі в область є мінімальною за умови, що область Ω^* є областю з границею Ліпшиця. Однак областю з границею типу Ліпшиця є будь-який опуклий багатокутник, внутрішні кути якого можуть набувати різних значень. Насправді, одержувані розв'язки мають більшу гладкість. Доречно порушити питання про те, як гладкість розв'язку залежить від величини цього внутрішнього кута. Становить інтерес наведена нижче теорема про гладкість розв'язків за наявності кутових точок. Ця теорема визначає значення кутів клиноподібної області, при переході через які гладкість може підвищитися. Оскільки в розглянутих задачах одним з основних (старших) операторів є бігармонічний, то важливо з'ясувати дійсну гладкість розв'язку задачі Діріхле для зазначеного оператора за наявності кутових точок на границі з різними внутрішніми кутами 2α клина. При цьому важливо знайти ті граничні значення названих кутів клина, при переході через які порядок гладкості розв'язку змінюється. Відповідь на порушене запитання дає теорема, що належить С. А. Халілову, опублікована в роботі [17]. Згідно з зазначеною теоремою, існують кути, за досягнення яких гладкість розв'язку в клині (у кутах прямокутника) аж до кутової точки набагато вища, ніж за кута

$2\alpha = 2\alpha_0 \approx 126^\circ$, зазначеного в теоремі. Отже, розв'язки належать $H^{(4+k)}(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$

Розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі (2.1) – (2.2) є універсальним з тієї точки зору, що він може описати механічну поведінку складних тонкостінних просторових систем, які складаються з підкріплених ребрами жорсткості (балками) пластин і оболонок. Тонкостінні просторові системи поширені в сучасній промисловості, а підкріплені пластини (панелі) є невід'ємними конструктивними елементами продукції авіаракетної, суднобудівної, машинобудівної, залізничної та інших галузей. Тому основною метою роботи є побудова розв'язку задачі типу Діріхле для прямокутної ребристої панелі, що є певною конструктивною частиною тонкостінної просторової системи, від дії на останню довільного зовнішнього навантаження.

2.2 Декомпозиційний підхід. Метод редукції розв'язку загальної задачі Діріхле в прямокутнику

Ідея методу редукції полягає у зведенні розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі до розв'язку низки напіводнорідних крайових задач [16], [17]. Під повністю неоднорідною крайовою задачею розуміємо задачу, яка описується неоднорідною системою диференціальних рівнянь (2.1) за неоднорідних крайових умов (2.2), а під напіводнорідною крайовою задачею – задача, у якій крайові умови однорідні. Останню задачу визначимо як базову задачу. Побудова розв'язку шляхом зведення (редукції) вихідної повністю неоднорідної задачі до розв'язку низки базових задач диктується лінійністю задачі (2.1) – (2.2) (справедливий принцип суперпозиції в силу лінійності задачі). Перед тим як розпочати побудову аналітико-чисельного розв'язку для об'єкта, що розглядається, необхідно визначити, чи є він самостійною одиницею, чи складовим елементом певної складної системи. Якщо елемент самостійний, то розглянуту для нього крайову задачу назвемо автономною. Якщо задача, що розглядається, стосується конструктивного елемента, виділеного зі складної системи, то цю задачу будемо називати системною задачею. Визначеність у цьому

питанні забезпечує коректну реалізацію методу редукції під час розв'язання крайової задачі. Відмінність алгоритмів проведення методу редукції полягає в поданні крайових умов. Якщо розглянутий об'єкт самостійний, то праві частини крайових умов (2.2) подаються як відомі функції з необхідними властивостями гладкості, обумовленими вище (див. теорему про продовження). Коли ж об'єкт виокремлено зі складу системи, то функції, що містяться в правих частинах крайових умов (2.2), виявляються невідомими і підлягають подальшому визначенню під час аналізу роботи всієї системи. Оскільки в другому випадку функції правих частин крайових умов (2.2) невідомі, то вони мають бути подані (конструктивно) через множину параметрів, що повністю їх визначають. У цьому разі шуканий розв'язок також буде подано через введені параметри, які визначаються з умов на лініях сполучення виділеного елемента з рештою системи. Крім можливих подань крайових умов, на реалізацію методу редукції впливає значення максимального порядку діагональних операторів із системи диференціальних рівнянь (2.1), що діють на ту чи іншу компоненту шуканого вектора розв'язку даної крайової задачі.

Загальний алгоритм побудови розв'язку методом редукції є однаковим для вищезазначених випадків, відмінність полягатиме лише у формі запису остаточного розв'язку. У випадку автономного розв'язку це не має значення, оскільки всі параметри крайових функцій відомі, а у випадку системної задачі необхідно записати розв'язок у вигляді функцій, які залежать у явному вигляді від введених невідомих параметрів.

Для реалізації методу редукції задані крайові функції в (2.2) необхідно подати у вигляді суми двох компонент:

$$\begin{aligned}\bar{E}(s) &= \pi(s) + \varphi(s), \\ \bar{Y}(s) &= \rho(s) + \psi(s),\end{aligned}\tag{2.4}$$

де «s» дорівнює або «x», або «y» залежно від фрагмента граничного контуру, про який ідеться.

Для всіх крайових задач теорії пластин максимальний порядок діагональних операторів у (2.1) дорівнює двом (для представника $\bar{E}(s)$) або чотирьом

(для представника $\bar{Y}(s)$). Функції $\pi(s)$ є лінійними двочленами, а $\rho(s)$ – кубічними, які підбираються так, щоб виконувалися умови:

$$\begin{aligned}\varphi(\pm 1) &= 0, \\ \psi(\pm 1) &= 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=\pm 1} = 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Тоді для визначення багаточленів $\pi(s)$ і $\rho(s)$ матимемо такі умови:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\pm 1) &= \pi(\pm 1), \\ \bar{Y}(\pm 1) &= \rho(\pm 1), \quad \tilde{Y}(\pm 1) = \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_{s=\pm 1},\end{aligned}\tag{2.6}$$

які однозначно визначають ці багаточлени.

Таким чином, властивості гладкості вихідних крайових функцій $\bar{E}(s)$ і $\bar{Y}(s)$ успадковуються функціями $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ відповідно. Оскільки для других компонент виконані умови (2.5), то функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ можуть бути подані у вигляді розкладів за деякими замкнутими системами функцій на компактi $[a, b]$ ⁶ [130]. Для кожної ділянки граничного контуру функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ конкретизуються так:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \xi_i(s), \\ \psi(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \zeta_i(s) \quad s \in \Gamma^*,\end{aligned}\tag{2.7}$$

де $\xi_i(s)$ і $\zeta_i(s)$ – замкнуті системи координатних функцій, а α_i і β_i – коефіцієнти розкладень в узагальнені ряди Фур'є [131] за цими функціями (детальний опис побудови замкнутих систем координатних функцій наведено в Додатку А).

У випадку, коли розглядається автономна крайова задача, то коефіцієнти α_i і β_i відомі, і тут остаточний вигляд подання розв'язку не має значення. І навпаки, якщо задача системна, то коефіцієнти α_i і β_i невідомі й підлягають

⁶ Далі здійснюється перехід до безрозмірної системи координат, тому $\pm a \Rightarrow \pm 1$, $\pm b \Rightarrow \pm 1$.

визначенню надалі. Тому остаточний вигляд розв'язку тут має бути іншим, а саме ці розв'язки мають бути виражені в явному вигляді через введені параметри α_i і β_i , а також через параметри самих крайових функцій і (або) значення їхніх похідних у кутових точках границі, які, звісно, входять до загального числа невідомих. Усі невідомі параметри надалі підлягають визначенню з аналізу роботи вихідної системи.

Переходячи до викладу методу редукції, слід зазначити, що, незважаючи на тип розглядуваної задачі (автономної чи системної), остаточний результат буде подано в аналітичному вигляді. Доцільно працювати з безрозмірною системою координат, яка отримується шляхом перетворення області Ω^* на $\Omega = \{(x, y): -1 < x < +1, -1 < y < +1\}$. Надалі під координатами (x, y) маються на увазі безрозмірні координати. Відповідно до подання крайових функцій у вигляді суми (2.4) введемо в розгляд такі багаточлени:

– дві лінійні функції $\pi_i(s)$:

$$\pi_1(s) = \frac{1}{2}(1 - s), \quad \pi_2(s) = \frac{1}{2}(1 + s), \quad (2.8)$$

– і чотири кубічні многочлени $\rho_i(s)$:

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \frac{1}{4}(2 - 3s + s^3), & \rho_3(s) &= \frac{1}{4}(1 - s - s^2 + s^3), \\ \rho_2(s) &= \frac{1}{4}(2 + 3s - s^3), & \rho_4(s) &= \frac{1}{4}(-1 - s + s^2 + s^3). \end{aligned} \quad (2.9)$$

На межі області їхнього завдання ці функції виконують умови, наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Граничні значення функцій і перших похідних $\pi_i(s)$ і $\rho_i(s)$

s	$\pi_1(s)$	$\pi_2(s)$	$\rho_1(s)$	$\rho_2(s)$	$\rho_3(s)$	$\rho_4(s)$	$\rho'_1(s)$	$\rho'_2(s)$	$\rho'_3(s)$	$\rho'_4(s)$
-1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
+1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1

Метод передбачає продовження тим чи іншим способом функцій, заданих на границі, в область із дотриманням умов, сформульованих у теоремі про

продовження (це продовження не є єдиним, його можна виконати різними способами, важливо лише дотриматись умов теореми).

На рис. 2.1 дано нумерацію кутових точок і сторін прямокутної області.

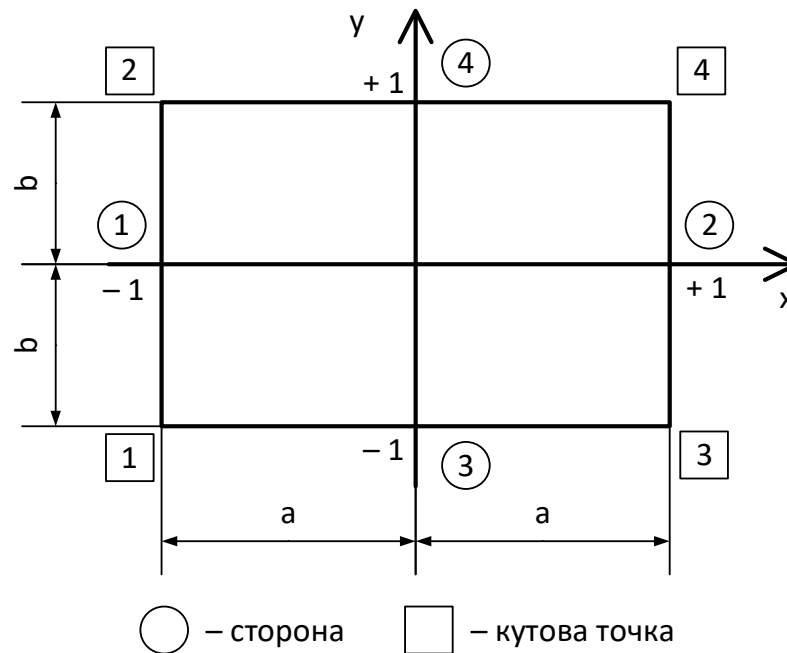


Рисунок 2.1 – Прийнята нумерація кутів і сторін пластини.

Розв'язок u через лінійність сформульованої повністю неоднорідної крайової задачі (2.1) – (2.2) шукатимемо у вигляді суми трьох компонент: спеціального часткового розв'язку u_q , функцій продовження крайових умов в область u_{1+2} і розв'язку u_0 , що коригує обраний спосіб продовження:

$$u = u_q + u_{1+2} + u_0. \quad (2.10)$$

Спеціальний окремий розв'язок – це розв'язок базової задачі, що враховує неоднорідну праву частину в системі диференціальних рівнянь або рівняння (дію зовнішнього навантаження):

$$L u_q = f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} (u_q)_j = f_j \quad \text{в } \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, k_1 + k_2; \quad (2.11)$$

і підпорядкований однорідним крайовим умовам:

$$E_q = 0, \quad Y_q = \frac{\partial Y_q}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.12)$$

де E_q, Y_q – представники компонент вектора u_q . Побудова і дослідження розв'язку цієї напіводнорідної крайової задачі є провідним напрямком цієї роботи, і, як буде показано далі, існує величезна різноманітність наближених

аналітичних розв'язків цієї крайової задачі, кожен з яких має свої незаперечні переваги перед іншими.

Розглянемо далі процедуру побудови функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$ індивідуально для кожного її представника.

Функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$, що відповідають представнику $\bar{E}$, виражаємо у вигляді суми:

$$E_{1+2} = E_1 + E_2, \quad (2.13)$$

де $E_1(x, y)$ – білінійна функція продовження, що обирає значення заданих крайових умов $\bar{E}$ у кутових точках межі та індукує на суміжних до кутової точки сторонах лінійні розподіли заданої функції; $E_2(x, y)$ – функція продовження крайових умов із чотирьох ділянок $(-1; +1)$ граничного контуру. Перша функція продовження $E_1(x, y)$:

$$E_1(x, y) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \bar{E}_{pq} \pi_p(x) \pi_q(y) \quad (2.14)$$

визначається через значення заданої крайової функції $\bar{E}$ у кутових точках

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \bar{E}(-1, -1), & \bar{E}_{12} &= \bar{E}(-1, +1), \\ \bar{E}_{21} &= \bar{E}(+1, -1), & \bar{E}_{22} &= \bar{E}(+1, +1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Після визначення першого доданка функції продовження, її другий доданок можна знайти в такому вигляді:

$$E_2(x, y) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \bar{E}_k^*(y) \pi_k(x) + \bar{E}_k^{**}(x) \pi_k(y) \right\}, \quad (2.16)$$

де $\bar{E}_k^*, \bar{E}_k^{**}$ – функції, які визначаються на чотирьох ділянках граничного контуру:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1^*(y) &= \bar{E}|_{x=-1} - E_1|_{x=-1} \equiv \varphi_1(y); \\ \bar{E}_2^*(y) &= \bar{E}|_{x=+1} - E_1|_{x=+1} \equiv \varphi_2(y); \\ \bar{E}_1^{**}(x) &= \bar{E}|_{y=-1} - E_1|_{y=-1} \equiv \varphi_3(x); \\ \bar{E}_2^{**}(x) &= \bar{E}|_{y=+1} - E_1|_{y=+1} \equiv \varphi_4(x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Якщо розглядається автономна крайова задача, то коефіцієнти в (2.7), що визначають функції $\varphi_i(s)$, $i = \overline{1,4}$, $s = \{x, y\}$ знаходять як коефіцієнти рядів Фур'є від функцій $\bar{E}_1^*(y)$, $\bar{E}_2^*(y)$, $\bar{E}_1^{**}(x)$ і $\bar{E}_2^{**}(x)$ відповідно.

Функції продовження компоненти шуканого розв'язку u_{1+2} з границі в область при розв'язанні повністю неоднорідної крайової задачі (2.1) – (2.2), що відповідають представнику Y , також виражаються у вигляді своєї суми:

$$Y_{1+2} = Y_1 + Y_2, \quad (2.18)$$

де $Y_1(x, y)$ – бікубічна функція продовження, що вибирає значення заданих крайових умов $\bar{Y}$ (самі функції-розв'язки) і $\tilde{Y}$ (перші похідні від функцій-розв'язку) у кутових точках границі, та індукує на суміжних до кутової точки сторонах прямокутної області деякі кубічні функції розглядуваної компоненти розв'язку; $Y_2(x, y)$ – функція продовження крайових умов із чотирьох ділянок $(-1; +1)$ граничного контуру. Для розглядуваного представника перша функція продовження $Y_1(x, y)$ записується в такій формі:

$$\begin{aligned} Y_1(x, y) = & \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 [\bar{Y}_{p,q} \rho_p(x) \rho_q(y) + \bar{Y}_{p+2,q} \rho_{p+2}(x) \rho_q(y)] + \\ & + \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 [\bar{Y}_{p,q+2} \rho_p(x) \rho_{q+2}(y) + \bar{Y}_{p+2,q+2} \rho_{p+2}(x) \rho_{q+2}(y)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

де коефіцієнти $\bar{Y}_{pq}$ мають так само, як і в попередньому випадку, певний фізичний смисл: вони є значеннями заданих крайових функцій $\bar{Y}$, $\tilde{Y}$ і деяких частинних похідних від них у кутових точках прямокутної області Ω :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} &= \bar{Y}(-1, -1), \bar{Y}_{12} = \bar{Y}(-1, +1), \bar{Y}_{21} = \bar{Y}(+1, -1), \bar{Y}_{22} = \bar{Y}(+1, +1); \\ \bar{Y}_{31} &= \bar{Y}_x(-1, -1), \bar{Y}_{32} = \bar{Y}_x(-1, +1), \bar{Y}_{41} = \bar{Y}_x(+1, -1), \bar{Y}_{42} = \bar{Y}_x(+1, +1); \\ \bar{Y}_{13} &= \bar{Y}_y(-1, -1), \bar{Y}_{14} = \bar{Y}_y(-1, +1), \bar{Y}_{23} = \bar{Y}_y(+1, -1), \bar{Y}_{24} = \bar{Y}_y(+1, +1); \\ \bar{Y}_{33} &= \bar{Y}_{xy}(-1, -1), \bar{Y}_{34} = \bar{Y}_{xy}(-1, +1), \bar{Y}_{43} = \bar{Y}_{xy}(+1, -1), \bar{Y}_{44} = \bar{Y}_{xy}(+1, +1); \end{aligned} \quad (2.20)$$

тут нижні індекси в правих частинах рівностей означають відповідні частинні похідні від функції Y , значення яких мають бути відомі в кожній кутовій точці границі.

Друга функція продовження, що відповідає компонентам шуканого розв'язку представника Υ , записується в такому вигляді:

$$\Upsilon_2(x, y) = \sum_{k=1}^4 \left\{ \bar{\Upsilon}_k^*(y) \rho_k(x) + \bar{\Upsilon}_k^{**}(x) \rho_k(y) \right\}, \quad (2.21)$$

тут $\bar{\Upsilon}_k^*$, $\bar{\Upsilon}_k^{**}$ – функції, які визначаються на чотирьох ділянках граничного контуру:

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_1^*(y) &= \bar{\Upsilon}|_{x=-1} - \Upsilon_1|_{x=-1} \equiv \varphi_1(y); & \bar{\Upsilon}_3^*(y) &= \left(\tilde{\Upsilon} - \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=-1} \equiv \varphi_3(y); \\ \bar{\Upsilon}_2^*(y) &= \bar{\Upsilon}|_{x=+1} - \Upsilon_1|_{x=+1} \equiv \varphi_2(y); & \bar{\Upsilon}_4^*(y) &= \left(\tilde{\Upsilon} - \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=+1} \equiv \varphi_4(y); \\ \bar{\Upsilon}_1^{**}(x) &= \bar{\Upsilon}|_{y=-1} - \Upsilon_1|_{y=-1} \equiv \varphi_5(x); & \bar{\Upsilon}_3^{**}(x) &= \left(\tilde{\Upsilon} - \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=-1} \equiv \varphi_7(x); \\ \bar{\Upsilon}_2^{**}(x) &= \bar{\Upsilon}|_{y=+1} - \Upsilon_1|_{y=+1} \equiv \varphi_6(x); & \bar{\Upsilon}_4^{**}(x) &= \left(\tilde{\Upsilon} - \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=+1} \equiv \varphi_8(x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Якщо розглядається автономна крайова задача, то коефіцієнти в (2.7), що визначають функції $\varphi_i(s)$, $i = 1 \dots 8$; $s = \{x, y\}$, знаходять як коефіцієнти рядів Фур'є від функцій $\bar{\Upsilon}_j^*(y)$, $\bar{\Upsilon}_j^{**}(x)$, $j = 1 \dots 4$ відповідно.

Побудовані таким чином функції (2.13) і (2.18) представників функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$: $\bar{\mathcal{E}}_{1+2}$ і Υ_{1+2} виконують вихідні неоднорідні крайові умови (2.2), але при цьому порушується виконання диференціального рівняння (2.1). Для того, щоб при продовженні крайових функцій із границі в область виконувалося й диференціальне рівняння неоднорідної крайової задачі, будують коригувальний розв'язок. Цей розв'язок відшуковують як розв'язок такої базової задачі:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_0 = -L\mathbf{u}_{1+2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} (u_0)_j = - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} L_{ij} (u_{1+2})_j \quad \text{в } \Omega, \\ j = 1, 2, \dots, k_1 + k_2; \end{aligned} \quad (2.23)$$

за однорідних крайових умов:

$$\bar{\mathcal{E}}_0 = 0, \quad \Upsilon_0 = \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.24)$$

Одним зі способів подання розв'язків базових задач (2.11), (2.12) і (2.23), (2.24) може бути спосіб розкладання шуканої функції в подвійні ряди за деякою повною системою координатних функцій, яка наперед виконує однорідні крайові умови:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_q(\mathcal{E}_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i(x) \xi_j(y), \\ \mathcal{Y}_q(\mathcal{Y}_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} \zeta_i(x) \zeta_j(y),\end{aligned}\tag{2.25}$$

де $\mathcal{E}_q, \mathcal{Y}_q$ і $\mathcal{E}_0, \mathcal{Y}_0$ – відповідно представники розв'язків $\mathbf{u}_q$ і $\mathbf{u}_0$, α_{ij} і β_{ij} – невідомі коефіцієнти, що визначають з розв'язку відповідних базових крайових задач. Також розв'язання базових задач можна виконати й іншими способами: застосуванням функції Гріна [15], якщо вона відома; розкладанням у ряди за власними функціями оператора L ; поданням розв'язку у вигляді одинарних рядів за деякими повними системами функцій тощо.

Запропонований спосіб побудови функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$, за термінологією робіт [9], [16], [17], [18], називається формальним продовженням. Таким чином, побудовані за цим методом функції продовження для зазначених представників покликані лише усунути неоднорідні крайові умови, не враховуючи властивості розглянутого початкового оператора L . Продовження багаточленних компонент $\mathcal{E}_1(x, y)$ і $\mathcal{Y}_1(x, y)$ можна здійснити формально [21], використовуючи подані аналітичні та компактні функції-форми (2.14) і (2.19) відповідно. Цей спосіб дозволить побудованим функціям врахувати властивості головної частини L_0 вихідного оператора L неоднорідної крайової задачі. Неформальний спосіб продовження [21] призначений для побудови других компонент функцій продовження $\mathbf{u}_{1+2}$, що відповідають представникам $\mathcal{E}_2(x, y)$ і $\mathcal{Y}_2(x, y)$, які враховували б повністю або частково властивості оператора L . Один із підходів до побудови такого продовження полягає в тому, що з оператора L виокремлюють його головну частину, яка містить похідні

порядків, що відповідають представникам $\mathcal{E}$ і $\mathcal{Y}$ шуканого розв'язку, тобто другого або четвертого:

$$L = L_0 + L_1, \quad (2.26)$$

де

$$L_0 = a_0(x, y) \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + b_0(x, y) \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}, \quad (2.27)$$

L_1 – частина вихідного оператора L , що залишилася, $k = 1$ – відповідає представнику $\mathcal{E}_2(x, y)$, а $k = 2$ – представнику $\mathcal{Y}_2(x, y)$; $a_0(x, y)$, $b_0(x, y)$ – змінні коефіцієнти, обмежені зверху, що виконують деякі умови гладкості. Потрібно, щоб змінні $a_0 > 0$ ($= \text{const}$) і $b_0 > 0$ ($= \text{const}$) в Ω , а значить L_0 – оператор еліптичного типу, що зустрічається в багатьох задач механіки деформівного тіла. З оператором еліптичного типу видається можливим побудувати розв'язок у явному вигляді для рівняння:

$$L_0 \mathbf{u}_{1+2} = 0 \quad (2.28)$$

за крайових умов (2.2), наприклад, методом розділення змінних у вигляді одинарних рядів. Якщо існування всіх похідних з L_0 і L_1 від знайденої неформальної функції продовження буде забезпечено, стане можливим будувати коригувальний розв'язок:

$$L \mathbf{u}_0(x, y) = -L \mathbf{u}_1(x, y) - L_1 \mathbf{u}_2(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (2.29)$$

де $\mathbf{u}_1$ і $\mathbf{u}_2$ – перший і другий доданки функції продовження $\mathbf{u}_{1+2}$ відповідно до подань (2.13) і (2.18).

Отже, незалежно від способу реалізації пошуку коригувального розв'язку, ми стикаємося з необхідністю розв'язання базової крайової задачі. Її формулювання та аналіз у розумінні стійкості, збіжності та точності розв'язку розглядаються у розділі 3 цієї роботи.

2.3 Формулювання задачі типу Діріхле для прямокутної ребристої панелі

У цій роботі аналітико-чисельний метод застосовується для розв'язання задачі деформування тонкостінних конструкцій. Проблема, що виникає,

пов'язана з диференціальними операторами крайових задач у сусідніх областях, які займають з'єднані елементи. Якщо ці оператори мають різний порядок, то й кількість головних крайових умов буде різною. Ця відмінність не призводить до проблем при сполученні одновимірних елементів, оскільки їхніми границями є точки. Проблеми виникають при сполученні елементів по границі, що є відрізком. Розв'язання проблеми демонструється на модельній задачі вигину стрингерної пластини.

Труднощі побудови функцій, за допомогою яких виконується сполучення конструктивних елементів, є однією з перешкод для поширення аналітико-чисельних методів у розрахунках складних конструкцій. Усунення цієї перешкоди – основна мета цього дослідження. Для її досягнення ставляться завдання побудови аналітичного базису для опису конструкції, верифікація отриманих результатів шляхом порівняння з результатами, отриманими іншими методами, дослідження збіжності наближеного розв'язку та стійкості процедури його побудови.

Нижче розглядаються крайові задачі, що описують деформації класичних тонкостінних конструктивних елементів: балок і пластин.

Усі двовимірні прямокутні області $\tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}): |\tilde{x}| < a, |\tilde{y}| < b\}$ приводяться до безрозмірної $\Omega = \{(x, y): |x| < 1, |y| < 1\}$ шляхом заміни розмірних координат на безрозмірні $x_i = \frac{\tilde{x}_i}{a_i}, y_i = \frac{\tilde{y}_i}{b_i}$.

Аналітико-чисельний розв'язок будується з використанням варіаційного принципу мінімуму повної потенціальної енергії $\delta\P = 0$. Ця енергія Π складається з енергії деформування Π_ε і потенціалу зовнішніх сил Π_p .

Варіація потенціальної енергії деформування складається з варіацій енергій елементів, що входять у конструкцію. У розглянутих нижче задачах це може бути:

а) варіація енергії узагальненого плоского напружено-деформованого стану пластини

$$\delta\P_\varepsilon^p(u, v) = b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_x \delta u_{,x} + N_{xy} (\lambda \delta u_{,y} + \delta v_{,x}) + N_y \lambda \delta v_{,y}] dx dy, \quad (2.30)$$

де

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{a(1-\nu^2)}(u_{,x} + \nu\lambda v_{,y}); & N_y &= \frac{Eh}{a(1-\nu^2)}(\lambda v_{,y} + \nu u_{,x}); \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2a(1+\nu)}(\lambda u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

– мембранні погонні зусилля; u, v – функції переміщень уздовж осі x і y відповідно; h – товщина пластини; E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона; $\lambda = a/b$ – подовження пластини; індексами x і y після коми позначено частинні похідні.

б) варіація енергії вигину класичної пластини

$$\delta \Pi_\varepsilon^b(w) = \frac{a}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_x \delta w_{,xx} - 2\lambda M_{xy} \delta w_{,xy} + M_y \lambda^2 \delta w_{,yy}] dx dy, \quad (2.32)$$

де

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{a^2}(w_{,xx} + \nu\lambda^2 w_{,yy}); & M_y &= -\frac{D}{a^2}(\lambda^2 w_{,yy} + \nu w_{,xx}); \\ M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D}{a}(1-\nu)\lambda w_{,xy} \end{aligned} \quad (2.33)$$

– погонні моменти; w – функція прогину; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість.

У класичній теорії пластин можуть також бути визначені суто статичні величини перерізних сил

$$Q_x = \frac{1}{a}(\lambda M_{yx,y} + M_{x,x}), \quad Q_y = \frac{1}{a}(\lambda M_{y,y} - M_{xy,x}). \quad (2.34)$$

в) варіація енергії розтягування-стиснення і вигину класичної балки

$$\delta \bar{\Pi}_\varepsilon^b(u, w) = \int_{-1}^1 N \delta u_{,x} + M \delta w_{,xx} dx, \quad (2.35)$$

де

$$N = E(Fu_{,x} - Sw_{,xx}), \quad M = E(Iw_{,xx} - Su_{,x}) \quad (2.36)$$

– поздовжня сила та згинальний момент; $F = hb$ – площа поперечного перерізу балки; $S = Fe, I = \frac{bh^3}{12} + e^2 F$ – статичний та осьовий моменти інерції перерізу балки відносно зміщеної на відстань e осі.

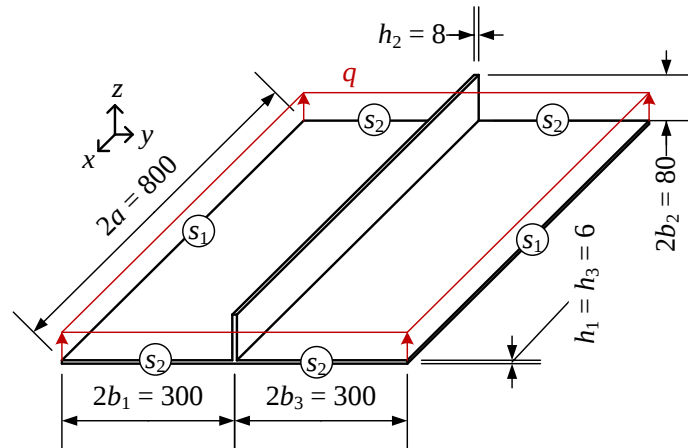


Рисунок 2.2 – Стрингерна панель, навантажена рівномірним тиском

На сторонах s_1 задано умови вільного обпирання ($w = 0$ і $M_y = 0$). На сторонах s_2 – умови жорсткого кріплення ($w = 0$ і $w_{,x} = 0$). Жодні умови по границях s_1 і s_2 на функції переміщень u і v не накладаються. Функції u , v і w будуються таким чином, щоб урахувати симетрію задачі.

Ця панель подана трьома типами розрахункових схем:

- 1) «Модель 1»: три пластини (рис. 2.3, а));
- 2) «Модель 2»: дві пластини і балка (рис. 2.3, б));
- 3) «Модель 3»: одна пластина і балка (рис. 2.3, в)).

Вибір аналітичної моделі для елементів панелі впливає на вираження універсальних функцій, що й буде показано в наступному підрозділі.

2.4 Системний підхід. Метод побудови універсальних функцій

Розв'язок сформульованої в підрозділі 2.3 задачі може бути знайдений з використанням декомпозиційного підходу в напруженнях, де шукані функції u (2.10) є функціями Ері. У випадку, коли ця вектор-функція виражена компонентами вектора переміщень, в окремих випадках граничних умов може статись, що дослідник зіткнеться з проблемою узгодження класу функцій мембранних переміщень зі згином. У системному підході ця проблема вирішується автоматично двома способами: функція мембранних переміщень задається як функція прогину і зв'язується із заданою на границі функцією тільки за переміщеннями; або степінь апроксимуючого полінома функції

мембранних переміщень на границі піднімається до степеня заданої тут функції із наступним перерахунком коефіцієнтів.

Системний підхід спирається на використання універсальних функцій, побудова яких показана в наступних підрозділах.

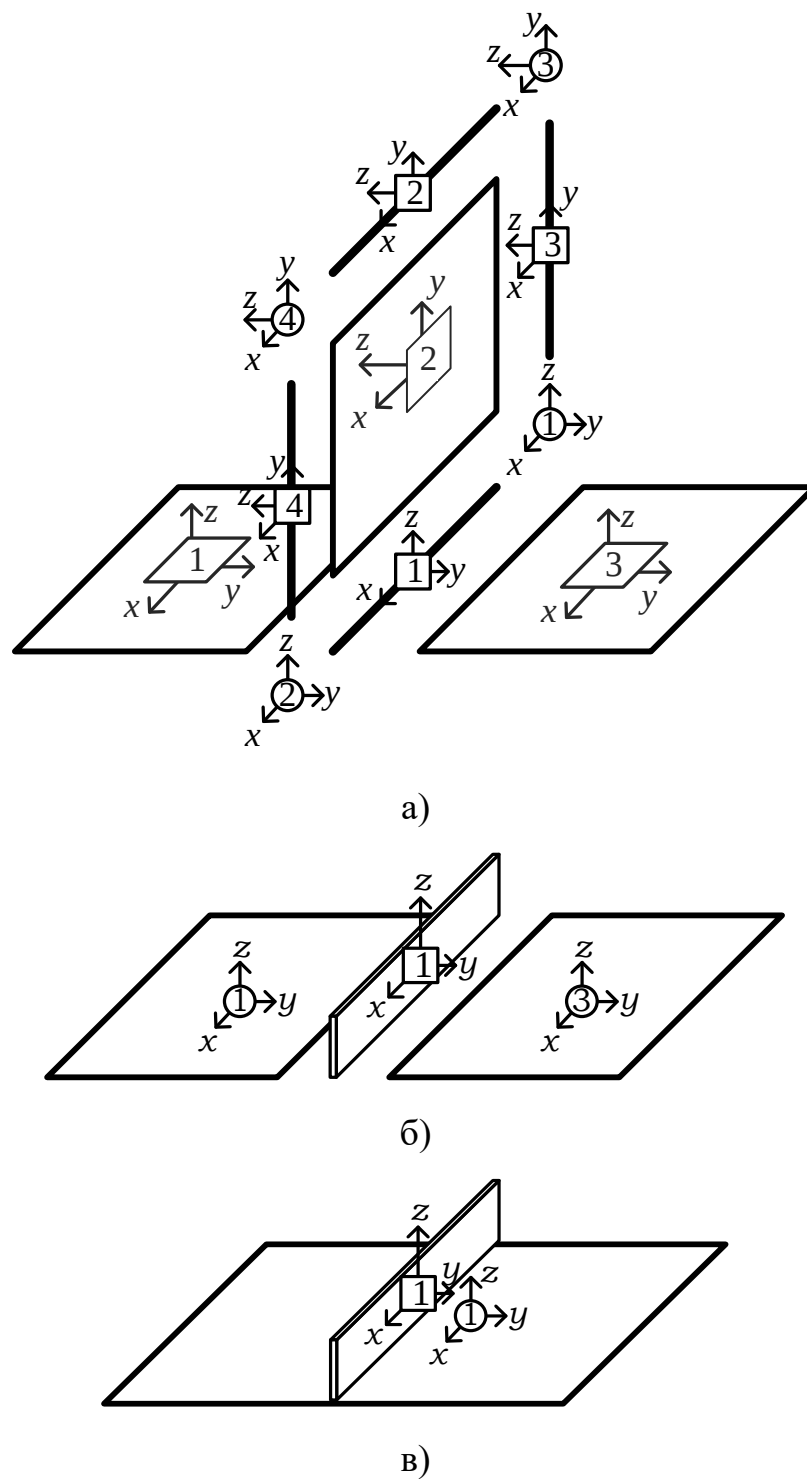


Рисунок 2.3 – Три моделі стрингерної панелі:

а) три пластини; б) дві пластини і балка; в) одна пластина і балка

2.4.1 Побудова базису для елементів конструкцій

Функцію із H^1 (такого простору Соболева, що включає в себе всі функції з області Ω , які є квадратно інтегрованими разом зі своїми першими похідними), що набуває на межах відрізка $(-1, +1)$ ненульових значень, можна подати в системі базисних функцій

$$\zeta = \text{Span}(N_1(x), N_2(x), \varphi_n, n = 0, 1, \dots), \quad (2.37)$$

де

$$N_1(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) + P_1(x)) = \frac{1-x}{2},$$

$$N_2(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) - P_1(x)) = \frac{1+x}{2}$$

– функції форми одновимірного симплекс-елемента;

$$\varphi_n(x) = P_{n+2}(x) - P_n(x)$$

– дорівнюють нулю на границях $x = \pm 1$ і мають ортогональні перші похідні в L_2 ; $P_i(x)$ – поліноми Лежандра [132].

Аналогічну функцію у квадратній області $(-1, +1) \times (-1, +1)$ можна подати в системі базисних функцій, що отримується у вигляді тензорного добутку (2.37):

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \bar{f}_2 N_1(x) N_1(y) + \bar{f}_3 N_2(x) N_1(y) + \bar{f}_1 N_1(x) N_2(y) + \\ & + \bar{f}_4 N_2(x) N_2(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{F}_n^1 N_1(x) \varphi_n(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{F}_n^2 N_2(x) \varphi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{F}_n^3 \varphi_n(x) N_1(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{F}_n^4 \varphi_n(x) N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} F_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y), \end{aligned} \quad (2.38)$$

де $\bar{f}_i$, $i = \overline{1,4}$ – значення функції в кутових точках $f(\pm 1, \pm 1)$; $\bar{F}_n^i$, $i = \overline{1,4}$ – коефіцієнти, що визначають функцію на сторонах $f(x, \pm 1)$, $f(\pm 1, y)$; F_{ij} – коефіцієнти, що визначають функцію в області.

Аналогічне подання функції з H^2 (такого простору Соболева, що включає в себе всі функції з області Ω , які є квадратно інтегрованими разом зі своїми першими та другими похідними) має вигляд

$$\begin{aligned}
g(x, y) = & \bar{g}_2 M_1(x) M_1(y) + \bar{g}_3 M_2(x) M_1(y) + \bar{g}_1 M_1(x) M_2(y) + \\
& + \bar{g}_4 M_2(x) M_2(y) + \bar{\theta}_{x2} K_1(x) M_1(y) + \bar{\theta}_{x3} K_2(x) M_1(y) + \\
& + \bar{\theta}_{x1} K_1(x) M_2(y) + \bar{\theta}_{x4} K_2(x) M_2(y) + \bar{\theta}_{y2} M_1(x) K_1(y) + \\
& + \bar{\theta}_{y3} M_2(x) K_1(y) + \bar{\theta}_{y1} M_1(x) K_2(y) + \bar{\theta}_{y4} M_2(x) K_2(y) + \\
& + \bar{m}_2 K_1(x) K_1(y) + \bar{m}_3 K_2(x) K_1(y) + \bar{m}_1 K_1(x) K_2(y) + \\
& + \bar{m}_4 K_2(x) K_2(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{G}_n^1 M_1(x) \psi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{G}_n^2 M_2(x) \psi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{G}_n^3 \psi_n(x) M_1(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{G}_n^4 \psi_n(x) M_2(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^1 K_1(x) \psi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^2 K_2(x) \psi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^3 \psi_n(x) K_1(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^4 \psi_n(x) K_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} G_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

де

$$M_1(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) - P_1(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(2+x)(1-x)^2,$$

$$M_2(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) + P_1(x)) + \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(2-x)(1+x)^2,$$

$$K_1(x) = \frac{1}{6}(P_0(x) - P_2(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(1+x)(1-x)^2,$$

$$K_2(x) = -\frac{1}{6}(P_0(x) - P_2(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(x-1)(1+x)^2$$

– функції кубічної інтерполяції Ерміта [132],

$$\psi_n(x) = P_{n+4}(x) - \frac{2(2n+5)}{2n+3} P_{n+2}(x) + \frac{2n+7}{2n+3} P_n(x)$$

– функції [133], що дорівнюють нулю разом зі своїми першими похідними на границях $x = \pm 1$ і мають ортогональні другі похідні в L_2 ; $\bar{g}_i$, $\bar{\theta}_{xi}$, $\bar{\theta}_{yi}$, $\bar{m}_i$ – значення функції $g(\pm 1, \pm 1)$ та її похідних $g_{,x}(\pm 1, \pm 1)$, $g_{,y}(\pm 1, \pm 1)$, $g_{,xy}(\pm 1, \pm 1)$ у кутових точках, $\bar{G}_n^i$, $\bar{\theta}_n^i$ – коефіцієнти, що визначають функцію $g(x, \pm 1)$, $g(\pm 1, y)$ та її похідні на сторонах $g_{,x}(\pm 1, y)$, $g_{,y}(x, \pm 1)$.

Зауважимо, що у випадку, коли граничні умови однорідні, то краще використовувати не функції (2.38), (2.39) а функції з базисом, який би виконував головні і природні граничні умови [19]. Перевагу такого підходу продемонструємо на задачі вигину балки, показаній на рис. 2.3, а).

Граничні умови обрано таким чином, щоб на кожній границі була одна головна й одна природна гранична умова.

Функцію прогину можна апроксимувати за формулою (2.39)

$$w(x) = \bar{\theta}_1 K_1(x) + \bar{w}_2 M_2(x) + \sum_{n=0,1,\dots} W \psi_n(x) \quad (2.40)$$

або ж

$$w(x) = \sum_{n=0,1,\dots} W \zeta_n(x), \quad (2.41)$$

де базисні функції [133]

$$\begin{aligned} \zeta_n(x) = & P_{n+4}(x) - \frac{(2n+7)(2n^2+8n+3)}{(n+3)(n^2+4n+1)(n+1)} P_{n+3}(x) - \\ & - \frac{(2n+5)(n+4)(2n^4+20n^3+68n^2+90n+45)}{(2n+3)(n+3)(n^2+4n+1)(n+1)(n+2)} P_{n+2}(x) + \\ & + \frac{(2n+7)(n+4)(2n^2+12n+13)}{(n^2+4n+1)(n+1)^2(n+2)} P_{n+1}(x) + \\ & + \frac{(2n+7)(n+4)^2(n^2+6n+6)}{(2n+3)(n^2+4n+1)(n+1)^2} P_n(x). \end{aligned}$$

виконують усі чотири крайові умови і мають ортогональні другі похідні в L_2 .

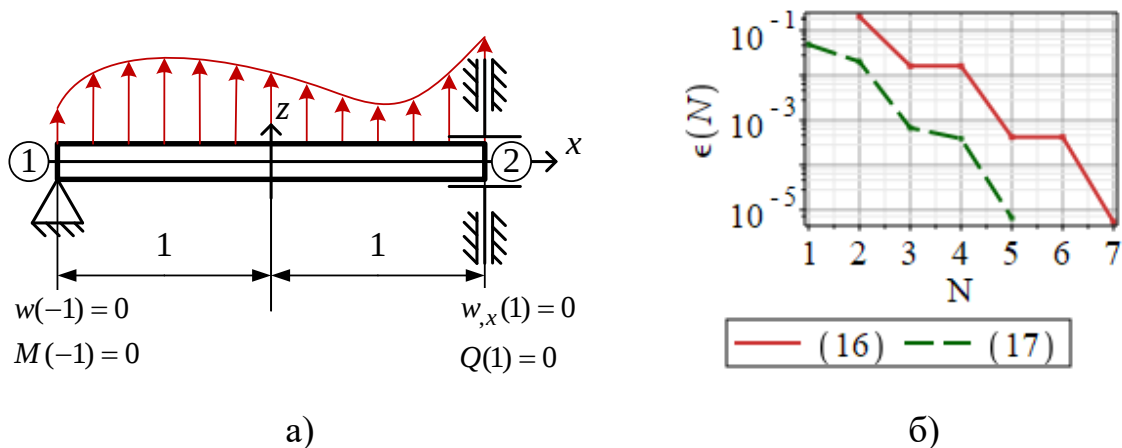


Рисунок 2.4 – Вигин балки та збіжність величини максимального згинального моменту: а) розміри балки, схема закріплення й навантаження; б) збіжність максимального згинального моменту, обчисленого за прогинами (2.40) і (2.41)

Ступінь апроксимуючого полінома в (2.41) за тієї самої кількості невідомих на два вищий, ніж у (2.40), звідси краща збіжність розв'язку (2.41). На рис. 2.4, б) показано збіжність максимального згинального моменту під дією розподіленого навантаження у вигляді $q(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$.

2.4.2 Сполучення конструктивних елементів

Сполучення конструктивних елементів виконаємо на прикладі конструкції стрингерної панелі, показаної на рис. 2.2. Аналогічні конструкції було розглянуто, наприклад, у роботах [134], [135]. Тут отримано аналітичні розв'язки, але тільки стосовно вигину, переміщення в площині пластини не враховувалось.

У загальному випадку пластини на рис. 2.3 зазнають усіх трьох переміщень. Функція прогину для пластини 1 (рис. 2.3, а)), побудована за (2.39), має вигляд

$$w_1 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M_2(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^3 \psi_{2n}(x) K_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 \psi_{2i}(x) \psi_j(y). \quad (2.42)$$

Тут $\bar{\theta}_n^3$ – константи, що визначають кути повороту границі $y = -1$.

Цю функцію можна покращити, враховуючи, що на границі $y = -1$ є можливість виконати всі крайові умови $w_1(x, -1) = 0$ і $M_y(x, -1) = 0$. Для цього потрібно функцію $M_2(y)$ замінити на $M_2'(y) = \frac{(1+x)(11-2x-x^2)}{16}$ і замість базису $\psi_i(y)$ скористатися таким [133]:

$$\psi_n^{sc}(y) = P_{n+4}(y) + \frac{2n+7}{(n+2)^2} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) - \frac{(2n+5)(2(n+1)^2 + 6n + 13)}{(2n+3)(n+2)^2} P_{n+2}(y) + \frac{(2n+7)(n+3)^2}{(2n+3)(n+2)^2} P_n(y). \quad (2.43)$$

Нульова, перша і друга базисні функції (2.43) показані на рис. 2.5, а), їхні перші та другі похідні на рис. 2.5, б) і в) відповідно.

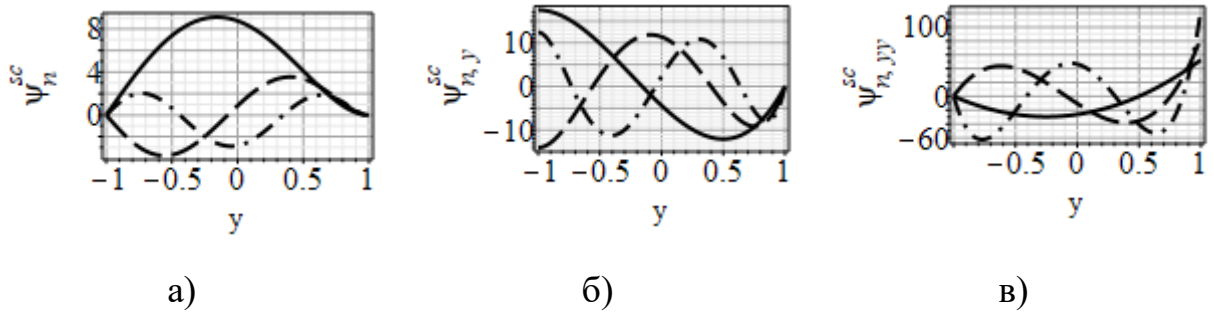


Рисунок 2.5 – Перші три базисні функції $\psi_n^{sc}(y)$ та їхні похідні:

а) самі функції; б) перша похідна; в) друга похідна.

Таким чином, отримана базисна система виконуватиме всі крайові умови, включно з природними.

Остаточно

$$w_1 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M_2'(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 \psi_{2i}^{sc}(x) \psi_j(y). \quad (2.44)$$

На функції переміщень u_1 і v_1 не накладаються жодні головні граничні умови. Функція u_1 кососиметрична щодо осі y , тому згідно з (2.38) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1 = & (\bar{u}_3 N_1(y) + \bar{u}_1 N_2(y)) (N_1(x) - N_2(x)) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^6 (N_1(x) - N_2(x)) \varphi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^5 \varphi_{2n}(x) N_1(y) + \\ & + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 \varphi_{2n}(x) N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} U_{ij}^1 \varphi_{2i}(x) \varphi_j(y), \end{aligned} \quad (2.45)$$

або ж простіше, якщо ввести базис $\varphi_n^{f0}(y) = P_{n+1}(y) - P_n(y)$, що набуває нульового значення на границі $y = +1$

$$u_1 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i+1}(x) \varphi_j^{f0}(y). \quad (2.46)$$

На відміну від u_1 , функція v_1 симетрична відносно осі y і на границі $y = +1$ приймає нульове значення, тому її вигляд спрощується

$$v_1 = \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i}(x) \varphi_j^{f0}(y). \quad (2.47)$$

Аналогічно будуються подання функцій переміщень для пластини 3:

$$w_3 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M'_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^3 \psi_{2i}^{cs}(x) \psi_j(y); \quad (2.48)$$

$$u_3 = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^3 P_{2i+1}(x) \varphi_j^{f0}(y); \quad (2.49)$$

$$v_3 = \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} W_{ij}^1 P_{2i}(x) \varphi_j^{0f}(y). \quad (2.50)$$

Тут

$$M'_1(y) = \frac{1}{16} [(1-x)(11-2x-x^2)];$$

$$\begin{aligned} \psi_n^{cs}(y) = & P_{n+4}(y) - \frac{2n+7}{(n+2)^2} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) - \\ & - \frac{(2n+5)(2(n+1)^2+6n+13)}{(2n+3)(n+2)^2} P_{n+2}(y) + \frac{(2n+7)(n+3)^2}{(2n+3)(n+2)^2} P_n(y); \\ \varphi_n^{0f}(y) = & P_{n+1}(y) + P_n(y). \end{aligned}$$

З огляду на симетрію прогин другої пластини (рис. 2.3, а)) дорівнює нулю $w_2 = 0$.

Функція u_2 з H^1 виконує головні граничні умови тільки на границі $y = -1$ та має вид:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0,1,\dots} \bar{U}_n^1 P_{2n+1}(x) N_1(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} U_{ij}^2 P_{2i+1}(x) \varphi_j(y).$$

Функція переміщень v_2 задається класичним "p-MCE" способом. Її слід шукати у вигляді (2.38), але за такого задавання функції неможливо виконати умови сполучення на границі $y = -1$. Значення функції на цій границі дорівнює за формулою (2.38) $v_2(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots}^{N+1} \bar{V}_n^2 \varphi_{2n}(x)$, а відповідне переміщення осі 1 (прогин першої пластини при $y = +1$ і третьої при $y = -1$) $w_1(x, 1) = w_3(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots}^N \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x)$. Тобто тут не вдається виконати сполучення через просте прирівнювання коефіцієнтів, як це було для першої та третьої пластин.

З цієї ситуації є кілька виходів. Можна, як і раніше, розв'язок шукати у вигляді (2.38)

$$\begin{aligned}
v_2(x, y) = & \bar{v}_3 N_1(x) N_2(y) + \bar{v}_4 N_2(x) N_2(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^4 N_1(x) \varphi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^3 N_2(x) \varphi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^1 \varphi_{2n}(x) N_1(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^2 \varphi_{2n}(x) N_2(y) + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} F_{ij} \varphi_{2i}(x) \varphi_j(y),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

а коефіцієнти $\bar{V}_n^1$ виразити через $\bar{W}_n^1$:

$$\bar{V}_n^1 = \begin{cases} -\frac{(4n+7)\bar{W}_n^1}{4n+3} & 2n \leq 1; \\ \bar{W}_{n-1}^1 - \frac{(4n+7)\bar{W}_n^1}{4n+3} & 1 < 2n \leq 2N; \\ \bar{W}_{n-1}^1 & N < n \leq N+1, \\ n = 0, 1, \dots, N+1. \end{cases}$$

Тут N – верхня межа сумування в (2.44) і (2.48). Зрозуміло, що для забезпечення безперервності сполучення верхню межу сумування в (2.51) необхідно збільшити на два.

Другий варіант – подати функцію v_2 у вигляді (2.39)

$$\begin{aligned}
v_2(x, y) = & \bar{v}_3 M_1(x) M_2(y) + \bar{v}_4 M_2(x) M_2(y) + \bar{\theta}_{z3} K_1(x) M_2(y) + \\
& + \bar{\theta}_{z4} K_2(x) M_2(y) + \bar{\theta}_{y2} M_1(x) K_1(y) + \bar{\theta}_{y3} M_1(x) K_2(y) + \\
& + \bar{\theta}_{y1} M_2(x) K_1(y) + \bar{\theta}_{y4} M_2(x) K_2(y) + \bar{m}_2 K_1(x) K_1(y) + \\
& + \bar{m}_1 K_2(x) K_1(y) + \bar{m}_3 K_1(x) K_2(y) + \bar{m}_4 K_2(x) K_2(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^4 M_1(x) \psi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{V}_n^3 M_2(x) \psi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^1 \psi_{2n}(x) M_1(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{W}_n^2 \psi_{2n}(x) M_2(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^4 K_1(x) \psi_n(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^3 K_2(x) \psi_n(y) + \\
& + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^1 \psi_{2n}(x) K_1(y) + \sum_{n=0,1,\dots} \bar{\theta}_n^2 \psi_{2n}(x) K_2(y) + \\
& + \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} V_{ij}^2 \psi_{2i}(x) \psi_j(y)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Тут коефіцієнти $\overline{W}_n^1$, за допомогою яких виконується сполучення, присутні в явному вигляді. Усі інші коефіцієнти вважаються невідомими.

Таким чином, в обох випадках сполучення виконується шляхом спільного використання коефіцієнтів $\overline{W}_n^1$ у функціях (2.44), (2.48) і (2.51) або (2.52).

Умови сполучення побудованих функцій:

$$\begin{aligned} u_1(x, 1) &= u_3(x, -1) = u_2(x, -1); \\ w_1(x, 1) &= w_3(x, -1) = v_2(x, -1) \end{aligned}$$

при утриманні відповідної кількості доданків у сумах виконуються точно.

У разі використання моделі 2 (рис. 2.3, б) для пластин 1 і 3 функції переміщень беруться у вигляді (2.44), (2.46), (2.47) і (2.48), (2.49), (2.50).

Переміщення балки апроксимуються функціями

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x) &= w_1(x, 1) = w_3(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots} \overline{W}_n^1 \psi_{2n}(x), \\ \tilde{u}_1(x) &= u_1(x, 1) = u_3(x, -1) = \sum_{n=0,1,\dots} \overline{U}_n^1 P_{2n+1}(x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Для пластини у моделі 3 (рис. 2.2, в) апроксимація функцій переміщень має вигляд

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} \overline{W}_{ij}^1 \psi_{2n}(x) \xi_{2n}(y); \\ u_1(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} \overline{U}_{ij}^1 P_{2i+1}(x) P_{2j}(y); \\ v_1(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots} \sum_{j=0,1,\dots} \overline{V}_n^1 P_{2i}(x) P_{2j+1}(y). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тут враховано симетрію, а функції $\psi_n(x)$ та $\xi_n(y)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= P_{n+4}(x) - \frac{2(2n+5)((2n+5)^2+3n+8)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \cdot P_{n+2}(x) + \\ &+ \frac{(2n+7)(n+4)(n+3)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \cdot P_n(x), \\ \xi_n(y) &= P_{n+4}(y) - \frac{2(2n+5)((2n+5)^2+3n+8)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \cdot P_{n+2}(y) + \\ &+ \frac{(2n+7)(n+4)(n+3)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \cdot P_n(y). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Зазначимо, що функції (2.55) виконують як головні, так і природні крайові умови вільно опертої пластини і мають ортогональні в L_2 другі похідні [133].

Невідомі коефіцієнти, що визначають розв'язки трьох задач деформування конструкції, знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких приводить умова мінімуму повної потенціальної енергії:

– для моделі 1:

$$\sum_{i=1,2,3} [\delta P_\varepsilon^b(w_i) + \delta P_\varepsilon^p(u_i, v_i)] = qab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta w_1 + \delta w_3] dx dy;$$

– для моделі 2:

$$\sum_{i=1,3} [\delta P_\varepsilon^b(w_i) + \delta P_\varepsilon^p(u_i, v_i)] + \delta \bar{P}_\varepsilon^b(\tilde{u}_1, \tilde{w}_1) = qab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta w_1 + \delta w_3] dx dy;$$

– для моделі 3:

$$\delta P_\varepsilon^b(w_1) + \delta P_\varepsilon^p(u_1, v_1) + \delta \bar{P}_\varepsilon^b(\tilde{u}_1, \tilde{w}_1) = qab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \delta w_1 dx dy.$$

Тут зауважимо, що моделлю 1 і моделями 2 і 3 описуються дещо різні задачі. Якщо в моделі 1 допускається неоднорідне переміщення точок границь $x = \pm 1$ пластини 2, то в моделях 2 і 3 ці границі можуть зміщуватися вздовж осі x без поворотів.

Розв'язанню задач напружено-деформованого стану стрингерної панелі присвячено розділ 4 цієї роботи.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто два основних підходи до розв'язання системних задач складних просторових тонкостінних конструкцій: декомпозиційний та системний.

Декомпозиційний підхід полягає у поданні повністю неоднорідної крайової задачі у вигляді комбінації напіводнорідних задач за допомогою аналітико-чисельних методів (МІКУ, МСКЕ, МР). Здійснено побудову особливих розв'язків, які продовжують функцію з границі в область. Сформульовано мінімальні вимоги до гладкості вхідних даних задачі, за яких узагальнений розв'язок є класичним. Переваги декомпозиційного підходу полягають у тому, що задачі вищого порядку можна звести до крайової задачі жорстко затиснутої по

всіх краях прямокутної пластини. Конструкцію розв'язку подано у покомпонентному вигляді, причому визначення кожної компоненти зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь із незмінною матрицею і різними правими частинами. Основні труднощі цього підходу пов'язані з особливими вимогами до функцій та складністю виконання вимоги сполучення конструктивних елементів, коли мають бути узгоджені функції різних класів H_1 і H_2 . Це вимагає впровадження спеціальних правил для забезпечення переходу між функціями різних класів.

Системний підхід дозволяє уникнути цих проблем. У цьому підході система пластин і балок розглядається як один об'єкт, для якого розв'язки добиваються за допомогою універсальних функцій. Основною проблемою є підбір цих функцій. Реалізований нами алгоритм визначає шлях її подолання. У межах цього підходу отримано аналітичні розв'язки задач, яких раніше не існувало, що становить наукову новизну і не має аналогів.

В обох підходах визначено вимоги до координатних систем функцій, які використовуються для апроксимації компонент вектора переміщень. Обидва підходи забезпечують аналітико-чисельні розв'язки з наперед заданою точністю, причому збіжність розв'язку (необхідне число невідомих, параметрів розв'язку) є значно меншою, ніж у методі скінченних елементів, що буде продемонстровано у розділі 3.

Системний підхід було реалізовано на прикладі трьох конструкцій, розглянуто проблему сполучення класичних тонких прямокутних пластин, які перебувають у плоскому напруженому стані та згинаються. Побудовано системи базисних функцій, які виконують не тільки головні, а й природні граничні умови. Їх використання дозволяє підвищити швидкість збіжності наближених розв'язків.

Аналіз обчислювальних властивостей системи координатних функцій, що можуть бути використані при реалізації цих підходів, наведено у розділі 3, а апробація цих методів при аналізі конструкцій показана в розділі 4. Окремі наукові результати цього розділу висвітлені в роботах [2], [15], [18], [19], [20].

РОЗДІЛ 3

ФОРМУЛЮВАННЯ БАЗОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ ДІРІХЛЕ В ПРЯМОКУТНИКУ ТА ПОБУДОВА ЇХНІХ АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИХ І НАБЛИЖЕНИХ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Повністю неоднорідну крайову задачу Діріхле можна сформулювати і розв'язати як для системи рівнянь високого порядку, так і для одного рівняння того ж порядку. Використання методу редукції дозволяє звести розв'язання повністю неоднорідної крайової задачі до розв'язання низки базових задач, які описуються неоднорідними диференціальними рівняннями за однорідних крайових умов типу Діріхле. Ця процедура значно спрощує побудову розв'язку вихідної задачі, за умови наявності стійких алгоритмів і процедур, які забезпечують збіжність з певною швидкістю до точного розв'язку для розглядуваних базових задач.

У задачах механіки деформівного твердого тіла, зокрема в задачах теорії пружності прямокутних пластин і оболонок, старшим є бігармонічний оператор. Особливий інтерес становить побудова й дослідження розв'язків крайових задач, що містять цей оператор. Існує лише кілька крайових задач у прямокутнику, що описуються бігармонічним оператором за певних умов обпирання, для яких були побудовані точні розв'язки у тригонометричних рядах, такі як розв'язки Моріса Леві [136] та Нав'є [137],. У цьому розділі запропоновано низку нових аналітико-чисельних розв'язків як базової крайової задачі, так і задач, що описуються бігармонічним оператором за інших типів крайових умов. Ці задачі мають певний механічний зміст, оскільки вони описують вигин прямокутної пластини під дією зовнішнього навантаження або відповідають розв'язку плоскої задачі теорії пружності прямокутної пластини, що отримується через функцію Ері [136], [137].

3.1 Формулювання і розв'язання базової крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику

Розглядається піводнорідна крайова задача в прямокутнику $\tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}): -a < \tilde{x} < a, -b < \tilde{y} < b\}$ з границею $\tilde{\Gamma}$. Шляхом лінійного перетворення область $\tilde{\Omega}$ зводиться до квадрата $\Omega = \{(x, y): -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ з границею Γ . Крайова задача описується диференціальним рівнянням

$$Aw \equiv \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = f(x, y) \text{ в } \Omega \quad (3.1)$$

та однорідними крайовими умовами

$$w(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \quad (3.2)$$

де похідна $\frac{\partial}{\partial n}$ в (3.2) береться за нормаллю n до границі Γ ; $\lambda = \frac{a}{b}$ – параметр подовження пластини з розмірами $2a \times 2b$; $w(x, y)$ – функція прогину в задачах вигину пластини або функція Ері в задачах про плоский напружений стан пластини; $f(x, y)$ – права частина рівняння. У задачі плоского напруженого стану вона тотожно дорівнює нулю $f(x, y) \equiv 0$, а в задачі вигину пластини Кірхгофа вона набуває вигляду:

$$f(x, y) = \frac{a^4 \cdot q(x, y)}{D}, \quad (3.3)$$

тут $q(x, y)$ – закон розподілу зовнішнього тиску по поверхні пластини; $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; δ – товщина пластини.

Будемо припускати, що функції $w(x, y) \in D_A$, $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ ($L_2(\Omega)$ – гільбертів простір функцій). Тут D_A – область визначення оператора A . Як відомо, оператор A крайової задачі (3.1), (3.2) додатно визначений, тому можна ввести енергетичний простір H_A (простір С.Л. Соболєва), що складається з функцій, які інтегровані в Ω з квадратом аж до других частинних похідних включно та зводяться до нуля разом з похідною по нормалі на границі Γ . У просторі H_A оператора A визначимо енергетичний скалярний добуток $[w, v] \equiv (Aw, v)$ і

породжувану ним квадратичну норму $\llbracket w \rrbracket^2 \equiv (Aw, w)$, $v(x, y) \in H_A$ у такий спосіб:

$$[w, v] = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \lambda^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] d\Omega, \quad (3.4)$$

$$\llbracket w \rrbracket^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (3.5)$$

Розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) виконує інтегральну тотожність:

$$[w, v] - (f, v) = 0, \quad \forall v \in H_A. \quad (3.6)$$

Тотожність (3.6) дає змогу перейти до варіаційного формулювання крайової задачі (3.1), (3.2), а саме:

$$Fw = \frac{1}{2} \llbracket w \rrbracket^2 - (f, w) \Rightarrow \min, \quad (3.7)$$

де (f, w) – лінійна форма. Таким чином, замість розв'язання крайової задачі (3.1), (3.2) можна розв'язувати варіаційну задачу (3.7) щодо мінімізації квадратичного функціонала Fw .

Функціонал $\frac{1}{2} \llbracket w \rrbracket^2$ з точністю до мультиплікативної константи збігається з виразом потенціальної енергії деформування. В окремому випадку повна потенціальна енергія вигину прямокутної ізотропної пластини під дією зовнішнього тиску в безрозмірних координатах (x, y) може бути подана такою формулою:

$$U = \frac{D}{2ab} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q w dx dy. \quad (3.8)$$

Інтегральна тотожність (3.4), (3.5), (3.7) дозволяє пом'якшити вищезазначені вимоги до гладкості функцій $w(x, y)$ і $f(x, y)$. Достатньо вимагати: $w \in H_A(\Omega)$, $f \in L^{(-2)}(\Omega)$, де $L^{(-2)}(\Omega)$ – простір, сполучений з простором $L^{(2)}(\Omega)$ (простір узагальнених функцій, функціоналів).

Точний розв'язок сформульованої крайової задачі досі не знайдено, тому можливе лише отримання наближених розв'язків за допомогою різних методів. Необхідно зазначити, що питання коректного формулювання існування і

єдності розв'язків крайових задач полігармонічного оператора (зокрема й бігармонічного) детально вивчені у роботах [23], [138].

У цьому розділі розв'язок базової крайової задачі (3.1), (3.2) будується методом Бубнова-Галеркіна, а розв'язок задачі (3.7) – методом Рітца. Зазначимо, що в даному випадку метод Рітца і метод Бубнова-Галеркіна приводять до тієї самої системи розв'язних рівнянь завдяки додатній визначеності бігармонічного оператора. У рамках застосування цих методів розкладання розв'язків виконується за:

- базисними системами, що виконують однорідні крайові умови (3.2);
- власними функціями оператора A крайової задачі (3.1), (3.2);
- ортонормованими в енергетичному просторі $H_A(\Omega)$ функціями.

Далі докладніше описується процедура отримання наближених розв'язків за допомогою вищезазначених способів.

3.2 Аналітико-чисельні та наближені аналітичні розв'язки базової крайової задачі в прямокутнику

Базовою крайовою задачею тут називаємо задачу вигину жорстко закріпленої по всьому контуру прямокутної пластини [6]. Точний розв'язок цієї задачі не знайдено донині, тому актуальною є побудова аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків. Під аналітико-чисельним розв'язком тут розуміємо розв'язок, записаний у вигляді аналітичного виразу, через скінченну множину параметрів, які визначаються чисельно [4]. Під наближеним аналітичним розв'язком розуміється аналітичний вираз, параметри якого визначені в явному вигляді [5].

3.2.1 Аналітико-чисельні розв'язки у подвійних рядах за системами спеціальних функцій

Варіаційне формулювання крайової задачі (3.1), (3.2) подане мінімізацією квадратичного функціонала (3.8), який виражається через квадрати і добутки других похідних шуканої функції. Для існування цього функціонала

потрібна лише обмеженість інтегралів від квадратів самої функції та її частинних похідних до другого порядку, тобто сама функція, її перші та другі частинні похідні мають бути елементами гільбертового простору $L_2(\Omega)$. Ця умова є менш жорсткою, яку слід пред'явити до шуканої функції, виходячи з диференціального рівняння (3.1), де вимагається існування похідних функцій до четвертого порядку включно. Іншими словами, варіаційний принцип (і відповідний йому варіаційний метод) дозволяє розширити клас допустимих функцій.

Функціонал Fw (3.7) мінімізується в Соболевському просторі функцій $X_m(x) \cdot Y_n(y) \in W_2^2(\Omega)$, що виконують головні крайові умови (3.2). Таким чином, функція $w(x, y)$ подається у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (3.9)$$

де A_{mn} – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Як систему координатних функцій (базис) використовують:

I – функції, запропоновані та досліджені С. А. Халіловим [139]:

$$H_k(z) = (1 - z^2)^2 \cdot \sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} A_{kl} \cdot z^{k-2l}, \quad \left[\frac{k}{2}\right] - \text{ціла частина числа } \frac{k}{2}, \quad (3.10)$$

$$A_{kl} = \frac{(-1)^l}{2^{k+3}} \sqrt{\frac{k!(2k+9)}{2(k+8)!}} \frac{(2k-2l+7)!}{(k-l+3)! l! (k-2l)!};$$

II – функції, запропоновані в роботі [133] В. Б. Минтюком:

$$M_k^{(1)}(z) = P_{k+4}(z) - \frac{2(2k+5)}{2k+3} P_{k+2}(z) + \frac{2k+7}{2k+3} P_k(z), \quad (3.11)$$

$$M_k^{(1)}(\pm 1) = M_k^{(1)'}(\pm 1) = 0,$$

тут $P_k(z)$ – поліноми Лежандра;

III – фундаментальні балкові функції А. Н. Крилова [140]:

$$K_l(z) = \sin \frac{z_l(z+1)}{2} - sh \frac{z_l(z+1)}{2} - \frac{\sin z_l - sh z_l}{\cos z_l - ch z_l} \left(\cos \frac{z_l(z+1)}{2} - cosh \frac{z_l(z+1)}{2} \right), \quad (3.12)$$

де z_l – корені рівняння $\cos z \operatorname{ch} z = 1$;

IV – косинус-біноми Філоненка-Бородича [114] (симетричні);

$$F_k = \cos((k + 1)\pi x) + (-1)^k. \quad (3.13)$$

Стандартне застосування процедури Рітца приводить до систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих коефіцієнтів у рівнянні (3.9). Для досягнення необхідної точності верхні межі M і N (3.9) мають бути досить високими. Однак при цьому процес Рітца може виявитися нестійким (навіть якщо "велике" число невідомих параметрів може бути відносно невеликим). Нестійкість процесу Рітца пояснюється погіршенням матриці Грама лінійно-незалежної системи $X_m(x) \cdot Y_n(y)$. Зі зростанням порядку $M \times N$ матриця Грама може ставати дедалі ближчою до виродженої, і її число обумовленості буде значно збільшуватись. Щоб запобігти цьому, до координатної системи необхідно пред'явити такі вимоги [22]:

- 1) $X_m(x) \cdot Y_n(y) \in H_A(\Omega), (m, n = 0, 1, 2, \dots)$;
- 2) елементи $X_0, X_1, \dots, X_T$ і $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ – лінійно незалежні за будь-яких m, n ;
- 3) система $X_m(x) \cdot Y_n(y)$ повна в H_A ;
- 4) вона має бути сильно мінімальною в метриці H_A .

Але зауважимо: якщо координатна система тільки сильно мінімальна в H_A , то процес Рітца буде стійким щодо малих похибок, допущених при складанні системи Рітца. Однак помилки округлення, неминучі при розв'язанні цієї системи, можуть призвести до значних похибок у коефіцієнтах Рітца. Щоб уникнути цього, до координатної системи необхідно пред'явити додаткові вимоги:

- 5) вона має бути майже ортонормованою в метриці H_A ;
- 6) бажано домогтися наближення до нуля нев'язки $\delta_k = Aw_k - f$ при k , що прагнуть до нескінченності.

Перші три вимоги є обов'язковими і, природно, наведені базиси їх виконують. Виконання решти вимог підлягає дослідженню. Про це йтиметься детальніше в підрозділі 3.3.

3.2.2 Наближений аналітичний розв'язок типу Нав'є базової крайової задачі у прямокутнику

У класичній теорії пружності пластин відомий лише один випадок точного розв'язку бігармонічної проблеми в прямокутнику з умовами вільного обпирання на границях. Цей розв'язок поданий у вигляді подвійних тригонометричних рядів і відомий як розв'язок Нав'є [137]. Розв'язок, отримуваний далі, можемо назвати розв'язком типу Нав'є. Для отримання цього розв'язку залучаються функції (3.10), що мають властивість квазіортогональності в $H_A(\Omega) \equiv W_2^0(\Omega)$. Простір функцій С.Л. Соболева $W_2^0(\Omega)$ складається з елементів, які виконують однорідні умови (3.2).

Розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) шукатимемо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm} X_m(x) Y_n(y), \quad (3.14)$$

$$X_m(x) \equiv H_m(x), \quad Y_n(y) \equiv H_n(y).$$

У тотожності (3.6) приймемо $w = H_m(x)H_n(y)$, $v = H_i(x)H_j(y)$, у результаті після інтегрування частинами з урахуванням крайових умов (3.2) отримаємо

$$(Aw, v) = (H_m'', H_i'')\delta_{nj} + 2\lambda^2(H_m', H_i')(H_n', H_j') + \lambda^4(H_n'', H_j'')\delta_{mi}, \quad (3.15)$$

тут $m, n, i, j = 0, 1, 2, \dots$, $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l; \end{cases}$ – символ Кронекера,

$(f, g) = \int_{\Omega} f g d\Omega$ – скалярний добуток функцій у $L_2(\Omega)$.

Наявність властивостей ортогональності у деяких систем базисних функцій значно підвищує їхню обчислювальну ефективність. Якщо координатна система є ортогональною разом зі своїми похідними аж до старшого порядку диференціального рівняння (3.1) [21], [114], то матриця системи розв'язних рівнянь стає діагональною. У такому випадку невідомі коефіцієнти в розв'язку можна визначити аналітично, що дозволяє отримати практично точний результат. Вимоги ортогональності функцій можна знизити, виходячи з варіаційного формулювання задачі (3.7). Тоді для отримання практично точного розв'язку

необхідна лише ортогональність базисних функцій разом із їхніми першими і другими похідними в енергетичному просторі H_A .

Виникає природне запитання: чи можна знехтувати неортогональністю функцій або їхніх перших і других похідних без суттєвого впливу на точність одержуваних результатів? Властивість незначної неортогональності функцій та їхніх перших і других похідних називатимемо квазіортогональністю.

Відомо, що перші та другі похідні функції $H_k(z)$ квазіортогональні в $L_2(-1,1)$ [139]. Цю властивість функцій буде підтверджено апостеріорно докладними чисельними розрахунками в підрозділі 3.3.2. Отримати апріорну оцінку похибки обговорюваного розв'язку неможливо. Унаслідок цього, не вносячи значних похибок, можна прийняти

$$(Aw, v) = 0, \quad w \neq v, \quad (3.16)$$

$$(Aw, w) = \|H_m''\|^2 + 2\lambda^2 \|H_m'\|^2 \|H_n'\|^2 + \lambda^4 \|H_n''\|^2 \equiv \|w\|^2,$$

де $\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} \varphi^2 d\Omega$ – квадрат норми в $L_2(-1,1)$; $\|w\|^2$ – енергетична норма в $H_A(\Omega)$ (див. (3.5)).

У такому випадку матриця Грама повної лінійно незалежної системи $\varphi_{mn} \equiv H_m(x)H_n(y) \in H_A(\Omega)$ стає діагональною.

З урахуванням цього положення можна записати наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) у вигляді:

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (3.17)$$

$$A_{mn} = \frac{a^4 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q(x, y) H_m(x) H_n(y) dx dy}{D \|H_m H_n\|^2}.$$

Таким чином, рівність (3.17) являє собою наближений, але аналітичний розв'язок сформульованої крайової задачі.

3.2.3 Наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах типу Моріса Леві

Раніше було отримано наближений аналітичний розв'язок базової задачі в подвійних рядах (3.17). Підставою для аналітичного подання шуканого

розв'язку послужила властивість квазіортогональності в $H_A(\Omega)$ координатної системи $H_m(x) \cdot H_n(y)$ [139]. Квазіортогональність в $H_A(\Omega)$ є наслідком квазіортогональності в $L_2(-1; 1)$ перших і других похідних функцій (3.10) [5]. Оскільки цей наслідок підтверджується апостеріорно, то можна прийняти посилку про квазіортогональність перших і других похідних функцій $H_i(x)$. Беручи цей факт до уваги, шукатимемо розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(y) H_i(x), \quad (3.18)$$

де $Y_i(y)$ – функція, що підлягає визначенню.

Умови жорсткого закріплення (3.2) виконуються на сторонах пластини $x = \pm 1$, які виконують функції (3.10).

Якщо не враховувати зазначену квазіортогональність похідних, то застосування процедури Бубнова-Галеркіна призводить до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [Y_i(H_i'', H_k'') - 2\lambda^2 Y_i''(H_i', H_k') + \lambda^4 Y_i^{IV} \delta_{ik}] = Q_k(y), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (3.19)$$

де $(H_i^{(m)}, H_k^{(m)}) = \int_{-1}^1 H_i^{(m)} H_k^{(m)} dx$, $m = 1, 2$; $Q_k(y) = \int_{-1}^1 \frac{q(x, y) a^4}{D} H_k(x) dx$.

Нехтуючи неортогональністю перших і других похідних

$$(H_k^{(m)}, H_k^{(m)}) = \begin{cases} \|H_k^{(m)}\|^2, & i = k, \\ \approx 0, & i \neq k \end{cases} \quad \text{де } m = 1, 2, \quad (3.20)$$

приходимо до нескінченної системи не пов'язаних між собою звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку

$$Y_k^{IV} - 2\alpha_k^2 Y_k'' + \beta_k^4 Y_k = \bar{q}_k(y), \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (3.21)$$

де позначено $\alpha_k^2 = \frac{\|H_k'\|^2}{\lambda^2}$, $\beta_k^4 = \frac{\|H_k''\|^2}{\lambda^4}$, $\bar{q}_k(y) = \frac{1}{\lambda^4} Q_k(y)$.

Корені характеристичного рівняння

$$\gamma_k^4 - 2\alpha_k^2 \gamma_k^2 + \beta_k^4 = 0 \quad (3.22)$$

мають вигляд

$$\gamma_k = \pm \sqrt{\alpha_k^2 \pm \sqrt{\alpha_k^4 - \beta_k^4}}. \quad (3.23)$$

Можна показати, що корені γ_k є комплексно-спряженими ($\beta_k > \alpha_k > 0$), тобто

$$\gamma_k = \pm(\theta_k \pm i\omega_k), \quad (3.24)$$

$$\text{де } \theta_k = \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\sqrt{2}}, \quad \omega_k = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{2}}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння, відповідного до рівняння (3.21), набуває вигляду

$$\begin{aligned} Y_{k0}(y) = & C_{1,k} \sin(\omega_k y) \operatorname{sh}(\theta_k y) + C_{2,k} \sin(\omega_k y) \operatorname{ch}(\theta_k y) + \\ & + C_{3,k} \cos(\omega_k y) \operatorname{sh}(\theta_k y) + C_{4,k} \cos(\omega_k y) \operatorname{ch}(\theta_k y). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна подати у вигляді

$$Y_k(y) = Y_{k0}(y) + Y_k^*(y), \quad (3.26)$$

де $Y_k^*(y)$ – частковий розв'язок рівняння (3.21).

У разі рівномірно розподіленого зовнішнього навантаження постійні інтегрування $C_{i,k}$, $i = 1, 2, 3, 4$, що визначаються з граничних умов (3.2) на $y = \pm 1$, подаються такими рівностями:

$$\begin{aligned} C_{1,k} = C_{4,k} &= 0, \\ C_{2,k} &= -\frac{qa^4}{D} \frac{(\omega_k \sin \omega_k \operatorname{ch} \theta_k - \theta_k \cos \omega_k \operatorname{sh} \theta_k)}{(\omega_k \operatorname{ch} \theta_k \operatorname{sh} \theta_k + \theta_k \cos \omega_k \sin \omega_k)} \cdot \|H_k''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx, \\ C_{3,k} &= -\frac{qa^4}{D} \frac{(\omega_k \cos \omega_k \operatorname{sh} \theta_k + \theta_k \sin \omega_k \operatorname{ch} \theta_k)}{(\omega_k \operatorname{ch} \theta_k \operatorname{sh} \theta_k + \theta_k \cos \omega_k \sin \omega_k)} \cdot \|H_k''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Частковий розв'язок рівняння (3.21) у цьому випадку набуде вигляду:

$$Y_k^*(y) = \frac{qa^4}{D} \cdot \|H_k''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx. \quad (3.28)$$

Аналогічна процедура з використанням функцій (3.11) і (3.12) призводить лише до інших значень α_k, β_k .

Запропонований підхід до розв'язання крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику з жорстко закріпленими сторонами можна використати для отримання аналітико-чисельних розв'язків крайових задач у прямокутнику, де дві сторони жорстко затиснуті, а інші дві сторони мають довільні умови опирання [10]. Як приклад, у Додатку Б розглядається розв'язання додаткових п'яти крайових задач вигину прямокутної пластини під дією

рівномірно прикладеного тиску. На сторонах прямокутника $y = -1$ і $y = +1$ задається одна з таких крайових умов:

- жорстке закріплення (3.2);
- вільне обпирання:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (3.29)$$

- вільний край:

$$\left(\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left(\lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = 0. \quad (3.30)$$

3.2.4 Наближений аналітичний розв'язок, побудований на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису

Наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) з будь-якою наперед заданою точністю можна отримати, маючи у своєму розпорядженні базис $\omega_k(x, y)$, точно ортонормований в енергетичній метриці оператора A . Припустімо, що відома саме така система функцій, тоді розв'язок базової задачі може бути записаний так

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^K A_k \omega_k(x, y), \quad (3.31)$$

де числові компоненти розв'язку A_k , що залежать лише від виду правої частини диференціального рівняння (3.1), визначаються формулою

$$A_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \omega_k(x, y) dx dy. \quad (3.32)$$

Розв'язок (3.31) мало відрізнятиметься від точного за дотримання двох умов:

- для досягнення будь-якої наперед заданої точності величина K залишається скінченною;
- функції $\omega_k(x, y)$ визначені точно хоча б до такого K , за якого досягається задана точність.

Для побудови ортонормованої системи функцій в енергетичному просторі H_A застосовується відома процедура ортогоналізації Грама-Соніна-Шмідта [114]. Відомо, що ця процедура може стати нестійкою в будь-якій метриці.

Навіть за наявності невеликої кількості ортонормованих функцій, втрата значущих цифр під час округлення в обчисленнях може призвести до того, що побудована система ортонормованих функцій втрачає властивість лінійної незалежності. Іншими словами, матриця Грама стає виродженою або дуже близькою до виродженої зі зростанням її порядку, що призводить до того, що визначник розв'язувальної системи алгебраїчних рівнянь тенденційно наближається до нуля [141]. Проте можна уникнути цієї проблеми, якщо під час виконання процедури ортогоналізації відмовитися від переходу до наближених чисельних значень шуканих параметрів, а записувати їх у вигляді точних виразів, дробів, радикалів тощо. Сучасне математичне забезпечення обчислювальних засобів надає таку можливість.

Для побудови функцій ω_k будуть використані:

- ортонормована в $L_2(\Omega)$ система функцій (3.10);
- система функцій (3.11) з ортогональними в $L_2(\Omega)$ другими похідними;
- система поліномів:

$$p_{mn}(x, y) = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 x^m y^n, \quad (3.33)$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (-1, 1), \quad y \in (-1, 1).$$

Процедура ортогоналізації Грама-Соніна-Шмідта вихідного базису в енергетичній метриці додатно визначеного оператора крайової задачі (3.1), (3.2) подається в такому вигляді:

$$\omega_k(x, y) = \alpha_k \left(\varphi_k(x, y) - \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{kn} \omega_n(x, y) \right);$$

$$\beta_{kn} = \alpha_n \left([\varphi_k(x, y), \varphi_n(x, y)] - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{nm} \beta_{km} \right), k \neq 0; \quad (3.34)$$

$$\alpha_k = \left([\varphi_k(x, y), \varphi_k(x, y)] - \sum_{m=0}^{k-1} \beta_{km}^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\beta_{km} = [\varphi_k(x, y), \omega_m(x, y)];$$

де $[,]$ – енергетичний добуток функцій у просторі H_A (3.4),

$$\varphi_k(x, y) = X_i(x)Y_j(y) \quad (3.35)$$

– функція, складена з кожного вихідного базису (3.10), (3.11) і (3.33) окремо.

Відомо, що будь-яка безперервна функція двох змінних, задана в симетричній області, може бути подана у вигляді суми чотирьох функцій, кожна з яких належить до певного класу парності. Тому залежно від виду правої частини диференціального рівняння (3.1) шукану функцію $w(x, y)$ можна подати у вигляді суми чотирьох різних за парністю функцій

$$w(x, y) = w_{++} + w_{+-} + w_{-+} + w_{--}, \quad (3.36)$$

де перший індекс визначає парність (знак "+") або непарність (знак "-") за змінною x , а другий індекс – те саме за змінною y . Таким чином, для відшукування тих чи тих доданків у рівності (3.36) необхідно буде будувати чотири різні ортонормовані базиси $\omega_k(x, y)$, що відрізняються за класом парності або непарності.

Наприклад, перші три парні функції $\omega_k^{++}(x, y)$, записані за допомогою функцій базисів (3.10), (3.11) і (3.33) відповідно, у квадратній області Ω мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_0^{++} &= \frac{1}{9} H_0(x) H_0(y); \\ \omega_1^{++} &= \frac{\sqrt{3305}}{1983} H_0(x) H_2(y); \\ \omega_2^{++} &= \frac{2\sqrt{231021483}}{5242545} H_2(x) H_0(y) - \frac{13\sqrt{231021483}}{346532245} H_0(x) H_2(y); \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^{++} &= \frac{1}{140} M_0(x) M_0(y); \\ \omega_1^{++} &= \frac{\sqrt{8593}}{647780} (35M_0(x)M_2(y) + 6M_0(x)M_0(y)); \\ \omega_2^{++} &= \frac{\sqrt{15016396395}}{161715038100} (1122M_0(x)M_0(y) + 6610M_2(x)M_0(y) - \\ &\quad - 65M_0(x)M_2(y)); \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\omega_0^{++} &= \frac{35}{256} p_0(x) p_0(y); \\
\omega_1^{++} &= \frac{105\sqrt{661}\sqrt{13}}{338432} (11p_0(x)p_2(y) - p_0(x)p_0(y)); \\
\omega_2^{++} &= -\frac{\sqrt{1747515}\sqrt{661}\sqrt{13}}{512047616} (13p_0(x)p_2(y) + 119p_0(x)p_0(y) - \\
&\quad - 1322p_2(x)p_0(y)).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Природно, вид функцій (3.37) – (3.39) повністю збігається. Їхні графіки показано на рис. 3.1.

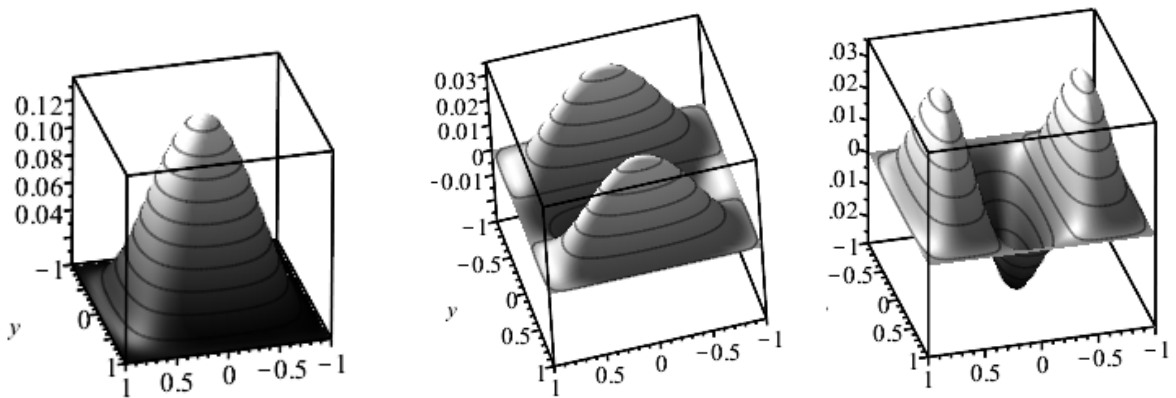


Рисунок 3.1 – Перші три парні функції $\omega_k^{++}(x, y)$

Насамкінець наведемо таблицю відповідності пари індексів « i, j » у рівності (3.35) до індексу k – номеру функції $\omega_k(x, y)$ у формулі (3.34) (табл. 3.1). Таблиця побудована за принципом зростання суми індексів $i + j = S$, де в межах однієї суми індекс i зростає, а j – зменшується. Цей принцип видається важливим, оскільки зі зростанням S внесок відповідних функцій $\omega_k(x, y)$ у розв'язок (3.31) зменшується. Тому раціонально подати функцію $\omega_k(x, y)$ у такому вигляді:

$$\omega_k(x, y) = \sum_{r=0}^k C_r \varphi_r(x, y), \tag{3.40}$$

де C_r – коефіцієнт, що стоїть перед кожною вихідною координатною функцією.

Формула (3.40) показує, що, перебираючи індекси i і j , зі зростанням їхньої суми S , можна побудувати будь-яке наперед задане число функцій k .

У табл. 3.1 для кожного класу парності ортонормованого базису $\omega_k(x, y)$ в H_A міститься по двадцять одній функції. Таблицю можна продовжити на довільне число функцій з дотриманням принципу зростання суми індексів S відповідної системи.

Таблиця 3.1 – Принцип відповідності індексів

k	S	ω_{++}		S	ω_{--}		S	ω_{+-}		ω_{-+}	
		i	j		i	j		i	j	i	j
0	0	0	0	2	1	1	1	0	1	1	0
1	2	0	2	4	1	3	3	0	3	1	2
2		2	0		3	1		2	1	3	0
3	4	0	4	6	1	5	5	0	5	1	4
4		2	2		3	3		2	3	3	2
5		4	0		5	1		4	1	5	0
6	6	0	6	8	1	7	7	0	7	1	6
7		2	4		3	5		2	5	3	4
8		4	2		5	3		4	3	5	2
9		6	0		7	1		6	1	7	0
10	8	0	8	10	1	9	9	0	9	1	8
11		2	6		3	7		2	7	3	6
12		4	4		5	5		4	5	5	4
13		6	2		7	3		6	3	7	2
14		8	0		9	1		8	1	9	0
15	10	0	10	12	1	11	11	0	11	1	10
16		2	8		3	9		2	9	3	8
17		4	6		5	7		4	7	5	6
18		6	4		7	5		6	5	7	4
19		8	2		9	3		8	3	9	2
20		10	0		11	1		10	1	11	0

3.2.5 Наближений аналітичний розв'язок базової задачі, поданий через власні функції бігармонічного оператора

Теоретично встановлено, що в тому випадку, коли в ролі координатної системи обирається система власних елементів додатно визначеного оператора A^* , спорідненого з оператором A , то гарантоване наближення нев'язки до нуля $\delta_n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ [22], с. 124, теорема 23.1. У розглядуваному випадку оператори A^* і A збігаються. Звідси випливає, що можна відразу отримати

розв'язок задачі (3.1), (3.2) у вигляді розкладання в ряд за власними функціями самосполученого оператора A^* [142], який є збіжним як у гільбертовому $L_2(\Omega)$, так і в енергетичному $H_A(\Omega)$ просторах. А з теорем вкладення [23], [138] випливає, що отриманий розв'язок крайової задачі буде $w(x, y) \in C(\overline{\Omega})$. Подальшу гладкість шуканої функції можна підвищити за достатньої гладкості границі Γ . У цьому випадку Ω – область із границею Ліпшиця, нормаль до якої не визначена лише в кутових точках, тобто на множині нульової міри Лебега. Іншими словами, $\Gamma \subset C^\infty$ майже всюди. З тих самих теорем вкладення виходить, що $w(x, y)$ належить простору нескінченно-гладких функцій $C^2(\Omega)$, якщо $f(x, y) \in L_2(\Omega)$.

Спектр додатно визначеного еліптичного оператора A є дискретним, тому будь-яка функція з $L_2(\Omega)$ може бути подана у вигляді ряду за системою власних функцій $\overline{\varphi}_n(x, y)$, $n = \overline{1, \infty}$ оператора A , що відповідають власним значенням μ_n . Це означає, що шуканий розв'язок $w(x, y)$ крайової задачі (3.1), (3.2) можна подати у вигляді ряду

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \overline{\varphi}_n)}{\mu_n} \overline{\varphi}_n(x, y). \quad (3.41)$$

Оскільки власні функції $\overline{\varphi}_n(x, y)$ ортогональні й повні як в $L_2(\Omega)$, так і в $H_A(\Omega)$ [142], то ряд (3.41) сходиться рівномірно й абсолютно в $C^2(\Omega)$, що випливає зі сказаного вище.

Формула (3.41) передбачає, що функції $\overline{\varphi}_n(x, y)$ ортонормовані в $L_2(\Omega)$. Якщо їх нормувати в $H_A(\Omega)$ (позначимо ці функції через $\varphi_n(x, y)$), то розв'язок задачі (3.1), (3.2) запишеться так:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x, y). \quad (3.42)$$

Таким чином, розв'язання сформульованої задачі зводиться до задачі про власний спектр оператора A за крайових умов (3.2):

$$A\varphi(x, y) = \mu\varphi(x, y) \text{ в } \Omega. \quad (3.43)$$

де μ – безрозмірне власне значення оператора A ; у задачах коливань корінь квадратний із цієї величини пропорційний частоті власних коливань закріпленої по контуру пластини:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\mu D}{\rho \delta a^4}} \quad (3.44)$$

де ρ – густина матеріалу пластини.

Щодо власних значень μ_n і власних функцій $\varphi_n(x, y)$ оператора A відомо:

- спектр оператора A – дискретний, а власні значення μ_n – дійсні, додатні та згущуються на нескінченності;
- власні функції $\varphi_n(x, y)$, що відповідають різним власним значенням, ортогональні як у $L_2(\Omega)$, так і в $H_A(\Omega)$;
- система власних функцій $\varphi_n(x, y)$ лінійно незалежна і повна в $L_2(\Omega)$ і в $H_A(\Omega)$.

Власні функції $\varphi_n(x, y)$ виконуватимуть крайові умови (3.2), якщо їх шукати у вигляді лінійної комбінації функцій (3.10):

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N C_{ij} H_i(x) H_j(y), \quad (3.45)$$

де n – порядковий номер відповідного власного значення μ_n .

Для одержання матриці лінійних алгебраїчних рівнянь відносно постійних C_{ij} , що містить шуканий параметр μ , до диференціального рівняння (3.43) застосовується процес Бубнова-Галеркіна. Процедури визначення власних значень і власних векторів позитивно визначеної матриці стандартні.

Оскільки у розглядуваному випадку власні функції задано в симетричній відносно осей координат області, то їх, як і у випадку побудови ортонормованого базису (п. 3.2.4), можна розбити на чотири класи парності: «парний-парний» (+ +), «парний-непарний» (+ –), «непарний-парний» (– +), «непарний-непарний» (– –).

Зазначимо, що на точність розв'язку базової задачі (3.1), (3.2) у вигляді (3.41) впливає точність побудови самих власних функцій (3.45), яка залежить від кількості утримуваних доданків M і N . Нижче буде наведено чисельні дослідження точності цього розв'язку, тут наведемо лише вигляд і графіки (рис. 3.2) власних функцій (3.45) за $(M, N) = (0, 0), (2, 0), (0, 2)$:

$$\varphi_1^{++}(x, y) = \frac{315(-x^2+1)^2(-y^2+1)^2}{256}, \quad (a)$$

$$\varphi_2^{++}(x, y) = \frac{63(x^2-1)^2(y^2-1)^2(11y^2-1)\sqrt{65}}{512}, \quad (б)$$

$$\varphi_3^{++}(x, y) = \frac{63(x^2-1)^2(11x^2-1)(y^2-1)^2\sqrt{65}}{512}. \quad (в)$$

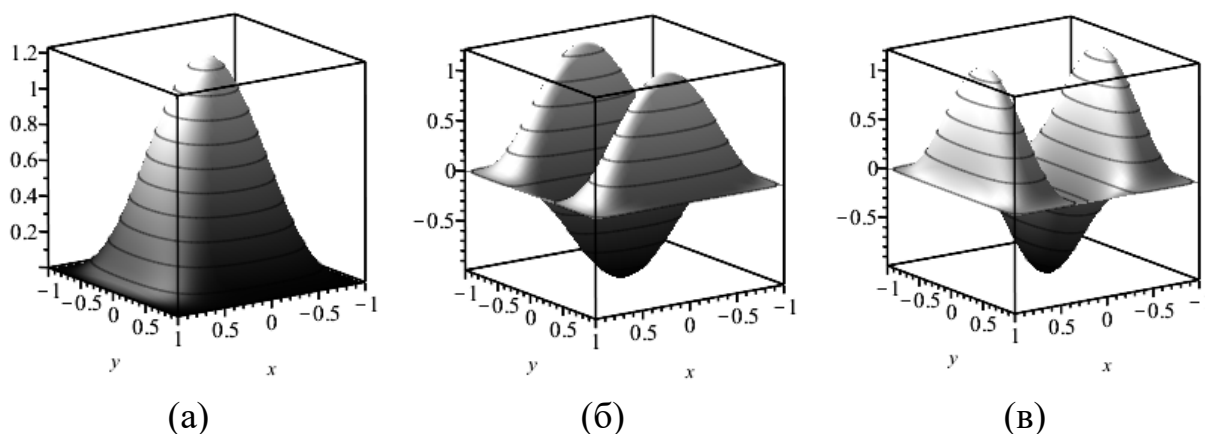


Рисунок 3.2 – Перші три парні функції $\varphi_n^{++}(x, y)$

3.3 Дослідження точності та збіжності аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором

Як зазначалося, сформульована вище крайова задача Діріхле для бігармонічного оператора в прямокутнику за однорідних головних крайових умов досі не має точного розв'язку. Тому особливий інтерес викликає побудова наближених аналітичних і чисельно-аналітичних розв'язків. Проте з'являється низка нових питань і проблем, оскільки будь-який наближений розв'язок необхідно досліджувати на предмет стійкості, збіжності та точності. По-перше, оскільки точний розв'язок невідомий, поточна оцінка наближеного розв'язку неможлива. По-друге, апріорні оцінки можуть бути отримані за допомогою методів функціонального аналізу, але ці оцінки вказують лише на порядок збіжності шуканих величин. Єдиною можливістю залишається отримання апостеріорних оцінок отриманих розв'язків, що вимагає розв'язання задачі різними методами.

Припустімо, що з великими витратами отримано чисельний (наприклад, методом скінченних елементів) або аналітико-чисельний розв'язок (наприклад, методом Рітца) у високих наближеннях для деякої крайової задачі, який за наявності гарної збіжності можна визнати критеріальним (еталонним). Кожен дослідник прагне зменшити витрати, задовольняючись необхідною точністю, але при цьому бажає отримати, нехай і наближений, але аналітичний розв'язок. Точність цього розв'язку можна оцінити апостеріорно шляхом порівняння зі заздалегідь призначеним критеріальним, тобто отримати його поточну оцінку.

Далі подано апостеріорний аналіз розв'язків бігармонічної проблеми в прямокутнику за однорідних головних крайових умов, отриманих різними методами. Аналітико-чисельні та наближені аналітичні розв'язки крайової задачі (3.1), (3.2), побудовані в розділі 3 з використанням базисних функцій (3.10) – (3.13) (позначимо ці розв'язки номерами від I до IV відповідно), порівнюватимуться з розв'язком авторів роботи [143] (позначимо його номером V):

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{qa^4}{\pi^4 D(1+\lambda^4)} \left[\frac{\pi^4}{24} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^2 \left(1 + \frac{45\lambda^4 \sum_{m=1}^N \frac{\xi_m - \eta_m}{m^4}}{\pi^4(1+\lambda^4)} \right) + \right. \\
 & + \frac{\pi^4}{24} \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{7}{15} \right) \left(1 - \frac{45 \sum_{m=1}^N \frac{\xi_m - \eta_m}{m^4}}{\pi^4(1+\lambda^4)} \right) - \sum_{m=1}^N \frac{\xi_m}{m^4} + \\
 & + \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m \xi_m}{m^4} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m \eta_m}{m^4} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \\
 & \left. + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{m+n} \xi_m (\xi_m + \lambda^4 \eta_n)}{m^4 (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right], \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

де ξ_m і η_m визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \lambda^2 m^2)^2} \right) \xi_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^3 \eta_m}{(m^2 + n^2)^2} - \\
 & - \frac{45\lambda^4}{\pi^4 n(1+\lambda^4)} \sum_{m=1}^N \frac{\xi_m - \eta_m}{m^4} = \frac{1}{n}; \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^3 \lambda^4}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right) \eta_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^3 \xi_m}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} +$$

$$+ \frac{45}{\pi^4 n (1 + \lambda^4)} \sum_{m=1}^N \frac{\xi_m - \eta_m}{m^4} = \frac{1}{n}, \quad n = 1..N.$$

Крім цього, розв'язки I – IV порівнюватимуться з результатом, наведеним у роботі [137] (позначимо його номером VII). Усі результати, зокрема й результати аналітичних розв'язків, будуть також порівнюватися з результатами, одержуваними чисельним методом – методом скінченних елементів (VI). Позначення розв'язків зведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Позначення розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2)

Номер розв'язку	Тип розв'язку	Опис
I	аналітико-чисельний	функції, запропоновані та досліджені С. А. Халіловим (3.10)
II	аналітико-чисельний	функції, запропоновані В. Б. Минтюком (3.11)
III	аналітико-чисельний	фундаментальні балкові функції А. Н. Крилова (3.12)
IV	аналітико-чисельний	косинус-біноми Філоненка-Бородича (3.13)
V	аналітико-чисельний	розв'язок Даревського-Шаринова (3.46)
VI	чисельний	метод скінченних елементів
VII	аналітичний	розв'язок, запропонований С. П. Тимошенком

Як зазначено в підрозділі 3.2, базисні системи повинні забезпечувати добре обумовлені матриці, що гарантує стійкість процедури отримання аналітико-чисельного розв'язку. Тому спочатку досліджуються числа обумовленості матриць Грама, що отримуються для різних базисних систем. Потім аналізується квазіортогональність функцій, що дозволяє побудувати деякі наближені розв'язки. У наступних підрозділах проводиться аналіз аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків.

3.3.1 Числа обумовленості матриці Грама використовуваних координатних функцій

Раніше зазначалося, що для забезпечення стійкості процесу Рітца координатна система має бути сильно мінімальною в H_A . Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), до якої приводить процес Рітца, неминуче призводить до накопичення помилок округлення. Цього не відбувається лише в одному випадку: коли матриця є діагональною, тобто її розв'язок можна виписати одразу. До такого випадку приходимо, використовуючи системи, описані в підрозділах 3.2.4 і 3.2.5. В усіх інших випадках накопичення помилок округлення може звести нанівець точність будь-якого, навіть швидкозбіжного, розв'язку.

Характеристикою матриці СЛАР, до якої приводить процес Рітца (далі «матриці Грама»), є її число обумовленості « π », що дорівнює відношенню найбільшого власного значення до найменшого. Це число, грубо кажучи, вказує на кількість можливих неправильних цифр у мантисі розв'язку, що утворилися внаслідок накопичення помилок округлення. У випадку одиничної матриці (використання ортонормованої в H_A системи функцій) число $\pi = 1$. У будь-якому іншому випадку $\pi > 1$. Причому зі збільшенням кількості використовуваних базисних функцій, тобто зі зростанням порядку матриці Грама, число π буде збільшуватися, оскільки найменше власне значення може тільки зменшуватися, а найбільше – збільшуватися [144]. Невелике збільшення числа π зі зростанням порядку матриці вказує на властивість «майже ортогональності» системи базисних функцій, що відповідає дослідженням, наведеним нижче.

На рис. 3.3. показано графіки зміни чисел обумовленості π зі зростанням порядку матриці Грама. Кількість утримуваних функцій у подвійних сумах (3.9) збільшувалася одночасно в обох напрямках, тобто порядки матриць збільшувалися як 1, 4, 9, Графіки побудовано для перших п'яти систем функцій, наведених у табл. 3.2.

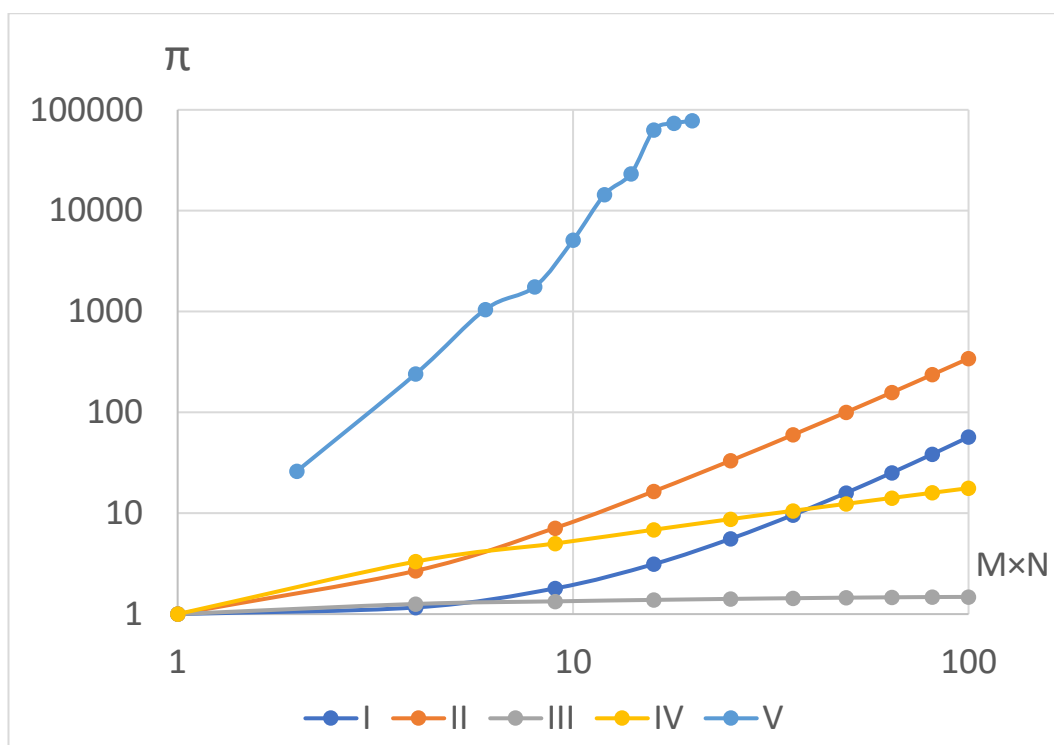


Рисунок 3.3 – Числа обумовленості матриць Грама:

I – функції, запропоновані й досліджені С. А. Халіловим (3.10),

II – функції, запропоновані й досліджені В. Б. Минтюком (3.11),

III – фундаментальні балкові функції А. Н. Кривої (3.12),

IV – косинус-біноми Філоненка-Бородича (3.13),

V – аналітико-чисельний розв'язок Даревського-Шаринова (3.46).

Як можна бачити (рис. 3.3), найменшу швидкість зростання чисел зумовленості матриць Грама і найкращий характер їхнього зростання забезпечують фундаментальні балкові функції (3.12). Косинус-біноми (3.13) мають такий самий характер зростання чисел обумовленості, хоча дещо більшу швидкість. Істотний недолік обох цих систем полягає в тому, що під час обчислення самих функцій та їхніх похідних доводиться мати справу з малими різницями великих чисел. Так при обчисленні наведених на рис. 3.3 чисел обумовленості матриць Грама з використанням функцій (3.12) необхідно було утримувати не менше **ста** значущих цифр у мантисі. Під час побудови матриць Грама з використанням інших базисних систем функцій у мантисах чисел утримували лише **десять** цифр, що не спричинило появи істотних похибок.

Серед поліноміальних функцій (3.10), (3.11), хоча характер зростання числа обумовленості матриць Грама за цими функціями однаковий, найкращі властивості мають функції (3.10). Зазначимо, що всі використовувані базисні функції, крім функцій (3.11), призводять до повністю заповненої матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а матриця з функцій (3.11), перших і других похідних від них виходить стрічковою. У цьому відношенні функції (3.11) мають значну перевагу в обчислювальному плані порівняно з іншими системами координатних функцій. Таким чином, одна з часто підкреслюваних переваг методу скінченних елементів тут відходить на другий план.

Із розглянутих матриць найгірше зумовлена матриця системи рівнянь (3.47). Різке зростання числа обумовленості спостерігається за незначного збільшення порядку матриці Грама.

Таким чином, викликана помилками округлень похибка аналітико-чисельних розв'язків, записаних за допомогою чотирьох базисних систем (3.10) – (3.13) позначиться у двох-трьох останніх знаках (з порядком матриці менше 1000). При використанні чисел з подвійною точністю ця похибка не перевищить $5e-10$ %. У будь-якому випадку подальші дослідження точності розв'язків проводяться без урахування помилок округлення, які усуваються шляхом збереження великої мантиси або використання ірраціональних чисел без округлення.

3.3.2 Властивість квазіортогональності базисних функцій

Наближені аналітичні розв'язки в одинарних рядах можливо одержати, якщо припустити, що використовувані в них сімейства базисних функцій ортогональні зі своїми похідними до другого порядку включно в гільбертовому просторі $L_2(-1; 1)$. Як відомо, у гільбертовому просторі лінійно незалежні функції можна ототожнити з компонентами нескінченновимірної вектора, тому можливо визначити відстань (кути) між його елементами [114]. У наближених розв'язках типу Моріса Леві [10] використовуються базисні функції (3.10) – (3.12), тому становить інтерес дослідити властивості квазіортогональності цих

функцій та їхніх похідних у просторі $L_2(-1; 1)$ [5]. Відповідно до наведеної вище аналогії з векторним простором, кути в градусах між елементами гільбертового простору обчислюватимуться за формулою

$$\beta_{mn}^{ij} = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \left(\frac{|(X_m^{(i)}, X_n^{(j)})|}{\|X_m^{(i)}\| \cdot \|X_n^{(j)}\|} \right), \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.48)$$

де X – координатні функції (3.10) – (3.12), i, j – порядки похідних цих функцій.

Відхилення ε_{mn}^{ij} від ортогональності функцій та їхніх похідних можна розрахувати за формулою

$$\varepsilon_{mn}^{ij} = \frac{|\beta_{mn}^{ij} - 90^\circ|}{90^\circ}. \quad (3.49)$$

Значення ε_{mn}^{ij} можуть змінюватися в діапазоні від одиниці до нуля, причому $\varepsilon_{mn}^{ij} = 1$ ($\beta_{mn}^{ij} = 0^\circ$) можливе тільки у випадку $m = n$ (діагональні елементи). У всіх інших випадках $0 \leq \varepsilon_{mn}^{ij} < 1$ ($0^\circ < \beta_{mn}^{ij} \leq 90^\circ$). Якщо $\varepsilon_{mn}^{ij} = 0$ ($\beta_{mn}^{ij} = 90^\circ$), то функції повністю ортогональні між собою.

Обчислення відхилень від ортогональності ε_{mn}^{ij} перших двадцяти функцій (3.10) – (3.12), їхніх перших і других похідних подано у вигляді градієнтних матричних графіків на рис. 3.4 – 3.6 відповідно. На цих рисунках чорний колір відповідає значенню $\varepsilon_{mn}^{ij} = 1$, білий колір – значенню $\varepsilon_{mn}^{ij} = 0$, проміжні значення змінюються від темно-синього до світло-блакитного.

Зазначимо, що функції (3.10) ортогональні в L_2 (рис. 3.4), а у системи функцій (3.11) ортогональні їхні другі похідні (рис. 3.5). Також на цьому рисунку добре простежується зазначена вище стрічкова структура матриць Грама, до якої приводить система функцій (3.11). Найкращу квазіортогональність із розглянутих мають балкові функції (3.12), крім того, що вони ортогональні разом зі своїми другими похідними (рис. 3.6), величини відхилення від ортогональності перших похідних і самих функцій від других похідних мало відрізняються від нуля, тобто кути близькі до 90° . Але, як і раніше, залишається проблема втрати точності обчислень цих функцій, пов'язана з малою різницею великих величин. Так, якщо утримати шістнадцять значущих цифр у

мантисі (що відповідає машинному числу подвійної точності), то в результаті накопичення зазначених похибок замість чіткої ортогональності (рис. 3.6), починаючи з десятої функції, з'являтимуться ненульові позадіагональні елементи (рис. 3.7). Матричні графіки, показані на рис. 3.6, побудовано з утриманням 50 значущих цифр, що дало змогу уникнути появи зазначених помилок.

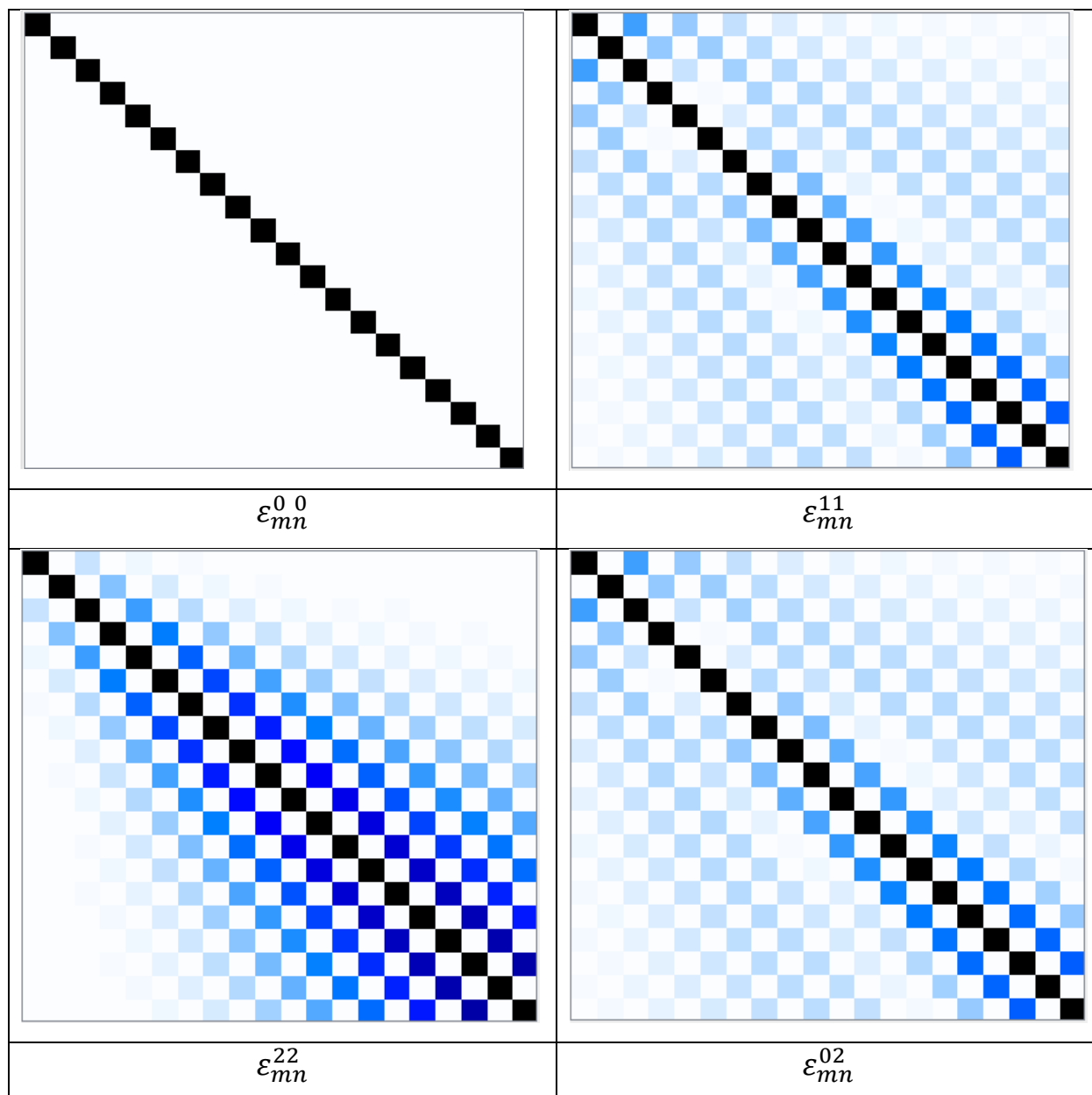


Рисунок 3.4 – Відхилення від ортогональності функцій (3.10), їхніх перших і других похідних

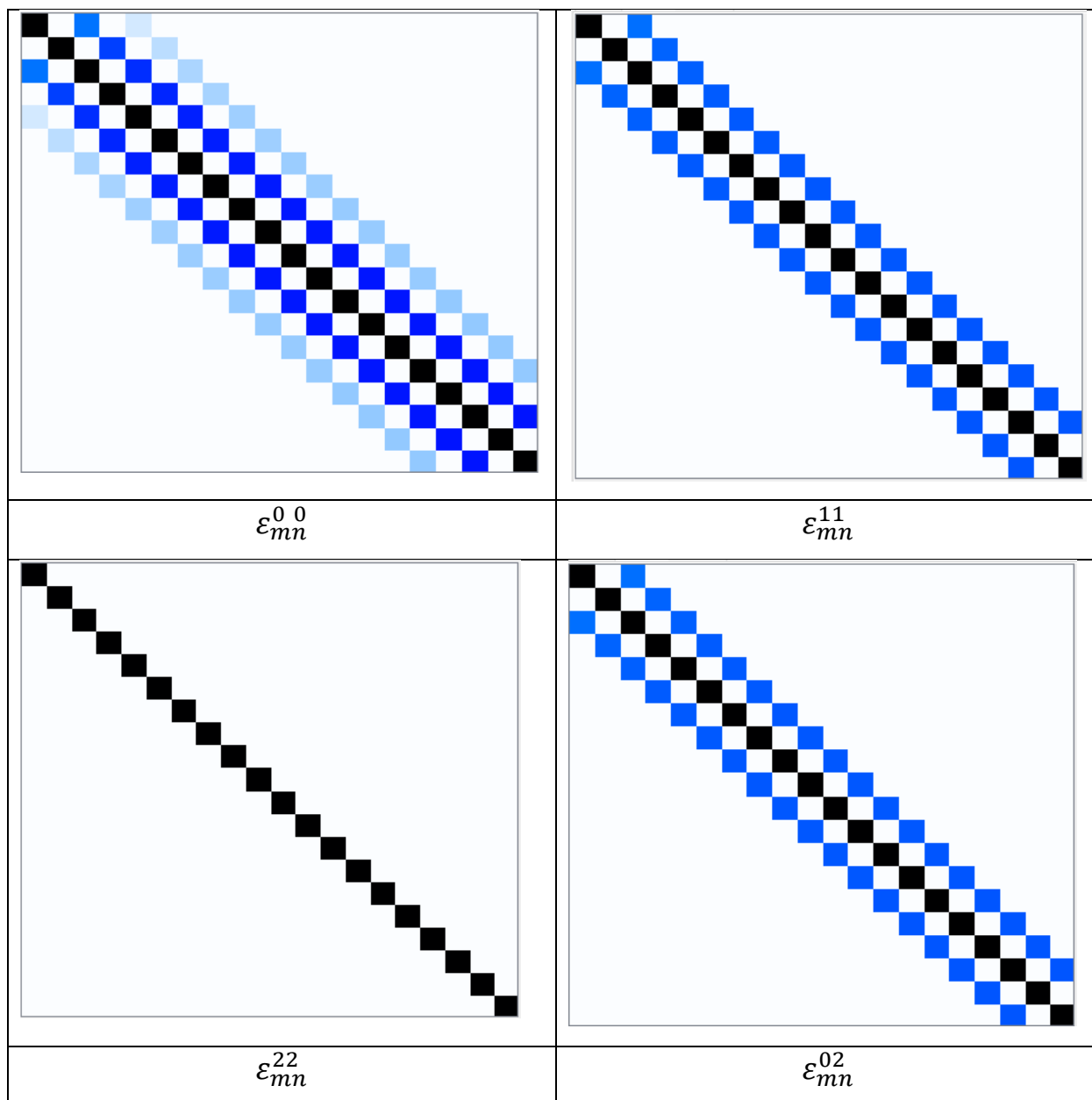


Рисунок 3.5 – Відхилення від ортогональності функцій (3.11), їхніх перших і других похідних

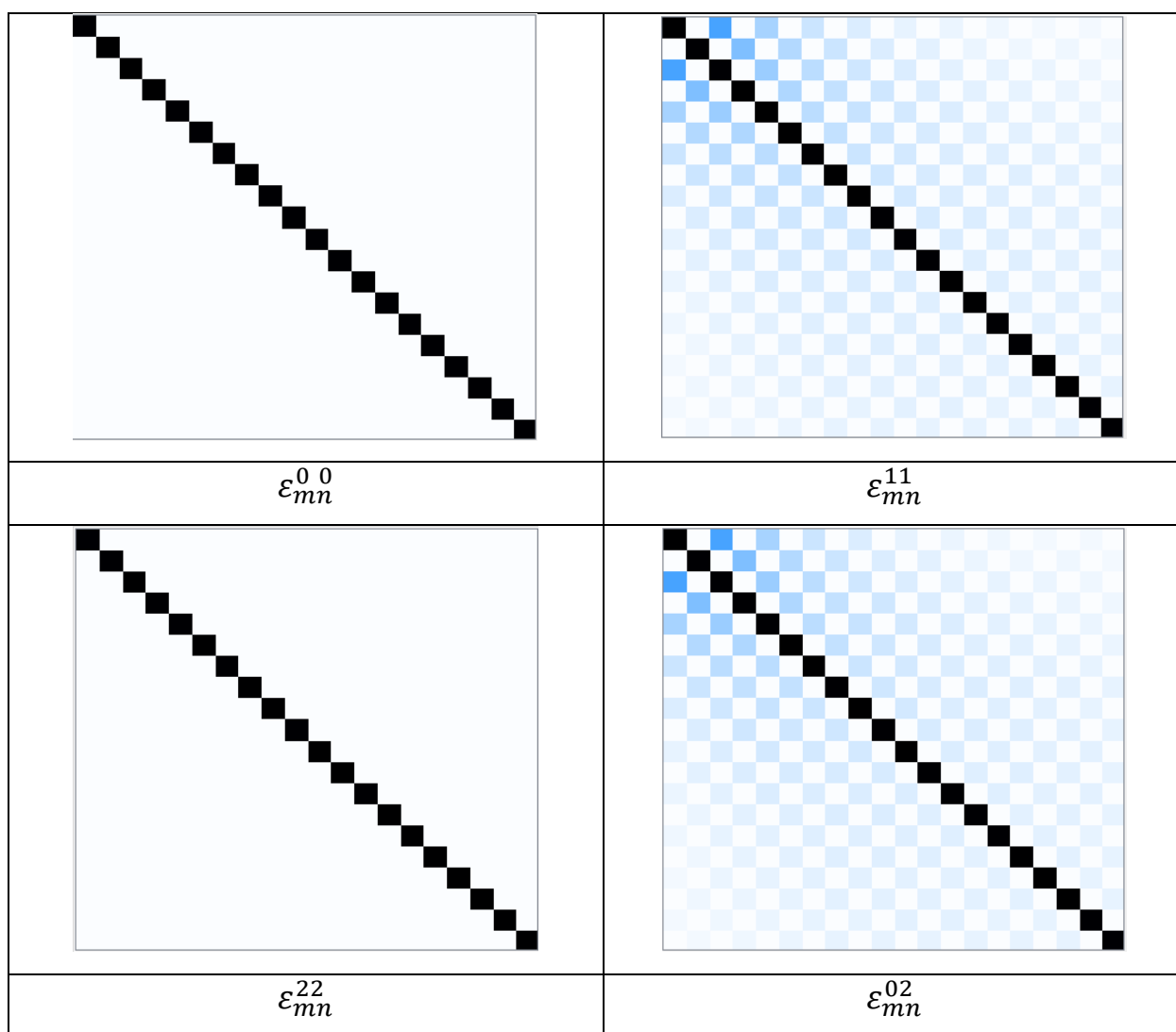


Рисунок 3.6 – Відхилення від ортогональності функцій (3.12), їхніх перших і других похідних

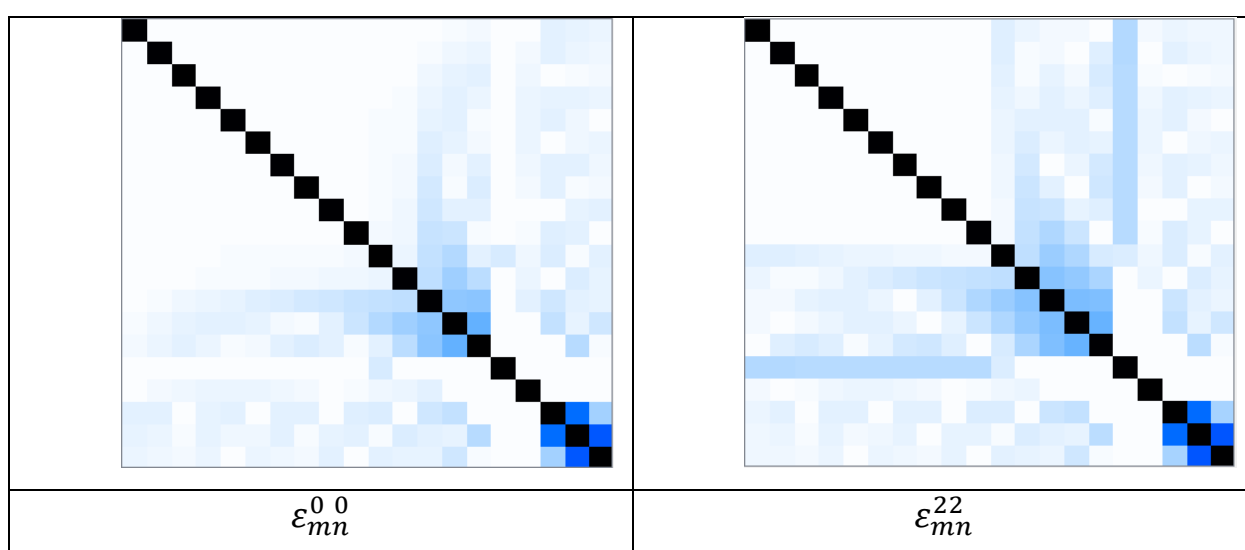


Рисунок 3.7 – Поява ненульових позадіагональних елементів у результаті накопичення помилок обчислення функцій (3.12) та їхніх других похідних

3.3.3 Аналіз аналітико-чисельного розв'язку в подвійних рядах

3.3.3.1 Точність і збіжність наближених розв'язків

Розв'язок (3.9) є аналітико-чисельним розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) у подвійних рядах. Точність цього розв'язку пов'язана насамперед з утримуваною кількістю доданків $M \times N$ у сумах (3.9), а також з властивостями самих базисних функцій $X_m(x)Y_n(y)$.

Оскільки точний розв'язок цієї задачі не отримано, то аналіз властивостей аналітико-чисельних розв'язків I – IV, табл. 3.2 у вигляді (3.9), отриманих із використанням базисних систем (3.10) – (3.13) відповідно, можна виконати за допомогою порівняння цих розв'язків між собою, а також зіставляючи їх з іншими існуючими наближеними розв'язками. Таким чином, тут досліджується швидкість збіжності розв'язків I – IV і точність результатів, одержуваних за ними, з розв'язком V (3.46) і результатами роботи [137] (VII), а також даними розв'язання аналогічної задачі чисельно методом скінченних елементів (VI). Під точністю результатів розуміється встановлення незмінних цифр у мантисі чисел.

Досліджуємо збіжність і точність значень відносних прогинів $\bar{w}$ від числа утриманих у рядах (3.9) доданків, отриманих за перерахованими вище сімома розв'язками. Дійсні прогини $w(x, y)$ пов'язані з відносними $\bar{w}(x, y)$ рівністю

$$w = \bar{w} \frac{qa^4}{D}. \quad (3.50)$$

Результати розрахунків збіжності та точності значень відносних прогинів $\bar{w}$ у центрі квадратної ($\lambda = 1$) і прямокутної ($\lambda = 0,5$) пластин від дії рівномірно розподіленого тиску ($q = \text{const}$) подано серією графіків на рис. 3.8 і 3.9 відповідно.

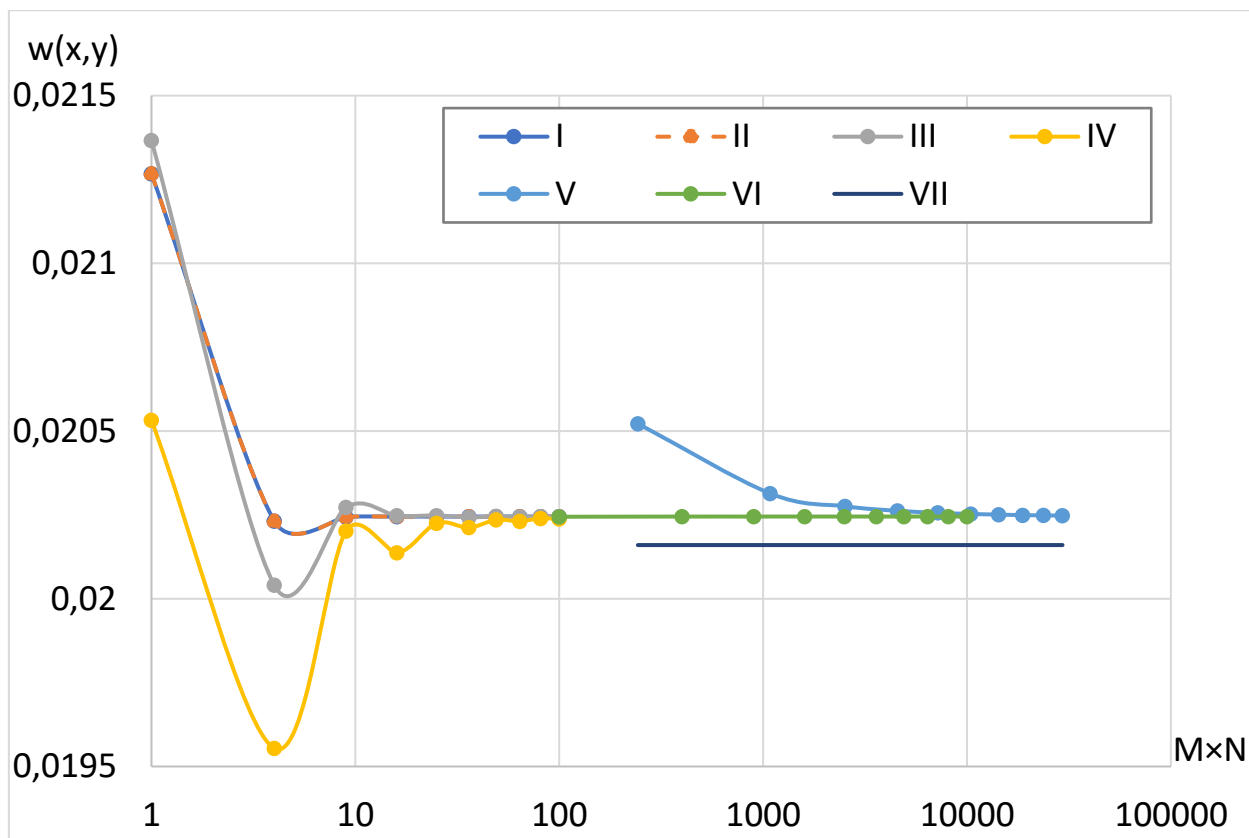


Рисунок 3.8 – Відносні прогини в центрі квадратної пластини

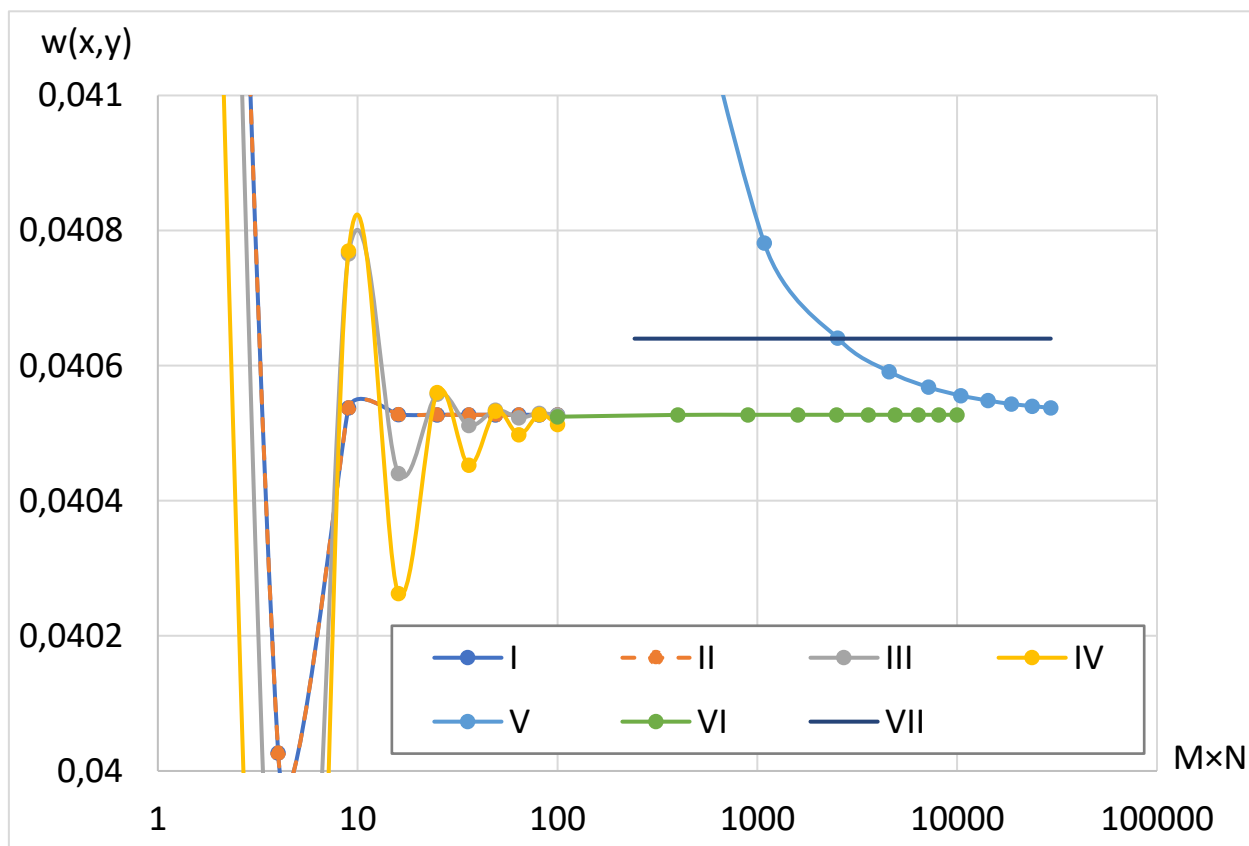


Рисунок 3.9 – Відносні прогини в центрі прямокутної пластини

Якщо прийняти за критерій значення $\bar{w} = 0,02016$, обчислене за результатами роботи [137], то значення 0,020245104 досягається швидше (з меншим числом функцій, що апроксимують прогин: шість функцій – уздовж осей абсцис і ординат) за допомогою функцій (3.10) і (3.11). Варто зазначити, що збіжність результатів за розв'язками (3.9), отриманими за допомогою функцій (3.10) і (3.11), (3.46) та за методом скінченних елементів (МСЕ) має експоненціальний характер за будь-якого подовження пластини. Розв'язки (3.9), отримані з використанням функцій (3.10) і (3.11), **ідентичні**, та їх можна прийняти за критеріальні, оскільки аналогічна точність результатів за всіма іншими розв'язками досягається за значно більшою кількістю невідомих. Найгіршу точність має розв'язок за МСЕ навіть за більш ніж 30 000 невідомих.

У задачах міцності найбільше значення має встановлення тензорних полів напружень, які визначаються моментами, що виражаються через другі похідні від векторного поля переміщень. Зі зростанням порядку диференціювання погіршується точність обчислення похідних: що вищий порядок диференціювання, то нижча точність похідних. Маючи на увазі визначення поля напружень із достатньою точністю, необхідно проаналізувати точність і збіжність других похідних наближених розв'язків. Дійсні величини моментів у безрозмірних координатах знаходяться за формулами:

$$M_x = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.51)$$

$$M_y = -\frac{D}{a^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (3.52)$$

У вигляді графіків на рис. 3.10 і 3.11 наведені значення відносних згинальних моментів у центрі $\bar{M}_x|_{x=0,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=0}$ і в середині закріплених боків $-\bar{M}_x|_{x=1,y=0} = -\bar{M}_y|_{x=0,y=1}$ квадратної пластини, отримані за різними розв'язками. Дійсні моменти пов'язані з відносними величинами рівністю:

$$M = \bar{M} q a^2 \quad (3.53)$$

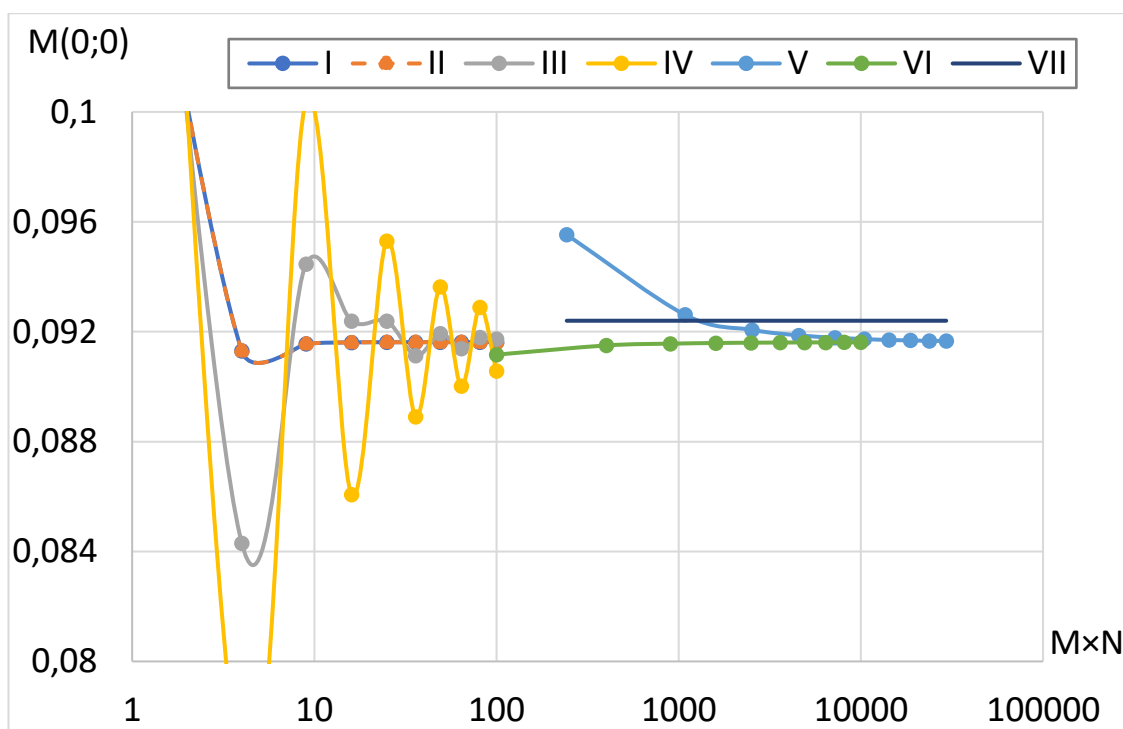


Рисунок 3.10 – Відносні згинальні моменти $\bar{M}_x|_{x=0,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=0}$

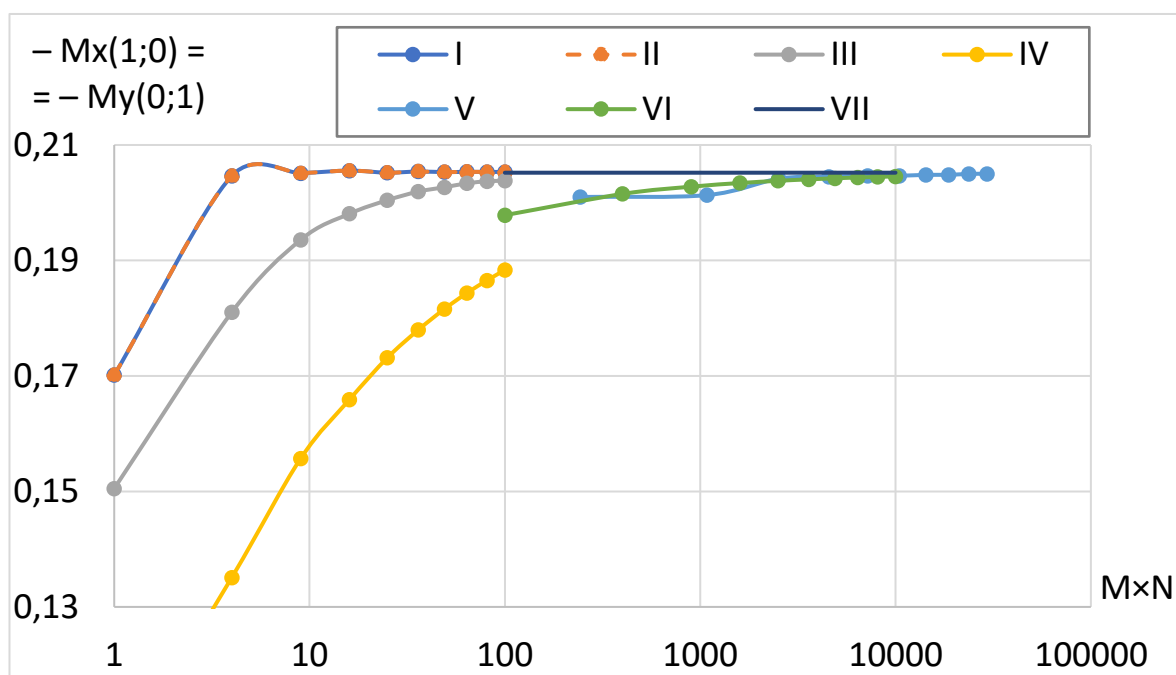


Рисунок 3.11 – Відносні згинальні моменти $-\bar{M}_x|_{x=1,y=0} = -\bar{M}_y|_{x=0,y=1}$

Для прямокутної пластини будь-якого подовження ступінь збіжності й точності якісно залишається таким самим, як і для квадратної пластини. Як підтвердження сказаного наведемо згинальні моменти у середині короткої

сторони прямокутної пластини з подовженням $\lambda = 0,5$:
 $\overline{M}_x^I = \overline{M}_x^{II} = -0,2279508$, $\overline{M}_x^{III} = -0,2216$ та $\overline{M}_x^{IV} = -0,19256$ отримані при $M \times N = 100$; $\overline{M}_x^V = -0,22624$ – при $M \times N = 10000$; $\overline{M}_x^{MCE} = -0,22468$ – при 29403 невідомих відповідно; $\overline{M}_x^{VI} = -0,2284$ (дані роботи [137]).

Близькі між собою (навіть ідентичні) результати отримуються за функціями (3.10) і (3.11), тоді як результати за функціями (3.12) мають меншу точність. Завищене значення дає розв'язок із роботи [137]. Розв'язки, отримані за допомогою розв'язання (3.46) і методом скінченних елементів (МСЕ), досягають такої ж точності лише при значно більшому порядку роздільної матриці. Аналітико-чисельний розв'язок у подвійних рядах, отриманий за функціями (3.13), сильно відрізняється від точного навіть при порядку матриці, що дорівнює ста.

3.3.3.2 Практична оцінка нев'язки розв'язків

Для оцінки точності та збіжності розв'язків у подвійних рядах необхідно дослідити якість цих розв'язків ще в одному напрямку: прагнення нев'язки рівняння до нуля у відкритій області Ω' . Нижче розглядається відносна нев'язка, яку визначимо в кожній точці $(x, y) \in \Omega$ таким чином:

$$\varepsilon = \left| \frac{q_{\Pi} - q}{q} \right| \cdot 100\%, \quad (3.54)$$

де q_{Π} – значення лівої частини рівняння (3.9) у точці з координатами (x, y) ;
 $q_{\Pi} = \frac{D}{a^4} \Delta w$; q – значення діючого навантаження. Нижче розподіл шуканої нев'язки розв'язку, отриманого в подвійних рядах за функціями (3.10) і (3.11), подано на рис. 3.12, який через симетрію за обома змінними дано для чверті квадратної пластини.

З даних і рис. 3.12 випливає чіткий висновок: в області $\Omega' \subset \Omega$ нев'язка практично зводиться до нуля. При наближенні до краю, а особливо до кутових точок, спостерігаються сплески нев'язки; однак відносні сплески нев'язки становлять менше 1,2%, що є цілком прийнятним. Варто також зазначити, що

поблизу границі спостерігається ефект Гіббса: нев'язка дорівнює нулю майже скрізь (у розумінні нульової міри Лебега).

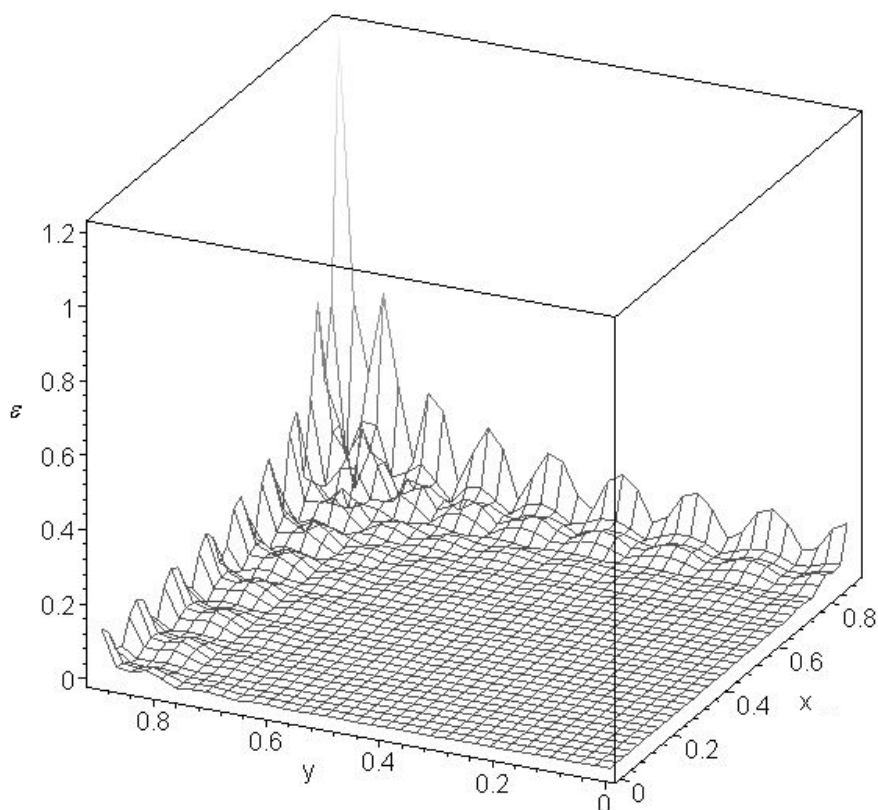


Рисунок 3.12 – Розподіл нев'язки по поверхні пластини

3.3.4 Аналіз наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є бігармонічної проблеми в прямокутнику за однорідних головних крайових умов

Запропонований підхід називаємо розв'язком типу Нав'є, за аналогією з розв'язком у подвійних тригонометричних рядах для вільно опертої по всьому контуру пластини. У даному випадку пластина по всьому контуру жорстко затиснута. Як було показано в підрозділі 3.3.2, система координатних функцій (3.10) квазіортогональна в метриці H_A , що дозволяє отримати наближений аналітичний розв'язок (3.17) у явному вигляді [5].

Розв'язок типу Нав'є (3.14) можна отримати, беручи за функції $X_m(x)Y_n(y)$ систему координатних функцій (3.11). Однак, якщо погодитися з квазіортогональністю самих функцій (3.11) і їх перших похідних, тоді залишиться тільки один ненульовий коефіцієнт у розв'язку, подібному до (3.14):

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= A_{11} M_1(x) M_1(y), \\
 A_{11} &= \frac{a^4 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q(x, y) M_1(x) M_1(y) dx dy}{\lambda^2 D}, \\
 A_{mn} &\equiv 0 \forall m \in \{2, 3, \dots, M\}, \forall n \in \{2, 3, \dots, N\}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

У випадку рівномірно розподіленого навантаження $q(x, y) = \text{const}$ для прямокутних пластин будь-якого подовження отримуємо такий замкнутий наближений розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2):

$$w(x, y) = \frac{49(y^4 - 2y^2 + 1)(x^4 - 2x^2 + 1)}{128(7\lambda^4 + 4\lambda^2 + 7)} \frac{qa^4}{D}, \tag{3.56}$$

уточнити який немає можливості. Точність результатів розв'язку (3.56) порівняно з критеріальним розв'язком (3.9) така:

- за максимальним прогином (за значенням самої функції в центрі квадратної області) дорівнює 5.05%;
- за згинальним моментом у центрі та в середині затиснутої сторони (за значенням другої похідної (3.51) або (3.52) від функції прогину пластини) дорівнює 20,7% і 17,1% відповідно.

Таким чином, нижче основна увага буде приділена чисельній оцінці точності та збіжності розв'язку (3.17) крайової задачі (3.1), (3.2) у різних метриках. Як критеріальний розв'язок приймаємо аналітико-чисельний розв'язок (3.9) за функціями (3.10) (або (3.11)), оскільки ці розв'язки, порівняно з іншими, є точнішими та мають кращу збіжність (див. підрозділ 3.3.3).

3.3.4.1 Точність і збіжність наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є в енергетичній метриці

Точність і збіжність наближених розв'язків може бути оцінена в різних метриках. Однією з основних метрик для розв'язання задач механіки є енергетична метрика – іншими словами, енергетичний простір оператора крайової задачі. Тому тут подано дослідження збіжності потенціальної енергії деформування жорстко затиснутої пластини залежно від кількості утримуваних у рядах доданків (3.17).

Вихідним є вираз для відносної потенціальної енергії деформування пластини

$$\bar{U} = \frac{1}{2\lambda a^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy = \frac{U}{D}, \quad (3.57)$$

де U – потенціальна енергія деформації пластини.

Результати обчислень за формулою (3.57) за різних подовжень пластини подано у вигляді графіків на рис. 3.13 ($M \times N$ – кількість утримуваних функцій у (3.17) при апроксимації прогину, $a = 1$).

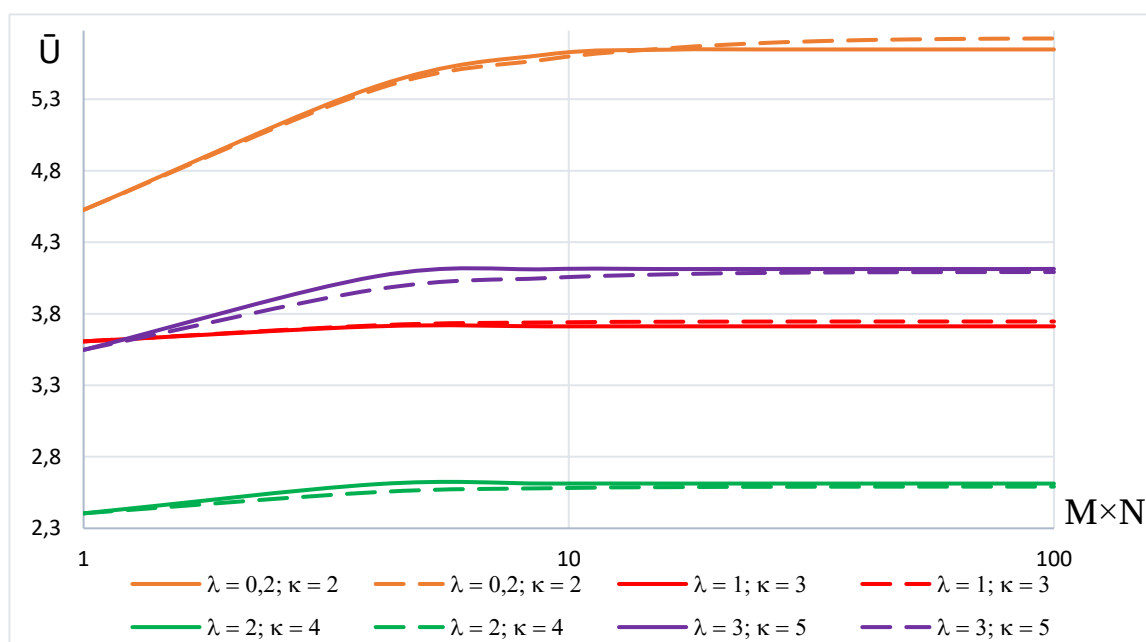


Рисунок 3.13 – Збіжність розв'язку типу Нав'є в енергетичній метриці (значення збільшено в 10^k разів)

На рис 3.13 прийнято такі позначення: неперервні лінії зображують графіки збіжності відносної потенціальної енергії, обчисленої для критеріального аналітико-чисельного розв'язку в подвійних рядах (3.9); штрихові лінії показують збіжність тієї самої енергії, обчисленої для наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є (3.17).

З наведених графіків (рис. 3.13) можна зробити два основні висновки. По-перше, збіжність обох розв'язків в енергетичній метриці є досить швидкою для всіх значень параметра λ . По-друге, похибка в енергетичній метриці наближеного розв'язку (3.17) порівняно з розв'язком у подвійних рядах (3.9) є

дуже малою (близько 1%). Таким чином, наближений розв'язок типу Нав'є демонструє швидку збіжність і високу точність за енергією.

3.3.4.2 Точність і збіжність наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є в метриці $L_2(\Omega)$

Розглянемо скінченновимірний векторний простір V розмірності $(M + 1) \times (N + 1)$, елементами якого є компоненти вектора $\vec{A}^* = \{A_{mn}^*\}_{m=0, n=0}^{M, N}$ – вектора розв'язку (3.9) системи лінійних алгебраїчних рівнянь у подвійних рядах з повністю заповненою матрицею системи алгебраїчних рівнянь і компоненти вектора $\vec{A} = \{A_{mn}\}_{m=0, n=0}^{M, N}$, присутніх у розв'язку типу Нав'є (3.17). Зіставимо квадрати норм $\|\vec{A}^*\|^2$ і $\|\vec{A}\|^2$, знайдені за формулами:

$$\|\vec{A}^*\|^2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (A_{mn}^*)^2, \quad \|\vec{A}\|^2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (A_{mn})^2. \quad (3.58)$$

Розв'язок (3.17) є розкладанням шуканої функції $w(x; y)$ в узагальнений ряд Фур'є за ортонормованою системою $H_m(x)H_n(y)$ (3.10), тоді виникає нерівність Бесселя

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w^2(x; y) dx dy \geq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{mn}^2, \quad (3.59)$$

де $\tilde{A}_{mn} = A_{mn}$ або $\tilde{A}_{mn} = A_{mn}^*$.

Оскільки повна ортонормована в $L_2(\Omega)$ система функцій (3.10) є також замкнутою, нерівність (3.59) перетворюється на рівність Парсеваля-Стеклова. Отже, якщо зазначена рівність досягається з необхідною точністю при заміні нескінченних границь у подвійній сумі (3.10) на скінченні M, N , це означає, що скінченні суми для $w(x; y)$ являють собою точний розв'язок задачі в наведеному вище сенсі.

Результати обчислень за формулами (3.58) у частках від $\frac{q^2 a^8}{D^2}$ подано у вигляді графіків на рис. 3.14 при $q = \text{const}$. На рис. 3.14 прийнято такі позначення: неперервні лінії зображують графіки збіжності квадратів норм $\|\vec{A}^*\|^2$; штрихові лінії показують збіжність квадратів норм $\|\vec{A}\|^2$.

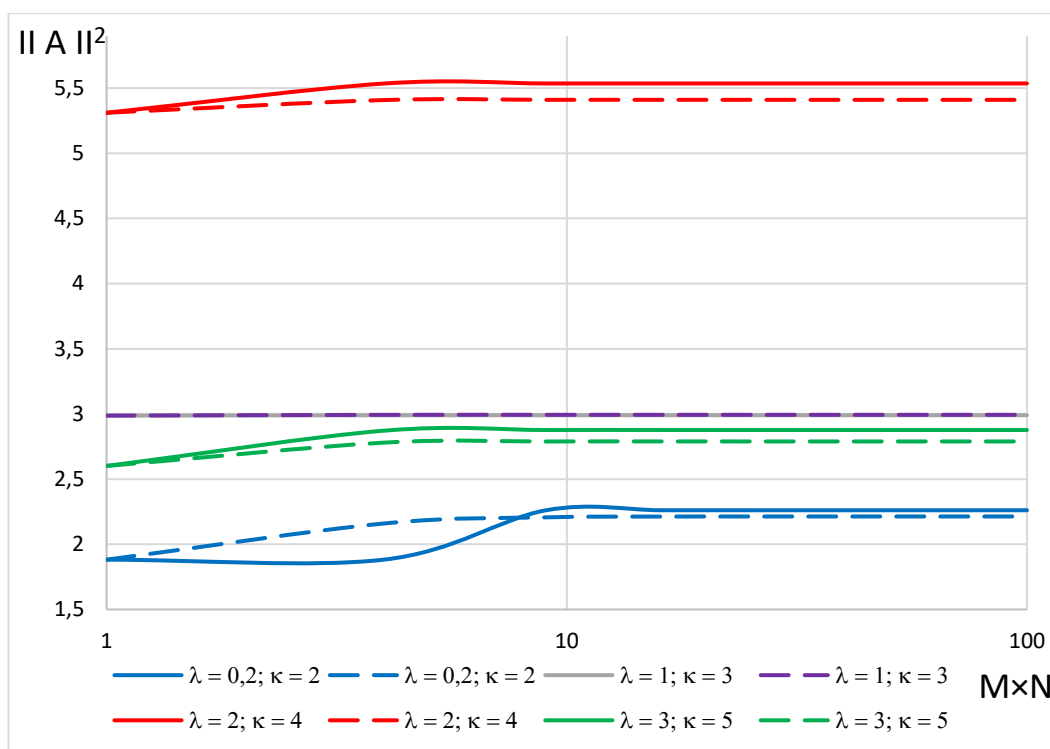


Рисунок 3.14 – Квадрати норм векторів $\|\vec{A}^*\|^2$ і $\|\vec{A}\|^2$
(значення збільшено в 10^k разів)

Як видно з графіків рис. 3.14, рівність Парсеваля-Стеклова з необхідною точністю виконується навіть при утриманні в рядах невеликого числа членів. Аналогічна стабілізація енергетичної норми така ж швидка (див. рис. 3.13). Наведеними вище графіками підтверджується належність функції $w(x; y) \in W_2^0(\Omega)$ і тим більше $w(x; y) \in L_2(\Omega)$, а за теоремою вкладки С. Л. Соболева $W_2^0(\Omega)$ компактно вкладається в $L_2(\Omega)$.

3.3.4.3 Поточний аналіз збіжності й точності наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є

Аналіз збіжності наближеного аналітичного розв'язку типу Нав'є (3.17) та точності отриманих результатів здійснюється шляхом порівняння компонент напружено-деформованого стану пластини. Результати, обчислені за наближеним розв'язком, порівнюються з результатами, отриманими за критеріальними розв'язками в подвійних рядах (3.9) за функціями (3.10) або (3.11).

Розглянемо вигин жорстко затиснутої квадратної пластини $\lambda = 1$ під дією постійного тиску $q = \text{const}$. Так, на рис. 3.15 дано поверхні функцій відносного прогину $\bar{w}$ (3.50), що відповідають двом розв'язкам: розв'язку (3.17) – суцільні лінії, розв'язку (3.9) – точки. Ці результати свідчать про високу точність наближеного розв'язку у відкритій області прямокутника, а значить, коригувальні доданки, які відкидаються в розв'язку типу Нав'є, вносять несуттєві поправки під час визначення самого розв'язку.

Дещо інша ситуація спостерігається з поверхнями відносних моментів $\bar{M}$ (3.53), зображеними на рис. 3.16. Суцільні лінії на графіку відповідають розв'язку (3.17), а точки – розв'язку (3.9). Легко побачити, що існує деяка внутрішня область $\Omega' \subset \Omega$, у якій два розв'язки практично збігаються. Відмінності між цими розв'язками спостерігаються у прикордонній смузі $\delta = \Omega \setminus \Omega'$. Зазначимо, що моменти, обчислені за наближеним аналітичним розв'язком, зазвичай перевищують за модулем відповідні значення, отримані за критеріальним розв'язком, що забезпечує додатковий запас міцності.

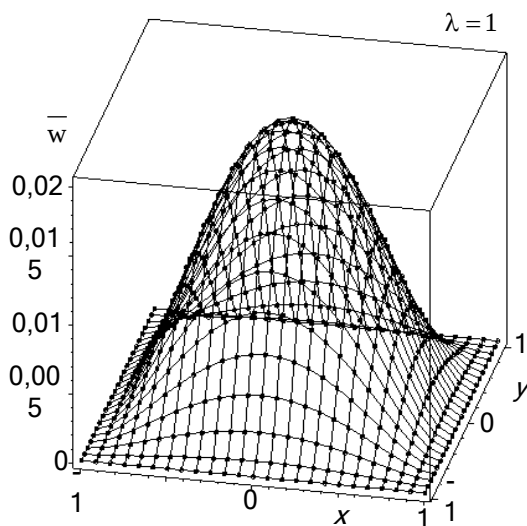


Рисунок 3.15 – Поверхні відносних прогинів пластини

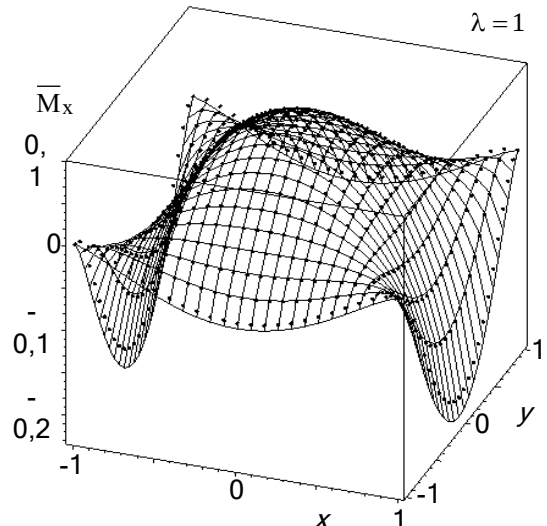


Рисунок 3.16 – Поверхні відносних моментів пластини

На наступному рис. 3.17 показано перерізи поверхонь, зображених на рис. 3.15 і 3.16, деякими площинами, способи позначення кривих ті самі, що й на зазначених рисунках. Наведені графіки поширюються на всю область їх

визначення за парністю. Тут більш наочно видно похибки за моментами наближеного розв'язку (3.17) у прикордонній смузі δ .

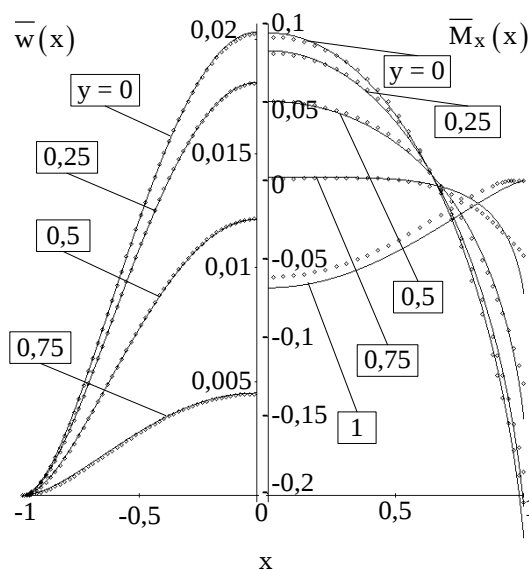


Рисунок 3.17 – Розподіл відносних прогинів і відносних моментів за деякими лініями

З рис. 3.17 випливає:

- функція прогинів не потребує уточнення;
- функції моментів можуть бути (за бажання) уточнені в деякій прикордонній зоні. Ширина цієї зони залежить від необхідної точності.

3.3.5 Аналіз розв'язку типу Моріса Леві крайової задачі в прямокутнику з бігармонічним оператором

У цьому підрозділі даються апостеріорні оцінки наближеного розв'язку в одинарних рядах (3.18) крайової задачі про вигин прямокутної пластини (3.1), (3.2) від дії постійного тиску ($q = \text{const}$) [10]. Ці оцінки отримуються шляхом чисельного зіставлення результатів розв'язку (3.18) з результатами розв'язків, які дають інші методи у високих наближеннях (наприклад, методом Рітца за формулою (3.9)).

У табл. 3.3 наведено результати розрахунків компонент напружено-деформованого стану кількох подовжень пластини за допомогою розв'язку типу Моріса Леві (3.18), побудованого за трьома функціями: (3.10) (позначимо " I^0 "),

(3.11) (позначимо " Π^0 ") і (3.12) (позначимо " Π^0 "). Позначимо "I" результати за критеріальним розв'язком у подвійних рядах (3.9) за функціями (3.10) або (3.11). У другому стовпці таблиці наведено кількість утримуваних функцій у подвійних ($M \times N$) і одинарних (M) рядах. Слід зазначити, що в розв'язку Π^0 одинарний ряд обривається на першому ж члені (як і в разі розв'язку типу Нав'є). Зазначеної кількості членів у рядах достатньо для того, щоб усі наведені знаки відповідних величин були точні в тому плані, що подальше збільшення доданків у рядах не призвело б до уточнення останньої цифри в мантисі.

Таблиця 3.3— Розв'язання типу Моріса Леві задачі вигину закріпленої на границі прямокутної пластини

λ	Розв'язок	$M \times N, M$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_x(1,0)$	$\bar{M}_y(0,0)$	$\bar{M}_y(0,1)$
0,1	I	10×50	0,0416671	0,166668	-0,333329	0,0499999	-0,227548
	I^0	10	0,0412208	0,1559207	-0,396113	0,0467762	-0,2211185
	Π^0	30	0,0416667	0,1666794	-0,333056	0,0500038	-0,2222122
	Π^0	1	0,0416667	0,1666667	-0,333333	0,0500000	-0,2338536
0,5	I	10×20	0,0405272	0,1646204	-0,331464	0,0632332	-0,2279508
	I^0	10	0,0402798	0,1566413	-0,388591	0,0606005	-0,2215366
	Π^0	30	0,040580	0,1665946	-0,325404	0,0638378	-0,2226252
	Π^0	1	0,0407257	0,1673886	-0,325806	0,0638235	-0,2342716
1	I	10×10	0,0202451	0,0916216	-0,205339	0,0916216	-0,2053384
	I^0	10	0,0203018	0,0937529	-0,227987	0,0927738	-0,2017369
	Π^0	30	0,0202941	0,0969377	-0,181595	0,0936657	-0,2018405
	Π^0	1	0,0207387	0,1043971	-0,165910	0,0963604	-0,2144754
2	I	20×10	0,002533	0,0158081	-0,056987	0,0411556	-0,0828652
	I^0	10	0,002551	0,0172619	-0,069921	0,0419271	-0,0831553
	Π^0	30	0,0025437	0,0170546	-0,044808	0,0417548	-0,0829204
	Π^0	1	0,0028162	0,0244049	-0,02253	0,0471797	-0,0951903
3	I	30×10	0,0005170	0,0056413	-0,025283	0,0186228	-0,0372338
	I^0	10	0,0005179	0,0058281	-0,035912	0,0187125	-0,0372822
	Π^0	30	0,0005184	0,0058181	-0,019208	0,0187288	-0,0373256
	Π^0	1	0,0006256	0,0091797	-0,005005	0,0230085	-0,0461007

Дані табл. 3.3 свідчать про те, що точність розв'язування задачі в одинарних рядах значно знижується зі збільшенням подовження пластини, особливо при обчисленні моментів. Це становить проблему, але існує спосіб її вирішення: апроксимувати розв'язок за базисними функціями вздовж короткої сторони пластини. Варто зазначити, що процес обчислень за функціями (3.12) є вкрай нестійким, що вимагало зберігання до 50 знаків у мантисі. За стандартної машинної довжини мантиси (16 цифр) результати, отримані за цими функціями, значно відрізняються від наведених у табл. 3.3.

3.3.6 Аналіз наближеного аналітичного розв'язку, побудованого на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису

3.3.6.1 Дослідження властивостей ортонормованого базису

Нагадаємо, що для побудови ортонормованого за енергією базису (3.40) тут використовуються три різні поліноміальні системи: (3.10), (3.11) і (3.33). Раніше, як приклад, були подані перші три координатні функції класу ω_{++} , побудовані на основі кожного з трьох зазначених базисів. Точні формули, аналогічні формулам (3.37) – (3.39), можна отримати для довільного S (табл. 3.1). Перехід від точних значень коефіцієнтів C_r з формули (3.40) до їх наближених значень із наперед заданою точністю не гарантує, що розв'язок (3.31) крайової задачі (3.1), (3.2) буде так само точним. Це відбувається через накопичення помилок машинного округлення під час побудови кожної наступної функції. Сказане ілюструє табл. 3.4, у якій наведено коефіцієнти C_r для перших шести функцій із класу ω_{++} , побудованих за трьома вихідними базисами. У чисельнику наведені значення коефіцієнтів C_r , обчислені за точними формулами, скориговані до п'яти значущих цифр. У знаменнику подані значення тих самих коефіцієнтів, отримані шляхом наскрізного обчислення з точністю до п'яти цифр у мантисі.

Зіставляючи значення коефіцієнтів, отримані за різними вихідними координатними функціями, можна зробити такі висновки:

– спостерігається діагональне переважання коефіцієнтів;

– значення коефіцієнтів, отримані за вихідною системою (3.33), на 2-3 порядки вищі за значення коефіцієнтів, отриманих з використанням базисів (3.10) та (3.11). Це призводить до погіршення властивостей матриці Грама.

Таблиця 3.4 – Коефіцієнти C_r ортонормованої системи функцій $\omega_k(x, y) = \omega_k^{++}(x, y)$

ω_k	$H_0(x)H_0(y)$	$H_0(x)H_2(y)$	$H_2(x)H_0(y)$	$H_0(x)H_4(y)$	$H_2(x)H_2(y)$	$H_4(x)H_0(y)$
ω_0	1,111(1)e-1	-	-	-	-	-
	1,1111e-1					
ω_1	0	2,8991e-2	-	-	-	-
	2,6925e-07	2,8991e-2				
ω_2	0	-2,8510e-4	2,8992e-2	-	-	-
	-5,3130e-6	-2,8488e-4	2,8990e-2			
ω_3	5,9149e-4	-7,8174e-3	-2,7016e-5	1,1490e-2	-	-
	5,8861e-4	-7,8161e-3	-2,6936e-5	1,1490e-2		
ω_4	-2,5994e-3	1,6062e-3	1,4727e-3	-1,9679e-4	1,7926e-2	-
	-2,5964e-3	1,6101e-3	1,4726e-3	-1,9629e-4	1,7921e-2	
ω_5	6,3607e-4	-5,4061e-5	-7,8437e-3	2,6815e-6	-3,0703e-4	1,1492e-2
	6,5842e-4	-5,0473e-5	-7,7548e-3	2,4709e-6	-3,1657e-4	1,1493e-2
ω_k	$M_0(x)M_0(y)$	$M_0(x)M_2(y)$	$M_2(x)M_0(y)$	$M_0(x)M_4(y)$	$M_2(x)M_2(y)$	$M_4(x)M_0(y)$
ω_0	7,1429e-3	-	-	-	-	-
	7,1429e-3					
ω_1	8,5861e-4	5,0086e-3	-	-	-	-
	8,5941e-4	5,0085e-3				
ω_2	8,5021e-4	-4,9254e-5	5,0088e-3	-	-	-
	8,5283e-4	-4,7231e-5	5,0078e-3			
ω_3	2,0813e-5	2,6723e-4	-4,6674e-6	3,1941e-3	-	-
	2,0365e-5	2,6693e-4	-4,9015e-6	3,1942e-3		
ω_4	1,6498e-4	1,6765e-3	1,6812e-3	-5,4703e-5	8,3226e-3	-
	1,6788e-4	1,6799e-3	1,6830e-3	-5,4548e-5	8,3222e-3	
ω_5	1,7989e-5	-3,3399e-5	2,3847e-4	7,4539e-7	-1,4255e-4	3,1945e-3
	1,4575e-5	-2,1680e-5	2,4117e-4	4,6842e-6	-1,4286e-4	3,1946e-3
ω_k	$P_0(x)P_0(y)$	$P_0(x)P_2(y)$	$P_2(x)P_0(y)$	$P_0(x)P_4(y)$	$P_2(x)P_2(y)$	$P_4(x)P_0(y)$
ω_0	1,3672e-1	-	-	-	-	-
	1,3672e-1					
ω_1	-2,8760e-2	3,1636e-1	-	-	-	-
	-2,8762e-2	3,1637e-1				
ω_2	-2,8479e-2	-3,1111e-3	3,1638e-1	-	-	-
	-2,8474e-2	-3,1141e-3	3,1633e-1			
ω_3	1,9318e-2	-3,6632e-1	-2,9481e-4	7,0252e-1	-	-
	1,9322e-2	-3,6635e-1	-2,8955e-4	7,0254e-1		
ω_4	7,8990e-3	-1,3537e-1	-1,4164e-1	-1,2032e-2	1,7348	-
	7,9016e-3	-1,3534e-1	-1,4165e-1	-1,1989e-2	1,7344e	
ω_5	1,9184e-2	2,0457e-3	-3,6394e-1	1,6395e-4	-2,9713e-2	7,0263e-1
	1,9133e-2	2,1690e-3	-3,6442e-1	2,3390e-4	-3,1629e-2	7,0641e-1

Під діагональним переважанням треба розуміти таке. Величини діагональних коефіцієнтів, що стоять при провідних функціях (3.10) або (3.12), значно перевищують величини коефіцієнтів, що стоять при функціях, які є ортонормувальними добавками. Це означає, що самі провідні функції є майже

ортогональними в енергетичній метриці H_A . Наприклад, функцію $\omega_4^{++}(x, y)$, побудовану за вихідним базисом (3.10), можна записати так:

$$\omega_{4++}(x, y) = 0,017926 \left(\underline{H_2(x)H_2(y)} - 0,14501H_0(x)H_0(y) + \right. \\ \left. + 0,0896H_0(x)H_2(y) + 0,08215H_2(x)H_0(y) - 0,01098H_0(x)H_4(y) \right) \equiv B_4\tilde{\omega}_{4++},$$

тут провідною є функція $H_2(x)H_2(y)$, а решта – ортонормувальні добавки.

Система функцій $\omega_k(x, y)$ точно ортонормована в $H_A(\Omega)$. Виникає природне запитання, чи є ортонормована в $H_A(\Omega)$ система функцій $\omega_k(x, y)$ майже ортогональною у вихідному просторі $L_2(\Omega)$. Відповідь на це питання позитивна, про що свідчать дані на матричних графіках (рис. 3.18). Елементи матриць є значеннями відхилень ε_{mn} від ортогональності в $L_2(\Omega)$ перших двадцяти функцій чотирьох класів парності, побудованих на основі вихідних базисів (3.10) і (3.11). Ці відхилення визначаються також, як і в пункті 3.3.2, за формулою (3.49) (три випадки цих коефіцієнтів справедливі й тут). Формула (3.48) для розрахунку кутів β_{mn} між ортонормованими функціями в гільбертовому просторі тут перезаписується так:

$$\beta_{mn} = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \left(\frac{(\omega_m, \omega_n)}{\|\omega_m\| \cdot \|\omega_n\|} \right). \quad (3.60)$$

На наведених матричних графіках (рис. 3.18) чорний колір відповідає значенню $\varepsilon_{mn} = 1$, білий колір – значенню $\varepsilon_{mn} = 0$, проміжні значення відхилення від більшого до меншого змінюються від темно-синього до світло-блакитного. Класи парності ортонормованих за енергією функцій уздовж осей "x" і "y" відповідно позначені символами "+" (парний) або "-" (непарний).

Навіть побіжний перегляд матричних графіків дає змогу сформулювати таке: система функцій $\omega_k(x, y)$, будучи ортонормованою в енергетичному просторі $H_A(\Omega)$ позитивно визначеного оператора A , є майже ортогональною у вихідному просторі $L_2(\Omega)$.

Слід ще раз підкреслити, що матриця Грама є одиничною лише при побудові ортонормованого в H_A базису за точними формулами. У випадку чисельної побудови цього ж базису (за наскрізного обчислення) матриця Грама перестає бути строго одиничною. Похибки, внесені при цьому в розв'язання

крайової задачі, можна оцінити тільки інтегрально. Як інтегральну характеристику природно вибрати визначник цієї матриці, який теоретично має дорівнювати одиниці. Через явище нестійкості відмінність визначника матриці Грама від одиниці буде тим меншою, чим більше знаків (параметр m) зберігається в мантисі дійсних чисел. Іншим важливим параметром є кількість ортогоналізованих функцій (параметр k). На підтвердження цього наводяться графіки (рис. 3.19), які показують зміну значення визначника матриці Грама для $\lambda = 1$ залежно від параметрів m і k , з урахуванням округлення чисел під час наскрізного обчислення.

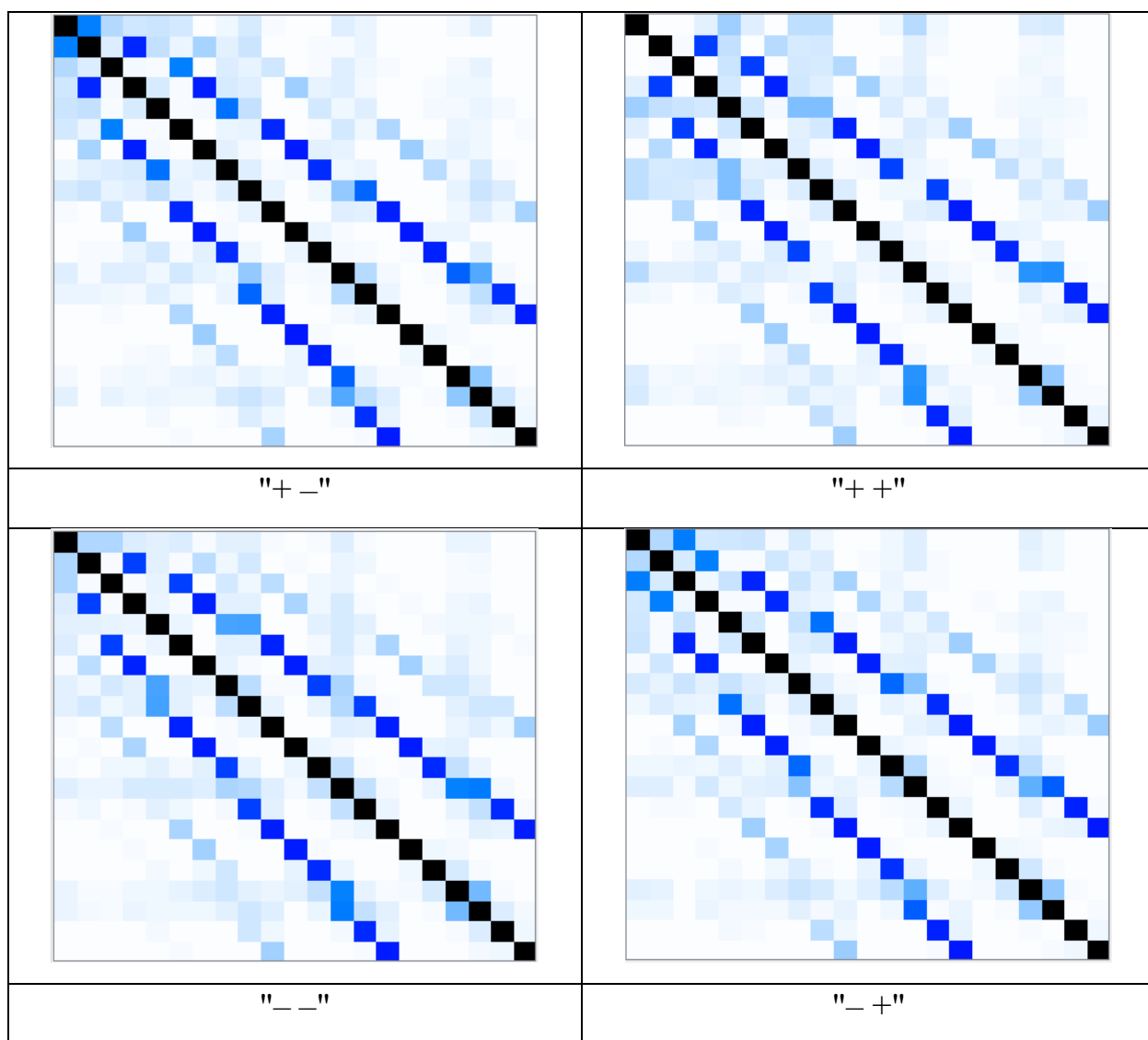


Рисунок 3.18 – Відхилення від ортогональності систем функцій $\omega_k(x, y)$ у гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$.

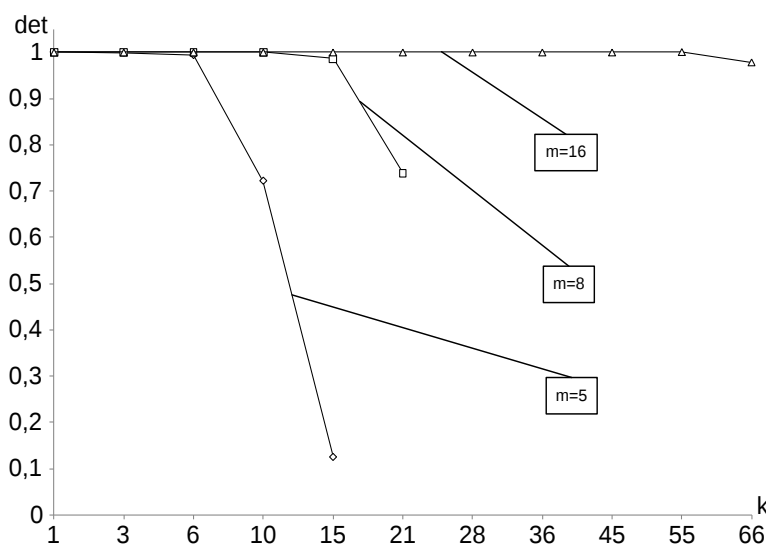


Рисунок 3.19 – Визначник матриці Грама функцій $\omega_k(x, y)$, побудованих з округленням чисел під час наскрізного обчислення

Дані цих графіків прозорі: так, за $m = 5$ максимально точно можна побудувати всього три функції ($k = 3$), а за $m = 8$ – десять функцій ($k = 10$). Для досягнення необхідної точності й стійкості обчислювального процесу необхідно утримувати в мантисі як мінімум 16 значущих цифр. При цьому можна гарантувати точну побудову 55 функцій. Графіки рис. 3.19 відповідають функціям $\omega_{++}(x, y)$. Для функцій з іншого класу парності результат аналогічний.

3.3.6.2 Аналіз розв'язання крайової задачі з використанням базису, ортонормованого в енергетичному просторі

Як і раніше, розглядається задача вигину прямокутної жорстко закріпленої по всьому контуру пластини під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивністю $q(x, y) = \text{const}$, яка описується диференціальним рівнянням (3.1) і крайовими умовами (3.2) [11]. Результати обчислень компонент напружено-деформованого стану залежно від значення $K(S)$ зведено в табл. 3.5, у якій подано їхні відносні величини в характерних точках. Під час визначення компонент напружено-деформованого стану пластини використовувався розв'язок (3.31), отриманий на основі ортонормованого за енергією базису, побудованого за вихідною системою координатних функцій (3.10).

Таблиця 3.5 – Жорстко закріплена прямокутна пластина під дією рівномірно розподіленого тиску

λ	K	S	$\bar{w}(0;0)$	$\bar{M}_x(0;0)$	$\bar{M}_y(0;0)$	$\bar{M}_x(1;0)$	$\bar{M}_y(0;1)$
1	1	0	0,021267	0,110590	0,110590	-0,170139	-0,170139
	3	2	0,020202	0,089821	0,089821	-0,208482	-0,208482
	6	4	0,020247	0,091748	0,091748	-0,205828	-0,205828
	10	6	0,020247	0,091740	0,091740	-0,205764	-0,205764
	15	8	0,020243	0,091500	0,091500	-0,205355	-0,205355
	21	10	0,020246	0,091705	0,091705	-0,205117	-0,205117
	28	12	0,020245	0,091565	0,091565	-0,205337	-0,205337
	36	14	0,020245	0,091656	0,091656	-0,205405	-0,205405
	45	16	0,020245	0,091598	0,091598	-0,205330	-0,205330
	55	18	0,020245	0,091635	0,091635	-0,205316	-0,205316
	105	26	0,020245	0,091623	0,091623	-0,205334	-0,205334
2	45	16	2,53293E-03	0,015799	0,041143	-0,056974	-0,082876
3	45	16	5,16972E-04	0,005636	0,018615	-0,025273	-0,037237
4	45	16	1,62906E-04	0,003115	0,01042	-0,014233	-0,020842
5	45	16	6,66653E-05	0,001997	0,006663	-0,009114	-0,013330

Дані таблиці демонструють зміну величин максимального прогину та згинальних моментів залежно від подовження пластини, а також залежність цих величин від числа утримуваних функцій у розв'язку (3.31) при $\lambda = 1$. При $\lambda = 1$ для досягнення високої точності навіть при обчисленні згинальних моментів достатньо прийняти $K = 15$ ($S = 6$). Для інших значень подовження пластини дуже високу точність можна забезпечити при $K = 45$ ($S = 16$), при цьому в таблиці правильні всі наведені значущі цифри. Порівнюючи результати цього розв'язку з результатами критеріального розв'язку в подвійних рядах, наведеного в підрозділах 3.3.4 і 3.3.5, можна побачити їхній збіг із високою точністю.

3.3.7 Аналіз розв'язку базової крайової задачі, побудованого за допомогою власних функцій бігармонічного оператора

Наведені нижче результати охоплюють два напрямки. Перший стосується питань стійкості, збіжності й точності визначення власних значень і власних функцій залежно від числа доданків, які утримуються в розв'язку. Тут же дано порівняння перших тринадцяти власних значень, отриманих для кількох

значень подовження пластини, з даними Г. Фікери [21] і А. Ванштейна [145], підходи яких дають змогу одержати двосторонні оцінки власних значень. Другий напрям охоплює питання стійкості, збіжності та точності самого розв'язку крайової задачі (3.1), (3.2).

3.3.7.1 Аналіз розв'язку задачі про спектр бігармонічного оператора

Власні значення для бігармонічного оператора в крайовій задачі (3.43), (3.2) знаходили з використанням стандартної процедури, тому питання про стійкість процедури одержання власного спектра досліджуваного оператора не піддається сумніву. Однак з урахуванням того, що ця процедура має ітераційний характер, питання збіжності й точності як власних значень, так і коефіцієнтів власних форм потребують окремого й більш докладного розгляду. Отже, на рис. 3.20 подано збіжність першого власного значення за різних значень параметра подовження пластини залежно від числа утримуваних членів у сумі (3.45).

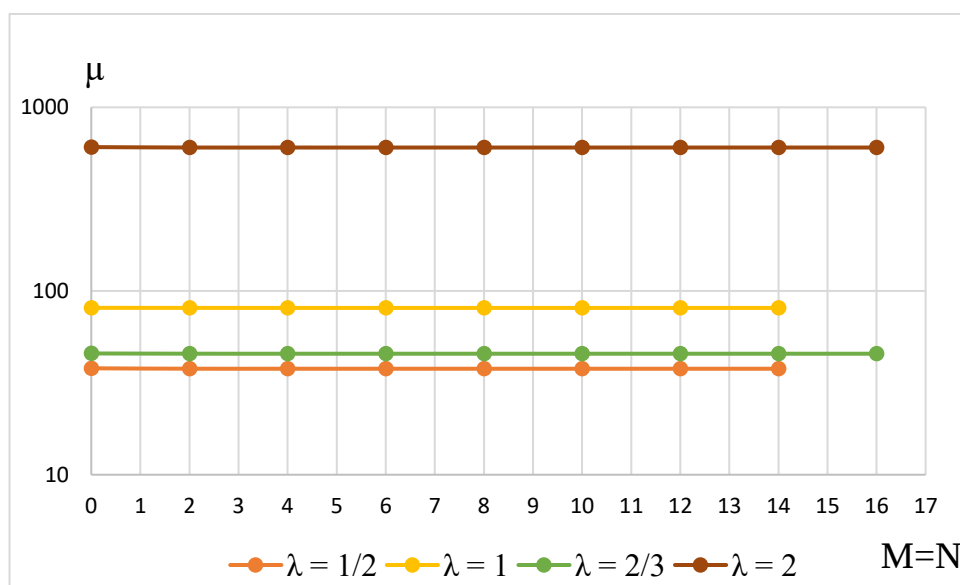


Рисунок 3.20 – Збіжність і точність мінімального власного значення μ за різних значень параметра подовження λ

Якщо зупинитися на збіжності (після збільшення доданків у сумі (3.45) уточнення результатів не відбувається) перших восьми цифр чисел, тоді записані нижче власні значення можна прийняти за точні:

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{1}{2}, \quad M = N = 12 &\rightarrow \mu = 37,753992; \\
\lambda = \frac{2}{3}, \quad M = N = 14 &\rightarrow \mu = 45,579149; \\
\lambda = 1, \quad M = N = 12 &\rightarrow \mu = 80,933374; \\
\lambda = 2, \quad M = N = 14 &\rightarrow \mu = 604,06387.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Графіки на рис. 3.20 свідчать про високу збіжність власних значень та стійкість процедури їх визначення. Зі збільшенням параметра подовження швидкість збіжності зменшується незначно, і стійкість процедури не порушується. Для інженерних розрахунків достатньо врахувати в сумі (3.45) лише кілька перших членів (принаймні для параметра $\lambda \leq 2$, на практиці це справедливо при $\lambda \leq 5$). Наприклад, при $\lambda = 2$ похибка визначення мінімального власного значення при $M = N = 2$ від точного значення (3.61) становить усього 0,0274%. Зі збільшенням кількості членів у сумі (3.45) власні значення зменшуються для будь-якого λ , що повністю відповідає теоремі Дж. У. Релея [146].

Далі на рис. 3.21 продемонструємо збіжність і точність кількох перших власних значень за параметра подовження $\lambda=1$. У підпису до рис. 3.21 у чисельнику дробу вказано число напівхвиль уздовж осі 0x, а в знаменнику – уздовж осі 0y; M і N позначають значення верхніх меж у сумі (3.45) за кожною змінною. Результати порівнюються з даними (вони позначені "**") довідника [147], увідповідненими з нашими позначеннями за формулою

$$\mu^* = \left(\frac{\bar{\omega}}{4}\right)^2, \tag{3.62}$$

де $\bar{\omega}$ – дані роботи [147].

Жирним виділено власні значення, отримані під час розв'язання задачі (3.43), (3.2), усі наведені значущі цифри яких правильні. Відповідно до теореми Дж. У. Релея вищі наближення уточнюють власні значення зверху. Аналіз графіків і порівняння власних значень, отриманих у даній роботі з відповідними значеннями роботи [147], показує швидку збіжність і високу точність пропонованого аналітико-чисельного розв'язку (3.45).

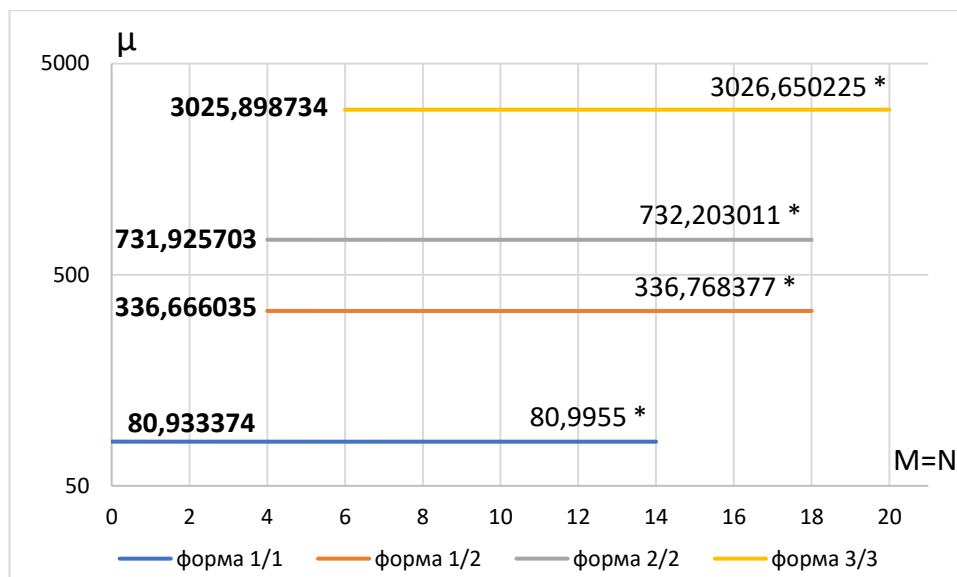


Рисунок 3.21 – Збіжність кількох перших власних значень

Оскільки енергетичні методи, включно з методом скінченних елементів, дають лише верхні оцінки власних значень, особливого значення на практиці набуває отримання нижніх оцінок. Це завдання значно складніше, ніж уточнення верхніх оцінок. Причина в тому, що варіаційний принцип Кастільяно, який є зустрічним до принципу Лагранжа, не застосовується в задачах стійкості та коливальності через їхню нелінійну природу. Тому необхідно розробляти спеціальні методи двосторонніх оцінок, які не залежать від жодних варіаційних принципів.

У зв'язку з вищевикладеним наведемо порівняння (табл. 3.6) отриманих результатів із даними А. Вайнштейна [145] і Г. Фікера [21], які отримали двосторонні оцінки своїми оригінальними методами. У таблиці наведено дані для розв'язку (3.45), запропонованого в цій роботі (з урахуванням кратності власних значень), що гарантують правильність п'яти значущих цифр після коми ($M = N = 20$), і, по суті, є точними розв'язками. Зі збільшенням параметра продовження λ точність власних значень зберігається, якщо збільшити число M , не змінюючи N . У колонках "А. Вайнштейн" і "Г. Фікера" наведено нижні (знаменник) і верхні (чисельник) оцінки власних значень, поруч обчислено їхні середні значення та похибку цих значень щодо власного значення μ .

Таблиця 3.6 – Порівняльна оцінка власних значень, отриманих різними методами

№ власн. знач.	μ	А. Вайнштейн	Середнє за А. Вайнштейном	$\varepsilon, \%$	Г. Фікера	Середнє за Г. Фікера	$\varepsilon, \%$
1	80,933374	81,48392226 80,86172169	81,172822	0,30	80,93343914 80,93331738	80,933378	5,6E-06
2	336,666035	344,3472249 336,3048868	340,326056	1,09	336,6661528 336,6513588	336,658756	2,2E-03
3	336,666035	344,3472249 336,3048868	340,326056	0,79	336,6661528 336,6513588	336,658756	3,0E-01
4	731,925702	755,3709726 730,6107992	742,990886	1,51	731,9270396 731,8728558	731,899948	3,5E-03
5	1082,093733	1108,88074 1081,667075	1095,273908	1,22	1082,093849 1081,967217	1082,030533	5,8E-03
6	1092,381660	1123,248581 1085,502558	1104,375570	1,10	1082,093849 1081,967217	1082,030533	9,5E-01
7	1701,570878	1835,856963 1688,951877	1762,404420	3,58	1701,573051 1699,679662	1700,626357	5,6E-02
8	1701,570878	1835,856963 1688,951877	1762,404420	3,51	1701,573051 1699,679662	1700,626357	1,1E-01
9	2769,965313	2904,008526 2763,982958	2833,995742	2,31	2769,96692 2761,822911	2765,894916	1,5E-01
10	2769,965313	2904,008526 2763,982958	2833,995742	2,27	2769,96692 2761,822911	2765,894916	1,8E-01
11	3025,898734	3336,261368 2970,977277	3153,619322	4,22	3025,909916 3023,048524	3024,479220	4,7E-02
12	3664,908073	3785,87738 3657,954891	3721,916135	1,56	3664,908074 3661,899959	3663,404016	4,1E-02
13	3694,948551	3938,608747 3662,393093	3800,500920	2,86	3690,706871 3688,107266	3689,407069	1,5E-01

Власні значення, наведені в табл. 3.6, чітко потрапляють в інтервали між нижніми і верхніми оцінками як А. Вайнштейна, так і більш точними оцінками Г. Фікера. Із результатів цієї таблиці випливають два основні висновки: перший – точність визначення верхніх та нижніх оцінок власних значень, отримана Г. Фікера, значно вища, ніж у А. Вайнштейна; другий і найголовніший – ці оцінки ще раз підтверджують високу точність запропонованого тут розв'язку.

3.3.7.2 Аналіз компонент напружено-деформованого стану жорстко закріпленої прямокутної пластини, отриманих із використанням власних функцій бігармонічного оператора

Розглянемо задачу вигину рівномірно розподіленим тиском $q(x, y) = \text{const}$ жорстко закріпленої по всьому контуру прямокутної пластини. Відповідна крайова задача описується рівнянням (3.1) і крайовими умовами (3.2). Шуканий розв'язок (функція прогину) знаходиться у вигляді (3.42). Характеристики напружено-деформованого стану пластини: максимальний відносний прогин (3.50) і відносні згинальні моменти (3.53) у центрі та в середині закріплених боків, отримані за різних значень параметра подовження λ , подано на рис. 3.22 – 3.24. Як і раніше, головну увагу приділено стійкості, збіжності аналітико-чисельного розв'язку і точності отриманих результатів.

При визначенні власних значень і власних функцій задачі на основі рівняння (3.45), зі зростанням параметра λ верхні межі в зазначеній сумі виконують такі умови: $M > N$ завжди, а при фіксованому значенні M їх співвідношення виражається як

$$M = \lambda(N + 1) - 1. \quad (3.63)$$

Усі значення прогинів і згинальних моментів, наведені на рис. 3.22 – 3.24, є точними. Якщо прийняти за критеріальні значення компонент напружено-деформованого стану результати, отримані за розв'язком (3.9) з використанням поліноміальних функцій (3.10) або (3.11), можна зробити такі висновки. Точність визначення моменту $\overline{M}_x(1; 0)$ в середині короткої сторони найнижча, але навіть ця точність значно перевищує вимоги інженерних розрахунків. Максимальний згинальний момент $\overline{M}_y(0; 1)$, що досягається в середині довгої сторони, зі зростанням параметра λ має дуже високу точність. Щодо стійкості та збіжності розв'язку залежно від кількості введених власних функцій, можна зробити прозорий висновок: розв'язки у вигляді розкладання в ряди за власними функціями є стійкими, швидкозбіжними і мають високу точність, що підтверджується графіками на рис. 3.22 – 3.24.

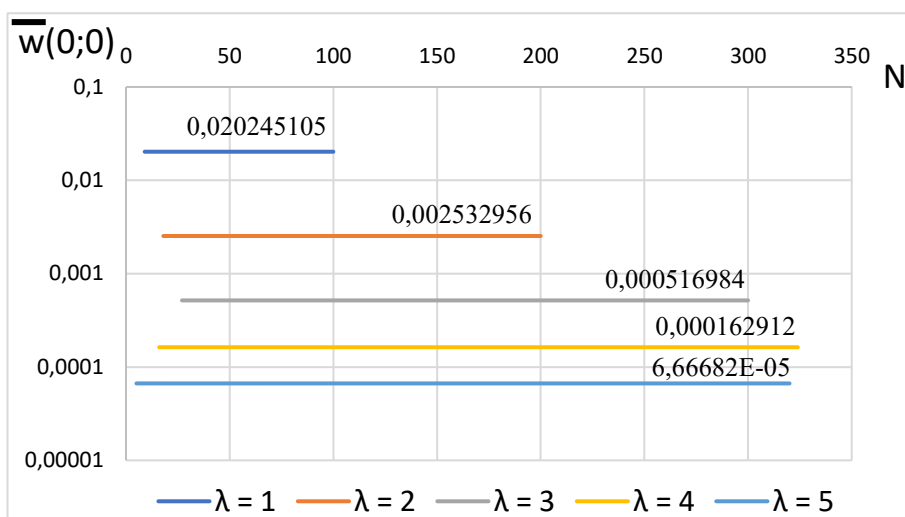


Рисунок 3.22 – Збіжність значень максимального відносного прогину для декількох подовжень пластини

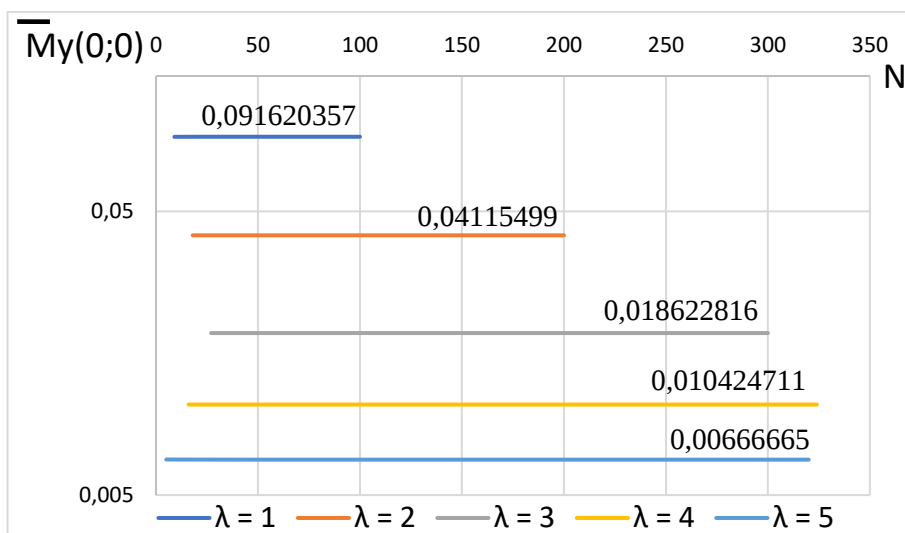
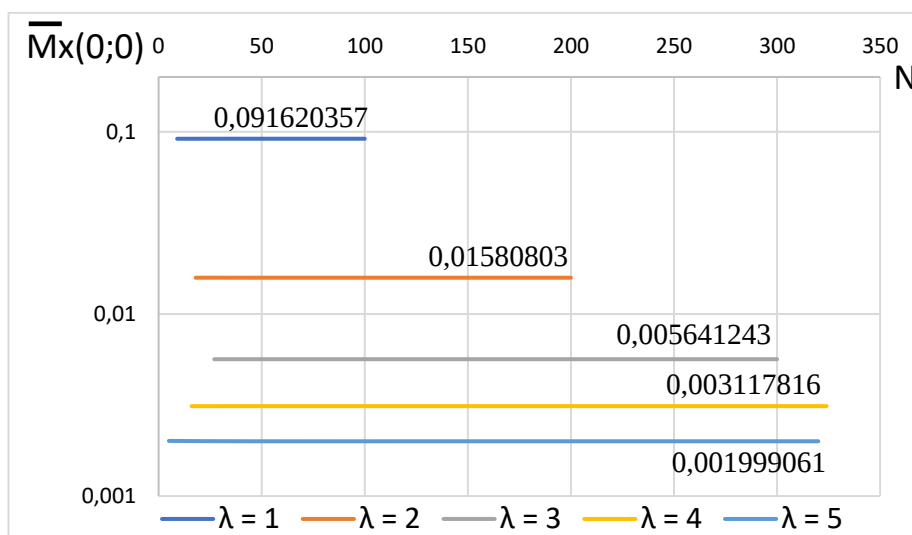


Рисунок 3.23 – Збіжність значень відносних згинальних моментів у центрі пластини

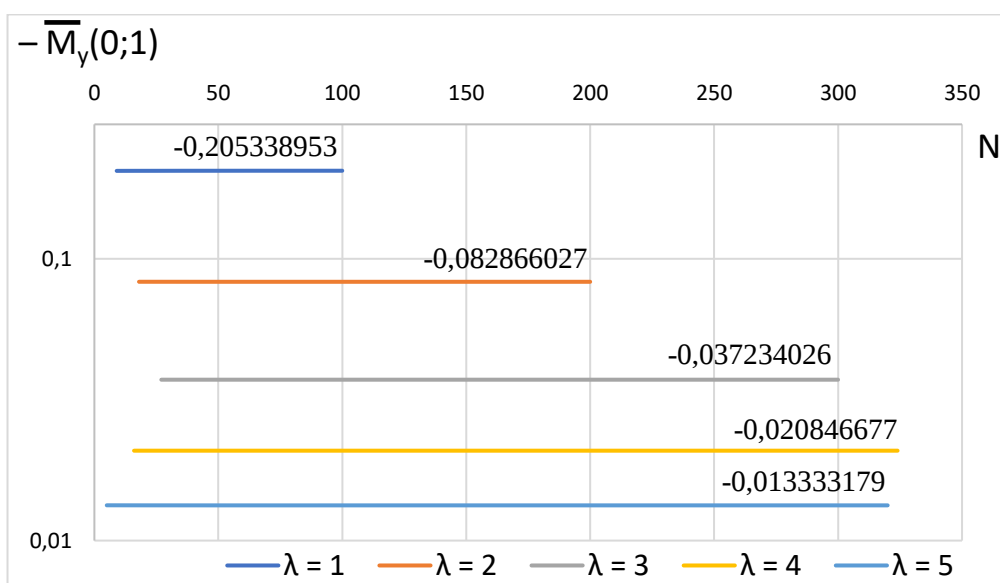
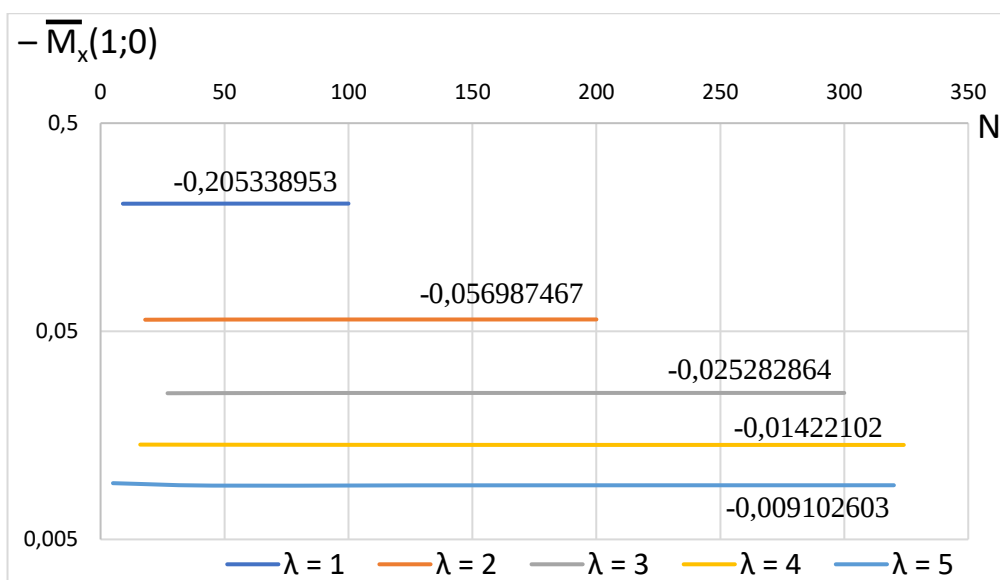


Рисунок 3.24 – Збіжність максимальних значень відносних згинальних моментів у центрі закріплених сторін пластини

3.3.7.3 Практична оцінка нев'язки розв'язку

На закінчення дослідимо поведінку нев'язки в рівнянні (3.1) у відкритій області Ω . Нев'язка обчислюється за формулою:

$$\Delta = \left(\frac{D}{qa^4} Aw - 1 \right) \cdot 100\%. \quad (3.64)$$

Результати обчислень відносної нев'язки Δ у кожній точці $(x, y) \in \Omega$ для квадратної пластини наведено в табл. 3.7. Через повну симетрію задачі результати наводяться тільки для чверті пластини. У першій колонці таблиці вказано число (N) введених власних функцій у розв'язку (3.42).

Навіть за порівняно невеликого числа власних функцій ($N=36$) відносна похибка в деякій внутрішній області $\Omega' \subset \Omega$ є незначною, за винятком малих околів кутових точок. Зі збільшенням числа власних функцій ($N=100$) спостерігається значне зменшення нев'язки в рівнянні (3.1), що наближається до нуля. Збіжність нев'язки до нуля порушується лише в кутових точках.

Таблиця 3.7 – Розподіл нев'язки Δ , %

N=36		вісь абсцис						
вісь ординат	$\lambda=1$	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
	0	-0,0736	0,0467	0,0149	-0,0760	0,1914	-0,4856	1,1804
	0,15	0,0467	-0,0295	-0,0101	0,0496	-0,1213	0,2992	-0,7418
	0,3	0,0149	-0,0101	-0,0011	0,0113	-0,0384	0,1218	-0,2516
	0,45	-0,0760	0,0496	0,0113	-0,0705	0,1909	-0,5131	1,1607
	0,6	0,1914	-0,1213	-0,0384	0,1909	-0,4092	0,9358	-2,1724
	0,75	-0,4856	0,2992	0,1218	-0,5131	0,9358	-1,8779	4,5681
	0,9	1,1804	-0,7418	-0,2516	1,1607	-2,1724	4,5681	-10,1627
N=100		вісь абсцис						
вісь ординат	$\lambda=1$	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
	0	-0,0012	0,0012	-0,0008	-0,0005	0,0038	-0,0051	-0,1258
	0,15	0,0012	-0,0011	0,0007	0,0005	-0,0038	0,0046	0,1218
	0,3	-0,0008	0,0007	-0,0004	-0,0007	0,0033	-0,0028	-0,1024
	0,45	-0,0005	0,0005	-0,0007	0,0011	-0,0014	-0,0023	0,0394
	0,6	0,0038	-0,0038	0,0033	-0,0014	-0,0044	0,0125	0,1195
	0,75	-0,0051	0,0046	-0,0028	-0,0023	0,0125	-0,0053	-0,2345
	0,9	-0,1258	0,1218	-0,1024	0,0394	0,1195	-0,2345	-1,1906

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації розглянуто формулювання та розв'язання базової крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику за різних крайових умов. Було сформульовано напіводнорідну крайову задачу з неоднорідною правою частиною рівняння рівноваги та однорідними крайовими умовами. Цей розв'язок дозволяє одержати наближене аналітичне подання задач про вигин прямокутної пластини та плоскої задачі теорії пружності в прямокутнику.

Для розв'язання базової задачі було використано кілька методів, зокрема: аналітико-чисельні розв'язки у подвійних рядах за системами спеціальних функцій, наближені аналітичні розв'язки типу Нав'є, Моріса Леві, розв'язки, побудовані на основі ортонормованого в енергетичному просторі базису

та розв'язки, подані через власні функції бігармонічного оператора. Усі ці методи ґрунтуються на використанні систем спеціальних базисних функцій, дослідження апроксимативних і обчислювальних властивостей яких є важливим аспектом роботи.

Було проведено дослідження точності та збіжності аналітико-чисельних і наближених аналітичних розв'язків крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором. Показано, що на цю точність значно впливають властивості гладкості, лінійної незалежності та повноти систем координатних функцій. Під час використання аналітико-чисельних методів виникає проблема вибору базисних функцій, які повинні забезпечувати експоненціальну збіжність, стійкість наближених розв'язків, зменшення обсягу обчислень та зручність.

Було порівняно квазіортогональність та числа обумовленості матриць Грама для різних систем функцій, зокрема функцій, запропонованих С. А. Халіловим, В. Б. Минтюком, фундаментальних балкових функцій А. Н. Крилова, косинус-біномів Філоненка-Бородича та розв'язку Даревського-Шаринова. Кути між поліноміальними функціями С. А. Халілова, розглянуті як елементи гільбертового простору, слабо відхиляються від 90 градусів, що дозволило прийняти матрицю Грама цих елементів за діагональну та отримати наближені аналітичні розв'язки.

У високих наближеннях отримано розв'язок у подвійних рядах напівдорідної крайової задачі в прямокутнику для бігармонічного оператора, де рівнозначно можуть бути застосовані метод Бубнова-Галеркіна і метод Рітца. Досліджено принципове питання про збіжність до нуля нев'язки розв'язку майже скрізь (у розумінні Лебегової міри нуль). Найкращі апроксимативні властивості з погляду обчислювальних вимог мають поліноміальні функції С. А. Халілова і В. Б. Минтюка. Цей спосіб дозволяє зі залученням методу редукції одержати наближені аналітичні розв'язки задачі про вигин прямокутної пластини та плоскої задачі теорії пружності в прямокутнику з довільними граничними умовами.

Завдяки властивості квазіортогональності в енергетичній метриці бігармонічного оператора запропонованої системи функцій побудовано наближений аналітичний розв'язок (типу Нав'є) сформульованої крайової задачі. Нехтуючи квазіортогональністю базисних функцій, було проведено оцінку збіжності наближеного розв'язку до точного, що показало практично повний збіг квадратів норм векторів двох розв'язків та їх потенціальних енергій. Конкретні обчислення напружено-деформованого стану пластини при різних подовженнях показали високу точність визначення максимальних прогинів і згинальних моментів у центрі пластини при рівномірно розподіленому згинальному навантаженні. Кути між функціями цього сімейства як елементами гільбертового простору, слабо відхиляються від нуля, що дозволило прийняти матрицю Грама цих елементів за діагональну і отримати наближений аналітичний розв'язок.

Запропоновано наближений аналітичний розв'язок (типу М. Леві) для крайових задач у прямокутнику з бігармонічним оператором, де на двох протилежних сторонах задано умови типу Діріхле, а на двох інших – довільні крайові умови. Розв'язок будується проєкційним методом з використанням лінійно незалежної та повної системи ортонормованих функцій, перші та другі похідні яких квазіортогональні у відповідному функціональному просторі. Наведено наближені аналітичні розв'язки для шести крайових задач, що відрізняються крайовими умовами на двох протилежних сторонах, два з яких (Додаток Б, рис. Б.1: «Задача 2», «Задача 3») до цього часу не були представлені в літературі. Похибка аналітичних розв'язків цих задач пов'язана зі ступенем неортогональності похідних від використаних базисних функцій. Апостеріорний аналіз точності показав, що наближені розв'язки для шести розглянутих крайових задач мало відрізняються від розв'язків у подвійних рядах.

Розглянуто побудову ортонормованого базису в енергетичному просторі бігармонічного оператора в прямокутнику за однорідних головних крайових умов на границі за процедурою Грама-Соніна-Шмідта. Процедура ортогоналізації виконана точно, оскільки всі обчислення виконуються в аналітичному

вигляді (через радикали, неправильні дробы тощо), що дало можливість усунути проблему її ітераційної нестійкості. Приклад вигину жорстко затиснутої по всьому контуру прямокутної пластини під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження демонструє переваги застосування ортонормованого базису. Побудовані ортонормовані в прямокутнику за енергією бігармонічного оператора системи координатних функцій, які спираються на ортонормований в гільбертовому просторі базис С.А. Халілова, виконують усі вимоги, що дозволяє отримати одиничну матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь і одразу записати шуканий розв'язок у замкнутому аналітичному вигляді.

Визначено власний спектр основної крайової задачі в прямокутнику для бігармонічного оператора за головних крайових умов і різних значень параметра подовження прямокутної пластини. Власні функції побудовано з високою точністю, що значно перевершує вимоги інженерних розрахунків. Уточнено верхні та нижні оцінки власних значень, раніше отримані складними методами Г. Фікери та А. Ванштейна, що дозволяє використовувати ці дані як критерії для оцінювання якості нових методів двосторонніх оцінок власних значень. На прикладі задачі вигину жорстко затиснутої по контуру прямокутної пластини продемонстровано стійкість і швидко збіжність розв'язків у високих наближеннях, що забезпечує високу точність результатів. Принциповою є збіжність до нуля нев'язки у вихідному рівнянні, що дозволяє вважати отримані розв'язки точними.

Отримані результати є важливим кроком у розвитку методів аналізу напружено-деформованого стану складних тонкостінних конструкцій. Подальше розв'язання базової задачі при аналізі системи декомпозиційним методом (розділи 2, 4) може бути виконано з будь-якою наперед заданою точністю одним із запропонованих тут способів. Для системного підходу окреслено вимоги, які мають виконувати універсальні функції для побудови розв'язку.

Окремі наукові результати, представлені в цьому розділі, також опубліковані в роботах [3], [4], [5], [10], [11], [12], [13].

РОЗДІЛ 4

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОСТІННИХ ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМ

Тонкостінні просторові системи широко використовуються в сучасній промисловості. Агрегати, вузли, деталі або навіть сама конструкція можуть складатися з тонкостінних елементів, таких як оболонки та пластини, які часто підкріплюються поздовжніми або поперечними силовими елементами (балками). Аналіз напружено-деформованого стану такої комбінованої системи може здатися нескладним з точки зору розрахунку за допомогою чисельних методів, проте навіть після виконання таких розрахунків виникає проблема верифікації отриманих результатів. Додатково ускладнює аналіз тонкостінних просторових систем відсутність аналітичних розв'язків для складних систем; наявні аналітичні розв'язки обмежуються вузьким колом задач для окремих елементів. Тому розв'язок, поданий у цьому розділі, є унікальним, оскільки дозволяє отримати аналітичні залежності для розрахунку напружено-деформованого стану деякої частини або навіть усієї конструкції, що складається з пластин і балок.

Застосування декомпозиційного та системного підходів для аналізу тонкостінних просторових систем буде продемонстровано на прикладі розрахунку частини панелі крила літака. Уявімо, що з крила літака виділено ділянку обшивки зі стрингерами, яка розташована між сусідніми нервюрами та лонжеронами. Під впливом зовнішнього навантаження на крило деформується і виділена ділянка панелі. Оскільки її розглядатимуть окремо від решти крила, на лініях розрізу необхідно записати умови, що визначають спільну роботу відсіченої частини панелі та тієї, що залишилася. Таким чином, для аналізу напружено-деформованого стану панелі крила, яка є комбінацією обшивки – пластини і стрингерів – балок (пластин), формулюється повністю неоднорідна крайова задача. Детальніше формулювання цієї задачі розглянуто в розділі 2, а аналіз особливостей її реалізації наведено в наступних підрозділах.

4.1 Застосування декомпозиційного підходу до аналізу напружено-деформованого стану багатострингерної панелі

Розглядається загальна просторова задача пружності для багатострингової панелі (рис. 4.1), виділеної з конструкції крила. Геометричні параметри панелі задаються як: розміри обшивок – $2a_i \times 2b$, розміри ребер – $2b \times a_i^* \times t_i^*$, де індекс i відповідає номеру пластини. Запропонована математична модель не обмежується конкретною схемою навантаження, однак для спрощення подальшого виведення розрахункових формул припускається, що панель зазнає дії зовнішнього довільного тиску. Зважаючи на конструктивне включення панелі до складу крила, по її контуру задаються неоднорідні крайові умови, сформульовані через переміщення та кути повороту, які описуються функціями $\bar{E}, \bar{Y}, \bar{Y}'$, відповідно до умов (2.2).

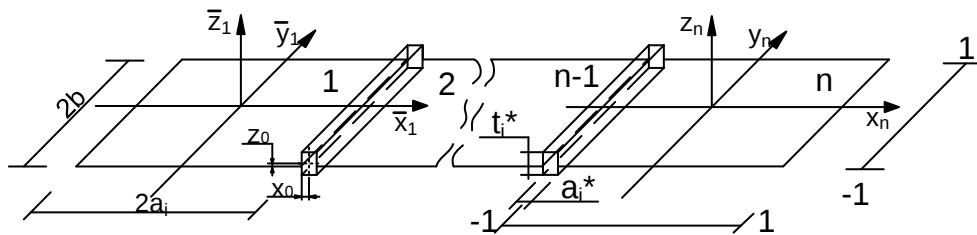


Рисунок 4.1 – Стрингерна панель (z_0 – вертикальний ексцентриситет, x_0 – горизонтальний ексцентриситет).

Розв'язок будуватиметься за методом ідентифікації крайових умов у формі методу редукції. Тому панель буде зображена у вигляді окремих прямокутних пластин Кірхгофа, на границі яких встановлюються відповідні неоднорідні крайові умови, і балок Ейлера-Бернуллі, на яких формулюються кінематичні та статичні умови з'єднання. Оскільки метод редукції викладено для безрозмірної прямокутної області, то слід здійснити перехід від розмірних локальних координатних систем у кожній пластині $\bar{\Omega} = \{(x_i, y_i): -a < \bar{x}_i < a; -b < \bar{y}_i < b\}$ до безрозмірних $\Omega = \{(x_i, y_i): -1 < x_i < 1; -1 < y_i < 1\}$ за такими залежностями: $x = \frac{\bar{x}}{a}$ і $y = \frac{\bar{y}}{b}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -a \cdot q_x(x, y), \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_y}{\partial y} = -a \cdot q_y(x, y), \\ -\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) = a^2 \cdot q_z(x, y), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де $q_{x(y,z)}(x, y)$ – компоненти зовнішнього тиску; $N_x, N_{xy}, N_y, M_x, M_{xy}, M_y$ – внутрішні зусилля і момент в i -тій пластині (тут і далі індекс "i" опущено), які можна визначити з таких співвідношень пружності:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ N_y &= \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2a(1+\nu)} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ M_x &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -\frac{D}{a^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона, h – товщина пластини і $\lambda = \frac{a}{b}$ – параметр її подовження; $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ – компоненти вектора переміщення $\mathbf{u}(x, y)$ кожної пластини.

Рівняння рівноваги запишемо через компоненти вектора переміщень, підставивши вирази зусиль і моментів (4.2) у рівняння рівноваги (4.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{q_x(x, y) \cdot a^2 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot h}, \\ \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{q_y(x, y) \cdot a^2 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot h}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{a^4 \cdot q_z(x, y)}{D}, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Елементи оператора L з розв'язного рівняння (2.1) неоднорідної крайової задачі типу Діріхле в прямокутнику конкретизуються після виконання процедури Бубнова – Галеркіна для ортогоналізації нев'язки в рівняннях рівноваги (4.3) та бігармонізації продовжень неоднорідних крайових функцій в область кожної пластини

$$L\mathbf{u}_0 = -L\mathbf{u}_{1+2} \text{ в } \Omega. \quad (4.4)$$

Нагадаємо, що згідно з процедурою методу редукції визначатимуться (спільно або окремо) функції переміщень $u_{q(0)}$, $v_{q(0)}$, $w_{q(0)}$ у відкритій області кожної з пластин, які враховують вплив як зовнішнього навантаження, так і неоднорідних крайових умов

$$\begin{aligned} u_{q+0} &= u_q + u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i(x) \xi_j(y), \\ v_{q+0} &= v_q + v_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} \xi_i(x) \xi_j(y), \\ w_{q+0} &= w_q + w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} \zeta_i(x) \zeta_j(y), \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $\xi_i(x)\xi_j(y)$ і $\zeta_i(x)\zeta_j(y)$ – системи координатних функцій, що виконують однорідні крайові умови на граничному контурі кожної пластини виду (2.24), а коефіцієнти α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} у рядах (4.5) можна знайти при розв'язуванні крайової задачі (2.23) – (2.24) одним зі способів, обговорених у розділі 3 цієї роботи. Звісно, можна виходити з розв'язання еквівалентної варіаційної задачі та мінімізувати повну потенціальну енергію щодо невідомих коефіцієнтів за методом Рітца, що призведе до тієї самої руйнівної системи алгебраїчних рівнянь, бо розв'язується задача з лінійної теорії пружності.

Складник $\mathbf{u}_{1+2}(x, y)$ загального розв'язку з компонентами $u_{1+2}(x, y)$, $v_{1+2}(x, y)$ і $w_{1+2}(x, y)$ відповідає за виконання неоднорідних крайових умов, які заздалегідь мають бути встановлені на всьому граничному контурі кожної пластини панелі, включно з кутовими точками. Згідно з процедурою методу редукції для однозначного визначення деформованого стану пластин, ділянок

обшивки, необхідно знати функції переміщень $u|_\Gamma$, $v|_\Gamma$, $w|_\Gamma$ і кут повороту $\frac{\partial w}{\partial n}|_\Gamma$ (n – нормаль до границі) на кожній стороні прямокутника.

Крайові умови на сторонах $y = \pm 1$ кожної пластини панелі, на стороні $x = -1$ крайньої лівої пластини та на стороні $x = +1$ крайньої правої пластини панелі є неоднорідними і виникають у загальному випадку з умов спільної роботи вирізної ділянки з рештою панелі крила. Вигляд цих неоднорідних крайових умов задано рівняннями (2.15), (2.17) і (2.20), (2.22), а способи їхнього формулювання та вимоги, що висуваються до них, сформульовано на прикладі розв'язування неоднорідної крайової задачі про вигин прямокутної пластини в наступному підрозділі. Після того, як було встановлено граничні неоднорідні функції, що відповідають $\bar{E}(s)$ і $\bar{Y}(s)$ з (2.4), однозначне визначення компоненти розв'язку $\mathbf{u}_{1+2}(x, y)$ не викликає значних труднощів.

Крайові умови на стороні $x = +1$ i -пластини, що розташована ліворуч від ребра, і на стороні $x = -1$ $(i+1)$ -пластини, що розташована праворуч від ребра, можна записати через рівняння рівноваги сил і моментів на кожному ребрі відповідно і рівність компонент вектора переміщень на осі сполучення пластин і ребер:

$$\begin{aligned}
 F \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{a} S_z \frac{\partial^3 u_i}{\partial y^3} - \frac{\lambda}{a} S_x \frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} = \\
 = \frac{E_i h_i a_i}{2 \lambda_i^2 E r_i (1 + \nu_i)} \left(\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \Big|_{x = +1} - \\
 - \frac{E_{i+1} h_{i+1} a_{i+1}}{2 \lambda_{i+1}^2 E r_{i+1} (1 + \nu_{i+1})} \left(\lambda_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x = -1}, \\
 - S_z \frac{\partial^3 v_i}{\partial y^3} + \frac{\lambda}{a} I_z \frac{\partial^4 u_i}{\partial y^4} + \frac{\lambda}{a} I_{xz} \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = \\
 = - \frac{E_i h_i a_i^2}{\lambda_i^3 E r_i (1 - \nu_i^2)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \lambda_i \nu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \Big|_{x = +1} + \\
 + \frac{E_{i+1} h_{i+1} a_{i+1}^2}{\lambda_{i+1}^3 E r_{i+1} (1 - \nu_{i+1}^2)} \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} + \lambda_{i+1} \nu_{i+1} \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} \right) \Big|_{x = -1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S_x \frac{\partial^3 v_i}{\partial y^3} + \frac{\lambda}{a} I_{xz} \frac{\partial^4 u_i}{\partial y^4} + \frac{\lambda}{a} I_x \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = \\
& = \frac{D_i}{\lambda_i^3 E r_i} \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} + \lambda_i^2 (2 - \nu_i) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=+1} - \\
& - \frac{D_{i+1}}{\lambda_{i+1}^3 E r_{i+1}} \left(\frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial x^3} + \lambda_{i+1}^2 (2 - \nu_{i+1}) \frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=-1}, \\
& \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{D_i a_i}{\lambda_i^2 G r_i I_{кр i}} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \lambda_i^2 \nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=+1} - \\
& - \frac{D_{i+1} a_{i+1}}{\lambda_{i+1}^2 G r_{i+1} I_{кр i+1}} \left(\frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial x^2} + \lambda_{i+1}^2 \nu_{i+1} \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=-1}, \\
& \nu_i |_{x=+1} \equiv \nu_{i+1} |_{x=-1}, \quad u_i |_{x=+1} \equiv u_{i+1} |_{x=-1}, \\
& w_i |_{x=+1} \equiv w_{i+1} |_{x=-1}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial n} \Big|_{x=+1} \equiv \frac{\partial w_{i+1}}{\partial n} \Big|_{x=-1}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

де F – площа поперечного ребра; S_x, S_z – статичні моменти інерції; I_x, I_z, I_{xz} – осьові моменти інерції перерізу ребра; $I_{кр}$ – момент інерції вільного крутіння; E_r, G_r – модуль пружності та модуль зсуву матеріалу ребер.

Крайові умови (4.6) на лініях сполучення пластин із ребром необхідні для визначення коефіцієнтів у розкладеннях (2.7) граничних функцій на сторонах пластин, пов'язаних із ребром. Побудова розв'язку $\mathbf{u}(x, y)$ (2.10), а саме бігармонізуючого складника, що враховує продовження недорідних крайових умов в область пластини та вплив зовнішнього навантаження, виконується з урахуванням поки що невідомих параметрів – коефіцієнтів у зазначених розкладеннях на лініях сполучення. Після побудови компонент розв'язку $u_{q(0)}, v_{q(0)}, w_{q(0)}$ для кожної пластини невідомі параметри, наявні в їх виразах, визначаються як коефіцієнти рядів Фур'є, так щоб виконувалися умови рівноваги (4.6) внутрішніх сил та моментів на лініях сполучення.

Розв'язання задачі для багатострингової панелі є надзвичайно складним та потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому далі в роботі подано спрощені способи реалізації підходу, які дозволяють зменшити обчислювальну складність. У підрозділі 4.2 розглянуто питання продовження

неоднорідних крайових умов з границі кожної пластини-ділянки обшивки в область. Підрозділ 4.3 присвячено розв'язанню задачі про напружено-деформований стан панелі, що складається з різних комбінацій пластин і ребер, з класичними умовами обпирання на граничному контурі панелі. У цьому ж підрозділі наведено порівняльний аналіз різних способів побудови розв'язку для всієї панелі з розв'язком за методом ідентифікації крайових умов спільно з методом редукції.

4.2 Реалізація синтезу методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів для розв'язання задачі вигину прямокутної пластини

На прикладі задачі вигину прямокутної пластини розглядається реалізація алгоритму методу редукції, який дозволяє передавати неоднорідні крайові умови в область [18]. Цей підхід забезпечує ефективне розв'язання складних крайових задач, зокрема тих, що виникають у тонкостінних просторових системах, шляхом розбиття задачі на окремі підзадачі та узгодження їх на границях. Метод ідентифікації крайових умов у формі МР добре поєднується з методом скінченних елементів, особливо коли обидва методи використовують формулювання задачі в переміщеннях. Така комбінація дозволяє отримувати точні та надійні результати при менших обчислювальних витратах.

Далі в цьому розділі більш докладно описується взаємодія МІКУ та МСЕ, а також демонструється їх синергетичний ефект на прикладі числових експериментів з кількома крайовими задачами. В цих задачах виконується аналіз напружено-деформованого стану складеної пластини з декількох частинок, для яких ставляться як класичні однорідні, так і неоднорідні умови обпирання на граничному контурі. Надаються та аналізуються різні способи відокремлення елементів із системи (пластини), для яких будується уточнюючий аналітико-числовий розв'язок з використанням методу ідентифікації крайових умов у поєднанні з методом редукції.

4.2.1 Доповнення метода ідентифікації крайових умов методом скінченних елементів

Перед початком розв'язання задачі методом скінченних елементів, дослідник зобов'язаний провести серію досліджень, що включають вибір типу скінченних елементів, який найкраще відображатиме властивості очікуваного розв'язку. Цей процес вимагає також врахування питань стійкості, збіжності та точності. Розробник має випробувати кілька типів скінченних елементів (π -проблема) та розв'язати задачу з різним ступенем розбиття (n -проблема), перш ніж прийняти остаточне рішення щодо типу елемента та густоти покриття області вихідної системи скінченними елементами. Таким чином, він повинен знайти компроміс для вирішення так званої " π - n проблеми" [113], [6], [14]. Однак, у нього майже немає критеріїв для оцінки якості розв'язку, отриманого за допомогою МСЕ. Емпіричний підхід, який полягає у збільшенні кількості невідомих для отримання розв'язків у різних наближеннях, не завжди дозволяє прийняти остаточне рішення.

Критерієм якості чисельного розв'язку можуть слугувати аналітичні розв'язки, отримані за допомогою системного методу ідентифікації крайових умов, який забезпечує розв'язки з наперед заданою точністю як за шуканими функціями, так і за їх похідними. Запропоновані критеріальні розв'язки можуть забезпечити високу точність при порівняно малих обчислювальних витратах. Це відкриває можливості для МСЕ у вирішенні основних питань, розглянутих у цьому розділі. Дослідник може отримати відповіді на ці питання, використовуючи аналітико-чисельні або наближені аналітичні критеріальні розв'язки базових крайових задач. Проте в умовах, які найчастіше не залежать від нього, він змушений використовувати МСЕ як найбільш індустріальний метод аналізу складних конструкцій.

Дослідник може обрати один з двох шляхів: самостійно провести попередні дослідження з вибору типу скінченного елемента і густоти сітки або виконати ці дослідження за допомогою МСЕ. У другому випадку він отримає повний набір рекомендацій щодо вибору типу скінченних елементів і ступеня

розбиття конструкції на скінченні елементи, а також оцінку точності розв'язку за МСЕ. Проте навіть якщо рекомендації, отримані за МІКУ, неможливо реалізувати через обмеження сучасних МСЕ-технологій (програмних пакетів Nastran, ANSYS та інші), дослідник може зменшити точність розв'язку та отримати новий критеріальний розв'язок з меншою точністю. Навіть у цьому випадку точність розв'язку за МІКУ перевищуватиме точність, отриману за МСЕ. Існують також інші варіанти взаємодії МІКУ і МСЕ, але їх обговорення виходить за рамки цього розділу.

4.2.2 Доповнення метода скінченних елементів методом ідентифікації крайових умов

Перед обговоренням теми, зазначеної в заголовку цього пункту, коротко нагадаємо оригінальну схему методу ідентифікації крайових умов (див. підрозділ 1.4.4). Реалізація методу здійснюється в три етапи. Перш за все, потрібно розділити систему на дві частини, виділивши блок-елемент та решту системи, і встановити між ними зворотний зв'язок. По границях виділеного блоку та частини, що залишилася, необхідно ввести невідомі функції (кінематичні функції для методу переміщень) залежно від математичних моделей елементів, що входять до кожної частини. Це формує неоднорідну крайову задачу Діріхле для обох частин.

На наступному етапі необхідно встановити зв'язок між введеними кінематичними крайовими функціями та індукованими ними статичними функціями, тобто побудувати функціональну матрицю жорсткості краю. Ця матриця є основою для аналізу виділеного блок-елемента. Невідомі функції переміщень визначаються з умови рівноваги сил, прикладених до системи та виділеної її частини. Таким чином, основна увага МІКУ зосереджена на розв'язанні задачі другого етапу – задачі ідентифікації крайових умов. Це завдання є досить складним навіть у статичному випадку, а у випадках задач стійкості та коливань системи складність зростає через введення нового параметра – параметра критичного навантаження або параметра власної частоти коливань усієї

конструкції. Для розв'язання таких задач ми пропонуємо два зустрічних методи послідовних уточнень цих параметрів. Третій етап полягає в аналізі виділеного блок-елемента за встановлених крайових умов, що дозволяє провести аналіз більш детально, враховуючи всі нюанси. У процесі виконання методу може виникнути необхідність розв'язання складної задачі про чутливість.

Тепер звернімося до другої схеми проведення МІКУ, яка включає метод скінченних елементів. У цій схемі крайові умови відомі та ідентифіковані за МСЕ, тому немає потреби в побудові функціональної матриці жорсткості граничного контуру для виділеного блок-елемента. Застосовується метод редукції неоднорідної крайової задачі Діріхле до низки базових задач. Реалізацію методу розглянемо на прикладі задачі вигину прямокутної пластини (класична модель) за неоднорідних крайових умов Діріхле. Конструкцію розв'язку коротко описуємо в наступному підрозділі.

4.2.3 Реалізація методу редукції при розв'язанні повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини

У цьому розділі узагальнений розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі для прямокутної пластини, що піддається дії різних зовнішніх навантажень за неоднорідних крайових умов на граничному контурі, зводиться до окремого випадку – задачі вигину пластини. Побудова розв'язку для такої неоднорідної крайової задачі зустрічає низку проблем, які необхідно подолати для гарантування високої точності результатів. Основна проблема, яка розглядається в цьому підрозділі, полягає в пошуку оптимальних значень верхніх меж у рядах під час апроксимації компонент шуканого вектора переміщень. Це також включає заповнення таблично заданих функцій (або шматково-гладких) під час ідентифікації крайових умов на межі прямокутної області та кількісну оцінку точності шуканого розв'язку від якості та точності вихідних даних [18]. Останнє особливо стосується ідентифікації крайових умов. У подальшому процедура методу ідентифікації крайових умов разом з методом редукції,

описані в першому розділі, конкретизуються для побудови розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної ізотропної пластини.

Розглянемо крайову задачу в прямокутній області з розмірами $2\alpha \times 2\beta$, зведених до квадрата $\Omega = \{(x, y): -1 < x (y) < 1\}$, що описана диференціальним рівнянням

$$Lw \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qa^4}{D} \quad \text{в } \Omega \quad (4.7)$$

і неоднорідними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} w(-1; y) &= \varphi_1(y), & \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-1} &= \varphi_3(y), \\ w(+1; y) &= \varphi_2(y), & \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=+1} &= \varphi_4(y), \\ w(x; -1) &= f_1(x), & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=-1} &= f_3(x), \\ w(x; +1) &= f_2(x), & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=+1} &= f_4(x), \end{aligned} \quad (4.8)$$

де $w(x, y)$ – функція прогину пластини; $q(x, y)$ – функція тиску з деякого класу.

Перш ніж переходити до побудови розв'язку крайової задачі (4.7), (4.8), необхідно сказати, що гладкість очікуваного розв'язку безпосередньо залежить від гладкості вхідних даних: функції зовнішнього навантаження $q(x, y)$, функцій, які містяться в правих частинах крайових умов (4.8) і, звичайно, впливу сингулярних (кутових) точок границі.

Аналітико-чисельний розв'язок крайової задачі (4.7), (4.8) подамо у вигляді суми двох розв'язків:

$$w(x, y) = w_q(x, y) + w_0(x, y), \quad (4.9)$$

де w_q – спеціальний окремий розв'язок рівняння (4.7) за однорідних крайових умов

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (4.10)$$

де n – зовнішня нормаль до границі Γ (у кутових точках границі проводяться дві нормалі); w_0 – розв'язок крайової задачі, що описується однорідним диференціальним рівнянням

$$Lw_0 = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (4.11)$$

і системою неоднорідних крайових умов (4.8).

У моїх роботах, присвячених методу редукції [16], [17], [18], будується не *довільний* частинний розв'язок, а *спеціальний розв'язок* $w_q(x, y)$ – це розв'язок напіводнорідної крайової задачі (4.7), (4.10) (права частина в рівнянні не-нульова, а крайові умови Діріхле – однорідні). Тут, виходячи з міркувань простоти і мінімальних витрат обчислювальних ресурсів, спеціальний частинний розв'язок відшукується у вигляді:

$$w_q = \sum_m^\infty \sum_n^\infty A_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (4.12)$$

де A_{mn} – коефіцієнти, що підлягають визначенню, а комплекс $H_m(x) \times H_n(y)$ – система координатних функцій (3.10), що відповідає всім вимогам, які до них висуваються [21], [22]: $H_s(s), s \in [-1; +1], i = 0, 1, \dots$ – лінійно незалежна і повна ортонормована система функцій, $H_s(s) \equiv H_j^{(\alpha=1)}(s)$ (див. роботу [139]).

Тепер перейдемо до побудови розв'язку дещо складнішої крайової задачі (4.11), (4.8). Попередньо крайові функції з правих частин крайових умов (4.8) подамо у вигляді суми двох компонент. Першу компоненту підбирають так, щоб вона та її перша похідна за своїм аргументом приймали ті ж значення, що й функції, які стоять у правих частинах (4.8). Отже, це кубічні поліноми. Тоді другі компоненти будуть у кутах перетворюватись на нуль разом зі своїми першими похідними. При такому поданні перша компонента буде функцією, що може неперервно диференціюватися довільну кількість разів, а друга компонента успадкує властивості гладкості крайових функцій із правих частин (4.8).

У зв'язку з прийнятим поданням крайових функцій шуканий розв'язок за методом редукції [14], [17] слід шукати у вигляді суми

$$w_0(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y). \quad (4.13)$$

Перші два доданки в (4.13) виконують окремі частини функцій $\varphi_i(y)$ і $f_i(x)$ ($i = 1..4$) неоднорідних крайових умов (4.8), але при цьому порушують виконання диференціального рівняння (4.11) – ніяких інших додаткових вимог, крім висловлених вище, до них не висувається. Останній же доданок слугує "бігармонізуючою" (коригувальною) добавкою до перших двох функцій.

Іншими словами, після побудови коригувального розв'язку $w_3(x, y)$ шуканий розв'язок $w_0(x, y)$ відповідатиме не тільки крайовим умовам (4.8), а й однорідному диференціальному рівнянню (4.11) із наперед заданою точністю.

Функція $w_I(x, y)$ – продовження перших компонент вектора узагальнених переміщень із границі в область, а $w_2(x, y)$ – таке саме продовження, але других компонент. Функція $w_I(x, y)$ на суміжних сторонах, що прилягають до кутової точки, індукує прогини і нормальні кути повороту, розподілені за кубічними параболою, а в самій області – за бікубічними (кубічними за кожною зі змінних). З цього випливає, що перша функція продовження має бути задана такою сумою:

$$w_1 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [W_{ij} \mu_i(x) \mu_j(y) + W_{i+2,j} \mu_{i+2}(x) \mu_j(y) + W_{i,j+2} \mu_i(x) \mu_{j+2}(y) + W_{i+2,j+2} \mu_{i+2}(x) \mu_{j+2}(y)], \quad (4.14)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \frac{1}{4}(2 - 3z + z^3), \quad \mu_3(z) = \frac{1}{4}(1 - z - z^2 + z^3), \\ \mu_2(z) &= \frac{1}{4}(2 + 3z - z^3), \quad \mu_4(z) = \frac{1}{4}(-1 - z + z^2 + z^3), \quad z \in \{x, y\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

а W_{ij} – деякі числа, які дорівнюють узагальненим кутовим переміщенням пластини:

– у точці $(-1; -1)$:

$$\begin{aligned} W_{11} &= \varphi_1(-1) \equiv f_1(-1), \quad W_{31} = \varphi_3(-1), \\ W_{13} &= f_3(-1), \quad W_{33} = \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right|_{y=-1} \equiv \left. \frac{\partial f_3}{\partial x} \right|_{x=-1}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

– у точці $(-1; +1)$:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \varphi_1(+1) \equiv f_2(-1), \quad W_{32} = \varphi_3(+1), \\ W_{14} &= f_4(-1), \quad W_{34} = \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right|_{y=+1} \equiv \left. \frac{\partial f_4}{\partial x} \right|_{x=-1}; \end{aligned} \quad (4.17)$$

– у точці $(+1; -1)$:

$$W_{21} = \varphi_2(-1) \equiv f_1(+1), \quad W_{41} = \varphi_4(-1),$$

$$W_{23} = f_3(+1), \quad W_{43} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \Big|_{y=-1} \equiv \frac{\partial f_3}{\partial x} \Big|_{x=+1}; \quad (4.18)$$

– у точці $(+1; +1)$:

$$\begin{aligned} W_{22} &= \varphi_2(+1) \equiv f_2(+1), & W_{42} &= \varphi_4(+1), \\ W_{24} &= f_4(+1), & W_{44} &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \Big|_{y=+1} \equiv \frac{\partial f_4}{\partial x} \Big|_{x=+1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Переходимо до побудови другої функції продовження $w_2(x, y)$. Одне з можливих її подань має вигляд

$$w_2 = \sum_{i=1}^4 \{ \varphi_i^*(y) \mu_i(x) + f_i^*(x) \mu_i(y) \}, \quad (4.20)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(y) &= \varphi_1 - w_1|_{x=-1}, \quad \varphi_3^*(y) = \varphi_3 - \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=-1}, \\ \varphi_2^*(y) &= \varphi_2 - w_1|_{x=+1}, \quad \varphi_4^*(y) = \varphi_4 - \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=+1}, \\ f_1^*(x) &= f_1 - w_1|_{y=-1}, \quad f_3^*(x) = f_3 - \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=-1}, \\ f_2^*(x) &= f_2 - w_1|_{y=+1}, \quad f_4^*(x) = f_4 - \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=+1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таке продовження можливе, якщо функції $\varphi_i(y)$ і $f_i(x)$ ($i = 1 \dots 4$) належать принаймні класу $C^3(-l; +l)$, а їхні четверті похідні є функціями з $L_2(-l; +l)$.

Виходячи зі способу побудови функцій продовження, крайові функції, що містяться в лівих частинах рівностей (4.21), слід подати у вигляді рядів, що рівномірно й абсолютно сходяться:

$$\varphi_i^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{in} H_n(y), \quad f_i^* = \sum_{m=0}^{\infty} F_{im} H_m(x), \quad i = \overline{1,4}. \quad (4.22)$$

Завершальним етапом побудови шуканого розв'язку (4.13) є визначення коригувальної добавки $w_3(x, y)$, яка є розв'язком крайової задачі, описуваної неоднорідним диференціальним рівнянням виду

$$Lw_3(x, y) = -L(w_1(x, y) + w_2(x, y)), \quad (4.23)$$

за крайових умов (4.10).

Розв'язання сформульованої базової задачі (4.23), (4.10) відшукується у вигляді

$$w_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (4.24)$$

де B_{mn} – невідомі коефіцієнти, які можуть бути знайдені одним зі способів, зазначених у розділі 2. При розв'язанні конкретно цієї задачі використовувався метод Бубнова-Галеркіна. Таким чином, розв'язання повністю неоднорідної крайової задачі зводиться до пошуку розв'язків кількох напіводнорідних крайових задач (за однорідних крайових умов).

4.2.4 Числові результати розв'язання задачі вигину прямокутної пластини за допомогою комбінації методів МІКУ і МСЕ

Обмежимося розглядом вигину жорстко затиснутої прямокутної пластини, що перебуває під дією зовнішнього рівномірно розподіленого тиску [17], [18]. Зазначимо, що точний розв'язок цієї задачі не побудовано донині, тому ця задача продовжує привертати увагу дослідників.

Почнемо з аналізу розв'язку зазначеної крайової задачі для всієї системи в цілому. Розв'язок розглядуваної задачі побудовано в розділі 2 і докладно досліджено в роботах [4], [11], тому тут залучатимемо лише остаточний результат, опускаючи шляхи його отримання. Розглянемо вигин постійним рівномірно розподіленим тиском (тут і далі $q = 1$ Па) квадратної пластини зі стороною, що дорівнює 2 м ($a = b = 1$ м); матеріал пластини – ізотропний: $E = 72$ ГПа і $\nu = 0,3$ (ці параметри матеріалу залишаються незмінними для пластин, розглянутих в підрозділі 4.2.4). Розв'язання крайової задачі з роботи [4] у цьому випадку слугує критерієм оцінки точності та збіжності для розв'язання цієї ж задачі за МСЕ. На цьому прикладі дослідимо один із можливих шляхів вирішення "π-n проблеми". У відомих індустріальних скінченно-елементних пакетах для розв'язування описаної крайової задачі запропоновано лише два типи прямокутних скінченних елементів (СЕ): вигинальний чотиривузловий скінченний елемент (у разі вигину в кожному вузлі вводять по три невідомі) та

вигинальний восьмивузловий елемент (додаткові чотири вузли вводять у середині сторін). Інші типи скінченних елементів не розглядаються у зв'язку з недоцільністю їхнього використання для розв'язання цієї задачі.

У таблиці В.1 (тут і далі – див. Додаток В) показано результати дослідження збіжності й точності значень максимального прогину $w(0;0)$, згинальних моментів у центрі $M_x(0;0) = M_y(0;0)$ та в середині затиснутої сторони $M_x(1;0) = M_y(0;1)$ і перерізувальних сил $N_x(1;0) = N_y(0;1)$ в середині затиснутої сторони залежно від типу елемента та ступеня дроблення на скінченні елементи області, яку займає пластина.

Нижче і далі прийнято такі умовні позначення. Римськими цифрами визначено тип використовуваного скінченного елемента: I – вигнутий прямокутний чотиривузловий СЕ, II – вигнутий прямокутний восьмивузловий СЕ; арабськими цифрами позначено методи побудови розв'язку: 1 – розв'язок, отриманий за МКУ із використанням МР; 2 – розв'язок, який подано МСЕ; 3 – критеріальний розв'язок (3.9) за системами функцій (3.10) або (3.11) [4]. Оскільки в описаній задачі крайові умови однорідні, так званий спеціальний окремий розв'язок за МКУ у формі МР і є повним розв'язком цієї крайової задачі, який цілком збігається з запропонованим розв'язком (3.9), також наведеним у роботах [4], [11]. Як встановлено в роботі [4], за заданого способу навантаження для досягнення дев'яти правильних цифр у мантисі значень прогину і п'яти-шести цифр у мантисах значень згинальних моментів у подвійних рядах, що апроксимують шуканий розв'язок, необхідно утримувати десять перших парних функцій $H_m(x)$ і $H_n(y)$ (загалом сто членів). Такий розв'язок із обговореними значеннями верхніх меж призначимо критерієм для оцінювання розв'язку за МСЕ, а отже, похибку ε , % наведених величин обчислимо відносно призначеного еталона. І, нарешті, у стовпці "N (δ , м)" наведено загальну кількість невідомих N під час розв'язування задачі за МСЕ, а в дужках зазначено розмір δ квадратного СЕ.

Поверховий погляд на результати, подані в таблиці В.1, може призвести до помилкового висновку, що "π-n проблема" у методі скінченних елементів

легко розв'язувана: π -проблему можна вирішити шляхом додавання вузлів на сторонах елемента, а n -проблему – ущільненням скінченно-елементної сітки. Однак це не так. Як зазначалося раніше, матриця МСЕ є погано зумовленою, і збільшення її порядку може призвести (найчастіше й призводить) до інших проблем: необхідності виконання обчислень з більшою розрядністю мантиси чисел, зростання впливу помилок наближеного чисельного інтегрування тощо.

Отримання розв'язку з наперед заданою точністю з найменшою кількістю невідомих можливе аналітичними або аналітико-чисельними методами, і, як показано в роботі [4], критеріальний розв'язок, використаний тут, має всі необхідні властивості. Як можна побачити з другого стовпчика цієї таблиці, вирішення першої проблеми також неможливе, оскільки збільшення кількості невідомих у розв'язанні призводить до зростання порядку матриці МСЕ. Аналіз МСЕ-розв'язку розглянутої крайової задачі показав, що не будь-яка задана точність практично досяжна.

Результати МСЕ-розрахунків з використанням першого типу скінченних елементів свідчать, що точність у визначенні згинальних моментів навіть при високому ступені дроблення області пластини не досягається. Цей недолік можна виправити використанням восьмивузлового прямокутного згинального скінченних елементів, що підвищує точність визначення не лише прогинів, а й згинальних моментів та перерізувальних сил за меншої густоти скінченно-елементної сітки (за порівнянного числа невідомих). Це свідчить про те, що "π- n проблема" має вирішуватися комплексно.

Варто зазначити, що при використанні зазначених типів СЕ значення силових чинників, таких як питомі моменти і зусилля, а отже, викликані ними напруження, визначаються як константи по всьому елементу, хоча ці величини насправді є змінними в межах конкретного елемента. У деяких індустріальних програмах існує можливість визначення усереднених статичних величин уздовж сторін елемента, а для всього елемента проводиться ще одне усереднення у середньоарифметичному розумінні, і отримана величина видається як характеристика напруженого стану всього елемента загалом. Однак за великої

густоти скінченно-елементної сітки точність визначення згинального моменту і перерізуювальної сили знижується через розміри елемента, що є неприйнятним, наприклад, у задачах визначення ресурсу конструкції. Цього недоліку позбавлені аналітичні та аналітико-чисельні розв'язки.

Сказане підтверджується результатами, показаними на рис. 4.2 у вигляді серії графіків згинального моменту M_x (Нм/м), на лініях $x = \{0; 0,6; 1\}$, визначеного з розв'язку за МСЕ для двох типів елементів зі скінченно-елементною сіткою 40×40 ($\delta = 0,05$ м), а також за критеріальним аналітико-чисельним розв'язком роботи [4]. Необхідно підкреслити, що побудову ступінчастої функції згинального моменту, визначеного в МСЕ, виконували за середніми значеннями вздовж відповідних сторін елементів, які лежать на зазначених вище лініях $x = \text{const}$. Ліва частина графіків відповідає МСЕ-розв'язку за першим типом СЕ, права частина – за другим.

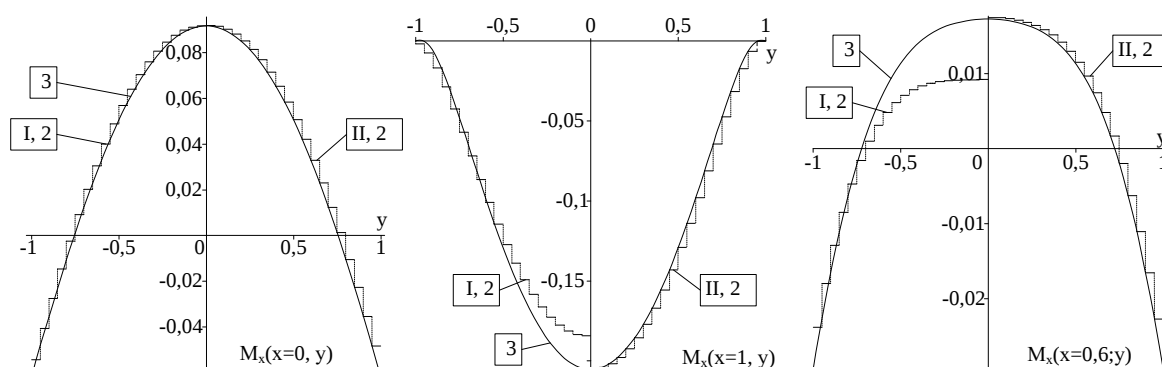


Рисунок 4.2 – Точність визначення згинального моменту M_x
в області пластини та на її границі

З наведених графіків, що якісно доповнюють дані таблиці В.1, випливає, що для задач, які вимагають визначення компонентів напруженого стану з високою точністю, розрахунки методом скінченних елементів слід проводити з використанням елементів типу II. Це одна з рекомендацій методу ідентифікації крайових умов для МСЕ. На жаль, ми не можемо провести дослідження для інших типів лагранжевих елементів із серендипового сімейства через їхню відсутність у програмному забезпеченні. При використанні СЕ першого типу у розрахунках похибка у визначенні згинальних моментів зростає при переході

від центру пластини до її країв. В цілому, неможливо досягти необхідної точності визначення напруженого стану з використанням СЕ першого типу.

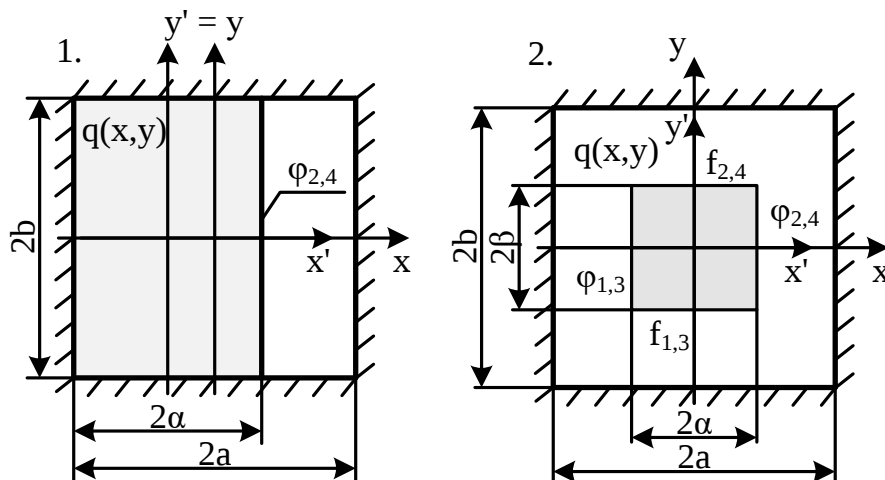


Рисунок 4.3 – Схеми крайових задач для блок-елементів, виділених з початкової системи

Проведений аналіз розглянутої еталонної "системи", хоч і простої, виявив ряд недоліків методу скінченних елементів та визначив шляхи їх усунення за допомогою розвинутих нами методів – методу редукції як складника методу ідентифікації крайових умов. МІКУ і МР сприяють покращенню стійкості, збіжності та точності результатів МСЕ, з одного боку, та очікують взаємодії з МСЕ для ідентифікації крайових умов окремих блок-елементів для подальшого їх аналізу методами МІКУ, з іншого. Уявімо собі, що з вихідної "системи" можуть бути виділені чотири блок-елементи [18]. Перший блок-елемент являє собою прямокутну пластину з трьома жорстко закріпленими сторонами, які є ділянками границі початкової системи, а на четвертій стороні – задані компоненти вектора загальних переміщень: функція прогину та кути повороту (смуга, що розширюється). Другим виділеним блок-елементом є відкрита квадратна підобласть, що розширюється, центр якої знаходиться у вихідній "системі", але її межі не доходять до меж вихідної системи. Візуальне уявлення розглянутих крайових задач подано на рис. 4.3. Можливі ще два варіанти виділення блок-елемента: прямокутна пластина, що містить кутову точку вихідної системи, з двома суміжними сторонами, що жорстко закріплені, і

неоднорідні крайові умови Діріхле на двох інших; прямокутна смуга з двома протилежними сторонами, що жорстко закріплені, і неоднорідні крайові умови Діріхле на двох інших паралельних сторонах. Останні два варіанти не розглянуті в даній роботі, оскільки їхній аналіз проводиться за тією ж самою схемою методу редукції, що й у другій задачі, а отримані висновки зберігаються у відношенні до стійкості, збіжності та точності результатів.

Зауважимо, що за першого способу виділення з вихідної системи блок-елемента (рис. 4.3, 1) ідентифікацію крайових умов із МСЕ-розрахунку необхідно виконати лише на інтервалі $y \in (-1; +1)$ лінії сполучення, x – фіксований; на решті ж сторін виділеного елемента, включно з усіма його кутовими точками, виконуються однорідні крайові умови (4.10). У другому способі виділення блок-елемента (рис. 4.3, 2) крайові умови на всіх ділянках граничного контуру, включно з кутовими точками, неоднорідні. Сказане визначає принципovu відмінність між двома задачами: у задачі про вигин смуги, що розширюється, відсутня необхідність у побудові першої функції продовження $w_1(x', y')$. Розглянемо кожну неоднорідну крайову задачу окремо.

4.2.4.1 Задача вигину прямокутної пластини з трьома жорстко затиснутими сторонами і неоднорідними крайовими умовами Діріхле – на четвертій

Розглянемо вигин постійним тиском (як у всій системі) виділеного блок-елемента у вигляді прямокутної пластини розмірами $2a \times 2b$, що займає область $\Omega' = \{(x', y'): -1 < x' < +1, -1 < y' < +1\}$, яка має три спільні сегменти границі з областю Ω вихідної системи (рис. 4.3, 1). Розв'язання для цього блок-елемента методом редукції через вихідні крайові умови значно спрощується. Наявність однорідних крайових умов на трьох сторонах прийнятого блок-елемента виключає необхідність у побудові першої функції продовження (4.14). Таким чином, подання шуканого розв'язку скорочується до вигляду

$$w(x, y) = w_q(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y), \quad (4.25)$$

а друга функція продовження визначається двома доданками:

$$w_2(x, y) = \varphi_2^*(y)\mu_2(x) + \varphi_4^*(y)\mu_4(x). \quad (4.26)$$

Функції $\varphi_2^*(y)$ (прогин) і $\varphi_4^*(y)$ (кут повороту) визначають неоднорідні крайові умови на лінії з координатою $x = (2\alpha - a) / a$ в Ω – на лінії сполучення блок-елемента з рештою системи. Коли лінія сполучення збігається з лінією $x = 0$ ($2\alpha = a$) в Ω , то функція $\varphi_4^*(y) \equiv 0$, що призводить до ще одного спрощення:

$$w_2(x, y) = \varphi_2^*(y)\mu_2(x). \quad (4.27)$$

Зупинимось докладніше на питанні ідентифікації неоднорідних крайових умов на лінії сполучення. Тут ідентифікацію, як було анонсовано раніше, проводимо із залученням розв'язку з МСЕ, але водночас залишається відкритим питання про виконання статичних умов взаємодії на лінії сполучення (умов рівноваги). Після відшукування розв'язку з МСЕ користувач має у своєму розпорядженні значення всіх компонент вектора узагальнених переміщень у вузлах скінчено-елементної сітки (табличні функції). Проведення МР вимагає задання крайових функцій в аналітичному вигляді. Тому виникає необхідність у доповненні сіткових функцій безперервними і безперервно диференційованими функціями з деякого класу $C^{(k)}$. Серед наявних інтерполяційних методів найбільш придатним у розумінні стійкості, збіжності та точності кінцевих результатів є метод сплайнового заповнення. Однак, щоб унеможливити втрату точності у визначенні коригувальної компоненти розв'язку, як і його самого, пов'язані з диференціюванням сплайнів відновлені функції прогину та кутів повороту, слід подавати у вигляді (4.22).

У зв'язку з цим ставиться завдання: дослідити вплив ступеня "r" інтерполяційних сплайнів під час побудови відновлених функцій на стійкість, а отже, збіжність і точність значень компонент напружено-деформованого стану (НДС) пластини: функції прогину $w(x', y')$, моментів згинання $M_{x(y)}(x', y')$ і перерізуювальних сил $N_{x(y)}(x', y')$. Для проведення цього дослідження розрахунки вихідної системи скінченно-елементними пакетами виконано з накладенням на область пластини сітки 40×40 восьмивузлових квадратних вигинних скінченних елементів (відносний розмір сторони елемента $\delta/a = 0,05$). З

вихідної системи виділяються дві прямокутні пластини з подовженнями $\lambda = 0,5$; $2\alpha = 1$ м (координата лінії сполучення $x = 0$) і $\lambda = 0,6$; $2\alpha = 1,2$ м (координата лінії сполучення $x = 0,2$). Таке розташування лінії сполучення визначає відмінність у способах побудови функції продовження $w_2(x', y')$ під час аналізу із залученням МР виділених блок-елементів: у першому випадку використовується формула (4.27), у другому – (4.26). Результати дослідження подано в табл. В.2. Під час виконання конкретних розрахунків нескінченні ряди в записі шуканого розв'язку замінюються скінченними сумами: подвійний ряд у (4.12) замінюється сумою з верхніми межами $N_q = M_q = 20$, у розкладах (4.26) і (4.27) – $N_2 = 20$; $N_3 = M_3 = 60$ – у розв'язку (4.24). Слід зазначити, що завдяки повній симетрії крайової задачі (4.7), (4.10) побудова розв'язку $w_q(x', y')$ виконується лише за функціями $H_i(s)$ з парними індексами "i", і під N_q і M_q варто розуміти число перших функцій $H_i(s)$ з парними індексами. Вибір інших пропорцій між межами рядів лише незначно змінить результат кількісно, але не позначиться на його якісній поведінці.

З наведених у табл. В.2 даних чітко видно, що за фіксованих верхніх меж у сумах для досягнення точності, яку можна порівняти з точністю МСЕ, достатньо заповнювати сіткові функції прогину та кутів повороту сплайнами третього-четвертого ступеня.

Для збільшення точності, наприклад, у $10 - 10^3$ разів значень похідних від розв'язку необхідно збільшити ступінь сплайнів мінімум на чотири. У подальших дослідженнях для забезпечення високої точності шуканих розв'язків і похідних від них достатньо призначити $r = 8$. Аналогічне дослідження було виконано і для другого типу виділеного блок-елемента – квадратної підобласті, яка повністю лежить у вихідній області розглянутої системи. Висновки щодо цього дослідження цілком ідентичні щойно наведеним.

Важливим дослідженням аналітико-чисельного розв'язку неоднорідної крайової задачі вигину виділеного блок-елемента є встановлення стійкості, швидкості збіжності та ступеня точності отримуваних результатів. З огляду на те, що на точність остаточного розв'язку впливає не один параметр, у табл. В.3

продемонстровано вплив кожного окремо взятого параметра на збіжність і точність як самого шуканого розв'язку, так і його других і третіх похідних. Згідно з висновками роботи [20], у задачі вигину квадратної пластини для забезпечення високої точності розв'язку $w_q(x', y')$ у розкладах (4.12) необхідно утримувати перші десять функцій $H_i(s)$ з парними індексами ($N_q = M_q = 20$). За інших подовжень пластини для забезпечення подібної точності результатів слід збільшувати число утримуваних доданків у відповідних сумах пропорційно подовженню пластини.

Подані в табл. В.3 результати з позначеннями "I" і "II" було отримано для прямокутної пластини розмірами $2a \times 2b$, де $a = a/2$, з використанням зазначених раніше двох типів скінченних елементів за умови ідентифікації крайових умов за МСЕ на стороні пластини $x' = +1$ ($x = 0$). Римською цифрою "III" позначено результати обговореного чисельного експерименту, але для пластини з подовженням $\lambda = 0,6$ ($2a = 1,2$ м) ідентифікацію крайових умов на стороні $x' = +1$ виконали за МСЕ з використанням восьмивузлового квадратного вигинного скінченних елементів. Підкреслимо, що в задачах "I" і "II" функція продовження $w_2(x', y')$ визначається формулою (4.27), а в задачі "III" – формулою (4.26). Зазначимо заздалегідь, що значення верхньої межі M_q під час відшукування спеціального окремого розв'язку $w_q(x', y')$ фіксоване і для всіх задач дорівнює 20.

З наведених у табл. В.3 результатів впливає низка корисних висновків:

- у всіх задачах вдалося досягти високої точності розв'язання: у визначенні значень прогину пластини правильні перші дев'ять цифр мантиси, моментів – до шести-семи цифр, і перерізувальних сил – до трьох-чотирьох цифр;
- на збіжність результату до точного істотно впливає значення верхніх меж при апроксимації заповнених функцій прогину і кутів повороту. Підкреслимо також, що значення верхніх меж у коригувальному розв'язку $w_3(x', y')$ залежать від обраного числа доданків при апроксимації неоднорідних крайових умов (4.22). Конструктивно встановлено, що для забезпечення необхідної (наперед заданої) точності розв'язку та похідних від нього до другого-третього

порядків включно необхідно значення N_3 (M_3) вважати таким, яке щонайменше втричі перевершує значення N_2 (M_2 у разі неоднорідних крайових умов на сторонах $y' = \text{const}$);

– при порівнянні між собою результатів розв'язків крайових задач "II" і "III" стає зрозуміло, що врахування неоднорідності крайової умови (кута повороту) на лінії сполучення майже не впливає на швидкість збіжності та ступінь точності, тому ним можна знехтувати;

– у подальших дослідженнях при подовженнях виділеного блок-елемента в діапазоні: $0,5 \leq \lambda < 1$ у сумах (4.12) і (4.24) можна прийняти верхні межі однаковими ($N_q = M_q$ і $N_3 = M_3$) без внесення суттєвої похибки у визначення компонент напружено-деформованого стану.

У наступному чисельному експерименті дається відповідь на запитання про вплив на точність визначення компонент НДС пластини сумірності міри області Ω' виділеного блок-елемента з мірою Ω вихідної системи. Отже, розглянемо прямокутні пластини з розмірами $2a = \{1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8\}$ м, тобто лінія сполучення збігається з лініями $x = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$ відповідно у вихідній системі ($y = y'$). Чисельні результати за цим дослідженням подано в табл. В.4. Критерієм оцінки точності розв'язків слугує розв'язок із роботи [4], отриманий із вищою точністю: $N = M = 30$ (підсумовування здійснювали за парними функціями щодо обох координат). Для розв'язання за МІКУ призначено такі значення змінних параметрів: $N_q = M_q = 20$, $N_3 = M_3 = 60$, $N_2 = 20$.

Із наведених у табл. В.4 результатів випливає кілька основних висновків. Перший полягає в тому, що зі збільшенням міри блок-елемента точність шуканого розв'язку за методом ідентифікації крайових умов (із застосуванням МР) підвищується. Це відбувається з двох причин. По-перше, зі зростанням площі $\Omega' \subset \Omega$ для більшої частини заданої області виконується аналітичний розв'язок (МІКУ, МР), що забезпечує з необхідною точністю наближення нев'язки в розв'язуючому рівнянні до нуля і виконання крайових умов задачі. Друга причина полягає у зменшенні й так незначної похибки розв'язку при наближенні міри області $\Omega' \rightarrow \Omega$ ($\lambda \rightarrow 1$), пов'язаної з порушенням вимоги до вибору

значень верхніх меж у сумах (4.12) і (4.24) у більшу сторону пропорційно продовженню λ виділеної пластини. Якщо порівняти результати, отримані в МСЕ, з результатами за МКУ, а також результати за цими методами зіставити з даними критеріального розв'язку, легко помітити, що розв'язок за МКУ має вищу точність, ніж розв'язок за МСЕ. Очевидно, що ідентифікація крайових умов за МСЕ з використанням восьмивузлового СЕ проводиться точніше порівняно з тією самою операцією, виконаною за чотиривузлового СЕ.

4.2.4.2 Неоднорідна крайова задача вигину блок-елемента, центрально розташованого в заданій системі

У цьому підрозділі розглядається складніша (за побудовою розв'язку) неоднорідна крайова задача вигину постійним тиском квадратної пластини з областю $\Omega' = \{(x', y'): -1 < x' (y') < 1\}$, сторона якої дорівнює 2α (α – величина змінна, рис. 4.2, 2); за $\alpha = a$ виділений блок-елемент збігається з вихідною пластинною [18]. Тут шуканий розв'язок визначається всіма компонентами з формул (4.9), (4.13). Нагадаємо, що ідентифікацію крайових умов на межі виділеного блок-елемента проводимо за МСЕ з подальшим заповненням сіткових функцій сплайнами восьмого ступеня. Для побудови функції продовження $w_I(x', y')$ методом редукції потрібно знати значення змішаних похідних $\partial^2 w / (\partial x \partial y)$ у кутових точках. Оскільки ідентифікацію крайових умов виконуємо за МСЕ, то значення зазначеної змішаної похідної можна визначити за значенням крутного моменту M_{xy} в елементі, що прилягає до розглянутої кутової точки.

Проведемо дослідження стійкості аналітико-чисельного розв'язку, швидкості його збіжності та ступеня точності залежно від числа утримуваних доданків у рядах (4.22) (N_2, M_2) і (4.24) (N_3, M_3). Обчислення виконаємо для квадратної пластини зі стороною $2\alpha = 1,2$ м), центрально виділеної з вихідної системи (лінії сполучення збігаються з координатами $x_{1,2} = \pm 0,6$ і $y_{1,2} = \pm 0,6$ в Ω). Ідентифікацію крайових умов на лініях сполучення виконуємо за МСЕ, як і раніше, з використанням двох типів скінченних елементів накладенням на

область Ω сітки 40×40 елементів ($\delta/a = 0,05$). З огляду на те, що виділений блок-елемент – квадрат ($\lambda = 1$), у розкладах неоднорідних крайових умов (4.22) $N_2 = M_2$, у розв'язках (4.12) і (4.24) – $N_q = M_q$ і $N_3 = M_3$ відповідно. Результати розрахунків подано в табл. В.5. З огляду на висновки роботи [4], тут і далі значення верхніх меж у розв'язку (4.12) приймаємо рівними $N_q = M_q = 20$ (підсумовування виконується за першими десятима функціями $H_i(s)$ з парними індексами "і").

Результати, подані в табл. В.5, демонструють беззаперечну стійкість, збіжність та точність аналітико-чисельного розв'язку, отриманого за МІКУ. Стійкість і швидка збіжність розв'язку підтверджуються стабілізацією цифр у мантисах значень усіх компонент НДС пластини. Однак наближення до різних, хоча й схожих, меж вказує на те, що точність ідентифікації крайових умов за МСЕ теоретично обмежена. Аналіз впливу кількості членів у рядах (4.22) та (4.24) приводить до аналогічних висновків, зроблених у попередньому підрозділі: на швидкість збіжності та точність очікуваного розв'язку головним чином впливає кількість доданків у сумах (4.22), а також верхні межі рядів коригувального розв'язку (4.24), які повинні бути щонайменше втричі більшими за відповідні межі в рядах (4.22).

У наступному чисельному експерименті дослідимо вплив точності ідентифікації крайових умов для блок-елемента на точність шуканого розв'язку і похідних від нього як в області Ω' , так і на її межі Γ' . Підвищення точності ідентифікації крайових умов пов'язане як із густотою покриття області Ω вихідної системи скінченними елементами (n-проблема), так і з типом застосовуваного скінченних елементів (п-проблема). Результати дослідження, наведені в табл. В.6, отримано для центрально виділеного квадратного блок-елемента зі стороною $2\alpha = 1,2$ м трьома способами: за МІКУ ("1"), за МСЕ ("2") і за розв'язком роботи [4] ("3") - критеріальний розв'язок, з яким слід порівнювати всі отримані результати. Розв'язок за МСЕ був отриманий за таких значень верхніх меж у відомих сумах: $N_q = M_q = 20$, $N_2 = M_2 = 20$ і $N_3 = M_3 = 60$. Саме ці значення меж забезпечують високу точність результатів розв'язку "1":

усі наведені значущі цифри в рядках "1" таблиці правильні в межах точності вхідних даних, отриманих за МСЕ. У другому стовпці таблиці вказано розмір δ сторони квадратної комірки скінченно-елементної сітки, що накладається на область вихідної системи, а в дужках подано кількість вузлів $N_{\text{МСЕ}}$, що вкладаються на один сегмент границі виділеної квадратної підобласті.

Аналіз результатів, наведених у таблиці В.6, веде до кількох важливих висновків. По-перше, підвищення точності ідентифікації крайових умов призводить до зростання точності розв'язку за МІКУ, що цілком очевидно: як самі розв'язки, так і процедура їх отримання є беззаперечно стійкими. Питання збіжності та точності одержуваних результатів стають другорядними. Варто підкреслити, що ідентифікація крайових умов за допомогою другого типу скінченних елементів виконується точніше, ніж за допомогою першого типу. Це свідчить про те, що вирішення "п-п проблеми" має здійснюватися комплексно. Такий підхід відрізняється від поширеної думки, що потрібно використовувати найпростіші елементи з підвищеною густотою скінчено-елементної сітки. За такого підходу неможливо усунути всі "підводні камені", що виникають у МСЕ. По-друге, порівняння результатів розрахунків за МІКУ з результатами МСЕ, а потім із критеріальним розв'язком показує, що розв'язок за МІКУ покращує результати МСЕ. Однак досягти повного збігу з критеріальним розв'язком неможливо через похибки, які виникають унаслідок вибору способу ідентифікації крайових умов на границі виділеного блок-елемента.

Наведені вище чисельні експерименти були виконані для центрально розташованого у вихідній системі блок-елемента з фіксованими розмірами. У табл. В.7 наведено результати дослідження впливу розширення квадратної підобласті, що виокремлюється у вихідній системі, на точність розв'язку за МІКУ за умови ідентифікації крайових умов за МСЕ, а також дано зіставлення трьох типів розв'язків: МІКУ, МСЕ і критеріального розв'язку роботи [4]. Розрахунки виконуються зі збереженням значень верхніх меж у рядах розв'язку, які було прийнято в попередньому дослідженні, оскільки подальше їх збільшення істотно не впливає на одержуваний результат. Ідентифікацію крайових

умов на границі виділених блок-елементів виконували на основі МСЕ, з фіксованим числом скінченних елементів (40×40).

Аналіз даних табл. В.7 повторює висновки, зроблені за раніше проведеними дослідженнями: розширення підобласті, що виділяється у вихідній системі, не порушує властивостей стійкості, збіжності та точності аналітико-чисельного розв'язку за МКУ, а, навпаки, сприятливо впливає на зазначені властивості розв'язку. Це пояснюється тим, що аналітико-чисельний розв'язок охоплює дедалі більшу й більшу область вихідної системи. Під час ідентифікації крайових умов, як і під час побудови самого МСЕ-розв'язку, перевагу все ж таки слід віддавати розв'язанню π -проблеми, оскільки зміна типу елемента впливає на точність дещо більше, ніж ступінь покриття скінченними елементами області.

4.3 Системний розв'язок крайової задачі напружено-деформованого стану стрингерної панелі. Умови сполучення на ребрі

Для розв'язання повністю неоднорідної задачі стрингерної панелі не менш важливо правильно сформулювати і проаналізувати крайові умови в місці контакту ребер із сусідніми пластинами. У цьому випадку на кожному ребрі мають бути виконані як кінематичні умови (однакові компоненти вектора переміщень лінії сполучення ребра і пластин), так і статичні (виконання рівноваги на лінії сполучення) (4.6). Ідентифікацію цих умов можна виконати так само, як і в підрозділі 4.2, проте більший інтерес становить виконання умов (4.6) автоматично. Маємо на увазі, що до отримання кінцевого розв'язку компоненти вектора переміщення на лінії сполучення ребер і пластин виражатимуться через невідомі параметри, які входять до крайових функцій (2.13) і (2.18). Визначення введених невідомих може бути виконано різними способами. Один із таких способів – це побудова параметричного розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі за допомогою методів ідентифікації крайових умов, сполучення конструктивних елементів і методу редукції (див. розділ 2 і підрозділ 4.2); самі невідомі параметри визначатимуться з умов (4.6) як

коефіцієнти рядів Фур'є. Другий спосіб – це побудова аналітичного розв'язку для всієї панелі як єдиного конструктивного елемента. У цьому разі панель подається однією пластиною, а ребра враховуються дискретно, у вигляді додаткових функцій під час формулювання енергії деформування панелі [20]. Саме цим двом способам розв'язання повністю неоднорідних крайових задач деформування різних стрингерних панелей буде присвячено цей підрозділ.

4.3.1 Побудова функцій, що виконують неоднорідні головні крайові умови у квадраті

Для побудови розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі про деформування стрингерної панелі необхідно конкретизувати вид компонент вектора переміщення. Тому знову необхідно розглянути безрозмірну квадратну область 2×2 (рис. 4.4), оскільки до неї можна звести будь-яку двовимірну область, для якої вдається підібрати систему координат так, щоб координатні лінії збігалися з межею області.

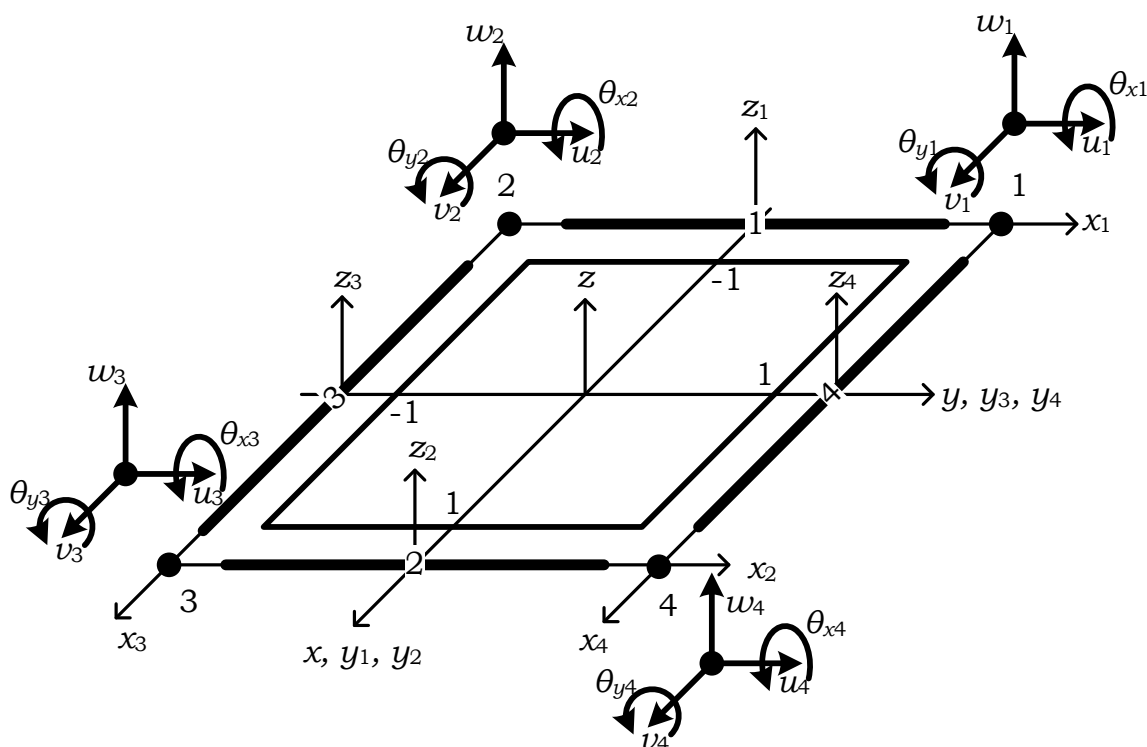


Рисунок 4.4 – Сполучення двовимірної області з одновимірною

Функції (компоненти розв'язку $\mathbf{u}_{1+2}(x, y)$), за допомогою яких головні крайові умови зводяться до однорідних, визначаються за допомогою процедури, описаної в розділі 2 і в багатьох публікаціях (наприклад, [8], [9]) при розгляді пластини Кірхгофа мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) = & \bar{u}_2 N_-(x) N_-(y) + \bar{u}_3 N_+(x) N_-(y) + \bar{u}_1 N_-(x) N_+(y) + \\
 & + \bar{u}_4 N_+(x) N_+(y) + N_-(x) \sum_n U_{1n} \varphi_n(y) + N_+(x) \sum_n U_{2n} \varphi_n(y) + \\
 & + N_-(y) \sum_n U_{3n} \varphi_n(x) + N_+(y) \sum_n U_{4n} \varphi_n(x); \\
 v_0(x, y) = & \bar{v}_2 N_-(x) N_-(y) + \bar{v}_3 N_+(x) N_-(y) + \bar{v}_1 N_-(x) N_+(y) + \\
 & + \bar{v}_4 N_+(x) N_+(y) + N_-(x) \sum_n V_{1n} \varphi_n(y) + N_+(x) \sum_n V_{2n} \varphi_n(y) + \\
 & + N_-(y) \sum_n V_{3n} \varphi_n(x) + N_+(y) \sum_n V_{4n} \varphi_n(x); \\
 w_0(x, y) = & \bar{w}_2 M_-(x) M_-(y) + \bar{w}_3 M_+(x) M_-(y) + \bar{w}_1 M_-(x) M_+(y) + \\
 & + \bar{w}_4 M_+(x) M_+(y) + \bar{\theta}_{x2} K_-(x) M_-(y) + \bar{\theta}_{x3} K_+(x) M_-(y) + \\
 & + \bar{\theta}_{x1} K_-(x) M_+(y) + \bar{\theta}_{x4} K_+(x) M_+(y) + \bar{\theta}_{y2} M_-(x) K_-(y) + \\
 & + \bar{\theta}_{y3} M_+(x) K_-(y) + \bar{\theta}_{y1} M_-(x) K_+(y) + \bar{\theta}_{y4} M_+(x) K_+(y) + \\
 & + M_-(x) \sum_n W_{1n} \psi_n(y) + M_+(x) \sum_n W_{2n} \psi_n(y) + \\
 & + M_-(y) \sum_n W_{3n} \psi_n(x) + M_+(y) \sum_n W_{4n} \psi_n(x) + \\
 & + K_-(x) \sum_n \Theta_{x1n} \psi_n(y) + K_+(x) \sum_n \Theta_{x2n} \psi_n(y) + \\
 & + K_-(y) \sum_n \Theta_{x3n} \psi_n(x) + K_+(y) \sum_n \Theta_{x4n} \psi_n(x).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

де $P_i(x)$ – поліноми Лежандра; функції форми виглядають так:

$$\begin{aligned}
 N_-(x) &= \frac{1}{2} (P_0(x) - P_1(x)) = \frac{1-x}{2}, \\
 N_+(x) &= \frac{1}{2} (P_0(x) + P_1(x)) = \frac{1+x}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_-(x) &= \frac{P_0(x) - P_1(x)}{2} - \frac{P_1(x) - P_3(x)}{10} = \frac{1}{4}(2+x)(1-x)^2, \\
M_+(x) &= \frac{P_0(x) + P_1(x)}{2} + \frac{P_1(x) - P_3(x)}{10} = \frac{1}{4}(2-x)(1+x)^2, \\
K_-(x) &= \frac{P_0(x) - P_2(x)}{6} - \frac{P_1(x) - P_3(x)}{10} = \frac{1}{4}(1+x)(1-x)^2, \\
K_+(x) &= -\frac{P_0(x) - P_2(x)}{6} - \frac{P_1(x) - P_3(x)}{10} = \frac{1}{4}(x-1)(1+x)^2.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Функції переміщень серединної поверхні пластини при використанні проєкційних або варіаційних методів подаються у вигляді

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_0(x, y) + \sum_n \sum_m U_{nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y), \\
v(x, y) &= v_0(x, y) + \sum_n \sum_m V_{nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y), \\
u(x, y) &= w_0(x, y) + \sum_n \sum_m W V_{nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

для класичної теорії пластин.

Сполучення двовимірних конструктивних елементів виконується шляхом введення на межі проміжного одновимірного елемента (див. Додаток Г, [20]). Для прикладу наведемо сполучення трьох двовимірних елементів, показаних на рис. 4.5.

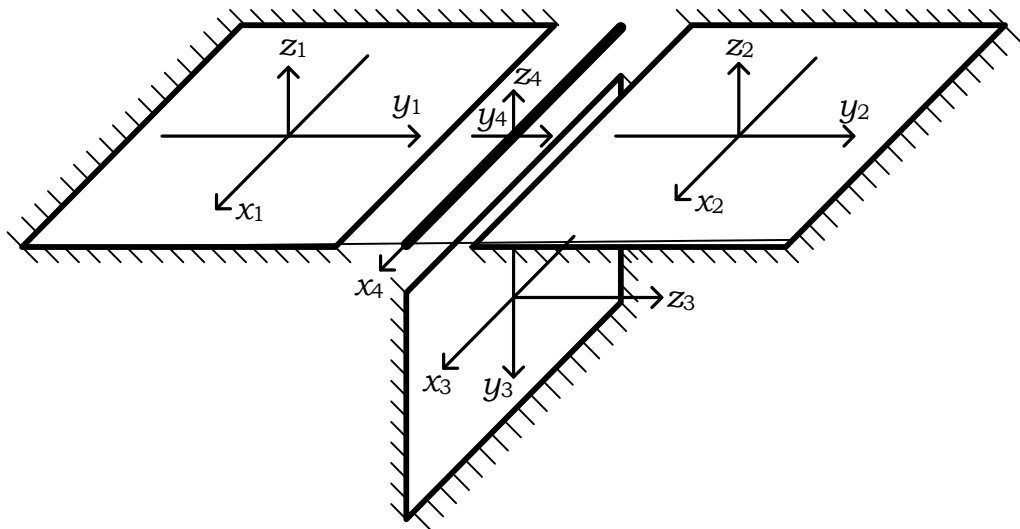


Рисунок 4.5 – Сполучення трьох двовимірних областей за допомогою одного відрізка

Головні крайові умови будуть виконані, якщо функції переміщень згідно з (4.30) подати в такому вигляді:

– для елемента 4:

$$\begin{aligned} u_4(x) &= \sum_i U_{4i} \varphi_i(x); & v_4(x) &= \sum_i V_{4i} \varphi_i(x); \\ w_4(x) &= \sum_i W_{4i} \varphi_i(x); & \theta_{4x}(x) &= \sum_i \Theta_{x4i} \varphi_i(x); \\ \theta_{4y}(x) &= \sum_i \Theta_{y4i} \varphi_i(x); & \theta_{4z}(x) &= \sum_i \Theta_{z4i} \varphi_i(x); \end{aligned} \quad (4.31)$$

– для елемента 1:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{1+x}{2} \sum_i U_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m U_{1nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y); \\ v_1(x, y) &= \frac{1+x}{2} \sum_i V_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m V_{1nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y); \\ w_1(x, y) &= \sum_n \sum_m W_{1nm} \psi_m(x) \psi_n(y) + \\ &+ \frac{(2-x)(1+x)^2}{4} \sum_i W_{4i} \psi_i(x) + \frac{(x-1)(1+x)^2}{4} \sum_i \Theta_{x4i} \psi_i(x); \end{aligned} \quad (4.32)$$

– для елемента 2:

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \frac{1-x}{2} \sum_i U_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m U_{2nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y); \\ v_2(x, y) &= \frac{1-x}{2} \sum_i V_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m V_{2nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y); \\ w_2(x, y) &= \sum_n \sum_m W_{2nm} \psi_m(x) \psi_n(y) + \\ &+ \frac{(2+x)(1-x)^2}{4} \sum_i W_{4i} \psi_i(x) + \frac{(1+x)(1-x)^2}{4} \sum_i \Theta_{x4i} \psi_i(x); \end{aligned} \quad (4.33)$$

– для елемента 3:

$$u_3(x, y) = \frac{1-x}{2} \sum_i U_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m U_{3nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y);$$

$$\begin{aligned}
v_3(x, y) &= \frac{1-x}{2} \sum_i W_{4i} \varphi_i(x) + \sum_n \sum_m V_{3nm} \varphi_m(x) \varphi_n(y); \\
w_3(x, y) &= \sum_n \sum_m W_{3nm} \psi_m(x) \psi_n(y) + \\
&+ \frac{(2+x)(1-x)^2}{4} \sum_i V_{4i} \psi_i(x) + \frac{(1+x)(1-x)^2}{4} \sum_i \Theta_{x4i} \psi_i(x). \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Таким чином, за допомогою функцій (4.28), (4.29) проводиться сполучення одно- та (або) двовимірних областей у єдину конструкцію. Зазначимо, що в розв'язку (4.30) кількість доданків у сумах не пов'язана між собою. Оптимальне співвідношення кількості апроксимуючих функцій на границі і в області має бути встановлене.

4.3.2 Результати розрахунків, їх точність і збіжність

Повернемося до розрахункової задачі для стрингерної панелі (рис. 2.2), формулювання якої та відповідний розв'язок подано в підрозділі 2.3. Розміри на рис. 2.2 вказані в міліметрах, величина рівномірного тиску $q = 0.05 \text{ МПа}$, модуль пружності матеріалу $E = 72000 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Для цієї панелі було створено три аналітичні розрахункові моделі (рис. 2.3). У цьому пункті розглядається точність і збіжність результатів для перших двох схем: «Модель 1» – три пластини (рис. 2.3, а)) та «Модель 2» – дві пластини і балка (рис. 2.3, б)).

Порівняємо величини (див. рис. 4.6): енергії деформування P_ε , максимального прогину w_{max} , u – переміщення уздовж осі x , екстремуму згинального моменту M_y (2.32), перерізуювальної сили Q_y (2.33) і напруження σ_x .

Еталонні значення цих величин наведено в табл. 4.1. Тут також зазначено кількість невідомих (порядок матриці роздільної здатності) N , за якої отримано еталонне значення, і відносну різницю між аналітико-чисельним розв'язком і розв'язком за МСЕ. Можна бачити, що обидва ці розв'язки практично збігаються. Найбільша різниця спостерігається у величині перерізуювальної сили (майже 2% для моделі 1 і понад 3% для моделі 2) і переміщення u для

моделі 2 (майже 2%). Ці відмінності зумовлені поганою збіжністю перерізуювальної сили і переміщення u (див. рис. 4.7, 4.8). Решта величин відрізняються не більше ніж на 0.5%.

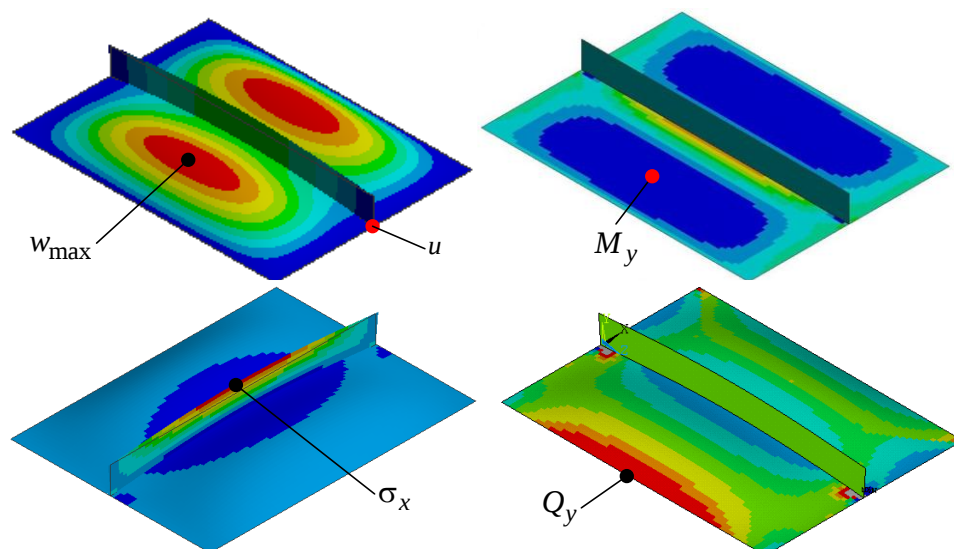


Рисунок 4.6 – Місця, у яких обчислюються величини для порівняння

Таблиця 4.1 – Еталонні значення переміщень, напружень та їх еквівалентів

Величина	Одиниці виміру	Аналітико-чисельний розв'язок		MCE (ANSYS, Nastran)		Відносна різниця, %	
		Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2
N	шт.	1065	748	2042601	721401	2e5	1e5
P_ε	Н·мм	11856.58	8268.605	11862.60	8276.888	0.05	0.10
w_{max}	мм	2.181512	1.687926	2.182332	1.689024	0.04	0.07
u	мм	0.04634379	0.021024375	0.0465343	0.0214378	0.41	1.97
M_y	Н	326.4823	313.4164	326.5535	313.4537	0.02	0.01
Q_y	Н/мм	5.926405	5.859336	5.817991	5.656907	1.86	3.45
σ_x	Н/мм ²	8.070894	14.82106	8.074431	14.87589	0.044	0.37

На рис. 4.7 показано збіжність зазначених величин для першої моделі (рис. 2.3, а). Результати отримували аналітико-чисельним методом і МСЕ з використанням елементів першого і другого порядків. Як можна бачити, аналітико-чисельний розв'язок має експоненціальну збіжність. За однієї й тієї самої точності кількість невідомих в аналітико-чисельному розв'язку на два порядки менша, ніж у МСЕ. Для всіх методів збіжність погіршується зі збільшенням порядку похідної. Найкращу збіжність має величина енергії P_ε , найповільнішу – величина перерізуювальної сили Q_y ((2.33), третя похідна від функції прогину). Зазначимо, що підвищення порядку скінченних елементів у цьому випадку не призводить до уточнення результатів.

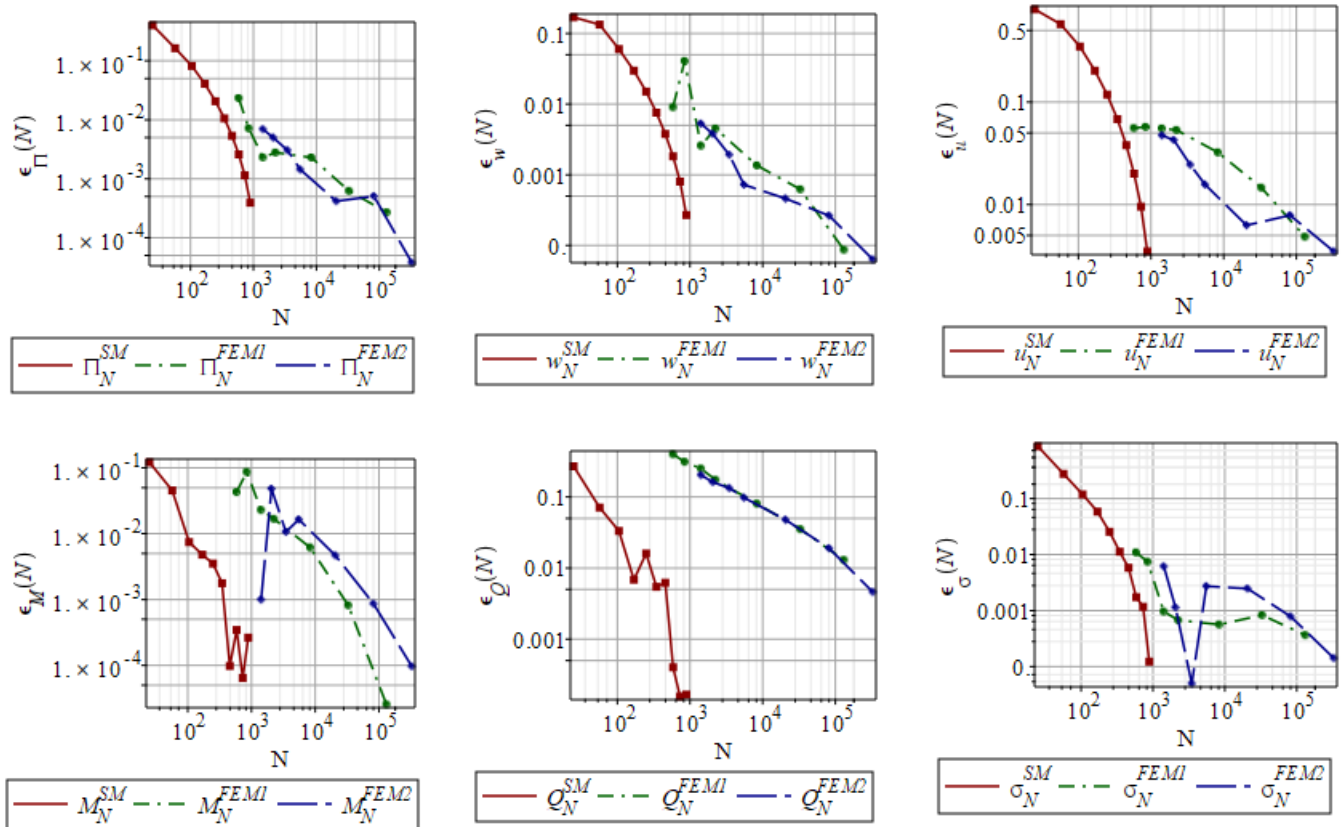


Рисунок 4.7 – Збіжність енергії деформування Π_ϵ , максимального прогину – w_{max} , переміщення уздовж осі x – u , екстремуму згинального моменту M_y , перерізувальної сили Q_y і напруження σ_x , обчислених аналітико-чисельним методом (SM), МСЕ з використанням елементів першого (FEM1) і другого (FEM2) порядків

На рис. 4.8 показано збіжність тих самих величин у моделях панелей із балкою: модель 2 (рис. 2.3, б) позначено індексом SM2, а модель 3 (рис. 2.3, в) – SM3. Як можна бачити, збіжність результатів для моделі "дві пластини і балка" зберігає експоненціальний характер, модель з однією пластиною – такої збіжності не має. Це пояснюється тим, що друга похідна від функції прогину (згинальний момент M_y (2.32)) і третя похідна (перерізувальна сила Q_y (2.33)) мають розриви на лінії, де розташована балка. Ці розриви про- вокують виникнення ефекту Гіббса (рис. 4.9), ретельно вивченого в роботах [19], [20], що значно погіршує збіжність енергії, переміщень перших і других похідних і призводить до її відсутності для третіх похідних.

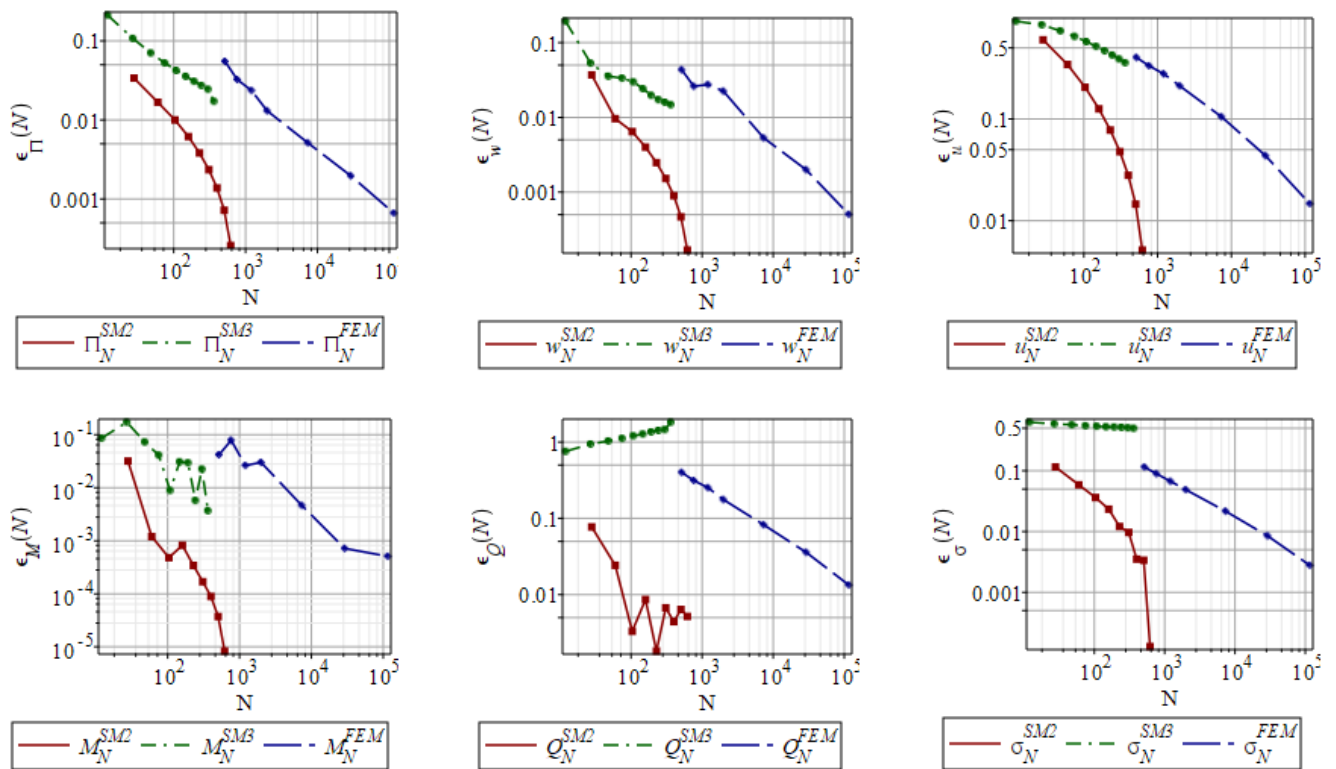


Рисунок 4.8 – Збіжність енергії деформування Π_ε , максимального прогину – w_{max} , переміщення уздовж осі x – u , екстремуму згинального моменту M_y , перерізувальної сили Q_y і напруження σ_x , обчислених аналітико-чисельним методом для моделі 2 (SM2), моделі 3 (SM3) і МСЕ з використанням елементів першого порядку (FEM)

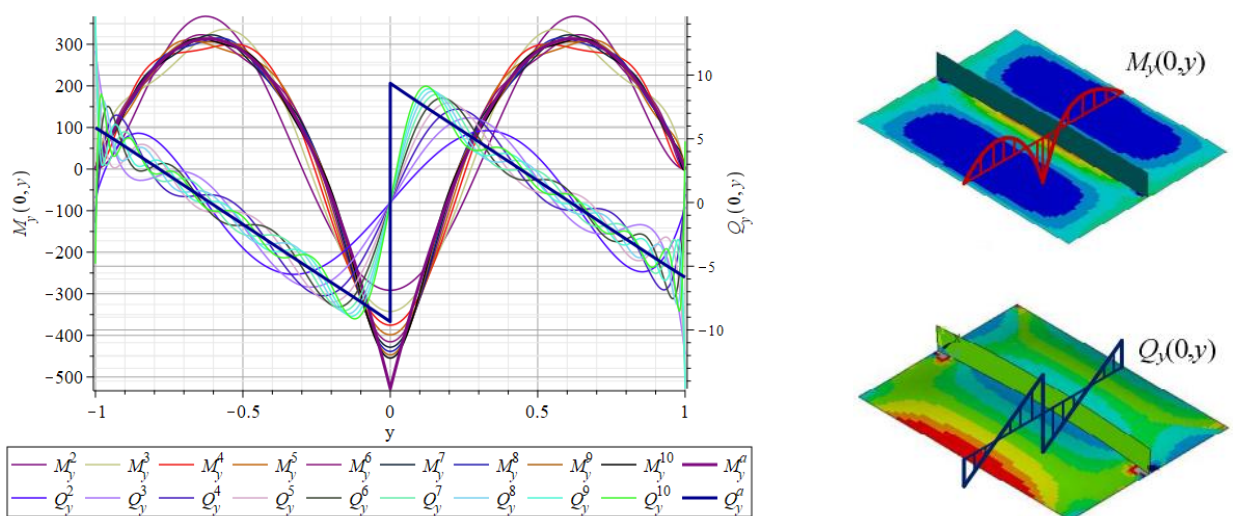


Рисунок 4.9 – Ефект Гіббса під час апроксимації функцій згинального моменту M_y і перерізувальної сили Q_y на лінії $x = 0$ у моделі 3

4.3.3 Дослідження напружено-деформованого стану пластини, підкріпленої системою балок (мультиелементна панель)

Для прикладу розглянемо систему, показану на рис. 4.10 [9]. Вхідні дані задачі наступні:

- розміри пластини: $a \times b \times h = 2 \times 2 \times 0.05$ (см);
- площа й осьовий момент інерції поперечного перерізу балок:
 $F = 0.2^2 = 0.04$ (см²), $I = \frac{0.2^4}{12} = 0.0001333$ (см⁴);
- матеріал: для всіх елементів однаковий і має модуль пружності $E = 72$ (ГПа) і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.33$;
- величина зосередженої сили: $P = 10$ кН;
- закріплення: по сторонах $y = \pm b/2$ переміщення вздовж осі x відсутнє $u(x, \pm 1) = 0$.

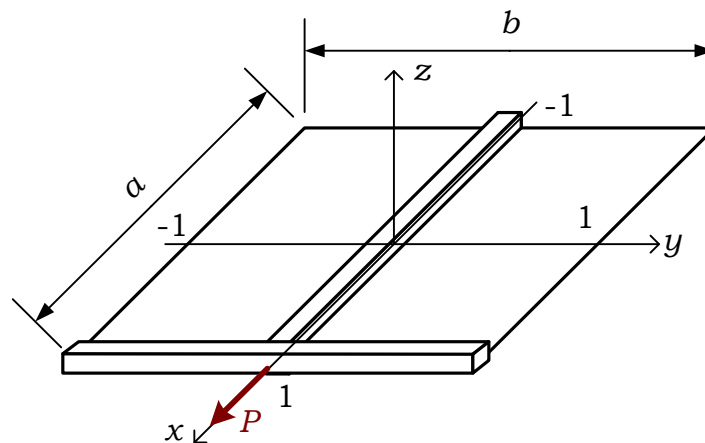


Рисунок 4.10 – Пластина, підкріплена балками

4.3.3.1 Єдиний конструктивний елемент

У першому розрахунку уявимо цю конструкцію як єдиний конструктивний елемент – підкріплену пластину. Повна потенціальна енергія цієї системи складатиметься з потенціалу пластини, двох балок і зосередженої сили

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 \Big] dx dy + \\
& + \frac{E F}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \Big|_{x=+1} \right)^2 dy + \frac{E I}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \Big|_{x=+1} \right)^2 dy + \\
& + \frac{E F}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Big|_{y=0} \right)^2 dx - P \cdot u(+1; 0).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Функції переміщень відшукуються у вигляді

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{mn} P_m(x) [P_{2(n+1)}(y) - P_{2n}(y)], \\
v(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N V_{mn} P_m(x) P_{2n+1}(y).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Різниця поліномів Лежандра $P_{2(n+1)}(y) - P_{2n}(y)$ у складі функції $u(x, y)$ забезпечує виконання головних крайових умов і враховує симетрію задачі. Аналогічно непарні поліноми Лежандра $P_{2n+1}(y)$ у складі функції $v(x, y)$ – враховують косу симетрію цієї функції та забезпечують відсутність переміщення всієї конструкції як жорсткого цілого в напрямку осі y .

Коефіцієнти в сумах (4.36) U_{mn} і V_{mn} знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), до якої приводить принцип стаціонарності повної потенціальної енергії (4.35):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial U_{ij}} = 0, & i = 0 \dots M, \quad j = 0 \dots N, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial V_{ij}} = 0, & i = 0 \dots M, \quad j = 0 \dots N. \end{cases}$$

4.3.3.2 Конструкція, зібрана з окремих конструктивних елементів

У другому випадку розглянемо конструкцію, показану на рис. 4.10, як сукупність п'яти конструктивних елементів (рис. 4.11): двох пластин і трьох балок.

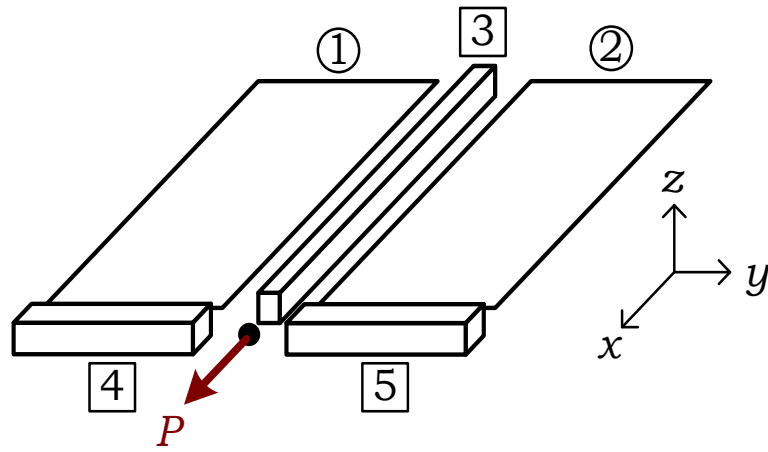


Рисунок 4.11 – Конструкція з п'яти елементів

Балки і пластини вважаються класичними. Дотримуючись процедури побудови функцій, що виконують неоднорідні крайові умови, отримаємо такі базисні системи для елементів:

$$\begin{aligned}
 u_3(x) &= \sum_{i=0}^I U_{3i} P_i(x); \\
 u_1(x, y) &= N_+(y) \sum_{i=0}^I U_{3i} P_i(x) + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{1mn} P_m(x) \varphi_n(2y); \\
 v_1(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N V_{1mn} P_m(x) [P_{n+1}(2y) + P_n(2y)]; \\
 u_2(x, y) &= N_-(y) \sum_{i=0}^I U_{3i} P_i(x) + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{2mn} P_m(x) \varphi_n(2y); \\
 v_2(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N V_{2mn} P_m(x) [P_{n+1}(2y) + P_n(2y)]; \\
 u_4(y) &= u_1(1, y); \quad v_4(y) = v_1(1, y); \\
 u_5(y) &= u_2(1, y); \quad v_5(y) = v_2(1, y).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

У (4.37) для зменшення кількості невідомих деякі граничні умови та умови сполучення виконано за допомогою процедури побудови базису [148]. Зрештою в якості невідомих залишаються U_{3i} , U_{1mn} , V_{1mn} , U_{2mn} , V_{2mn} .

Повна потенціальна енергія цієї системи складатиметься з потенціалу двох пластин, трьох балок і зосередженої сили

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
& + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\
& + \frac{EF}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{\partial v_4(y)}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{EI}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial^2 u_4(y)}{\partial y^2} \right)^2 dy + \\
& + \frac{EF}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{\partial v_5(y)}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{EI}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial^2 u_5(y)}{\partial y^2} \right)^2 dy + \\
& + \frac{EF}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial u_3(y)}{\partial x} \right)^2 dx - P \cdot u_3(+1).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Застосування методу Рітца приводить до СЛАР, розв'язком якої є шукані коефіцієнти з (4.37).

4.3.3.3 Аналіз результатів

Порівняємо аналітико-числові результати, отримані в п. 4.3.3.1, п. 4.3.3.2 і числові результати, отримані за допомогою МСЕ, реалізованого в програмному забезпеченні NASTRAN. Для порівняння взято переміщення u_P в точці, в якій прикладено силу, максимальний згинальний момент у цій самій точці M_P , максимальне мембранне зусилля $N_{11} = \max(N_x; N_y)$ із (2.31) та величину повної потенціальної енергії Π . Звісно, щоб не потрапити під «визначення 16 (IDIOT)» [28], було досліджено зміну цих величин у разі збільшення числа доданків у сумах (4.36), (4.37) та кількості скінчених елементів. Як еталонні взято величини, наведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Еталонні величини

Тип розрахунку	Аналітико-чисельний розв'язок	MSE
Кількість невідомих	1313	19440
Переміщення u_p^a (см)	0.03260254353	0.0326052
Згинальний момент M_p^a (кН·см)	0.3736508630	0.373214
Мембранне зусилля N_{11}^a (кН/см)	8.200603234	8.135955
Повна потенціальна енергія Π^a (кН·см)	0.1630127177	—

На рис. 4.12 показано збіжність цих величин. Похибки підраховувалися відносно еталонних величин із табл. 4.2. Наприклад, $\varepsilon(u_p) = \frac{u_p^n - u_p^a}{u_p^a}$, де u_p^n – у даному випадку переміщення точки, в якій прикладено силу, при утриманні в розв'язках (4.36), (4.37) і в MSE n невідомих.

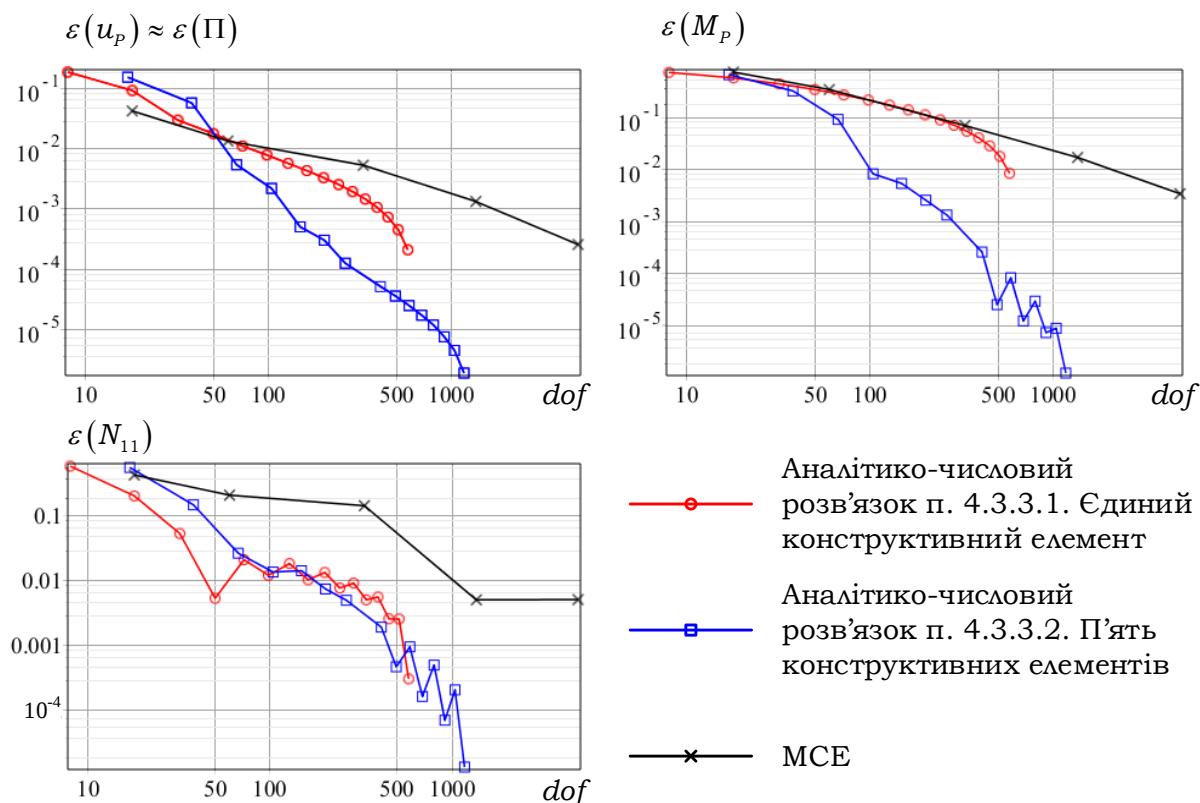


Рисунок 4.12 – Збіжність величин переміщення u_p , згинального моменту M_p , мембранного зусилля N_{11} і повної потенціальної енергії Π

Як можна бачити, найбільшу швидкість збіжності має аналітико-чисельний розв'язок, отриманий у п. 4.3.3.2. MSE поступається в точності та швидкості збіжності наближених розв'язків обом аналітико-чисельним розв'язкам.

Збіжність максимального переміщення і потенціальної енергії однакова. Тут виникає запитання. Здавалося б, що розв'язок, наведений у п. 4.3.3.1, мав би швидше наближатися до точного, ніж розв'язок, наведений у п. 4.3.3.2, оскільки перший розв'язок за однієї й тієї самої кількості невідомих має вищий ступінь полінома, що його наближає (порівняйте (4.36) і (4.37)), але це не так. Причиною цього є ефект Гіббса (див. розділ 3 та 3.3.3.2), який істотно зменшує точність і збіжність наближених розв'язків. Стрибки в перерізуювальній силі (2.33) на передній підкріплювальній балці та мембранних зусиль (2.31) у пластині добре апроксимуються саме другим розв'язком (див. рис. 4.13).

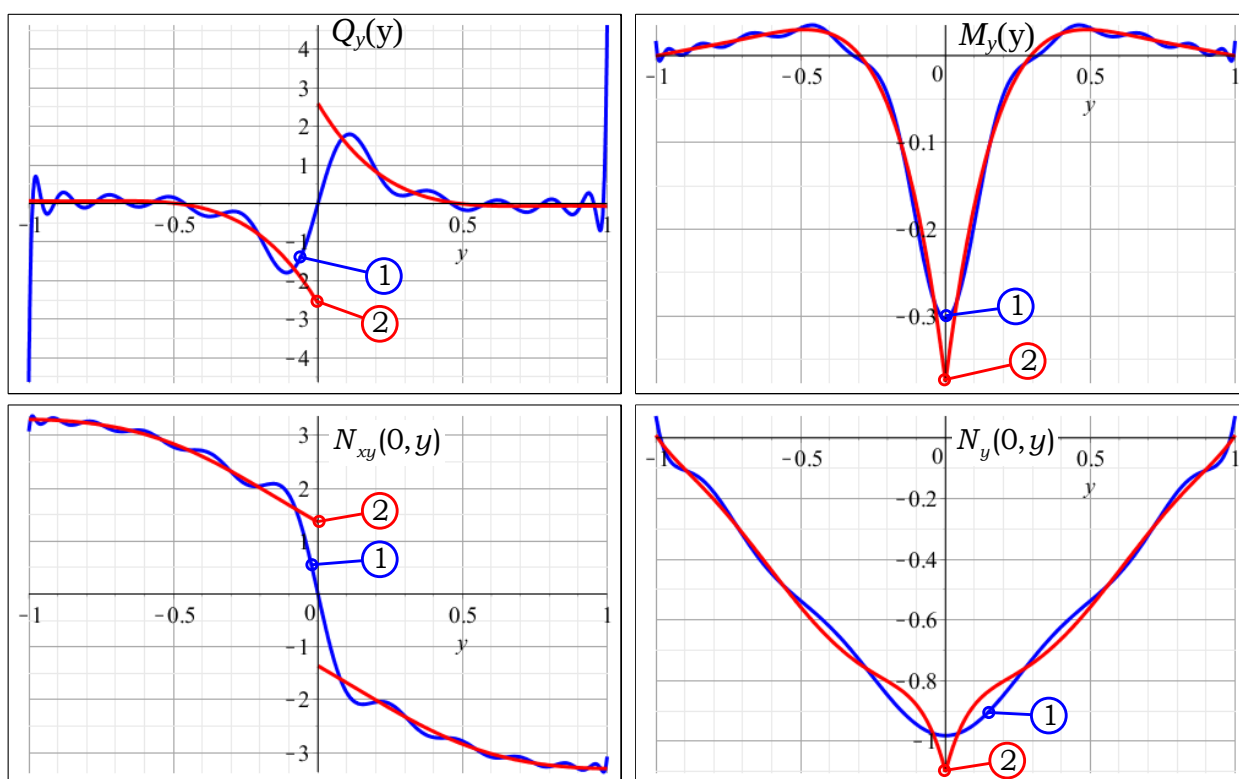


Рисунок 4.13 – Стрибки в полях напружень і ефект Гіббса: 1) аналітико-чисельний розв'язок 4.3.3.1 – єдиний конструктивний елемент; 2) аналітико-чисельний розв'язок 4.3.3.2 – п'ять конструктивних елементів.

4.3.4 Дослідження напружено-деформованого стану підкріпленої панелі

У цьому прикладі із застосуванням МСКЕ розглядається пластина, симетрично підкріплена трьома ребрами (рис. 4.14) [9]. Вихідні дані такі:

- розміри пластини: $a \times b \times h = 2 \times 3 \times 0.05(\text{см})$;
- ребра квадратного поперечного перерізу $0.2 \times 0.2(\text{см})$; площа, осьовий момент інерції та момент інерції вільного кручення відповідно дорівнюють: $F = 0.04 (\text{см}^2)$, $I_y = 0.0001333 (\text{см}^4)$, $I_k = 0.14072 \cdot 0.2^4 = 0.00022515 (\text{см}^4)$;
- матеріал: для всіх елементів однаковий і має модуль пружності $E = 72 (\text{ГПа})$ і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.33$;
- величина рівномірно розподіленого навантаження $q = 1 (\text{кН/см}^2)$;
- закріплення: по периметру панель (пластина) затиснута.

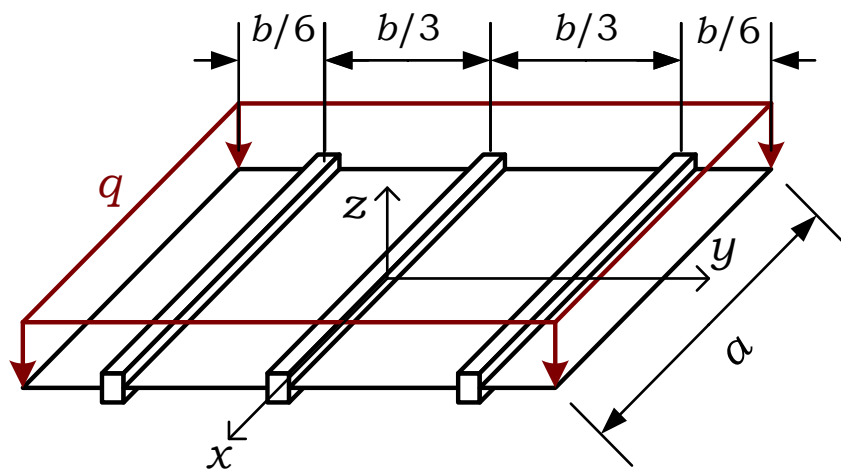


Рисунок 4.14 – Підкріплена панель під рівномірно розподіленим навантаженням

Нижче розглядається три типи декомпозиції цієї панелі.

4.3.4.1 Єдиний конструктивний елемент

У цьому пункті, як і в п. 4.3.3.1, синтез конструкції виконаємо "через енергію". Тут повна потенціальна енергія системи складатиметься з потенціалу пластини, трьох балок і розподіленого навантаження

$$\Pi = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 (w|_{y=-b/3})}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{I_k}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=-b/3}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
& + \frac{E}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 (w|_{y=+b/3})}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{I_k}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=+b/3}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
& + \frac{EI_y}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial^2 (w|_{y=0})}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q \cdot w \, dx \, dy.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Зазначимо, що завдяки відсутності ексцентриситетів ребер і навантажень у площині пластини, задача вигину і плоского напруженого станів розділяються і ненульовим залишається тільки прогин $w(x, y)$. Враховується жорсткість крайніх ребер на кручення. Енергія кручення середнього ребра відсутня у зв'язку із симетрією задачі.

Єдина невідома функція розшукується у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{mn} \psi_{2m} \left(\frac{2x}{a} \right) \psi_{2n} \left(\frac{2y}{b} \right), \tag{4.40}$$

де ψ беруться або у вигляді (Додаток Г, Г.7), або у вигляді (Додаток Г, Г.8). Парні індекси взято з огляду на симетрію задачі.

Шукані коефіцієнти W_{mn} у (4.40) знаходяться з розв'язку СЛАР, до якої приводить умова стаціонарності повної потенціальної енергії (4.39)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{ij}} = 0, \quad i = 0 \dots M, \quad j = 0 \dots N.$$

4.3.4.2 Конструкція з пластин і балок

У другому випадку зробимо декомпозицію конструкції на пластини та балки (рис. 4.15). Будемо мати конструкцію із семи елементів: чотирьох пластин і трьох балок.

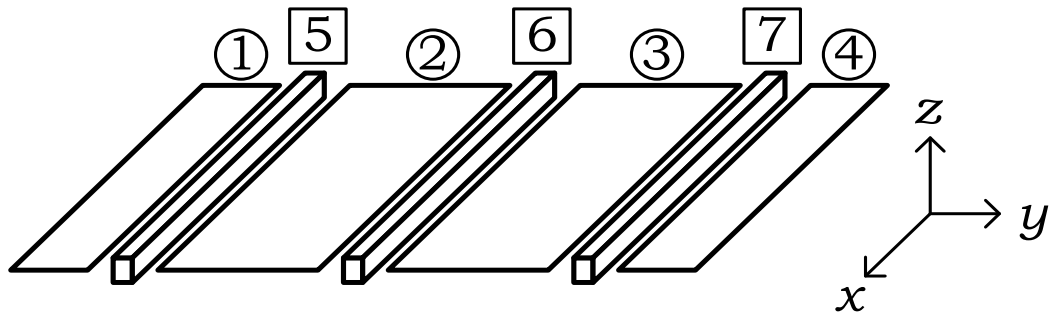


Рисунок 4.15 – Декомпозиція конструкції на пластини та балки

Побудова базису приводить до наступних апроксимацій шуканих розв'язків:

$$w_5(x) = \sum_{j=0}^J W_{5j} \psi_{2j}(x); \quad \theta_5(x) = \sum_{j=0}^J \Theta_{5j} \psi_{2j}(x);$$

$$w_6(x) = \sum_{j=0}^J W_{6j} \psi_{2j}(x); \quad \theta_6(x) = \sum_{j=0}^J \Theta_{6j} \psi_{2j}(x);$$

$$w_7(x) = \sum_{j=0}^J W_{7j} \psi_{2j}(x); \quad \theta_7(x) = \sum_{j=0}^J \Theta_{7j} \psi_{2j}(x);$$

$$w_1(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{1mn} \psi_{2m}(x) \psi_n(y_1) + \\ + M_+(y_1) \sum_{j=0}^J W_{5j} \psi_{2j}(x) + K_+(y_1) \sum_{j=0}^J \Theta_{x5j} \psi_{2j}(x);$$

$$w_2(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{2mn} \psi_{2m}(x) \psi_n(y_2) + \\ + M_-(y_2) \sum_{j=0}^J W_{5j} \psi_{2j}(x) + K_-(y_2) \sum_{j=0}^J \Theta_{x5j} \psi_{2j}(x) + \\ + M_+(y_2) \sum_{j=0}^J W_{6j} \psi_{2j}(x);$$

$$\begin{aligned}
w_3(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{3mn} \psi_{2m}(x) \psi_n(y_2) + \\
& + M_-(y_1) \sum_{j=0}^J W_{6j} \psi_{2j}(x) + M_+(y_2) \sum_{j=0}^J W_{7j} \psi_{2j}(x) + \\
& + K_+(y_2) \sum_{j=0}^J \Theta_{x7j} \psi_{2j}(x); \\
w_4(x, y) = & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{4mn} \psi_{2m}(x) \psi_n(y_1) + \\
& + M_-(y_1) \sum_{j=0}^J W_{7j} \psi_{2j}(x) + K_-(y_1) \sum_{j=0}^J \Theta_{x7j} \psi_{2j}(x). \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Тут позначено $y_1 = \frac{12y}{b}$, $y_2 = \frac{6y}{b}$; $M_{\pm}(y)$, $K_{\pm}(y)$ – див. Додаток Г (Г.3); ψ – див. Додаток Г (Г.7), (Г.8).

Невідомі коефіцієнти W_i , $i = 1, \dots, 7$ і θ_i , $i = 4, \dots, 7$ відшуковуються методом Рітца. Повна потенціальна енергія складається з енергії деформування семи елементів і потенціалу зовнішнього навантаження

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{D}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c_i}{2}}^{\frac{c_i}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
& + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \Big] dx dy + \\
& + \frac{E}{2} \sum_{i=5}^7 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{I_k}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \\
& - \sum_{i=1}^4 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-c_i/2}^{c_i/2} q_i \cdot w_i dx dy, \quad (4.42)
\end{aligned}$$

де c_i – ширина відповідної пластини, $c_1 = c_4 = \frac{b}{6}$; $c_2 = c_3 = \frac{b}{3}$.

4.3.4.3 Конструкція з пластин

У цій декомпозиції конструкції підкріплювальні елементи подаються пластинами – один підкріплювальний елемент моделюється двома пластинами (рис. 4.16).

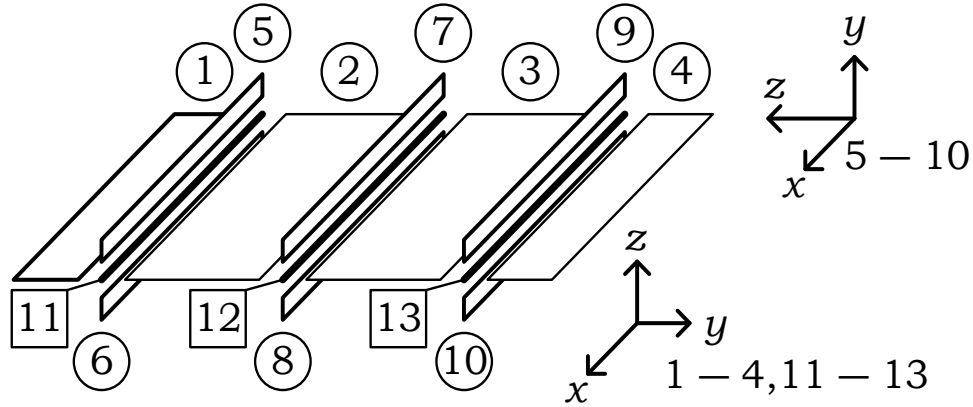


Рисунок 4.16 – Конструкція з пластин

Побудову базису почнемо із формулювання переміщень відрізків 11, 12 і 13, за допомогою яких пластини збираються в єдину конструкцію

$$w_{11(12,13)}(x) = \sum_{j=0}^J W_{11(12,13)_i} \psi_{2j}(x),$$

$$\theta_{x,11(13)}(x) = \sum_{j=0}^J \Theta_{x,11(13)_i} \psi_{2j}(x). \quad (4.43)$$

Базиси для пластин 1, 2, 3 і 4 залишаються такими, як і в попередньому випадку (4.41) із заміною $W_5 \rightarrow W_{11}$, $W_6 \rightarrow W_{12}$, $W_7 \rightarrow W_{13}$, $\Theta_5 \rightarrow \Theta_{11}$, і $\Theta_7 \rightarrow \Theta_{13}$.

Далі, щоб зменшити кількість невідомих для пластин 5, 7 і 9, побудуємо базисні функції [148], які дорівнюють нулю при $y = -1$

$$\eta_{-,n}(y) = P_{n+1}(y) + P_n(y),$$

а також при $y = -1$ дорівнюють нулю разом із першими похідними

$$\pi_{-,n}(y) = P_{n+2}(y) + \frac{2n+3}{n+1} P_{n+1}(y) + \frac{n+2}{n+1} P_n(y).$$

Аналогічні базисні системи для пластин 6, 8 і 9 виконують такі самі умови, але при $y = +1$:

$$\eta_{+,n}(y) = P_{n+1}(y) - P_n(y);$$

$$\pi_{+,n}(y) = P_{n+2}(y) - \frac{2n+3}{n+1}P_{n+1}(y) + \frac{n+2}{n+1}P_n(y).$$

Тепер, ці пластини включаються в роботу конструкції за допомогою функцій

$$\begin{aligned} w_{5(9)}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{5(9)mn} \psi_{2m}(x) \pi_{-,n}(y_3) + \\ &\quad + K_{-}(y_3) \sum_{i=0}^I \Theta_{x,11(13)i} \psi_{2i}(x), \\ u_{5(7,9)}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{5(7,9)mn} \varphi_{2m+1}(x) \eta_{-,n}(y_3), \\ v_{5(7,9)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{M_5} \sum_{n=0}^{N_5} V_{5(7,9)mn} \varphi_{2m}(x) \eta_{-,n}(y_3) + \\ &\quad + M_{-}(y_3) \sum_{i=0}^I W_{11(12,13)i} \varphi_{2i}(x), \\ w_{6(10)}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{6(10)mn} \psi_{2m}(x) \pi_{+,n}(y_3) + \\ &\quad + K_{+}(y_3) \sum_{i=0}^I \Theta_{x,11(13)i} \psi_{2i}(x), \\ u_{6(8,10)}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{6(8,10)mn} \varphi_{2m+1}(x) \eta_{+,n}(y_3), \\ v_{6(8,10)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{M_5} \sum_{n=0}^{N_5} V_{6(8,10)mn} \varphi_{2m}(x) \eta_{+,n}(y_3) + \\ &\quad + M_{+}(y_3) \sum_{i=0}^I W_{11(12,13)i} \varphi_{2i}(x). \end{aligned} \quad (4.44)$$

де $y_3 = \frac{2y}{h}$, $h = 0.2$ – ширина пластин 5 – 10.

Розв'язок, як і раніше, отримуємо методом Рітца. Повна потенціальна енергія такої системи дається виразом

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} D_i \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c_i}{2}}^{\frac{c_i}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
 & + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \Big] dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{10} \frac{E_i h_i}{1 - \mu_i^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c_i}{2}}^{\frac{c_i}{2}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \Big] dx dy - \\
 & - \sum_{i=1}^4 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-c_i/2}^{c_i/2} q_i \cdot w_i dx dy.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

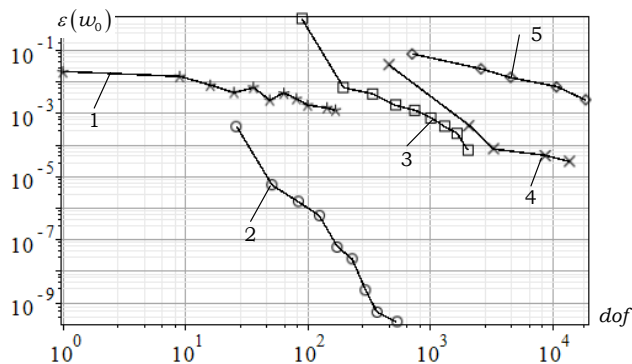
4.3.4.4 Аналіз результатів

Аналогічно тому, як це було зроблено в п. 4.3.3.3, порівняємо аналітико-числові результати, отримані в п.п. 4.3.4.1, 4.3.4.2, 4.3.4.3, і числові результати, отримані за допомогою MCE (NASTRAN). За допомогою MCE було обчислено два випадки: підкріплювальні елементи – балки (4.3.4.2) і пластини (4.3.4.3). Для порівняння взято переміщення точки в центрі w_0 (це не максимальний прогин), максимальний згинальний момент центрального ребра в цій самій точці M_y (у випадках 4.3.4.1 та 4.3.4.2) або максимальне мембранне зусилля N_{11} (у випадку 4.3.4.3) та величину повної потенціальної енергії Π . Еталонні величини наведено в табл. 4.3.

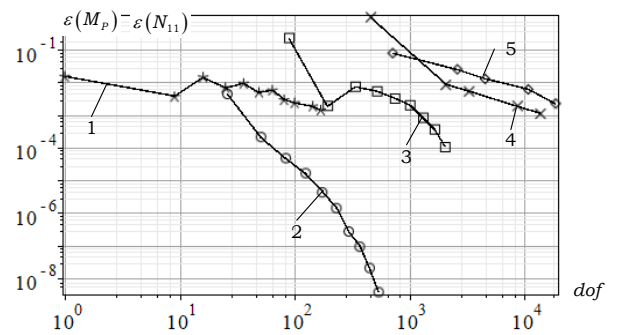
На рис. 4.17 показано збіжність цих величин. Похибки підраховувалися по відношенню до еталонних величин із табл. 4.3. Також нумерація графіків на рис. 4.17 відповідає нумерації розв'язків, наведених в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Еталонні величини

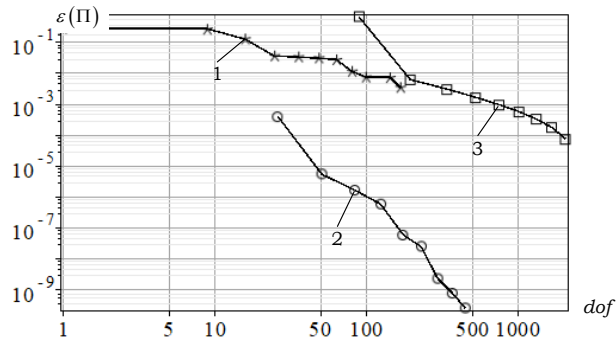
	№	Кількість невідомих	Переміщення w_0^a (см)	Згинальний момент M_y^a (кН) або мембранне зусилля N_{11}^a (кН·см)	Повна потенціальна енергія Π^a (кН·см)
Аналітико-чисельний розв'язок	1 (п. 4.3.4.1)	256	0,0387992307873	0,151814534752	0,0629758230457
	2 (п. 4.3.4.2)	741	0,0410385506887	0,161224266556	0,0703406493418
	3 (п. 4.3.4.3)	2475	0,0422798634330	0,460439541667	0,0659239287704
МСЕ	4 (п. 4.3.4.2)	56406	0,040487	0,1587402	-
	5 (п. 4.3.4.3)	66360	0,0421899	0,457988	-



(1)



(2)



(3)

Рисунок 4.17 – Збіжність переміщень w_0 (1), згинальних моментів M_0 і мембранного зусилля N_{11} (2), потенціальної енергії Π (3)

Як можна бачити, найбільшу швидкість збіжності має аналітико-чисельний розв'язок 2, отриманий у п. 4.3.4.2. Таку саму швидкість, але значно меншу точність має аналітико-чисельний розв'язок 3 (п. 4.3.4.3). Зменшення точності зумовлене значно більшою кількістю невідомих у шуканих розв'язках: у

розв'язку 3 додається 16 двовимірних функцій порівняно з розв'язком 2. Така сама тенденція і з розв'язками 4 і 5, отриманими за допомогою МСЕ, які значно поступаються в точності та швидкості збіжності всім аналітико-чисельним розв'язкам. Аналітико-чисельний розв'язок 1 (п. 4.3.4.1) хоч і досягає певної точності на найменшій кількості невідомих, але має низьку швидкість збіжності. Як і в першому прикладі, це зумовлено наявністю ефекту Гіббса. На рис. 4.18 показано поперечні сили Q_y (2.33) і згинальні моменти M_y (2.32) на лінії $x = 0$ у розв'язку 1 і 2.

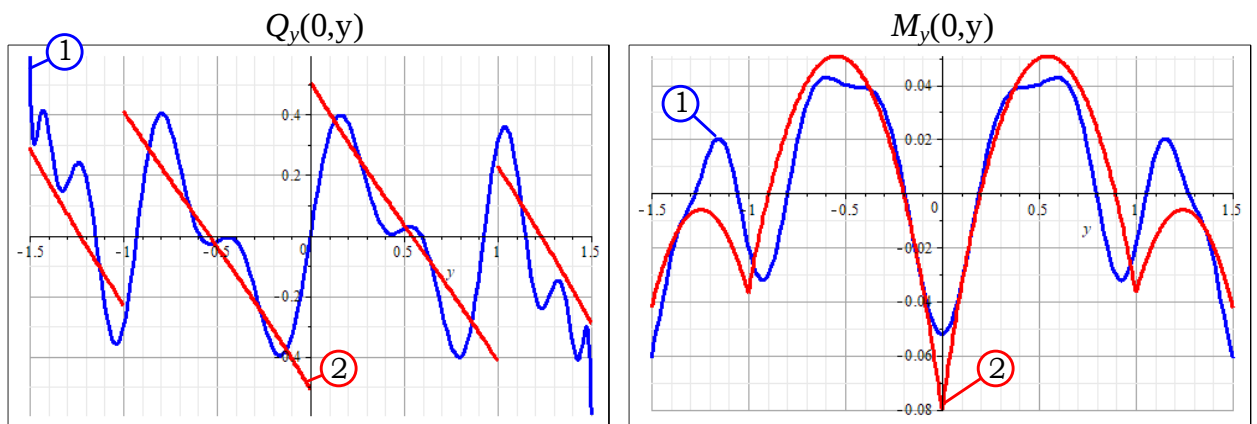


Рисунок 4.18 – Перерізувальні сили $Q_y(0, y)$ та згинальні моменти $M_y(0, y)$ на лінії $x = 0$: 1 – розв'язок п. 4.3.4.1; 2 – розв'язок п. 4.3.4.2

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації розширено застосування методу ідентифікації крайових умов (МІКУ), а також реалізовано і досліджено використання методу редукції (МР) для аналізу тонкостінних просторових систем у рамках декомпозиційного підходу. Для цього підходу сформульовано алгоритм дослідження напружено-деформованого стану багатострингової панелі. Реалізація цього алгоритму потребує створення програмного продукту, що є перспективою роботи. Імплементация цього алгоритму виконана на прикладі більш простої задачі – задачі вигину прямокутної пластини з неоднорідними крайовими умовами, уточнення яких виконується шляхом попереднього розрахунку конструкції (стрингової панелі), до складу якої входить ця пластина. Аналіз

показав, що МСЕ не здатен повністю розв'язати "п-п проблему", але може ефективно використовуватися для ідентифікації крайових умов, необхідних для проведення МКУ.

Побудовано аналітико-чисельний розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини з використанням МКУ у формі методу редукції, де ідентифікацію крайових умов виконано за допомогою розрахунків за МСЕ. Аналіз результатів чисельних експериментів показав, що побудований аналітико-чисельний розв'язок стійкий, має високий ступінь збіжності та забезпечує високу точність як самого розв'язку, так і його похідних. Порівняння результатів, отриманих методом цієї роботи в усіх варіантах виділення блок-елементів з вихідної системи, з результатами критеріального розв'язання, показало істотне підвищення точності визначення компонент напружено-деформованого стану розглянутих пластин у порівнянні з МСЕ-розв'язком. Показано, що МКУ може суттєво підвищити точність розв'язків, отриманих за допомогою МСЕ, особливо для задач з неоднорідними крайовими умовами. Реалізований при розв'язанні повністю неоднорідної крайової задачі вигину прямокутної пластини метод редукції дозволив зменшити обчислювальні витрати та підвищити точність розрахунків. Виявлено, що ідентифікацію крайових умов, як і отримання самих розв'язків за МСЕ, слід проводити з використанням більш точних типів скінченних елементів. У цілому, синтез між МКУ та МСЕ виявився надзвичайно плідним і продемонстрував суттєве підвищення точності та ефективності розв'язання задач аналізу напружено-деформованого стану тонкостінних просторових систем.

Розроблено системний підхід до розв'язання крайових задач для напружено-деформованого стану стрингерних панелей, включно з умовами сполучення на ребрі, і побудовано функції, що виконують неоднорідні головні крайові умови у квадраті. Ці функції дозволяють ефективно розв'язувати крайові задачі для складних систем з високою точністю розрахунків. Використання систем координатних функцій, де і базис, і універсальні функції виконують не тільки головні, але й природні крайові умови, значно підвищує точність

розв'язання системної задачі завдяки високому ступеню апроксимувального полінома. При сполученні поліноміальних функцій на границі можна домогтися їхнього повного збігу. Необхідною умовою є рівність старших ступенів апроксимувальних поліномів.

Досліджено напружено-деформований стан пластини, підкріпленої системою балок (мультиелементна панель), де отримані результати підтвердили ефективність застосованих методів. Аналітико-чисельний розв'язок задач деформування тонкостінних конструкцій зберігає експоненціальну швидкість збіжності. Конструктивні елементи слід вибирати таким чином, щоб уникати виникнення явища Гіббса. Підкріплювальні елементи панелі краще моделювати пластинами, оскільки модель пластини точніша, ніж балкова модель, і дозволяє отримати більше варіацій у формулюванні граничних умов.

Розв'язана задача узагальненого плоского напруженого стану спільно з задачею вигину панелі, що складається з тонких пластин. При пошуку наближеного розв'язку використане слабке формулювання цих задач. Сполучення елементів конструкції виконується за допомогою функцій форм симплекс-елемента для мембранних переміщень і функції кубічної інтерполяції Ерміта при вигині. Запропоновано два підходи до вирішення питання сполучення мембранних і згинальних функцій переміщень. У першому підході функція мембранних переміщень задається як і функція прогину, і зв'язується із заданою на границі функцією тільки за переміщеннями. У другому підході степінь апроксимувального полінома функції мембранних переміщень на границі піднімається до степеня заданої функції, із наступним перерахунком коефіцієнтів. Достовірність результатів підтверджується шляхом порівняння одержуваного аналітико-чисельного розв'язку з розв'язком, отриманим за допомогою h -версії MSE з елементами першого і другого порядків. Підтверджується перевага використання аналітико-чисельних розв'язків над скінчено-елементними у швидкості збіжності наближених розв'язків до точних.

На даний момент у літературі наявний лише один аналітичний розв'язок для окремого конструктивного елемента – прямокутної пластини, отриманий

М. Леві. Тому впевнено можна сказати, що відсутні точні аналітичні розв'язки для систем, що складаються з пластин. Таким чином, запропоновані нами наближені аналітичні розв'язки для тонкостінної просторової системи в цілому в рамках декомпозиційного та системного підходів є унікальними і новаторськими.

Окремі наукові результати, представлені в цьому розділі, також опубліковані в роботах [4], [15], [18], [20].

ВИСНОВКИ

1. У дисертаційній роботі запропоновано підходи до вирішення проблеми високоточного визначення напружено-деформованого стану тонкостінних просторових конструкцій, які застосовують в авіації, ракетній техніці, суднобудуванні, у промисловому та цивільному будівництві. Специфіка розрахунків таких систем в авіаційній галузі полягає в необхідності щоразу вирішувати антагоністичну проблему забезпечення достатньої міцності при збереженні мінімальної маси конструкції. Для цього необхідним є застосування підходів, що здатні забезпечити високу точність розрахунку НДС із урахуванням особливостей складної геометрії тонкостінних конструкцій і неоднорідних крайових умов. Саме такими є аналітико-чисельні підходи, розроблювані в дисертаційній роботі.

2. Проведено критичний огляд сучасних методів розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкостінних конструкцій. Ґрунтовний аналіз показав, що аналітичні підходи забезпечують високу точність, але їх застосування обмежене через складність обчислень для реальних конструкцій. Метод скінченних елементів залишається найбільш поширеним чисельним методом, хоча має труднощі з точністю і збіжністю розв'язків. Тому розвиток аналітико-чисельних методів і отримання з їх допомогою розв'язків крайових задач теорії пружності не лише для окремих елементів, а й для систем, з яких вони складаються, є вагомим внеском у розвиток науки в цілому та якісним практичним способом верифікації розв'язків, отриманих чисельними методами, реалізованими в програмних продуктах.

3. Побудовано нові математичні моделі окремих конструктивних елементів тонкостінних систем, що являють собою несні конструкції літальних апаратів, кораблів, будівельних споруд тощо. Такими елементами зокрема є прямокутні пластини, а також стрингерні панелі, утворені з пластин або з пластин та балок. Ці моделі точно описують поведінку зазначених елементів в умовах складної механічної взаємодії. Вони враховують неоднорідні крайові умови, а

також рівень декомпозиції конструкції, дозволяючи гнучко адаптуватися до конкретної геометрії об'єкта.

4. У дисертації обґрунтовано вибір методів, що поєднують переваги аналітичних і числових підходів і забезпечують цілісність моделі всієї конструкції через виконання контактних і граничних умов. Це метод сполучення конструктивних елементів, що дозволяє сформулювати умови, які мають виконувати елементи системи при їх сполученні, та метод ідентифікації крайових умов С. А. Халілова у вигляді методу редукції, що дає можливість побудувати аналітико-чисельний розв'язок повністю неоднорідної крайової задачі з наперед заданими вимогами до точності результатів. Використання цих методів дозволило ефективно об'єднувати аналітико-чисельні розв'язки окремих задач у єдиний розрахунок складної конструкції. У роботі здійснено спроби розвитку зазначених методів і застосування їх до аналізу напружено-деформованого стану тонкостінної просторової системи.

5. У роботі розроблено декомпозиційний підхід до розв'язання задач визначення НДС складних просторових тонкостінних конструкцій, який полягає у поданні розв'язку повністю неоднорідної крайової задачі у вигляді комбінації розв'язків напіводнорідних задач для окремих елементів різного рівня декомпозиції за допомогою аналітичних методів, таких як МСКЕ і МКУ, що забезпечує цілісність моделі всієї конструкції через виконання контактних і граничних умов. Уперше розвинуто метод МКУ С. А. Халілова у формі методу редукції для обчислення напружено-деформованого стану конструкції.

6. Розроблено системний підхід до розрахунку напружено-деформованого стану стрингерних панелей, утворених комбінацією прямокутних пластин та пластин, підкріплених балками. Запропоновано використання універсальних (базисних) координатних функцій, які враховують конструктивну неоднорідність і забезпечують автоматичне виконання крайових умов. Системний підхід реалізовано на прикладі трьох конструкцій, де розглянуто проблему сполучення класичних тонких прямокутних пластин. Побудовано системи базисних функцій, які виконують як головні, так і природні граничні умови, що

підвищує швидкість збіжності наближених розв'язків. У межах системного підходу отримано аналітичні розв'язки задач, які раніше не існували, що становить наукову новизну.

7. Проведено чисельні експерименти для верифікації запропонованих моделей і методів. Аналіз результатів показав високу точність, стабільність та збіжність аналітико-чисельних розв'язків, зокрема в порівнянні з традиційними чисельними підходами, як-от МСЕ.

8. Розв'язано проблему аналітико-чисельного визначення напружено-деформованого стану окремих елементів конструкції шляхом створення нових і вдосконалення наявних методів аналізу крайових задач. Основну увагу приділено розв'язанню базової напівводнорідної крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутнику з однорідними головними крайовими умовами. Запропоновано кілька методів її розв'язання, зокрема в подвійних і одинарних (типу Нав'є, М. Леві) рядах, за системами ортонормованих функцій, а також через власні функції бігармонічного оператора. Проведено оцінку апроксимативних властивостей названих систем координатних функцій шляхом обчислення їх квазіортогональності та чисел обумовленості матриць Грама, а також виконання апостеріорного аналізу швидкості їх збіжності та точності результатів при розв'язанні сформульованої крайової задачі. Показано, що найкращими з точки зору апроксимативних властивостей та обчислювальної ефективності для побудови аналітико-чисельних розв'язків є функції С. А. Халілова та В. Б. Минтюка. Запропоновані підходи були застосовані для розв'язання задач з іншими крайовими умовами.

9. Побудовано систему ортонормованих функцій в енергетичному просторі бігармонічного оператора, яка забезпечує стійкість, збіжність і високу точність наближених розв'язків. Уперше обґрунтовано доцільність використання функцій С. А. Халілова та В. Б. Минтюка для задач пружності пластин з урахуванням особливих крайових умов. Ортонормованість зазначених функцій та їх квазіортогональність в енергетичному просторі оператора крайової задачі уможливили побудову наближених аналітичних розв'язків типу Нав'є

та типу М. Леві. При цьому вдалося вирішити проблему втрати стійкості ітераційної процедури ортогоналізації Грама-Соніна-Шмідта. Використання отриманого ортонормованого базису дозволило при реалізації методів Рітца або Бубнова-Гальоркіна звести повну матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь до діагональної. Це ще раз підкреслило обчислювальні переваги цієї системи координатних функцій.

10. Розроблено регулярну процедуру побудови універсальних функцій, що автоматично виконують довільні неоднорідні крайові умови на межі конструктивного елемента. Це дозволило уникнути ускладненого врахування крайових умов у процесі моделювання та підвищити гнучкість аналітико-чисельного підходу. Імплементация цього підходу була здійснена в дослідженні НДС трьох різних розрахункових моделей панелі: три пластини, дві пластини і балка, одна пластина і балка. Побудовані розв'язки для цих моделей підтвердили перевагу аналітичних методів над чисельними з точки зору точності отриманих результатів та швидкості їх збіжності. При цьому було розв'язано проблему узгодження функцій мембранних переміщень і функції прогину, що мають різний клас гладкості, двома способами: перший передбачає визначення функції мембранних переміщень за аналогією з функцією прогину із фіксацією лише переміщень на границі, другий – підвищення ступеня апроксимуючого полінома мембранних переміщень до рівня функції прогину з подальшим перерахунком коефіцієнтів. Запропоновані аналітичні розв'язки для тонкостінної просторової системи є унікальними та новаторськими.

11. Проведено оцінку точності та ефективності розроблених методів на прикладі задач вигину пластин і панелей. Показано, що запропоновані підходи перевершують традиційні чисельні методи щодо швидкості збіжності й точності результатів. Таким чином, продемонстровано перспективність їх впровадження в інженерну практику. Розвинутий у роботі метод МІКУ у формі МР дозволив побудувати високоточні, стійкі, швидкозбіжні аналітико-чисельні розв'язки задач деформування пластинчастих конструкцій. У дисертації також показано розширені можливості МІКУ, які пов'язані з аналізом напружено-

деформованого стану тонкостінної просторової конструкції. На прикладі розв'язання задачі про вигин прямокутної пластини з неоднорідними крайовими умовами показано, що цей метод можна синтезувати з МСЕ. У перспективі синтез цих методів може стати основою створення спеціальних інженерних програм для обчислення напружено-деформованого стану багатострингєрних панелей.

Таким чином, результати дисертаційного дослідження водночас мають наукову цінність і значний потенціал для подальшого використання в проектуванні та оптимізації тонкостінних конструкцій. Перспективи подальших досліджень включають розширення застосування розроблених методів до розв'язання задач динаміки, а також удосконалення базисних систем функцій для точного відтворення як головних, так і природних крайових умов. Додатково, інтеграція МІКУ і МСКЕ у спеціалізоване програмне забезпечення сприятиме їх ефективному практичному застосуванню. Розроблені підходи також можуть бути адаптовані до аналізу різних моделей матеріалів, а також до розв'язання задач стійкості, вільних коливань і складних видів деформацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Задача Діріхле для трансверсально-ізотропної панелі / С. А. Халілов В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2017. № 3 (138). С. 50–63.
2. Задача Діріхле для трансверсально-ізотропної прямокутної пластини / С. А. Халілов В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2017. № 2 (137). С. 4–21.
3. Аналітико-чисельне розв'язання основної крайової задачі про спектр у прямокутнику для складеного оператора з бігармонічним у головній частині / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2015. № 1 (118). С. 60–67.
4. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження аналітико-числового вирішення задачі про вигин жорстко защемленої прямокутної пластини // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології: зб. наук. пр. / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Харків, 2011. Вип. 49. С. 81–94.
5. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Побудова та дослідження наближеного аналітичного розв'язання бігармонічної проблеми у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2013. № 2 (99). С. 40–49.
6. Нові математичні методи дослідження полів, станів і процесів механіки суцільних середовищ для розвитку сучасних аерокосмічних технологій. Т. 2. Метод ідентифікації крайових умов : звіт про НДР (заключ.) : Г405-16/2009 / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т»; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Кривцов В., Минтюк В., Кравченко С., Ткаченко Д. Харків, 2011. 188 с. ДР 0109U001394. Інв. № 0212U000240.

7. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (проміжн.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д. Харків, 2012. 96 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0213U001806.

8. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (проміжн.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О., Халілов С.; викон. : Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д., Копичко В. Харків, 2013. 140 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0214U006196.

9. Методи аналізу лінійних та нелінійних математичних моделей тонкостінної просторової системи : звіт про НДР (заключ.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. Б., Халілов С. А. ; викон.: Ткаченко Д. А., Бондарева Н. В., Колодійчик Д. С. Харків, 2019. 96 с. № ДР 0117U002502. Інв. № 0220U101091.

10. Халілов С. А., Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. Наближене аналітичне розв'язання бігармонічної проблеми в прямокутнику при однорідних головних крайових умовах на двох протилежних сторонах і довільних – на двох інших // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2013. № 5 (102). С. 40–49.

11. Ткаченко Д. А. Ортонормований в енергетичному просторі бігармонічного оператора базис у прямокутнику при однорідних головних крайових умовах по границі // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 3 (110). С. 41–51.

12. Власний спектр бігармонічного оператора у прямокутнику при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко,

В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 5 (112). С. 70–78.

13. Узагальнена задача на власні значення в прямокутнику з бігармонічним оператором при головних крайових умовах / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2014. № 6 (113). С. 36–47.

14. Нові методи дослідження лінійно і нелінійно деформованих тіл з композиційних матеріалів. Т. 2. Математичні моделі, методи їх аналізу та чисельна реалізація нелінійного деформування тонкостінних просторових систем : звіт про НДР (заключ.) : Г405-16/2012-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; кер. Ніколаєв О.; викон. : Халілов С., Минтюк В., Кривцов В., Ткаченко Д., Копичко В. Харків, 2014. 155 с. № ДР 0112U002135. Інв. № 0215U006163.

15. Функція Гріна основної крайової задачі для бігармонічного оператора у прямокутнику / С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2015. № 6 (123). С. 12–22.

16. Методи побудови аналітичних і аналітико-числових вирішень крайових задач для відкритих та замкнутих гладких та ребристих оболонок і пластин при неоднорідних головних граничних умовах : звіт про НДР (проміж.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. ; під заг. ред. Халілова С. ; викон.: Ткаченко Д., Копичко В., Трофимова І., Бондарєва Н. Харків, 2017. 219 с. № ДР 0117U002502. Інв. № 0218U003532.

17. Теоретичні та конструктивні дослідження лінійних та нелінійних моделей тонкостінних конструктивних елементів : звіт про НДР (проміж.) : Д104-14/2017-Ф / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; керівник Минтюк В. ; викон.: Халілов С., Бондарєва Н., Ткаченко Д., Колодійчик Д., Гончаренко А. Харків, 2018. 126 с. № ДР 0117U002502. Інв. № 0219U003578.

18. Синтез методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів. Прямокутні пластини / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2017. № 4 (139). С. 4–26.
19. Числове дослідження базисних систем при розв'язуванні аналітико-числовими методами крайових задач на відрізьку / С. А. Халілов, Д. А. Ткаченко, Н. В. Бондарева, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2019. № 6 (158). С. 20–32. DOI: [10.32620/aktt.2019.6.04](https://doi.org/10.32620/aktt.2019.6.04).
20. Spectral Methods Application in Problems of the Thin-Walled Structures Deformation / D. Tkachenko, Y. Tsegelnyk, S. Myntiuk, V. Myntiuk // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2022. № 8 (2). P. 641–654. DOI: [10.22055/JACM.2021.38346.3207](https://doi.org/10.22055/JACM.2021.38346.3207).
21. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1970. 512 с.
22. Михлин С. Численная реализация вариационных методов. М. : Наука, 1966. 432 с.
23. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1988. 333 с.
24. Variational methods in elasticity and plasticity / by Washizu Kyūichirō. 1921. New York : Pergamon Press 1974. 412 p.
25. Oden J. Finite element applications in mathematical physics // *The Mathematics of Finite Elements and Applications : proc. of the Brunel Univ. conf. of the inst. of mathematics and its applications*, Apr. 1972. [S. l.], 1973. С. 239–282. DOI: [10.1016/B978-0-12-747250-8.50019-9](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-747250-8.50019-9).
26. Ciarlet P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam : North Holland, 1978. 529 p.
27. Aubin J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. New York : Wiley-Interscience, 1972. 360 p. DOI: [10.1137/1016069](https://doi.org/10.1137/1016069).
28. Boyd J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. ed. 2. New York : Dover Publications, 2000. 609 p.

29. Shen J., Tang T., Wang L.-L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Berlin : Springer-Verlag, 2011. 481 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71041-7.
30. Babuska I., Szabo B., Katz I. The p-Version of the Finite Element Method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1981. Vol. 18, № 3. P. 515–545.
31. Guo B., Babuska I. The h-p Version of the Finite Element Method. Pt. 1. The Basic Approximation Results // Computational Mechanics. 1986. Vol. 1, № 1. P. 21–41. DOI: 10.1007/BF00298636.
32. Дибир А. Г. Рациональное проектирование плоских оребренных тонкостенных конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов на основе решения контактных задач : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.06 / Харьков. авиац. ин-т им. Н. Е. Жуковского. Харьков, 1985. 240 с.
33. Минтюк В. Б. Устойчивость подкрепленной в области и на криволинейной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2004. 147 с.
34. Кравченко С. Г. Устойчивость пространственных тонкостенных пластинчатых систем : дис. канд. техн. наук : 01.02.04 / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2010. 160 с.
35. Patera A. T. A spectral element method for fluid dynamics – Laminar flow in a channel expansion // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 54, № 3. P. 468–488. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90128-1.
36. Montigny-Rannou F., Morchoisne Y. A spectral method with staggered grid for incompressible Navier-Stokes equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1987. Vol. 7, № 2. P. 175–189. DOI: 10.1002/fld.1650070206.
37. Streett C. L. Spectral methods and their implementation to solution of aerodynamic and fluid mechanic problems // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1987. Vol. 7, № 11. P. 1159–1189. DOI: 10.1002/fld.1650071103.

38. Kopriva D. A. Domain decomposition with both spectral and finite difference methods for the accurate computation of flows with shocks // *Applied Numerical Mathematics*. 1989. Vol. 6, № 1/2. P. 141–151. DOI: 10.1016/0168-9274(89)90059-7.
39. Munoz R. Theoretical analysis of some spectral multigrid methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1990. Vol. 80, № 1–3. P. 287–294. DOI: 10.1016/0045-7825(90)90032-H.
40. Babuska I., Suri M. The p- and h-p Versions of the Finite Element Method, an Overview // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1990. Vol. 80, № 1/3. P. 5–26. DOI: 10.1016/0045-7825(90)90011-A.
41. Babuska I., Li L. H-p-Version of the Finite-Element Method in the Plate Modelling Problem // *Communications in Applied Numerical Methods*. 2005. Vol. 8, № 1. P. 17–26. DOI: 10.1002/cnm.1630080104.
42. Carlenzoli C., Gervasio P. Effective Numerical Algorithms for the Solution of Algebraic Systems Arising in Spectral Methods // *Applied Numerical Mathematics*. 1992. Vol. 10, № 2. P. 87–113. DOI:10.1016/0168-9274(92)90033-A.
43. Jensen S., Suri M. On the L2 Error for the p-Version of the Finite Element Method Over Polygonal Domains // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1992. Vol. 97, № 2. P. 233–243. DOI: 10.1016/0045-7825(92)90165-G.
44. Ahmed N. U., Basu P. K. Higher Order Modeling of Plates by P-Version of Finite Element Method // *Journal of Engineering Mechanics*. 1993. Vol. 119, № 6. P. 1228–1242. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:6(1228).
45. Karageorghis A. Conforming Chebyshev Spectral Methods for Poisson Problems in Rectangular Domains // *Journal of Scientific Computing*. 1993. Vol. 8, № 2. P. 123–133. DOI: 10.1007/BF01060868.
46. Pavarino L. F. Additive Schwarz Methods for the P-Version Finite Element Method // *Numerische Mathematik*. 1993. Vol. 66, № 1. P. 493–515. DOI: 10.1007/BF01385709.

47. Fish J., Guttal R. Recent Advances in the P-Version of the Finite Element Method for Shells // *Computing Systems in Engineering*. 1995. Vol. 6, № 3. P. 195–211. DOI: 10.1016/0956-0521(95)00018-U.
48. Kumar K. N. K., Eswaran V. A. Fully Spectral Solution Method for Parabolic Equations // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1995. Vol. 11, № 9. P. 765–774. DOI: 10.1002/cnm.1640110907.
49. Pavarino L. F., Widlund O. B. Iterative Substructuring Methods for Spectral Elements: Problems in Three Dimensions Based on Numerical Quadrature // *Computers and Mathematics with Applications*. 1997. Vol. 33, № 1/2. P. 193–209. DOI: 10.1016/S0898-1221(96)00230-1.
50. Galerkin and Discontinuous Galerkin Spectral/HP Methods / T. C. Warburton [et al.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 175, № 3/4. P. 343–359. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00360-0.
51. Kurtz J., Xenophontos C. On the effects of using curved elements in the approximation of the Reissner-Mindlin plate by the p version of the finite element method // *Applied Numerical Mathematics*. 2003. Vol. 46, № 2. P. 231–246. DOI: 10.1016/S0168-9274(03)00032-1.
52. Houmat A. Free vibration analysis of membranes using the h-p version of the finite element method // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 282, № 1/2. P. 401–410. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.02.042.
53. Grandclément P. Introduction to spectral methods // *EAS Publications Series*. 2006. Vol. 21 : *Stellar Fluid Dynamics and Numerical Simulations: From the Sun to Neutron Stars*. P. 153–180. DOI: 10.1051/eas:2006112.
54. Hill A. A., Straughan B. A Legendre spectral element method for eigenvalues in hydrodynamic stability // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006. Vol. 193, № 1. P. 363–381. DOI: 10.1016/j.cam.2005.06.011.
55. Houmat A. Three-dimensional free vibration analysis of plates using the h-p version of the finite element method // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 290, № 35. P. 690–704. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.04.024.

56. Houmat A. Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite-element method // *Thin-Walled Structures*. 2006. Vol. 44, № 9. P. 943–951. DOI: 10.1016/j.tws.2006.08.022.
57. Mai-Duy N., Tanner R. I. A spectral collocation method based on integrated Chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. Vol. 201, № 1. P. 30–47. DOI: 10.1016/j.cam.2006.01.046.
58. Bittencourt M. L., Vazquez T. G. A nodal spectral stiffness matrix for the finite-element method // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2008. Vol. 73, № 6. P. 837–849. DOI: 10.1093/imamat/hxn031.
59. Hadjoui A., Mebarek H., Bouiadjra B. B. Free vibration analysis for cracked triangular orthotropic plates using h-p finite element method // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2011. Vol. 12, № 2. P. 59–74. DOI: 10.1080/15502287.2010.548003.
60. Zheng X. D., Dong S. An eigen-based high-order expansion basis for structured spectral elements // *Journal of Computational Physics*. 2011. Vol. 230, № 23. P. 8573–8602. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.08.009.
61. Sari M. S., Butcher E. A. Free vibration analysis of rectangular and annular Mindlin plates with undamaged and damaged boundaries by the spectral collocation method // *Journal of Vibration and Control*. 2012. Vol. 18, № 11. P. 1722–1736. DOI: 10.1177/1077546311422242.
62. Ai Q., Li H., Wang Z. Diagonalized Legendre spectral methods using Sobolev orthogonal polynomials for elliptic boundary value problems // *Applied Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 127. P. 196–210. DOI: 10.1016/j.apnum.2018.01.003.
63. Wang T., Sun T. Galerkin–Legendre spectral method for Neumann boundary value problems in three dimensions // *International Journal of Computer Mathematics*. 2019. Vol. 96, № 7. P. 1335–1356. DOI: 10.1080/00207160.2018.1486398.

64. Li S., Li Q., Wang Z. Sobolev orthogonal Legendre rational spectral methods for problems on the half line // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, № 1. P. 255–268. DOI: 10.1002/mma.5865.
65. Oh S. An efficient spectral method to solve multi-dimensional linear partial different equations using Chebyshev polynomials // *Mathematics*. 2019. Vol. 7, № 1. P. 90. DOI: 10.3390/math7010090.
66. Šolín P., Vejchodský T. Higher-order finite elements based on generalized eigenfunctions of the Laplacian // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008. Vol. 73, № 10. P. 1374–1394. DOI: 10.1002/nme.2129.
67. Babuška I., Griebel M., Pitkäranta J. The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989. Vol. 28, № 8. P. 1891–1908. DOI: 10.1002/nme.1620280813.
68. Auteri F., Quartapelle L. Galerkin-Legendre spectral method for the 3D Helmholtz equation // *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 161, № 2. P. 454–483. DOI: 10.1006/jcph.2000.6504.
69. Katili I., Aristio R. Isogeometric Galerkin in rectangular plate bending problem based on UI approach // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2018. Vol. 67. P. 92–107. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2017.08.013.
70. Kim J., Žur K. K., Reddy J. N. Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates // *Composite Structures*. 2018. Vol. 209. P. 879–888. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.11.023.
71. Xu Y., Wu Z. Exact solutions for rectangular anisotropic plates with four clamped edges // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. Vol. 29, № 12. P. 1756–1768. DOI: 10.1080/15376494.2020.1838007.
72. Kim K., Kim B.-H., Choi T.-M. Free vibration analysis of rectangular plate with arbitrary edge constraints using characteristic orthogonal polynomials in assumed mode method // *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2012. Vol. 4, № 3. P. 267–280. DOI: 10.2478/IJNAOE-2013-0095.

73. Turimov D., Khaldjigitov A., Djumayozov U. Formulation and Numerical Solution of Plane Problems of the Theory of Elasticity in Strains // *Mathematics*. 2024. Vol. 12, № 1. P. 71. DOI: 10.3390/math12010071.
74. Katz I. N., Wang D. W. P-version of the finite element method for problems requiring C^1 -continuity // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1985. Vol. 22, № 6. P. 1082–1106. DOI: 10.1137/0722065.
75. Lindsay K. A., Ogden R. R. A practical implementation of spectral methods resistant to the generation of spurious eigenvalues // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1992. Vol. 15, № 11. P. 1277–1294. DOI: 10.1002/fld.1650151104.
76. Bardell N. S., Dunsdon J. M., Langley R. S. Free vibration analysis of thin rectangular laminated plate assemblies using the h-p version of the finite element method // *Composite Structures*. 1995. Vol. 32, № 1/4. P. 237–246. DOI: 10.1016/0263-8223(95)00081-X.
77. Lee U., Jeon D. Identification of non-ideal structural boundary conditions by using spectral element method // 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit : collection of technical papers. Pt 2. St. Louis, USA, 12–15 Apr. 1999. P. 978–987. DOI: 10.2514/6.1999-1311.
78. Bialecki B., Karageorghis A. A Legendre spectral Galerkin method for the biharmonic Dirichlet problem // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2001. Vol. 22, № 5. P. 1549–1569. DOI: 10.1137/S1064827598342407.
79. Muradova A. D., Stavroulakis G. E. Buckling and postbuckling analysis of rectangular plates resting on elastic foundations with the use of the spectral method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2012. Vol. 205–208, № 1. P. 213–220. DOI: 10.1016/j.cma.2011.02.013.
80. Wang G., Unal A. Free vibration of stepped thickness rectangular plates using spectral finite element method // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332, № 18. P. 4324–4338. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.03.008.

81. Khan A., Husain A. Exponentially accurate spectral element method for fourth order elliptic problems // *Journal of Scientific Computing*. 2017. Vol. 71, № 1. P. 303–328. DOI: 10.1007/s10915-016-0300-z.
82. Zhuang Q., Chen L. Legendre–Galerkin spectral-element method for the biharmonic equations and its applications // *Computers and Mathematics with Applications*. 2017. Vol. 74, № 12. P. 2958–2968. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.07.039.
83. Sze K. Y., Hu Y. C. Assumed natural strain and stabilized quadrilateral Lobatto spectral elements for C0 plate/shell analysis // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 111, № 5. P. 403–446. DOI: 10.1002/nme.5467.
84. Liu X., Banerjee J. R. Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral-dynamic stiffness method // *Computers and Structures*. 2016. Vol. 164, № 1. P. 108–126. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.11.005.
85. Kravchenko, S. G., Myntiuk V. Nonlinear Postbuckling Behavior of a Simply Supported, Uniformly Compressed Rectangular Plate // *International Scientific and Technical Conference on Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. ICTM'2019 : proceedings, 28–30 Nov. 2019, Kharkiv. Cham, 2020. P. 35–44. (Advances in Intelligent Systems and Computing. AISC ; vol. 1113). DOI: 10.1007/978-3-030-37618-5_4.*
86. Myntiuk V. B. Postbuckling of a uniformly compressed simply supported plate with free in-plane translating edges // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2020. Vol. 14, № 1. P. 176–185. DOI: 10.1134/S1990478920010160.
87. Khalilov S. A., Myntiuk V. B. Postbuckling analysis of flexible elastic frames // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2018. Vol. 12, № 1. P. 28–39. DOI: 10.1134/S1990478918010040.
88. Халилов С. А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях // *Вопросы*

проектирования самолетных конструкций : темат. сб. науч. тр. / Харьков. авиац. ин-т им. Н. Е. Жуковского. Харьков, 1982. Т. 3. С. 120–127.

89. El-Sayad M. A., Farag A. M. Semi-Analytical Solution Based on Strip Method for Buckling and Vibration of Isotropic Plate [Electronic resource] // Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013. P. 1–10. DOI: 10.1155/2013/796274.

90. Zenkour A. M. Bending of thin rectangular plates with variable-thickness in a hygrothermal environment // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 123. P. 333–340. DOI: 10.1016/j.tws.2017.11.038.

91. New Shape Function for the Bending Analysis of Functionally Graded Plate [Electronic resource] / D. Čukanović [et al.]. Materials. 2018. № 11 (12). DOI: 10.3390/ma11122381.

92. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I. S. Solving the Biharmonic Plate Bending Problem by the Ritz Method Using Explicit Formulas for Splines of Degree 5 // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. P. 944–947. DOI: 10.1007/s10559-018-0097-x.

93. Two-dimensional generalized finite integral transform method for new analytic bending solutions of orthotropic rectangular thin foundation plates / J. Zhang [et al.] // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 92. P. 8–14. DOI: 10.1016/j.aml.2018.12.019.

94. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions [Electronic resource] // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 452, P. 1–12. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.03.024.

95. He Y., An C., Su J. Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2020. Vol. 234, № 6. P. 1220–1230. DOI: 10.1177/0954406219889082.

96. Wu Y., Xing Y., Liu B. C1 conforming quadrilateral finite elements with complete second-order derivatives on vertices and its application to Kirchhoff

plates // Science China Technological Sciences. 2020. Vol. 63. P. 1066–1084. DOI: 10.1007/s11431-019-1448-6.

97. Delyavskyy M., Rosiński K. The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates // Applied Sciences. 2020. Vol. 10, № 17. P. 1–36. DOI: 10.3390/app10175931.

98. A novel C1 continuity finite element based on Mindlin theory for doubly-curved laminated composite shells / T. Liu, Z.-M. Li, P. Qiao, S. Jin // Thin-Walled Structures. 2021. Vol. 167. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108155.

99. Danylenko K., Orynyak I. Method of matched sections in application to thin-walled and Mindlin rectangular plates // Mechanics and Advanced Technologies. 2023. Vol. 7, № 2 (98). P. 205–215. DOI: 10.20535/2521-1943.2023.7.2.277341.

100. Kumar K. Free Vibration Analysis of Orthotropic Rectangular Plates Using the Ritz Numerical Method // Advanced Engineering Letters. 2023. Vol. 2, № 4. P. 143–150. DOI: 10.46793/adeletters.2023.2.4.2.

101. Zhang K., Pan J., Lin T. R. Vibration of rectangular plates stiffened by orthogonal beams // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 513. DOI: 10.1016/j.jsv.2021.116424.

102. Galuppi L., Zaccchi E. Analytical solutions for plates connected by edge beams, under various loading conditions: An application for insulating glass units // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 188. DOI: 10.1016/j.tws.2023.110877.

103. An Analytical Solution for the Bending of Anisotropic Rectangular Thin Plates with Elastic Rotation Supports / B. Leng [et all.] // Buildings. 2024. Vol. 14, № 3. DOI: 10.3390/buildings14030756.

104. The solution of the plane problem of the theory of elasticity by the boundary elements method / M. Surianinov, Y. Krutii, A. Kovrov, V. Osadchiy // The 1st JESSD Symposium: International Symposium of Earth, Energy, Environmental Science and Sustainable Development. 2020. Vol. 211: E3S Web Conf. DOI: 10.1051/e3sconf/202021102021.

105. Breslavsky I., Avramov K. Effect of boundary condition nonlinearities on free large-amplitude vibrations of rectangular plates // *Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol 74. P. 615–622. DOI: 10.1007/s11071-013-0993-6.
106. Avramov K., Strel'nikova E., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical non-linearities in incompressible flow // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 70. P. 1335–1354. DOI: 10.1007/s11071-013-0993-6.
107. Rodichev Yu. M., Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. Stress-Strain Assessment for Laminated Aircraft Cockpit Windows at Static and Dynamic Loads // *Strength of Materials*. 2018. Vol. 50, № 6. P. 868–873. DOI: 10.1007/s11223-019-00033-4.
108. Сметанкіна Н., Сметанкін В. Коливання шаруватих оболонок складної форми при ударному навантаженні // *Вібрації в техніці та технологіях*. 2012. № 1 (65). P. 84–88.
109. Ugrimov S., Shupikov A. Layered orthotropic plates. Generalized theory // *Composite Structures*. 2015. Vol. 129. P. 224–235. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.004.
110. Gunda J. B., Large Amplitude Free Vibration Analysis of Thin Rectangular Plates: Simple Closed-form Solutions // *Nonlinear Engineering*. 2013. Vol. 2, № 1/2. P. 11–20. DOI: 10.1515/nleng-2012-0012.
111. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. New York : American Mathematical Society, 1975. 432 p.
112. Самарский А. А., Лазарев Р. Д., Макаров В. Л., Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщёнными решениями. М. : Высш. шк., 1987. 296 с.
113. Теория и численная реализация метода идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости и колебаний : отчет о НИР (заключ.) : Г403-33/06 / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т» ; рук. Гайдачук В., Халилов С. Харьков, 2008. 206 с. № ГР 0106U001061. Инв. № 0209U005481.

114. Rektorys K. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering, Prague : Springer Dordrecht, 2012. 571 p. DOI: 10.1007/978-94-011-6450-42012.
115. Бондаренко Б. Полигармонические полиномы. Ташкент : Фан, 1968. 171 с.
116. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники : отчет о НИР (заключ.) : Г403-21/03 / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т» ; рук. Гайдачук В. Харьков, 2005. 171 с. № ГР 0103U005070. Инв. № 0206U02451.
117. Халилов С. А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области // Авиационно-космическая техника и технология. 2004. № 2 (10). С. 33–38.
118. Халилов С., Кравченко С. Построение приближенного аналитического решения плоской задачи теории упругости в трапециевидной области // Авиационно-космическая техника и технология. 2009. № 1 (58). С. 16–23.
119. Пальмов В. Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т 28, № 6. С. 1117–1120.
120. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford : Pergamon Press, 1986. 383 p.
121. Савин Г. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев : Изд-во КГУ, 1965. 162 p.
122. Green A. E., Naghdi P. M. The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory // International Journal of Solids and Structures. 1968. Vol. 4, № 6. P. 585–592.
123. Anderson W. B., Lakes R. S. Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed cell polymethacrylimide foam // Journal of Materials Science. 1994. Vol. 29, № 24. P. 6413–6419.

124. Кривцов В. С., Халилов С. А., Минтюк В. Б. Исследование устойчивости силового кессона крыла методом идентификации краевых условий // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2005. № 7 (23). С. 151–161.
125. Кривцов В. С., Халилов С. А., Минтюк В. Б. Устойчивость силового кессона крыла. Численный анализ на основе метода идентификации краевых условий // *Авиационно-космическая техника и технологии*. 2007. № 3 (39). С. 5–26,
126. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л. : СУДпромгиз, 1962. 431 с.
127. Гольденвейзер А. Теория тонких упругих оболочек. М. : Наука, 1976. 512 с.
128. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480 с.
129. Солонников В. А., Уральцева В. Н. Пространство Соболева // *Избранные главы анализа и высшей алгебры*. Л. : Изд-во. Ленинград. ун-та, 1981. С. 189–200.
130. Колмогоров А., Фомин С. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2009. 572 с.
131. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948, 259 р..
132. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables Applied Mathematics Series. New York : Dover Publications, 1983. 275 p.
133. Минтюк В. Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2007. № 5 (41). С. 32–36.
134. Analytical methods for determining the static and dynamic behavior of thin-walled structures during machining / S. Plankovsky [et al.] // *Mathematical Modeling and Simulation of Systems (MODS'2020) : Selected Papers of 15th Intern.*

sci.-pract. conf., Chernihiv, Ukraine, June 29 – July 1 2020. Cham, 2021. P. 82–91. (Advances in Intelligent Systems and Computing ; Vol. 1265). DOI: 10.1007/978-3-030-58124-4_8.

135. An analytical solution for elastic buckling analysis of stiffened panel subjected to pure bending / W. Zhou, Y. Li, Z. Shi, J. Lin // International Journal of Mechanical Science. 2019. Vol. 161/162. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105024.

136. Самуль В. Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие для студентов вузов. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.

137. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York : McGraw-Hill, 1959. 580 p.

138. Соболев С. Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.

139. Халилов С. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. / Харьков. авиац. ин-т. Харьков, 1978. № 5. С. 46–56.

140. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни : 2-е изд., перераб. и доп. М. : Гос. изд-во физико-математ. лит-ры, 1959. 568 с.

141. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений : учеб. пособие. М. : Наука, 1971. 248 с.

142. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с.

143. Даревский В., Шаринов И. Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластины // Успехи механики деформируемых сред : сб. тр. М. : Наука, 1975. С. 183–194.

144. Cheney E., Kincaid D. Numerical Mathematics and Computing. Boston : Cengage Learning, 2007. 784 p.

145. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М. : Мир, 1970. 328 с.

146. Lay D. C. Linear algebra and its applications. Boston : Pearson, 2016. 576 p.
147. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. М. : Машиностроение, 1968. 568 с.
148. Минтюк В. Б. Способ построения базиса для решения краевых задач в обыкновенных производных вариационными методами // Открытые информационные интегрированные технологии : сб. науч. тр. / Нац. аерокосм. ун-т им. М. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». Харьков, 2007. Вып. 35. С. 143–148.
149. Халилов С. А., Минтюк В. Б. Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений // Авиационно-космическая техника и технология. 2011. № 1. С. 39–45.
150. Минтюк В. Б. Применение проекционных методов решения краевых задач в обыкновенных производных в разветвленных областях // Авиационно-космическая техника и технология. 2013. № 4 (101). С. 36–44.
151. Основна крайова задача загальної класичної теорії відкритої циліндричної оболонки. Розв'язання базової задачі / С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2015. № 3 (120). С. 24–32.
152. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev Spaces. ed. 2. Amsterdam : Academic press. 2003. 320 p.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

КОНЦЕПЦІЯ ПОБУДОВИ ОДНОВИМІРНИХ БАЗИСІВ

Призначення методу побудови базису ([113], р. 7) – це побудова аналітичних координатних функцій для подальшого їх використання у розв'язанні крайових задач варіаційними методами. Суть методу полягає в спеціальному доборі лінійної комбінації функцій деякої вихідної послідовності так, щоб виконати головні та, за можливості, природні граничні умови. Нижче показано процедуру побудови базису.

Розглянемо одновимірну область на відрізку $-1 \leq x \leq 1$, де крайова задача описується диференціальним оператором A порядку $2n$:

$$Au = f \quad (\text{A.1})$$

і набором крайових умов:

$$\begin{aligned} B_i^- u &= g_i^- \text{ при } x = -1; \\ B_i^+ u &= g_i^+ \text{ при } x = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Тут u – шукана функція, f – відома функція, $g_i^\mp$ – відомі числа, $B_i^\mp$ – диференціальні оператори порядку не вище $2n-1$.

Нехай властивості диференціальних операторів $A, B_i^\mp$ і функції f є такими, за яких крайова задача (A.1), (A.2) еквівалентна відшукуванню в енергетичному просторі H_A елемента, що доставляє стаціонарне значення функціоналу енергії [114], [22].

$$Fu \quad (\text{A.3})$$

з додатковими умовами (тут порядок операторів $B_i^\mp$ не перевищує $n-1$):

$$\begin{aligned} B_i^- u &= 0 \text{ при } x = -1; \\ B_i^+ u &= 0 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Тоді скінченновимірний підпростір, у якому шукають стаціонарну точку функціонала (A.3), мають утворювати функції, що виконують три вимоги [22]:

- а) функції повинні належати H_A ;
- б) функції повинні бути лінійно незалежними;
- в) система, утворена з цих функцій, повинна бути повною в H_A .

Зазначимо, що перша вимога, окрім необхідної гладкості, передбачає виконання кожною функцією додаткових умов (А.4). Вказати системи достатньо гладких, лінійно незалежних функцій нескладно. Основна проблема полягає в тому, щоб знайти серед них ті, які виконували б граничні умови, при цьому зберігаючи повноту.

Нехай є деяка послідовність функцій, що виконують усі вимоги, висунуті до базису, за винятком умов (А.4):

$$\phi_0, \phi_1, \dots \quad (\text{А.5})$$

Крім того, цих функцій має бути не менше k , де $k \leq 2n$ – кількість головних умов (А.4). Для скорочення запису візьмемо в якості цих функцій перші $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{(k-1)}$.

При визначенні наближеного розв'язку задачі (А.1), (А.2) у вигляді

$$u_M = \sum_{m=0}^M a_m \phi_m \quad (\text{А.6})$$

де $M \geq k$, a_m – невідомі константи, вимагатимемо виконання умов (А.4). Це призведе до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=0}^M a_m B_i^- \phi_m \Big|_{x=-1} = 0; \quad \sum_{m=0}^M a_m B_i^+ \phi_m \Big|_{x=1} = 0; \quad i \leq n. \quad (\text{А.7})$$

Вибравши в якості невідомих константи a_m при зазначених вище функціях, отримаємо зв'язок k констант з іншими константами суми (А.6). З урахуванням цієї залежності сума (А.6) перетворюється у вигляд

$$u_M = \sum_{m=k}^M a_m \psi_m, \quad (\text{А.8})$$

де ψ_m є лінійною комбінацією функцій ϕ_m :

$$\psi_m = \phi_m + \sum_{j=0}^{k-1} b_j \phi_j, \quad m = k, k+1, \dots, M \quad (\text{А.9})$$

тут b_j – константи, визначені в результаті розв'язання системи (А.7).

З урахуванням властивостей вихідної системи функцій (А.5) і проведеної процедури система функцій (А.9) задовольняє обов'язковим вимогам, що висуваються до базису.

ДОДАТОК Б

ЗАДАЧІ ВИГИНУ ПЛАСТИНИ

ПРИ РІЗНИХ ОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

Розглядаються задачі вигину прямокутної пластини [10], дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а на двох інших задані довільні крайові умови (рис. Б.1).

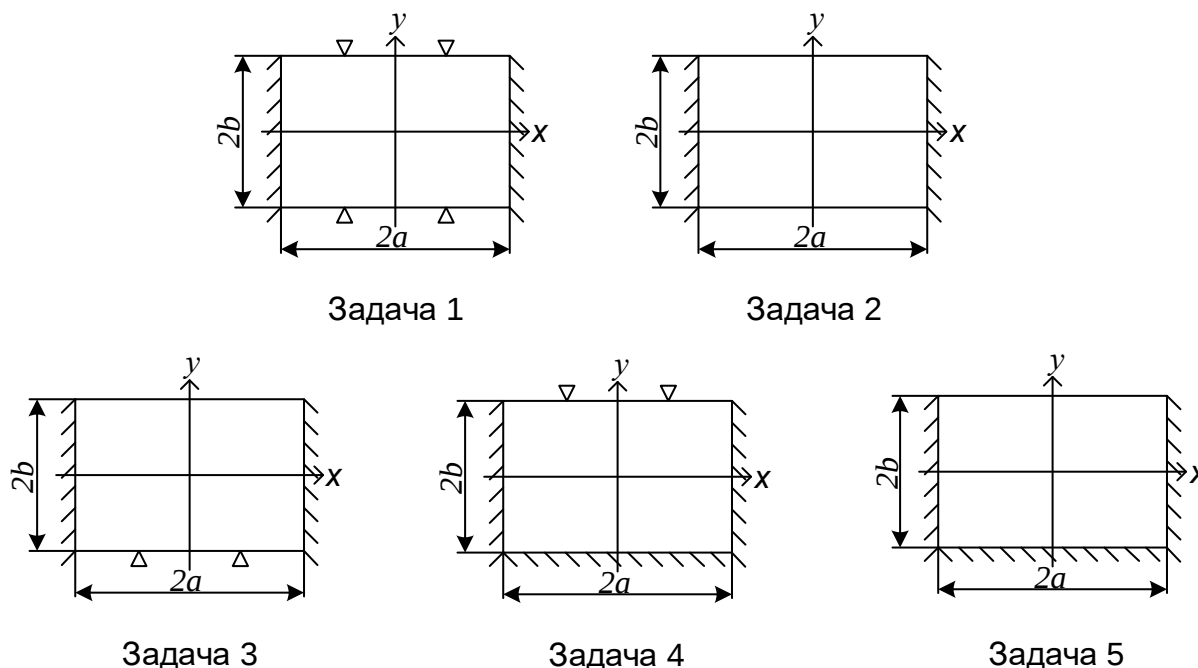


Рисунок Б.1 – Варіанти розглядуваних крайових задач

Подані крайові задачі описуються диференціальним рівнянням (3.1) і комбінацією крайових умов: (3.2), (3.29), (3.30). Розв'язки сформульованих задач відшукуються з використанням проекційного методу Бубнова-Галеркіна, описаного в пункті 3.2.3.

Б.1 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а дві інші – вільно обперті

Точний розв'язок задачі 1 (рис. Б.1) базується на відомому розв'язку Моріса Леві у вигляді одинарних тригонометричних рядів, якому приписано індекс "Т" і який детально описаний у роботі [137]. Для порівняння нашого розв'язку (табл. Б.1), який базується на одинарних рядах функцій (3.10) (індекс "І") [139],

ми використовуємо дані з роботи [137], результати розв'язання у подвійних рядах (індекс "II") за системою координатних функцій В. Б. Минтюка [133] (3.11) та

$$M_n^{(2)}(z) = P_{n+4}(z) + \frac{(n+3)(n+4)(2n+7)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} P_n(z) - \frac{2(2n+5)(n^2+5n+9)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} P_{n+2}(z),$$

$$M_n^{(2)}(\pm 1) = M_n^{(2)''}(\pm 1) = 0; \quad (\text{Б.1})$$

а також результати, отримані методом скінченних елементів (індекс "МСЕ").

Константи інтегрування C_{ki} у (3.25) визначаються з крайових умов

$$Y_i|_{y=\pm 1} = 0, \quad Y_i''|_{y=\pm 1} = 0, \quad (\text{Б.2})$$

що призводять до

$$C_{1,i} = 0, \quad C_{4,i} = 0,$$

$$C_{2,i} = -\frac{qa^4(\omega_i^2 - \theta_i^2) \cos \omega_i \operatorname{ch} \theta_i + 2\theta_i \omega_i \sin \omega_i \operatorname{sh} \theta_i}{2D \theta_i \omega_i (\operatorname{ch}^2 \theta_i - \sin^2 \omega_i)} \cdot \|H_i''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_i(x) dx,$$

$$C_{3,i} = -\frac{qa^4(\theta_i^2 - \omega_i^2) \sin \omega_i \operatorname{sh} \theta_i + 2\theta_i \omega_i \cos \omega_i \operatorname{ch} \theta_i}{2D \theta_i \omega_i (\operatorname{ch}^2 \theta_i - \sin^2 \omega_i)} \cdot \|H_i''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_i(x) dx. \quad (\text{Б.3})$$

Для отримання розв'язку за МСЕ було обрано прямокутний згинальний скінченний елемент із трьома ступенями свободи в кожному вузлі (прогин і два нормальних кути повороту).

З даних наведеної таблиці видно, що розв'язок у подвійних рядах за функціями (3.11), (Б.1) досить добре збігається з розв'язками за МСЕ і результатами роботи [137]. Можна навіть сказати, що розв'язок II уточнює розв'язок, наведений у роботі [137]. Розв'язок в одинарних рядах швидко сходиться, але є менш точним порівняно з іншими (за аналітичність розв'язку доводиться платити втраченою точністю). Зазначимо, що прогини (за $\lambda = 0,1$ – несприятливий випадок) за цим розв'язком обчислюються з похибкою близько 1%, а моменти – близько 6%.

Зі зростанням параметра λ ця похибка зменшується. Так, наприклад, за $\lambda = 1$ прогин обчислюється з похибкою, якою можна знехтувати (порядку сотих часток відсотка), а моменти обчислюються з похибкою порядку кількох відсотків (у найгіршому випадку).

Таблиця Б.1 – Компоненти напружено-деформованого стану прямокутної пластини з двома затиснутими протилежними сторонами і вільно опертими двома іншими

λ	Розв'язок	M×N, М	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_x(1,0)$	$\bar{M}_y(0,0)$
0,1	I	10	0,041221	0,155921	-0,396123	0,046776
	II	11×33	0,041667	0,166667	-0,333334	0,050000
	MCE	100×1000	0,041668	0,166697	-0,332918	0,050025
	T	-	0,041668	0,166652	-0,333283	0,049950
0,5	I	10	0,041455	0,158832	-0,398000	0,053642
	II	11×22	0,041773	0,168252	-0,337051	0,056687
	MCE	100×200	0,041775	0,168283	-0,336628	0,056713
	T	-	0,041773	0,168251	-0,337049	0,056685
1	I	10	0,030673	0,132775	-0,311538	0,097438
	II	11×11	0,030674	0,132980	-0,279351	0,097550
	MCE	100×100	0,030675	0,133013	-0,278927	0,097586
	T	-	0,030674	0,132979	-0,279349	0,097549
2	I	10	0,008475	0,051127	-0,125094	0,088269
	II	22×11	0,008445	0,047362	-0,119085	0,086868
	MCE	200×100	0,008445	0,047367	-0,118936	0,086862
	T	-	0,008445	0,047362	-0,119084	0,086868
3	I	10	0,002315	0,020232	-0,061871	0,051441
	II	33×11	0,002307	0,018723	-0,055382	0,050825
	MCE	300×100	0,002307	0,018724	-0,055313	0,050826
	T	-	0,002307	0,018723	-0,055381	0,050825

Що стосується розв'язку за MCE, зазначимо головне: для досягнення такої ж точності, як і за іншими розв'язками, необхідно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь дуже високого порядку (до ста тисяч). Але за такого густого розбиття області на прямокутні елементи вихідна модель жорсткої пластини перестає працювати.

Б.2 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а дві інші – вільні

Точний розв'язок задачі 2 (рис. Б.1) не знайдено, її не сформульовано в монографії [137]. Тому наведені нижче аналітико-чисельні та наближені аналітичні розв'язки можуть розширити результати цієї роботи.

Аналітико-чисельний розв'язок у подвійних рядах, отриманий варіаційним методом за системою координатних функцій (3.11) та

$$M_n^{(3)}(z) = P_n(z); \quad (\text{Б.4})$$

приймаємо за критеріальний, крім того, наводимо результати цієї задачі, отримані за МСЕ.

Оскільки умови при $x = \pm 1$ є головними, то при побудові аналітико-чисельного розв'язку в подвійних рядах ці умови виконуються точно. Натомість, умови на вільних краях $y = \pm 1$ є природними, і їх виконання не обов'язкове: вони виконуються в середньому ніби автоматично, виходячи з принципу мінімуму повної потенціальної енергії. Тому в напрямку осі ou функції (Б.4) підпорядковуються тільки умовам повноти в $L_2(-1; 1)$ і не обмежені жодними іншими додатковими умовами.

Однак у випадку побудови наближеного аналітичного розв'язку в одинарних рядах за системою функцій (3.10) зазначені крайові умови виконуються в розумінні найменших квадратів по границі. Ці умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda^2 Y_i'' - \nu Y_i \|H_i'\|^2|_{y=\pm 1} &= 0, \\ \lambda^2 Y_i''' - (2 - \nu) Y_i' \|H_i'\|^2|_{y=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Невідомі коефіцієнти C_{ki} у функціях $Y_i(y)$ у (3.25), (3.26) визначаємо з граничних умов (Б.5). Формули для них надто громіздкі, тому тут опускаються.

Нижче в табл. Б.2 подано результати розрахунків безрозмірних прогинів і згинальних моментів, обчислених для різних подовжень вищевказаними способами і за МСЕ.

Результати розв'язання цієї задачі є достатньо чіткими. Відзначимо, що при значенні $\lambda = 0,1$ похибка у визначенні прогинів становить приблизно 1%, а

похибка у визначенні моментів, за винятком моменту в центрі затиснутої сторони, – близько 6%. Момент у центрі затиснутої сторони визначається з незадовільною точністю. Це є прикладом компромісу між аналітичністю розв'язання та його точністю.

Зі збільшенням подовження від $\lambda = 0,1$ до порядок похибки зберігається. А зі зростанням параметра подовження від $\lambda = 1$ похибка у визначенні всіх компонент НДС дещо зменшується. Тут, на відміну від попередньої задачі, не зберігається монотонний характер залежності похибки від параметра подовження.

Таблиця Б.2 – Компоненти напружено-деформованого стану прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, а інші дві – вільні

λ	Розв'язок	$M \times N, M$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{w}_{max}(0,1)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_x(1,0)$	$\bar{M}_y(0,0)$
0,1	I	10	0,041221	0,045661	0,155921	-0,396120	0,046776
	II	14×54	0,041667	0,046716	0,166667	-0,333307	0,050000
	MCE	100×1000	0,041668	0,046709	0,166697	-0,332918	0,050025
0,5	I	10	0,040987	0,045664	0,155217	-0,394250	0,047268
	II	14×28	0,041442	0,046719	0,165860	-0,331914	0,050331
	MCE	100×200	0,041443	0,046712	0,165890	-0,331528	0,050358
1	I	10	0,040316	0,045496	0,150802	-0,388771	0,040600
	II	14×14	0,040956	0,046541	0,162431	-0,326121	0,043745
	MCE	100×100	0,040956	0,046534	0,162457	-0,325755	0,043779
2	I	10	0,041032	0,044126	0,148679	-0,393792	0,024408
	II	28×14	0,041926	0,045337	0,160836	-0,335215	0,027818
	MCE	200×100	0,041925	0,045334	0,160839	-0,334284	0,027829
3	I	10	0,041601	0,043295	0,148783	-0,398307	0,017974
	II	42×14	0,042732	0,044756	0,161233	-0,348143	0,018430
	MCE	300×100	0,042730	0,044754	0,161233	-0,347293	0,018434

Б.3 Вигин прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, одна вільно обперта, а інша вільна

Особливістю сформульованої крайової задачі (рис. Б.1, задача 3), як і наступних двох, є несиметричність граничних умов відносно осі OX . Точний розв'язок цієї задачі, як попередньої, так і двох наступних, досі не було отримано.

Як і раніше, за критеріальний приймаємо аналітико-чисельний розв'язок у подвійних рядах за системою координатних функцій (3.11) та

$$M_n^{(4)}(z) = P_{n+1}(z) + P_n(z),$$

$$M_n^{(4)}(-1) = 0. \quad (\text{Б.6})$$

Таблиця Б.3 – Компоненти напружено-деформованого стану прямокутної пластини, дві протилежні сторони якої жорстко затиснуті, одна – вільно обперта, а інша – вільна

λ	Розв'язок	M×N, М	$\bar{w}(0,1)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_x(1,0)$	$\bar{M}_x(0,1)$	$\bar{M}_y(0,0)$
0,1	I	10	0,045661	0,041221	0,155921	-0,396123	0,160954	0,046776
	II	11×54	0,046714	0,041667	0,166667	-0,333593	0,174770	0,050000
	MCE	100×1000	0,046709	0,041668	0,166670	-0,332918	0,174312	0,050025
0,5	I	10	0,045662	0,041221	0,157025	-0,396126	0,160959	0,050455
	II	11×36	0,046718	0,041607	0,167056	-0,334569	0,175039	0,053509
	MCE	100×200	0,046713	0,041609	0,167087	-0,334078	0,174347	0,053535
1	I	10	0,046707	0,035622	0,142026	-0,351171	0,164854	0,068269
	II	11×18	0,047614	0,035932	0,148025	-0,303981	0,177266	0,069997
	MCE	100×100	0,047609	0,035932	0,148054	-0,302852	0,176645	0,070031
2	I	10	0,042001	0,023977	0,097545	-0,253248	0,147277	0,057912
	II	22×18	0,042323	0,024139	0,099070	-0,223606	0,147307	0,059050
	MCE	200×100	0,042321	0,024138	0,099075	-0,221732	0,147221	0,059058
3	I	10	0,031865	0,016800	0,067203	-0,188647	0,109809	0,039477
	II	33×18	0,031953	0,016863	0,065504	-0,172327	0,102994	0,039897
	MCE	300×100	0,031952	0,016862	0,065506	-0,170595	0,102898	0,039900

При цьому виконано всі головні крайові умови. Наближений аналітичний розв'язок в одинарних рядах за функціями (3.10) забезпечує точне виконання всіх крайових умов при $x = \pm 1$, $y = -1$, і наближений (у розумінні найменших квадратів за межею) – при $y = 1$. Константи інтегрування C_{ki} визначаються з умов

$$\lambda^2 Y_i'' - \nu Y_i \|H_i'\|^2|_{y=1} = 0,$$

$$\lambda^2 Y_i''' - (2 - \nu) Y_i' \|H_i'\|^2|_{y=1} = 0, \quad (\text{Б.7})$$

$$Y_i|_{y=-1} = 0, \quad Y_i''|_{y=-1} = 0.$$

Наближений аналітичний розв'язок зіставляється з критеріальним розв'язком у подвійних рядах за функціями (3.11), (Б.6) і з розв'язком, отриманим за

МСЕ. Безрозмірні величини прогинів і згинальних моментів у характерних точках для різних подовжень пластинки подано в табл. Б.3.

З даних табл. Б.3 можна зробити такі висновки:

- 1) рівень похибки при обчисленні окремих компонент НДС такий самий, як і в трьох попередніх задачах;
- 2) на відміну від задачі 2 (рис. Б.1), тут спостерігається монотонність зниження похибки зі збільшенням параметра λ , як і в задачі 1 (рис. Б.1).

Б.4 Вигин прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а четверта – вільно обперта

Наближений аналітичний розв'язок задачі 4 (рис. Б.1) в одинарних рядах, як і раніше, відшукуємо у вигляді (3.18), де функції $Y_i(y)$ визначаються із крайових умов:

$$Y_i|_{y=\pm 1} = 0, \quad Y_i'|_{y=-1} = 0, \quad Y_i''|_{y=1} = 0. \quad (\text{Б.8})$$

У цьому розв'язку всі крайові умови виконано точно на відміну від прийнятого критеріального розв'язку в подвійних рядах за функціями (3.11) і функціями, що виконують лише головні крайові умови:

$$\begin{aligned} M_n^{(5)}(z) = & P_{n+4}(z) + \frac{(2n+7)}{(n+2)^2} (P_{n+1}(z) - P_{n+3}(z)) + \\ & + \frac{(2n+7)(n+3)^2}{(n+2)^2(2n+3)} P_n(z) - \frac{(2n+5)(2n^2+10n+15)}{(n+2)^2(2n+3)} P_{n+2}(z); \quad (\text{Б.9}) \\ M_n^{(5)}(\pm 1) = & M_n^{(5)'}(-1) = 0. \end{aligned}$$

У табл. Б.4 наведено безрозмірні параметри компонент НДС, обчислені за пропонованим наближеним аналітичним розв'язком в одинарних рядах (3.10), критеріальним розв'язком у подвійних рядах (3.11), (Б.9) і за МСЕ.

За даними табл. Б.4 висновки такі:

- 1) порядок похибки у визначенні компонент НДС зберігається;
- 2) відсутня монотонність функції похибки від параметра подовження.

Таблиця Б.4 – Компоненти напружено-деформованого стану прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а одна – вільно обперта

λ	Розв'язок	$M \times N, M$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_x(1,0)$	$\bar{M}_y(0,0)$	$\bar{M}_y(0,-1)$
0,1	I	10	0,041221	0,155921	-0,396123	0,046776	-0,221119
	II	11×33	0,041667	0,166667	-0,333316	0,050000	-0,227545
	MCE	100×1000	0,041668	0,166697	-0,332918	0,050025	-0,227175
0,5	I	10	0,040868	0,157738	-0,393304	0,057118	-0,221344
	II	12×24	0,041151	0,166437	-0,334263	0,059957	-0,227774
	MCE	100×200	0,041153	0,154803	-0,333837	0,059984	-0,227405
1	I	10	0,025156	0,112016	-0,267118	0,094963	-0,215427
	II	12×12	0,025128	0,110968	-0,240042	0,094399	-0,220128
	MCE	100×100	0,025130	0,111005	-0,239622	0,094438	-0,219762
2	I	10	0,004513	0,028269	-0,089413	0,057396	-0,114465
	II	24×12	0,004489	0,025918	-0,078433	0,056367	-0,114571
	MCE	200×100	0,004489	0,025925	-0,078313	0,056375	-0,114441
3	I	10	0,001018	0,009569	-0,045024	0,027874	-0,055454
	II	33×11	0,001014	0,008997	-0,034943	0,027604	-0,055306
	MCE	300×100	0,001014	0,008999	-0,034891	0,027607	-0,055247

Б.5 Вигин прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а четверта – вільна

Це остання задача з наведених на рис. Б.1.

Константи інтегрування C_{ki} у розв'язку (3.25) визначаються з таких крайових умов:

$$Y_i|_{y=-1} = 0, \quad Y'_i|_{y=-1} = 0, \\ \lambda^2 Y''_i - \nu Y_i \|H'_i\|^2|_{y=1} = 0, \quad \lambda^2 Y'''_i - (2 - \nu) Y'_i \|H'_i\|^2|_{y=1} = 0. \quad (\text{Б.10})$$

При цьому дві останні крайові умови (вільний край) отримано методом найменших квадратів по границі. Цей розв'язок в одинарних рядах за функціями (3.10), як і раніше, порівнюється з розв'язком, отриманим енергетичним методом за системою координатних функцій (3.11) та функціями:

$$M_n^{(6)}(z) = P_{n+2}(z) + \frac{2n+3}{n+1} P_{n+1}(z) + \frac{n+2}{n+1} P_n(z), \\ M_n^{(6)}(-1) = M_n^{(6)' }(-1) = 0. \quad (\text{Б.11})$$

Система координатних функцій (Б.11) виконує тільки головні крайові умови.

Результати розв'язання цієї крайової задачі для різних подовжень пластинки вищевказаними способами і за допомогою МСЕ наведено в табл. Б.5.

Таблиця Б.5 – Компоненти напружено-деформованого стану прямокутної пластини, три сторони якої жорстко затиснуті, а остання – вільна

λ	Розв'язок	$M \times N, M$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{w}(0,1)$	$\bar{Mx}(0,0)$	$\bar{Mx}(1,0)$	$\bar{My}(0,0)$	$\bar{My}(0,-1)$
0,1	I	10	0,041221	0,045661	0,155921	-0,396120	0,046776	-0,221119
	II	11×44	0,041667	0,046712	0,166666	-0,332722	0,050000	-0,227550
	МКЭ	100×1000	0,041668	0,046709	0,166697	-0,332918	0,050025	-0,227175
0,5	I	10	0,040634	0,045682	0,155930	-0,391431	0,053927	-0,221128
	II	13×26	0,040985	0,046739	0,165243	-0,332568	0,056775	-0,227566
	МКЭ	100×200	0,040987	0,046732	0,165274	-0,331288	0,056802	-0,227178
1	I	10	0,029996	0,046412	0,120913	-0,305874	0,065942	-0,218671
	II	13×13	0,030244	0,047207	0,125470	-0,265609	0,066982	-0,225206
	МКЭ	100×100	0,030245	0,047106	0,125504	-0,262653	0,067016	-0,224842
2	I	10	0,013348	0,031408	0,046338	-0,164154	0,013377	-0,202767
	II	26×13	0,013449	0,031502	0,047626	-0,133062	0,014630	-0,208664
	МКЭ	200×100	0,013449	0,031502	0,047634	-0,130873	0,014639	-0,208494
3	I	10	0,005515	0,014491	0,011112	-0,090404	-0,015451	-0,157762
	II	39×13	0,005529	0,014452	0,010321	-0,068476	-0,014728	-0,160224
	МКЭ	300×100	0,005529	0,014452	0,010324	-0,067173	-0,014725	-0,160134

Ці результати можна прокоментувати так само, як і результати попередніх задач. Перевага розв'язку в одинарних рядах над рештою полягає в його аналітичності, простоті та компактності. Достовірність отриманих результатів підтверджено порівняннями з іншими розв'язками.

ДОДАТОК В

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Таблиця В.1 – Вирішення "п-п проблеми" методу скінчених елементів

Розв'язок	N (δ , м)	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$ м (ϵ , %)	$M_x(0;0) \cdot 10^{-2}$ Н (ϵ , %)	$M_x(1;0) \cdot 10^{-1}$ Н (ϵ , %)	$N_x(1;0) \cdot 10^{-1}$ Н/м (ϵ , %)
I – 2	486 (0,2)	3,17580 (3,429)	9,20124 (0,428)	-1,34267 (34,61)	-5,27045 (40,29)
	2166 (0,1)	3,10516 (1,129)	9,17550 (0,147)	-1,65792 (19,26)	-7,35257 (16,71)
	5046 (1/15)	3,08712 (0,541)	9,16884 (0,074)	-1,77998 (13,32)	-7,98206 (9,577)
	9126 (0,05)	3,08018 (0,315)	9,16613 (0,045)	-1,84456 (10,17)	-8,25069 (6,534)
	14406 (0,04)	3,07681 (0,205)	9,16477 (0,03)	-1,88448 (8,226)	-8,39331 (4,918)
	20886 (1/30)	3,07494 (0,144)	9,16399 (0,021)	-1,91159 (6,906)	-8,48047 (3,931)
	28566 (1/35)	3,07379 (0,107)	9,16350 (0,016)	-1,93120 (5,951)	-8,53892 (3,268)
	58806 (0,02)	3,07214 (0,053)	9,16278 (0,008)	-1,96703 (4,206)	-8,63632 (2,165)
II – 2	1305 (0,2)	3,06891 (0,052)	9,36963 (2,266)	-2,01231 (2,001)	-7,76481 (12,04)
	5605 (0,1)	3,07052 (4E-4)	9,21367 (0,564)	-2,04189 (0,56)	-8,28482 (6,147)
	12905 (1/15)	3,07054 (1,1E-3)	9,18493 (0,25)	-2,04810 (0,258)	-8,46505 (4,105)
	23205 (0,05)	3,07053 (7,3E-4)	9,17490 (0,14)	-2,05034 (0,149)	-8,55539 (3,082)
	36505 (0,04)	3,07052 (4E-4)	9,17026 (0,09)	-2,05141 (0,096)	-8,60951 (2,469)
	52805 (1/30)	3,07052 (4E-4)	9,16775 (0,062)	-2,05199 (0,068)	-8,64591 (2,056)
	72105 (1/35)	3,07052 (4E-4)	9,16623 (0,046)	-2,05235 (0,051)	-8,67172 (1,764)
	94405 (0,025)	3,07051 (7,6E-5)	9,16525 (0,035)	-2,05258 (0,039)	-8,69070 (1,549)
3 (1)	100	3,07050765	9,162036	-2,05339	-8,82744

Таблиця В.2 – Визначення потрібного ступеня сплайна для заповнення сіткових функцій

Розв'язок	$2a, \text{ м}$	r	$w(0;0) \cdot 10^{-6}, \text{ м}$	$w(1;0) \cdot 10^{-6}, \text{ м}$	$M_x(-1;0), \text{ Нм/м}$	$M_x(1;0), \text{ Нм/м}$	$M_y(1;1), \text{ Нм/м}$	$M_y(1;0), \text{ Нм/м}$	$N_x(-1;0), \text{ Н/м}$
I – 1	1	1	1,8399267242	3,0699318156	-0,205320761426	0,091382493248	-0,265851235410	0,091393448523	0,8838440169
		2	1,8402044504	3,0705331535	-0,205345225940	0,091611891354	-0,205354155555	0,091617773413	0,8839196026
		3	1,8402044783	3,0705271186	-0,205345229330	0,091584806153	-0,208210044931	0,091590601864	0,8839198630
		4	1,8402044997	3,0705273793	-0,205345231029	0,091586007596	-0,207654785638	0,091591821229	0,8839198377
		5	1,8402044794	3,0705330404	-0,205345227921	0,091611159929	-0,205423977737	0,091617036463	0,8839196089
		6	1,8402044794	3,0705330274	-0,205345227926	0,091611102719	-0,205428867089	0,091616979115	0,8839196095
		7	1,8402044787	3,0705333252	-0,205345227798	0,091612426505	-0,205304749392	0,091618306470	0,8839195973
		8	1,8402044788	3,0705333247	-0,205345227810	0,091612424349	-0,205305478580	0,091618304339	0,8839195973
		9	1,8402044785	3,0705333410	-0,205345227757	0,091612495935	-0,205293154494	0,091618376331	0,8839195964
II – 1	1,2	1	2,2567228427	2,8586524254	-0,205325627665	0,084832750668	-0,249669242849	0,084751222485	0,8837626053
		2	2,2570142296	2,8592103489	-0,205344035925	0,085063551935	-0,192914355331	0,084966078780	0,8837999577
		3	2,2570142668	2,8592046801	-0,205344039560	0,085036999132	-0,195596724181	0,084940225793	0,8838012785
		4	2,2570142959	2,8592049257	-0,205344041281	0,085038176650	-0,195074937484	0,084941389919	0,8838010934
		5	2,2570142629	2,8592102386	-0,205344037610	0,085062820963	-0,192981335029	0,084965366375	0,8837999923
		6	2,2570142629	2,8592102263	-0,205344037615	0,085062765227	-0,192985995237	0,084965311467	0,8837999948
		7	2,2570142617	2,8592105095	-0,205344037460	0,085064060731	-0,192867980737	0,084966584734	0,8837999343
		8	2,2570142618	2,8592105086	-0,205344037465	0,085064056477	-0,192867943999	0,084966580687	0,8837999345
		9	2,2570142640	2,8592105377	-0,205344037665	0,085064158989	-0,192851618477	0,084966700926	0,8837999297

Таблиця В.3 – Стійкість, збіжність і точність визначення компонент напружено-деформованого стану блок-елемента з жорстко затиснутими трьома сторонами

Розв'язок	N _q	N ₂	M ₃	N ₃	w(0;0) · 10 ⁻⁶ , м	M _x (-1;0), Нм/м	M _x (1;0), Нм/м	M _y (1;0), Нм/м	M _y (1;1), Нм/м	N _x (-1;0), Н/м
I - 1	10	5	60	60	1,8447633348	-0,205728909	0,092155042	0,091980828	-0,205949848	0,885074149
		10	60	60	1,8447646388	-0,205728987	0,092167606	0,091993423	-0,205752428	0,885074479
		15	60	60	1,8447646563	-0,205728988	0,092168045	0,091993863	-0,205704695	0,885074481
		20	60	60	1,8447646584	-0,205728988	0,092163698	0,091989499	-0,206331797	0,885074543
	20	20	60	60	1,8447646583	-0,205719810	0,092172876	0,091992252	-0,206331797	0,883737547
			60	120	1,8447646583	-0,205719826	0,092172924	0,091992266	-0,206331789	0,883750779
II - 1	10	5	60	60	1,8402037346	-0,205345186	0,091603216	0,091609078	-0,205439499	0,883919408
		10	60	60	1,8402044799	-0,205345228	0,091612525	0,091618403	-0,205357203	0,883919602
		15	60	60	1,8402044791	-0,205345228	0,091612555	0,091618433	-0,205358455	0,883919602
		20	20	20	1,8402044786	-0,205340614	0,091623378	0,091621593	-0,205304548	0,883165281
			30	30	1,8402044787	-0,205346580	0,091611876	0,091618141	-0,205305016	0,884345315
			40	40	1,8402044788	-0,205344911	0,091612356	0,091618284	-0,205304920	0,883767305
			50	50	1,8402044788	-0,205345324	0,091612630	0,091618370	-0,205304102	0,883990294
			60	60	1,8402044788	-0,205345228	0,091612424	0,091618304	-0,205305484	0,883919597
	20	20	20	20	1,8402044784	-0,205331436	0,091632534	0,091624336	-0,205304453	0,881828284
			30	30	1,8402044786	-0,205337402	0,091621051	0,091620891	-0,205304456	0,883008322
			40	40	1,8402044786	-0,205335734	0,091621532	0,091621036	-0,205304456	0,882430309
			50	50	1,8402044786	-0,205336146	0,091621803	0,091621119	-0,205304564	0,882653299
			60	60	1,8402044787	-0,205336050	0,091621602	0,091621058	-0,205305484	0,882582602
		20	20	40	1,8402044785	-0,205336048	0,091621625	0,091621065	-0,205304369	0,882590045
			30	60	1,8402044787	-0,205336068	0,091621670	0,091621078	-0,205305484	0,882596887
			40	80	1,8402044786	-0,205336066	0,091621674	0,091621078	-0,205304690	0,882596550
			50	100	1,8402044786	-0,205336065	0,091621675	0,091621079	-0,205304793	0,882596072
			60	120	1,8402044788	-0,205336065	0,091621674	0,091621079	-0,205304530	0,882595835
3 - 1	10	5	60	60	2,2570139021	-0,205344022	0,091620426	0,091618726	-0,205344281	0,883799896
		10	60	60	2,2570142627	-0,205344038	0,091620998	0,091620815	-0,205340694	0,883799960
		15	60	60	2,2570142620	-0,205344038	0,091620991	0,091620811	-0,205340697	0,883799958
		20	20	20	2,2570142616	-0,205340351	0,091620913	0,091620766	-0,205339503	0,883209582
			30	30	2,2570142618	-0,205345022	0,091620988	0,091620817	-0,205340726	0,884109648
			40	40	2,2570142619	-0,205343815	0,091620988	0,091620817	-0,205340751	0,883690047
			50	50	2,2570142618	-0,205344097	0,091620988	0,091620817	-0,205340731	0,883844757
			60	60	2,2570142618	-0,205344037	0,091620988	0,091620817	-0,205340730	0,883799934

Таблиця В.4 – Вплив співвідношення мір виділеного блок-елемента і вихідної системи на компоненти напружено-деформованого стану

Розв'язок	2α , м (х)	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$, м	$M_x (-1;0)$, Нм/м	$M_x (+1;0)$, Нм/м	$M_y (+1;1)$, Нм/м	$N_x (-1;0)$, Н/м
I - 1	1 (0)	1,8447646585	-0,205728988	0,092163698	-0,206331804	0,885074543
II - 1		1,8402044788	-0,205345228	0,091612425	-0,205305509	0,883919597
I - 2		1,84585	-0,184456	0,0916613	-0,184456	0,825069
II - 2		1,84021	-0,205034	0,0913324	-0,205034	0,855539
3		1,8401919548	-0,205335615	0,091620364	-0,205335615	0,882743660
I - 1	1,2 (0,2)	2,2616272476	-0,205620160	0,085648034	-0,193811877	0,884587316
II - 1		2,2570142617	-0,205344037	0,085064060	-0,192868031	0,883799934
I - 2		2,26402	-0,184456	0,0864941	-0,173279	0,825069
II - 2		2,25702	-0,205034	0,0848258	-0,192601	0,855539
3		2,2570026783	-0,205335615	0,085071248	-0,192897447	0,884587316
I - 1	1,4 (0,4)	2,6062948746	-0,205521156	0,063447785	-0,156833322	0,884125440
II - 1		2,6022573265	-0,205342723	0,062874615	-0,156142279	0,883638772
I - 2		2,61039	-0,184456	0,0666025	-0,139981	0,825069
II - 2		2,60227	-0,205034	0,0627759	-0,155894	0,855539
3		2,6022480495	-0,205335615	0,062881332	-0,156171742	0,884587316
I - 1	1,6 (0,6)	2,8621235340	-0,205439296	0,017713096	-0,098756634	0,883710406
II - 1		2,8591916102	-0,205341380	0,017221451	-0,098418369	0,883452630
I - 2		2,86816	-0,184456	0,0245502	-0,0882073	0,825069
II - 2		2,85921	-0,205034	0,017378	-0,0981875	0,855539
3		2,8591857137	-0,205335615	0,017227507	-0,098406701	0,884587316
I - 1	1,8 (0,8)	3,0186979838	-0,205378154	-0,065221875	-0,032586793	0,883362339
II - 1		3,0172159556	-0,205340092	-0,065528668	-0,032108720	0,883264093
I - 2		3,02671	-0,184456	-0,0527826	-0,0301041	0,825069
II - 2		3,01724	-0,205034	-0,0649777	-0,0318801	0,855539
3		3,0172139150	-0,205335615	-0,065523786	-0,031940680	0,884587316

Таблиця В.5 – Стійкість, збіжність та точність визначення компонент напружено-деформованого стану центрально розташованого квадратного блок-елемента

Розв'язок	N ₂	N ₃	w(0;0) 10 ⁻⁶ , м	M _x (0;0) = M _y (0;0), Нм/м	M _x (1;0) = M _y (0;1), Нм/м	N _x (1;0) = N _y (0;1), Н/м
I - 1	5	5	3,078032356855	0,09178823306	0,01757604	-0,3823355
		10	3,078022428257	0,09177691764	0,01757628	-0,3844076
		15	3,078021992407	0,09177545249	0,01764114	-0,3794477
	10	10	3,078019523426	0,09177570953	0,01753714	-0,3827675
		20	3,078019356270	0,09177528997	0,01755528	-0,3803517
		30	3,078019354757	0,09177526695	0,01754753	-0,3821763
	15	15	3,078019090922	0,09177452092	0,01706118	-0,4123524
		30	3,078019170215	0,09177527418	0,01722442	-0,3924084
		45	3,078019170193	0,09177527438	0,01721999	-0,3945948
	20	20	3,078019128576	0,09177527062	0,01712427	-0,4010610
		30	3,078019128437	0,09177527504	0,01713637	-0,4006324
		40	3,078019128300	0,09177527049	0,01714388	-0,3967561
		50	3,078019128298	0,09177527024	0,01714074	-0,3993824
		60	3,078019128299	0,09177527027	0,01714193	-0,3979050
II - 1	5	5	3,070538231817	0,09163438613	0,01730484	-0,3832657
		10	3,070527410029	0,09162202774	0,01730838	-0,3853258
		15	3,070526969445	0,09162055187	0,01737342	-0,3803672
	10	10	3,070523993352	0,09162062205	0,01727752	-0,3832372
		20	3,070523877106	0,09162038006	0,01728905	-0,3813046
		30	3,070523875706	0,09162035885	0,01728195	-0,3829858
	15	15	3,070523787608	0,09162027584	0,01717352	-0,3878925
		30	3,070523795927	0,09162036231	0,01719919	-0,3857865
		45	3,070523795866	0,09162036012	0,01720139	-0,3851130
	20	20	3,070523799187	0,09162032281	0,01717849	-0,3897582
		30	3,070523801328	0,09162036376	0,01720755	-0,3853871
		40	3,070523801232	0,09162036088	0,01721140	-0,3833006
		50	3,070523801227	0,09162036062	0,01720906	-0,3852844
		60	3,070523801227	0,09162036063	0,01721010	-0,3839784

Таблиця В.6 – Вплив точності ідентифікації крайових умов на межі виділеного блок-елемента на точність шуканого розв'язку

Розв'язок	$\delta, \text{м (N)}_{\text{МСЕ}}$	$w(0;0) \cdot 10^{-6}, \text{м}$	$M_x(0;0) = M_y(0;0), \text{Нм/м}$	$M_x(1;0) = M_y(0;1), \text{Нм/м}$	$N_x(1;0) = N_y(0;1), \text{Н/м}$
I - 1	0,2 (7)	3,1571973945	0,09393321	0,02069978	-0,3871988
I - 2		3,1758	0,0920124	0,0437987	-0,196527
I - 1	0,1 (13)	3,0977154157	0,09221353	0,01811384	-0,3819031
I - 2		3,10516	0,091755	0,0313749	-0,299055
I - 1	1/15 (19)	3,0834230943	0,09189042	0,01762182	-0,3830810
I - 2		3,08712	0,0916884	0,0269023	-0,334279
I - 1	0,05 (25)	3,0780191283	0,09177527	0,01714193	-0,3979050
I - 2		3,08018	0,0916613	0,024583	-0,349895
I - 1	0,04 (31)	3,0754048435	0,09172047	0,01737025	-0,3836384
I - 2		3,07681	0,0916477	0,0231614	-0,358287
I - 1	1/30 (37)	3,0739524033	0,09169047	0,01732696	-0,3836960
I - 2		3,07494	0,0916399	0,0222004	-0,363434
I - 1	1/35 (43)	3,0730618272	0,09167219	0,01729997	-0,3837342
I - 2		3,07379	0,091635	0,0215073	-0,366886
I - 1	0,02 (61)	3,0717796065	0,09164605	0,01726119	-0,3838327
I - 2		3,07214	0,0916278	0,0202455	-0,372619
II - 1	0,2 (13)	3,0689381284	0,09157959	0,01567407	-0,4235308
II - 2		3,06891	0,0936963	0,0196957	-0,322732
II - 1	0,1 (25)	3,0704948674	0,09161858	0,01719550	-0,3831987
II - 2		3,07052	0,0921367	0,0179359	-0,352985
II - 1	1/15 (37)	3,0705279001	0,09162017	0,01719708	-0,3842174
II - 2		3,07054	0,0918493	0,0175533	-0,363159
II - 1	0,05 (49)	3,0705238012	0,09162036	0,01721010	-0,3839784
II - 2		3,07053	0,091749	0,0174139	-0,368259
II - 1	0,04 (61)	3,0705193044	0,09162039	0,01721339	-0,3840119
II - 2		3,07052	0,0917026	0,017348	-0,371316
II - 1	1/30 (73)	3,0705163285	0,09162040	0,01721618	-0,3839762
II - 2		3,07052	0,0916775	0,0173118	-0,373368
II - 1	1/35 (85)	3,0705140797	0,09162039	0,01721837	-0,3839384
II - 2		3,07052	0,0916623	0,0172897	-0,374826
II - 1	0,025 (97)	3,0705127855	0,09162039	0,01722052	-0,3838810
II - 2		3,07051	0,0916525	0,0172753	-0,375901
3	N = M = 15	$w(0;0) \cdot 10^{-6}, \text{м}$	$M_x(0;0) = M_y(0;0), \text{Нм/м}$	$M_x(0,6;0) = M_y(0;0,6), \text{Нм/м}$	$N_x(0,6;0) = N_y(0;0,6), \text{Н/м}$
		3,0705076523	0,09162036	0,01722751	-0,3835439

Таблиця В.7 – Вплив на компоненти НДС міри центрально розташованої у вихідній системі розширюваної підобласті

Розв'язок	2α , м	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$, м	$M_x(0;0) = M_y(0;0)$, Нм/м	$M_x(1;0) = M_y(0;1)$, Нм/м	$N_x(1;0) = N_y(0;1)$, Н/м	2α , м	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$, м	$M_x(0;0) = M_y(0;0)$, Нм/м	$M_x(1;0) = M_y(0;1)$, Нм/м	$N_x(1;0) = N_y(0;1)$, Н/м
I - 1	0,3	3,08009141	0,0918629734	0,0881977108	-0,0783082	1,2	3,07801913	0,0917752703	0,0171419298	-0,3979050
II - 1		3,07053247	0,0916203790	0,0877253519	-0,1195158		3,07052380	0,0916203606	0,0172100989	-0,3839784
I - 2		3,08018	0,0916613	0,0892459	-0,0608072		3,08018	0,0916613	0,024583	-0,3498950
II - 2		3,07053	0,091749	0,0881186	-0,0675386		3,07053	0,091749	0,0174139	-0,3682590
3		3,07050765	0,0916203639	0,0879881550	-0,0763067		3,07050765	0,0916203639	0,0172275066	-0,3835439
I - 1	0,6	3,07979678	0,0918454641	0,0765043503	-0,1603838	1,5	3,07605549	0,0917229127	-0,0401549148	-0,5379604
II - 1		3,07053111	0,0916204067	0,0762503764	-0,1602502		3,07051753	0,0916203293	-0,0403455161	-0,5382532
I - 2		3,08018	0,0916613	0,0789904	-0,1401700		3,08018	0,0916613	-0,0292063	-0,4958250
II - 2		3,07053	0,091749	0,0764323	-0,1503780		3,07053	0,091749	-0,0401535	-0,5187380
3		3,07050765	0,0916203639	0,0762916751	-0,1604530		3,07050765	0,0916203639	-0,0403758922	-0,5378821
I - 1	0,9	3,07917084	0,0918159922	0,0543014315	-0,2606986	1,8	3,07304796	0,0916621193	-0,1266377988	-0,7305300
II - 1		3,07052813	0,0916203817	0,0540515591	-0,2608518		3,07050937	0,0916203012	-0,1267354563	-0,7307108
I - 2		3,08018	0,0916613	0,0587312	-0,2339220		3,08018	0,0916613	-0,110392	-0,6790740
II - 2		3,07053	0,091749	0,054255	-0,2480200		3,07053	0,091749	-0,126538	-0,7065950
3		3,07050765	0,0916203639	0,0540957989	-0,2602703		3,07050765	0,0916203639	-0,1268043759	-0,7303203

ДОДАТОК Г

ФУНКЦІЇ, ЯКІ ВИКОНУЮТЬ НЕОДНОРІДНІ ГОЛОВНІ КРАЙОВІ УМОВИ НА ВІДРІЗКУ

Краєм одновимірної області є точка. Вважаємо, що матеріальна точка має шість ступенів свободи: три переміщення і три кути повороту (рис. Г.1). Тому для крайової задачі в одновимірній області можна задати у загальному випадку дванадцять крайових умов:

1. $u_- = \bar{u}_-;$	7. $u_+ = \bar{u}_+;$
2. $v_- = \bar{v}_-;$	8. $v_+ = \bar{v}_+;$
3. $w_- = \bar{w}_-;$	9. $w_+ = \bar{w}_+;$
4. $\theta_{x-} = \bar{\theta}_{x-};$	10. $\theta_{x+} = \bar{\theta}_{x+};$
5. $\theta_{y-} = \bar{\theta}_{y-};$	11. $\theta_{y+} = \bar{\theta}_{y+};$
6. $\theta_{z-} = \bar{\theta}_{z-};$	12. $\theta_{z+} = \bar{\theta}_{z+},$

(Г.1)

де знак « $-$ » і « $+$ » відносить обчислення функцій u , v , w , θ_x , θ_y і θ_z у відповідній точці границі $x = -1$ і $x = +1$. Риска зверху означає задані на границі величини, в даному випадку скаляри.

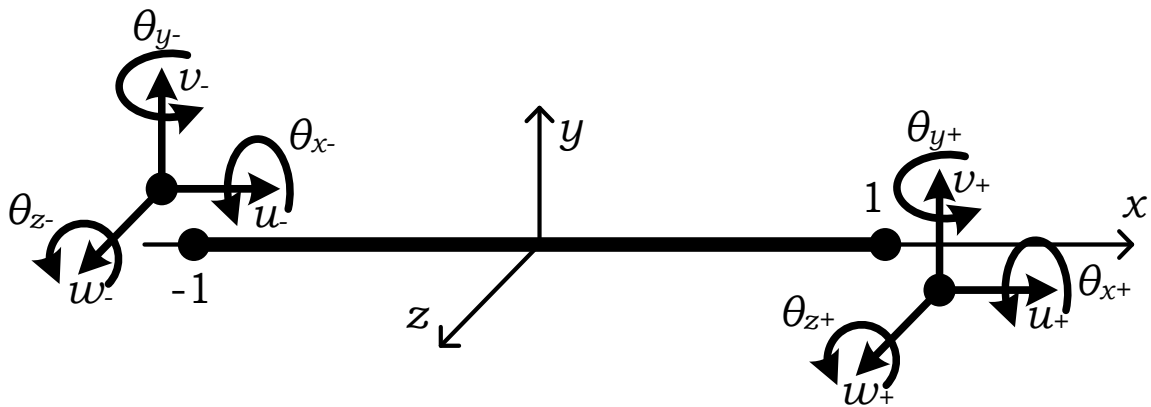


Рисунок Г.1 – Загальний випадок неоднорідних крайових умов
для одновимірної задачі

Якщо всі шість функцій є незалежними, то головні крайові умови можна виконати лінійною функцією $f(x) = ax + b$. Виконання нею крайових умов (Г.1)

приводить до виду функцій, які виконують неоднорідні крайові умови і записані через задані крайові переміщення та кути повороту:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \bar{u}_- N_-(x) + \bar{u}_+ N_+(x); \\
 v_0 &= \bar{v}_- N_-(x) + \bar{v}_+ N_+(x); \\
 w_0 &= \bar{w}_- N_-(x) + \bar{w}_+ N_+(x); \\
 \theta_{x0} &= \bar{\theta}_{x-} N_-(x) + \bar{\theta}_{x+} N_+(x); \\
 \theta_{y0} &= \bar{\theta}_{y-} N_-(x) + \bar{\theta}_{y+} N_+(x); \\
 \theta_{z0} &= \bar{\theta}_{z-} N_-(x) + \bar{\theta}_{z+} N_+(x),
 \end{aligned} \tag{Г.2}$$

де $N_-(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) - P_1(x)) = \frac{1-x}{2}$, $N_+(x) = \frac{1}{2}(P_0(x) + P_1(x)) = \frac{1+x}{2}$ – функції форми скінченного елемента C_1 ; $P_i(x)$ – поліноми Лежандра.

Якщо вважаємо справедливою гіпотезу Бернуллі – Ейлера, то функції поворотів θ_y і θ_z не є незалежними. В геометрично лінійній теорії вони виражаються через переміщення v і w відповідно: $\theta_y = w'$ $\theta_z = v'$. У цьому випадку функції v_0 і w_0 , які б виконували головні крайові умови 2, 8, 6, 12 і 3, 9, 5, 11 із (Г.1), необхідно шукати у вигляді $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Чотири функції, які будуть виконувати крайові умови (Г.1), матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \bar{u}_- N_-(x) + \bar{u}_+ N_+(x); \\
 v_0 &= \bar{v}_- M_-(x) + \bar{v}_+ M_+(x) + \bar{\theta}_{z-} K_-(x) + \bar{\theta}_{z+} K_+(x); \\
 w_0 &= \bar{w}_- M_-(x) + \bar{w}_+ M_+(x) + \bar{\theta}_{y-} K_-(x) + \bar{\theta}_{y+} K_+(x); \\
 \theta_{x0} &= \bar{\theta}_{x-} N_-(x) + \bar{\theta}_{x+} N_+(x),
 \end{aligned} \tag{Г.3}$$

де

$$\begin{aligned}
 M_-(x) &= \frac{1}{2}(P_0(x) - P_1(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(2+x)(1-x)^2; \\
 M_+(x) &= \frac{1}{2}(P_0(x) + P_1(x)) + \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(2-x)(1+x)^2; \\
 K_-(x) &= \frac{1}{6}(P_0(x) - P_2(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(1+x)(1-x)^2; \\
 K_+(x) &= -\frac{1}{6}(P_0(x) - P_2(x)) - \frac{1}{10}(P_1(x) - P_3(x)) = \frac{1}{4}(x-1)(1+x)^2.
 \end{aligned}$$

У випадку справедливості гіпотези Бернуллі – Ейлера, але нелінійних співвідношень між деформаціями та переміщеннями [149] функції поворотів θ_y і θ_z зв'язані, як з функціями прогинів v і w , так із функцією повздовжніх переміщень u : $\operatorname{tg} \theta = \frac{w'}{1+u'}$. Тому для виконання неоднорідних крайових умов необхідно використовувати функції (див. також [150])

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u}_- N_-(x) + \bar{u}_+ N_+(x); \\ v_0 &= \bar{v}_- M_-(x) + \bar{v}_+ M_+(x) + \left(t\bar{g} \theta_{z-} M_-(x) + t\bar{g} \theta_{z+} M_+(x) \right) \frac{u_+ - u_-}{2}; \\ w_0 &= \bar{w}_- M_-(x) + \bar{w}_+ M_+(x) + \left(t\bar{g} \theta_{y-} L_-(x) + t\bar{g} \theta_{y+} L_+(x) \right) \frac{u_+ - u_-}{2}; \\ \theta_{x0} &= \bar{\theta}_{x-} N_-(x) + \bar{\theta}_{x+} N_+(x). \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

За допомогою функцій (Г.2) – (Г.4) неоднорідні крайові умови приводяться до однорідних, або, іншими словами, за допомогою цих функцій виконуються умови сполучення елемента розмірністю нуль (точка) з елементом розмірності один.

Функції переміщень осьової лінії балки при використанні проєкційних або варіаційних методів подаються у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \sum_n U_n \varphi_n(x); & \theta_x(x) &= \theta_{x0}(x) + \sum_n \theta_{xn} \varphi_n(x); \\ v(x) &= v_0(x) + \sum_n V_n \varphi_n(x); & \theta_y(x) &= \theta_{y0}(x) + \sum_n \theta_{yn} \varphi_n(x); \\ w(x) &= w_0(x) + \sum_n W_n \varphi_n(x); & \theta_z(x) &= \theta_{z0}(x) + \sum_n \theta_{zn} \varphi_n(x), \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

у випадку балки Тимошенка і у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \sum_n U_n \varphi_n(x); & w(x) &= w_0(x) + \sum_n W_n \psi_n(x); \\ v(x) &= v_0(x) + \sum_n V_n \psi_n(x); & \theta_x(x) &= \theta_{x0}(x) + \sum_n \theta_{xn} \varphi_n(x); \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

у випадку класичної балки.

У формулах (Г.5), (Г.6) функції з індексом «0» вибираються з відповідного набору (Г.2), (Г.3). Коефіцієнти в сумах U_n , V_n , W_n , θ_{xn} , θ_{yn} і θ_{zn} – підлягають

визначенню, $\varphi_n(x)$ і $\psi_n(x)$ – відомі базисні (координатні) функції. $\varphi_n(x)$ виконують лише однорідні умови $\varphi_n(\pm 1) = 0$, а $\psi_n(x)$ – крім цих умов додатково мають виконувати умови $\psi'_n(\pm) = 0$. У якості таких, як показано в розділі 3, найкраще брати або лінійні комбінації поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \frac{P_n(x) - P_{n+2}(x)}{\sqrt{2(n+3)}}, \\ \psi_n(x) &= \frac{P_{n+4}(x) - \frac{2(2n+5)}{2n+3}P_{n+2}(x) + \frac{2n+7}{2n+3}P_n(x)}{(2n+7)\sqrt{2(2n+5)}}\end{aligned}\quad (\Gamma.7)$$

або функції, запропоновані С. А. Халіловим [139]:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) \equiv h_n(x) &= (1-x^2) \sum_{m=0}^r A_{mn}^{(0)} x^{n-2m}, \\ \psi_n(x) \equiv H_n(x) &= (1-x^2)^2 \sum_{m=0}^r A_{mn}^{(1)} x^{n-2m},\end{aligned}\quad (\Gamma.8)$$

де r – ціла частина числа $n/2$;

$$A_{mn}^{(\alpha)} = \frac{(-1)^m}{2^{n+2\alpha+1}} \sqrt{\frac{n!(2n+4\alpha+5)}{2(n+4\alpha+4)!}} \frac{(2n-2m+4\alpha+3)!}{(n-m+2\alpha+1)!m!(n-2m)!}.$$

Відзначимо, що функції (Г.7) ортонормовані в енергетичних метриках диференціальних операторів $\frac{d^2}{dx^2}$ і $\frac{d^4}{dx^4}$, відповідно, тобто $\int_{-1}^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \delta_{ij}$, $\int_{-1}^1 \psi''_i(x) \psi''_j(x) dx = \delta_{ij}$. Тут δ_{ij} – дельта Кронекера. Функції (Г.8) ортонормовані у вихідній метриці L_2 , тобто $\int_{-1}^1 h_i(x) h_j(x) dx = \int_{-1}^1 H_i(x) H_j(x) dx = \delta_{ij}$ і квазіортогональні в енергетичних метриках.

ДОДАТОК Д

АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

"УТВЕРЖДАЮ"
 Главный конструктор
 ГП "АНТОНОВ" к.т.н.
 Семенов А.И.
 "26" 2017г.



АКТ ВНЕДРЕНИЯ

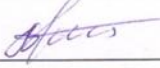
результатов работы Д104-14/2017Ф «Нові аналітико-числові методи в задачах статистики, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів»

Мы, нижеподписавшиеся, представители Государственного предприятия «Антонов»: заместитель Главного конструктора, к.т.н. Е.Т. Василевский, начальник отдела Д.М. Устюгов, начальник сектора, к.т.н. В.В. Мерзлюк, начальник сектора Н.В. Паршута констатируем, что методы, алгоритмы и численные процедуры исследования напряженно-деформированного состояния, устойчивости, собственных колебаний и предельных состояний элементов конструкции стреловидного крыла и многоярусного фюзеляжа большегрузных самолетов, разработанные в рамках научно-исследовательской работы Д104-14/2017Ф «Нові аналітико-числові методи в задачах статистики, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів», используются в практике проектирования самолетов в ГП «Антонов».

Метод идентификации краевых условий с привлечением метода конечных элементов для уточнения напряженно-деформированного состояния, критических параметров устойчивости и собственных частот колебаний агрегатов и элементов несущей конструкции самолета и метод определения возможных форм равновесия, устойчивых форм закритического поведения и предельных нагрузок несущих конструкций большегрузных самолетов, основанный на инженерных геометрически нелинейных моделях позволяют увеличить точность расчетов, сократить сроки проектирования, повысить качество проектируемых изделий.

Зам. Главного конструктора, к.т.н.  Е.Т. Василевский

Начальник отдела  Д.М. Устюгов

Начальник сектора, к.т.н.  В.В. Мерзлюк

Начальник сектора  Н.В. Паршута



Підтверджую
 Головний конструктор
 П.Н. «АНТОНОВ», к.т.н.
 Семенец А.И.
 2019 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов работы Д104-14/2017Ф

«Нові аналітико-числові методи в задачах статички, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів»

Мы, нижеподписавшиеся, представители Государственного предприятия «Антонов»: заместитель Главного конструктора, к. т. н. Е. Т. Василевский, начальник отдела, Д. М. Устюгов, начальник сектора, к.т.н. В. В. Мерзлюк, начальник сектора Н. В. Паршуту констатируем, что методы, алгоритмы и численные процедуры исследования напряженно-деформированного состояния, устойчивости, собственных колебаний и предельных состояний элементов конструкции стреловидного крыла и многоярусного фюзеляжа больших грузовых самолетов, разработанные в рамках научного-исследовательского направления Д104-14/2017Ф «Нові аналітико-числові методи в задачах статички, стійкості, коливань та закритичної поведінки тонкостінних конструкцій літальних апаратів» (авторы С. А. Халилов, В. Б. Минтук, Д. А. Ткаченко, Бондарева Н. В. и др.), могут быть использованы в практике проектирования самолетов в ГП «Антонов».

Получивший дальнейшее развитие метод идентификации краевых условий позволил свести сложную задачу анализа тонкостенных пространственных систем, какими являются конструкции самолетов, к анализу их отдельных блоков с установлением (идентификацией) условий взаимодействия блока со всей системой. Выделяя последовательно различные блоки, удастся досконально исследовать с высокой точностью проблемы не только определения напряженно-деформированного состояния, но и устойчивости, и колебаний крыльевых и фюзеляжных конструкций.

Конструктивный метод апостериорной оценки точности результатов расчетов на прочность, устойчивость и колебания позволяет оценить точность решений, доставляемых другими методами, в том числе и МКЭ.

Точные геометрически нелинейные модели пластин в задачах закритического деформирования дают возможность обнаруживать ранее неизвестные ветви равновесных состояний, что в свою очередь способствует лучшему пониманию природы этого явления.

Использование этих методов и подходов позволяет увеличить точность расчетов, сократить сроки проектирования, повысить качество и надежность проектируемых изделий.

Зам. Главного конструктора, к. т. н.

Е. Т. Василевский

Начальник отдела

Д. М. Устюгов

Начальник сектора, к.т.н.

В. В. Мерзлюк

Начальник сектора

Н. В. Паршуту