Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного
Національна Академія Наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ВЄРУШКІН ІВАН ОЛЕКСІЙОВИЧ

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДИ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Спеціальність 113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії (технічні науки)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ **І. О. ВЄРУШКІН**

Науковий керівник: **Стрельнікова Олена Олександрівна**
доктор технічних наук, професор

Харків 2025

АНОТАЦІЯ

Вєрушкін І. О. Методи граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах теорії потенціалу та лінійної теорії пружності

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика». – Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, Харків, 2025.

Проєктування сучасних високотехнологічних машин, агрегатів та інженерних споруд вимагає надзвичайно точного інженерного аналізу й обґрунтування їхньої надійності, особливо в умовах інтенсивних експлуатаційних навантажень. Однією з ключових вимог до таких конструкцій є здатність ефективно протистояти дії механічних, температурних, гідродинамічних та вібраційних навантажень, які можуть змінюватися в часі та мати складний просторовий розподіл. Для забезпечення цього потрібне глибоке розуміння напружено-деформованого стану елементів конструкцій, визначення полів напружень та деформацій, аналіз спектру власних коливань, а також оцінка потенційних зон концентрації напружень і можливих сценаріїв руйнування.

Значна частина таких об’єктів складається з тонкостінних чи оболонкових елементів складної геометричної форми, які у процесі експлуатації піддаються дії агресивного середовища: повітряного потоку, води, пари, палива або інших рідин і газів. Наприклад, у турбінному та компресорному обладнанні широко використовуються радіально-осьові лопатки, які обертаються з високою частотою і при цьому постійно контактують з робочим середовищем. Такі компоненти одночасно зазнають центробіжних, термічних і аеродинамічних навантажень, що значно ускладнює задачі їхнього аналізу й оптимізації.

До типових прикладів елементів, які працюють в умовах складної взаємодії з рідиною або газом, належать:

- робочі лопатки осьових та відцентрових компресорів і гідротурбін;
- оболонки та корпуси теплових реакторів і котлів;

- резервуари для зберігання стиснених газів, пального та вибухонебезпечних речовин;
- циліндричні та сферичні баки рідинно-паливних систем ракетно-космічної техніки;
- акустично навантажені обшивки літаків та інших транспортних засобів;
- тонкостінні елементи конструкцій хімічних установок, які перебувають під високим тиском.

Крім того, сучасні тенденції до зменшення маси конструкцій та підвищення їхньої енергоефективності змушують інженерів проєктувати все більш легкі й тонкі елементи, що, зі свого боку, ще більше підвищує чутливість систем до коливань і локальних дефектів. При цьому навіть незначні порушення геометрії (наприклад, наявність мікротріщин, виїмок або змін товщини) можуть призвести до суттєвих змін у розподілі навантажень і знизити довговічність усього об’єкта.

Відтак, для забезпечення високої надійності експлуатації таких конструкцій в умовах взаємодії із складним зовнішнім середовищем потрібно мати у своєму розпорядженні точні математичні моделі та ефективні числові методи, які здатні враховувати:

- складну форму об’єкта та осьову симетрію;
- гідро- та аеропружну взаємодію з навколишнім середовищем;
- наявність тріщиноподібних дефектів і концентрації напружень;
- змінні або циклічні режими навантаження;
- вплив змінних режимів роботи.

Розробка таких методів має фундаментальне значення для інженерної науки, оскільки вона не лише дозволяє оцінити поточний стан конструкцій, але й передбачити потенційні зони ризику, оптимізувати геометрію елементів, налаштувати систему на безпечний режим експлуатації та запобігти виникненню небажаних резонансних або аварійних ситуацій.

Таким чином, актуальність досліджень, спрямованих на вдосконалення математичних моделей і розрахункових методів для аналізу конструкцій в умовах

взаємодії з середовищем, не викликає сумнівів і цілком відповідає сучасним потребам промисловості, енергетики, транспорту та оборонного комплексу.

У дисертаційній роботі розроблені числові методи розв’язання сингулярних та гіперсингулярних граничних інтегральних рівнянь, які виникають у процесі математичного моделювання напружено-деформованого стану та коливань конструктивних елементів, що мають осьову симетрію, дефекти у вигляді тріщин або взаємодіють із навколишнім рідинним середовищем. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю підвищення точності інженерних розрахунків для забезпечення надійності та довговічності елементів сучасних машин і споруд, зокрема у сферах енергетики, турбобудування та машинобудування.

У роботі сформульовано крайові задачі для рівнянь Лапласа та Ляме, задачі взаємодії рідини з пружними тілами, а також крайові задачі для тіл з тріщинами. Розроблено числові підходи до їх розв’язання за допомогою методу граничних елементів, зокрема для тіл з аксіально-симетричною геометрією. Особливу увагу приділено побудові ефективних алгоритмів для обчислення полів напружень, форм і частот власних коливань у конструкціях, що функціонують у складних умовах навантаження.

Наукова новизна полягає в обґрунтуванні та числовій реалізації нових підходів до розв’язання гіперсингулярних рівнянь із застосуванням методів теорії потенціалу та граничних елементів. Отримано нові аналітичні й числові результати, які можуть бути використані як тестові приклади для верифікації інших методів. Практичне значення роботи полягає у можливості застосування розроблених числових методів до аналізу міцності резервуарів, оболонок, паливних баків, лопаток та інших елементів конструкцій, що зазнають дії механічних, гідродинамічних або сейсмічних навантажень.

Метою дисертаційної роботи є розроблення ефективних числових методів на основі методу граничних елементів для розв’язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що виникають у задачах дослідження

міцності та коливань конструктивних елементів, які взаємодіють із рідиною або містять тріщини.

. Об`єкт дослідження – міцність та коливання елементів енергетичного обладнання, що при експлуатації взаємодіє із рідиною, або має дефекти внаслідок тривалої експлуатації.

Предмет дослідження – математичні моделі та методи розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища, які зводяться до двовимірних та одновимірних сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовується методи теорії потенціалу, граничних інтегральних рівнянь, методи скінчених та граничних елементів, розкладення в ряди Фур’є, метод заданих форм.

Розроблено новий підхід, заснований на застосуванні гіперсингулярних інтегральних рівнянь у поєднанні з методом заданих форм, що дозволяє ефективно моделювати процеси коливань елементів конструкцій з осьовою симетрією, занурених у рідинне середовище. На відміну від класичних методів скінчених та граничних елементів, запропонований підхід базується на зведенні крайової задачі до одновимірного гіперсингулярного інтегрального рівняння, що значно знижує обчислювальні витрати при збереженні високої точності результатів. Особливої актуальності та ефективності метод набуває при дослідженні коливань тонкостінних круглих пластин, резервуарів і оболонок, які або частково заповнені рідиною, або мають пружну основу.

У роботі реалізовано числові алгоритми, що забезпечують точне обчислення впливу приєднаних мас рідини, контактної взаємодії пружного елемента з основою типу Вінклера, а також концентрацій напружень поблизу тріщин. Проведено верифікацію розробленого методу на основі порівняння з результатами класичних скінченно-елементних моделей, а також аналітичних рішень для окремих випадків, що демонструє високу точність та надійність отриманих розв’язків.

Одержані в дисертації результати можуть бути використані при проєктуванні та під час експлуатації резервуарів, обшивок, баків та інших

елементів конструкцій, що функціонують у складних динамічних умовах. Зокрема, запропоновані підходи є цінними для аерокосмічної, енергетичної, оборонної та хімічної промисловості, де питання вібраційної стійкості, динамічної надійності й довговічності конструкцій мають ключове значення. Методика дає змогу не лише оптимізувати геометричні параметри конструкцій на етапі проєктування, а й використовувати результати числового моделювання для моніторингу стану об’єктів на етапі експлуатації - з метою виявлення зон ризику, попередження резонансних явищ та забезпечення безпеки і ефективності роботи складних інженерних систем.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, пружні пластинки та оболонки, аксіальна симетрія, теорія потенціалу, взаємодія з рідиною, комп’ютерне моделювання, методи граничних і скінченних елементів, коливання, механіка руйнування, розвинення тріщини, лопатки турбомашин, пружна основа, надійність та довговічність конструкцій.

Список публікацій здобувача

Статті в виданнях SCOPUS та журналах категорії Б

1. Strelnikova E., Choudhary N., Degtyariov K., Kriutchenko D., Vierushkin I. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. Periodical, collection of papers: Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier BV. 2024. (Scopus Q1), Volume 169, Part B, 105999. DOI: 10.1016/j.enganabound.2024.
2. Vierushkin I.A., Strelnikova E.A., Hipersingular integral equation method in numerical simulating frequencies and modes of circular plate immersed into liquid. Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи, 2020, вип. 48, С. 6-21. DOI: 10.26565/2304-6201- 2020-48-01.
3. Вєрушкін І.О., Кононенко Є.С.. Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінченних та граничних елементів, Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи, 2021, вип. 49, С. 16-28. DOI: 10.26565/2304-6201-2021-49-02.
4. Вєрушкін І.О., Стрельнікова О.О. Комп’ютерне моделювання коливань рідини в резервуарах з пружною основою Вінклера, Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2022, №2(133), С. 91–100. DOI: 10.32782/1995-0519.2022.2.12

Матеріали апробаційного характеру

5. Вєрушкін І.О., Стрельнікова О.О.. Дослідження гідропружних коливань з використанням методу гіперсингулярних рівнянь, Прикладні питання математичного моделювання, 2021, вип. 4, № 2.1, С.32-47, https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.3

6. Вєрушкін І.О., Зайденварг О.Л.,. Науменко Ю.В, Лістрова Д.В.. Числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь в кругових областях, Sciences of Europe, 2021, т. 2, № 85, с. 35–41,

7. Gnitko, V., Martynenko, O., Vierushkin, I., Kononenko, Y., Degtyarev, K. Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units. In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2023, https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29 (SCOPUS)

8. Дегтярьов К.Г., Вєрушкін І.О., Крютченко Д.В., Стрельнікова О.О.,Зайденварг О.Л., Науменко Ю.В. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в крайових задачах механіки руйнування. Прикладні питання математичного моделювання 2023, 6(2), С. 39-48. https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5.

9. Gnitko V.I., Karaiev A.O., Degtyariov K.G., Vierushkin. I.A., Strelnikova E.A., Singular and hypersingular integral equations in fluid-structure interaction analysis, WIT Transactions on Engineering Sciences, England, 2022, vol. 134, P. 67-79, DOI:10.2495/BE450061,(SCOPUS)

10. Degtyariov K., Vierushkin I., Gnitko V., Korneichuk N., Strelnikova E. Fuzzy Analysis of Fluid Vibrations in Liquid Storage Tanks under Wind Loads 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 - Conference Proceedings, 2023, p.1-6, DOI: 10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312962 (SCOPUS)

11. Дегтярьов К.Г., Крютченко Д.В., Гнітько В.І., Вєрушкін І.О., Корнійчук М.Т. Комп'ютерне моделювання гідропружних коливань елементів конструкцій за нечітких умов навантаження, Прикладні питання математичного моделювання, 2023, т. 6, №2, С. 49-59. https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

12. Degtyariov K., Gnitko V., Vierushkin I. and Korneichuk M. Boundary Element Method in Hydroelastic Interaction Problems of Structural Elements, Book chapter in "The Fundamentals of Boundary Element Methods" 2024 by Nova Science Publishers, Inc. https://doi.org/10.52305/KFFP5657 (SCOPUS).

13. Degtyariov, K., Gnitko, V., Steinwolf, A., Vierushkin, I. (2025). Boundary and Finite Element Methods in Crack Propagation Analysis..

https://doi.org/10.1007/978-3-031-82979-6_29 (SCOPUS). Sierikova, O., Kriutchenko, D., Vandyshev, K., Vierushkin, I. (2025). Structure Elements with Crack-Type Defects Durability Estimation. In: Altenbach, H., Gao, XW., Syngellakis, S., Cheng, A.HD., Lampart, P., Tkachuk, A. (eds) Advances in Mechanical and Power Engineering II. CAMPE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82979-6_30 ((SCOPUS)

Тези доповідей на міжнародних конференціях

14. Сєрікова О.М., Стрельнікова О.О., Верушкін І.О. Дослідження власних частот коливань резервуарів на пружній основі Вінклера, «Нові матеріали і технології в машинобудуванні», НТУУ "КПІ", Київ, 2023, с. 308–309.

15. Korobka A., Sierikova E., Vierushkin I. Numerical simulation of vibration frequencies for thin elastic circle plate, , 3rd International Conference of Scientific Research, May 3–4, 2023, Baku.

16. Сєрікова О.М., Стрельнікова О.О., Крютченко Д.В., Верушкін І.О.. Визначення граничних умов моделі резервуара як жорсткої циліндричної оболонки з пружним днищем на пружній основі Вінклера. Труди МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ - 2023» до 145-річчя від дня народження С.П.Тимошенка С.329-330, Київ, Дніпро, Львів, Харків – 2023.

17. Sierikova E., Strelnikova E., Vierushkin I.. Study of oscillations natural frequencies for empty and filled with environmentally hazardous liquid cylindrical elastic tanks. 6th INTERNATIONAL EDUCATION AND INNOVATIVE SCIENCES CONGRE, Burdur Mehmet Akif Ersoy University, TÜRKİYE, p.724-726, 2022.

18. Sierikova E., Strelnikova E., Vierushkin I.. Boundary conditions determination of the tank model as a rigid cylindrical shell with the elastic bottom on the elastic Winkler base, 9th International mardin artuklu scientific researches conference January 20-22, 2023, Mardin, TÜRKİYE.

SUMMARY

Verushkin I.O. Methods of Boundary Integral Equations in Boundary Value Problems of Potential Theory and Linear Elasticity Theory

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 113 "Applied Mathematics" – A.M. Podgorny Institute of Power Engineering and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The design of modern high-tech machines, units, and engineering structures requires extremely accurate analysis and justification of their structural reliability, especially under conditions of intense operational loading. One of the key requirements for such systems is their ability to withstand the combined effects of mechanical, thermal, hydrodynamic, and vibrational loads, which may vary over time and have complex spatial distributions. This necessitates an in-depth understanding of the stress-strain state of structural elements, the identification of stress and strain fields, spectral analysis of natural vibrations, and evaluation of potential zones of stress concentration and failure scenarios.

A significant portion of such engineering components consists of thin-walled or shell-like elements with complex geometries that operate in aggressive environments — including airflows, water, steam, fuel, and other fluids or gases. For instance, radial-axial blades in turbines and compressors rotate at high speeds and are constantly exposed to the working fluid. These components are simultaneously subjected to centrifugal, thermal, and aerodynamic loads, which considerably complicate their analysis and optimization.

Typical examples of such elements include:

- blades of axial and centrifugal compressors and hydraulic turbines;
- shells and casings of thermal reactors and boilers;
- tanks for storing compressed gases, fuels, and explosive substances;
- cylindrical and spherical vessels in liquid-propellant systems of aerospace vehicles;
- acoustically loaded skins of aircraft and other vehicles;
- thin-walled elements of chemical equipment operating under high pressure.

Modern trends toward weight reduction and improved energy efficiency push engineers to design lighter and thinner structures, which significantly increases their sensitivity to vibrations and local defects. Even minor geometric deviations, such as microcracks, notches, or thickness variations, may lead to significant load redistribution and reduced durability of the entire structure.

To ensure the reliable operation of such structures in complex environmental conditions, it is essential to employ accurate mathematical models and effective numerical methods capable of accounting for:

- complex shapes and axial symmetry;
- hydroelastic and aeroelastic interactions with the environment;
- the presence of crack-like defects and stress concentration zones;
- variable or cyclic loading regimes;
- different vibration loading.

The development of such methods is of fundamental importance for engineering science, as it enables both evaluation of structural integrity and prediction of risk zones, geometric optimization of components, tuning to safe operating modes, and prevention of dangerous resonance phenomena.

This dissertation is focused on the development of numerical methods for solving singular and hypersingular boundary integral equations that arise in mathematical modeling of the stress-strain state and vibrations of structural elements with axial symmetry, cracks, or fluid interaction. The relevance of the study lies in the need to improve the accuracy of engineering calculations to ensure reliability and longevity of modern machines and structures, especially in the fields of energy, turbomachinery, and mechanical engineering.

The work formulates boundary value problems for the Laplace and Lamé equations, problems involving fluid–structure interaction, heat conduction, and crack-induced singularities. Numerical methods are developed for solving these problems using the boundary element method, particularly for bodies with axial symmetry. Special attention is given to the construction of efficient algorithms for computing stress fields and natural frequencies and modes of oscillation in structures under complex loading conditions.

Scientific novelty lies in the substantiation and numerical implementation of new approaches to solving hypersingular integral equations using potential theory and the

boundary element method. New analytical and numerical solutions are obtained, which may serve as benchmark examples for verifying other numerical techniques.

A new approach is developed based on the application of hypersingular integral equations in combination with the method of prescribed forms. This enables efficient simulation of oscillatory processes in axisymmetric structural components submerged in fluid. Unlike classical finite element methods, the proposed method reduces the boundary value problem to a one-dimensional hypersingular integral equation, thereby significantly lowering computational cost while maintaining high accuracy. The approach is particularly effective for analyzing vibrations of thin circular plates, fluid-filled tanks, and shell structures resting on elastic foundations.

The main objective of this dissertation is to develop efficient numerical methods for solving singular and hypersingular integral equations, with subsequent application to the analysis of the strength and vibrations of structural elements that interact with a fluid or contain cracks.

Object of the study – the strength and vibration behavior of energy equipment components that interact with a fluid during operation or develop defects as a result of long-term use.

Subject of the study – mathematical models and solution methods for boundary value problems in continuum mechanics that can be reduced to two-dimensional and one-dimensional singular and hypersingular integral equations.

Research methods. The dissertation employs methods of potential theory, boundary integral equations, the finite element method, the boundary element method, Fourier series expansions, and the method of prescribed forms. The dissertation presents numerical algorithms for computing the effects of added fluid mass, the contact interaction with a Winkler-type elastic foundation, and stress concentrations near crack tips. The developed method is validated through comparison with finite element models and analytical solutions, demonstrating its accuracy and robustness.

The results of the dissertation can be applied in the design and operation of tanks, shells, fuel vessels, and other structural elements operating in dynamic environments. The proposed approaches are particularly relevant for the aerospace, energy, defense,

and chemical industries, where vibration stability, dynamic reliability, and structural durability are of critical importance. The methodology enables optimization of structural parameters at the design stage and supports condition monitoring during operation, allowing identification of critical areas, prevention of resonances, and ensuring safe and efficient system performance.

Keywords: Singular integral equations, elastic plates and shells, axial symmetry, potential theory, fluid interaction, computer modeling, boundary and finite element methods, vibrations, fracture mechanics, crack propagation, turbomachine blades, elastic foundation, structural reliability and durability.

LIST OF APPLICANT PUBLICATIONS

Articles published in SCOPUS-indexed editions and Category B journals

1. Strelnikova E., Choudhary N., Degtyariov K., Kriutchenko D., Vierushkin I. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. Periodical, collection of papers: Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier BV. 2024. (Scopus Q1), DOI (link): 10.1016/j.enganabound.2024.105999
2. Vierushkin I.A., Strelnikova E.A., Hipersingular integral equation method in numerical simulating frequencies and modes of circular plate immersed into liquid Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи, вип. 48, 2020, С. 6-21. DOI: 10.26565/2304-6201- 2020-48-01
3. Вєрушкін І.О.,. Кононенко Є.С. Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінченних та граничних елементів, Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи», вип. 49, 2021, с. 16-28, DOI: 10.26565/2304-6201-2021-49-02
4. Вєрушкін І.О., Стрельнікова О.О. Комп'ютерне моделювання коливань рідини в резервуарах з пружною основою Вінклера, *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. – 2022. – №2(133). – С. 91–100. – DOI: 10.32782/1995-0519.2022.2.12

Approbation materials

5. Вєрушкін І.О., Стрельнікова О.О.. Дослідження гідропружних коливань з використанням методу гіперсингулярних рівнянь, Прикладні питання математичного моделювання, вип. 4, № 2.1, 2021. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.3
6. Вєрушкін І.О., Зайденварг О.Л., Науменко Ю.В., Лістрова Д.В.. Числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь в кругових областях, *Sciences of Europe*, № 85, т. 2, с. 35–41, 2021.

7. Gnitko, V., Martynenko, O., Vierushkin, I., Kononenko, Y., Degtyarev, K. (2023). Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units. In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29 (SCOPUS)

8. Дегтярьов К.Г., Вєрушкін І.О., Крютченко Д.В., Стрельнікова О.О.,Зайденварг О.Л., Науменко Ю.В. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в крайових задачах механіки руйнування Прикладні питання математичного моделювання 2023, 6(2), С. 39-48, https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5.

9. . Gnitko V/I., Karaiev A.O., Degtyariov, Vierushkin I.A.,. Strelnikova E.A, Singular and hypersingular integral equations K.G. in fluid-structure interaction analysis, VWIT Transactions on Engineering Sciences, England, 2022, vol. 134, P. 67-79, DOI:10.2495/BE450061 (SCOPUS)

10. Degtyariov, K., Vierushkin, I., Gnitko, V., .Korneichuk, N., Strelnikova, E. Fuzzy Analysis of Fluid Vibrations in Liquid Storage Tanks under Wind Loads 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 - Conference Proceedings, 2023, p.1-6, DOI: 10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312962 (SCOPUS)

11. Дегтярьов К.Г., Крютченко Д.В., Гнітько В.І., Вєрушкін І.О., Корнійчук М.Т. Комп'ютерне моделювання гідропружних коливань елементів конструкцій за нечітких умов навантаження, Прикладні питання математичного моделювання, 2023, т. 6, №2, с. 49-59. https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

12. Degtyariov K., Gnitko V., Vierushkin I. and Korneichuk M. Boundary Element Method in Hydroelastic Interaction Problems of Structural Elements Book chapter in "The Fundamentals of Boundary Element Methods" 2024 by Nova Science Publishers, Inc. https://doi.org/10.52305/KFFP5657 (SCOPUS)

13. Degtyariov, K., Gnitko, V., Steinwolf, A., Vierushkin, I. (2025). Boundary and Finite Element Methods in Crack Propagation Analysis.. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82979-6_29; Sierikova, O., Kriutchenko, D., Vandyshev, K., Vierushkin, I. (2025). Structure Elements with Crack-Type Defects Durability Estimation. In: Altenbach, H., Gao, XW., Syngellakis, S., Cheng, A.HD., Lampart, P., Tkachuk, A. (eds) Advances in Mechanical and Power Engineering II. CAMPE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82979-6_30. (SCOPUS);

Conference paper abstracts

14. Сєрікова О.М., Стрельнікова О.О., Верушкін І.О. *Дослідження власних частот коливань резервуарів на пружній основі Вінклера*, «Нові матеріали і технології в машинобудуванні», НТУУ "КПІ", Київ, 2023, с. 308–309.

15. Korobka A,, Sierikova O., Vierushkin I. Numerical simulation of vibration frequencies for thin elastic circle plate, , 3rd International Conference of Scientific Research, May 3–4, 2023, Baku

16. Сєрікова О.М.,. Стрельнікова О.О, Крютченко Д.В., Верушкін .І.О. Визначення граничних умов моделі резервуара як жорсткої циліндричної оболонки з пружним днищем на пружній основі Вінклера. Труди МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ - 2023» до 145-річчя від дня народження С.П.Тимошенка С.329-330, Київ, Дніпро, Львів, Харків – 2023

17. Sierikova E., Strelnikova E., Vierushkin I.. Study of oscillations natural frequencies for empty and filled with environmentally hazardous liquid cylindrical elastic tanks. 6th INTERNATIONAL EDUCATION AND INNOVATIVE SCIENCES CONGRE, Burdur Mehmet Akif Ersoy University, TÜRKİYE, p.724-726, 2022

18. Sierikova E., Strelnikova E., Vierushkin I.. Boundary conditions determination of the tank model as a rigid cylindrical shell with the elastic bottom on the elastic Winkler base, 9th International mardin artuklu scientific researches conference January 20-22, 2023, Mardin, TÜRKİYE

Зміст

ВСТУП 17
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МІЦШСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ В ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ УМОВАХ. 24
Висновки а розділом 1. 31
РОЗДІЛ 2 ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЗАДАЧАХ 32
ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ У ТІЛАХ З ТРІЩИНАМИ І ЗАДАЧАХ ГІДРОАЕРОПРУГОСТІ 32
2.1. Зведення задачі з визначення гідропружних коливань елементів конструкцій до сингулярних інтегральних рівнянь 33
2.2. Гіперсингулярні рівняння в задачах про концентрацію напружень у пружних тілах з тріщинами 40
2.3. Гіперсингулярні рівняння в плоских задачах 46
2.4. Висновки за розділом 51
РОЗДІЛ 3 ГІПЕРСИНГУЛЯРНІ РІВНЯННЯ В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ 53
3.1. Основні рівняння 53
3.2. Апроксимація поверхні інтегрування плоскими елементами 55
3.3. Обчислення скінченних частин Адамара гіперсингулярних інтегралів по плоскому многокутнику 58
3.4 Обчислення скінченних частин Адамара одновимірних гіперсингулярних інтегралів по колу 61
3.5 Аналітичний розв'язок двовиміпног гіперсингулярного інтегрального рівняння по колу 63
3.6. Числовий аналіз концентрації напружень в пружних тілах з тріщинами 66
3.7.Висновки за розділом 75
РОЗДІЛ 4 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ГІДРОПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ТА СИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ 82
4.1. Рівняння руху деформівного тіла 82
4.2. Основні співвідношення для опису руху рідини 84
4.3 Визначення тиску на контактуючі з рідиною поверхні елементу конструкції 86
4.4. Числові результати з використання гіперсингулярних рівнянь при двобічному обтіканні елементів конструкцій рідиною 91
4.5 Аксіально-симетричне формулювання 97
4.7.Висновки за розділом 116

РОЗДІЛ 5 КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ ВІНКЛЕРА 119
5.1 Формулювання задачі та методика дослідження 119
5.2 Визначення власних форм коливань рідини 125
5.3 Аналіз числових результатів 129
5.4 Висновки за розділом 132
ВИСНОВКИ 134
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 136
Додаток А 147

ВСТУП

Актуальність теми дослідження.

У сучасній інженерній практиці, зокрема в хімічному машинобудуванні, транспорті, турбобудуванні, двигунобудуванні та енергетиці, широко використовуються елементи тонкостінних конструкцій, що функціонують в умовах інтенсивних технологічних навантажень і взаємодіють із повітряним або водним середовищем. До таких елементів належать, зокрема, лопаті робочих коліс радіально-осьових та зворотно-лопатевих гідротурбін, компоненти повітряних установок, а також резервуари й баки для зберігання пального та інших вибухонебезпечних речовин.

Створенню математичних моделей та побудові комп'ютерних методів для визначення напружено-деформованого стану, коефіцієнтів інтенсивності напружень в ізотропних та анізотропних тілах з тріщинами, визначенню статичних та динамічних характеристик елементів конструкцій при взаємодії з середовищем займалися видатні українські та закордонні вчені: К.В. Аврамов, О.Є. Андрійків, Л.Т. Бережницький, В.Т. Грінченко, Я.М. Григоренко, Д.В. Грилицький, О.М. Гузь, В.С. Гудрамович, О.П. Дацишин, А.П. Дзюба, Я.Л. Іваницький, А.А. Камінський, Г.С. Кіт, А.С. Космодаміанський, А.Я. Красовський, І.О. Луковський , К.В. Максименко-Шейко, В.В. Міхаськів, В.І Мосаковський, В.О. Осадчук, В.В. Панасюк, Я.С. Підстригач, В.Г. Піскунов, В.Г. Попов, Г.Я. Попов, В.Л. Рвачов, Г.М. Савін, М.П. Саврук, Н.В. Сметанкіна, М.М. Стадник, Г.Т. Сулім, О.М. Тимоха, С.В. Угримов, А.Ф. Улітко, Л.А. Фільштинський, М.Л. Фільштинський, М.В. Хай, В.П. Шевченко, М.В. Чернобривка, С.Я. Ярема, С. Аткінсон (C. Atkinson), Г. Лібовіц (H. Libowitz), Ф. Ердоган (F. Erdogan), Дж. Р. Ірвін (G.R. Irwin), Р. Ібрагім (R. Ibragim), Д.Л. Клементс (D.L. Clements), П. Періс (P. Paris) та інші.

Проєктування високоефективних машин і споруд із заданим рівнем надійності вимагає точного визначення міцнісних характеристик їх елементів - полів напружень і деформацій, а також частот і форм власних коливань. Це, у свою

чергу, дозволяє оцінити граничний стан конструкції та здійснити її оптимальне налаштування з метою уникнення резонансних і деструктивних явищ.

Особливістю таких конструкцій є їх експлуатація в середовищі рідини або газу, що зумовлює необхідність урахування гідро- та аеропружних ефектів під час розрахунків. Це, своєю чергою, вимагає визначення полів напружень і деформацій, а також частот та форм власних коливань із урахуванням дії тиску з боку рідинного чи газового потоку на пружне тіло.

У зв’язку з цим набуває особливої актуальності розробка уточнених математичних моделей і розрахункових методів, здатних враховувати складну геометрію конструкцій, наявність тріщиноподібних дефектів, а також вплив навколишнього середовища, зокрема потоків рідини та газу, на напружено-деформований стан і вібраційні характеристики конструктивних елементів.

Методи теорії потенціалу широко застосовуються для числового розв’язання крайових задач математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями або системами рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. Одним із провідних та високоефективних числових підходів до таких задач є метод граничних елементів. Незважаючи на те, що формулювання гранично-елементних задач змінюються залежно від типу диференціальних рівнянь через різницю у функціях Гріна, інтегральні рівняння теорії потенціалу та пружності мають схожу структуру. Крім того, характер поведінки функцій Гріна в околі особливих точок демонструє спільні типові риси для широкого спектра задач механіки.

Сьогодні існує велика кількість ефективних числових методів для аналізу міцності, коливань, стійкості та процесів руйнування конструкцій, що функціонують в умовах інтенсивних механічних і температурних навантажень. Однак кожна нова інженерна система, яка зазнає значних навантажень і взаємодіє з навколишнім середовищем, потребує індивідуального підходу до дослідження її міцнісних та динамічних властивостей. Це зумовлює потребу у створенні нових або вдосконаленні наявних обчислювальних методів, здатних враховувати

специфіку геометрії, матеріалу та умов експлуатації конкретних об’єктів, зокрема таких, що мають осьову симетрію.

Усе вищезазначене підтверджує обґрунтованість і наукову актуальність теми дисертаційного дослідження, яке спрямоване на побудову та обґрунтування ефективних чисельних методів для розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища, насамперед тих, що описують коливання конструктивних елементів у взаємодії з рідиною або за наявності внутрішніх дефектів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційну роботу виконано в Інституті енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України в період з 2020 по 2025 рр. відповідно до планів науково-технічних робіт з держбюджетних тем ІІІ-5-19 «Моделювання та дослідження фізичних процесів в елементах енергетичних машин з метою підвищення їх ефективності та надійності», керівник – академік НАН України А.В. Русанов (2019-2023) № ДР 0119U000655, ІІІ-25-24 «Підвищення ефективності робочих процесів та надійності елементів енергетичних машин й технологічного обладнання з використанням методів математичного і фізичного моделювання керівник – академік НАН України А.В. Русанов (2024-2027), за договором про міжнародне співробітництво між Інститутом енергетичних машин та систем ім. А.М. Підгорного НАН України та Вессекським технологічним інститутом (2011- дотепер) в рамках Agreement Between Wessex Institute of Technology, UK and A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine; сумісного індійсько -українського проєкту на тему «Advanced computational techniques for sloshing analysis in fuel tanks with baffles» Joint Ukraine-Indian Republic R&D projects, (2019–2021 pp.). Grant No.: M/21-2019.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення ефективних числових методі розв’язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь із подальшим застосуванням для дослідження міцності та коливань конструктивних елементів, що взаємодіють із рідиною, або мають тріщини.

Для досягнення цієї мети сформульовані та вирішені такі завдання:

1. Сформулювати крайові задачі для рівняння Лапласа та рівнянь Ляме, задачі визначення концентрації напружень біля тріщин у двовимірних і тривимірних тілах, та задачі взаємодії неоднорідного потоку ідеальної нестисливої рідини із гідродинамічно досконалими елементами конструкцій та звести їх до розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

2. Удосконалити метод граничних елементів для застосування при розв'язанні крайових задач механіки суцільного середовища для тіл з осьовою симетрією.

3. Довести можливість заміни поверхневих елементів пласкими при використанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

4. Провести числове моделювання концентрації напружень у тілах з тріщинами кругової та прямокутної форми в паралелепіпеді із застосуванням методу граничних елементів та методу скінченних елементів, провести дослідження кількості циклів до руйнування для паливних баків з тріщинами.

5. Дослідити вібраційні характеристики пластин, циліндричних оболонок і лопаток кільцевого вінця гідротурбіни як у повітряному середовищі, так і з урахуванням впливу приєднаних мас рідини.

6. Розробити методику наближеного обчислення впливу ґрунту як пружної основи Вінклера при коливаннях циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, з урахуванням взаємодії між динамікою рідини та деформаціями пружного днища.

Об`єкт дослідження – міцність та коливання елементів енергетичного обладнання, що при експлуатації взаємодіє із рідиною, або має дефекти внаслідок тривалої експлуатації

Предмет дослідження – математичні моделі та методи розв'язання крайових задач механіки суцільного середовища, які зводяться до двовимірних та одновимірних сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовується методи теорії потенціалу, граничних інтегральних рівнянь, методи скінчених та граничних елементів.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає у такому:

1) вперше доведено, що для довільної розімкненої гладкої поверхні *S*, для існування скінченного граничного значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на поверхні *S* необхідно і достатньо, щоб існувало скінченне граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на площині, дотичній до S;
2) вперше побудовано одновимірне гиперсингулярне рівняння, до якого зводиться крайова задача Неймана на круговій області;
3) подальшого розвитку набув метод розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що базується на гранично-елементному підході із застосуванням точних значень скінченної частини за Адамаром за довільним плоским багатокутником;
4) удосконалено метод визначення матриці приєднаних мас при визначенні частот та форм коливань вигнутих панелей та лопаток гідротурбін;
5) вперше досліджено динамічні характеристики резервуарів, частково заповнених рідиною, з урахуванням впливу пружної основи типу Вінклера.

Практичне значення результатів роботи. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком теорії і методів числового розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, до яких зводяться крайові задачі механіки суцільного середовища стосовно до визначення частот і форм коливань елементів конструкцій, що взаємодіють із рідиною, або мають тріщини. Отримані у роботі числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних рівнянь можуть слугувати тестовими прикладами для оцінки точності різних числових методів. Числові результати з оцінки частот і форм вільних коливань елементів конструкцій можуть бути використані під час аналізу коливань резервуарів, днищ та інших тонкостінних конструкцій, занурених у рідину, що є важливим для запобігання резонансним явищам і забезпечення безпечної експлуатації обладнання. Ре-

зультати дослідження коливань резервуарів із врахуванням пружної основи Вінклера можуть бути безпосередньо використані при визначенні частотної характеристики системи «рідина–резервуар–основа», що дає змогу здійснювати перевірку на збіг власних частот із частотами технологічних або сейсмічних впливів. Таким чином, методика сприятиме підвищенню надійності та довговічності резервуарних споруд.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. В роботах, виконаних у співавторстві, вклад здобувача полягає у наступному: [1,2] – проведено тестові розрахунки та надано аналіз отриманих результатів, участь у постановці задач та формулюванні висновків; [2-4, 17] – побудований числовий метод та проведено числовий аналіз елементів конструкцій [5-8,16] – розроблено розрахункові методики визначення динамічних характеристик та отримані числові результати; [9-18] – запропоновано розрахункові моделі, створено програмний код, здійснено числові розрахунки.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися та дістали схвалення на міжнародних конференціях, симпозіумах і наукових семінарах:

1. 45th International Conference on Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods, May 24–26, 2022, Online, UK https://prp.unicamp.br/noticias/45th-international-conference-boundary-elements-and-other-mesh-reduction-methods/
2. International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering (CAMPE-2021) https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-18487-1
3. ITCSM-2022, May 28–29, 2022, pp. 4–5.
4. 2023 IEEE KhPI Week on Advanced Technology. https://bci.kname.edu.ua/en/2023-ieee-4th-khpi-week-on-advanced-technology
5. 6th INTERNATIONAL EDUCATION AND INNOVATIVE SCIENCES CONGRE, Burdur Mehmet Akif Ersoy University, p.724-726, 2022

6. МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ - 2023» до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка.
7. НОВІ МАТЕРІАЛИ І ТЕХНОЛОГІЇ В МАШИНОБУДУВАННІ - XV Міжнародна науково-технічна конференція присвячена 125- річчю Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського 2023
8. 9th International mardin artuklu scientific researches conference January 20-22, 2023, Mardin, TÜRKİYE https://epale.ec.europa.eu/en/content/9th-international-mardin-artuklu-scientific-researches-conference
9. International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering CAMPE 2023 https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-82979-6

Публікації. Матеріали дисертації досить повно викладено у 18 наукових працях автора за темою дисертації.

Структура та обсяг дисертацій. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел з 88 найменувань на 11 сторінках та додатку на 3 сторінках, а також містить 18 рисунків та 14 таблиць. Загальний обсяг роботи складає 149 сторінок, включаючи 135 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МІЦШСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ В ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ УМОВАХ

Упродовж останніх десятиліть в інженерній практиці досягнуто значного прогресу у створенні високоефективних і надійних машин, конструкцій та споруд, які експлуатуються в умовах підвищених технологічних навантажень і складної взаємодії з навколишнім середовищем - рідиною або газом. У зв'язку з цим однією з основних вимог на етапі проєктування таких конструкцій є забезпечення достатньої міцності й жорсткості, а також високої точності оцінки власних частот коливань елементів обладнання. Розрахунок власних частот є важливим як для прогнозування залишкового ресурсу вже діючих конструкцій, так і під час розроблення нових технічних рішень.

При проєктуванні нових систем необхідно враховувати цілу низку чинників, зокрема середні напруження, що виникають під дією відцентрових сил і статичного тиску рідини, а також змінні напруження, зумовлені зовнішніми навантаженнями. Це обумовлює потребу у створенні високоточних і обчислювально ефективних методів аналізу міцності та динаміки механічних систем.

При побудові математичної моделі інженер-дослідник зазвичай починає з аналізу поведінки малої частинки конструкції, формулюючи залежності між основними фізичними величинами, такими як переміщення, напруження та деформації. У результаті будується система диференціальних рівнянь, що описує динаміку об'єкта. Реальні механічні процеси, як правило, описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, які повинні виконуватись у деякій області G, що представляє собою область визначення задачі. Розв'язок таких рівнянь шукається з урахуванням граничних умов, заданих на межі області ∂G. У тривимірних задачах ця межа є поверхнею, яка обмежує об'ємну область G,

тоді як у двовимірних задачах G є плоскою областю, а ∂G - контуром, що її обмежує.

У процесі експлуатації лопаті гідротурбіни, інші елементи гідротурбінного та енергетичного обладнання, паливні баки ракет-носіїв зазнають навантажень з боку середовища (рідини), з яким вони взаємодіють. Такі навантаження призводить до появи вимушених коливань. Якщо власні частоти коливань лопатей та частоти коливань сил збудження близькі, то існує ймовірність виникнення резонансу, що призводить до поломки обладнання.

Проблеми гідропружної взаємодії елементів конструкцій з оточуючим середовищем знаходяться в центрі уваги багатьох дослідників протягом останніх десятиліть. Ці проблеми можна умовно поділити на два класи. До першого відносяться задачі визначення динамічних характеристик таких конструкцій, які містять рідину всередині, тобто відбувається однобічний контакт поверхонь конструктивного елементу з рідиною. Цим задачам присвячені роботи [1-3], де розглядаються питання плескань рідини в жорстких оболонкових системах. В роботі [4] вивчені коливання пружних резервуарів, частково заповнених рідиною, в [5,6] досліджені вільні коливання пружних кришок гідротурбіни при взаємодії з рідиною.

Другий клас питань пов'язаний з визначенням динамічних характеристик пружних тонких конструкцій, несучі поверхні яких знаходяться у двобічному контакті з рідиною. Це лопаті робочих коліс радіально - осьових та поворотно-лопатевих гідротурбін [7,8], лопаті потужних повітряних установок [9,10], крила літаків [11], ін.

Для числового розв’язання таких задач розроблені потужні обчислювальні методи. Серед них зазначимо метод скінченних різниць, [12], методи скінченних та граничних елементів [13], метод R функцій [14, 15].

Багато сучасних машин і пристроїв функціонують в умовах дедалі жорсткіших технологічних навантажень. Хоча натурні експерименти вважаються найбільш надійним та ефективним інструментом оцінки міцності, їх реалізація є дуже дорогою процедурою й не завжди безпечною. Тому для забезпечення надійної роботи обладнання необхідно ще на етапі проєктування аналізувати

міцність і динамічні характеристики з використанням комп'ютерних технологій для проведення віртуальних випробувань. Це й зумовило стрімкий розвиток методів комп'ютерного аналізу, особливо останніми десятиліттями. Більшість практичних задач описуються крайовими задачами для рівнянь у частинних похідних або їхніх систем. Числові методи розв'язання таких рівнянь поділяються на два основні класи: методи обласного типу (DT) та методи граничного типу (BT). Серед методів обласного типу варто зазначити метод скінченних елементів [16], метод скінченних різниць [17], а також методи скінченних об'ємів [18], [19]. Основною перевагою методів граничного типу над методами обласного типу є зменшення розмірності задачі на одиницю. Тому впродовж останніх десятиліть інженери та науковці все більше цікавляться подібними методами зменшення сітки [20]. До таких обчислювальних методів належать метод граничних елементів (МГЕ) та інші методи зменшення сітки, які здатні забезпечити високоточні числові результати для розв'язання різноманітних інженерних задач [21], [22]. Зазначимо, що попередником як методів типу області, так і методів типу межі є метод зважених нев'язок. Різниця між методами DT і BT проявляється у виборі базисних функцій. У методах BT базисними функціями є сингулярні або фундаментальні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь. Це призводить до появи сингулярних або гіперсингулярних інтегральних рівнянь при зведенні задач до поверхневих або контурних інтегралів. Отже, актуальним завданням є розроблення нових ефективних методів числового розв'язання таких інтегральних рівнянь.

Гіперсингулярні інтегральні рівняння (ГІР) розглядаються як ефективний інструмент для розв'язання широкого класу крайових задач механіки та математичної фізики. Серед них варто відзначити задачі з тріщинами в механіці руйнування [23], задачі взаємодії рідина–тверде тіло [24], дифракцію електромагнітних хвиль [25], аеродинамічні задачі, пов'язані з великими [26] і малими [27] вітровими та морськими турбінами [28], аналіз напружено-деформованого стану композитних і нанокомпозитних матеріалів [29]. Зазначимо, що застосування сингулярних інте-

гральних рівнянь до крайових задач теорії потенціалу, механіки твердого тіла, гідромеханіки та математичної фізики привертає увагу інженерів і науковців ще з середини минулого століття, коли з'явилися перші фундаментальні роботи у цій галузі. Однак тоді складність аналітичної підготовки та відсутність ефективних числових схем не сприяли розвитку методу. Сучасні можливості комп'ютерних технологій дозволяють зробити рішучий крок у напрямку застосування цього складного математичного апарату для розв'язання актуальних інженерних задач [30].

Революційним кроком в цьому напрямку стали дослідження Карлоса Бреббії [13], які стали основоположними у створенні та розвитку методу граничних елементів (МГЕ). Спочатку цей метод був розроблений для задач теорії потенціалу [33], а згодом адаптований до задач теорії пружності [34] завдяки аналогії між фундаментальними розв'язками обох теорій. Звернімо увагу, що в [35] були розглянуті переважно сингулярні інтегральні рівняння та їх системи без узагальнення на гіперсингулярні рівняння.

Одновимірні ГІР досліджувались у [36], де були розроблені методи сплайн-колокації з використанням сплайнів першого порядку для апроксимації розв'язків нелінійних гіперсингулярних інтегральних рівнянь. У [37] було отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа на площині. Теоретичні аспекти ГІР викладені у [38]. Питання числової реалізації та розроблення ефективних методів розв'язання сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь розглядаються у працях [39]–[41].

Водночас залишаються недостатньо вивченими питання обґрунтування методів, оптимального вибору точок колокації, знаходження аналітичних розв'язків для тестування числових алгоритмів розв'язання ГІР. Частина з цих питань розглядається у даному дослідженні.

Практикуючі інженери стикаються з численними викликами під час проєктування та сейсмічного аналізу резервуарів для зберігання рідин. Такі резервуари є критично важливими елементами життєзабезпечення та промислової інфраструк-

тури. Наземні циліндричні резервуари використовуються для зберігання різноманітних рідин, зокрема питної води, запасів води для пожежогасіння, сирої нафти, вина та скрапленого природного газу. Плескання вільної поверхні рідини може пошкодити дахи та верхні частини резервуарів, а також резервуари, що використовуються в космічних апаратах. Огляд сучасного стану проблеми плескання рідини в резервуарах і сховищах подано в [42].

У порівнянні з методами обласного типу, такими як метод скінченних елементів, метод граничних елементів має низку переваг, зокрема стабільність обчислювальних процесів, високу точність, швидку збіжність і дискретизацію лише по межі, що дозволяє зменшити розмірність задачі на одиницю й суттєво скоротити час обчислень та обсяг пам'яті. Водночас математичний апарат, який використовується у формулюваннях МГЕ, часто здається складним і малознайомим для користувачів, особливо під час числового моделювання, що базується на обчисленні сингулярних і гіперсингулярних інтегралів.

Останніми роками були розроблені альтернативні методи граничного типу, зокрема безсіткові та інтеграційно-вільні підходи [43]–[45]. Обидва ці методи ґрунтуються на методі фундаментального розв'язку (МФР), основною ідеєю якого є використання заданих положень джерельних точок. МФР належить до безсіткових методів граничного типу, що базуються на колокаційному підході. Щоб уникнути сингулярності фундаментальних розв'язків, джерела розміщують на фіктивних межах, які знаходяться всередині або ззовні області обчислень, залежно від типу задачі - внутрішньої чи зовнішньої. Цей метод є математично простим, оскільки не потребує побудови сітки й дозволяє уникнути обчислення складних сингулярних інтегралів. Проте основною проблемою методу МФР є правильний вибір набору точок коллокації.

Нова концепція коефіцієнтів інтенсивності джерела (КІД) для ізоляції сингулярності фундаментальних розв'язків була запропонована в методі сингулярної границі (МСГ) [43], [45]. У цьому методі точки розміщення джерел розміщуються на межах, збігаючись з точками колокації. Концепцію КІД вперше було запропо-

новано в [43], де розроблено метод оберненої інтерполяції з використанням набору зразкових точок, розміщених у середині області. У нещодавніх дослідженнях цей метод успішно застосовувався до задач теорії потенціалу [46], теплопровідності [47], акустичної течії Стокса [48], а також задач для бігармонічних операторів [49]–[50].

Проблеми гідропружної взаємодії (fluid–structure interaction, FSI) вже протягом кількох десятиліть викликають значний інтерес у науковців та практикуючих інженерів. Головною рисою конструктивних елементів, що розглядаються в цих задачах, є їх робота в умовах взаємодії з повітрям або водою. Внаслідок цього для визначення міцнісних характеристик необхідно розв'язувати зв'язані задачі гідро- та аеропружності, тобто знаходити поля напружень і деформацій, а також частоти коливань з урахуванням тиску рідини або газу, що діє на пружне тіло.

Серед таких задач особливо актуальними є питання оцінки динамічних характеристик робочих коліс турбін типу Каплана та Франсіса [51], лопатей і кришок [52], парових і вітрових турбінних установок [53], [54], мікро- і нанотрубок [55], паливних баків [56] та резервуарів для зберігання нафти [57].

Умовно задачі FSI поділяють на два класи. Перший охоплює задачі визначення динамічних характеристик конструкцій, які перебувають в однобічому контакті з рідиною. У працях [58]–[60], присвячених таким задачам, розглядається проблема плескання рідини в жорстких оболонкових системах. Коливання пружних конструкцій, що містять рідину, досліджуються в [55], [61]–[63].

Другий клас задач стосується двобічного контакту з рідиною при моделюванні динамічних характеристик лопатей гідротурбін, потужних вітротурбін [54], крил літаків [64] тощо. Для безвихрових потоків ідеальної та нестисливої рідини найефективніші методи ґрунтуються на використанні сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь із застосуванням методу граничних елементів для їх числової реалізації [31], [65].

У згаданих роботах гіперсингулярні інтегральні рівняння виникають при моделюванні задач двосторонньої взаємодії, тоді як сингулярні інтегральні рівняння

з логарифмічними сингулярностями та сингулярностями типу Коші описують задачі одностороннього контакту.

Актуальним питанням з проблем гідро-пружної взаємодії є визначення міцності резервуарів та ємностей з рідиною, особливо при дії раптово прикладених навантажень. Це можуть бути сейсмічні впливи, або ударні навантаження внаслідок вибухів, падінь літаків та ін. Найчастіше вказані резервуари моделюються як жорсткі оболонки. Але на практиці ці резервуари спираються на пружний фундамент, що сприяє зменшенню вібрацій при зовнішніх впливах.

В зазначених резервуарах при дії раптових навантажень відбуваються інтенсивні плескання рідини. Для гасіння плескань використовують різні пристрої. Так, в [66], [67] пропонуються встановити горизонтальні або вертикальні перегородки, в [68] вивчено вплив покриття у вигляді пружної мембрани на частоти коливань резервуара з рідиною. Зауважимо, що наявність покриття веде до зменшення амплітуд коливань рідини під дією інтенсивних зовнішніх навантажень. В [68] встановлено, що при деяких геометричних параметрах частоти коливань пружних стінок можуть наближатися до частот коливань вільної поверхні, що створює загрозу для безаварійної експлуатації резервуарів. Тому важливими є дослідження задач коливань резервуарів в зв’язаному формулюванні [69] - [71], з одночасним урахуванням пружності стінок [72]-[73] та плескань заповнювача. Слід зазначити, що власні частоти коливань пружних циліндричних стінок резервуара, як правило, перевищують відповідні частоти коливань його днища. У зв’язку з цим актуальною є задача оптимального вибору геометричних та механічних характеристик пружного днища з метою ефективного зниження рівня вібрацій [74], [75]. Для досягнення цієї мети застосовуються різноманітні математичні моделі пружної основи, які враховують складну взаємодію між конструкцією та середовищем [76], [77]. Таким чином, правильний вибір моделі основи та параметрів днища відіграє ключову роль у забезпеченні надійності та динамічної стійкості резервуарів та сховищ вибухонебезпечних речовин.

Висновки за розділом 1

В цьому розділі здійснено огляд наукових публікацій, присвячених тематиці дисертаційного дослідження. Зазначено, що методи теорії потенціалу широко застосовуються для числового розв’язання крайових задач математичної фізики, які описуються диференціальними рівняннями або системами рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. Одним із провідних та найефективніших числових підходів до таких задач є метод граничних елементів. Хоча гранично-елементні формулювання можуть змінюватися залежно від типу диференціальних рівнянь через відмінності у функціях Гріна, інтегральні рівняння теорії потенціалу та теорії пружності залишаються подібними. До того ж, характер поведінки функцій Гріна в особливих точках має спільні риси для широкого кола задач. Відзначено, що на сьогодні розроблено значну кількість ефективних числових методів для аналізу міцності, коливань, стійкості та руйнування конструкцій, які експлуатуються в умовах інтенсивних механічних і температурних навантажень. Утім, кожна нова інженерна конструкція, що працює під значними навантаженнями та взаємодіє з оточуючим середовищем, потребує ретельного вивчення її міцнісних і динамічних характеристик. Це обумовлює необхідність створення нових або вдосконалення наявних обчислювальних методів, здатних враховувати специфіку конкретних об'єктів, зокрема осьову симетрію. У підсумку зроблено висновок про наукову обґрунтованість і актуальність теми дисертаційного дослідження, яка присвячена побудові та обґрунтуванню ефективних числових методів для розв’язання крайових задач механіки суцільного середовища, зокрема таких, що описують коливання елементів конструкцій, які взаємодіють із рідиною або містять внутрішні дефекти.

РОЗДІЛ 2
ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЗАДАЧАХ ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ У ТІЛАХ З ТРІЩИНАМИ І ЗАДАЧАХ ГІДРОАЕРОПРУГОСТІ

Методи теорії потенціалу широко використовуються при числовому розв’язанні крайових задач математичної фізики, які описуються диференціальними рівняннями або системами диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. Головним і найбільш ефективним числовим методом в таких задачах є метод граничних елементів. Хоча граничо-елементні формулювання для різних диференціальних рівнянь у частинних похідних змінюватимуться через наявність різних функцій Гріна, інтегральні рівняння теорії потенціалу та теорії пружності подібні. Крім того, поведінка функції Гріна в особливих точках по суті однакова для цих задач. Це дозволяє почати з найпростішого граничного інтегрального рівняння, а саме того, що відповідає рівнянню Лапласа.

Інтегральні рівняння для лінійних задач, що описують потенційний потік сформульовані через застосування третьої тотожності Гріна, яка зображає гармонічну функцію як суму потенціалів простого та подвійного шарів. Зносячи точку спостереження на межу, отримуємо інтегральне рівняння, що стосується лише граничних значень і нормальних похідних гармонічної функції. Аналогом тотожності Гріна в теорії пружності еластичності є тотожність Сомільяни.

У цьому розділі наведено формулювання крайових задач просторової теорії тріщин, та деяких задач обтікання тонких несучих поверхонь. У цих задачах невідомі функції задовольняють диференціальні рівняння (або систем рівнянь) еліптичного типу. Тріщини в тілі, лопаті гідравлічних та вітряних турбін є тонкими поверхнями, обмеженими кусково-гладкими контурами. На цих поверхнях задаються відповідні граничні умови. Для розв'язання просторових задач застосовуються методи теорії потенціалу. З їхньою допомогою ці задачі

зводяться до граничних інтегральних рівнянь по поверхнях, тобто розмірність задачі зменшується на одиницю. Деякі з цих рівнянь мають звані сильні особливості в ядрах. В дисертації розроблені та удосконалені методи числового розв'язання таких рівнянь.

2.1. Зведення задачі з визначення гідропружних коливань елементів конструкцій до сингулярних інтегральних рівнянь

2.1.1 Задачі обтікання лопатей гідравлічних та вітряних турбін

Для розрахунку частот та форм вільних коливань лопатей гідравлічних та вітряних турбін необхідно вирішити допоміжне завдання визначення перепаду тиску з боку рідини на змочені поверхні.

Будемо моделювати лопаті тонкими несучими поверхнями [54, 64]. Швидкість рідини зазнає розриву на поверхнях лопаті і вихрової пелени за нею.

Розглянемо задачу обтікання тонкої несучої поверхні потоком ідеальної нестисливої рідини. Припустимо, що всюди поза несучою поверхнею S_1 і вихровим слідом S_2 за нею рух рідини є безвихровим. Тоді існує потенціал збурених швидкостей рідини $\Phi(\mathbf{x},t)$, що задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta\Phi=0, \qquad \mathbf{V}=\operatorname{grad}\Phi. \tag{2.1}$$

Тут **x** точка у просторі, **V –** швидкість рідини**.**

Для визначення тиску рідини на змочені поверхні використовуємо інтеграл Коші-Лагранжа, який може бути записаний у такому вигляді [64]:

$$P = -\rho_2\left[\frac{\partial\Phi^+(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^-(x,y,z,t)}{\partial t}\right] - \left(\operatorname{grad}\left(\Phi^+ - \Phi^-\right), \mathbf{V}_0\right), \tag{2.2}$$

де ρ_2 – густина рідини;

$\mathbf{V}_0$ - швидкість незбуреного потоку;

Φ^+ та Φ^- – граничні значення потенціалу швидкостей Φ при прямуванні точки спостереження до вихрової поверхні вздовж нормалей $\mathbf{n}^+$ и $\mathbf{n}^-$, відповідно.

Необхідно, щоб на несучій поверхні S_1 було виконано умову непротікання

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{n}^{\pm}} = (\mathbf{V}_0, \mathbf{n}) + \frac{\partial w(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{x}\in S_1, \tag{2.3}$$

а на поверхні вихрового сліду S_2 – умову відсутності перепаду тиску

$$\frac{\partial(\Phi^+-\Phi^-)}{\partial t} - \left(\mathrm{grad}\left(\Phi^+ - \Phi^-\right), \mathbf{V}_0\right)=0, \quad \mathbf{x}\in S_2\,. \tag{2.4}$$

Тут w - прогин деформованого елемента.

Вимагаємо також виконання умови згасання збурених швидкостей на нескінченності (умови Зоммерфельда)

$$\mathrm{grad}\Phi\,\big|_{\infty}=0. \tag{2.5}$$

Визначивши потенціал швидкостей, за допомогою інтегралу Коші-Лагранжа знайдемо перепад тиску рідини на змочену поверхню [64]. Для визначення потенціалу швидкостей треба сформулювати крайову задачу для рівняння Лапласа.

2.1.2 Метод заданих форм

Практично у всіх подальших застосуваннях будемо використовувати метод заданих форм.

Розглянемо задачу про вільні коливання пружних елементів конструкцій в ідеальній нестисливій рідині.

Систему рівнянь руху будемо записувати у вигляді

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{\mathrm{a}}, \tag{2.6}$$

де **L, M** - оператори пружних та масових сил;

$\mathbf{P}_a$ – тиск рідини на деформований елемент конструкції, що розглядається;

$\mathbf{U}=(u_1, u_2, w)$ – вектор-функція переміщень.

Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружного елементу конструкції в потоці. Зобразимо вектор **U** у формі $\mathbf{U}=\mathbf{u}e^{i\Omega t}$, де Ω - частота, а **u** - форма власних коливань елементу в рідині.

Шукатимемо форми власних коливань елементу у рідині у вигляді

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{u}_k, \qquad (2.7)$$

де $\boldsymbol{u}_k$ – власні форми коливань елементу конструкції без врахування приєднаних мас рідини (форми коливань у вакуумі);

c_k - невідомі коефіцієнти.

Іншими словами, форму коливань деформованого елементу в рідини визначимо як лінійну комбінацію форм власних коливань цього ж елементу у вакуумі.

Мають місце такі співвідношення [7]:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k)\ ,\ (\mathbf{M}(\boldsymbol{u}_k), \boldsymbol{u}_j) = \delta_{kj}.$$

Отже,

$$(\mathbf{L}(\boldsymbol{u}_k), \boldsymbol{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}\ .$$

де Ω_k- k-а частота власних коливань елементу у вакуумі.

Ці співвідношення показують, що форми власних коливань елемента у вакуумі ортонормовані за матрицею мас.

Нехай $\mathbf{n}$ – позитивна нормаль до поверхні. Розглянемо праву частину рівнянь (2.6). Зазначимо, що $\mathbf{P}_{\boldsymbol{a}} = P\mathbf{n}$ внаслідок того, що ідеальна рідина створює лише нормальний тиск на зануреному тілі.

Оскільки рідина ідеальна; нестислива, а всюди поза несучою поверхнею S_1 і вихрового сліду S_2 за нею рух рідини є безвихровим, то існує потенціал швидкостей, що задовольняє гармонічному рівнянню.

У разі гармонічних коливань у припущенні, що швидкість потоку, що набігає, дорівнює нулю, відповідно до інтегралу Коші-Лагранжа (2.2) величина P може бути подана таким чином:

$$P = -\rho_2 \frac{\partial(\Phi^+ - \Phi^-)}{\partial t} = -i\rho_2\Omega\left(\phi^+ - \phi^-\right)e^{i\Omega t},$$

де $\Phi = \phi e^{i\Omega t}$.

Рівняння руху двох середовищ і гранична умова сумісності запишуться у

вигляді

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \left(0,0, i\Omega\rho_2(\varphi^- - \varphi^+)\right), \qquad \nabla^2\varphi = 0. \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{S^\pm} = i\Omega w, \quad w = (\mathbf{u},\mathbf{n}) \qquad \nabla\phi \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Таким чином, потрібно визначити функції **u**, φ, що задовольняють системі диференціальних рівнянь (2.8), умові непротікання та згасання збуреної швидкості рідини на нескінченності (2.5), а також умовам закріплення деформованого елемента.

2.1.3 Фундаментальний та сингулярний розв'язки рівняння Лапласа

Для застосування методів теорії потенціалу необхідні фундаментальні та сингулярні розв'язки рівняння Лапласа.

Нехай $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ та $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – дві точки тривимірного евклідового простору E_3, а декартова відстань r між цими точками дорівнює

$$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - \xi_i)^2}.$$

Розглянемо функцію

$$f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{2.9}$$

Вважатимемо точку **x** фіксованою. Тоді $f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ можна розглядати як функцію точки $\boldsymbol{\xi}$. Очевидно, що функція $f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ розривна при $\mathbf{x} = \xi$. У будь-якій області, яка не містить точки **x**, функція $f(x,\boldsymbol{\xi})$ задовольняє рівнянню Лапласа, неперервна разом із усіма своїми похідними будь-якого порядку, але в нескінченності $f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ [78]. Разом з (2.9) сингулярним рішенням рівняння Лапласа буде і похідна від (2.9) за будь-яким напрямом **l**, тобто.

$$g(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right). \tag{2.10}$$

За сингулярними рішеннями (2.9), (2.10) можна побудувати інтегральні подання розв'язків рівняння Лапласа як потенціалів простого

$$V(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\iint_S \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}dS, \qquad \xi \in S \tag{2.11}$$

та подвійного шару.

$$W(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(\xi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}dS, \qquad \xi \in S \quad , \tag{2.12}$$

де $\mathbf{n}_\xi$ – нормаль до поверхні S у точці ξ;

$\gamma(\xi)$, $\mu(\xi)$ – задані на функції на S.

Зазначимо, що функції V і W, які визначаються формулами (2.11), (2.12), задовольняють рівняння Лапласа всюди поза S.

Як показано в [78], потенціал простого шару V неперервний при переході через S, тобто. $V^+ = V^-$ і має нормальну розривну похідну, в той час як потенціал подвійного шару W потерпає розрив при переході через S, але має неперервну нормальну похідну. Далі, обидва потенціали V і W задовольняють умові згасання на нескінченності, тобто. умові (2.5).

Зі сказаного вище ясно, що для розв'язання задачі обтікання (2.1)–(2.5) слід вибрати інтегральне подання (2.12), де інтегрування проводиться за поверхнею S_1, Будуємо при цьому поверхню вихрового сліду S_2 так, щоб було виконано умову (2.4).

2.1.4 Гіперсингулярні рівняння в задачах обтікання тонкої поверхні

Розглянемо задачу циркуляційного обтікання тонкої несучої поверхні S_1 потоком ідеальної нестисливої рідини, що описується рівняннями (2.1) – (2.5).

Будемо шукати потенціал швидкостей $\Phi(\mathbf{x},t)$, який є розв'язком крайової задачі (2.1) – (2.5), у вигляді потенціалу подвійного шару, заданого на поверхні $S=S_1\cup S_2$

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Theta(\xi,t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}dS\ , \tag{2.13}$$

де густина $\Theta(\xi,t)$ визначена на S функція, що є циркуляцією швидкості.

Як відомо [78], потенціал подвійного шару всюди поза S задовольняє рівнянню Лапласа, на нескінченності - умові Зоммерфельда (2.5), а при переході

через S потенціал $\Phi(\mathbf{x},t)$ зазнає розриву (що забезпечує можливість отримання перепаду тиску на несучій поверхні) і має неперервну нормальну похідну за загальних припущень щодо густини $\Theta(\boldsymbol{\xi},t)$. Таким чином, якщо за інтегральне подання розв'язку задачі (2.1) – (2.5) вибрати потенціал подвійного шару (2.13), то для повного розв'язання задачі треба лише задовольнити співвідношенням (2.2), (2.3). Зазначимо, що у задачах безциркуляційного обтікання [7] передбачається, що вихрова пелена не сходить з несучої поверхні, тобто поверхня S_2 відсутня, і потрібно задовольнити лише співвідношення (2.2). Формально, підставляючи подання (2.13) до (2.2), приходимо до інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Theta(\xi,t)\,\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\,dS = (\mathbf{V}_0\,,\mathbf{n}). \qquad (2.14)$$

З вищевикладеного ясно, що потенціал подвійного шару найбільш зручний як інтегральне подання розв'язку задачі, однак отримане інтегральне рівняння (2.14) відноситься до так званих гіперсингулярних рівнянь або інтегральних рівнянь з ядром типу Адамара. Аналіз питань існування та єдиності розв'язку задачі Неймана за допомогою потенціалу подвійного шару проведено у роботах [79-80].

Зазначимо, що інтеграл в (2.14) не існує ні як невласний, ні в сенсі головного значення за Коші. Це дуже ускладнює числову реалізацію подібних сингулярних рівнянь.

Інтегральне рівняння (2.14) повністю описує задачу безциркуляційного обтікання тонкої поверхні.

Перейдемо до розгляду циркуляційного обтікання. Припустимо, що вихровий слід S_2 сходить з несучої поверхні S_1. Обмежимося лінійним формулюванням задачі. У цьому випадку передбачається, що вихрова пелена рухається зі швидкістю, яка дорівнює відносної швидкості потоку. Нехай на поверхні S_1 обрані криволінійні координати ξ_1, ξ_2 так, щоб ξ_1 збігалася з напрямом відносної швидкості потоку. Як основну невідому зручно обрати інтенсивність приєднаних вихорів $\vartheta(\xi_1,\xi_2,t)$ [7]. Тоді циркуляція $\Theta_1(\xi_1,\xi_2,t)$ на несучій поверхні S_1 в момент часу t може бути визначена через функцію $\vartheta(\xi_1,\xi_2,t)$

$$\Theta_1(\xi_1,\xi_2,t)=\int_{\xi_1^L}^{\xi_1}\vartheta\left(\xi_1',\xi_2,t-\frac{\xi_1'-\xi_1}{V_0}\right)d\xi_1',$$

де ξ_1 – криволінійна координата на несучій поверхні S_1, яка спрямована вздовж відносної швидкості потоку $\mathbf{V}_0$, $V_0=\|\mathbf{V}_0\|$;

ξ_2 – криволінійна координата, спрямована вздовж "розмаху", тобто. упоперек потоку;

$\xi_1^L=\xi_1^L(\xi_2)$ – параметричне рівняння передньої кромки.

Для похідної вздовж потоку отримаємо такий вираз:

$$\frac{\partial\Theta_1(\xi_1,\xi_2,t)}{\partial\xi_1}=\vartheta(\xi_1,\xi_2,t)+\frac{1}{V_R}\int_{\xi_1^L}^{\xi_1}\frac{\partial\vartheta\left(\xi_1',\xi_2,t-\frac{\xi_1'-\xi_1}{V_R}\right)}{\partial t}d\xi_1'.$$

У стаціонарному випадку маємо

$$\frac{\partial\Theta_1(\xi_1,\xi_2,t)}{\partial\xi_1}=\vartheta(\xi_1,\xi_2,t).$$

На поверхні вихрової пелени S_2 має місце співвідношення

$$\Theta_2(\xi_1,\xi_2,t)=\int_{\xi_1^L}^{\xi_1^T}\vartheta\left(\xi_1',\xi_2,t-\frac{\xi_1'-\xi_1}{V_0}\right)d\xi_1', \qquad (2.15)$$

де $\xi_1^T=\xi_1^T(\xi_2)$ - рівняння задньої кромки.

Для похідної вздовж потоку на S_2 має місце формула

$$\frac{\partial\Theta_2(\xi_1,\xi_2,t)}{\partial\xi_1}=\frac{1}{V_0}\int_{\xi_1^L}^{\xi_1^T}\frac{\partial\vartheta\left(\xi_1',\xi_2,t-\frac{\xi_1'-\xi_1}{V_0}\right)}{\partial t}d\xi_1'.$$

Якщо як інтегральне подання рішення задачі (2.1) – (2.5) обирається потенціал подвійного шару (2.13) і виконується співвідношення (2.15), то автоматично задовольняється умова відсутності перепаду тисків на вихровій пелені (2.4). Таким чином, задача циркуляційного обтікання також зводиться до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння типу (2.14), при цьому автоматично задовольняється вся система рівнянь (2.1) – (2.5).

2.2 Гіперсингулярні рівняння в задачах про концентрацію напружень у пружних тілах з тріщинами

2.2.1 Постановка задачі Як зазначалося вище, задачі теорії тріщин і задачі обтікання тонких несучих поверхонь можуть бути описані подібними інтегральними рівняннями. В теорії тріщин отримано значну кількість аналітичних і числових рішень [83,84].

У працях [81-84] розв'язані тривимірні задачі стаціонарної теплопровідності для нескінченних тіл з тріщинами та досліджено концентрацію напружень у цих тілах. Задачі, що розглядаються, зведені в цих роботах до інтегро-диференціальних рівнянь. Вивчено теплоізольовані, тепло-активні, теплопроникні та теплопровідні тріщини. Доведено розв'язність отриманих рівнянь.

Для визначення напружено-деформованого стану тіла маємо граничні умови задачі та розв'язувальну систему трьох рівнянь еліптичного типу у частинних похідних другого порядку (рівнянь Ламе)

$$\mu\Delta u_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0, \qquad j=1,2,3. \tag{2.16}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$; $\vartheta = \mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$;

$\mu=E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву; $\lambda=E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Лами; E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона відповідно, при цьому $\nu=\lambda[2(\lambda+\mu)]^{-1}$, $E=\mu(2\mu+3\lambda)(\lambda+\mu)^{-1}$.

Якщо перші похідні переміщень настільки малі, що квадратами та добутками частинних похідних від $u_i(\mathbf{x})$ можна знехтувати, деформації ε_{ij} подаються у формі тензора малих деформацій Коші

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{i,j}\right). \tag{2.17}$$

Компоненти тензора напружень для пружного ізотропного тіла під дією зовнішніх механічних навантажень, визначаються через компоненти $u_i(\mathbf{x})$ згідно із законом Гука

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda \operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad i,j = 1,2,3 \tag{2.18}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Як в [78], введемо диференціальний оператор пружних напружень (оператор напружень класичної теорії пружності) $\mathbf{T}^{n}(\partial_x,\mathbf{n}(\mathbf{x}))= \left\| T_{\mathrm{ij}}^{n}(\partial_x, n(x) \right\|_{3\times 3}$

$$T_{ij}^{n}(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \lambda n_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}}(\partial_{\boldsymbol{x}},\mathbf{n}(\boldsymbol{x}))\mathbf{u}(\boldsymbol{x})=2\mu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} + \lambda\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu(\mathbf{n}\times \operatorname{rot}\mathbf{u})$$

Для простоти запису будемо також використовувати наступне позначення:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}= \mathbf{T}^{\mathrm{n}}(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\boldsymbol{x})).$$

Сформулюємо крайову задачу теорії пружності для довільного тривимірного тіла, обмеженого поверхнею Ω та ослабленого системою тріщин S_i (i=1,...,n). Нехай на межі Ω_1 задані кінематичні умови першої крайової задачі

$$u_i(\boldsymbol{x})=u_{il}(\mathbf{x}), \quad \underline{\boldsymbol{x}}\in\Omega_1, \qquad i=1,2,3. \tag{2.20}$$

На частини Ω_2 задані статичні умови навантаження, що відповідають другій крайовій задачі теорії пружності

$$X_i(\mathbf{x})=\sigma_{1i}\,n_1(\mathbf{x})+ \sigma_{2i}\,n_2(\mathbf{x})+ \sigma_{3i}\,n_3(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in \Omega_2,\ i=1,2,3, \tag{2.21}$$

де $n_i(\mathbf{x})=\cos(\mathbf{n},x_i)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ до поверхні $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ у точці $\mathbf{x}$.

З використанням (2.29) крайова умова (2.31) набуде вигляду

$$\mathbf{X}(\mathbf{x})= \mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x})=(X_1(\mathbf{x}),X_2(\mathbf{x}),X_3(\mathbf{x})) \ \ \mathbf{x}\in\Omega_2.$$

На поверхнях тріщин зазвичай вважають відомими нормальні та дотичні складові напруження $\mathbf{T}^{\mathrm{n\,(x)}}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})$

$$(\mathbf{T}^{\mathbf{n(x)}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))=(\mathbf{X}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad (\mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x}))=(\mathbf{X}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x})), \tag{2.22}$$

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}))=(\mathbf{X}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x})).$$

Приходимо до такої крайової задачі щодо $u_i(\mathbf{x})(i=1,2,3)$:

$$\mu\Delta u_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}=0, \quad i=1,2,3; \tag{2.23}$$

$$u_i(\mathbf{x})=u_{il}(\mathbf{x}), \ \boldsymbol{x}\in\Omega_1 \ i=1,2,3. \qquad \mathbf{T^n}(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x}\in\Omega_2;$$

$$(\mathbf{T^n}(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}))=N_{3i};$$

$$\mathbf{T^n}(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}))=N_{ki}\ ; \quad \boldsymbol{x}\in\sum_{i=1}^{n}S_i;(k=1,2),$$

де N_{3i} - задані на поверхнях тріщин нормальні зусилля,

N_{ki} - дотичні зовнішні зусилля (k = 1,2; i = 1,2, ..., n).

2.2.2 Фундаментальний та сингулярний розв'язки рівнянь Ламе

Наведемо фундаментальний та сингулярний розв'язки рівнянь теорії пружності у переміщеннях (2.26).

Нехай пружне ізотропне середовище заповнює простір E_3, і в точці $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ діє одинична зосереджена сила, спрямована по осі x_j (j=1,2,3). Тоді зсув $\Gamma^j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=(\Gamma_{1j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \Gamma_{2j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\Gamma_{3j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ точки $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, викликаний зазначеною силою, обчислюється за формулою

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\xi)=\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}-\xi|}+\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|\boldsymbol{x}-\xi|^3}\right], \qquad i,j=1,2,3. \tag{2.24}$$

Введемо матрицю фундаментальних роз в'язків Кельвіна-Сомільяни за формулою

$$\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})=\left\|\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\xi)\right\|_{3\times3}=\left\|\Gamma^1(\mathbf{x},\xi),\Gamma^2(\mathbf{x},\xi),\Gamma^3(\mathbf{x},\xi)\right\|,$$

Ця матриця симетрична, і кожен її стовпець, а також рядок задовольняють рівняння статики у переміщеннях (2.26) у довільній точці $\mathbf{x}\in E_3$, крім $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$. Якщо в точці $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ прикладено зусилля $\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})=p_j(\boldsymbol{\xi})$ (j=1,2,3), то можна визначити переміщення $\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$ у нескінченному тілі, викликані дією цього зусилля. Нехай $\mathbf{n}(\mathbf{x})=(n_1(\mathbf{x}),n_2(\mathbf{x}),n_3(\mathbf{x}))$ – довільний одиничний вектор. Для обчислення напруження у точці $\mathbf{x}$ у напрямку $\underline{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}$ скористаємося матричним диференціальним оператором напружень $T^n(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))$, визначеним формулою (2.19). За допомогою фундаментального розв'язку (2.24) та оператору напружень

побудуємо сингулярний розв'язок рівнянь (2.16). Введемо матриці

$$T^n(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=\Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}),\quad \Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=[T^n(\partial_{\xi},\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}))\Gamma(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x})]'$$

$$\Gamma_{2ij}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=\Gamma_{1ji}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}).$$

В [78] показано, що кожен стовпець матриць $\Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ і $\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ задовольняє рівнянню статики (2.16) у довільній точці $\mathbf{x}\in E_3$, крім точки $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$. Наведемо вирази для компонентів матриці $\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$

$$\Gamma_{2ij}(\mathbf{x}-\xi)=\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\left[\mu\delta_{ij}+3(\lambda+\mu)\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=1}^{3}\frac{(x_l-\xi_l)n_l(\xi)}{r^3}+\mu\left[n_i(\xi)\frac{(x_j-\xi_j)}{r^3}-n_j(\mathbf{x})\frac{(x_i-\xi_i)}{r^3}\right]\right\}. \qquad (2.25)$$

Якщо у точці $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ є стрибок зсувів $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})=(\alpha_j(\boldsymbol{\xi}),\ j=1,2,3)$, то переміщення в нескінченному тілі, обумовлені наявністю такого розриву, можуть бути обчислені за формулою $\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$.

За фундаментальним (2.24) та сингулярним (2.25) розв'язками системи (2.16) побудуємо інтегральні подання у вигляді узагальнених потенціалів теорії пружності простого та подвійного шару.

Нехай S – довільна розімкнена поверхня Ляпунова, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ –задані на S вектор–функції. Згідно з [78] назвемо

$$\mathbf{V}(\mathbf{x})=\iint_S\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})dS_\xi \qquad (2.26)$$

узагальненим потенціалом простого шару, а

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\iint_S\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})dS_\xi- \qquad (2.27)$$

узагальненим потенціалом подвійного шару (першого роду). Як показано у [78], властивості потенціалів (2.26), (2.27) аналогічні властивостям відповідних гармонічних потенціалів. Так, потенціал (2.26) може бути визначений безпосередньо в точках поверхні S, причому його граничні значення при

наближенні точки спостереження до S за напрямками $\mathbf{n}^+$ і $\mathbf{n}^-$ збігаються і дорівнюють прямому значенню. Отже, узагальнений пружний потенціал простого шару є вектор-функцію, неперервною у всьому просторі. На нескінченності потенціал $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ прямує до нуля, як $1/|\mathbf{x}|$. Зазначимо, що гармонічний і узагальнений пружний потенціал подвійного шару зручно використовувати при розв'язанні крайових задач на розімкнених поверхнях, коли шукана функція розривна (стрибок зсувів на тріщині, перепад тиску на несучій поверхні), а її нормальна похідна безперервна.

Для зведення крайової задачі теорії пружності (2.23) для тіла з розрізами до інтегральних рівнянь використовуємо інтегральні подання (2.26), (2.27). У (2.26) інтегрування проводимо за поверхнею Ω, а (2.27) – за поверхнями розрізів S_i. Саме за допомогою узагальненого потенціалу подвійного шару можна визначити переміщення, обумовлені стрибком зсувів $\alpha(\xi)$ протилежних точок поверхонь тріщини (потенціал простого шару не дає стрибка зсувів), і задовольнити умову рівності навантажень на берегах тріщини внаслідок неперервності.

Зазначимо, що використання гармонічних чи узагальнених потенціалів простого і подвійного шару як інтегральні подання розв'язків відповідних задач передбачає застосування формул Гріна або Соміліани (для просторової задачі теорії тріщин). Ця обставина дозволяє обійти труднощі, що виникають при використанні даних формул (вірних на замкнутих поверхнях) при інтегруванні по області, обмеженою двома близькими поверхнями. Саме такими областями зазвичай імітуються тріщини та несучі поверхні лопатей.

2.2.3 Зведення задачі для тіла з тріщиною до гіперсингулярних інтегральних рівнянь

Розглянемо крайову задачу (2.23).

Розв'язок цієї задачі зобразимо як суму вектор-функцій

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}), \qquad (2.28)$$

де $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ - переміщення, які виникли б у суцільному тілі під дією тих самих поверхневих навантажень. Ці переміщення можна визначити з системи рівнянь

$$\mu\Delta u_{j0} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0,\ j=1,2,3,$$

$$u_{j0}(\boldsymbol{x}) = u_{il}(\boldsymbol{x}), \qquad j=1,2,3, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_1, \tag{2.29}$$

$$\mathbf{T^n}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in\Omega_2.$$

Розв'язання крайової задачі (2.29) може бути здійснено за допомогою різних методів. Опишемо підхід, що виникає при застосуванні методів теорії потенціалу. Шукатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ у вигляді узагальненого пружного потенціалу простого шару по поверхні Ω

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi,$$

де $\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})$ – невідомий вектор густини.

Вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ задовольняє рівнянням Ламі при будь-якій густині $\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})$, що інтегрується на Ω, Підставивши її в крайові умови (2.39), приходимо до інтегральних рівнянь

$$\iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi = \mathbf{u}_l(\mathbf{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_1,$$

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega_2.$$

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь є операторним рівнянням з розривними ядром і коефіцієнтом при позаінтегральному члені. Теорія такого роду рівнянь недостатньо добре розроблена, хоча сама мішана крайова задача є коректною. Доказ існування та однозначності розв'язання задачі викладено у [79]. У [80] доведені теореми існування та однозначності для першої та другої крайових завдань теорії пружності.

Перейдемо до задачі визначення переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ у співвідношеннях (2.28). Шукатимемо їх у вигляді суми узагальнених пружних потенціалів простого та подвійного шару. Потенціал подвійного шару задаємо на сукупності поверхонь S, а потенціал простого – на поверхні тіла Ω

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_S \Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})dS_\xi + \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi. \tag{2.30}$$

Внаслідок властивостей узагальнених потенціалів простого та подвійного шару вектор-функція **u**(**x**) задовольняє рівняння статики у переміщеннях. Задаємо граничні умови, яким має задовольняти функція **u**(**x**). Приходимо до системи інтегральних рівнянь

$$\iint_S \Gamma_2(\mathbf{x}-\xi)\boldsymbol{\alpha}(\xi)dS_\xi + \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\xi)\mathbf{p}(\xi)d\Omega_\xi = 0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega_1;$$

$$\iint_S \mathrm{T}^{\mathrm{n(x)}}\Gamma_2(\mathbf{x}-\xi)\boldsymbol{\alpha}(\xi)dS_\xi - \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\xi)\mathbf{p}(\xi)d\Omega_\xi = 0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega^2;$$

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}\iint_S \Gamma_2(\mathbf{x}-\xi)\boldsymbol{\alpha}(\xi)dS_\xi\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})) + (\iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\xi)\mathbf{p}(\xi)d\Omega_\xi\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})) = N_{3i},$$

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{n(x)}}\iint_S \Gamma_2(\mathbf{x}-\xi)\boldsymbol{\alpha}(\xi)\mathrm{d}S_\xi\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x})) + (\iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\xi)\mathbf{p}(\xi)d\Omega_\xi\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x})) = N_{ki}$$

$$\mathbf{x}\in S_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad k=1,2. \tag{2.31}$$

Зазначимо, що коли $\mathbf{x}\in\bigcup_{i=1}^{n} S_i$, то в отриманих інтегралах неможлива перестановка порядку диференціювання та інтегрування. Їх можна класифікувати як гіперсингулярні. У другому рівнянні (2.31) така перестановка здійснена, оскільки точка **x** не належить поверхні інтегрування. Як і під час розгляду температурної крайової задачі, припустимо, що вектор-функція $\boldsymbol{\alpha}(\xi)$ відома. Тоді перше і друге рівняння (2.31) описуватимуть мішану крайову задачу теорії пружності. Якщо виконані умови розв'язності, то рівняння (2.31) можна звести до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь щодо функції $\boldsymbol{\alpha}(\xi)$.

У разі тріщини нормального відриву у необмеженому тілі система (2.31) зводиться до гіперсингулярного рівняння типу (2.14).

2.3 Гіперсингулярні рівняння в плоских задачах

2.3.1 Гіперсингулярне рівняння в задачі обтікання профілю

У двовимірних крайових задачах для рівняння Лапласа фундаментальним розв'язком, аналогічним (2.9), є логарифмічна функція

$$f(\mathbf{x},\xi) = \ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}, \tag{2.32}$$

де $r=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-\xi_i)^2}$; $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$.

Сингулярним розв'язком рівняння Лапласа буде похідна від (2.32) в будь-якому напрямку $\boldsymbol{l}$.

Нехай L –замкнута чи розімкнена дуга Ляпунова [78]. Як і в просторовому випадку, побудуємо інтегральні подання розв'язків рівняння Лапласа у вигляді потенціалів простого

$$v(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\int_L \gamma(\xi)\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\,dL, \qquad \xi\in L \tag{2.33}$$

та подвійного шару

$$w(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\int_L \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_\xi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\,dL, \qquad \xi\in L, \tag{2.34}$$

де $\mathbf{n}_\xi$ – нормаль до лінії L у точці $\boldsymbol{\xi}$;

$\gamma(\boldsymbol{\xi})$, $\mu(\boldsymbol{\xi})$ - визначені на L функції.

Двовимірні потенціали мають ті ж властивості, що і відповідні тривимірні.

Аналогічно задачі обтікання тонкої несучої поверхні сформулюємо задачу обтікання несучої лінії потоком ідеальної стисливої рідини.

$$\Delta\Phi=0, \qquad \mathbf{V}_0=\mathrm{grad}\Phi\ , \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial\boldsymbol{n}^{\pm}}=(\mathbf{V}_0,\mathbf{n}), \qquad \boldsymbol{x}\in L_1,$$

$$\frac{\partial(\Phi^+-\Phi^-)}{\partial t}-\left(\mathrm{grad}\left(\Phi^+-\Phi^-\right),\mathbf{V}_0\right)=0, \qquad \boldsymbol{x}\in L_2\ ,$$

$$\mathrm{grad}\Phi\,|_\infty=0,$$

де L_1, L_2 - несуча лінія та лінія вихрового сліду, відповідно.

Шукатимемо потенціал швидкостей $\Phi(\mathbf{x},t)$, що є розв'язком крайової задачі (2.35), у вигляді потенціалу подвійного шару, поширеного по лінії $L=L_1\cup L_2$, з визначеною на L густиною $\Theta(\boldsymbol{\xi},t)$, що є циркуляцію швидкості. Як і в просторовій задачі, приходимо до гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \Theta(\xi,t)\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{n}_x\partial\boldsymbol{n}_\xi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\,dL=(\mathbf{V}_0,\mathbf{n}). \tag{2.36}$$

Отримане рівняння описує задачу безциркуляційного обтікання профілю. Перейдемо до розгляду циркуляційного обтікання несучої лінії L_1. У лінійному формулюванні вважаємо, що вихрова пелена рухається зі швидкістю, що дорівнює відносної швидкості потоку. При цьому приймається, що криволінійна координата ξ_1 збігається із напрямком швидкості потоку $\mathbf{V_0}$. Як основна невідома вибирається інтенсивність приєднаних вихорів $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)$ [7]. Тоді циркуляція $\Theta_1(\boldsymbol{\xi}, t)$ на лінії L_1 у момент часу t може бути визначена через функцію $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, t)$

$$\Theta_1(\xi, t) = \int_{\xi_1^L}^{\xi} \vartheta\left(\xi', t - \frac{\xi' - \xi}{V_0}\right) d\xi',$$

де ξ_1^L - координата передньої кромки.

На вихровій пелені L_2 виконано співвідношення

$$\Theta_2(\xi, t) = \int_{\xi_1^L}^{\xi_1^T} \vartheta\left(\xi', t - \frac{\xi' - \xi}{V_0}\right) d\xi',$$

де ξ_1^T - координата задньої кромки.

При цьому виборі невідомої густини автоматично задовольняється умова відсутності перепаду тиску на вихровій пелені. Задачі циркуляційного обтікання також зводиться до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння типу (2.36), при цьому задовольняються всі рівняння, що дозволяють (2.45).

2.3.2 Гіперсингулярні рівняння у двовимірних задачах теорії пружності

Пружна рівновага твердих тіл описується рівняннями плоскої задачі теорії пружності: або у разі плоскої деформації пружного середовища (тобто при деформації циліндричних тіл постійного поперечного перерізу в умовах дії на тіло зовнішніх сил, нормальних для його осі та однакових для всіх поперечних перерізів тіла) або у випадку узагальненого плоского напруженого стану (тобто при деформації тонкої пластини силами, що діють у її площині). Зауважимо, що формально із виразів для плоскої деформації можна одержати відповідні вирази для плоского напруженого стану, якщо замінити коефіцієнт Пуассона ν на число $\nu/(1+\nu)$.

Вважаємо, що Λ – замкнута кусково -гладка крива, що обмежує плоске тіло

Ω. На частині Λ_1 контуру Λ задані умови першої крайової задачі, на частині Λ_2 - граничні умови другої крайової задачі ($\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$). Припустимо, що тіло ослаблене системою розрізів L_i(i=1,2,..,N). Розглянемо випадок, коли береги розрізів вільні від навантажень.

Розв'язуюча система диференціальних рівнянь рівноваги в переміщеннях набуває такого вигляду:

$$\mu\Delta u_j + (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \qquad j=1,2, \tag{2.37}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\vartheta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$.

У разі плоскої деформації тут $\lambda_0=\lambda$, у разі плоского напруженого стану $\lambda_0=\nu E/(1-\nu^2)=2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$.

Наведемо фундаментальний та сингулярний розв'язки рівнянь для плоских задач теорії пружності. Нехай ізотропне пружне середовище заповнює простір E_2 і в точці $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ діє одиночна зосереджена сила, спрямована по осі x_j (j=1,2). Тоді зсув $\Gamma^j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=(\Gamma_{1j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\ \Gamma_{2j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))$ точки $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, викликаний зазначеною силою, обчислюється за формулою

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\xi) = -\frac{\lambda_0+\mu}{4\pi\mu(\lambda_0+2\mu)}\left[\frac{\lambda_0+3\mu}{\lambda_0+\mu}\delta_{ij}\ln|\mathbf{x}-\xi| - \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|\boldsymbol{x}-\xi|^2}\right] \ i,j=1,2. \tag{2.38}$$

Введемо матрицю $\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=\{\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\}_{2\times2}$. Якщо в точці $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ надано зусилля $\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})=(p_j(\boldsymbol{\xi}), j=1,2)$, то переміщення у нескінченному тілі, викликане дією цього зусилля, може бути обчислене таким чином:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}).$$

З цієї формули випливає, що переміщення u_1, u_2 необмежені на великих відстанях від початку координат через наявність членів, що містять логарифмічну функцію. Це випливає з природи зосередженої сили - фактично вона є силою, що припадає на одиницю довжини, в напрямку осі x_3, і щоб виконати умови плоскої деформації

в площині (x_1,x_2), треба вважати, що такі сили діють уздовж всієї нескінченної лінії, що збігається з віссю x_3. Для обчислення напруження у точці **x** у напрямку **n**(**x**) скористаємося матричним диференціальним оператором пружних напружень $T^n(\partial_x,\mathbf{n}(\mathbf{x}))$, визначеним формулою (2.19). За допомогою фундаментального розв'язку (2.38) та оператора напружень побудуємо сингулярний розв'язок рівнянь (2.37). Введемо оператор $T^n(\partial_x,\mathbf{n}(\mathbf{x}))\Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=\Gamma_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ і побудуємо матрицю $\Gamma_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$, пов'язану з ним ($\Gamma_{2ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})=\Gamma_{1ji}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})$), тобто. отриману перестановкою точок $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{\xi}$ та транспонуванням елементів

$$\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})= T^n(\partial_{\xi},\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}))\Gamma(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}).$$

Наведемо вирази для компонентів матриці $\Gamma_2(\mathbf{x}-:\xi)$

$$\Gamma_{2ij}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \frac{-1}{2\pi(\lambda_0+2\mu)}\left\{\left[\mu\delta_{ij}+2(\lambda_0+\mu)\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{l=1}^{2}\frac{(x_l-\xi_l)n_l(\xi)}{r^2}+\mu\left[n_i(\boldsymbol{\xi})\frac{(x_j-\xi_j)}{r^2}-n_j(\mathbf{x})\frac{(x_i-\xi_i)}{r^2}\right]\right\}. \quad (2.39)$$

Якщо у точці $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,)$ є стрибок зсувів $\alpha(\boldsymbol{\xi})=(\alpha_j(\boldsymbol{\xi}),j=1,2)$, то переміщення в нескінченному тілі, обумовлене наявністю цього розриву, обчислюється за формулою

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}).$$

Нехай L – довільна розімкнена дуга Ляпунова; $\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}),.\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ – задані на L вектор-функції. Вектор-функцію

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \int_L \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})dL_{\xi} \quad (2.40)$$

називають узагальненим потенціалом простого шару, а вектор-функцію

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\int_L \Gamma_2(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})dL_{\xi} \quad – \quad (2.41)$$

узагальненим потенціалом подвійного шару (першого роду).

За допомогою інтегральних зображень (2.40) (2.41) приходимо до систем сингулярних рівнянь типу (2.31), де поверхневі інтеграли будуть замінені

відповідними контурними.

Отже, отримані сингулярні рівняння для розв’язання плоских крайових завдань теорії пружності для тіл з розрізами.

2.4 Висновки за розділом

Здійснено формулювання крайових задач просторової теорії тріщин, задач теплопровідності для тіл з тріщинами, а також деяких задач обтікання тонких несучих поверхонь. У всіх цих задачах шукані функції задовольняють диференціальні рівняння (або системи рівнянь) еліптичного типу. Тріщини в матеріалах, лопаті гідравлічних і вітрових турбін розглядаються як тонкі поверхні, обмежені кусково-гладкими контурами, на яких задаються відповідні граничні умови.

Варто зазначити, що тріщину в тілі, а також лопать чи крило можна трактувати як розриви сумісності. Унаслідок цього відповідні задачі описуються схожими еліптичними рівняннями, що дозволяє застосовувати подібні аналітичні та числові методи для їх розв’язання. Для розв’язання просторових задач застосовуються методи теорії потенціалу, що дозволяє звести вихідні задачі до крайових інтегральних рівнянь на відповідних поверхнях, тим самим зменшуючи їхню розмірність на одиницю. Частина таких рівнянь має ядра з сильними або гіперстнгулярними особливостями.

Показано, що низку крайових задач для рівняння Лапласа, задач визначення концентрації напружень біля контурів тріщин у двовимірних і тривимірних тілах, задач взаємодії неоднорідного потоку ідеальної нестисливої рідини з добре обтічними тілами (на зразок крила або лопаті турбіни) можна ефективно розв’язувати з використанням методів теорії потенціалу шляхом зведення до сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. З точки зору математики ці задачі мають багато спільного: подібні рівняння, а внаслідок цього й подібні рішення. При цьому невідомі функції, задаються як гармонічні або узагальнені потенціали простого або подвійного шару з невідомими густинами, які слід визначити на поверхнях розривів суцільного тіла (тріщина, лопать) і на межах цього тіла. При цьому потенціали автоматично задовольняють диференціальні

рівняння, які описують фізичне явище. Задовольняючи граничним умовам, приходимо до граничних інтегральних рівнянь. Зазначимо, що оскільки невідомі функції визначені та розшукуються лише на межах тіла, то у двовимірних задачах вони є функціями однієї змінної, а у тривимірних – двох. Ця обставина стає особливо привабливою на етапі числової реалізації.

Надано формулювання крайових завдань теорії пружності для тіл з розрізами та здійснено їх зведення до граничних інтегральних рівнянь. Розглянуто крайові задачі для рівняння Лапласа: задачі про обтікання тонкої несучої поверхні (профілю) потоком ідеальної нестисливої рідини, визначення стаціонарного поля температур у дво- та тривимірних тілах з розрізами.

На основі фундаментальних та сингулярних розв’язків диференціальних рівнянь побудовано інтегральні подання розв’язків цих задач у вигляді потенціалів (узагальнених потенціалів теорії пружності) простого та подвійного шару. Підстановка інтегральних зображень у граничні умови призводить до систем сингулярних та гіперсингулярних рівнянь щодо густин відповідних потенціалів. Зазначимо, що запропонований підхід не потребує застосування формул Гріна або Соміліани на розімкнених поверхнях, коли необхідно проводити чисельне інтегрування на близьких поверхнях. Використання непрямого формулювання методу граничних інтегральних рівнянь дозволяє подолати зазначену трудність.

Основні результати цього розділу висвітлені в роботах автора [3], [5], [7], [8], [11], [12].

РОЗДІЛ 3
ГІПЕРСИНГУЛЯРНІ РІВНЯННЯ В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ

3.1 Основні рівняння

У теорії потенціалу гіперсингулярні інтеграли зазвичай виникають у виразах для граничних значень нормальних похідних потенціалів подвійного шару. Нехай S - незамкнута поверхня в R^3. Розглянемо крайові задачі Неймана для рівняння Лапласа з розрізом S. Необхідно визначити функцію $\varphi(\mathbf{x})$, що задовольняє рівняння Лапласа скрізь поза S

$$\Delta\varphi = 0, \tag{3.1}$$

і далі на S необхідно виконати такі граничні умови:

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}^{\pm}} = f(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

де $\mathbf{n}^{\pm}$ є одиничними нормалями до обох сторін поверхні S, і функція $f(\mathbf{x})$ відома. Вимагаємо виконання умов Зоммерфельда на нескінченності, а саме $\mathrm{grad}\varphi|_{\infty} = 0$.

Застосуємо подання функції φ (x) як потенціалу подвійного шару за областю S

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi})G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})dS\,, \quad G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_{\xi}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}, \tag{3.3}$$

де $\gamma(\boldsymbol{\xi})$ – невідома густина потенціалу, $G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ є сингулярним розв'язком рівняння Лапласа. У кожній точці x ∈ S, що не знаходиться на граничній кривій ∂S (яка обмежує поверхню S), функція φ (**x**) має свої граничні значення $\varphi^{+}(\mathbf{x})$ і $\varphi^{-}(\mathbf{x})$ на позитивній та негативній стороні поверхні S відповідно.

Слід зазначити, що

$$\varphi^{+}(\mathbf{x}) - \varphi^{-}(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}), \tag{3.4}$$

тоді як нормальна похідна $\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}$ не має розривів при перетині поверхні S.

З використанням зображення (3.3), задача (3.1)-(3.2) зводиться до розв'язування інтегрального рівняння для невідомої густини $\gamma(\boldsymbol{\xi})$ у вигляді

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n_x}\,\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\,dS = f(\mathbf{x}). \tag{3.5}$$

Вектори $\mathbf{n_x}, \mathbf{n}_\xi$ в рівняннях (3.3), (3.5) є одиничними нормалями до поверхні S у точках x і $\boldsymbol{\xi}$ відповідно.

Зауважимо, що інтеграл у рівнянні (3.5) існує лише в розумінні Адамара [21]. Хоча така інтегральна реалізація призводить до значних розрахункових труднощів, подання (3.3) задовольняє рівняння Лапласа, умову Зоммерфельда та забезпечує безперервність нормальної похідної при перетині поверхні S. Таким чином, воно може бути успішно використане для дослідження задачі взаємодії пружної конструкції при двосторонньому контакті з рідиною при моделюванні міцнісних і динамічних характеристик елементів конструкції, таких як лопаті вітрових електростанцій [14], ракет-носіїв [15], лопатки парових і гідротурбін [16].

Скінченною частиною інтеграла в (3.5) за Адамаром при $\mathbf{x}\in$S є межа [21]:

$$I(\mathbf{x})=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{4\pi}\iint_{S^*}\gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n_x}\,\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\,dS_\xi - \frac{\gamma(\mathbf{x})}{\varepsilon}\right], \tag{3.6}$$

де $S^*=S\backslash S_0$, S_0 — коло радіусаєі з центром x.

Нехай область інтегрування S - плоский прямокутник S ={[– b, b]×[– l, l]}. Припустимо, що функція має неперервні частинні похідні, які задовольняють умову Гельдера всюди всередині S. Нехай $\boldsymbol{\xi}\in\partial S$, $\mathbf{x}\notin\partial S$. Тоді нормальну похідну потенціалу подвійного шару можна представити у вигляді

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = \iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n_x}\,\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\xi|}\,dS_\xi = \int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l}\gamma(\boldsymbol{\xi})\left[\frac{1}{r^3}-\frac{3x_3^2}{r^5}\right]d\xi_1 d\xi_2, \tag{3.7}$$

де $r=\sqrt{\left(\xi_1-x_1\right)^2+\left(\xi_2-x_2\right)^2+x_3^2}$.

Інтеграл у правій частині (3.7) існує у звичайному сенсі для $x\notin S$,($x_3\neq 0$). Нехай $\gamma(\boldsymbol{\xi})=\gamma_0$ = const над S. Тоді

$$I(\mathbf{x}) = \gamma_0\int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{r^3}-\frac{3x_3^2}{r^5}\right]d\xi_1 d\xi_2. \tag{3.8}$$

Обчислюючи цей інтеграл аналітично і переходячи до межі при $x_3 \to 0$, приходимо до формули для прямокутної області інтегрування:

$$I(\mathbf{x}) = \gamma_0 L(\mathbf{x}), \tag{3.9}$$

$$L(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\sqrt{(x_1-b)^2+(x_2-l)^2}}{(x_1-b)(x_2-l)} + \frac{\sqrt{(x_1-b)^2+(x_2+l)^2}}{(x_1-b)(x_2+l)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{(x_1+b)^2+(x_2-l)^2}}{(x_1+b)(x_2-l)} - \frac{\sqrt{(x_1+b)^2+(x_2+l)^2}}{(x_1+b)(x_2+l)} \right].$$

Припустивши, що $\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \gamma_0$ та обчисливши аналітично інтеграл у (3.6) по S*=S\S$_0$, отримаємо такий вираз для інтеграла по прямокутній області

$$I(\mathbf{x}) = \gamma_0 L(\mathbf{x}) + \frac{\gamma_0}{\varepsilon}.$$

Зі сказаного вище зрозуміло, що якщо $.\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \gamma_0 =$ const, то кінцеві граничні значення, отримані за допомогою (3.6) для $\varepsilon \to 0$, і з використанням (3.8) для $x_3 \to 0$, співпадають.

3.2 Апроксимація поверхні інтегрування плоскими елементами

При числовій реалізації гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) методами граничних елементів необхідно апроксимувати поверхню інтегрування граничними елементами. Однак залишається невивченим, чи будуть існувати розглянуті інтеграли на апроксимованій поверхні, і яка похибка при цьому може виникнути. Тут розглядається апроксимація поверхні інтегрування плоскими дотичними елементами. Встановлено, що для розглянутих гіперсингулярних інтегралів на апроксимуючих елементах існують скінченні граничні значення. Крім того, було виявлено, що з сингулярного інтеграла, який є нормальною похідною потенціалу подвійного шару по елементу поверхні, можна виділити член із найсильнішою сингулярністю (гіперсингулярність). Цей член, а саме, нормальна похідна потенціалу подвійного шару, обчислюється аналітично за відповідним плоским елементом дотичної площини.

Справедлива наступне

Твердження:

Нехай *S* - незамкнена поверхня Ляпунова [21], $\gamma(\boldsymbol{\xi})$ - неперервна функція на S; R – величина, менша або дорівнює радіусу сфери Ляпунова для поверхні S, $\sigma_0(\mathbf{x},R)$ - коло радіуса R, що лежить по дотичній до площини S у точці **x**, а $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\varepsilon_1\mathbf{n}$.

Таким чином, для існування скінченного граничного значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на поверхні S

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\iint_S\gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{x}\,\partial\mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\xi|}dS_\xi,$$

необхідно і достатньо, щоб існувало скінченне граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на площині, дотичній до S

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\iint_{\sigma_0(\boldsymbol{x},R)}\gamma(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{x}\,\partial\mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\xi|}dS_\xi.$$

Доказ.

У кожній точці поверхні проводимо прямі, паралельні нормалі в точці **x**. За властивостями поверхні Ляпунова і вибору $\sigma_0(\mathbf{x},R)$, ці лінії перетинають коло $\sigma_0(\mathbf{x},R)$ тільки в одній точці. Розглянемо значення густини в області $\sigma_0(\mathbf{x},R)$, вони дорівнюють значенням густини в точці поверхні, де пряма, паралельна нормалі в точці **x**, перетинає дотичну площину. Проведемо вісь x3 по нормалі n до поверхні S у точці x. Завдяки обраній системі координат, $\partial/\partial\mathbf{n}=\partial/\partial x_3$.

Враховуючи, що

$$\cos(\mathbf{r},\ \mathbf{n}_\xi)=\frac{\xi_1}{r}\cos(\ \mathbf{n}_\xi,x_1)x+\frac{\xi_2}{r}\cos(\mathbf{n}_\xi,x_2)-\frac{x_3}{r}\cos(\ \mathbf{n}_\xi,x_3),\ \mathbf{r}=\ \mathbf{x}-\boldsymbol{\xi},$$

можна отримати для точок $(\xi_1,\xi_2)\in\sigma_0$ наступні вирази

$$\cos(\mathbf{r},\ \mathbf{n}_\xi)=-x_3/p_1,\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{-x_3}{r_1^3}\right)=-\frac{1}{r_1^3}+\frac{3x_3^2}{r_1^5},\ r_1=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+x_3^2}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf{n}}=\iint_{\sigma_0(\boldsymbol{x},R)}\gamma(\xi_1,\xi_1)\left(-\frac{1}{r_1^3}+\frac{3x_3^2}{r_1^5}\right)dS_\xi. \qquad (3.10)$$

Тепер нехай Σ є частиною поверхні *S*, розрізаної круговим циліндром з віссю $\mathbf{n}_x$ та радіусом *R*. Уявимо нормальну похідну потенціалу подвійного шару на поверхні S як

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \iint_{\Sigma} \gamma \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)}{r^2} d\sigma + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \iint_{S-\Sigma} \gamma \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)}{r^2} d\sigma.$$

Очевидно, що другий доданок тут скінченний в околі точки **x**. Тому необхідно розглядати нормальну похідну потенціалу подвійного шару на поверхні Σ. Нехай $\mathbf{x} \notin \Sigma$. У цьому випадку допускається зміна порядку диференціювання та інтегрування. Враховуючи, що в будь-якій точці нормалі $\mathbf{n_x}$ координати x_1 і x_2 дорівнюють 0, можна зробити висновок, що

$$\Omega(x_3,R) = . \iint_{\Sigma} \gamma \frac{3\cos(\mathbf{r},x_3)\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi) - \cos(\mathbf{n}_\xi,x_3)}{r^3} d\sigma. \qquad (3.11)$$

Тут *r* - відстань між точкою $\mathbf{x}'$ по нормалі до поверхні Σ і точці інтегрування ξ, вектор **r** вважаємо напрямленим від точки $\mathbf{x}'$ до точки ξ. Необхідно встановити, чи $\Omega(x_3,R)$ має скінченну межу при $x_3 \to 0$.

Використовуючи циліндричну систему координат (ρ, φ, z), перетворимо інтеграл у (3.11) до вигляду

$$\Omega(x_3,R) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \gamma \frac{\rho^2 - 2x_3^2}{r_1^5} \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \gamma \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho.$$

Маємо

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \boldsymbol{n}} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \gamma \frac{\rho^2 - 2x_3^2}{r_1^5} \rho d\rho,$$

потім нарешті

$$\Omega(x_3,R) = . \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{n}} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \gamma \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho. \qquad (3.12)$$

Таким чином, ми бачимо, що нормальна похідна потенціалу подвійного шару на елементі поверхні зображена як сума нормальної похідної потенціалу подвійного шару на відповідному елементі дотичної площини та деякого додаткового члена. Зрозуміло, що для доведення необхідності та достатності сформульованої теореми необхідно оцінити саме цей доданок.

Через виконання наступних нерівностей

$$\int_0^R \rho^5 r_{1-5} d\rho < P, \qquad |x_3| \int_0^R \rho^3 \rho^{-5} d\rho < 1, \left|\frac{1}{r_1^5} - \frac{1}{r^5}\right| \le h \frac{R\rho^2(R\rho^2+2|x_3|/r_1)}{r_1^5},$$

де h – обмежена функція, можна зробити висновок, що другий доданок у (3.12) також є обмеженим, і

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \gamma \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho = O(R).$$

Таким чином, якщо існує скінченне граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару для елемента дотичної площини в точці x, то існує також кінцеве граничне значення нормальної похідної для елемента поверхні в тій же точці. Отже, теорему доведено. Також встановлено, що найсильніша сингулярність (типу Адамара), яка виникає в інтегралі з нормальною похідною потенціалу подвійного шару по поверхні, зображається як похідна за нормаллю потенціалу подвійного шару по елементу дотичної площини, що містить точку спостереження **x** .

Доведене твердження дозволяє апроксимувати області інтегрування в гіперсингулярних інтегралах плоскими граничними елементами.

3.3 Обчислення скінченних частин Адамара гіперсингулярних інтегралів по плоскому многокутнику

Обчислимо аналітично нормальну похідну гармонічного потенціалу подвійного шару (3.6) у сенсі скінченної частини Адамара. Використовуючи інтегрування частинами, отримуємо:

$$\iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n_x}\, \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x'-\xi|} dS_\xi = \iint_S \frac{\left((\operatorname{grad}\gamma(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n_x}) \times \mathbf{r}, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}\right)}{r^3} dS_\xi - \int_{\partial S} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}, dl\right).$$

Нехай над S. Тоді $\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \gamma_0 = \text{const}$, і маємо

$$I(\mathbf{x}) = \iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n_x}\, \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x'-\xi|} dS_\xi = -\int_{\partial S} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \mathbf{n}_\xi, dl\right).$$

Якщо S плоский прямокутник, I(x) можна обчислити за формулою (3.9).

Нехай S - багатокутник у площині xOy, рис. 3.1, і $\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \gamma_0$.

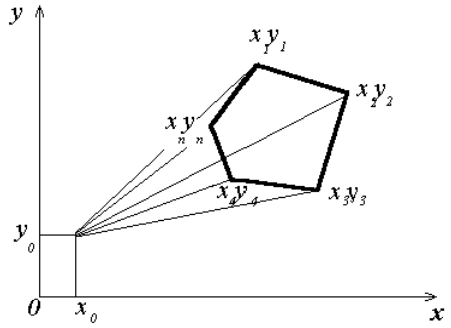


Рис. 3.1. Обчислення інтеграла Адамара по плоскому многокутнику

Використовується наступна формула

$$I(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}\, \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\mathbf{x}'-\boldsymbol{\xi}|} dS_\xi, \tag{3.13}$$

припускаючи, що точка $\mathbf{x}=\mathbf{x}'+\varepsilon\mathbf{n}_\mathbf{x}$ належить нормалі $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ до поверхні S в точці $\mathbf{x}$ (нормаль спрямована вздовж осі Oz).

Позначимо через (x_i,y_i) (i=1,2,...n) вершини багатокутника S, рис.3.1. Оскільки S є плоскою областю, інтеграл у (3.13) обчислюється за формулою

$$I(\mathbf{x}') = \gamma_0 \iint_S \left[-\frac{1}{r_1^3} + \frac{3z^2}{r_1^5}\right] dS, \; .r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}.$$

У полярній системі координат $x–x_0=\rho\cos\varphi$, $y- y_0=\rho\sin\varphi$, це приводить до виразу

$$I(\mathbf{x}') = \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \left[-\frac{1}{r_1^3} + \frac{3z^2}{r_1^5}\right] \rho d\rho,$$

де

$$\varphi_i = \arcsin\frac{y_i - y_0}{r_{i0}}, \qquad r_{i0} = \sqrt{(x_i-x_0)^2 + (y_i-y_0)^2 + z^2};$$

$$i = 1,2,,\ldots n; \;\; \varphi_{n+1} = \varphi_1, \qquad \rho_i(\varphi) = \frac{c_i}{\sin(\varphi - \varphi_i^*)},$$

$$c_i = \frac{[(y_i - y_0)(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_0)(y_{i+1} - y_i)]}{r_{i,i+1}},$$

$$\varphi_i^* = \arcsin\frac{y_{i+1} - y_i}{r_{i+1,i}}, \; r_{i+1,i} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + z^2},$$

$$y_{n+1} = y_1, x_{n+1} = x_1.$$

Отже, отримуємо наступну формулу

$$I(\mathbf{x}) = \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} J_i(\mathbf{x}) \quad J_i(\boldsymbol{x}) = \int_{l_i} \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \mathbf{n}\right) \cdot d\mathbf{l}_i \tag{3.14}$$

Тут $\mathbf{l}_i$ - відрізки, що сполучають вершини M_i і M_{i+1} розглянутого n-кутника.

Нехай $M_i=(x_i, y_i, z_i)$ і $M_{i+1}=(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$. Рівняння прямої $\mathbf{l}_i$ в параметричному вигляді можна записати у вигляді

$$x = x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)t, \quad y = y_{i+1} + (y_{i+1} - y_i)t, \quad z = z_{i+1} + (z_{i+1} - z_i)t.$$

Введемо такі вектори

$$\mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0),\ \mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i),$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

і отримаємо

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \mathbf{n}\right) \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \tag{3.15}$$

де

$$dx = (x_{i+1} - x_i)dt,\ dy = (y_{i+1} - y_i)dt, \quad dz = (z_{i+1} - z_i)dt.$$

Після інтегрування по t від 0 до 1 отримуємо наступну формулу

$$J_{ik}(\mathbf{x}) = \frac{([\boldsymbol{l}_i \times \mathbf{r}_k]\cdot\mathbf{n})}{|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_k]|^2}\left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{k+1})}{r_{k+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_k)}{k}\right]. \tag{3.16}$$

тут $r_k = |\mathbf{r}_k|$. Використовуючи формули (3.14), (3.16), можна обчислити розглянутий гіперсингулярний інтеграл по плоскому n-кутнику, довільно орієнтованому в просторі.

Отже, отримано дискретний аналог для гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.5).

За отриманими формулами обчислюють гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні, а систему лінійних алгебраїчних рівнянь отримують наступним чином:

$$\sum_{k=1}^{N} H_{kj}\gamma_k = f(\mathbf{x}_{0j}), \quad H_{kj} = J_{kj}(\mathbf{x}), \quad j = 1,2,\ldots N. \tag{3.17}$$

Розв'язки систем типу (3.17) зазвичай мають ясний фізичний зміст. Наприклад, густина може описувати падіння тиску в аналізі взаємодії рідини та конструкції або розрив переміщення поблизу тріщини в задачах механіки руйнування. Це перевага використання гіперсингулярних інтегральних рівнянь, оскільки допоміжні розрахунки, такі як числові оцінки похідних густини, зменшуються.

3.4 Обчислення скінченних частин Адамара одновимірних гіперсингулярних інтегралів по колу

Якщо область S у рівнянні (3.5) є колом, то можна звести двовимірне гіперсингулярне рівняння до одновимірного.

Отже, нехай S - коло в площині xOy, а саме $S = \{x, y: x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Обчислимо декартову відстань $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ між точками $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0), \boldsymbol{\xi} = (x, y, z)$. У циліндричних координатах маємо

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z, \qquad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

$$x_0 = \rho_0\cos\theta_0, \qquad y_0 = \rho_0\sin\theta_0, \qquad z_0 = z_0, x_0^2 + y_0^2 = \rho_0^2.$$

Таким чином,

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Далі використовуються стандартні позначення [10]

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Розглянемо наступний інтегральний оператор

$$\mathbf{A}\gamma = \iint_S \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}\, \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x' - \xi|} dS_\xi.$$

У циліндричній системі координат він набуває вигляду

$$\mathbf{A}\gamma = \frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(\rho) \frac{\rho d\theta d\rho}{\left(\sqrt{a - b\cos(\theta - \theta_0)}\right)^3}. \tag{3.18}$$

Перепишемо цей інтеграл як повторний

$$\mathbf{A}\gamma = \frac{1}{4\pi}\int_0^R \rho\,\gamma(\rho)\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\sqrt{a-b\cos(\theta-\theta_0)}\right)^3}\right]d\rho \qquad (3.19)$$

і отримаємо для внутрішнього інтеграла наступний вираз

$$I_1(\rho,\rho_0) = 2\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Після деяких перетворень ми знаходимо

$$I_1(\rho,\rho_0) = \frac{4}{\left(\sqrt{a+b}\right)^3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3},\ k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Далі використовуємо формулу з [22]

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3} = \frac{1}{k'^2}E(k),\ \ E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi, k'^2 = 1-k^2$$

і отримаємо

$$I_1(\rho,\rho_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}(a-b)}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \frac{4}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}\mathrm{E}(k).$$

Тут $\mathrm{E}(k)$ - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Таким чином, отримано наступне одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R \gamma(\rho)\frac{\rho E(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = f(\rho). \qquad (3.20)$$

Зазначимо, що ядро в інтегральному операторі (3.20) має такий вигляд

$$K(\rho,\rho_0) = \frac{\rho E(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

Це ядро гіперсингулярне з сингулярністю $(\rho-\rho_0)^{-2}$. Для більш детального з'ясування характеру функції $K(\rho,\rho_0)$ поблизу сингулярності використаємо наступну асимптотичну формулу [22] для функції $E(k)$ при k, близької до 1:

$$\mathrm{E}(k) = 1+\frac{1}{2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}k'^4\left(\ln\frac{4}{k'}-1-\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

Нехай l_0 - сингулярний граничний елемент, тобто припускаємо, що $l_0 = [\alpha, \beta] \in [0, R], \rho_0 \in l_0$. Введемо позначення

$$K_0(\rho, \rho_0) = \frac{\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}\left[1 + \frac{1}{2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{2}\right)\right].$$

Для обчислення інтеграла по сингулярному граничному елементу використовується формула:

$$\int_\alpha^\beta \gamma(\rho)\, K(\rho, \rho_0) d\rho = \int_\alpha^\beta \gamma(\rho)\, K_0(\rho, \rho_0) d\rho + \int_\alpha^\beta \gamma(\rho)\left[K(\rho, \rho_0) - K_0(\rho, \rho_0)\right] d\rho.$$

Перший доданок тут містить гіперсингулярну та логарифмічну складові, а другий – інтеграл без особливостей. Ефективний числовий метод розв'язання гіперсингулярного рівняння (3.20) розроблено в [23].

3.5 Аналітичний розв'язок двовимірного гіперсингулярного інтегрального рівняння по колу

Рівняння (3.5) розглядається у такому вигляді:

$$\iint_S \frac{f(x,y)\Gamma(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3} = q(x_0, y_0),\ \gamma(\xi) = f(x,y)\Gamma(x,y). \tag{3.21}$$

Нехай область визначення S - коло радіуса R. Розглянуто точки, що лежать на колі, координати яких задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = R^2$. Припустимо, що (x_0, y_0), належить внутрішній частині кола, тобто її координати задовольняють нерівності $x_0^2 + y_0^2 < R^2$. Розглянуто наступний інтеграл

$$I = \iint_S \frac{f(x,y)\Gamma(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3},\ .\ \ \Gamma(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \tag{3.22}$$

Цей інтеграл слід розуміти як таку межу:

$$\mathrm{I} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{S/S_\varepsilon} \frac{f(x,y)\Gamma(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3} \frac{2\pi f(x_0,y_0)\Gamma(x_0,y_0)}{\varepsilon}\right). \tag{3.23}$$

У полярних координатах

$$x - x_0 = \rho\cos\phi, y - y_0 = \rho\sin\phi,\ dxdy = \rho d\rho d\phi x_0 = \rho_0\cos\phi_0\, y_0 = \rho_0\sin\phi_0$$

інтегральне граничне значення набуває вигляду

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\rho(\phi)}\frac{f\Gamma\rho d\rho}{\rho^3}. \tag{3.24}$$

Функцію можна $\rho(\phi)$ знайти, розв'язавши відповідне квадратне рівняння як

$$\rho=-\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2(\phi-\phi_0)}. \tag{3.25}$$

Припустимо, що $f(x,y)\equiv 1$. Після перетворень, підставляючи $u=\rho+\rho_0\cos\phi$, згідно з [12] встановлено, що розглянутий інтегральний оператор дорівнює $-\pi^2$. Аналогічними міркуваннями отримано, що інтегральний оператор (3.22) перетворює функцію на $f(x,y)=x+iy$ на $\frac{-3\pi^2}{2}(x_0+iy_0)$.

Тоді отримуємо функцію $f(x,y)=z^n=(x+iy)^n$. Оскільки

$$z^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z_0^{n-k}(z-z_0)^k,$$

то обчислення зводиться до розгляду інтегралів у вигляді

$$\iint_S\frac{(z-z_0)^{n+2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3}.$$

У полярних координатах після перетворень отримаємо

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\exp^{i(n+2)\phi}\int_{\varepsilon}^{-\rho_0\cos(\phi-\phi_0)+\sqrt{R^2-(\rho_0\sin(\phi-\phi_0))^2}}\rho^{n+2}Q\,(\phi,\phi_0,\rho,\rho_0)\rho d\rho,$$

$$Q(\phi,\phi_0,\rho,\rho_0)=\frac{\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2(\phi-\phi_0)-(\rho+\rho_0\cos(\phi-\phi_0))^2}}{\rho^3}. \tag{3.26}$$

Таким чином,

$$I=\exp^{(n+2)i\phi_0}\int_0^{\pi}\exp^{(n+2)i\phi}d\phi\int_{-\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2\phi}}^{\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2\phi}}(u-\rho_0\cos\phi)^n\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2\phi-u^2}du \tag{3.27}$$

Нехай тепер $a=\sqrt{R^2-\rho_0\sin^2\phi}\,;b=\rho_0\cos\phi$. Обчислено наступний інтеграл:

$$J=\int_{-a}^{a}(u-b)^n\sqrt{a^2-u^2}du.$$

Використовуючи формулу бінома Ньютона, було отримано

$$J = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n C_n^k b^k \int_{-a}^{a} u^{n-k}\sqrt{a^2-u^2}du.$$

Оскільки інтеграл від непарної функції на симетричному інтервалі дорівнює нулю, то розглядатимуться лише інтеграли з парним ступенем підінтегральної функції. Змінюючи змінну інтегрування як $\frac{a}{u} = \sin t$, буде отримано

$$\int_0^1 v^{2m}\sqrt{1-v^2}dv = \frac{\pi(2m-1)!!}{(2m+2)2(2m)!!},$$

де використано стандартне позначення подвійного факторіалу

$$n!! = n(n-2)(n-4).\ldots$$

Остаточно

$$J = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(n,m)a^{2(m+1)}b^{n-2m},$$

де для значень

$$m = \frac{n-2k}{2}\, c(n,m)$$

маємо

$$c(n,m) = C_n^{2k}\frac{(n-2k-1)!!}{(n-2k)!!}\frac{\pi}{n-2k+2},$$

і для значень $m = \frac{n-2k+1}{2}$

знаходимо

$$c(n,m) = -C_n^{2k-1}\frac{(n-2k)!!}{(n-2k+1)!!}\frac{\pi}{n-2k+3}.$$

Таким чином,

$$\int_{-\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2\phi}}^{\sqrt{R^2-\rho_0^2\sin^2\phi}}(u-\rho_0\cos\phi)^n\sqrt{R^2-\rho_0\sin^2\phi-u^2}du=$$

$$=.\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(n,m)(R^2-\rho_0\sin^2\phi)^{m+1}(\rho_0\cos\phi)^{n-2m}. \qquad (3.28)$$

Застосовуючи біноміальну формулу Ньютона, отримаємо

$$\int_0^{\pi} \exp^{(n+2)i\phi} \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi \, d\phi. \quad (3.29)$$

Дійсна частина інтеграла (3.29) має вигляд

$$\int_0^{\pi} \cos(n+2)\phi \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi \, d\phi \int_0^{\pi} d\phi.$$

Уявна частина інтеграла з подібних міркувань звертається в нуль.

Таким чином, знаходимо інтеграл, що розглядається

$$=\int_0^{\pi} \cos(n+2)\phi \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi \, d\phi = \pi \sum_{t=0}^{n+2} \frac{T_{n+2}(1)_t j!!(2j-1)!!(n-2m+t-1)!!}{((n-2m+t)!!)^2}. \quad (3.30)$$

Підставляючи (3.30) у (3.27), отримуємо такий вираз

$$\iint_S \frac{(z-z_0)^{n+2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3} = z_0^{n+2}\pi^2 \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{n+j} C_n^{n-2m} C_{m+1}^{j} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!} \times$$

$$\times \left(\frac{R}{\rho_0}\right)^{2m-2j+2} \sum_{t=0}^{n+2} \frac{T_{n+2}(1)_t j!!(2j-1)!!(n-2m+t-1)!!}{((n-2m+t)!!)^2}. \quad (3.31)$$

Таким чином, отримано аналітичні розв’язки гіперсингулярного рівняння для кругової рбласті для правих частин у вигляді дійсної та уявної частин функції $\boldsymbol{f(x,y) = (x+iy)^n}$.

3.6 Числовий аналіз концентрації напружень в пружних тілах з тріщинами

Використання гіперсингулярних інтегралів, хоч і є складнішим у числовому плані, забезпечує більш точне відображення складних граничних умов і сингулярностей, що робить їх потужним інструментом у розширених формулюваннях МГЕ. Гіперсингулярні інтегральні рівняння особливо ефективні при моделюванні взаємодії між тонкими конструкціями та навколишнім середовищем, а також у задачах механіки руйнування. Такі формулювання дають більш точне та стабільне математичне подання, особливо коли товщина структури наближається до нуля. Тонкі структури часто викликають розриви тиску або швидкості, тоді як моделі тріщин вимагають аналізу стрибків переміщення. Гіперсингулярні формулювання дозволяють безпосередньо враховувати ці

розриви, що зручно при моделюванні складних взаємодій, у яких такі стрибки мають суттєве значення. Ці переваги роблять метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь потужним засобом для моделювання взаємодії тонких конструкцій із рідиною а також концентраторів напружень у деформованих візках. Вони забезпечують вищий рівень точності, стабільності та більш реалістичне фізичне відображення порівняно з сингулярними інтегральними формулюваннями.

Метод граничних елементів (МГЕ) є потужним інструментом для розв'язання задач у галузі математичної фізики та має низку переваг порівняно з методом скінченних елементів (МСКЕ), зокрема дискретизацію лише по межі та підвищену точність. Ці переваги особливо важливі при інтегруванні по суміжних поверхнях - поширеній задачі в механіці руйнування, яка призводить до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. У цих рівняннях невідомі функції описують розкриття тріщини. Після їх розв'язання можна легко обчислити коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині тріщини, що мають вирішальне значення для аналізу руйнування.

3.6.1. Перехід від фізичної моделі для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із тріщинами до математичного формулювання

Для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із тріщинами треба створити математичну модель, яка точно відображає основні фізичні процеси, що відбуваються в реальному тілі під дією навантаження. З метою математичного опису поведінки тіла з тріщиною було прийнято низку спрощень: матеріал вважається пружним, ізотропним, тріщина - гладкою, відкритою, дія сили - стаціонарна (або змінна, якщо мова про циклічне навантаження). Для опису поведінки тіла з тріщиною обрано підхід лінійної пружності (або нелінійної, якщо є пластичність), а також метод граничних інтегральних рівнянь (метод скінченних елементів тощо), що дозволяє точно врахувати сингулярність поля напружень біля вершини тріщини.

Таким чином, фізична модель тіла з тріщиною описує реальний об’єкт, у якому під дією навантаження виникають локалізовані концентрації напружень. Для адекватного числового аналізу поведінки такої системи необхідно перейти до математичної моделі, яка базується на законах механіки суцільного середовища. З цією метою було прийнято низку припущень, зокрема, матеріал вважається лінійно-пружним та ізотропним, а тріщина - тонкою та гладкою. Застосовано метод граничних інтегральних рівнянь, що дозволяє врахувати сингулярну поведінку напружень біля вершини тріщини.

Виходимо з фізичних законів (рівняння рівноваги, співвідношення Коші (2.17), закон Гуку).

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла використовується система еліптичних диференціальних рівнянь другого порядку відносно вектора переміщень **U**.

$$\mu\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \vartheta = \mathrm{div}\mathbf{U}, \qquad (3.32)$$

де λ та μ - коефіцієнти Ламе.

Використовуємо закон Гуку (зв’язок між напруженнями та деформаціями)

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

а також співвідношення Коші (зв’язок між деформаціями та переміщеннями)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{i,j}\right).$$

Застосуємо оператор диференціального поверхневого напруження з класичної теорії пружності у вигляді [78]

$$\mathbf{T^{n(x)}U} = 2\mu\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{n}} + \lambda\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{U} + \mu(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{U}),$$

де **n** – зовнішня одинична нормаль.

Будемо вивчати таку крайову задачу теорії пружності для довільного тривимірного тіла, обмеженого поверхнею Ω та ослабленого системою тріщин S_i

(i=1,...,n). Нехай на межі Ω_1 задані кінематичні умови першої крайової задачі

$$u_i(\mathbf{x})=u_{il}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega_1, \qquad i=1,2,3.)$$

На частини Ω_2 задані статичні умови навантаження, що відповідають другій крайовій задачі теорії пружності

$$X_i(\mathbf{x})=\sigma_{1i}\, n_1(\mathbf{x})+ \sigma_{2i}\, n_2(\mathbf{x})+ \sigma_{3i}\, n_3(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in \Omega_2,\ \ i=1,2,3,$$

де $n_i(\mathbf{x})=\cos(\mathbf{n},x_i)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ до поверхні $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ у точці $\mathbf{x}$.

Наявність концентрації напружень у конструктивному елементі може зумовити ініціацію тріщин у найбільш навантажених зонах. З огляду на це, для дослідження ефектів концентрації напружень запропоновано поетапний підхід. На першому етапі визначається напружено-деформований стан тіла без урахування тріщин, з метою виявлення зон з максимальними значеннями напружень. На другому етапі в цих зонах штучно моделюються тріщини різної геометричної форми, зокрема кругові, прямокутні тощо. На береги тріщини прикладаються еквівалентні граничні умови у вигляді напружень, отриманих у результаті розв’язання відповідної крайової задачі для непошкодженого тіла. Такий підхід дозволяє детально дослідити вплив локальних дефектів на міцність і стійкість конструкції.

Розв’язок цієї задачі зобразимо як суму вектор-функцій

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})= \mathbf{u}_0(\mathbf{x})+ \mathbf{u}\,(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ - переміщення, які виникли б у суцільному тілі під дією тих самих поверхневих навантажень. Ці переміщення можна визначити з системи рівнянь

$$\mu\Delta u_{j0} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}= 0,\ \ j=1,2,3,$$

$$u_{j0}(\boldsymbol{x})= u_{il}(\boldsymbol{x}), \qquad j=1,2,3, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_1,$$

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}}\,(\partial_{\mathbf{x}}\,,\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{U}_0(\mathbf{x})= \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in\Omega_2.$$

Розв’язання крайової задачі може бути здійснено за допомогою різних методів.

Опишемо підхід, що виникає при застосуванні методів теорії потенціалу. Шукатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ у вигляді узагальненого пружного потенціалу простого шару по поверхні Ω

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi,$$

де $\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})$ – невідомий вектор густини.

Вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ задовольняє рівнянням Ламі при будь-якій густині $\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})$, що інтегрується на Ω, Підставивши її в крайові умови, приходимо до інтегральних рівнянь

$$\iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi = \mathbf{u}_l(\mathbf{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_1,$$

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}_0(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega_2.$$

Далі розглядаємо необмежене тіло. Також припускаємо що

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{u_0(x)}$ - переміщення, які виникли б у суцільному тілі під дією тих самих навантажень. Вважаємо, що переміщення $\mathbf{u_0(x)}$ знайдені. Тоді на поверхнях розрізів будуть діяти відомі навантаження

$$\mathbf{T^n}(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{n(x)})\mathbf{u_0(x)} = \mathbf{X(x)}.$$

Для визначення вектору переміщень $\mathbf{u}$ для необмеженого тривимірного тіла, ослабленого системою розрізів $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$, приходимо до такої крайової задачі:

$$\Delta \mathrm{U_j} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0,\ j=1,2,3,\ \mathbf{T^{n(x)}U(x)} = \mathbf{X(x)},\ \mathbf{x}\in S. \qquad (3.33)$$

Розв’язання крайової задачі (3.33) може бути отримане з використанням різних чисельних методів. Зокрема, широко застосовуються метод скінченних елементів (МСКЕ) [42] і метод граничних елементів (МГЕ) [43], які ґрунтуються на методі зважених нев’язок [30].

Особливістю МГЕ є використання формулювання із сингулярними тестовими функціями, які задовольняють диференціальне рівняння (3.32) скрізь,

окрім однієї сингулярної точки. У цьому методі в якості тестових функцій використовуються фундаментальні та сингулярні розв'язки рівняння (3.32).

Фундаментальний розв'язок у теорії пружності отримують шляхом розв'язання рівняння (3.32) з правою частиною у вигляді дельта-функції; він представлений у такій матричній формі [78]:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} + \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\right].$$

Використовуючи наступне подання для **u**, що базується на тотожності Сомільяна [78]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_S \Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})dS_{\xi},$$

де $\Gamma_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})}\Gamma(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})]'$, а $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ **-** це вектор невідомої густини для ізольованої тріщини, що приводить до формулювання гіперсингулярного інтегрального рівняння, як подано в [78].

Таким чином, сформульовано математичну модель у вигляді крайової задачі

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\iint_S \mathbf{T}^{\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})}\Gamma_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in S. \qquad (3.34)$$

Тут $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ – невідома густина, яка характеризує розрив нормальних переміщень на поверхні тріщини.

Слід зазначити, що в теорії пружності оператор поверхневих напружень відіграє ту ж роль, що й нормальна похідна в теорії потенціалу. Інтеграл у рівнянні вище існує лише в сенсі Адамара. При розгляді області *S* як плоскої ізольованої тріщини нормального відриву оператор $\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}$ приймає вигляд похідної за нормаллю до поверхні, і рівняння (3.34) набуває наступного вигляду:

$$\iint_S \alpha_3(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\,\partial\mathbf{n}_{\xi}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}dS_{\xi} = X_3(\mathbf{x}).$$

Це рівняння зазвичай подається у такому вигляді [44], [45]:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\alpha_3(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}dS_{\boldsymbol{\xi}} = Mq(\mathbf{x}), M = \frac{1-\nu}{\mu}, \qquad (3.35)$$

де ν — коефіцієнт Пуассона, а функція $q(\mathbf{x})$ описує прикладене навантаження.

У задачах механіки руйнування найважливішими параметрами є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Ці коефіцієнти характеризують поля напружень і переміщень поблизу вершини тріщини та ефективно використовуються для прогнозування її поширення і руйнування конструкції.

У задачах, пов'язаних із тріщинами нормального відриву, значення має лише коефіцієнт K_1. Задача оцінки КІН зводиться до визначення розриву переміщення $\alpha_3(\mathbf{y})$, і використання формули:

$$K_1(\mathbf{x}) = \lim_{r\to 0}\sqrt{\pi/2r}\,\frac{\mu}{1-\nu}\,u_3(\mathbf{y}),\ \ \mathbf{y}\in S, \tag{3.36}$$

де $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ - відстань між точкою y, розташованою поблизу тріщини, та точкою **x** на контуру тріщини.

Слід зазначити, що при реалізації методу граничних елементів (МГЕ)

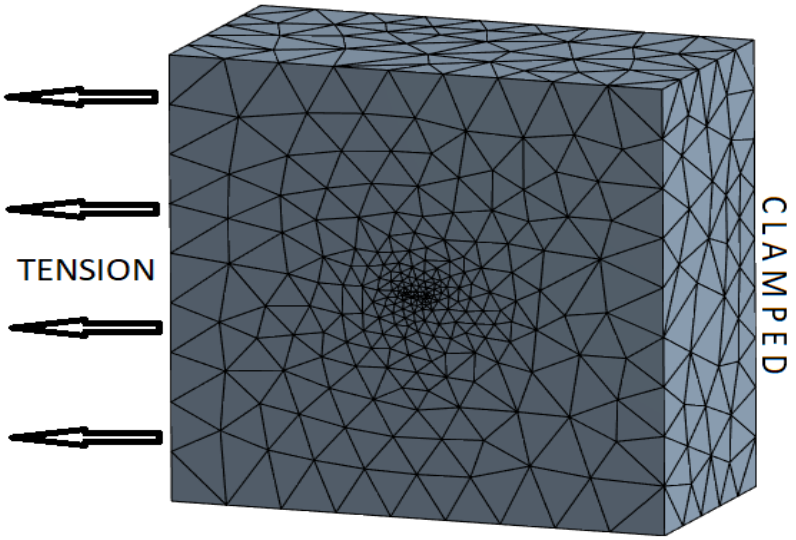
$$\lim_{\mathbf{y}\to} u_3(\mathbf{y}) = \alpha_3(\mathbf{x})/2,$$

а $\alpha_3(\mathbf{x})$ є розв'язком рівняння (3.36).

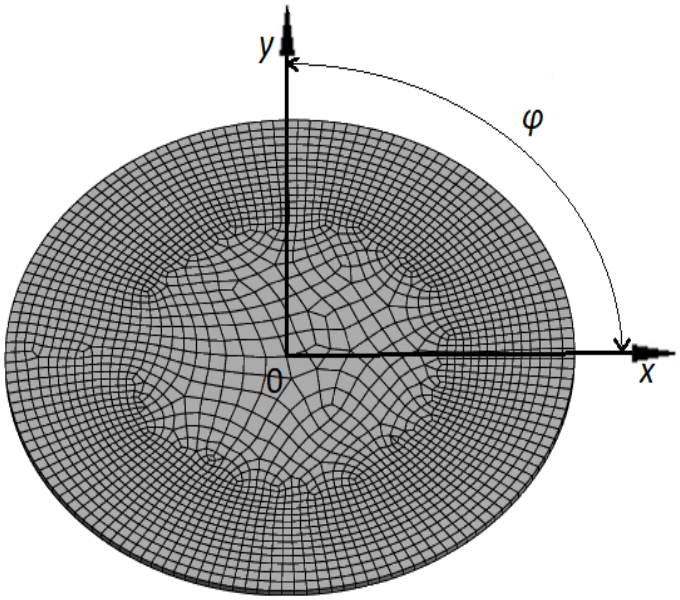
3.6.2 Дослідження концентрації напружень у тривимірному тілі з плоскою круговою тріщиною

Для тестування чисельних методів зручно розглядати тріщину у формі круга в необмеженому пружному тілі, яке перебуває під дією рівномірного розтягу σ. У цій роботі основна увага приділяється аналізу такої тріщини з використанням методів граничних та скінченних елементів для оцінки КІН.

Досліджується тріщина у формі круга радіуса R, що знаходиться під дією одновісного розтягу σ. Для чисельної оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) застосовуються як метод граничних елементів (МГЕ), так і метод скінченних елементів (МСЕ). Зокрема, при використанні МГЕ тріщина моделюється як коло радіуса R у необмеженому просторі. При цьому використовуються одновимірне (3.20) та двовимірне (3.21) гіперсингулярні інтегральні рівняння.



а)



б)

Рисунок 3.2. Дискретизація розрахункових областей для кругової тріщини при використанні методу скінченних елементів (a) та методу граничних елементів (b)

У випадку осьової симетрії рівняння (3.35) зводиться до одномірного гіперсингулярного рівняння (3.20); обидва ці рівняння розглядаються далі для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Також використовується метод скінченних елементів (МСЕ). При використанні МСЕ тріщина моделювалася в призматичному зразку з характерним розміром L, при цьому співвідношення R/L=0.005. Крім того, для порівняння та перевірки результатів

застосовуються аналітичні розв'язки рівнянь (3.35) і (3.20). Аналітичне розв'язання рівняння (3.20) з правою частиною $f(\rho_0) = -1$ наведено в [46] у вигляді $\gamma(\rho) = 4\sqrt{R^2 - \rho^2/\pi}$, а також аналітичний вираз для КІН: $K_{\mathrm{I}} = 2\sigma\sqrt{\pi R}$. Зазначимо, що у випадку одновісного розтягу σ для точного опису концентрації напружень достатньо лише коефіцієнта K_{I}.

На рисунку 3.2 показано, як здійснюється дискретизація розрахункових областей для тріщин у формі монети при використанні методу скінченних елементів (а) та методу граничних елементів (б).

У наших чисельних розрахунках приймається R=0.005m і σ = 1MPa. Для реалізації методу скінченних елементів розглядається тріщина у формі монети в прямокутному зразку, зображеному на рисунку 3.2а). Половина скінченно-елементної сітки містить 43 946 скінченних елементів, тоді як гранична сітка для числового розв'язання рівняння (3.21) при використанні постійного наближення щільності містить 9322 елементи. Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) обчислюється в різних точках контуру за значеннями кута як показано на рисунку 3.2б). Для порівняння також розв'язується одномірне гіперсингулярне інтегральне рівняння. У цьому випадку областю інтегрування є відрізок $[0, R]$, який розбивається на N_1=120 одномірних граничних елементів з постійним наближенням щільності. Усі ці розв'язки використовуються для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Розглянута задача слугує тестовим прикладом і може бути використана для визначення необхідної кількості граничних елементів для досягнення заданої точності обчислень.

У таблиці 3.1 наведено чисельні результати оцінки безрозмірного коефіцієнта $K_1/\sigma\sqrt{R}$, отримані як за допомогою аналітичного розв'язку гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР), так і чисельних розв'язків рівнянь (3.21) та (3.20), а також порівняння з чисельним розв'язком методом скінченних елементів [48], [49].

Таблиця 3.1: Порівняння чисельних оцінок безрозмірного коефіцієнта $K_1/\sigma\sqrt{R}$.

Кути φ	Аналітичне значення	МГЕ, двовимірне ГІР, (3.35)	МГЕ, одномірне ГІР, (3.20)	МСЕ
10	1.12827	1.13217	1.12988	1.14217
30	1.12827	1.12945	1.12837	1.14207
50	1.12827	1.12876	1.12830	1.14204
70	1.12827	1.12842	1.12828	1.14203
90	1.12827	1.12830	1.12828	1.14200

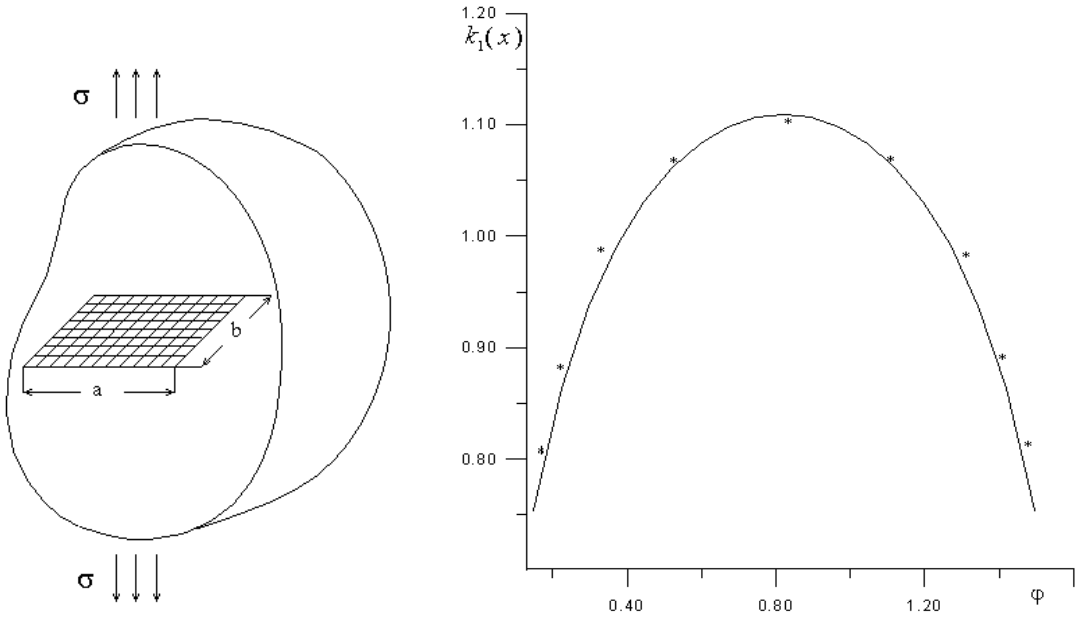
Найбільш точні результати було отримано при застосуванні одномірного гіперсингулярного інтегрального рівняння (ГІР), що забезпечує високу точність розрахунків у задачах з концентрацією напружень. Основним обмеженням цього методу є його застосовність переважно до випадків з круговими або еліптичними областями інтегрування. Водночас отримані результати мають важливе прикладне значення: вони дають змогу оцінити і обґрунтувати необхідну кількість скінченних елементів, а також оптимальну щільність розбиття при використанні одномірних і двовимірних граничних елементів. Це, у свою чергу, сприяє підвищенню ефективності чисельної реалізації моделі та забезпечує належний баланс між обчислювальними витратами та точністю розв’язку**.**

3.6.2 Дослідження концентрації напружень у тривимірному тілі з плоскою прямокутною тріщиною

Розглянемо нескінченне тіло, ослаблене плоскою тріщиною у формі правильного чотирикутника *S* (рис. 3.3а)). Як показано вище, задача визначення КІН зведена до розв’язання гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.35)

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|\boldsymbol{x}-\xi|^3}\, d_\xi S = Mq(\boldsymbol{x}); \quad M = \frac{1-\nu}{G}.$$

Зазначимо, що ця задача була розв’язана в [86]. Тут застосовувалось афінне відображення області *S* на внутрішність одиничного круга



а) б)

Рисунок 3.3 а) пружне тіло з плоскою тріщиною у формі прямокутника б) порівняння коефіцієнта інтенсивності напружень з даними роботи [86].

На рис.3.3б) Тут наведено значення $K_1(\mathbf{x})$, обчислені зазначеним методом граничних при розбитті області S на 600 граничних елементів із сталою апроксимацією густини. Бачимо, що результати, отримані за двома методиками, є досить близькими. Певне розходження спостерігається у вершинах квадрата S. Це пояснюється зміною характеру поведінки густини при наближенні точки спостереження до кутової точки. Зазначена зміна не враховується в межах запропонованого варіанту числового методу розв'язання гіперсингулярного рівняння (3.21). Суттєвою перевагою методу граничних елементів є його здатність моделювати тріщини довільної просторової форми. На відміну від методу конформних відображень, який обмежений задачами з плоскими тріщинами, МГЕ дозволяє досліджувати просторові тріщини складної геометрії без істотних обмежень щодо форми або орієнтації. Це значно розширює сферу його застосування для аналізу міцності конструкцій.

3.6.3 Дослідження кількості циклів до руйнування конструктивного елементу з тріщиною

Для демонстрації застосування запропонованої методики розглянемо задачу щодо оцінювання кількості циклів навантаження до руйнування конструкції.

Розглянемо горизонтальний паливний бак, повністю заповнений окислювачем. Спрощена тривимірна модель бака представлена у вигляді циліндра з двома днищами, які складаються з кругових секторів різних радіусів. Також передбачено два кільця, розташовані на однаковій відстані від торців циліндра, призначені для кріплення. Геометрична модель паливного бака зображена на рисунку 3.4а). Відсутність вільної поверхні дає змогу виключити ефект плескань як важливий чинник, що впливає на результуючі навантаження.

Бак є дуже крихким, тому для його надійного кріплення встановлено два кільця з того самого матеріалу, що й сам бак, жорстко закріплені по контуру. Під час транспортування виникають стаціонарні циклічні навантаження, пов’язані зі швидкістю руху та якістю залізничної колії. Ці навантаження є нестаціонарними та мають розподіл типу «падаючого дощу». Проте такий розподіл можна отримати лише експериментальним шляхом. Оскільки проведення експерименту неможливе, як спрощений аналог використовується стаціонарний циклічний розподіл, зображений на рисунку 3.4б).

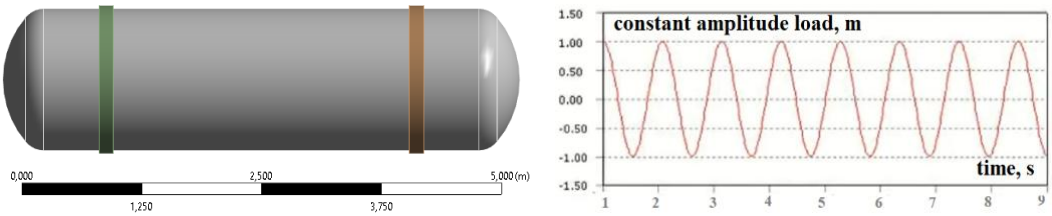
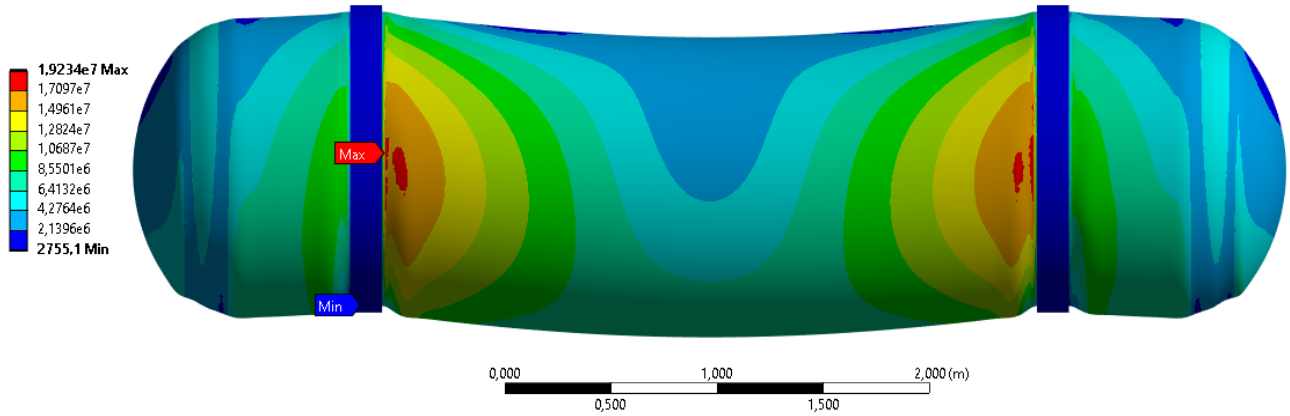


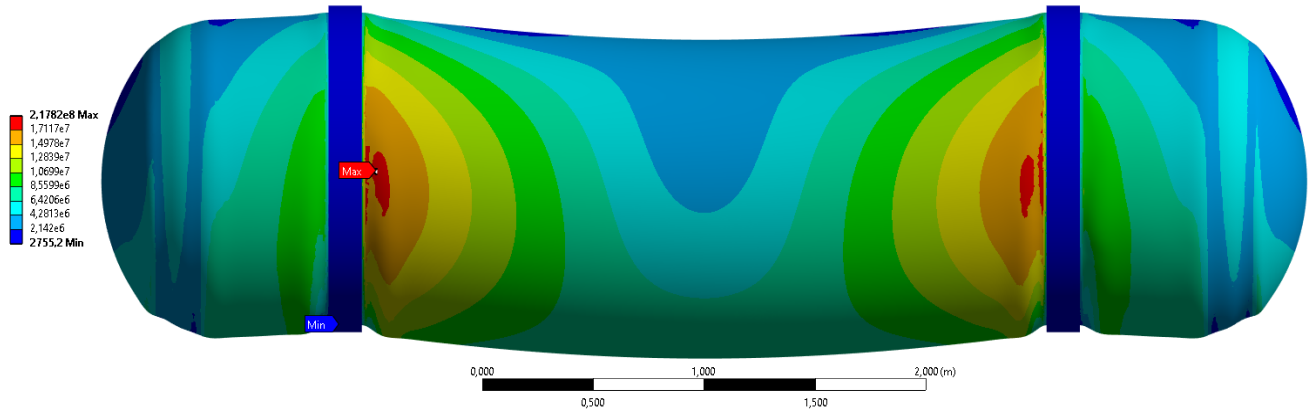
Рисунок 3.4 Модель резервуару а) та розподіл навантаження б)

Геометричні параметри паливного бака є такими: діаметр циліндричної частини - 1342 мм, довжина циліндричної частини - 4540 мм, товщина стінки бака - 1,5 мм, загальна довжина моделі - 5384 мм, переріз кріпильних кілець прямокутний - 150×30 мм. Матеріал бака - алюмінієвий сплав АМг6, густина 2640 кг/м³, модуль Юнга 71 ГПа, коефіцієнт Пуассона 0,33, границя плинності 280 МПа, тимчасовий опір розриву 310 МПа. Застосовано метод скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану конструкції без тріщини. Згенеровано тетраедральну скінченно-елементну сітку, що містить 460 000 елементів. Отримано розподіл еквівалентних напружень за Мізесом у конструкції:

максимальне значення становить 19.2 МПа і спостерігається поблизу місця зміни форми конструкції (рис. 3.5) поблизу кріплень.



а)



б)

Рисунок 3.5. Розподіл еквівалентних напружень за Мізесом

Бачимо, що максимальні напруження в конструкції значно нижчі за границю плинності матеріалу. Отже, конструкція без дефектів продемонструвала високу міцність. Однак більшість реальних конструкцій містять зварні шви, які часто мають вищу міцність, ніж основний матеріал конструкції. Ситуація стає значно складною, якщо поперечний зварний шов не лише проходить через зони з максимальними напруженнями, але й містить дефект, подібний до тріщини. Отже розміщуємо модельну тріщину у вигляді плоского кругу з радіусом 0.3мм в зоні найбільших напружень. Тут приходимо до задачі, що описана у пункті 3.6.1. Використовуємо двовимірне гіперсингулярне рівняння (3.35) з правою частиною,

в якій $q(x)$ =19.2. Після отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень використовуємо формулу Періса для знаходження кількості циклів до руйнування

$$dN = \frac{1}{C}(\Delta K - \Delta K_{th})^{-m} dR,\ \Delta K_{th} < \Delta K < K_{1C} \qquad (3.37)$$

Тут $\Delta K = 2\max K_1(\mathbf{x})$, сталі материалу обрані такими C=3.2·10^{-11} МПа $\sqrt{\text{м}}$, m = 3.09, K_{1C} = 31 МПа $\sqrt{\text{м}}$, ΔK_{th} = 7.4 МПа $\sqrt{\text{м}}$.

Інтегруємо співвідношення (3.37) від початкового значення $R = 0.0001$мм до кінцевого значення $R = 3$ мм (це значення вважається неприпустимим з точки зору нормо-контролю [87]. Отримуємо кількість циклів N=10^8. Після цього здійснюємо розрахунок МСЕ резервуару з круговою тріщиною радіуса $R = 3$ мм. Розподіл еквівалентних напружень за Мізесом в цьому випадку показаний на рис. 3.5б). Отриманий розподіл еквівалентних по Мізесу напружень у конструкції візуально практично збігається з розподілом для варіанту конструкції без тріщини, проте в околі тріщини виникає значний сплеск напружень з максимумом в 217.8 МПа. При цьому кількість циклів до руйнування становить приблизно 18430. Безумовно, цього достатньо, щоб провести транспортування конструкції на невеликі відстані, проте тривале транспортування здатне викликати руйнування конструкції поблизу тріщини, лавиноподібне зростання тріщини з подальшою розгерметизацією та руйнуванням.

Зазначимо, що метод граничних елементів (МГЕ) має низку важливих переваг у задачах із тріщинами або іншими локальними дефектами. Основні переваги цього методу:

1. Зменшення розмірності задачі. МГЕ дозволяє звести просторову задачу до інтегрування лише по поверхні тіла, що суттєво зменшує кількість невідомих і розмірність обчислювальної моделі.
2. Метод особливо ефективний для задач у нескінченних або напівнескінченних областях, оскільки гранична постановка природно враховує поведінку поля на нескінченності.

3. МГЕ забезпечує високу точність поблизу тріщин, кутів, отворів та інших геометричних особливостей, де класичні методи (наприклад, метод скінченних елементів) вимагають суттєвого згущення сітки.
4. У методі граничних елементів тріщина моделюється як дискретна поверхня без дискретизації всієї моделі, що полегшує аналіз росту тріщини і оцінку коефіцієнтів інтенсивності напружень. Завдяки зменшенню розмірності та меншій кількості елементів порівняно з методом скінченних елементів, МГЕ часто потребує менших обчислювальних витрат при збереженні високої точності.
5. У МГЕ можна вводити сингулярні або гиперсингулярні пробні функції, які відображають аналітичну поведінку напружень поблизу тріщини, що значно підвищує точність моделі.

Завдяки цим перевагам метод граничних елементів є особливо ефективним інструментом для моделювання просторових задач механіки руйнування.

3.7 Висновки за розділом

Отримано одновимірне гіперсингулярне рівняння, до якого зводиться крайова задача Неймана на круговій області, а також запропоновано числовий метод для його розв’язання. Основна ідея цього дослідження полягає в тому, що вдалося знизити розмірність задачі ще на одну одиницю, що забезпечило можливість побудови ефективного числового методу для розв’язання отриманого рівняння. Це має важливе значення для формування тестових задач, призначених для перевірки достовірності числових методів.

Побудовано аналітичні розв’язки гіперсингулярного рівняння для кругової області, де праві частини мають вигляд дійсної та уявної частин функції $f(x,y) = (x+iy)^n$.

Для довільної розімкненої поверхні Ляпунова S доведено, що необхідною і достатньою умовою існування скінченного граничного значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на S є існування скінченного граничного

значення цієї ж похідної на площині, дотичній до S. Це дозволило обґрунтувати заміну поверхні під час інтегрування сукупністю плоских елементів.

Отримано аналітичні вирази для скінченної частини за Адамаром гіперсингулярного інтегралу для довільного плоского багатокутника.

Проведено числове моделювання концентрації напружень у тілах з тріщинами кругової та прямокутної форми із застосуванням методу граничних елементів (МГЕ) та методу скінченних елементів (МСЕ). Для порівняння також використано аналітичні розв’язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Результати свідчать про високу точність при використанні одномірного гіперсингулярного рівняння, що дозволяє з мінімальною похибкою обчислювати коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Проте застосування цього підходу обмежене геометрією задачі (кругові та еліптичні області). Двовимірне гіперсингулярне рівняння забезпечує дещо нижчу точність, але є значно універсальнішим. Метод скінченних елементів також демонструє добрі результати, проте вимагає значно більших обчислювальних витрат.

Проведено обчислення кількості циклів до руйнування паливного баку з тріщиною.

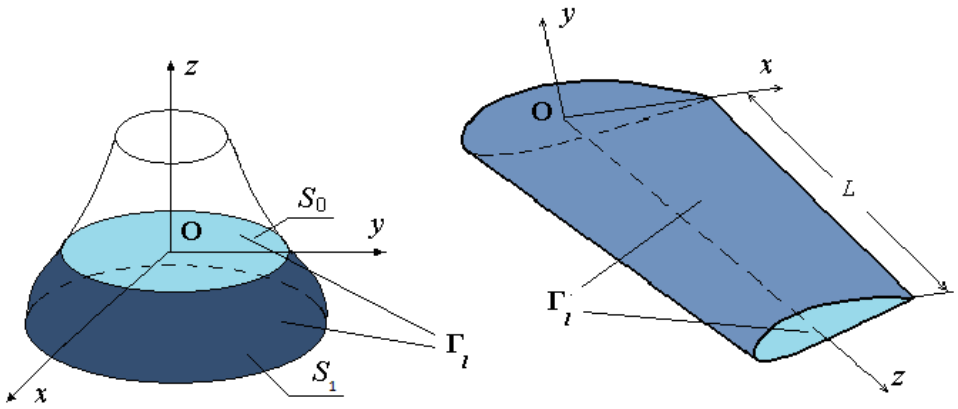
Таким чином, результати моделювання підтверджують ефективність і доцільність використання гіперсингулярних рівнянь у задачах механіки руйнування для точного визначення КІН. Крім того, отримані числові дані можуть слугувати тестовими прикладами для оцінки точності різних числових методів.

Основні результати цього розділу надруковані в роботах автора [1],[2],[6],[8],[13].

РОЗДІЛ 4
ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ГІДРОПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ТА СИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Рівняння руху деформівного тіла

Для опису руху як пружної конструкції, так і рідини використовуються основні співвідношення механіки суцільного середовища. Нехай є пружне тіло, що займає область Ω з границею Г. Припустимо, що на тіло діють задані об'ємні та поверхневі сили. Крім того, частина поверхні тіла Γ_l контактує з рідиною, рис.4.1.



а) б)

Рисунок 4.1 Схеми конструкцій, що взаємодіють з рідиною:
а)- однобічний контакт,
б)- двобічний контакт

Всі моделі суцільного середовища [14] передбачають визначення полів напружень σ_{ij}, деформацій ε_{ij}, переміщень u_i, а також температури T, тиску p та густини ρ в залежності від часу. Для знаходження цих полів застосовують такі основні співвідношення [14]:

рівняння руху в напруженнях

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} 0; \quad i,j = 1,2,3, \tag{4.1}$$

співвідношення Коші для малих деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}), \tag{4.2}$$

а також умови сумісності деформацій, граничні та початкові умови й рівняння стану, що пов’язують тиск, густину та температуру середовища.

Рівнянь (4.1)-(4.2) недостатньо для однозначного визначення σ_{ij}, ε_{ij}, u_j (i, j= 1,2,3). Тому задають додаткові співвідношення між напруженнями та деформаціями, або між напруженнями та швидкостями деформацій. Якщо вивчається пружне тіло, то компоненти тензорів напружень є лінійними функціями від компонентів деформацій. Зв'язок між деформаціями та напруженнями описується законом Гука у формі

$$\sigma_{ij}^{e} = \delta_{ij}\lambda \operatorname{div}\mathbf{u}^{\mathrm{e}} + \mu\left(\frac{\partial u_j^e}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j}\right) \qquad i,j = 1,2,3, \tag{4.3}$$

де $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву, $\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Ламе, E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Вважаємо, що на частині межі Γ_1 задані переміщення тіла, а на частині Γ_2 - зусилля; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Зусилля виражаються за формулою [78]

$$\mathbf{p}^{\mathrm{e}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}^{\mathbf{n}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x},t))\,\mathbf{u}^{e}(\mathbf{x},t) = 2\mu\frac{\partial \boldsymbol{u}^{e}}{\partial \boldsymbol{n}} + \lambda\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u}^{e} + \mu(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}^{e}). \tag{4.4}$$

Тобто граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{u}^{e}(\mathbf{x},t)|_{\Gamma_1} = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{p}^{e}(\mathbf{x},t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{P}(t). \tag{4.5}$$

Задаються також початкові умови, якщо розглядається динамічний стан

$$\mathbf{u}^{e}(\mathbf{x},0)=0, \ \frac{\partial \boldsymbol{u}^{e}(\mathbf{x},0)}{\partial t} = 0. \tag{4.6}$$

З урахуванням рівності (4.3) рівняння руху (4.1) набувають вигляду

$$\mu\Delta u_j^e + (\lambda+\mu)\frac{\partial \vartheta^e}{\partial x_j} + X_j = \rho\frac{\partial^2 u_j^e}{\partial t^2}, \qquad j=1,2,3. \tag{4.7}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\vartheta^e = \operatorname{div}\mathbf{u}^{\mathrm{e}} = \frac{\partial u_1^e}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^e}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^e}{\partial x_3}$.

Для розв’язання рівнянь руху (4.7) застосовуємо метод зважених нев’язок, невідомі подаємо у вигляді рядів за базисом з фінітних функцій $\{\psi_n\}|_{n=1}^{N_1}$; як про-

бні використовуємо функції з цього ж базису. Після інтегрування отриманого співвідношення по об’єму та зведення частки об’ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементне формулювання зазначеної задачі у вигляді

$$[\mathbf{M}_S]\ddot{\boldsymbol{u}}^e + [\mathbf{K}_S]\boldsymbol{u}^e = \{\boldsymbol{f}_S\} + \{\boldsymbol{f}_{pr}\} \tag{4.8}$$

де $[\mathbf{M}_S]$, $[\mathbf{K}_S]$ - матриці мас та жорсткості, відповідно, $\{\boldsymbol{f}_S\}$ - вектор заданих зусиль, що діють на пружне тіло, $\{\boldsymbol{f}_{pr}\}$- вектор зусиль, що характеризують тиск рідини на змочені поверхні пружного тіла, який буде визначено далі.

4.2. Основні співвідношення для опису руху рідини

Для визначення означеного вектору $\{\boldsymbol{f}_{pr}\}$ перейдемо до формулювання початково-крайової задачі з механіки рідини. Для опису рідини використовуємо співвідношення (4.1)-(4.2). Також задається зв'язок між напруженнями та швидкостями деформацій. Зробимо такі припущення відносно рідкого середовища. Вважаємо, що рідина є стисливою та нев’язкою, а її рух безвихровий. Припускаємо, що збурення тиску рідини внаслідок руху пружного тіла є малими, тобто розв’язуємо зв’язану задачу в лінійному формулюванні. Використовуємо загальні закони механіки рідини, а саме: закон збереження маси (рівняння нерозривності)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_\mathrm{f}) + Q, \tag{4.9}$$

де $\boldsymbol{V}_f$ – вектор швидкості, ρ- густина рідини, Q – джерела, t –час.

Далі використовуємо рівняння руху (4.1) у напруженнях (наслідок закону збереження імпульсу) з врахуванням об’ємних сил **b**

$$\rho \frac{d\boldsymbol{V}_f}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f).$$

Для визначення компонент тензору напружень приймаємо гіпотезу

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -\mathrm{p}\mathbf{I} + \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = 2\mu\left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div}\mathbf{V}_\mathrm{f})\right), \tag{4.10}$$

де $\dot{\boldsymbol{S}}$ - девіатор швидкостей деформації.

З використанням рівняння стану з (4.9) та (4.10) маємо наближені рівності

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}_f = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}, \frac{\partial \boldsymbol{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0}\left(-\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}\right). \quad (4.11)$$

Надалі вважаємо, що рідина нестислива та нев'язка, а джерела відсутні. Тоді маємо $Q = 0,\ \mu = 0,\ \rho_0 = const,\quad c \to \infty$. При цьому (4.11) набувають вигляду

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_\mathrm{f} = 0, \qquad \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_f}{\partial t} = -\nabla p \quad (4.12)$$

Обчислив дивергенцію від другого співвідношення в (4.12), отримаємо, що тиск p є гармонічною функцією, тобто задовольняє рівнянню Лапласа, а саме

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (4.13)$$

Саме тиск, або його перепад входить в праву частину рівнянь (4.8).

Припустимо, що має місце таке розкладення для невідомих переміщень

$$\mathbf{u}^e(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\mathbf{u}_k(x, y, z), \quad (4.14)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

$\boldsymbol{u}_k(x, y, z)$ – відомі базисні функції.

Функції часу $c_k(t)$ зазвичай розглядають як узагальнені координати. З огляду на (4.14), рівнянням (4.8) надаємо таку форму

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\ddot{c}_k(t)\left[\mathbf{M}\mathbf{u}_k\right] + c_k(t)\left[\mathbf{K}\mathbf{u}_k\right]\right\} = \left\{\mathbf{f}_S\right\} + \left\{\mathbf{f}_{pr}\right\}. \quad (4.15)$$

Надалі використовуємо метод зважених нев'язок [13], що в даному випадку еквівалентно виконанню скалярного добутку рівнянь (4.15) послідовно на функції $\boldsymbol{u}_l(x, y, z)$. Отримуємо

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{c}}] + [\mathbf{K}][\mathbf{c}] = \{\tilde{\boldsymbol{f}}_S\} + \{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\},$$

де $[\mathbf{M}] = \{\mathbf{M}\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l\}, \quad [\mathbf{K}] = \{\mathbf{K}\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l\}$.

Якщо $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_S\} = \{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\} = 0$, то маємо задачу на визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції без врахування приєднаних мас рідини, при лише $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_S\} = 0$ приходимо до задачі на визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції з врахуванням приєднаних мас рідини.

4.3 Визначення тиску на контактуючі з рідиною поверхні елементу конструкції

4.3.1. Двобічний контакт елементу конструкції з рідиною

Розглядається тонкостінний елемент конструкції (пластина, оболонка або об'ємне тіло з тонкою стінкою), що контактує з рідиною з обох боків.

Фізична модель включає: геометрію конструкції, що задана поверхнею *S*, яка розділяє дві області рідини: внутрішню Ω^- і зовнішню Ω^+, механічні властивості конструкції, що визначають її вібраційні характеристики - модуль Юнга, густину матеріалу, товщину елемента конструкції, граничні умови. Рідина вважається ідеальною та нестисливою, з густиною ρ_l, потенційним характером течії. коливання конструкції зумовлюють тиск у рідині, який у свою чергу діє як навантаження на конструкцію.

Математична модель включає рівняння Лапласа для знаходження потенціалу швидкостей, кінематичну умову (тобто неперервність нормальної швидкості рідини при перетині поверхні елементу), динамічну умову на поверхні елементу (тобто тиск рідини, що діє на конструкцію), умову згасання швижкості рідини на нескінченості.

З отриманого вище рівняння (4.15) визначаємо, що треба знайти праву частину в співвідношенні

$$[\boldsymbol{M}][\ddot{\boldsymbol{c}}] + [\boldsymbol{K}][\boldsymbol{c}] = \{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\}. \qquad (4.16)$$

Якщо вивчається двобічний контакт елементу конструкції з рідиною, то на змочених поверхнях розглядається перепад тиску. Як було зазначено вище, тиск задовольняє рівнянню Лапласа (4.13). Для однозначного розв’язку цього рівняння треба сформулювати граничні умови. Вважаємо, що елемент конструкції досить тонкий, тому згідно з [15], вважаємо, що граничні умови можна задавати та серединній поверхні елементу, що розглядається. Сформулюємо граничну умову непротікання, яка для нев’язкої рідини полягає у рівності нормальних складових швидкостей рідини та конструктивного елементу, тобто

$$(\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{e}}, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_{\mathrm{f}}, \mathbf{n}).$$

З другого з рівнянь (4.12) здобудемо

$$\frac{\partial p^{\pm}}{\partial \boldsymbol{n}} = -\rho_{\text{l}}(\ddot{\boldsymbol{u}}^{e}, \boldsymbol{n}) = -\rho_{l} \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_{k}(t)\,(\boldsymbol{u}_{k}, \boldsymbol{n}). \tag{4.17}$$

Нормальна похідна від тиску має бути неперервною, але ж на поверхні елементу тиск має перепад, при чому функція, що описує тиск, є гармонічною.

Крім того, вказана гармонічна функція має задовольняти умові Зоммерфельда на нескінченності, а саме

$$\nabla p|_{\infty} = 0.$$

Як відомо, такі властивості має потенціал подвійного шару [16]

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_S} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \tag{4.18}$$

де S - область, зайнята елементом конструкції;

n – одинична нормаль до поверхні S;

P і $\mathbf{P}_0$ - точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0), відповідно;

$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - декартова відстань між **P** і $\mathbf{P}_0$;

$\Gamma(\mathbf{P})$ - густина потенціалу, задана на поверхні S.

Функція, що визначена формулою (3.3), задовольняє рівнянню Лапласа (4.13), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [16]

$$p^{+}(\mathbf{P}_0) - p^{-}(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S.$$

Тому використовуємо подання (3.2) для визначення тиску. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пластини. Треба задовольнити граничну умову (3.2). Це призводить до інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_S} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS = -\rho_{\text{l}}(\mathbf{u}^{\text{e}}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S. \tag{4.19}$$

З рівняння (4.19) бачимо, що функція $\Gamma(\mathbf{P})$ може бути подана у вигляді такого ряду

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\,\Gamma_k(\mathbf{P}), \tag{4.20}$$

де функції $\Gamma_k(\mathbf{P})$ задовольняють таким гіперсингулярним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_S}\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|}dS = -\rho_l(\mathbf{u}_k,\mathbf{n}), \quad \mathbf{P},\mathbf{P}_0 \in S.$$

Якщо ввести позначення для оператору, що дає розв'язки означених гіперсингулярних рівнянь у вигляді

$$\Gamma_k(\mathbf{P}) = -\rho_l \mathbf{H}_k(\boldsymbol{u}_k),$$

то отримаємо вираз для матриці приєднаних мас для рівняння (4.16)

$$\{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\} = -\rho_l[\mathbf{H}][\ddot{\boldsymbol{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{H}\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l\}. \tag{4.21}$$

Таким чином, отримані рівняння для визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції при двобічному контакті з рідиною – диференціальні рівняння (4.16), в яких $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\}$ обчислюється за формулою (4.21).

Зауважимо, що для обчислення тиску рідини використовується пряме формулювання методу граничних елементів.

4.3.2. Однобічний контакт елементу конструкції з рідиною

Якщо розглядається однобічний контакт елементу конструкції з рідиною, то в рівнянні (4.16) при обчисленні $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\}$ треба використовувати саме тиск p. Ця функція задовольняє рівнянню (4.13), для якого треба сформулювати граничні умови. Відзначимо, що в цьому випадку поверхня розрахункової області складається з двох поверхонь: змоченої поверхні σ та вільної поверхні S_0. На змоченій поверхні ставимо умову непротікання, а саме

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\sigma} = -\rho_l(\ddot{\boldsymbol{u}}^e,\mathbf{n}) = -\rho_l \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\,(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{n}). \tag{4.22}$$

Спочатку розглянемо задачу, де не враховується сила тяжіння, тобто на вільній поверхні не відбувається хвиле утворення. Тоді динамічна гранична мова, що полягає в рівності тиску рідини на вільній поверхні, приймає вигляд:

$$p|_{S_0} = 0. \tag{4.23}$$

Таким чином, маємо мішану крайову задачу (4.13), (4.22),(4.23) для рівняння Лапласа. Тоді найбільш прийнятним є використання методу граничних елементів у прямому формулюванні [13] з використанням другої тотожності Гріна

$$2\pi p(\mathbf{P}_0) = \iint\limits_S \frac{\partial p(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS - \iint\limits_S p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS, \quad S = \sigma \cup S_0 . \tag{4.24}$$

Функція $p(\mathbf{P}_0)$, описана рівнянням (4.24). Застосуємо до рівняння (4.24) граничні умови (4.22) та (4.23). Приходимо до такої системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$2\pi p(\mathbf{P}_0) + \iint\limits_\sigma p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint\limits_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint\limits_\sigma \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma,$$

(4.25)

$$\iint\limits_\sigma p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint\limits_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint\limits_\sigma \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

З лінійності інтегральних операторів, що фігурують в рівняннях (4.25), отримуємо

$$p(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\, p_k(\mathbf{P}), \quad q(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k(t)\, q_k(\boldsymbol{P}). \tag{4.26}$$

Введемо інтегральні оператори

$$\mathbf{A}(\sigma_1, \sigma_2) f(\mathbf{P}) = \iint_{\sigma_1} \frac{f(\boldsymbol{P})}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma_1, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma_2, \quad .$$

$$\mathbf{B}(\sigma_1, \sigma_2) f(\mathbf{P}) = \iint_{\sigma_1} f(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma_1, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma_2 \tag{4.27}$$

Тоді з рівнянь (4.25) з використанням (4.26) будемо мати

$$2\pi \mathbf{I} p_k(\mathbf{P}_0) + \mathbf{B}(\sigma, \sigma) p_k(\mathbf{P}) - \mathbf{A}(S_0, \sigma) q_k(\mathbf{P}) = \rho_1 \mathbf{A}(\sigma, \sigma)(\boldsymbol{u}_k, \mathbf{n}), \tag{4.28}$$

$$\mathbf{B}(\sigma, S_0)p_k(\boldsymbol{P}) - \mathbf{A}(S_0, S_0)q_k(\mathbf{P}) = \rho_l \mathbf{A}(\sigma, S_0)(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{n}).$$

Припустимо, що на поверхнях σ, S_0 розташовано M_1, M_2 граничних елементів, відповідно. Введемо такі матриці та вектори

$$\{\mathbf{q}\}_{i=1}^{M_2} = \{q_k(\boldsymbol{P}_i)\}, \quad \{\mathbf{p}\}_{i=1}^{M_1} = \{q_k(\boldsymbol{P}_i)\}, \quad \{\boldsymbol{u}\}_{i=1}^{M_1} = \{\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{P}_i), \boldsymbol{n}\}, \quad \{\mathbf{A}_{21}\}_{i=1,j=1}^{M_2,M_2}$$
$$= \mathbf{A}(S_0, \sigma), \{\boldsymbol{A}_{11}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_1} = \mathbf{A}(\sigma, \sigma), \ \{\boldsymbol{A}_{22}\}_{i=1,j=1}^{M_2,M_2}$$
$$= \mathbf{A}(S_0, S_0), \quad \{\mathbf{B}_{11}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_1} = \mathbf{B}(\sigma, \sigma), \quad \{\mathbf{B}_{12}\}_{i=1,j=1}^{M_1,M_2} = \mathbf{B}(\sigma, S_0).$$

Отримаємо дискретну форму співвідношень (4.25)

$$(2\pi\{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\})\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{q}\} = \rho_l\{\mathbf{A}_{11}\}\{\mathbf{u}\}, \tag{4.29}$$

$$\{\mathbf{B}_{12}\}\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{A}_{22}\}\{\mathbf{q}\} = \rho_l\{\mathbf{A}_{12}\}\{\mathbf{u}\} \tag{4.30}$$

Зі співвідношення (4.30) здобудемо

$$\{\mathbf{q}\} = \rho_l\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\}\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}\{\mathbf{p}\}$$

і підставимо отриману рівність в співвідношення (4.29). Знайдемо

$$[(2\pi\{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\}) + \{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}]\{\mathbf{p}\} = \rho_l(\{\mathbf{A}_{11}\} + \{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\})\{\mathbf{u}\}.$$

Введемо позначення

$$\{\mathbf{G}\} = [(2\pi\{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\}) + \{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{B}_{12}\}]^{-1}(\{\mathbf{A}_{11}\} + \{\mathbf{A}_{21}\}\{\mathbf{A}_{22}\}^{-1}\{\mathbf{A}_{12}\}) \tag{4.31}$$

та отримаємо

$$\{\mathbf{p}\} = \rho_l\{\mathbf{G}\}\{\mathbf{u}\}.$$

Далі знаходимо вираз для тиску рідини на змочені поверхні елементу конструкції

$$\{\tilde{\boldsymbol{f}}_{pr}\} = -\rho_l[\mathbf{H}][\ddot{\mathbf{c}}], \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{G}\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l\},$$

де матриця **G** визначається формулою (4.31).

4.4. Числові результати з використання гіперсингулярних рівнянь при двобічному обтіканні елементів конструкцій рідиною

4.4.1 Прямокутна пластинка

У якості тестової задачі розглядалися коливання консольної квадратної пластини зі стороною a та товщиною h (геометричні параметри та механічні характеристики взяті з роботи [88]). Досліджувалися коливання як у повітряному середовищі, так і з урахуванням приєднаних мас рідини.

У таблиці 4.1 наведено значення частот коливань цієї пластини в повітрі та у воді, а також проведено порівняння з теоретичними та експериментальними даними, наведеними у роботі [88].

Розглядався безрозмірний частотний параметр, що обчислювався за формулою:

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}},$$

де D – циліндрична жорсткість, h – товщина; ρ_1 – густина материалу пластини.

Таблиця 4.2: Безрозмірний частотний параметр для квадратної пластинки

n	В повітрі			В рідини		
	Експери-мент [88]	Теорія [88]	МСЕ	Експери-мент [88]	Теория [88]	МГЕ
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.5	4.7	4.24
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
4	27.15	-	27.81	-	-	13.70
5	30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Результати показують, що метод граничних елементів може успішно застосовуватися для розв’язання задач про гідропружні коливання моделі лопаті у воді. На рис. 4.1 зображено дві перші форми коливань консольної прямокутної пластини у воді. Зазначимо, що в цій задачі форми коливань у рідині та в повітрі практично збігаються. Отримані результати добре узгоджуються як з теоретичними розрахунками, так і з експериментальними даними, що свідчить про достовірність і надійність застосованого методу.

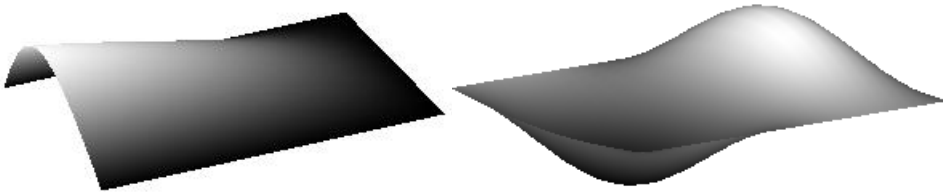


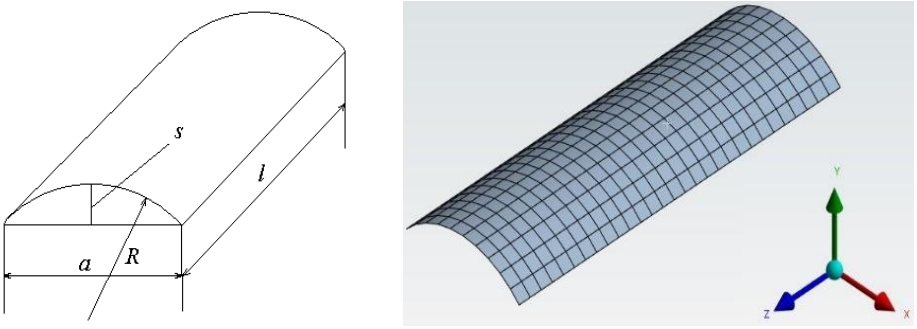
Рисунок 4.2. Форми коливань консольної квадратної пластинки

Аналіз числових результатів показує, що частоти коливань у воді та у вакуумі відрізняються суттєво; при цьому різниця між ними зменшується зі зростанням номера форми коливань. Розглянута задача є модельною та слугує обґрунтуванням для подальших досліджень коливань реальних лопатей.

4.4.2 Циліндрична панель

Гіперсингулярне інтегральне рівняння застосовується для аналізу вільних коливань закріплених з одного боку циліндричних панелей у воді, рис.4.3. Розглядаються малі коливання консольних циліндричних панелей, занурених в ідеальну нестисливу рідину, як показано на рисунку 3. Швидкість набігаючого потоку вважається рівною нулю, а сам потік рідини - потенційним.

У цьому випадку використовується метод нормальних мод [23], [53]. Передбачається, що вільні вихори не утворюються і не залишають поверхню оболонки. За таких умов існує потенціал швидкості, який задовольняє гармонічне рівняння в усій області поза оболонкою та виконує умову непроникності (4.2) на границях. Потенціал збурених швидкостей рідини подається у вигляді потенціалу подвійного шару вздовж середньої поверхні S досліджуваної циліндричної оболонки.



a) b)

Рисунок 4.3: (а) Ескіз циліндричної панелі (б) Сітка граничних елементів

Форми коливань оболонки в рідині розкладаються в ряд за власними формами коливань у повітрі.

Щоб визначити тиск рідини, який відповідає k-ій формі власних коливань панелі в повітрі, $w_k(\mathbf{x},t)$, використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння.

$$\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_S \Gamma_k(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{n}(\mathbf{x}))\,\partial\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}dS_\xi = \frac{\partial w_k(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \tag{4.32}$$

Власні форми та частоти коливань $w_k(\mathbf{x},t)$ панелі в повітрі були розраховані методом скінченних елементів МСЕ, [53], [54]. Числове розв'язання гіперсингулярного рівняння (4.32) здійснюється методом граничних елементів з постійною апроксимацією густини $\Gamma_k(\boldsymbol{\xi},t)$ на елементах. Кількість граничних елементів позначається як N_S. Варто зазначити, що при N_S.=290 та N_S =580, результати розрахунку відрізнялися приблизно на 1%.

Елементи матриці доданих мас визначаються за формулою:

$$M_{l(i,k)} = \iint_S \Gamma_i(\mathbf{x}) w_k(\mathbf{x}) dS,$$

де функції $\Gamma_i(\mathbf{x})$ є амплітудними значеннями тиску, викликаного власною формою $w_k(\mathbf{x})$. Після визначення матриці приєднаних мас задача на власні значення

$$[\mathbf{K} - \omega^2(\mathbf{M}_e+\mathbf{M}_l)]\mathbf{W} = 0 \tag{4.33}$$

розв'язується методом, розробленим у [55]–[56]. У рівнянні (4.33) $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{M}_l$, - це відповідно матриці жорсткості, мас та приєднаних мас рідини. Стовпці матриці $\mathbf{W}$ є власними формами коливань циліндричної панелі в повітрі.

Визначаються частоти та форми власних коливань циліндричних панелей, занурених у рідину. Матеріал панелі - сталь з густиною 7850 кг/м³, коефіцієнтом Пуассона ν=0.3, та модулем Юнга 210 ГПа. Розглядаються панелі з різною відносною товщиною h/R та підйомом $d = s/a$ як показано на рисунку 3.

Нижче наведено числові результати. Розрахунки виконані для сталевої циліндричної консольної панелі з такими розмірами: l = 1m, a = 0.2m. Досліджувався вплив відносної товщини h/R на частоти та форми коливань панелі.

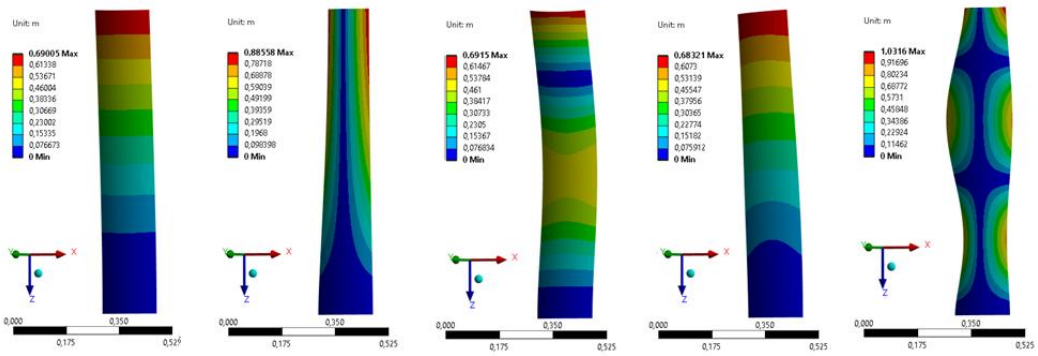
При розкладанні власних форм коливань панелі в рідині за її власними формами коливань у повітрі враховувалося 7 членів ряду. Збільшення кількості врахованих форм у повітрі практично не впливало на перші 5 частот і форм коливань у воді.

У таблиці 4.2 наведено значення частот вільних коливань циліндричної панелі в повітрі (без доданих мас) і в рідині при $d = 0.1$.

Таблиця 421: Частоти коливань циліндричної панелі при $d = 0.1$.

n	$h/R = 0.01$		$h/R = 0.02$		$h/R = 0.04$	
	повітря	рідина	повітря	рідина	повітря	рідина
1	17.4	6.15	18.3	6.22	17.0	6.34
2	23.1	11.1	26.0	7.87	34.5	9.27
3	75.3	36.5	67.8	28.7	74.7	28.2
4	104	38.0	141	47.0	138.0	50.1
5	144	71.2	160	79.1	154.0	77.9

На рисунках 4.4а)–4.4д) показані перші форми коливань циліндричної оболонки у вакуумі при $d = 0.1$, та $h/R = 0.02$.



а) б) в) г) д)

Рисунок 4.4: Форми коливань циліндричної панелі в рідині

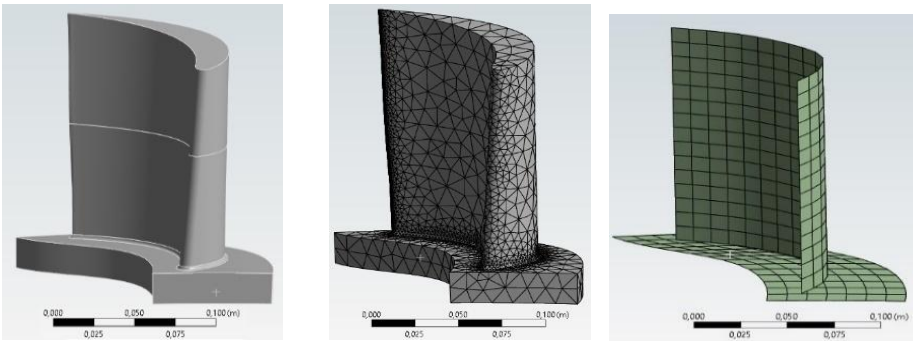
Числові результати показують, що частоти коливань суттєво відрізняються при врахуванні приєднаних мас рідини та без цього врахування; проте різниця між їхніми значеннями зменшується зі збільшенням номера частоти

4.4.2 Лопатка кільцевого ротора турбомашини

Далі метод заданих форм було використано для дослідження частот і форм вільних коливань лопатки кільцевого ротора турбомашини потужністю 1000+ МВт на 1500 об/хв, зображеної на рисунку 4.5а). Це дослідження проводилось в рамках бюджетної теми «III-5-19 «Моделювання та дослідження фізичних процесів в елементах енергетичних машин з метою підвищення їх ефективності та надійності».

Лопатка представлена у вигляді тонкостінного циліндричного тіла заввишки 0,15 м і шириною 0,1 м, з профілем NACA [57] максимальна ширина якого становить 0.025 м. Матеріал лопатки - сталь з густиною 7850 кг/м³, коефіцієнтом Пуассона ν = 0.3, та модулем Юнга 210 ГПа. Розглядалося жорстке закріплення.

Перевага застосованого методу нормальних форм полягає в можливості використовувати різні підходи для визначення власних частот і форм елемента конструкції в повітрі (без урахування доданих мас рідини). Тут застосовується метод скінченних елементів, реалізований в ANSYS [48].



а) б) в)

Рисунок 4.5: Модель лопатки кільцевого ротора та її сітки для FEM і BEM

Модель скінченних елементів із 50 000 елементів показана на рисунку 4.3б). У результаті модального аналізу було отримано 5 власних форм і відповідні власні частоти конструкції. Після визначення форм коливань лопаток кільцевого ротора в повітрі вони використовуються як праві частини в гіперсингулярних рівняннях (4.32). Тут розглядається середня поверхня конструктивного елемента, див. рисунок 4.5в). Частоти коливань лопатки в повітрі та воді наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2: Частоти коливань лопатки кільцевого ротора, Гц

n	1	2	3	4	5	6
повітря	1275	1997	3050	3618	4569	5078
вода	657	1109	1750	2321	4002	4399

На рисунках 4.6а)–4.6е) показані перші шість форм коливань лопатки кільцевого ротора.

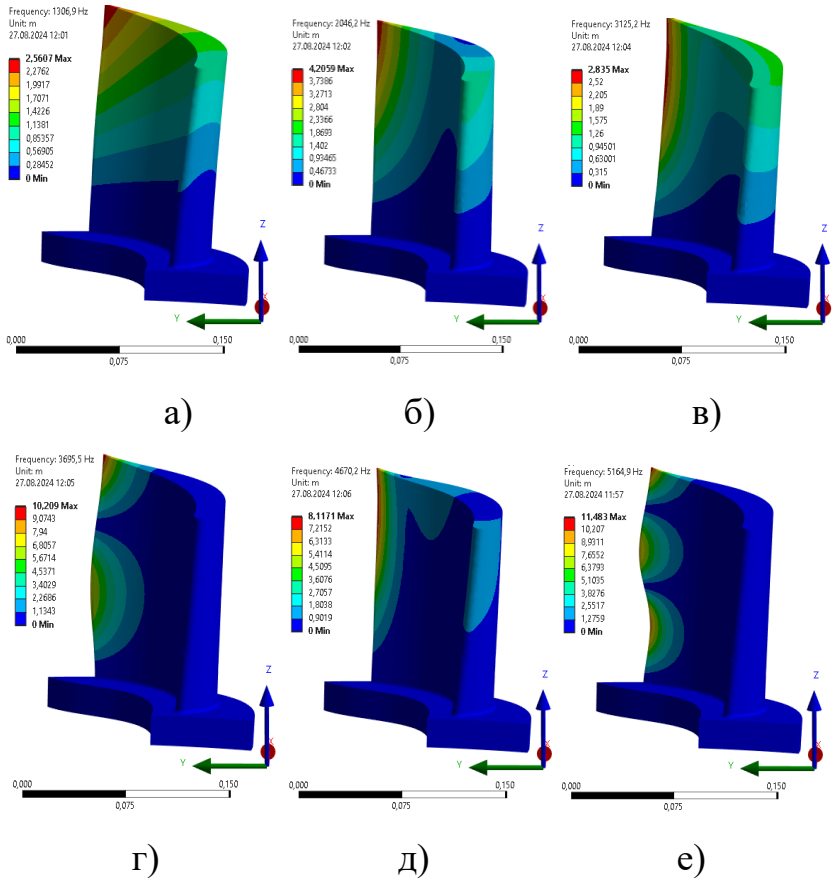


Рисунок 4.6: Форми коливань лопатки кільцевого ротора

Слід зазначити, що форми коливань лопатки в повітрі та у воді демонструють незначні відмінності. Значення частот із урахуванням доданих мас рідини суттєво нижчі за частоти коливань лопатки в повітрі. Із зростанням номера частоти цей коефіцієнт зниження зменшується.

Застосування гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) виявилося ефективним методом у врахуванні взаємодії конструктивних елементів із рідиною порівняно з іншими підходами. Використання сингулярних рівнянь з ядром типу

Коші вимагає чисельного інтегрування по двох близько розташованих поверхнях. На відміну від цього, метод скінченних елементів потребує дискретизації всього об'єму, зайнятого рідиною та панеллю.

4.5 Аксіально-симетричне формулювання

4.5.1 Формулювання задачі

Розглядається пружна тонка кругла пластинка, що занурена в рідину. Для моделювання руху пластини використовуємо гіпотези Кірхгофа –Лява [16].

Введемо такі позначення: *E* - модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона, $\boldsymbol{h}$ - товщина пластинки.

Якщо товщина однорідної пластинки h є сталою, то рівняння руху пластинки [16] має вигляд

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,y.t), \tag{4.34}$$

де $w(x,y,t)$ - прогин пластини;

ρ_p - густина матеріалу пластини;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість;

$q(x,y,t)$ - сила, що діє на пластину.

Якщо пластина занурена в рідину, то

$$q(x,y,t) = p(x,y,t)\mathbf{n} + q_0(x,y,t), \tag{4.35}$$

де $p(x,y,t)$- перепад тиску рідини на пластину;

$\boldsymbol{n}$ - одинична нормаль до поверхні пластини;

$q_0(x,y,t)$ - сила, що збурює.

Якщо в рівнянні (4.35) функція $q_0(x,y,t)$=0, то маємо випадок вільних гідропружних коливань.

Для знаходження тиску $\boldsymbol{p(x,y,t)}$ зробимо такі припущення: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. В цих умовах снує потенціал швидкостей φ(*x*,*y*,*z*,*t*), градієнт якого є швидкістю рідини, а саме:

$$V_x = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ V_y = \frac{\partial\phi}{\partial y},\ V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{4.36}$$

Зв'язок між потенціалом швидкостей та тиском визначається з лінеарізованого інтегралу Коші-Лагранжа

$$p^{\pm}=-\rho_l\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial t}+p_0,$$

де ρ_l - густина рідини;

p_0 – атмосферний тиск.

Граничні значення $\phi^{\pm}$ відповідають переходу до площини пластини з боку додатних та від'ємних значень координати z, відповідно.

Таким чином, для перепаду тиску маємо

$$p=p^{+}-p^{-}=-\rho_l\left(\frac{\partial\phi^{+}}{\partial t}-\frac{\partial\phi^{-}}{\partial t}\right). \tag{4.37}$$

Сформулюємо граничні умови для диференціального рівняння (4.36). Згідно з умовою непротікання [17] маємо на поверхнях пластини σ такі рівності:

$$\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_{\sigma}=\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4.38}$$

Систему диференціальних рівнянь (4.34), (4.36) з граничною умовою (4.38) слід також доповнити умовами закріплення, тобто умовами відносно функції $\boldsymbol{w(x,y,t)}$ на контурі пластини.

Таким чином, маємо зв'язану задачу відносно двох невідомих функцій $\varphi(x,y,z,t)$ та $w(x,y,t)$ при чому в праву частину диференціального рівняння відносно $w(x,y,t)$ входить похідна за часом від $\varphi(x,y,z,t)$, а в граничні умови для рівняння Лапласа відносно $\varphi(x,y,z,t)$ входить похідна за часом від невідомої функції $w(x,y,t)$

4.5.2 Метод заданих форм в задачі коливань пружних пластин

Для розв'язання задач про власні та вимушені коливання пружних пластин, занурених у рідину, використано метод заданих форм [17]. У загальному випадку будемо шукати переміщення пластинки, що занурена в рідину, у вигляді:

$$w(x,y,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) w_k(x,y), \tag{4.39}$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

$w_k(x,y)$ – форми коливань пластинки без врахування взаємодій з рідиною;

N – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

З огляду на (4.39), бачимо, що для потенціалу швидкостей φ(*x*,*y*,*z*,*t*) необхідно обрати таке зображення

$$\phi(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k(t) \phi_k(x,y,z), \tag{4.40}$$

в якому функції $\phi_k(x,y,z)$ є розв'язками таких крайових задач

$$\Delta\phi_k = 0, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial \boldsymbol{n}} = w_k. \tag{4.41}$$

Зауважимо, що в крайових задачах (4.41) праві частини в граничних умовах є відомими.

Далі опишемо метод зведення задачі визначення частот та форм коливань системи «пластинка-рідина» до гіперсингулярних рівнянь.

4.5.3 Гіперсингулярне рівняння для визначення потенціалу швидкостей та тиску рідини

Для знаходження перепаду тиску рідини на поверхнях пластині маємо рівняння (2.4). Слід зауважити, що потенціал швидкостей є гармонічною функцією всюди за межами круглої пластини, тобто це неперервна функція у тривимірному просторі з розрізом. При цьому згідно з рівнянням ця гармонічна функція має неперервну нормальну похідну при перетині розрізу у вигляді круга, який займає пластина. Але згідно з рівнянням (4.37) ця функція має скінченний розрив на вказаній області.

Як відомо, такі властивості притаманні потенціалу подвійного шару [18]. Цей потенціал має вигляд

$$\phi(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_S}\frac{1}{|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|}dS, \quad \mathbf{P} \in S, \tag{4.42}$$

де S - область, зайнята круговою пластиною;

n – одинична нормаль до поверхні S;

P і $\mathbf{P}_0$ - точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0), відповідно;

$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - декартова відстань між **P** і $\mathbf{P}_0$;

$\Gamma(\boldsymbol{P})$ - густина потенціалу, функція, що задана на поверхні S.

Функція, що визначена формулою (4.1), задовольняє рівнянню Лапласа (2.3), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [18]

$$\phi^+(\mathbf{P}_0) - \phi^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S.$$

Тому використовуємо подання (4.1) для потенціалу швидкостей. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пластини. З подання (4.42) отримуємо, що для цього треба знайти розв'язки крайових задач (4.41). Для функцій φ_k використовуємо зображення (4.42). Рівняння Лапласа з (4.41) при цьому задовольняється, а крайова умова призводить до інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_S}\frac{1}{|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|}dS = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S \tag{4.43}$$

Як доведено в [19,20] інтеграл в (4.43) не існує ні як звичайний невласний, ні в сенсі головного значення за Коші. Цей інтеграл трактується лише в сенсі Адамара [21,22] як граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару. У випадку, коли поверхня S є частиною площини, маємо

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\mathbf{P})\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|} = w_k(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S,$$

або

$$\lim_{z_0 \to 0}\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(x, y)\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{-z_0}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}\right)^3} = w_k(x_0, y_0). \tag{4.45}$$

Рівняння типу (4.45) відносяться до гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

В [22] досліджені деякі методи числового розв'язання таких рівнянь.

4.5.4 Зведення двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь до одновимірних

Якщо область S в рівнянні (4.45) є кругом, то можливо звести двовимірне гіперсингулярне рівняння до одновимірного.

Нехай S є кругом на площині xОy, а саме

$$S = \{x, y: x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

Обчислимо декартову відстань $|\,\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ для точок вказаної області S. В циліндричних координатах маємо

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z, \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$
$$x_0 = \rho_0\cos\theta_0, \quad y_0 = \rho_0\sin\theta_0, \quad z_0 = z_0, \quad x_0^2 + y_0^2 = \rho_0^2.$$

Таким чином,

$$|\,\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Надалі використовуємо стандартні позначення [30]

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Припустимо спочатку, що функції w_k, Γ_k не залежать від окружної координати θ, тобто будемо розглядати задачу в аксіально-симетричному формулюванні.

Тоді отримаємо таке гіперсингулярне інтегральне рівняння ($z = z_0 = 0$):

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(x, y)\frac{-dxdy}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^3} = w_k(x_0, y_0).$$

З переходом до циліндричної системи координат та враховуючи припущення про аксіальну симетричність задачі, знаходимо, що

$$\mathbf{A}\Gamma_k = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\rho)\frac{\rho d\theta d\rho}{\left(\sqrt{a - b\cos(\theta-\theta_0)}\right)^3} = -w_k(\rho_0).$$

Запишемо цей інтеграл як повторний

$$A\Gamma_k = \frac{1}{4\pi}\int_0^R \rho\,\Gamma_k(\rho)\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\sqrt{a-b\cos(\theta-\theta_0)}\right)^3}\right]d\rho = -w_k(\rho_0). \qquad (4.46)$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі в (4.46) заміну змінної

$$\psi = \theta - \theta_0, \quad \theta = \psi + \theta_0, \quad d\theta = d\psi.$$

Оскільки під знаком інтегралу знаходиться періодична функція, що інтегрується за періодом, то границі інтегрування не зміняться. Тобто, можемо брати не $(0,2\pi)$ а $(-\pi\,,\,\pi)$. Отримаємо для внутрішнього інтегралу

$$\mathrm{I}_1(\rho,\rho_0) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Внаслідок парності підінтегральної функції маємо

$$\mathrm{I}_1(\rho,\rho_0) = 2\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Зробимо перетворення в цьому інтегралі

$$I_1(\rho,\rho_0) = 2\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3} = 2\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a+b-2b\cos^2(\psi/2)}\right)^3} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{a+b-2b\,cos^2\psi}\right)^3}.$$

Після ще однієї заміни змінної

$$\psi_1 = \pi/2 - \psi; \quad d\psi_1 = -d\psi$$

знайдемо, що

$$I_1(\rho,\rho_0) = \frac{4}{\left(\sqrt{a+b}\right)^3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3}, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Далі використовуємо формулу з [85] (стор.178, №37) та одержимо

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3} = \frac{1}{k'^2}E(k), \quad E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\,, \quad k'^2 = 1-k^2.$$

Оскільки

$$k'^2 = 1-k^2 = 1-\frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b},$$

то для внутрішнього інтегралу маємо

$$I_1(\rho,\rho_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}(a-b)}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi=\frac{4}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}\mathrm{E}(k),$$

де $\mathrm{E}(k)$ - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Таким чином, отримано одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння для визначення функцій $\Gamma_m(\rho)$ за відомими функціями $w_m(\rho)$, $m=1,2,\ldots$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R\Gamma_m(\rho)\frac{\rho\mathrm{E}(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}=-w_m(\rho_0). \tag{4.47}$$

Зазначимо, що ядро інтегрального оператора в (4.47) має такий вигляд:

$$K(\rho,\rho_0)=\frac{\rho\mathrm{E}(k)}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

Це ядро має особливість типу $(\rho-\rho_0)^{-2}$.

Для більш детального з'ясування характеру функції $K(\rho,\rho_0)$ поблизу особливості $(\rho-\rho_0=0)$ використаємо асимптотичну формулу [23] для функції $\mathrm{E}(k)$ при k, близьких до 1

$$\mathrm{E}(k)=1+\frac{1}{2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}k'^4\left(\ln\frac{4}{k'}-1-\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

Нехай l_0 - особливий елемент, тобто вважаємо, що $l_0\in[0,R]$, $\rho_0\in l_0$. Введемо позначення

$$K_0(\rho,\rho_0)=\frac{\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}\left[1+\frac{1}{2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Тоді для обчислення інтегралу по елементу, що містить особливість, використовуємо формулу

$$\int_{l_0}\Gamma_m(\rho)K(\rho,\rho_0)d\rho=\int_{l_0}\Gamma_m(\rho)K_0(\rho,\rho_0)d\rho+\int_{l_0}\Gamma_m(\rho)[K(\rho,\rho_0)-K_0(\rho,\rho_0)]d\rho. \tag{4.48}$$

Перший доданок тут містить гіперсингулярну та логарифмічну складові, а другий є інтегралом від функції, яка не містить особливості.

4.5.5 Визначення частот та форм вільних коливань круглої пластини без урахування приєднаних мас рідини

Припустимо, що в рівнянні (4.34) функція $q(x,y,t)$= 0, тобто вважаємо, що пластина здійснює вільні коливання, тоді шукаємо розв'язок рівняння (4.34) у вигляді

$$w(x,y,t) = \exp(i\Omega t)\, w(x,y). \tag{4.49}$$

Підставимо зображення (4.49) в однорідне рівняння (4.34) та отримаємо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно амплітудних значень $w(x,y)$

$$\Delta\Delta w - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \Omega^2 \frac{12\rho_p(1-\nu^2)}{Eh^2} = \Omega^2 \frac{\rho_p h}{D}. \tag{4.50}$$

Рівняння (4.50) зобразимо в формі

$$(\Delta - \alpha^2)(\Delta + \alpha^2)w = 0,$$

що еквівалентно системі

$$\begin{cases}(\Delta - \alpha^2)w = 0\\(\Delta + \alpha^2)w = 0\end{cases} \tag{4.51}$$

Для круглої пластини в полярних координатах маємо

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Якщо задача розглядається в аксіально-симетричному формулюванні, то відсутня залежність шуканих функцій від θ, і оператор Лапласа перетворюється на

$$\Delta = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}.$$

При цьому система (4.51) набуває вигляду

$$\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} - \alpha^2 w = 0, \tag{4.52}$$

$$\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} + \alpha^2 w = 0. \tag{4.53}$$

Розв'язками рівняння (4.52) є функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку $J_0(\alpha\rho)$ та $Y_0(\alpha\rho)$, а розв'язками рівняння (4.53) є модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку $I_0(\alpha\rho)$ та $K_0(\alpha\rho)$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (4.50) має вигляд

$$w(\rho) = A\,\mathrm{J}_0(\alpha\rho) + B\,\mathrm{Y}_0(\alpha\rho) + C\,\mathrm{I}_0(\alpha\rho) + D_1\,\mathrm{K}_0(\alpha\rho),$$

де A, B, C, D_1- сталі.

Оскільки при $\rho \to 0$ функції $\mathrm{Y}_0(\alpha\rho)$ та $\mathrm{K}_0(\alpha\rho)$ нескінченно зростають, вважаємо, що $B = 0,\ D_1 = 0$, щоб уникнути нефізичних переміщень.

Для визначення сталих A, C використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. У випадку жорсткого закріплення маємо такі граничні умови [16]:

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{\rho=R}.$$

З цих умов випливає, що

$$\begin{cases} A\,J_0(\alpha R) + C\,I_0(\alpha R) = 0 \\ A\,J_1(\alpha R) + C\,I_1(\alpha R) = 0 \end{cases}. \tag{4.54}$$

Для того, щоб система (4.54) мала ненульовий розв'язок, необхідно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Тому отримуємо рівняння для знаходження невідомої величини α

$$\begin{vmatrix} J_0(\alpha R) & I_0(\alpha R) \\ J_1(\alpha R) & I_1(\alpha R) \end{vmatrix} = \mathrm{J}_0(\alpha R)\,I_1(\alpha R) - \mathrm{I}_0(\alpha R)\,\mathrm{J}_1(\alpha R) = 0 \tag{4.55}$$

Позначимо $\lambda = \alpha R$. В таблиці 4.4 наведені значення 6 перших коренів рівняння (4.55).

Співвідношення між сталими A та C для кожного α_m отримуємо з рівності

$$A_m\,J_0(\alpha_m R) + C_m\,I_0(\alpha_m R) = 0 \Rightarrow C_m = -A_m\,\frac{J_0(\alpha_m R)}{I_0(\alpha_m R)}.$$

Таблиця 4.4 Значення коренів характеристичного рівняння

m	λ_m
1	3.196220616
2	6.306437050
3	9.439499140
4	12.57713064
5	15.71643853
6	18.85654552

Зауважимо, що можемо обирати $A_m = 1\ \forall m$.

Таким чином, отримані залежності форм вільних коливань круглої пластинки від ρ у вигляді

$$w_m(\rho) = \mathrm{J}_0(\alpha_m \rho) - \frac{\mathrm{J}_0(\alpha_m R)}{\mathrm{I}_0(\alpha_m R)} \mathrm{I}_0(\alpha_m \rho). \qquad (4.56)$$

Саме ці функції фігурують як праві частини в гіперсингулярних рівняннях (4.47).

На рисунку 4.7 зображені функції, що визначені формулою (4.56) при $R = 1$.

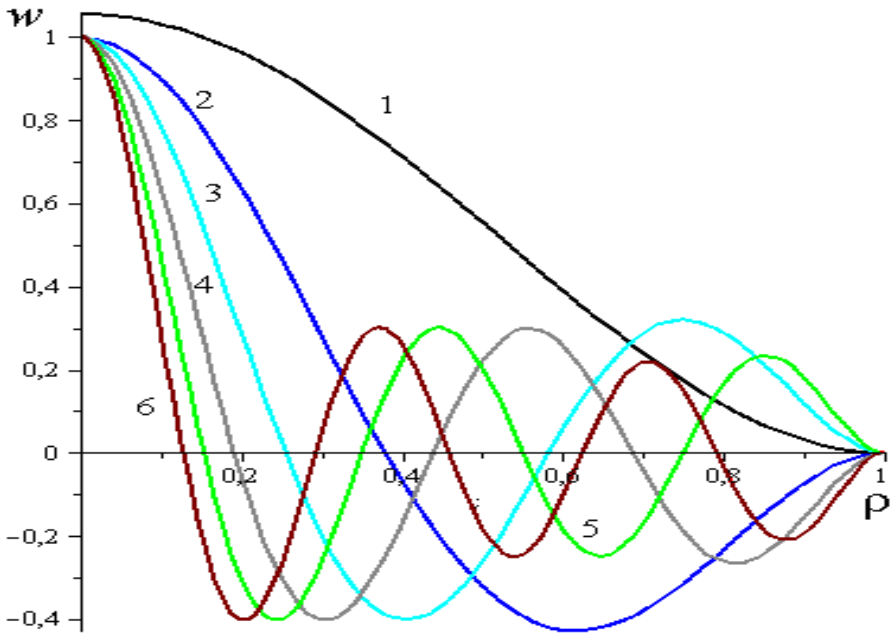
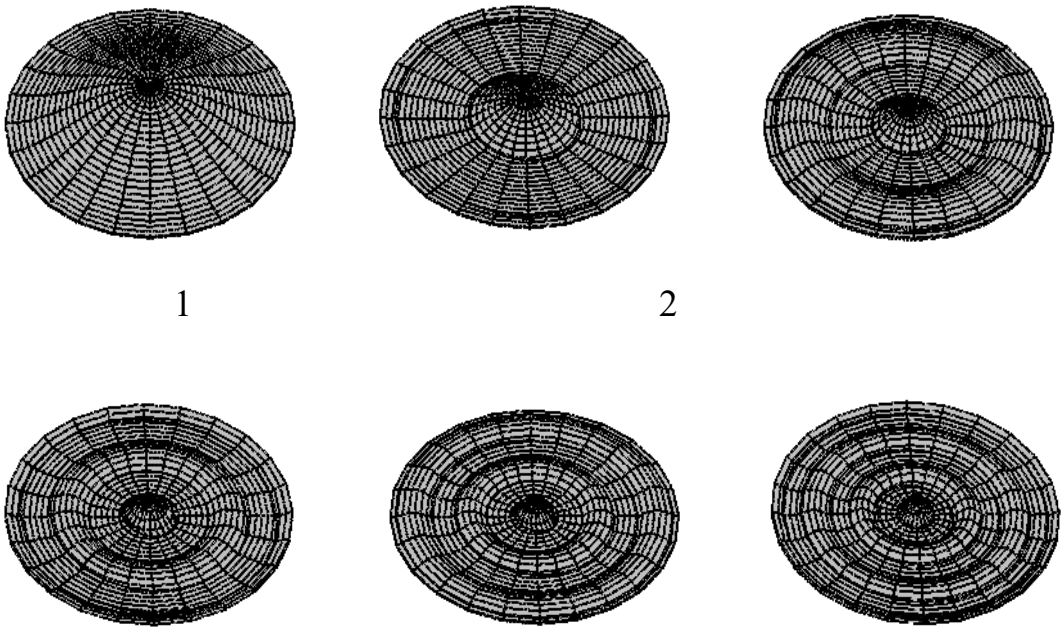


Рисунок 4.7 Залежності форм коливань від радіальної координати

Цифрами 1-6 тут позначені форми, що відповідають значенням $\lambda_m = \alpha_m$, що наведені в таблиці 4.3.

На рисунку 4.9 зображені перші шість форм аксіально-симетричних коливань круглої пластинки, жорстко закріпленої вздовж контуру.



1 2 3

4 5 6

Рисунок 4.8 Форми аксіально-симетричних коливань круглої пластинки

Зауважимо, що згідно з формулами (4.56) маємо, що зі збільшенням номера m форми коливань $w_m(\rho)$ асимптотичним чином наближаються до $J_0(\alpha_m\rho)$.

Перевіркою ортогональності форм власних коливань $w_m(\rho)$ встановлено, що

$$\big(w_m(\rho), w_l(\rho)\big) = A_m\delta_{ml}. \tag{4.57}$$

Для сталих A_m отримані такі значення

A_1 = 0.1018870979, A_2 =0.0506907858, A_3 = 0.0337792448, A_4 = 0.0253319976, A_5 =0.0202649244, A_6 = 0.0168871927.

4.5.6 Числовий метод розв'язання одновимірного гіперсингулярного інтегрального рівняння

Для числового розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R \Gamma(\rho)\frac{\rho E(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = -w(\rho_0) \tag{4.58}$$

з відомими правими частинами використано метод граничних елементів із сталою апроксимацією густини [22]. У порівнянні з (4.46) в рівнянні (4.58) для спрощення запису опущений індекс m.

Для цього розбиваємо область інтегрування $[0, R]$ на N_1 граничних елементів рівної довжини. Позначимо

$$l_i = [\rho_{i-1}, \rho_i], \quad i = \overline{1,N}, \quad 2\tau = \rho_i - \rho_{i-1} = R/N_1, \quad \rho_0 = 0, \quad \rho_N = R.$$

Всередині кожного елементу l_i оберемо точки (точки коллокації) таким чином:

$$\rho_{i0} = 0.5 \cdot (\rho_i + \rho_{i-1}), \quad i = \overline{1,N_1}.$$

Замінюємо наближено інтеграл в (4.58) інтегральною сумою, вважаючи, що на кожному елементі невідома густині є сталою, тобто $\Gamma(\rho) = \Gamma_i, \quad \rho \in [\rho_{i-1}, \rho_i]$. і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно Γ_l у вигляді

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R \Gamma(\rho)\, K(\rho, \rho_{i0})d\rho = \sum_{j=1}^N A_{ij}\Gamma_j = -w(\rho_{i0}), \quad i = \overline{1,N_1},$$

де елементи матриці системи обчислюються за формулою

$$A_{ij} = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_{j=1}}^{\rho_j} K(\rho, \rho_{0i})d\rho. \tag{4.59}$$

Зауважимо, що у випадку, коли граничний елемент не містить точки коллокації, тобто при $i \neq j$ для обчислення A_{ij} можна використовувати стандартні квадратурні формули. Якщо $i = j$, то використовуємо формулу

$$\Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K(\rho, \rho_{j0})d\rho = \Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_0(\rho, \rho_{j0})d\rho + \Gamma_j \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left[K(\rho, \rho_{j0}) - K_0(\rho, \rho_{j0})\right] d\rho. \tag{4.60}$$

Згідно з отриманими вище результатами, другий доданок в (4.60) не є сингулярним, і для його обчислення також можна використовувати стандартні квадратурні формули. Перший доданок містить гіперсингулярну та логарифмічну особливості. Гіперсингулярна складова має вигляд

$$K_h(\rho,\rho_0)=\frac{\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}.$$

Зробимо такі перетворення

$$K_h(\rho,\rho_0)=\frac{\rho+\rho_0}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}-\frac{\rho_0}{(\rho^2-\rho_0^2)(\rho-\rho_0)}$$

$$=\frac{1}{(\rho-\rho_0)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho-\rho_0}\left[\frac{1}{\rho-\rho_0}-\frac{1}{\rho+\rho_0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2(\rho-\rho_0)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\rho^2-\rho_0^2)}=\frac{1}{2(\rho-\rho_0)^2}+\frac{1}{4\rho_0}\frac{1}{\rho-\rho_0}-\frac{1}{4\rho_0}\frac{1}{\rho+\rho_0}.$$

В цьому виразі є складова, що не містить особливості, а саме

$$K_{h2}(\rho,\rho_0)=-\frac{1}{4\rho_0}\frac{1}{\rho+\rho_0}. \tag{4.62}$$

Нехай

$$K_{h1}(\rho,\rho_0)=\frac{1}{2(\rho-\rho_0)^2}+\frac{1}{4\rho_0}\frac{1}{\rho-\rho_0}.$$

Обчислимо інтеграл по особливій області від $K_{h1}(\rho,\rho_0)$

$$\int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}-\tau}\left[\frac{1}{2(\rho-\rho_{i0})^2}+\frac{1}{4\rho_{i0}(\rho-\rho_{i0})}\right]d\rho=$$

$$-\frac{1}{2(\rho-\rho_{i0})}\Bigg|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}+\frac{1}{4\rho_{i0}}\ln|\rho-\rho_{i0}|\Bigg|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4\rho_{i0}}\ln\left|\frac{\tau}{\tau}\right|=-\frac{1}{\tau}$$

Логарифмічна складова має вигляд

$$K_l(\rho,\rho_0)=\frac{\rho k'^2}{2(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\rho}{2(\rho+\rho_0)^3}\left[\ln 4-\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{\rho-\rho_0}{\rho+\rho_0}\right|\right].$$

Після перетворень маємо

$$K_{l2}(\rho,\rho_0)=\left[\frac{1}{2(\rho+\rho_0)^2}-\frac{\rho_0}{2(\rho+\rho_0)^3}\right]\left[\ln 4-\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{\rho-\rho_0}{\rho+\rho_0}\right|\right].$$

Зауважимо, що складова

$$K_{l2}(\rho,\rho_0)=\left[\frac{1}{2(\rho+\rho_0)^2}-\frac{\rho_0}{2(\rho+\rho_0)^3}\right]\left[\ln 4-\frac{1}{2}-\ln|\rho+\rho_0|\right] \tag{4.63}$$

не містить особливості, її надалі віднесемо до регулярної частини. Нехай

$$K_{l1}(\rho,\rho_0)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\rho+\rho_0)^2}+\frac{\rho_0}{(\rho+\rho_0)^3}\right]\ln|\rho-\rho_0|.$$

При обчисленні інтегралу від $K_{l1}(\rho,\rho_0)$ здійснюємо інтегрування частинами, а саме вважаємо, що

$$dV=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\rho+\rho_0)^2}+\frac{\rho_0}{(\rho+\rho_0)^3}\right],\quad U=\ln|\rho-\rho_0|$$

$$V=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\rho+\rho_0)}-\frac{2\rho_0}{(\rho+\rho_0)^2}\right],\quad dU=\frac{1}{\rho-\rho_0}$$

При інтегруванні за особливим елементом отримаємо

$$\int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}K_{l1}(\rho,\rho_{i0})d\rho=\frac{1}{2}\ln|\rho-\rho_{i0}|\left[\frac{\rho-\rho_{i0}}{(\rho+\rho_{i0})^2}\right]\Bigg|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}-\frac{1}{2}\int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}\frac{\rho-\rho_{i0}}{(\rho+\rho_{i0})^2}\frac{1}{\rho-\rho_{i0}}d\rho.$$

Надалі маємо

$$\int_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}K_{l1}(\rho,\rho_{i0})d\rho=\frac{1}{2}\ln|\rho-\rho_{i0}|\left[\frac{\rho-\rho_{i0}}{(\rho+\rho_{i0})^2}\right]\Bigg|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}+\frac{1}{2}\frac{1}{\rho+\rho_{i0}}\Bigg|_{\rho_{i0}-\tau}^{\rho_{i0}+\tau}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(\ln\tau)\tau}{(2\rho_{i0}+\tau)^2}+\frac{(\ln\tau)\tau}{(2\rho_{i0}-\tau)^2}\right]+\frac{1}{2\rho_{i0}+\tau}-\frac{1}{2\rho_{i0}-\tau}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\tau\,ln\,\tau\left(4\rho_{i0}^2+\tau^2\right)}{(4\rho_{i0}^2-\tau^2)^2}-\frac{2\tau}{4\rho_{i0}^2-\tau^2}\right\}=\frac{\tau}{(4\rho_{i0}^2-\tau^2)}\left[(ln\,\tau)\frac{4\rho_{i0}^2+\tau^2}{4\rho_{i0}^2-\tau^2}-1\right]$$

Таким чином, отримано, що

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_0\left(\rho,\rho_{j0}\right)d\rho = -\frac{1}{\tau}+\frac{\tau}{4\rho_{i0}^2-\tau^2}\left[(\ln\tau)\frac{4\rho_{i0}^2+\tau^2}{4\rho_{i0}^2-\tau^2}-1\right]+\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_{h2}\left(\rho,\rho_{j0}\right)d\rho+$$
$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} K_{l2}\left(\rho,\rho_{j0}\right)d\rho.$$

Тут функції $K_{h2}(\rho,\rho_0)$ та $K_{l2}(\rho,\rho_0)$ обчислюються за формулами (4.62) та (4.63) відповідно, а інтеграли від цих функцій знаходяться за стандартними квадратурними формулами.

Для обчислення інтегралів з ядрами у вигляді еліптичних інтегралів використовуємо метод [24].

Для тестування запропонованого методу скористуємось аналітичним розв'язком просторового гіперсингулярного рівняння , що наведений в [22, 25]. Для гіперсингулярного рівняння у вигляді

$$\frac{1}{\pi}\iint_S \frac{\Gamma(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3}=-\pi,\quad S=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}$$

вище доведено, що

$$\Gamma(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Якщо гіперсингулярне рівняння розглядаємо в формі (4.58), то будемо мати

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R \Gamma(\rho)\frac{\rho \mathrm{E}(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}=-1 \qquad (4.64)$$

такий аналітичний розв'язок

$$\Gamma(\rho)=\frac{4}{\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Для числового розв'язання рівняння (4.64) був використаний метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини на елементах [22]. Розглянуто круг з радіусом R = 1м. Обиралось 100 граничних елементів. Співставлення числових та аналітичних результатів подано на рис. 4.9.

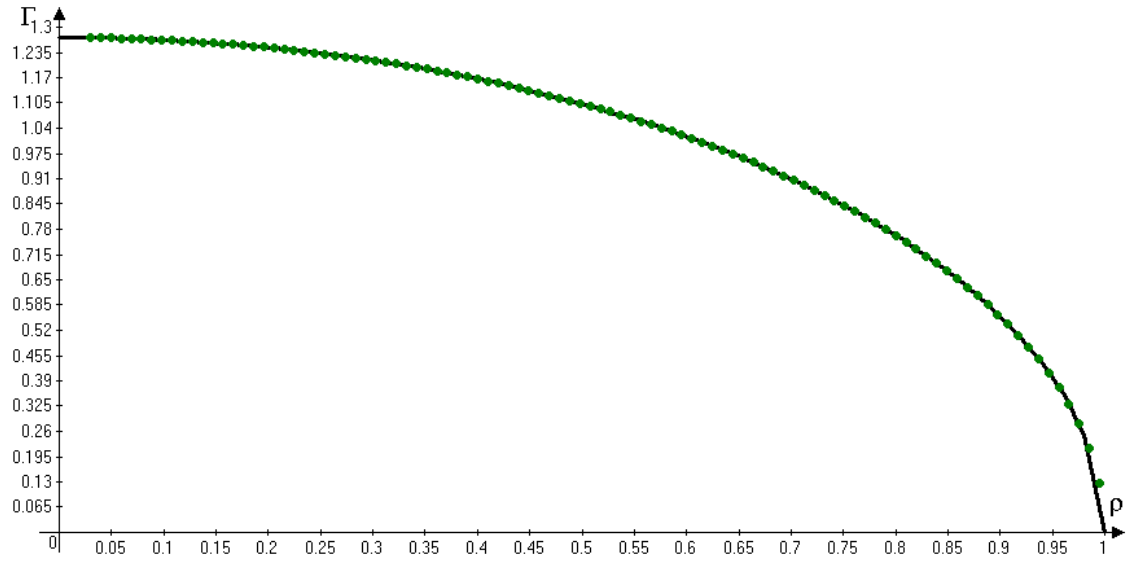


Рисунок 4.9 Числовий та аналітичний розв’язки одновимірного гіперсингулярного рівняння

Тут суцільна лінія відповідає аналітичному розв’язку, точками позначені числові дані, отримані запропонованим методом.

Зауважимо, що практично у всіх точках відрізку $[0, R]$ отримано точність $\varepsilon = 10^{-4}$. Винятком є точки поблизу кінців інтервалу. Оскільки при $\rho,\ \rho_0$, близьких до нуля, в рівнянні (4.64) виникає додаткова особливість, в [14] запропоновано замінити відрізок інтегрування на $[\delta, R]$. В наведених розрахунках обрано δ=0.025/R. При ρ, близьких до 1, точність може бути збільшена за рахунок врахування поведінки розв’язку на кінцях інтервалу інтегрування [22].

Зазначимо, що при використанні методу граничних елементів для двовимірної області в [22] використано 1200 граничних елементів, а отримана точність становить $\varepsilon = 10^{-3}$. Ці дані свідчать про ефективність запропонованого методу.

4.5.7 Побудова матриці приєднаних мас

Після визначення форм власних коливань $w_m(\rho)$ круглої пластинки за формулами (4.56) знаходимо розв’язки гіперсингулярних рівнянь

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R \Gamma_m(\rho)\frac{\rho \mathrm{E}(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = -w_m(\rho_0)$$

за запропонованим вище методом граничних елементів.

Шукаємо розв'язок задачі гідро пружних коливань пластини у вигляді рядів (4.39),(4.40).

Розглянемо рівняння (4.34) у припущені, що $q_0(x,y,t)$= 0, а перепад тиску знаходиться з рівняння

$$\phi^+(\mathbf{P}_0) - \phi^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S$$

при цьому маємо такі співвідношення

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_l \left[\frac{\partial \phi^+(x,y,t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi^-(x,y,t)}{\partial t}\right],$$

$$D \sum_{m=1}^{N} c_m(t)\, \Delta\Delta w_m + \rho_p h \sum_{m=1}^{N} \ddot{c}_m(t)\, w_m = -\rho_l \sum_{m=1}^{N} \ddot{c}_m(t)\, \Gamma_m. \qquad (4.65)$$

Оскільки розглядатимуться вільні гідро пружні коливання, то вважаємо, що

$$c_m(t) = C_m\, exp(\, i\omega t), \qquad (4.66)$$

де ω - частота власних гідро пружних коливань,

i – уявна одиниця,

C_m - невідомі сталі.

Згідно з рівностями (4.66) перетворимо (4.65) до вигляду

$$D \sum_{m=1}^{N} C_m\, \alpha_m^4 w_m - \omega^2 \left[\rho_p h \sum_{m=1}^{N} C_m\, w_m + \rho_l \sum_{m=1}^{N} C_m\, \Gamma_m\right] = 0. \qquad (4.67)$$

Здійснимо скалярний добуток рівняння (4.67) на функції $w_n(\rho)$, $n = 1,2,\ldots N$ та отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих C_m

$$\sum_{m=1}^{N} \{\delta_{nm}\, A_m D \alpha_m^4 - \omega^2 \left[\rho_p h A_m \delta_{nm} + \rho_l(\Gamma_m, w_n)\right]\} C_m = 0 \qquad (4.68)$$

Для знаходження ненульового розв'язку рівнянь (4.68) здобудемо характеристичне рівняння відносно ω

$$\det\left\{\rho_p h \Omega_m^2 A_n \delta_{nm} - \omega^2 \left[\rho_p h A_m \delta_{nm} + \rho_l(\Gamma_m, w_n)\right]\right\} = 0 \qquad (4.69)$$

Таким чином, задачу визначення частот та форм власних гідро пружних коливань круглої пластини зведено до розв'язання проблеми власних значень

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B})\boldsymbol{C} = 0,$$

де елементи матриць **A** і **B** визначаються за формулами

$$a_{mn} = \Omega_m^2 \rho_p h A_m \delta_{mn}, \quad b_{mn} = \rho_p h A_m \delta_{mn} + \rho_l(\Gamma_m, w_n).$$

Елементи матриці приєднаних мас рідини визначаємо за формулами

$$g_{mn} = (\Gamma_m, w_n) = \tau \sum_{i=1}^{N_1} \rho_{i0} \Gamma_m(\rho_{i0})\, w_n(\rho_{i0}),$$

тобто використовуємо формулу центральних прямокутників.

Таким чином, розроблено метод дослідження визначення частот і форм вільних коливань круглої пластинки, що занурена в рідину, на основі використання одновимірних гіперсингулярних рівнянь.

4.5.8 Числові результати

Як приклад чисельної реалізації запропонованого підходу розглянемо задачу визначення частот і форм коливань круглої пластини, зануреної в рідину. Кругла пластина розглядається з такими параметрами: модуль пружності E= $2.06 \cdot 10^8$ кПа, коефіцієнт Пуассона ν = 0.3, густина матеріалу ρ = 7850 кг/м^3, товщина пластини h = 0.01 м, радіус пластини R = 1.0 м. Пластина розглядається за різних умов закріплення, зокрема при жорстко закріпленому контурі.

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{\rho=R} \tag{4.70}$$

а також при шарнірному закріпленні $w|_{\rho=R} = 0, \quad M|_{\rho=R}$, де M — згинальний момент, w - прогин пластини. У таблиці 4.5 наведені частоти коливань круглих пластин за різних умов закріплення.

Таблиця 4.5: Частоти коливань круглих пластин при різних умовах фіксації, Гц.

Номер форми m	Жорстко закріплена за контуром		Вільно оперта	
	Аналітичний розв'язок	Числовий розв'язок	Аналітичний розв'язок	Числовий розв'язок
1	25.2047	25.20	100.8186	100.74
2,3	52.4540	52.44	209.8161	209.52
4,5	86.0492	86.00	344.1970	343.37
6	98.1241	98.07	392.4964	391.67

Розрахунки показали, що результати, отримані запропонованим методом, добре узгоджуються з аналітичним розв’язком [16].

Перші форми коливань жорстко закріпленої пластини наведені на рисунку 4.10.

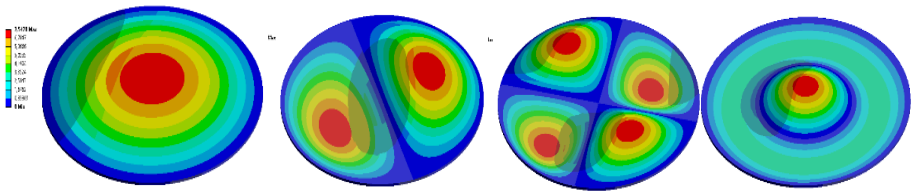


Рисунок 4.10: Форми коливань круглої пластини

Форми коливань круглої пластини далі подані у вигляді

$$u_{nm}(\rho,\theta) = w_{nm}(\rho)\cos n\,\theta,$$

де n - номер гармоніки, m - номер форми, що відповідає n-ій гармоніці.

Числові розв’язки рівняння (4.64) з заданими правими частинами отримані за допомогою раніше розробленого методу.

На рисунку 4.11 показано функції $w_{m1}(\rho)$ та відповідні їм розв’язки $\Gamma_{m1}(\rho)$, для $m = 0,1,2$ гіперсингулярних інтегральних рівнянь (4.64). Тут номери 1–3 відповідають значенням $m = 0,1,2$; штрихові лінії зображають праві частини $w_{m1}(\rho)$, а суцільні - функції $\Gamma_{m1}(\rho)$.

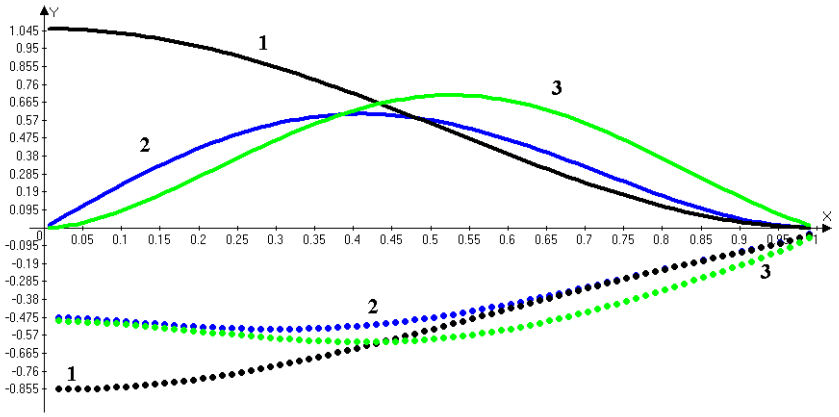


Рисунок 4.11: Форми коливань та розв’язки гіперсингулярних рівнянь

Відповідно до властивостей гіперсингулярного оператора, функції $\Gamma_{m1}(\rho)$ відтворюють характер функцій $w_{m1}(\rho)$. Після розв’язання гіперсингулярних рівнянь (4.64) отримується матриця доданих мас.

Оскільки попередній аналіз показав, що найнижчі частоти відповідають формам коливань «сухої» пластини $w_{01}, w_{02}, w_{11}, w_{21}$, то форми коливань пластини з урахуванням доданих мас рідини подаються у вигляді:

$$w(\rho,\theta,t) = c_1(t)w_{01}(\rho) + c_2(t)w_{11}(\rho)\cos\theta + c_3(t)w_{11}(\rho)\sin\theta + c_4(t)w_{21}(\rho)\cos 2\theta + c_5(t)w_{21}(\rho)\sin 2\theta$$

Аналогічне подання отримано й для густини потенціалу подвійного шару.

$$\Gamma(\rho,\theta,t) = \ddot{c}_1(t)\Gamma_{01}(\rho) + \ddot{c}_2(t)\Gamma_{11}(\rho)\cos\theta + \ddot{c}_3(t)\Gamma_{11}(\rho)\sin\theta + \ddot{c}_4(t)\Gamma_{21}(\rho)\cos 2\theta + \ddot{c}_5(t)\Gamma_{21}(\rho)\sin 2\theta$$

Слід зазначити, що як у випадку «сухої» пластини, так і з урахуванням доданих мас рідини, існують кратні частоти, що відповідають формам коливань $w_{11}(\rho)\cos\theta$, $w_{11}(\rho)\sin\theta$ та $w_{21}(\rho)\cos 2\theta, w_{21}(\rho)\sin 2\theta$.

У таблиці 4.6 нижче наведені значення частот для цих форм коливань: Ω_{i1} та ω_{i1} - для пластини, зануреної в рідину, при жорсткому закріпленні.

Таблиця 4.6: Частоти коливань круглої пластини, Гц.

i	0	1	2
Ω_{i1}	25.20	52.44	86.00
ω_{i1}	7.241	12.69	16.80

Зазначимо, що форми коливань пластини, зануреної в рідину, майже збігаються з формами коливань «сухої» пластини. Урахування наявності рідини призводить до значного зниження частот вільних коливань.

4.6.Висновки за розділом

У розділі розглянуто два підходи до формулювання задачі гідропружної взаємодії конструктивного елемента з рідиною - за умов однобічного та двобічного контакту. У випадку двобічного контакту для визначення перепаду тиску на поверхні елемента використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння. Їхньою перевагою є те, що невідома функція (густина потенціалу) визначається з точністю до сталого множника і безпосередньо пов’язана з перепадом тиску.

Для задач із однобічним контактом застосовується пряме формулювання методу граничних елементів, що базується на третій формулі Гріна. Досліджено вібраційні характеристики консольних прямокутних пластин, циліндричних оболонок і лопаток кільцевого вінця гідротурбіни як у повітряному середовищі, так і з урахуванням впливу приєднаних мас рідини. У випадку двобічного контакту з рідиною для моделювання використано гіперсингулярні рівняння, які забезпечують точне визначення перепаду тиску на поверхні конструкції. Зазначено, що форми коливань лопатки в повітрі та у воді демонструють лише незначні відмінності, проте власні частоти при наявності рідини значно знижуються. Із підвищенням номеру форми коливань ступінь зниження частот поступово зменшується.

Застосування гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) показало високу ефективність у задачах врахування взаємодії конструкцій із рідиною порівняно з альтернативними методами. Наприклад, використання сингулярних рівнянь з ядром типу Коші потребує чисельного інтегрування по двох близько розташованих поверхнях, а метод скінченних елементів вимагає дискретизації всього об'єму, зайнятого рідиною та панеллю, що суттєво збільшує обчислювальні витрати.

Проведено детальний аналіз вільних коливань круглої пласкої пластини в умовах взаємодії з ідеальною нестисливою рідиною. Застосовано підхід на основі ГІР, який дозволяє точно враховувати вплив рідини на динамічні характеристики конструкції. Метод заданих форм дав змогу ефективно звести задачу до системи алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд коливань.

У результаті дослідження встановлено, що форми коливань круглої пластини залишаються подібними до форм «сухої» пластини, хоча частоти коливань при наявності рідини значно знижуються. Особливу увагу приділено формам із кратними власними частотами, які зберігають свою кратність навіть при взаємодії з рідиною. Чисельне розв’язання гіперсингулярних рівнянь дозволило визначити розподіли густин потенціалу подвійного шару та побудувати матрицю приєднаних мас - ключовий елемент у розрахунках власних частот.

Отримані результати можуть бути використані під час аналізу коливань резервуарів, днищ та інших тонкостінних конструкцій, занурених у рідину, що є важливим для запобігання резонансним явищам і забезпечення безпечної експлуатації. Запропонована методика відзначається високою точністю та обчислювальною ефективністю, що підтверджується числовими прикладами.

Основні результати цього розділу відображено в роботах автора [1]- [3], [5], [7], [9]-[11], [15], [17].

РОЗДІЛ 5
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ ВІНКЛЕРА

В цьому розділі розроблено метод розрахунку динамічних характеристик резервуарів для збереження рідини з урахуванням плескань вільної поверхні та впливу пружної основи. Використано метод заданих форм, що дало змогу побудувати базисні функції для дослідження як власних, так і вимушених коливань резервуарів з рідиною. Вперше досліджені динамічні характеристики резервуарів, частково заповнених рідиною, з урахуванням наявності пружної основи Вінклера. Отриманий спектр частот власних коливань може бути використано при проектуванні резервуарів для збереження рідини з метою відстроювання від небажаних резонансних частот.

5.1 Формулювання задачі та методика дослідження

Досліджуються коливання циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера. Вважається, що резервуар частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Задача полягає в визначенні частот та форм такої оболонки з врахуванням плескань вільної поверхні та коливань пружного днища. Наявність пружної основи дає змогу наближено враховувати взаємодію з ґрунтом. Побудуємо модель резервуара як жорсткої циліндричної оболонки радіусу R з пружним днищем на пружній основі Вінклера. Вважаємо, що резервуар частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною на висоту H, рис.1. Позначимо як S_0 вільну поверхню рідини, як S_1 – жорстку циліндричну поверхню, S_{bot} – пружну поверхню днища.

Якщо товщина h однорідної пластинки є сталою, то рівняння руху пластинки в циліндричних координатах має вигляд

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = q(r, \theta, t). \qquad (5.1)$$

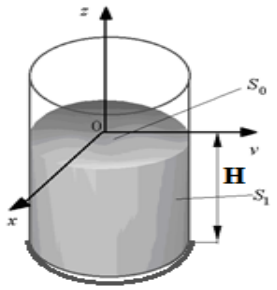


Рисунок 5.1. Циліндричний резервуар з пружним днищем на пружній основі Вінклера

В (5.1) $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ циліндрична жорсткість, ρ_p – густина пластинки, K – модуль Вінклера, $q(r,\theta,t)$ – зовнішня сила, що діє на пластину.

Якщо пластина контактує з рідиною, то

$$q(r,\theta,t) = p(r,\theta,t) + q_0(r,\theta,t),$$

де $p(x,y,t)$ – тиск рідини на пластину, $q_0(r,\theta,t)$ – сила, що збурює.

Для знаходження тиску зробимо такі припущення: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. В цих умовах існує потенціал швидкостей $\varphi(x,y,z,t)$, який задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (5.2)$$

Зв'язок між потенціалом швидкостей та тиском визначається з лінеарізованого інтегралу Коші-Лагранжа [3]

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_x(t)x + \big(g + a_z(t)\big)\zeta\right],$$

де ρ_l - густина рідини; p_0 – атмосферний тиск, $a_x(t)$, $a_z(t)$ – компоненти пришвидшення сили, що збуджує, в горизонтальному та вертикальному напрямках, ζ – функція, що описує положення та рівень підйому вільної поверхні рідини. При цьому

$$a_x(t) = a_h \cos\omega_h t,\ a_z(t) = a_v \cos\omega_v t.$$

Граничні умови для рівняння (5.1) є такими.

На жорсткій циліндричній поверхні S_1 виконується умова непротікання

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0. \qquad (5.3)$$

На пружному днищі умова непротікання приймає вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_{bot}} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{5.4}$$

де w – прогин пластинки, що визначається з рівняння (5.1) та відповідних граничних умов, що визначаються далі.

На вільній поверхні мають виконуватись кінематична та динамічна граничні умови у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \;\; p - p_0|_{S_0} = 0. \tag{5.5}$$

Тут функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ характеризує зміну рівня та положення вільної поверхні з часом, **n** – зовнішня одинична нормаль до поверхні.

Використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. Введемо циліндричну систему координат (r, θ, z). У випадку жорсткого закріплення маємо такі граничні умови:

$$w|_{r=R} = 0, \quad \frac{dw}{dr}\Big|_{r=R} = 0. \tag{5.6}$$

Розглянемо власні коливання системи циліндрична оболонка – рідина. При цьому $q_0(r, \theta, t) = 0$, $a_x(t) = a_z(t) = 0$, й рівняння (5.1) набуває вигляду

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = -\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Таким чином, треба знайти невідомі функції w, φ, ζ, що задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = -\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{5.8}$$

та граничним умовам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_{bot}} = \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \;\; p - p_0|_{S_0} = 0, w|_{r=R} = 0, \quad \frac{dw}{dr}\Big|_{r=R} = 0. \tag{5.9}$$

Для отримання однозначного розв'язку системи рівнянь (5.8) з граничними умовами (9) додаємо умову Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \tag{5.10}$$

Для розв'язання крайової задачі (5.8)-(5.9) застосуємо метод заданих форм.

Будемо шукати переміщення пружного днища у вигляді

$$w(x,y,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) w_k(x,y), \tag{5.11}$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу, $w_k(x,y)$ – форми коливань пружного днища без врахування взаємодії з рідиною, N – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Зобразимо потенціал швидкостей у вигляді суми двох потенціалів як $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Потенціал φ_1 шукаємо у вигляді

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k(t) \varphi_{1k}. \tag{5.12}$$

Тут коефіцієнти $c_k(t)$ визначені в (5.11), для функцій ϕ_{1k} маємо такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0, \left.\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_{bot}} = w_k, \ \left.\varphi_{1k}\right|_{S_0} = 0. \tag{5.13}$$

Зобразимо потенціал φ_2 у вигляді ряду по власним формам коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k(t) \varphi_{2k} \tag{5.14}$$

де $d_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу, φ_{2k} – базисні функції, M – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій φ_{2k} формулюємо крайові задачі таким чином:

$$\nabla^2 \varphi_{2k} = 0, \left.\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0, \left.\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_{bot}} = 0, \left.\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{5.15}$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}. \tag{5.16}$$

де χ_k – частоти власних коливань вільної поверхні рідини.

Рівняння вільної поверхні при цьому набуває вигляду

$$\zeta = \zeta(x,y,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^{M} d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}, \tag{5.17}$$

а для потенціалу швидкостей маємо

$$\varphi = \varphi(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k \varphi_{2k}. \tag{5.18}$$

Далі крайову задачу зведено до системи диференціальних рівнянь. Зауважимо, що для сумарного потенціалу $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ виконані такі співвідношення

$$\Delta\phi = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_{bot}} = \frac{\partial w}{\partial t},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Таким чином, для остаточного розв'язання початково-крайової задачі (5.8) з граничними умовами (5.9), залишилось задовольнити першому з рівнянь системи (5.8), та динамічній граничній умові на вільній поверхні, яка описується рівнянням

$$p - p_0 = -\rho_l\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_x(t)x + \big(g + a_z(t)\big)\zeta\right] = 0.$$

Тобто на вільній поверхні має виконуватись таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\varphi_{2k} + \big(g + a_z(t)\big)\Big(\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^{M}d_k\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}}\Big) + a_x(t)x = 0.$$

Коли вивчаються власні коливання, вважаємо, що $a_x(t) = a_z(t) = 0$, тобто отримаємо

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\varphi_{2k} + g\left(\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^{M}d_k\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}}\right) = 0. \qquad (5.19)$$

Форми коливань пружного днища без врахування взаємодії з рідиною є розв'язками рівняння

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = 0$$

у припущенні, що $w(t,x,y) = \exp(i\Omega t)w(x,y)$.

Позначимо як $w_k(x,y)$ форми коливань, що відповідають власним частотам Ω_k (k=1,2,…). Ці форми задовольняють таким диференціальним рівнянням

$$D\Delta\Delta w_k - \rho_p h\Omega_k^2 w_k + Kw_k = 0. \qquad (5.20)$$

Після підстановки (5.11) в перше з рівнянь (5.8) отримуємо таку рівність

$$\rho_p h\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k w_k + D\sum_{k=1}^{N}c_k\Delta\Delta w_k + K\sum_{k=1}^{N}c_k w_k = \qquad (5.21)$$

$$= -\rho_l\Big(\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M}\ddot{d}_k\varphi_{2k}\Big).$$

З рівності (5.20) знаходимо, що

$$D\Delta\Delta w_k + Kw_k = \rho_p h\Omega_k^2 w_k.$$

З врахуванням цього співвідношення рівняння (5.21) прийме вигляд

$$\rho_p h \sum_{k=1}^{N} (\ddot{c}_k + \Omega_k^2 c_k) w_k + \rho_l \left(\sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} \right) = 0.$$

Таким чином, отримано систему диференціальних співвідношень

$$\rho_p h \sum_{k=1}^{N} (\ddot{c}_k + \Omega_k^2 c_k) w_k + \rho_l \left(\sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} + g \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \boldsymbol{n}} + \sum_{k=1}^{M} d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \boldsymbol{n}} \right) = 0.\text{ре}$$

Зауважимо, що перше з них виконується на пружному днищі, а друге – на вільній поверхні. З використанням граничних умов будемо мати

$$\sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} + g \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \boldsymbol{n}} + \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_k^2 \varphi_{2k} \right) = 0.$$

Остаточно отримуємо такі співвідношення для знаходження невідомих, залежних лише від часу коефіцієнтів $c_k(t), d_k(t)$:

$$\rho_p h \sum_{k=1}^{N} (\ddot{c}_k + \Omega_k^2 c_k) w_k + \rho_l \left(\sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} \right) = 0, \quad (5.22)$$

$$\sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k \varphi_{2k} + g \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \boldsymbol{n}} + \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_k^2 \varphi_{2k} \right) = 0.$$

Виконаємо скалярний добуток першого з рівнянь в (5.22) на функції w_l, а другого на функції φ_{2l} та отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\rho_p h \sum_{k=1}^{N} (\ddot{c}_k + \Omega_k^2 c_k)(w_k, w_l) + \rho_l \left(\sum_{k=1}^{N} \ddot{c}_k (\varphi_{1k}, w_l) + \sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k (\varphi_{2k}, w_l,) \right) = 0 \quad (5.23)$$

$$\sum_{k=1}^{M} \ddot{d}_k (\varphi_{2k}, \varphi_{2l}) + g \left(\sum_{k=1}^{N} \left(c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}, \varphi_{2l} \right) + \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_k^2 (\varphi_{2k}, \varphi_{2l}) \right) = 0.$$

Якщо розглядаються вільні коливання, то до системи (5.23) треба додати початкові умови, тобто

$$c_k(0) = c_{k0},\ \dot{c}_k(0) = c_{k1},\ d_k(0) = d_{k0},\ \dot{d}_k(0) = d_{k1}. \quad (5.24)$$

При знаходженні власних частот та форм коливань вважаємо, що

$$c_k(t) = C_k \exp(i\omega t),\ d_k(t) = D_k \exp(i\omega t) \quad (5.25)$$

і приходимо до проблеми власних значень. Далі будемо отримувати три системи базисних функцій, а саме w_l, φ_{1l}, φ_{2l}.

5.2 Визначення власних форм коливань рідини

Базисні функції φ_{2l} та відповідні їм власні частоти χ_l визначаються шляхом розв'язання крайової задачі (5.15). Зауважимо, що внаслідок кругової симетрії конструкції, що розглядається, обидва рівняння в (5.8) можуть бути зображені у вигляді добутків тригонометричних функцій $\cos m\theta$ на функції, що залежать від r та z. Тут m– хвильове число, або кількість вузлових діаметрів. Для жорсткої циліндричної оболонки радіусу R з рівнем заповнення H, рис.1, власні функції φ_{2k} та частоти власних коливань χ_k отримаємо за формулами [3]

$$\frac{\chi_k^2}{g} = \frac{\mu_k}{R}\tanh\left(\mu_k \frac{H}{R}\right),\ \varphi_{2k} = \mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\frac{\cosh\left(\frac{\mu_k}{R}(z+H)\right)}{\cosh\left(\frac{\mu_k}{R}(H)\right)}\cos m\theta, \qquad (5.26)$$

де J_m - функції Бесселя першого роду, μ_k – корені рівняння $\mathrm{J}'_m(x) = 0$.

Надалі будемо розглядати крайові задачі для кожного хвильового числа окремо. Зауважимо, що в співвідношеннях (5.22) можна при цьому провести скорочення на $\cos m\theta$. При цьому маємо такі співвідношення ортогональності

$$\int_0^R r\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_l}{R}r\right)dr = 0, k \neq l;\ \int_0^R r\mathrm{J}_m^2\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)dr = \frac{R^2}{2}\left[\left(1-\frac{m^2}{\mu_k^2}\right)\mathrm{J}_m^2(\mu_k)\right].$$

В таблиці 5.1 наведені значення коренів рівнянь $J'_m(x) = 0$ при різних m.

Таблиця 5.1. Характеристичні числа

k	m=0	m=1	m=2	m=3
1	3.831705970	1.841183781	3.054236928	4.201188941
2	7.015586670	5.331442775	6.706133195	8.015236600
3	10.17346814	8.536316365	9.969467825	11.34592431
4	13.32369194	11.70600490	13.17037086	14.58584829
5	16.47063005	14.86358863	16.34752232	17.78874787
6	19.61585851	18.01552786	19.51291278	20.97247694

З даних таблиці бачимо, що найнижчі частоти будуть відповідати першій гармоніці, m=1.

З використанням співвідношень ортогональності спростимо друге рівняння в (5.23) таким чином

$$\ddot{d}_l + \frac{\chi_l^2}{g} d_l + \frac{g}{B_{lm}} \sum_{k=1}^{N} \left(c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}, \varphi_{2l} \right) = 0, \tag{5.27}$$

де $B_{km} = \int_0^R r \mathrm{J}_m^2 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right) dr = \frac{R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{m^2}{\mu_k^2} \right) \mathrm{J}_m^2 (\mu_k) \right]$, m – хвильове число.

5.2.1 Визначення власних форм коливань днища

Базисні функції w_l та відповідні їм власні частоти $\boldsymbol{\Omega}_l$ визначаються шляхом розв'язання такої спектральної задачі

$$D \Delta \Delta w_k + (K - \rho_p h \Omega_k^2) w_k = 0, \tag{5.28}$$

$$w|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = 0. \tag{5.29}$$

Оскільки рівняння (5.28) допускає розв'язки у вигляді

$$w_{km}(r, \theta) = F_k(r) \cos m\theta,$$

то з огляду рівнянь (5.28), (5.29) робимо висновок про те, що рівняння (5.28) допускає скорочення на $\cos m\theta$.

Спочатку розглянемо випадок аксіально-симетричних коливань, тобто припустимо, що m=0. Введемо таке позначення

$$\alpha^4 = \frac{\Omega^2 \rho_p h}{D} - \frac{K}{D}.$$

Рівняння (5.28) приймає вигляд $(\Delta - \alpha^2)(\Delta + \alpha^2) F = 0$ та може бути зображено у вигляді системи

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \alpha^2 F = 0, \tag{5.30}$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \alpha^2 F = 0. \tag{5.31}$$

Розв'язками рівняння (5.30) є функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку $J_0(\alpha t)$ та $Y_0(\alpha r)$, а розв'язками рівняння (5.31) є модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку $\mathrm{I}_0(\alpha r)$ та $K_0(\alpha r)$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (5.28) має вигляд

$$F(r) = a \, \mathrm{J}_0(\alpha r) + b \, Y_0(\alpha r) + c \, \mathrm{I}_0(\alpha r) + d \mathrm{K}_0(\alpha r),$$

де a, b, c, d- сталі.

Оскільки при $r \to 0$ функції $Y_0(\alpha r)$ та $K_0(\alpha r)$ нескінченно зростають, вважаємо, що $b = 0,\ d = 0$, щоб уникнути нефізичних переміщень. Для визначення сталих a, c використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. У випадку жорсткого закріплення маємо такі граничні умови

$$F|_{r=R} = 0,\ \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=R}.$$

З цих умов випливає, що

$$\begin{cases} a\,\mathrm{J}_0(\alpha R) + c\,\mathrm{I}_0(\alpha R) = 0 \\ a\,\mathrm{J}_1(\alpha R) + c\,\mathrm{I}_1(\alpha R) = 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

Для того, щоб система (5.32) мала ненульовий розв'язок, необхідно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Тому отримуємо характеристичне рівняння для знаходження невідомої величини α

$$\begin{vmatrix} \mathrm{J}_0(\alpha R) & \mathrm{I}_0(\alpha R) \\ \mathrm{J}_1(\alpha R) & \mathrm{I}_1(\alpha R) \end{vmatrix} = \mathrm{J}_0(\alpha R)\,\mathrm{I}_1(\alpha R) - \mathrm{I}_0(\alpha R)\,\mathrm{J}_1(\alpha R) = 0. \tag{5.33}$$

Позначимо $\lambda = \alpha R$. В таблиці 5.2 наведені значення 6 перших коренів рівняння (5.33) при m=0.

Таблиця 5.2. Значення коренів характеристичного рівняння (5.33) та сталих c_k

k	λ_k	c_k
1	3.196220616	0.1018870979
2	6.306437050	0.0506907858
3	9.439499140	0.0337792448
4	12.57713064	0.0253319976
5	15.71643853	0.0202649244
6	18.85654552	0.0168871927

Співвідношення між сталими a та c в рівнянні для w для кожного α_k отримуємо із рівності

$$a_k\,\mathrm{J}_0(\alpha_k R) + c_k\,\mathrm{I}_0(\alpha_k R) = 0 \Rightarrow c_k = -a_k\,\frac{\mathrm{J}_0(\alpha_k R)}{\mathrm{I}_0(\alpha_k R)}.$$

Таким чином, отримані залежності форм власних коливань круглої пластинки від r у вигляді

$$w_k(r) = \mathrm{J}_0(\alpha_k r\,) - \frac{\mathrm{J}_0(\alpha_k R)}{\mathrm{I}_0(\alpha_k R)}\,\mathrm{I}_0(\alpha_k r). \tag{5.34}$$

На рисунку 5.2 зображені функції, що визначені формулою (5.34) при $R = 1$ для різних k в залежності від r при m=0.

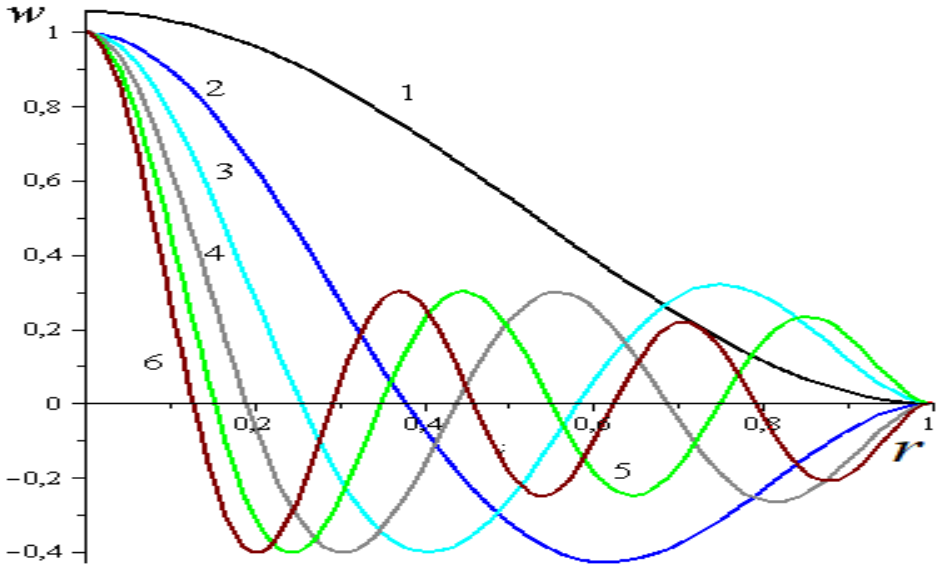


Рисунок 5.2 Залежності форм коливань від радіальної координати

Цифрами 1-6 тут позначені форми, що відповідають значенням $\lambda_k = \alpha_k$, що наведені в таблиці 1. Перевіркою ортогональності форм власних коливань $w_m(\mathrm{r})$ встановлено, що $\left(w_k(r), w_l(r)\right) = \mathrm{c}_k \delta_{kl}$, де значення сталих c_k наведені в таблиці 1. З використанням отриманих умов ортогональності та виразів (5.26) для функцій $\varphi_{2k}(r)$ та (34) для функцій $w_k(r)$ при $z = -H$ отримаємо значення скалярних добутків (φ_{2k}, w_l) в першому з рівнянь (5.23).

Таблиця 5.3. Значення скалярних добутків (w_l, φ_{2k})

k/l	1	2	3	4	5	6
1	0.062175	-0.002222	0.000404	-0.000119	0.0000459	-0.000021
2	0.030527	0.0369651	-0.002831	0.007554	-0.000282	0.0001273
3	-0.015242	0.0159007	0.026325	-0.002707	0.0008747	-0.000375
4	0.0098645	-0.008068	0.010601	0.0204379	-0.002457	0.0008892
5	-0.007085	0.0054783	-0.005309	0.0079168	0.0167006	-0.002212
6	0.0054112	-0.004104	0.003659	-0.003901	0.00630544	0.0141181

З даних таблиці 5.3 можна зробити висновок про те, що найбільший внесок дають скалярні добутки при k,l=1,2,3.

5.2.2 Визначення базисних функцій φ_{1k}

Для побудови базисних функцій φ_{1k} сформулюємо крайові задачі [3]

$$\nabla^2\varphi_{1k} = 0 \; \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\sigma} = w_k, \quad w_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_1} = w_k, \;\; \varphi_{1k}\Big|_{S_0} = 0. \qquad (5.35)$$

Будемо шукати гармонічні функції φ_{1k} у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шарів, як у роботі [3], тобто використовуємо пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь

$$2\pi\varphi_{1k}(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\boldsymbol{n}} \frac{1}{|P-P_0|}\, dS - \iint_S \varphi_{1k} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}} \frac{1}{|P-P_0|} \quad S = S_1 \cup S_0. \qquad (5.36)$$

З використанням подання (5.36) зводимо крайові задачі (5.35) до систем сингулярних інтегральних рівнянь. Сингулярні інтеграли типу Коші та з логарифмічними особливостями обчислюємо за методикою, розробленою в [17], [18].

5.3 Аналіз числових результатів

Після побудови необхідних систем базисних функцій приходимо до зв'язаної динамічної задачі. Згідно з [19] вважаємо, що коефіцієнт Вінклера K наближено обчислюється за формулою

$$K = \frac{2(1-\nu_1)GR^4}{(1-2\nu_1)h}, \quad G = \frac{E_1}{2(1\mp\nu_1)}, \qquad (5.37)$$

де G, E_1 та ν_1 – модулі зсуву, Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу ґрунту, h – товщина днища резервуару.

Далі розглядаємо циліндричний резервуар з жорсткими вертикальними стінками та днищем на пружній основі Вінклера при частковому заповненні ідеальною нестисливою рідиною. Вважаємо, що циліндрична оболонка має плоске днище та такі геометричні й фізичні параметри: радіус R = 1м, висота L = 2 м, модуль Юнга $E = 2.06\cdot10^5$ МРа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина матеріалу оболонки $\rho_s = 7850$ кг/м^3, густина рідини $\rho_l = 1000$ кг/м^3, рівень наповнення

$H = 1.0$ м. Розглядаємо різні значення товщини h при фіксованих значенні коефіцієнта Пуассона $\nu_1 = 0.4$ та модуля пружності E_1 =2.62MPa [20].

У табл. 5.4 наведені числові значення власних частот коливань для порожніх та заповнених рідиною циліндричних пружних резервуарів, без врахування впливу пружної основи. Тут коефіцієнти n_S, n_L вказують на кількість форм оболонки та рідини, що враховуються в зв'язаних коливаннях, J - номер зв'язаної форми коливань. Для числового моделювання використано чотири форми коливань оболонки та п’ять форм плескань.

Таблиця 5.4. Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів,

$n = 0{,}1$, Гц

$n = 0$					$n = 1$			
J	n_S	n_L	Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною	n_S	n_L	Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною
1		1		0.9739		1		0.6418
2		2		1.3208		2		1.1509
3		3		1.5909		3		1.4564
4		4		1.8209		4		1.7054
5		5		2.0249		5		1.9212
6	1	1,2	23.233	7.6591	1,2		48.520	21.902
7	2,1		91.101	43.308	2,1		139.70	79.712
8	3,2		205.25	117.03	3,2,1		232.44	178.42
9	4,3,2		365.79	230.31	4,3		277.30	210.00

Ці дані показують різницю між частотами заповнених та порожніх оболонок. Зі збільшенням номера частоти ця різниця поступово зменшується. Частоти коливань, що відносяться до пружних стінок, істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

Зменшення товщини оболонки призводить до зменшення частот пружних стінок. Частоти порожніх та заповнених рідиною резервуарів для різної товщини наведені в табл. 5.5. Результати свідчать про те, що найнижчі частоти пружних оболонок зменшуються зі зменшенням товщини. Отже, для дуже тонких пружних стінок резервуара перша частота коливань пружних стінок може бути набагато

меншою, ніж частота коливань рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним.

Таблиця 5.5. Залежність частот від товщини оболонки

J	Пуста оболонка, Гц				Оболонка з рідиною, Гц			
	h , м							
	0.01	0.005	0.003	0.0015	0.01	0.005	0.003	0.0015
6	23.233	11.838	7.1805	3.6308	5.5213	2.8187	1.7096	0.8644
7	40.482	20.612	12.495	6.3132	15.172	7.9277	4.8058	1.5780
8	91.101	46.271	28.023	14.153	43.769	22.249	13.479	7.0064
9	205.25	100.01	62.922	31.747	119.14	58.148	36.587	15.716
10	213.55	109.10	66.127	31.778	168.05	85.909	52.069	18.692

В табл. 5.6 наведені найнижчі частоти аксіально-симетричних коливань пружної оболонки (n = 0) на пружній основі Вінклера.

Таблиця 5.6. Частоти аксіально-симетричних коливань пружної оболонки на пружній основі Вінклера

J	Пуста оболонка, Гц				Оболонка з рідиною, Гц			
	h , м							
	0.01	0.005	0.003	0.0015	0.01	0.005	0.003	0.0015
6	25.336	13.254	12.692	18.353	6.381	3.330	3.305	4.634
7	42.132	21.793	15.852	15.558	15.974	8.0714	5.8718	5.7621
8	92.081	47.429	29.406	23.073	43.769	22.589	14.003	10.984

З результатів, наведених в таблиці 6, робимо висновок про те, що при врахуванні пружної основи Вінклера відбувається збільшення найнижчих частот пружних стінок, й не спостерігається явище небезпечного зближення частот коливань пружних стінок та плескань рідини. Тому, при дослідженні коливань тонких оболонок, частково заповнених рідиною, доцільно використовувати методи, що дозволяють наближено враховувати вплив ґрунту.

5.4 Висновки за розділом

Розроблена методика наближеного обчислення впливу ґрунту як пружної основи Вінклера при коливаннях циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, з урахуванням взаємодії між динамікою рідини та деформаціями пружного днища. Методика базується на декомпозиції задачі: окремо знаходяться власні частоти та форми коливань рідини у жорсткому резервуарі, а також власні частоти та форми коливань пружного днища без рідини. Ці форми далі використовуються як базисні функції при побудові розв’язку задачі в узгодженому (зв’язаному) формулюванні, що дозволяє суттєво знизити обчислювальну складність при збереженні необхідної точності. Запропонований підхід дозволяє враховувати як гнучкість днища, так і пружну взаємодію резервуара з основою, що є важливим при аналізі динамічної поведінки конструкцій, які працюють в умовах впливу сейсмічних або технологічних навантажень. Отримані результати мають практичну цінність для інженерів-проєктувальників при створенні резервуарів та сховищ рідин, зокрема при необхідності запобігання збігу власних частот системи з частотами зовнішніх збурень, що може призводити до резонансних явищ та потенційного руйнування конструкції.

Запропонована методика має важливе практичне значення для аналізу та проєктування циліндричних резервуарів, частково заповнених рідиною, що взаємодіють із пружною основою. Зокрема, врахування впливу ґрунту у вигляді моделі пружної основи Вінклера дозволяє оцінити умови експлуатації

конструкцій, встановлених безпосередньо на ґрунтовій поверхні або на фундаментних плитах з обмеженою жорсткістю.

Методика, яка передбачає апроксимацію шуканих форм коливань за допомогою базисних функцій, отриманих у спрощених постановках (коливання рідини в жорсткому резервуарі та коливання пружного днища без рідини), забезпечує прийнятний компроміс між точністю та обчислювальною ефективністю. Це особливо актуально на стадії попереднього проєктування, коли необхідна швидка оцінка динамічної поведінки конструкцій для виключення резонансних ефектів.

Отримані результати можуть бути безпосередньо використані при визначенні частотної характеристики системи «рідина–резервуар–основа», що дає змогу здійснювати перевірку на збіг власних частот із частотами технологічних або сейсмічних впливів. Таким чином, методика сприяє підвищенню надійності та довговічності резервуарних споруд.

Окрім того, підхід може бути адаптований до аналізу інших типів ємнісних конструкцій із гнучкими стінками та днищем, що працюють в умовах складної динамічної взаємодії із середовищем, включаючи баки для зберігання нафтопродуктів, водозбірні системи, технологічні резервуари промислових установок тощо.

Основні результати цього розділу відображені в роботах автора [4], [14], [16], [18].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв’язано важливу науково-технічну задачу, що полягала в створенні ефективних числових методі розв’язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь із застосуванням для аналізу міцності та коливань конструктивних елементів, що взаємодіють із рідиною, або мають тріщини.

Основні результати дослідження полягають у такому.

1. Отримано одновимірне гіперсингулярне рівняння, до якого зводиться крайова задача Неймана на круговій області, а також запропоновано числовий метод для його розв’язання.

2. Побудовано аналітичні розв’язки гіперсингулярного рівняння для кругової області, де праві частини мають вигляд дійсної та уявної частин функції $f(x,y) = (x + iy)^n$.

3. Для довільної розімкненої поверхні Ляпунова *S* доведено, що необхідною і достатньою умовою існування скінченного граничного значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару на S є існування скінченного граничного значення цієї ж похідної на площині, дотичній до S. Це дозволило обґрунтувати заміну поверхні під час інтегрування сукупністю плоских елементів.

4. Отримано аналітичні вирази для скінченної частини за Адамаром гіперсингулярного інтегралу для довільного плоского багатокутника.

5. Проведено числове моделювання концентрації напружень у тілах з тріщиною кругової форми в паралелепіпеді із застосуванням методу граничних елементів та методу скінченних елементів, ця задача може бути використана як модельна для тестування числових методів.

6. Розглянуто два підходи до формулювання задачі гідропружної взаємодії конструктивного елемента з рідиною - за умов однобічного та двобічного контакту. У випадку двобічного контакту для визначення перепаду тиску на поверхні елемента використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння. Для

задач із однобічним контактом застосовується пряме формулювання методу граничних елементів, що базується на третій формулі Гріна.

7. Досліджено вібраційні характеристики циліндричних оболонок і лопаток кільцевого вінця гідротурбіни як у повітряному середовищі, так і з урахуванням впливу приєднаних мас рідини. Зазначено, що форми коливань лопатки в повітрі та у воді демонструють лише незначні відмінності, проте власні частоти при наявності рідини значно знижуються. Із підвищенням порядку коливань ступінь зниження частот поступово зменшується.

8.Проведено детальний аналіз вільних коливань круглої пласкої пластини в умовах взаємодії з ідеальною нестисливою рідиною на основі одновимірного гіперсингулярного інтегрального рівняння.

9. Розроблено метод розрахунку динамічних характеристик резервуарів для збереження рідини з урахуванням плескань вільної поверхні та впливу пружної основи.

10. Розроблено методику наближеного обчислення впливу ґрунту як пружної основи Вінклера при коливаннях циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, з урахуванням взаємодії між коливаннями рідини та деформаціями пружного днища. Отримані результати мають практичну цінність для інженерів-проєктувальників при створенні резервуарів та сховищ рідин, зокрема при необхідності запобігання збігу власних частот системи з частотами зовнішніх збурень, що може призводити до резонансних явищ та потенційного руйнування конструкції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications. *Cambridge University Press*, 2005.
https://www.researchgate.net/publication/259815818_Liquid_Sloshing_Dynamics_Theory_and_Applications_by_Raouf_A_Ibrahim

2. Gavrilyuk, I., M. Hermann, Lukovsky I., Solodun O., Timokha, A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*, Vol. 25 Iss: 6, pp.518 – 540, 2008
https://www.researchgate.net/publication/245338809_Natural_sloshing_frequencies_in_rigid_truncated_conical_tanks

3. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells

4. Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнитько, Е.А. Стрельникова // *Пробл. машиностроения*. –2006. Т. 9. – №1, – С.105 - 118.
http://journals.uran.ua/jme/issue/archive

5. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART).* – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45 - 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961
https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head

6. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Сер. Динаміка і міцність машин*. 2019. № 1. С. 34–39.
http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370

7. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*, 2009. – № 847. – С. 79-86.

http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf

8. Trivedi, C. & Cervantes, M.J. Fluid-structure interactions in Francis turbines: A perspective review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 68, pp. 87–101, 2017.

https://www.researchgate.net/publication/309010924_Fluid-structure_interactions_in_Francis_turbines_A_perspective_review

9. Дегтярьов К. Г., Стрельнікова О. О., Шелудько Г. А. Комп'ютерне моделювання лопатей вітроустановок з оптимальними параметрами. / *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, No 19, 2012, С.81-86

http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf

10. Grinderslev, C. et al. Wind turbines in atmospheric flow: Fluid–structure interaction simulations with hybrid turbulence modelling. *Wind Energy Science*, 6, pp. 627–643, 2021.

https://www.researchgate.net/publication/351386584_Wind_turbines_in_atmospheric_flow_fluid-structure_interaction_simulations_with_hybrid_turbulence_modeling

11. Sun, L. et al. Evaluating the Origin Intensity Factor in the Singular Boundary Method for Three-Dimensional Dirichlet Problems. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 9(6), pp. 1289-1311, 2017.

https://www.researchgate.net/publication/321344573_Evaluating_the_Origin_Intensity_Factor_in_the_Singular_Boundary_Method_for_Three-Dimensional_Dirichlet_Problems

12. Segerlind, L. Applied Finite Element Analysis, 2nd edition. Wiley, 1984.
https://archive.org/details/appliedfiniteele0000sege_n0w5/page/n5/mode/2up

13. Brebbia C.A., Dominguez J. Boundary Elements. An Introductory Course (WIT Press, 1998 . Springer-Verlag: Berlin and New York). 1998 https://www.scribd.com/document/366396028/Brebbia-C-A-Dominguez-J-Boundary-elements-an-introductory-course-WIT-Press-1998-pdf

14. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка 1982. – 552 С.

15. Sheiko T.I., Maksymenko-Sheiko K. V., Sirenko, V. M., Morozova A. I. R-functions in the analytical description of the surface of a flying wing unmanned aerial vehicle. Journal of Mechanical Engineering Problems, 2019, 22(4), C.61-66. DOI: https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.061

16. Moreno L., Castañar I., Codina R., Baiges J., Cattoni D.: Numerical simulation of Fluid–Structure Interaction problems with viscoelastic fluids using a log-conformation reformulation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 410, (2023), 115986, DOI:10.1016/j.cma.2023.115986.

17. Lampart, P., Yershov, S., Rusanov, A., Szymaniak, M., Tip Leakage/Main Flow Interactions in Multi-Stage HP Turbines with Short-Height Blading, ASME Turbo Expo, GT-2004-53882, pp. 1359-1367, (2004), https://doi.org/10.1115/GT2004-53882.

18. Rusanov, A., Chugay, M., Rusanov, R. Advanced Computer Technologies in the New Flow Part Development for Reactive Type HPC Steam Turbine of T-100 Series. In: Altenbach, H., *et al.* Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering, pp.55-63, (2023), Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_6

19. Simionato F., Daros C. H.: Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, Z Angew Math Mech. 99, e201800211, (2019), //doi.org/10.1002/zamm.201800211.

20. Bai, Zi-Q., Gu, Y., Fan, C.-M. A direct Chebyshev collocation method for the numerical solutions of three-dimensional Helmholtz-type equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 104, (2019), pp. 26-33, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.023

21. Liu, Y. J., Mukherjee, S., Nishimura, N., Schanz, M., Ye, W.et al.. Recent

Advances and Emerging Applications of the Boundary Element Method. Applied Mechanics Reviews, (2011), 64 (3), ff10.1115/1.4005491ff. ffhal-01401752f

22. Nordin M. H., Hamzah K. B., Khashiie N. S., Waini I., Zainal N. A., Sayed Nordin S. K. Derivation of hyper-singular integral equations for thermoelectric bonded materials featuring a crack parallel to interface. Mathematical modeling and computing, 10(4), 1230–1238 (2023), DOI: 10.23939/mmc2023.04.1230.

23. Gimperlein, H., Oezdemir, C., Stephan, E. P.: A time-dependent FEM-BEM coupling method for fluid-structure interaction in 3d. Applied Numerical Math., 152, 49 – 65, (2020), https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.01.023.

24. Hewett, D. P., Langdon, S. and Chandler-Wilde, S. N.: A frequency-independent boundary element method for scattering by two-dimensional screens and apertures, IMA J. Numer. Anal., 35, pp. 1698–1728, (2015), https://doi.org/10.1093/imanum/dru043.

25. Sumbatyan, M.A., Mescheryakov, K.I.: Two-dimensional integral equation for a thin wind turbine blade rotating in the round tunnel, Mechanics Research Communications, 85, pp. 1-4, (2017), https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.07.007.

26. Sierikova, O., Strelnikova, E., Degtyariov, K.: Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 657. Springer, Cham. (2022), https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_31.

27. Salvatore, F., Sarichloo, Z., Calcagni, D.: Marine Turbine Hydrodynamics by a Boundary Element Method with Viscous Flow Correction. Journal of Marine Science and Engineering. 6(2),53. (2018), https://doi.org/10.3390/jmse6020053

28. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V. and Degtyarev K.: Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods,2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 351-356 (2021), doi: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086.

29. Elahi, M. Mahmoudi,Y., Salimi Shamloo. A., Jahangiri Rad, M. On projection method for numerical solution of hypersingular integral equations of the first kind combined with quadrature methods, Physica Scripta, 98(4), 045229, (2023), DOI :10.1088/1402-4896/acc493

30. Smetankina, N., Merkulova, A., Merkulov, D., Misiura, S., Misiura, I. Modelling Thermal Stresses in Laminated Aircraft Elements of a Complex Form with Account of Heat Sources. In: Cioboată, D.D. (eds) International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) - 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, Springer, Cham, 534. pp. 233–246, (2023), https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22.

31. Brebbia, C.A.: The birth of the boundary element method from conception to application, Engineering Analysis with Boundary Elements, 77, iii-x, (2017), https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001.

32. Rizzo, F. J. and Shippy, D. J., A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions, Mech. Res. Comm., 6, pp. 99-103, (1979). https://doi.org/10.1016/0093-6413(79)90022-3

33. Novin, R., Fariborzi A.: Hypersingular integral equations of the first kind: A modified homotopy perturbation method and its application to vibration and active control. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 38(2), 706-727. (2019), DOI:10.1177/1461348419827378.

34. Setukha, A.: Method of Boundary Integral Equations with Hypersingular Integrals in Boundary-Value Problems, Journal of Mathematical Sciences, 257(1), 114-126, (2021), DOI: 10.1007/s10958-021-05475-3.

35. Kostenko, O. V.: A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. Mathematical Modelling and Analysis, 28(4), 689–714. (2023). https://doi.org/10.3846/mma.2023.14761.

36. Obaiys, S.J., Ibrahim, R.W., Ahmad, A.F.: Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: Andrica, D., Rassias,

T. (eds) Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications, 151, (2019). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25.

37. Gnitko, V.I., Karaiev, A. O., Degtyariov, K. G., Vierushkin, I.A., Strelnikova, E. A.: Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis, WIT Transactions on Engineering Sciences, 134, 67-79, (2022), DOI: 10.2495/BE450061.

38. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Degtyarev, K.: Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 111, 2020, 78-87, https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

39. Langrenne, C., Garcia, A., Bonnet, M.: Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation. Journal of the Acoustical Society of America, 2015, 138 (3332-3340), ff10.1121/1.4935134ff. ffhal-01233994f.

40. Groh, G.G., A theorem on the potential of a double layer, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 161(2), (1991), pp. 576-586, https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90352-Z.

41. J. Zheng, M.A. Xue,2, P. Dou, Y. He. A review on liquid sloshing hydrodynamics, Journal of Hydrodynamics, 33(6), (2021), pp. 1089-1104 https://doi.org/10.1007/s42241-022-0111-7

42. Chen, W., Zhang, J. Y., Fu, Z. J., Singular boundary method for modified Helmholtz equations, Eng. Anal. Bound. Elem., 44, pp. 112–119, 2014.

43. Chen W., Wang, F. Z. A method of fundamental solutions without fictitious boundary, Eng.Anal. Bound. Elem., 34, pp. 530–532, 2010.

44. Andreas Kleefeld,A.& Pieronekz, L. The method of fundamental solutions for computing acoustic interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems*, 34(3), 2018, DOI: 10.1088/1361-6420/aaa72d

45. Sun, L., Chen W., Cheng, A. H.-D. Evaluating the Origin Intensity Factor in the Singular BoundaryMethod for Three-Dimensional Dirichlet Problems *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 9,(6), pp. 1289-1311, 2017, DOI: 10.4208/aamm.2015.m1153.

46. Gu, Y., Chen, W., Infinite domain potential problems by a new formulation of singular boundary method*, Appl. Math. Model*., 37, pp. 1638–1651, 2013.

47. Gu, Y., Chen, W., Zhang, Ch., He, X., A meshless singular boundary method for three-dimensional inverse heat conduction problems in general anisotropic media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 84, pp. 91-102, 2015, DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.

48. Qu, W.,Chen, W., Fu, Zh.-J., Gu, Y., Fast multipole singular boundary method for Stokes flow problems, *Mathematics and Computers in Simulation*, 146, 2017, DOI: 10.1016/j.matcom.

49. Yang Ch., Li, X., Meshless singular boundary methods for biharmonic problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 56, pp. 39-48, 2015, DOI:10.1016/j.enganbound.

50. Trivedi, C. & Cervantes, M.J., Fluid-structure interactions in Francis turbines: A perspective review. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 68, pp. 87–101, 2017.

51. Iovănel, R.G., Dunca, G., Bucur D.M. & Cervantes M.J., Numerical simulation of the flow in a Kaplan turbine model during transient operation from the best efficiency point to part load. Energies, 13(12), p. 3129, 2020. DOI: 10.3390/en13123129.

52. Rusanov, A., Shubenko, A., Babenko, O. & Rusanov, R., Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant. Energetika, 65(1), pp. 39–50, 2019.

53. Grinderslev, C., Sørensen, N.N., Horcas, S.G., Troldborg N. & Zahle, F., Wind turbines in atmospheric flow: Fluid–structure interaction simulations with hybrid turbulence modelling. Wind Energy Science, 6, pp. 627–643, 2021.

54. Avramov, K.V., Nonlinear vibrations characteristics of single-walled carbon nanotubes via nonlocal elasticity. International Journal of Nonlinear Mechanics, 107, pp. 149–160, 2018. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.017.

55. Gnitko, V., Marchenko, U., Naumenko, V. & Strelnikova, E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proceedings of the

XXXIII Conference on Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods, Transactions on Modelling and Simulation, WIT Press: Southampton and Boston, vol. 52, pp. 285– 296, 2011. DOI: 10.2495/BE110251.

56. Mansouri, A. & Aminnejad, B., Investigation of oil reservoir vibration under the impact of earthquake in proper and corrosion-occurred tanks. American Journal of Civil Engineering and Architecture, 1, pp. 181–199, 2013.

57. Faltinsen, O.M., Lagodzinskyi, O.E. & Timokha, A.N., Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing. Journal of Fluid Mechanics, 894, A10, pp. 1–42, 2020. DOI: 10.1017/jfm.2020.253.

58. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V. & Degtyarev, K., Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. Engineering Analysis with Boundary Elements, 111, pp. 78–87, 2020. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

59. Zhou-Bowers, S. & Rizos, D.C., B-spline impulse response functions of rigid bodies for fluid-structure interaction analysis. Advances in Civil Engineering, Corpus ID: 56357618, 2018. DOI: 10.1155/2018/9760361.

60. Boyko, E., Bercovici, M. & Gat, A.D., Viscous-elastic dynamics of power-law fluids within an elastic cylinder. Physical Review Fluids, 2, 073301, 2017.

61. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V. & Tonkonozhenko, A., Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. Engineering Analysis with Boundary Elements, 120, pp. 13– 27, 2020. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024.

62. Saghi, R., Hirdaris, S. & Saghi, H., The influence of flexible fluid structure interactions on sway induced tank sloshing dynamics. Engineering Analysis with Boundary Elements, 131, pp. 206–217, 2021. DOI: 10.1016/j.enganabound.2021.06.023.

63. Smetankina, N., Kravchenko, I., Merculov, V., Ivchenko, D. & Malykhina, A., Modelling of bird strike on an aircraft glazing. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering, eds M. Nechyporuk, V. Pavlikov & D. Kritskiy, Springer:

Cham, pp. 289–297, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-37618-5_25.

64. Huang, W.-X. & Tian, F.-B., Recent trends and progress in the immersed boundary method. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 233(23–24), pp. 7617–7636, 2019.

65. Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 120, 2020, P. 13-27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.02m

66. Sun Y., Zhou D., Wang J. An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 72, 2019, pp. 569-587.

67. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K., Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes, *Journal of King Saud University - Science*, vol. 33(8), 2021, 101589, https://doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589.

68. Lewiński P. M. Accuracy assessment of linear elasticity solution for interaction of cylindrical tank with subsoil, *Bulletin of the Polish academy of sciences technical science*s, vol. 69(1), 2021, e136039, DOI: 10.24425/bpasts.2021.136039

69. Kodanda Rama Rao P., Reddy S. R. K., Swaroop A.H.L., Nagarjuna K. Seismic behavior of existing elevated water tanks resting on different type of foundations, *Earth and Environmental Science*, vol. 982, 2022, 012082. DOI:10.1088/1755-1315/982/1/012082.

70. Silva R. L. C., Marques G. B., Lages E. N., Marques S. P. C. Analytical study of cylindrical tanks including soil-structure interaction, *Structures and Materials Journal*, vol.12(1), 2019, P. 14 -22. DOI:10.1590/S1983-41952019000100003

71. Kondratov D. V, Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation, *Journal of Physics: Conf. Series*, vol. 944, 2017, 012057. DOI :10.1088/1742-6596/944/1/012057

72. Hotala E., Ignatowicz R. Effect of settlement of foundations on the failure risk of the bottom of cylindrical steel vertical tanks for liquids. *Studia Geotechnica et*

Mechanica, vol. 41(3), 2019, P. 171–176. DOI: 10.2478/sgem-2019-0017

73. Bochkarev S.A. Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* vol. 22(06), 2022, DOI: 10.1142/S0219455422500717

74. Tran M.-T., Nguyen V.-L., Pham S.-D., Rungamornra J. Free vibration of stiffened functionally graded circular cylindrical shell resting on Winkler–Pasternak foundation with different boundary conditions under thermal environment, *Acta Mechanica,* 2020, vol, 231(1049) DOI: 10.1007/s00707-020-02658-y

75. Ugrimov S.V. Smetankina N.V., Shupikov O.M. Mathematical modeling of the process of non-stationary deformation of multilayer glazing under distributed and localized force loads. *Bulletin of the Kherson National Technical University*, 2016, №3(58), C. 408-413.

76. Smetankina N., Kravchenko I., Merculov V., Ivchenko D., Malykhina A., Modelling of bird strike on an aircraft glazing. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Cham, vol. 1113, 2020, P. 289–297. DOI: 10.1007/978-3-030-37618-5_25

77. K. Mousa. Winkler and Pasternak foundations effect on the free vibration of an orthotropic oval cylindrical shell with variable thickness. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. (2014). 95. 10.1002/zamm.201400097**.**

78. V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. 0. Basheleishvili, and T. V. Burchuladze, “Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity”, North-Holland Publishing Co., New York. 1979. 929 P**.**

79. Chudinovich I., Constanda C. The Cauchy Problem in the Theory of Plates with Transverse Shear Deformation //Math. Methods Appl. Sci.–2000.–Vol.10, №4.–P.463-477.

80. Chudinovich I., Constanda C. Variational Treatment of Exterior Boundary Value Problems for Plates with Transverse Shear Deformation//IMA J. Appl. Math.–1998.– №61.–P.141-153

81. Mykhas'kiv V.V., Stankevych V.Z. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 2019. – Vol. 99, No. 5. – e201800193.

82. T. Vincent-Dospital, R. Toussaint, S. Santucci, L. Vanel, D. Bonamy, et al.. How heat controls fracture: the thermodynamics of creeping and avalanching cracks. *Soft Matter*, 2020, 16 (41), pp.9590-9602. ff10.1039/D0SM01062Fff. ffhal-02926644

83. Zhang, J., Xu, R., He, Y., Yang, W.: Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, Materials,14(14), 3949, (2021), DOI:10.3390/ma14143949

84. Moskalenko, R., Zaydenvarg, O., Strelnikova, O., and Gnitko V.:Software development for the computational analysis of crack propagation and durability of structures, 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 509-514, (2020), DOI: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250089.

85. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2007) Table of Integrals, Series, and Products. In: Jeffrey, A. and Zwillinger, D., Eds., 7th Edition, Academic Press, New York. https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=2849047

86. Михаськів В.В. Моделювання тривимірної нестаціонарної взаємодії тріщин в пружному тілі за допомогою функцій їх розкриття // Прикладна механіка. 2001. Т. 32. № 1. С. 83–92.

87. Hnitko V., Dehtiarov K., Moskalenko R., Strelnikova O. Computational Model for Durability Analysis of Structure Elements with Defects. Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia. Vol. 23, no. 1, 2020, pp. 27-38, https://doi.org/10.15407/pmach2020.01.027.

88. Muthuveerappan, G., Ganesan, N., Veluswami, M. A. A note on vibration of a cantilever plate immersed in water. Journal of Sound and Vibration, Volume 61, Issue 3, p. 385-391, 1979, https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90681-3.

.

Додаток А

Список публікацій здобувача

Статті в SCOPUS видання та журналах категорії Б

1. Strelnikova E., Choudhary N., Degtyariov K., Kriutchenko D., Vierushkin I. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. Periodical, collection of papers: Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier BV. 2024. (Scopus Q1), DOI (link): 10.1016/j.enganabound.2024.105999

2. I.A. Vierushkin, E.A. Strelnikova, Hipersingular integral equation method in numerical simulating frequencies and modes of circular plate immersed into liquid Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи, вип. 48, 2020, С. 6-21. DOI: 10.26565/2304-6201- 2020-48-01

3. І.О. Вєрушкін, Є.С. Кононенко. *Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінченних та граничних елементів*, Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання та обчислювальні методи , вип. 49, 2021, с. 16-28

4. Вєрушкін І.О., Стрельнікова О.О. Комп'ютерне моделювання коливань рідини в резервуарах з пружною основою Вінклера, *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. – 2022. – №2(133). – С. 91–100. – DOI: 10.32782/1995-0519.2022.2.12

Матеріали апробаційного характеру

5. І.О. Вєрушкін, О.О. Стрельнікова. *Дослідження гідропружних коливань з використанням методу гіперсингулярних рівнянь*, Прикладні питання математичного моделювання, вип. 4, № 2.1, 2021.

6. І.О. Вєрушкін, О.Л. Зайденварг, Ю.В. Науменко, Д.В. Лістрова. *Числові та аналітичні розв'язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь в кругових областях*, *Sciences of Europe*, № 85, т. 2, с. 35–41, 2021.

7. Gnitko, V., Martynenko, O., Vierushkin, I., Kononenko, Y., Degtyarev, K. (2023). Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units. In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29 (SCOPUS)

8. Дегтярьов К.Г., Вєрушкін І.О., Крютченко Д.В., Стрельнікова О.О.,Зайденварг О.Л., Науменко Ю.В. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в крайових задачах механіки руйнування Прикладні питання математичного моделювання 2023, 6(2), С. 39-48

9. Singular and hypersingular integral equations in fluid-structure interaction analysis, V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, K.G. Degtyariov, I.A. Vierushkin, E.A. Strelnikova, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, England, 2022. (SCOPUS)
10. Degtyariov, K., Vierushkin, I., Gnitko, V., .Korneichuk, N., Strelnikova, E. Fuzzy Analysis of Fluid Vibrations in Liquid Storage Tanks under Wind Loads 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 - Conference Proceedings, 2023, p.1-6, DOI: 10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312962 (SCOPUS)
11. Дегтярьов К.Г., Крютченко Д.В., Гнітько В.І., Вєрушкін І.О., Корнійчук М.Т. Комп'ютерне моделювання гідропружних коливань елементів конструкцій за нечітких умов навантаження, Прикладні питання математичного моделювання, 2023, т. 6, №2, с. 49-59.
12. Kyryl Degtyariov, Vasyl Gnitko, Ivan Vierushkin and Mykyta Korneichuk Boundary Element Method in Hydroelastic Interaction Problems of Structural Elements Book chapter in "The Fundamentals of Boundary Element Methods" 2024 by Nova Science Publishers, Inc. https://doi.org/10.52305/KFFP5657 (SCOPUS)
13. Degtyariov, K., Gnitko, V., Steinwolf, A., Vierushkin, I. (2025). Boundary and Finite Element Methods in Crack Propagation Analysis. In: Altenbach, H., Gao, XW., Syngellakis, S., Cheng, A.HD., Lampart, P., Tkachuk, A. (eds) Advances in Mechanical and Power Engineering II. CAMPE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82979-6_29 (SCOPUS)

Тези доповідей на міжнародних конференціях

14. Сєрікова О.М., Стрельнікова О.О., Верушкін І.О. Дослідження власних частот коливань резервуарів на пружній основі Вінклера, «Нові матеріали і технології в машинобудуванні», НТУУ "КПІ", Київ, 2023, с. 308–309.
15. Numerical simulation of vibration frequencies for thin elastic circle plate, Anton Korobka, Elena Sierikova, Ivan Vierushkin, 3rd International Conference of Scientific Research, May 3–4, 2023, Baku
16. О.М. Сєрікова, О.О. Стрельнікова, Д.В. Крютченко, І.О. Верушкін Визначення граничних умов моделі резервуара як жорсткої циліндричної оболонки з пружним днищем на пружній основі Вінклера. Труди МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ - 2023» до 145-річчя від дня народження С.П.Тимошенка С.329-330, Київ, Дніпро, Львів, Харків – 2023.

17. E. Sierikova, E. Strelnikova, I. Vierushkin. Study of oscillations natural frequencies for empty and filled with environmentally hazardous liquid cylindrical elastic tanks. 6th INTERNATIONAL EDUCATION AND INNOVATIVE SCIENCES CONGRE, Burdur Mehmet Akif Ersoy University, TÜRKİYE, p.724-726, 2022.
18. E. Sierikova, E. Strelnikova, I. Vierushkin Boundary conditions determination of the tank model as a rigid cylindrical shell with the elastic bottom on the elastic Winkler base, 9th International mardin artuklu scientific researches conference January 20-22, 2023, Mardin, TÜRKİYE