ІНСТИТУТ ЕНЕРГЕТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ
ІМ. А.М. ПІДГОРНОГО
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

УСПЕНСЬКИЙ БОРИС ВАЛЕРІЙОВИЧ

УДК 534.12

ДИСЕРТАЦІЯ

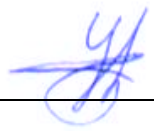
КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНИХ БАГАТОШАРОВИХ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

При написанні роботи використовувався інструмент штучного інтелекту Gemini як невід'ємна частина пошукового сервісу Google. Також було використано засіб Google Translate для перекладу поодиноких англомовних термінів на українську мову при написанні першого розділу.
Всі розділи, при написанні яких використовувався ШІ, перевірені та відредаговані автором особисто. Наукові положення, висновки та результати є власним інтелектуальним внеском автора.



Б.В. Успенський

Науковий консультант: Аврамов Костянтин Віталійович, член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор

Харків – 2026

АНОТАЦІЯ

Успенський Борис Валерійович. **Коливання композитних багатошарових тонкостінних конструкцій при геометрично нелінійному деформуванні.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла. Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2026.

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню важливої наукової проблеми аналізу нелінійних коливань композитних оболонок різної форми. В роботі розроблено нову методику для аналізу коливань композитних багатошарових оболонок при їхньому геометрично нелінійному деформуванні.

Тонкостінним композитним оболонкам притаманна складна нелінійна поведінка: автоколивання, хаотичні коливання, втрата стійкості. Ці явища характеризуються значними амплітудами коливань і можуть призводити до пошкодження та руйнування конструкцій. Тому аналіз нелінійної динаміки стає обов'язковим етапом конструювання оболонкової конструкції. Створення нових методик дослідження нелінійних явищ у тонкостінних композитних конструкціях під дією різних видів навантаження дозволяє проводити аналіз, який стандартними методиками (лінійний, скінченно-елементний аналіз) не вдається виконати.

Таким чином, розробка ефективних методів аналізу нелінійних коливань тонкостінних композитних конструкцій, які враховують особливості їхнього нелінійного деформування, є актуальною задачею.

Об'єкт дослідження – нелінійна динаміка тонкостінних композитних конструкцій.

Предмет дослідження – коливання композитних оболонок при геометрично нелінійному деформуванні.

Методи дослідження.

– Для дослідження біфуркацій та стійкості нелінійних коливань застосовується метод пристрілки сумісно із методом продовження;

– методи аналізу стійкості динамічних систем (розрахунки мультиплікаторів, визначників Хілла, характеристичних експонент);

– для аналізу власних коливань використовується метод Релея-Рітца;

– метод Рунге-Кутта для чисельного інтегрування звичайних диференційних рівнянь застосовано для аналізу динаміки лінійних систем та для верифікації результатів;

– метод скінченних елементів застосовано для верифікації результатів та для моделювання статичного відгуку стільникових заповнювачів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

– розвинуто моделі геометрично нелінійних коливань композитних багатошарових оболонок.

– вдосконалено метод продовження за параметром довжини дуги частотного відгуку для аналізу параметричних та вимушених нелінійних коливань багатошарових оболонок;

– запропоновано нову методику аналізу коливань композитних багатошарових оболонок під дією параметричних, вимушених навантажень та внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем з урахуванням геометрично нелінійного деформування;

– виявлено нові властивості нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки під дією періодичного поздовжнього навантаження. Уперше виявлено в таких оболонках біфуркаційну поведінку, що характеризується переходом від стоячої до бігучої хвилі та навпаки;

– виявлено нові властивості автоколивань тришарової усіченої конічної оболонки в надзвуковому повітряному струмені. Виявлено, що в оболонці можуть виникати майже періодичні та хаотичні коливання, які мають набагато більшу амплітуду за періодичні режими;

– вперше запропоновано нову математичну модель для аналізу

коливань складених тришарових коніко-циліндричних оболонок, яка дозволяє звести цю задачу до системи звичайних диференційних рівнянь;

– виявлено нові властивості нелінійних вимушених коливань тришарової оболонки подвійної кривизни;

– уперше отримано осереднені властивості різноманітних стільникових заповнювачів шляхом скінченно-елементої гомогенізації.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені математичні методи, а також програмне забезпечення, яке їх реалізує, дозволили провести розрахунки нелінійних коливань композитних багатошарових оболонок, які можуть представляти обтічники, адаптери, корпуси аерокосмічної та іншої техніки. Було виявлено нові явища та режими коливань, які можуть виникати в таких конструктивних елементах. Запропонована методика гомогенізації стільникових заповнювачів може використовуватися для вибору оптимального типу та геометричних властивостей стільників для задоволення конкретних потреб при проектуванні конструкцій.

Наукові результати роботи використано при виконанні держбюджетних тем, а також при виконанні науково-дослідних робіт: «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням», «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій», «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA», «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів».

Особистий внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: побудова математичних моделей геометрично нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсувних деформацій

високого порядку; адаптація та застосування методу продовження за параметром для побудови частотних відгуків композитних оболонок; аналіз втрати динамічної стійкості та автоколивань циліндричної нанокомпозитної оболонки у взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості та параметричних коливань циліндричної сендвіч-оболонки під дією періодичного стискаючого навантаження; аналіз нестаціонарного відгуку композитної конічної оболонки з ізотропним шпангоутом під дією імпульсного навантаження; аналіз втрати стійкості та автоколивань конічної сендвіч-оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною сендвіч-оболонкою; аналіз нелінійних вимушених коливань сендвіч-оболонок подвійної кривизни під впливом зосередженої періодичної сили; скінченно-елементний аналіз пружних властивостей стільникових заповнювачів; програмні реалізації вищезазначених методів, моделей і задач; скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

Публікації. Основний зміст дисертації відображено в 54 наукових працях, з них: 46 статей, з яких 17 включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection, з яких 14 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 13 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квартилів, 4 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квартилів); 20 статей – в збірниках наукових праць, що входять до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 9 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 2 статті опубліковано в різних зарубіжних видавництвах); 8 публікацій – тези доповідей на конференціях (з яких 4 роботи видано в зарубіжних видавництвах).

Апробація результатів роботи. Загальні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 14 українських та міжнародних наукових конференціях: 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes (Nicosia, Cyprus. 17-19 April,

2019); Науково-практична конференція «Сучасні розрахунково-експериментальні методи визначення характеристик ракетно-космічної техніки» (Дніпро, 10–12 грудня 2019); Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference (Roubaix, France, October 8–9, 2019); Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров‘я, 2020» (м. Харків, 13–15 травня 2020); 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 5–10 October 2020); ІІ міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 5–8 жовтня 2020 року); 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 13–17 September 2021); ENOC 2020+2 (Lyon, France, July 17-22, 2022); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2022 (Kharkiv, 9–11 June 2022); 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 03–07 October 2022); IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), (Kharkiv, 2–6 October 2023); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2023(Kharkiv, 8–10 June 2023); STUE 2024 International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering (Kharkiv, 12–14 June 2024); Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024) (Kharkiv, 12–14 December 2024).

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (250 найменувань на 32 сторінках) та 5 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 365 сторінок; робота містить 77 рисунків і 28 таблиць. Основний текст дисертації складає 257 сторінок та додатки на 71 сторінці.

У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, викладено основні результати, описано їхню наукову новизну та практичне значення, окреслено особистий внесок автора, наведено відомості про публікації та апробацію роботи.

У першому розділі наведено огляд літературних джерел за темою дисертації. Проведено аналіз сучасних робіт, що розглядають питання

нелінійної динаміки та геометрично нелінійних коливань композитних тонкостінних конструкцій. Розглядаються властивості та будова оболонок трьох типів: нанокомпозитних, сендвіч-конструкцій та конструкцій з посиленням у вигляді стрингерів, шпангоутів та оребрення. Розглянуто роботи, які присвячено флатеру та параметричним коливанням композитних оболонок.

Аналіз представлених наукових джерел показав, що попри глибоке вивчення окремих аспектів механіки композитів та аеропружності, цілісний підхід до розв'язання окресленої проблеми досі відсутній. Зокрема, більшість існуючих праць обмежується дослідженням регулярних геометричних форм або лінійних наближень, що не відображає реального стану експлуатації сучасних об'єктів. Питання нелінійних коливань багатошарових та наноармованих тонкостінних елементів внаслідок взаємодії з повітряним струменем або параметричного збурення залишаються найменш висвітленими в літературі.

Другий розділ присвячено опису розроблених методів дослідження. Основним інструментом, застосованим у роботі, є нова математична модель динаміки багатошарових оболонок. У межах моделі розглядаються оболонки із жорстким зчепленням між шарами. Деформування матеріалів описується лінійним законом Гука, причому з кожним окремим шаром конструкції пов'язана власна криволінійна система координат. Для опису деформування шарів оболонки застосовано теорію Редді третього порядку та нелінійна теорія оболонок Амабілі. Для дискретизації рівнянь руху застосовується метод заданих форм, базис для якого визначається за допомогою методу Релея-Рітца. Для аналізу динамічного відгуку оболонки пропонується застосування методу продовження за довжиною дуги частотного відгуку. Таким чином, сформульовано цілісну методику аналізу динамічного відгуку оболонки.

У третьому розділі описану методику застосовано до аналізу нелінійних коливань циліндричних оболонок. Розглянуто дві задачі: флатер

нанокомпозитної циліндричної оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем та параметричні коливання тришарової сендвіч-оболонки зі стільниковим заповнювачем. При розгляданні флатеру нанокомпозитної оболонки визначено критичний тиск оболонки, при якому положення рівноваги втрачає стійкість та виникають стійкі автоколивання, та досліджено подальший розвиток цих автоколивань. Дослідження параметричних коливань сендвіч-оболонки дозволило побудувати криві частотного відгуку оболонки під дією параметричного збудження. У частотному відгуку оболонки виявлено замкнені кільця стійких розв'язків, що відповідають бігучим хвилям вздовж кругової координати оболонки.

У четвертому розділі описано застосування запропонованої методики до аналізу коливань композитних конічних оболонок. Розглянуто дві задачі: аналіз нестаціонарного відгуку композитної конічної оболонки з ізотропним кільцем на імпульсне навантаження та флатер усіченої конічної сендвіч-оболонки, що взаємодіє з надзвуковим газовим струменем. Перехідні процеси, що відбуваються в композитній оболонці з ізотропним кільцем внаслідок імпульсного навантаження, вдалося змоделювати за допомогою лінійного формулювання запропонованої моделі. Проведено порівняння з моделюванням методом скінченних елементів, яке свідчить про високу точність отриманих результатів та їхню збіжність.

Аналіз флатеру тришарової композитної сендвіч-оболонки дозволив виявити критичні значення статичного тиску вільного струму, при яких положення рівноваги оболонки втрачає стійкість та виникають стійкі автоколивання, та проаналізувати частотний відгук оболонки при подальшому підвищенні тиску. Виявлено майже періодичні та хаотичні режими коливань консольної усіченої конічної сендвіч-оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Ці режими характеризуються значними амплітудами.

П'ятий розділ присвячено аналізу втрати динамічної стійкості положенням рівноваги складеної коніко-циліндричної сендвіч-оболонки у

взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Для опису руху складеної оболонки запропоновано систему базисних функцій, яка дозволяє автоматично задовольняти умовам безперервності переміщень на лінії стикування конічної та циліндричної частин. Це відрізняє запропонований метод від тих, які можна знайти в науковій літературі. Такий підхід вдвічі знижує розмірність системи рівнянь руху та спрощує дослідження динаміки оболонки. Знайдено критичні значення статичного тиску вільного струму, при яких положення рівноваги оболонки втрачає стійкість.

У **шостому розділі** розглянуто вимушені коливання сендвіч-оболонок подвійної кривизни під дією точкової гармонійної сили. Проведено аналіз частотного відгуку сферичної оболонки та оболонки в формі гіперболічного параболоїда. Досліджено вплив радіусу кривизни на частотний відгук оболонки.

Сьомий розділ присвячено аналізу пружних властивостей стільникових заповнювачів. Запропоновано метод розрахунку ефективних пружних властивостей стільникових заповнювачів з різною формою комірки. Проведено порівняння з результатами експериментів.

У **висновках** наведено основні результати дисертаційної роботи.

Ключові слова: конічна оболонка, циліндрична оболонка, полога оболонка, багатошаровий композит, стільниковий заповнювач, функціонально градієнтний матеріал, флатер, параметричні коливання, вимушені коливання, низькошвидкісний удар, геометрична нелінійність, теорія зсуву високого порядку, нелінійна дискретна модель, математична симуляція, метод продовження за параметром.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Avramov K.V., Chernobryvko M.V., Uspensky B.V. Free vibrations of functionally gradient cnt-infused cylindrical shells | Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. *Space Science and Technology*. 2019. Vol. 25, № 2(117). P. 23-37. DOI: 10.15407/KNIT2019.02.023. *(квартиль Q4)*

2. Avramov K.V., Chernobryvko M. , Uspensky B. , Seitkazrnova K.K. , Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite cylindrical shells in supersonic flow. *Nonlinear dynamics*. 2019. №98. P. 1853-1876. DOI: 10.1007/s11071-019-05292-z. *(квартиль Q1)*

3. Avramov K., Myrzaliyev D., Uspensky B., Sakhno N., Seitkazenova K.K. Buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite joined spherical-cylindrical-spherical thin-walled structure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science (PIC)*. 2021. Vol. 235, issue 22. Pp. 6287-6310. DOI: 10.1177/09544062211005795. *(квартиль Q2)*

4. Сахно Н.Г., Аврамов К.В., Успенський Б.В. Dynamic Instability of a Compound Nanocomposite Shell [Динамічна втрата стійкості складеною нанокомпозитною оболонкою]. *Космічна наука і технологія*. 2021, № 5 (22). С. 60-70. DOI: https://doi.org/10.15407/knit2021.05.060. *(квартиль Q4)*

5. Uspensky B., Avramov K., Sakhno N. and Nikonov O. Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Conical-Cylindrical Shell. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22, No. 7. Paper 2250039. 28 pages. DOI: 10.1142/S0219455422500390. *(квартиль Q1)*

6. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear supersonic flutter of sandwich truncated conical shell with flexible honeycomb core manufactured by fused

deposition modeling. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 143. Paper 104039. 18 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104039. *(квартиль Q1)*

7. Avramov K., Uspensky B., Sakhno N., Nikonov O. Transient response of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite conical shell with ring-stiffener under the action of impact loads. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2022. № 91. Paper 104429. 13 pages. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104429 *(квартиль Q1)*

8. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Polishchuk O. & Salenko A. Experimental and Numerical Study on Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modelling. *Applied Composite Materials*. 2022. Vol. 29. P. 2033–2061. DOI: 10.1007/s10443-022-10057-w. *(квартиль Q2)*

9. Derevianko I., Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Maksymenko-Sheiko K. Experimental and numerical analysis of mechanical characteristics of fused deposition processed honeycomb fabricated from PLA or ULTEM 9085. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2022. Vol. 25, Issue 2. P. 264-283. DOI: 10.1177/10996362221137292 *(квартиль Q1)*

10. Avramov K.V., Uspensky B.V., Derevyanko I.I., Degtyarev M.O., Polishchuk O.F., Chernobryvko M.V. Dynamic properties of nanocomposite and three-layer thin-walled aerospace elements manufactured by additive technologies. *Space Science & Technology*. 2023. Vol. 29(1). P. 52-64. DOI: 10.15407/knit2023.01.052 *(квартиль Q4)*

11. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear vibrations of doubly curved composite sandwich shells with FDM additively manufactured flexible honeycomb core. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234, Issue 3. P. 1183–1210. DOI: 10.1007/s00707-022-03426-w *(квартиль Q2)*

12. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shell with Fused Deposition Processed Honeycomb Core and Carbon Nanotubes Reinforced Composite Faces Sheets.

Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2023. Vol. 12(2). 2003–2023 DOI: 10.1007/s42417-023-00960-2 *(квартиль Q2)*

13. Avramov K, Chernobryvko Marina, Pierre C., Uspensky Boris, Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Influence of cell breakings on the buckling of composite sandwich shells with FDM additively manufactured honeycomb cores. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2025. Vol. 239 (8). P. 774-791. DOI: 10.1177/09544100241308955 *(квартиль Q2)*

14. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Maksymenko-Sheiko K., Chernobryvko M. Mechanical properties of auxetic honeycombs realized via material extrusion additive manufacturing: Experimental testing and numerical studies. *Applied Composite Materials*. 2025. Vol. 32(1). P. 119–148. DOI: 10.1007/s10443-024-10269-2. *(квартиль Q2)*

15. Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Nikonov O. Dynamic instability of composite sandwich joined conical–cylindrical shell interacting with supersonic gas stream. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2025. Vol. 105, Issue 5. Paper e70063. https://doi.org/10.1002/zamm.70063 *(квартиль Q3)*

16. Uspensky B., Avramov K., Malyshev S., Nikonov O. Geometrically nonlinear oscillations of composite sandwich cylindrical shell with honeycomb core under axial time periodic force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2025. Vol. 178. Paper 105196. 14 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105196 *(квартиль Q1)*

17. Avramov K., Uspensky B., Liubarskyi B.. Asymptotic analysis of resonant nonlinear oscillations of composite sandwich doubly curved shell with soft honeycomb core under axial harmonic excitation. *Acta Mechanica*. 2026. Vol. 237. P. 3069-3090. DOI: 10.1007/s00707-026-04648-y *(квартиль Q2)*

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

18. Avramov K.V., Sakhno N.H., Uspensky B.V. Transient dynamic response of a nanocomposite conical shell with a ring stiffener under the action of an impact load. *Technical Mechanics*. 2020. No. 2. P. 64-78. DOI: 10.15407/itm2020.03.064

19. Avramov K.V., Uspenskyi B.V., Sakhno N.H., Biblik I.V. Non-stationary Response of a Carbon Nanotube-reinforced Composite Conical Shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 23, no. 2. P. 21-32. DOI: 10.15407/pmach2020.02.021

20. Avramov Kostiantyn V., Sakhno Nataliia H., Uspenskyi Borys V. Static buckling of a pre-loaded complex nano-composite shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, no. 1. P. 28-35. DOI: 10.15407/pmach2021.01.028

21. Успенский Б., Аврамов К., Деревянко И., Библик И. К расчету механических характеристик сотовых заполнителей, изготовленных аддитивными технологиями FDM. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2021. Вып.1. С. 14-20. DOI: 10.32620/aktt.2021.1.02.

22. Деревянко І. І., Аврамов К. В., Успенський Б. В., Саленко О. Ф. Експериментальний аналіз механічних характеристик деталей ракет-носіїв, виготовлених за допомогою FDM адитивних технологій. *Технічна механіка*. 2021. № 1. С. 92-100. DOI: 10.15407/itm2021.01.092

23. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Derevianko Ihor I. Analytical calculation of the mechanical properties of honeycombs printed using the fdm additive manufacturing technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №2. P. 16-23. DOI: 10.15407/pmach2021.02.016

24. Derevianko I.I., Uspenskyi B.V., Avramov K.V., Salenko O.F., Biblik I.V. Experimental and numerical analysis of the shear properties of honeycomb cores produced using additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 71-76. DOI: 10.15407/pmach2021.04.071.

25. Uspenskyi Borys V., Avramov Kostiantyn V., Derevianko Ihor I. Vibrations of a cylindrical sandwich shell with a honeycomb core made using

FDM technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 49-60. DOI: 10.15407/pmach2021.04.049.

26. Avramov K. V., Uspensky B. V., Derevianko I. I. Nonlinear oscillations of a sandwich plate with a 3D-printed honeycomb core. *Technical mechanics*. 2021. № 4. P. 104-117. DOI: 10.15407/itm2021.04.104

27. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Biblik Iryna V. Instability of a Three-Layer Conical Shell with Honeycomb Structure Made by Additive Technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 6-14. DOI: 10.15407/pmach2022.01.006

28. Деревянко І. І., Успенський Б. В., Аврамов К. В., Саленко О. Ф. Експериментальний і числовий аналіз напруженого стану стільникових заповнювачів, виготовлених адитивними технологіями. *Технічна механіка*. 2022. № 1. С. 42-50. DOI: 10.15407/itm2022.01.042

29. Avramov K. V., Uspensky B. V. Self-vibrations of a truncated conical sandwich shell with a honeycomb core made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2022. №2. P. 87-100. DOI: 10.15407/itm2022.02

30. Аврамов К. В., Успенський Б. В. Вимушені коливання тришарової оболонки подвійної кривизни з пружним стільниковим заповнювачем. *Технічна механіка*. 2022. № 4. С. 79-94. DOI: 10.15407/itm2022.04.079

31. Uspenskyi B. V., Derevianko I. I., Avramov K. V., Polishchuk O. F., Salenko O. F. Multi-Cycle Fatigue of Composite Three-Layer Plates with Honeycomb Structure Made by Additive FDM Technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia*. 2022. vol. 25, no. 3. P. 16-28. DOI: 10.15407/pmach2022.03.016.

32. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Urniaieva Inna A., Breslavskyi Ivan D. Bifurcations and Stability of Nonlinear Vibrations of a Three-Layer Composite Shell with Moderate Amplitudes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashinobuduvannia*. 2023. Vol. 26, no. 2. P. 6-15. DOI: 10.15407/pmach2023.02.006

33. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Marshuba I. S. Static stability of sandwich panels with honeycomb cores made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2023. Vol. 3. P. 88-97. DOI: 10.15407/itm2023.03.088

34. Uspenskyi B., Avramov K., Salenko O., Nikonov O. Dynamic instability in the interaction of a composite shell made by additive technologies with a gas flow. *Technical Mechanics*. 2024. Vol. 3. P. 91-109. DOI: 10.15407/itm2024.03.097

35. Derevianko I. I., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Salenko O. F. Manufacturing Technology, Experimental and Numerical Analysis of Static Bending of Three-Layer Composite Plate with Honeycomb Structure. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27, no. 3. P. 25-33. DOI: 10.15407/pmach2024.03.025.

36. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Liubarskyi Borys H., Smetskykh Oleksii A. Linear vibrations analysis of a composite sandwich conical shell manufactured by additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2025. Vol. 28, no. 2. P. 27-35. DOI: 10.15407/pmach2025.02.027.

37. Успенський Б., Аврамов К., Малишев С., Біблік І. Резонансні параметричні коливання циліндричної сендвіч-оболонки. *Технічна механіка*. 2025. № 3. С. 46-62. DOI: 10.15407/itm2025.03.046

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій:

38. Avramov K., Sakhno N., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained oscillations of nanotubes reinforced composite thin-walled structures. *2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2020 conference IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 5–10 October 2020. P. 24-28. DOI:10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250099

39. Avramov K. V., Uspensky B. V., Sakhno N. H., Nikonov O. Buckling of Joined Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Thin-Walled Structure. *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2021 conference IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13–17 September 2021. P. 323-327. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570016.

40. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Polishchuk O., Salenko O. Stiffness and Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2023. Vol. 536. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-20141-7_44.

41. Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Nonlinear vibrations of sandwich shells of revolutions with carbon nanotubes reinforced composite faces and fused deposition processed honeycomb core. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 03–07 October 2022, P. 64-69. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916364

42. Chernobryvko Maryna, Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Dynamic Deformation of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Spherical-Cylindrical-Spherical Shell. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 03–07 October 2022. P. 785-788. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916392

43. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Urniaieva Inna. Geometrically Nonlinear Oscillations of Sandwich Thin-Walled Structure with Honeycomb Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_19

44. Uspensky B., Avramov K. Linear Parametric Vibrations of Sandwich Cylindrical Shell with Honeycomb Manufactured by FDM Additive Technology. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_20

45. Uspensky B., Avramov K., Chernobryvko M., Nikonov O. Linear Vibrations of Sandwich Cylindrical Shells with Nanocomposite Layers. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2026. Vol. 1658. P. 140–150. DOI: 10.1007/978-3-032-06829-3_13.

46. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Salenko A. Self-sustained Vibrations of Conical Sandwich Shell Interacting with Supersonic Gas Stream. *Тези доповіді на конференції Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024)*. 2024. 11 pages. DOI: 10.1007/978-3-031-94852-7_38

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

47. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes. Nicosia, Cyprus. 17-19 April, 2019. P. 371-372.

48. Аврамов К.В. Клименко Д.В., Чернобрывко М.В., Успенский Б. Флаттер тонкостенных конструкций из нанокомпозитов. Тезисы докладов Научно-практической конференции. «Современные расчетно-экспериментальные методы определения характеристик ракетно-космической техники». Дніпро, 10–12 грудня 2019. С. 36.

49. Chernobryvko Marina, Uspensky Boris, Avramov Konstantin, Sakhno Nataliia, Mesha Yurii, Kruszka Leopold. Advantages of using nanocomposite materials for manufacturing of body armour suit’s plates.

Proceedings of the Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference. – October 8–9, 2019. – Roubaix, France. – P. 306-311.

50. Аврамов К.В. Чернобривко М.В., Успенський Б.В., Сахно Н.Г. Моделювання деформування корпусних елементів ракет з нанокомпозитного матеріалу при нестаціонарному навантаженні. Матеріали конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров‘я. 2020». – 13–15 травня 2020. Ч. 1. С. 61.

51. Аврамов К.В., Успенский Б.В., Сахно Н.Г. Нестационарная динамика функционально-градиентной усиленной углеродными нанотрубками композитной составной оболочечной конструкции. Матеріали II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 379-380.

52. Успенский Б.В., Аврамов К.В., Сахно Н.Г. Динамическая неустойчивость составных нанокомпозитных оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Матеріали II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 336

53. Avramov Konstantin, Uspensky Borys. Nonlinear vibrations of sandwich shells with additive manufactured flexible honeycomb core interacting with supersonic gas flow. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

54. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Marina. Self-sustained Vibrations and Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Shells. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

ABSTRACT

Uspenskyi Borys Valeriiovych. **Vibrations of composite multilayered thin-walled structures under geometrically nonlinear deformation.** – Manuscript.

The dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2026.

The dissertation solves a scientific and technical problem consisting of development of a method to analyze vibrations of composite multilayered shells under geometrically nonlinear deformation.

Thin composite shells are characterized by complex nonlinear behavior such as loss of equilibrium stability, self-sustained and chaotic vibrations. Such phenomena are accompanied by high amplitude vibrations and may cause failure or destruction of the structure. Thus, nonlinear dynamics analysis is an indispensable stage of a shell structure design process. Development of new methods and techniques for analysis of nonlinear phenomena in thin shells' behavior under various types of loading allows for analysis unfeasible by commonly used methods such as linear analysis or finite element method.

Thus, development of effective method for analysis of nonlinear vibrations in thin composite structures taking into account nonlinear deformations of such structure is an actual problem.

The object of the research – nonlinear dynamics of thin composite structures.

The subject of the research – composite shells' vibrations under geometrically nonlinear deformation.

The research methods are:

– shooting technique along with continuation technique are used for analysis of stability and bifurcations of nonlinear vibrations;

– methods for analysis of dynamical systems stability (method of multipliers, Hill's determinant method, characteristic exponents method);

– Rayleigh-Ritz method has been used for free vibration analysis;

– Runge-Kutta technique for numerical solving of ordinary differential equations has been used to analyze linear systems' dynamics and for verification;

– finite elements method has been used for verification and for calculation of static response of honeycomb cores.

Scientific novelty of the obtained results is as follows:

–improved mathematical models of geometrically nonlinear vibrations of composite multilayered shells have been developed;

– to provide analysis of parametric and forced oscillations of multilayered shells, arc length continuation technique has been enhanced;

– a new method for vibrations analysis of composite multilayered shells under parametric, forced or supersonic gas stream loading taking into account geometrically nonlinear deformation of the structure has been developed;

– new properties of nonlinear parametric vibrations of a sandwich cylindrical shell under periodic axial load have been found. For the first time in such shells has been detected bifurcational behavior characterized by transition from stationary to travelling waves and vice versa;

– new properties of self-sustaining vibrations of a sandwich truncated conical shell interacting with a supersonic gas stream have been discovered. High-amplitude almost periodic and chaotic vibrations have been detected;

– for the first time, a new mathematical model for analysis of vibrations in compound sandwich conical-cylindrical shells has been proposed. The problem is reduced to a system of ordinary differential equations;

– new properties of nonlinear forced vibrations in a sandwich double-curved shell have been discovered;

– for the first time, averaged properties of various honeycomb cores have been estimated using finite element method.

Practical significance of the obtained results is that methods and software developed in the dissertation allowed for the analysis of the composite multilayered shells' nonlinear vibrations. Such shells may represent fairings,

adapters, hulls and other parts of aerospace equipment. New phenomena and vibratory behaviors of such structures were detected. The technique of honeycomb core homogenization can be used for optimization of the honeycomb core response according to the design goals.

The scientific results obtained in the dissertation were used during implementation of the research works: “Software development for analysis of dynamics and strength of body composite elements with nano-reinforcement”, “Optimization of topology and increase of strength characteristics of multilayer shells and solids when using additive technologies”, “Composite Metamaterials for Aerospace Structures – CoMetA”, “Applications of thin-walled composite sandwich structures with additively manufactured honeycombs to increase the dynamical strength and decrease of unit weight of missiles and pilotless vehicle”.

Author’s contribution of the applicant. The provisions and results submitted for the defense of the dissertation were obtained by the applicant personally. That includes: development of mathematical models for geometrically nonlinear vibrations of multilayered composite shells based on high-order shear theory; adaptation and applying of the continuation technique to calculate frequency responses of composite shells; analysis of dynamical instability and self-sustained vibrations of a cylindrical nanocomposite shell interacting with a supersonic gas stream; analysis of dynamical instability and parametric vibrations of cylindrical sandwich shell under periodical axial load; analysis of a transient response of a composite conical shell with isotropic ring under impulse load; analysis of dynamical instability and self-sustained vibrations of a conical sandwich shell interacting with a supersonic gas stream; analysis of dynamical instability of a compound conical-cylindrical sandwich shell; analysis of nonlinear forced vibrations of a double curved sandwich shell under periodic point load; finite element analysis of averaged elastic properties of honeycomb cores; software implementations of aforementioned methods, models and problems; finite element modeling for verification.

Main content of the dissertation is reflected in 54 scientific publications including: 46 articles, of which 17 are included in the Scopus and/or Web of Science Core Collection, with 14 articles published in various journals (including 13 articles in journals classified as the first Q1 and second Q2 quartiles, 4 articles in the journals of the third Q3 and fourth Q4 quartiles); 20 articles in collections of scientific papers included in the list of professional publications of the Ministry of Education and Science of Ukraine; 9 articles – in scientific periodicals, continuing editions and conference proceedings (of which 2 articles were published in various foreign publishers); 8 publications – abstracts of reports at conferences (of which 4papers were published in foreign publishers).

Approbation of the results of the dissertation. The main scientific results and provisions of the dissertation were reported, discussed and approved at 14 Ukrainian and international scientific conferences, seminars and congresses: 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes (Nicosia, Cyprus, 17–19 April, 2019); Scientific and Practical Conference «Modern Computational and Experimental Methods for Determining the Characteristics of Rocket and Space Technology» (Dnipro, 10–12 December 2019); Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference (Roubaix, France, 8–9 October, 2019); «Information technologies: science, engineering, technology, education, health» (Kharkiv, 13–15 May 2020); 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), (Kharkiv, 5–10 October 2020); The Second International Science and Technology Conference «Dynamics, strength and modelling in mechanical engineering», (Kharkiv, 5–8 October 2020); 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 13–17 September 2021); ENOC 2020+2, (Lyon, France 17-22 July, 2022); Smart Technologies in Urban Engineering. STUE 2022 (Kharkiv, 9–11 June 2022); 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 03–07 October 2022); IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 2–6 October 2023); Smart Technologies in Urban Engineering. STUE 2023 (Kharkiv, 8–10 June 2023); STUE 2024 International Conference on Smart

Technologies in Urban Engineering (Kharkiv, 12–14 June 2024); Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 ICTM 2024 (Kharkiv, 12–14 December 2024)

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an abstract, table of contents, introduction, seven chapters, conclusions, a list of references (250 items) and 5 appendices. Total volume of the dissertation is 365 pages; the work contains 77 figures and 28 tables. Main text of the dissertation is 257 pages and the appendices are 71 pages long.

The **introduction** of the dissertation substantiates relevance of the research topic, formulates the goal and tasks of the research. In this chapter, main results of the research are outlined; their scientific novelty and practical significance are described. Also, the author's personal contribution, publications and approbation of the dissertation are detailed.

The first chapter contains review of scientific sources regarding the dissertation topic. Analysis of modern works dedicated to the topics of nonlinear dynamics and geometrically nonlinear vibrations of thin-walled composite structures have been conducted. Three types of shells had been considered: nanocomposite, sandwich shells and reinforced shells with stringers, frames or ribs. Also, analysis of sources regarding flutter and parametric vibrations in composite shells has been conducted.

Analysis of scientific sources reveals that despite the fact that certain aspects of composites' mechanics and aeroelasticity are deeply researched, there is no integral approach to solve this problem. Specifically, most of existing works are limited to regular geometric forms or linear approximations, which limitations do not reflect real operational conditions of modern structures. The least covered seems to be the topic of nonlinear vibrations in multi-layered and CNT-reinforced thin structures interacting with the gas stream or under parametric excitation.

The **second chapter** consists of descriptions of the analysis methods developed in the dissertation. The primary tool used in this work is a new mathematical model of multilayered shells' dynamics. The model is limited to the

shells with rigid interlayer connections. Static responses of the shell materials are described using linear Hooke's law. Each layer of the structure is described using its own curvilinear coordinates system. Shell layers' deformed state is described using Reddy's 3rd order theory and Amabili's nonlinear shell theory. The equations of motions are discretized using given modes technique. Basis functions for the discretization are determined using Rayleigh-Ritz method. To implement analysis of the shell's dynamic response the arc length continuation technique is used. Thereby, a complete method for analysis of the shell's dynamic response has been developed.

In the **third chapter** abovementioned method has been used to analyze nonlinear vibrations of cylindrical shells. The following problems are considered: nanocomposite cylindrical shell's flutter due to interaction with a supersonic gas flow, and parametric vibrations of a cylindrical sandwich shell with honeycomb core. In the flutter problem, a critical free stream pressure leading to dynamical instability has been determined. Such instability leads to stable self-sustained vibrations the development of which has been studied. During the investigation of parametric vibrations in a sandwich shell, frequency responses of the shell under parametric excitation have been calculated. The frequency responses contain loops of stable solutions that describe travelling waves along the circumferential coordinate of the shell.

The developed method has been used for analysis of composite conical shells' vibrations in the **fourth chapter**. The problems considered are: transient response analysis of a composite conical shell with isotropic ring under impulse excitation and flutter of a truncated conical sandwich shell interacting with supersonic gas stream. Transient response of the composite shell with the isotropic ring due to impulse excitation has been successfully simulated using linear formulation of the shell's model. Verification was conducted using finite element method.

While analyzing the flutter in the conical composite sandwich shell, the free stream pressure critical values were obtained. At critical pressure, the shell's

equilibrium loses stability and stable self-sustained vibrations occur. Shell's frequency response due to subsequent pressure rise has been analyzed. In the cantilever shell, high-amplitude almost periodic and chaotic vibrations due to the interaction with the supersonic gas stream have been detected.

The **fifth chapter** is devoted to analysis of dynamic instability of a compound conical-cylindrical shell interacting with a supersonic gas stream. To describe its motions, a specific system of basis functions that automatically satisfies the boundary conditions on the cone-cylinder transition contour has been proposed. This approach is distinctive from other methods from scientific sources and allows halving number of motion equations, thus significantly simplifying the analysis task. Critical values of the free stream static pressure have been obtained.

In the **sixth chapter** forced oscillations of doubly curved sandwich shells under periodic point load have been investigated. Analysis of the frequency responses of spherical and hyperbolic paraboloid shells has been conducted. Influence of the shell's curvature radius on the frequency response has been investigated.

Analysis of elastic properties of honeycomb cores is a topic of the **seventh chapter**. The finite element method has been used to assess effective elastic properties of various honeycomb cores. Verification through comparison with the experimental data has been conducted.

The **conclusions** contain prime results of the dissertation.

Keywords: conical shell, cylindrical shell, shallow shell, layered composite, honeycomb core, functional gradient material, flutter, parametric vibrations, forced vibrations, low velocity impact, geometric nonlinearity, high-order shear theory, nonlinear discrete model, mathematical simulation, continuation technique.

ЗМІСТ

ВСТУП 6
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ 13
1.1 Властивості та будова композитних та сендвіч-конструкцій 14
1.1.1 Будова композитних матеріалів 14
1.1.2 Композитні матеріали зі стільниковими заповнювачами 16
1.1.3 Функціонально-градієнтні матеріали 17
1.1.4 Посилені конструкції 19
1.2. Методи нелінійної динаміки для дослідження коливань композитних конструкцій 20
1.2.1 Методи аналізу нестаціонарного відгуку 21
1.2.2 Методи аналізу усталеного режиму коливань 23
1.3. Аеропружність тонкостінних конструкцій у взаємодії з надзвуковим газовим струменем 27
Висновки за розділом 1 29
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ 32
2.1 Математичні моделі нелінійної динаміки тонкостінних конструкцій 32
2.1.1 Математична модель динаміки оболонки обертання одинарної кривизни 32
2.1.2 Математична модель динаміки оболонки подвійної кривизни 41
2.2 Застосування методу заданих форм для аналізу коливань тонкостінних конструкцій 51
2.3 Метод продовження за параметром при аналізі динамічної стійкості тонкостінних конструкцій 56
Висновки за розділом 2 61
РОЗДІЛ 3 НЕЛІНІЙНІ ПАРАМЕТРИЧНІ ТА АВТОКОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК 62
3.1 Нелінійна динаміка нанокомпозитної циліндричної оболонки в

надзвуковому повітряному струмені 62
3.1.1 Рівняння руху 65
3.1.2 Аналіз власних коливань оболонки 73
3.1.3 Втрата динамічної стійкості нанокомпозитною оболонкою при взаємодії з надзвуковим повітряним струменем 76
3.1.4 Автоколивання нанокомпозитної циліндричної оболонки в надзвуковому повітряному струмі 77
3.1.5 Результати чисельного аналізу 79
3.2 Нелінійна динаміка тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем під дією параметричного навантаження 98
3.2.1 Математична модель багатошарової циліндричної тонкостінної конструкцій 101
3.2.2 Побудова рівнянь руху конструкції 107
3.2.3 Особливості аналізу динаміки багатошарових композитних конструкцій зі стільниковим заповнювачем 113
3.2.4 Втрата динамічної стійкості тришаровою циліндричною оболонкою під дією параметричного навантаження 114
3.2.5 Аналіз режимів нелінійних коливань тришарової циліндричної оболонки під дією параметричного навантаження методом продовження за параметром 117
3.2.6 Результати чисельного аналізу 118
Висновки за розділом 3 130
РОЗДІЛ 4 ДИНАМІКА КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК 133
4.1 Динаміка композитної конічної оболонки зі шпангоутом під дією імпульсного навантаження 133
4.1.1 Математична модель динаміки композитної конічної оболонки з ізотропним кільцем 135
4.1.2 Результати чисельного аналізу 152
4.2 Нелінійна динаміка тришарової конічної оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим повітряним струменем 163

4.2.1 Автоколивання тришарової конічної оболонки при взаємодії з надзвуковим повітряним струменем 173
4.2.2 Результати чисельного аналізу 182
Висновки за розділом 4 197
РОЗДІЛ 5 ВТРАТА ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ СКЛАДЕНИМИ ТРИШАРОВИМИ ОБОЛОНОКАМИ В НАДЗВУКОВОМУ ПОВІТРЯНОМУ СТРУМІ 199
5.1 Методика аналізу динамічної стійкості складеною тришаровою оболонкою внаслідок взаємодії з надзвуковим струмом 200
5.1.1 Математична модель руху оболонки 200
5.1.2 Аналіз вільних коливань оболонки 204
5.1.3 Побудова рівнянь руху 208
5.1.4 Зниження розмірності моделі 213
5.1.5 Аналіз втрати динамічної стійкості положенням рівноваги 215
5.2 Результати чисельного аналізу 216
Висновки за розділом 5 223
РОЗДІЛ 6 ВИМУШЕНА НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРИШАРОВОЇ ОБОЛОНКИ ПОДВІЙНОЇ КРИВИЗНИ ЗІ СТІЛЬНИКОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ 225
6.1 Аналіз вимушеної динаміки оболонки з урахуванням геометрично нелінійного деформування 227
6.1.1 Аналіз власних коливань оболонки 227
6.1.2 Побудова рівнянь руху 229
6.1.3 Зниження розмірності моделі та перехід до безрозмірних координат 231
6.2 Результати чисельного аналізу 233
6.2.1 Вимушені коливання сферичної оболонки 234
6.2.2 Оболонка в формі гіперболічного параболоїда 239
Висновки за розділом 6 248
РОЗДІЛ 7 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

СТІЛЬНИКОВИХ ЗАПОВНЮВАЧІВ 251
Висновки за розділом 7 258
ВИСНОВКИ 259
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 263
ДОДАТОК А 295
СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ 296
ДОДАТОК Б 309
ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ 310
ДОДАТОК В 311
АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 2 312
ДОДАТОК Г 328
АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 3 329
ДОДАТОК Ґ 354
АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 4 355

ВСТУП

Сутність науково-технічної проблеми. Сучасні матеріали, які поєднують в собі міцність та легкість, застосовуються в багатьох сферах діяльності. Розвиток способів та засобів виробництва приводить до поширення багатошарових композитних конструкцій. При експлуатації таких конструкцій можуть виникати коливання значної амплітуди, яких необхідно запобігати. Експериментальне дослідження конструкції вимагає значних фінансових затрат та не гарантує знаходження специфічних режимів коливань. Тому необхідно створити методику для аналізу коливань багатошарових композитних оболонок, яка буде враховувати можливість геометрично нелінійного деформування конструкції.

Актуальність теми. Композитні оболонки набувають великого значення в аерокосмічній, автомобільній галузях, оборонної промисловості та ракетобудуванні. Наразі архітектура тонких композитних оболонок ускладнюється, включаючи в себе функціонально градієнтні матеріали, стільникові заповнювачі з нетиповою геометрією та інші елементи. Тому дослідження динаміки тонких композитних оболонок швидко розвиваються.

Тонкостінним композитним оболонкам притаманна складна нелінійна поведінка: автоколивання, хаотичні коливання, втрата стійкості. Ці явища характеризуються значними амплітудами коливань і можуть призводити до пошкодження та руйнування конструкцій. Тому аналіз нелінійної динаміки стає обов’язковим етапом конструювання оболонкової конструкції. Створення нових методик дослідження нелінійних явищ у тонкостінних композитних конструкціях під дією різних видів навантаження дозволяє проводити аналіз, який стандартними методиками (лінійний, скінченно-елементний аналіз) не вдається виконати.

Таким чином, розробка ефективних методів аналізу нелінійних коливань тонкостінних композитних конструкцій, які враховують особливості їхнього нелінійного деформування, є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у відділі нелінійної механіки та математичного моделювання Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України. Здобувач брав участь у виконанні держбюджетних та грантових тематик, в тому числі (Додаток Б):

– «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA» SPS G6176 (грант НАТО, 2024–2026), ДР № 0124U003710;

– «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій» (НФДУ, 2020-2021, 2023), ДР № 0120U104923;

– «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням» (МОН, 2019-2020), ДР № 0119U102947;

– «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів» (НФДУ, 2024-2025), ДР № 0124U003951.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних методів для аналізу нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок з урахуванням їхнього геометрично нелінійного деформування, що дозволить виявляти особливі режими коливань внаслідок різних видів навантаження.

Для досягнення цієї мети було поставлено і розв'язано наступні задачі:

– побудувати нелінійні математичні моделі динаміки композитних багатошарових оболонок;

– розробити методи аналізу нелінійних коливань композитних оболонок на базі побудованих математичних моделей;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки нанокомпозитних циліндричних оболонок, що взаємодіють з надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних циліндричних оболонок під дією параметричного навантаження;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних конічних оболонок, що взаємодіють із надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу динамічної стійкості складених коніко-циліндричних композитних оболонок у взаємодії з надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу вимушеної нелінійної динаміки композитних оболонок подвійної кривизни;

– розробити методи розрахунку властивостей стільникових заповнювачів та їхньої гомогенізації.

Об'єкт дослідження – нелінійна динаміка тонкостінних композитних конструкцій.

Предмет дослідження – коливання композитних оболонок при геометрично нелінійному деформуванні.

Методи дослідження.

– Для дослідження біфуркацій та стійкості нелінійних коливань застосовується метод пристрілки сумісно із методом продовження;

– методи аналізу стійкості динамічних систем (розрахунки мультиплікаторів, визначників Хілла, характеристичних експонент);

– для аналізу власних коливань використовується метод Релея-Рітца;

– метод Рунге-Кутта для чисельного інтегрування звичайних диференційних рівнянь застосовано для аналізу динаміки лінійних систем та для верифікації результатів;

– метод скінченних елементів застосовано для верифікації результатів та для аналізу статичного відгуку стільникових заповнювачів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

– розвинуто моделі геометрично нелінійних коливань композитних

багатошарових оболонок.

– вдосконалено метод продовження за параметром довжини дуги частотного відгуку для аналізу параметричних та вимушених нелінійних коливань багатошарових оболонок;

– запропоновано нову методику аналізу коливань композитних багатошарових оболонок під дією параметричних, вимушених навантажень та надзвукового газового струменя з урахуванням геометрично нелінійного деформування;

– виявлено нові властивості нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки під дією періодичного стискаючого навантаження. Уперше виявлено в таких оболонках біфуркаційну поведінку, що характеризується переходом від стоячої до бігучої хвилі та навпаки;

– виявлено нові властивості автоколивань тришарової усіченої конічної оболонки в надзвуковому повітряному струмені. Виявлено, що в оболонці можуть виникати майже періодичні та хаотичні коливання, які мають набагато більшу амплітуду за періодичні режими;

– вперше запропоновано нову математичну модель для аналізу коливань складених тришарових коніко-циліндричних оболонок, яка дозволяє звести цю задачу до системи звичайних диференційних рівнянь;

– виявлено нові властивості нелінійних вимушених коливань тришарової оболонки подвійної кривизни. Біфуркаційна поведінка оболонки вирізняється складністю;

– уперше отримано гомогенізовані властивості різноманітних стільникових заповнювачів шляхом скінченно-елементої гомогенізації.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені математичні методи, а також програмне забезпечення, яке їх реалізує, дозволили провести розрахунки нелінійних коливань композитних багатошарових оболонок, які можуть представляти обтічники, адаптери, корпуси аерокосмічної та іншої техніки. Було виявлено нові явища та режими коливань, які можуть виникати в таких конструктивних елементах.

Запропонована методика гомогенізації стільникових заповнювачів може використовуватися для вибору оптимального типу та геометричних властивостей стільників для задоволення конкретних потреб при проектуванні конструкцій.

Наукові результати роботи використано при виконанні держбюджетних тем, а також при виконанні науково-дослідних робіт (Додаток Б): «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням», «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій», «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA», «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів».

Особистий внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: побудова математичних моделей геометрично нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсувних деформацій високого порядку; адаптація та застосування методу продовження за параметром для побудови частотних відгуків композитних оболонок; аналіз втрати динамічної стійкості та автоколивань циліндричної нанокомпозитної оболонки у взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості та параметричних коливань циліндричної сендвіч-оболонки під дією періодичного стискаючого навантаження; аналіз нестаціонарного відгуку композитної конічної оболонки з ізотропним шпангоутом під дією низькошвидкісного удару; аналіз втрати стійкості та автоколивань конічної сендвіч-оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною сендвіч-оболонкою; аналіз нелінійних вимушених коливань

сендвіч-оболонок подвійної кривизни під впливом зосередженої періодичної сили; скінченно-елементний аналіз пружних властивостей стільникових заповнювачів; програмні реалізації вищезазначених методів і моделей і задач; скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

Апробація результатів роботи. Загальні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 14 українських та міжнародних наукових конференціях: 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes (Nicosia, Cyprus. 17-19 April, 2019); Науково-практична конференція «Сучасні розрахунково-експериментальні методи визначення характеристик ракетно-космічної техніки» (Дніпро, 10–12 грудня 2019); Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference (Roubaix, France, October 8–9, 2019); Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров‘я, 2020» (м. Харків, 13–15 травня 2020); 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 5–10 October 2020); ІІ міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 5–8 жовтня 2020 року); 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 13–17 September 2021); ENOC 2020+2 (Lyon, France, July 17-22, 2022); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2022 (Kharkiv, 9–11 June 2022); 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 03–07 October 2022); IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), (Kharkiv, 2–6 October 2023); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2023(Kharkiv, 8–10 June 2023); STUE 2024 International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering (Kharkiv, 12–14 June 2024); Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024) (Kharkiv, 12–14 December 2024).

Публікації. Основні положення та наукові результати дисертаційної роботи опубліковані в 54 наукових працях (Додаток А), з них:

– 46 статей, з яких 17 включено до наукометричної бази Scopus та/або

Web of Science Core Collection, з яких 14 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 13 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квартилів, 4 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квартилів); 20 статей – в збірниках наукових праць, що входять до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 9 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 2 статті опубліковано в різних зарубіжних видавництвах);

– 8 публікацій – тези доповідей на конференціях (з яких 4 роботи видано в зарубіжних видавництвах).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Тонкостінні композитні конструкції широко використовуються в різноманітних сферах техніки внаслідок високого співвідношення міцності до ваги, гнучкості виробничого процесу, високої втомної міцності. Особливий попит на легкі композитні конструкції проявляють аерокосмічна галузь, де використання композитів підвищує дальність польоту та знижує витрати пального, автомобільна галузь, в якій застосування композитних деталей підвищує енергоефективність та знижує викиди, та галузь відновлюваної енергетики, в якій композити незамінні при виготовленні лопаток вітрових турбін. Унікальною особливістю композитів є можливість задовольняння специфічних вимог до конструкції шляхом раціонального вибору напрямку укладки шарів або напрямку армуючих волокон. Це дозволяє оптимізувати конструкцію, зберігаючи її малу масу [1].

Сфери застосування композитних конструкцій передбачають різноманітні та, зокрема, екстремальні впливи: високі температури, високий тиск, взаємодію з рідиною або газом тощо. Крім того, оскільки такі конструкції часто є тонкостінними, вони здійснюють значні коливання під впливом зовнішніх сил, і їхня поведінка є значно складнішою ніж у ізотропних конструкцій [1]. Композитні матеріали також мають особливості руйнування: їм притаманні такі явища, як виникнення тріщин в матриці, розшарування, руйнування волокон [2–4].

В даному розділі розглядаються основні властивості конструкцій, яким присвячено роботу. Крім того, розглянуто сучасні методи дослідження коливань композитних оболонок.

1.1 Властивості та будова композитних та сендвіч-конструкцій

1.1.1 Будова композитних матеріалів

Композитні матеріали складаються з матриці, яка з’єднує та забезпечує безперервність матеріалу, та матеріалу, що її армує. Завдяки матриці навантаження розподіляються по матеріалу; крім того, матриця захищає посилюючий матеріал від факторів зовнішнього середовища, таких, як вологість або хімічні агенти [5]. Основними матеріалами для матриці композиту є метали, полімерні та керамічні матриці [1].

Композити з металевою матрицею провадять високу температурну та електричну провідність в порівнянні з полімерними композитами та суцільними металами [5]. Особливо розповсюдженими є композити з алюмінієвою матрицею завдяки їхній збалансованості між густиною, міцністю, провідністю та ціною [6–8]. Загалом, композити з металевою матрицею є міцнішими та жорсткішими за полімерні. У порівнянні з керамічними, металеві композити мають більшу міцність та тріщиностійкість.

Композити з полімерною матрицею широко застосовуються завдяки їхній низькій густині, опору корозії, дешевизні та простоті використання. Однак ізолюючі властивості більшості полімерних матриць обмежують їхнє використання в таких сферах, як медичні пристрої та гнучка електроніка [9, 10]. Сучасні дослідження зосереджуються на включенні в полімерну матрицю провідних включень, таких, як вуглецеві нанотрубки, графен або металеві нанопровідники чи наночастки щоб покращити провідні властивості полімерних композитів [11–13].

Композити з керамічною матрицею поєднують здатність кераміки витримувати високі температури, її хімічну стійкість та жорсткість з підвищеною міцністю, яку провадять посилюючі матеріали [14, 15].

Таким чином, кожен тип матриці має свій набір переваг та недоліків, які впливають на властивості конструкції.

Армуючий матеріал визначає анізотропію, жорсткість, механізм розповсюдження пошкоджень композиту, що має принциповий вплив на коливання та нелінійну динаміку конструкції. Основні типи армування включають в себе безперервні волокна, уривчасті волокна та армування частинками [16].

Композити, які армовано безперервними волокнами, мають найвищу питому жорсткість та міцність, якою можна керувати за рахунок вибору напрямку волокон та способу посилення. Тому ці композити застосовуються в вимогливих несучих конструкціях [17, 18].

Композити, армовані уривчастими волокнами, в тому числі різаними волокнами, простіше та дешевше виготовляти, однак їхні властивості є менш контрольованими. Тому вони використовуються в масових промислових виробах [19].

Композити, армовані частинками, такими, як керамічні частинки або графенові нанопластинки, все частіше застосовуються для створення композиту з різними функціональними властивостями, такими, як спротив зносу, електрична або теплова провідність [20–22]. Таке армування менше впливає на механічний відгук конструкції, ніж посилення волокнами, і часто застосовується для систем, що не несуть механічних навантажень.

Основними способами забезпечення ефективності композитних матеріалів є геометрична оптимізація та керування розподіленням властивостей матеріалу. Геометрична оптимізація включає в себе створення гофрованих конструкцій, конструкцій зі стільниковими заповнювачами, пористими шарами та решітками. Керування розподіленням властивостей матеріалу передбачає створення функціонально-градієнтних матеріалів, в яких властивості змінюються поступово [1].

З-поміж композитів, отриманих геометричною оптимізацією, в даній роботі розглядаються лише матеріали зі стільниковими заповнювачами, тому інші способи створення ефективних конструкцій не розглядаються.

1.1.2 Композитні матеріали зі стільниковими заповнювачами

Стільникові заповнювачі являють собою двовимірні періодичні решітки, які, мають високі питому жорсткість, міцність та здатність до поглинання енергії [23–26]. Раціональний вибір форми комірки заповнювача дозволяє досягти таких незвичайних властивостей, як від'ємний коефіцієнт Пуассона [27, 28], від'ємна жорсткість [29], зв'язок між стисненням та крученням [30] та від'ємний коефіцієнт теплового розширення [31]. Висока здатність стільникових заповнювачів до гасіння коливань та поглинання ударів робить їх розповсюдженим елементом аерокосмічних, автомобільних і будівельних конструкцій [32–45].

Дослідження механічного відгуку стільникового заповнювача зазвичай зосереджується на аналізі відгуку комірки. В залежності від способу деформації, стільники класифікуються як традиційні, ауксетичні та комбіновані [1].

Модель традиційного гексагонального стільникового заповнювача є добре відомою і розробленою. Основою моделювання його механічного відгуку є модель Гібсона-Ешбі [36, 37]. Подальші дослідження вдосконалили цю модель [38].

На відміну від традиційної конструкції стільникових комірок, ауксетичні заповнювачі мають нульовий або від'ємний коефіцієнт Пуассона, завдяки чому мають високі характеристики з поглинання удару та жорсткості на зсув. Цей ефект досягається завдяки спеціальній геометрії з'єднань, за якою ауксетичні стільники класифікуються як увігнуті та хіральні. Моделювання увігнутих стільників за моделями вигину стінок [36] було некоректним при великих кутах. Це обмеження було обійдене у роботі [39] завдяки врахуванню деформацій у вузлі та розтягнення стінок. В подальшому ця модель була розвинута в [27, 28, 40], де виведено модифіковану функцію Гібсона та враховано геометричні нелінійності.

Стільники в формі подвійної стріли вперше описані в [41]. У роботі [42] проведено вичерпний аналіз їхнього площинного відгуку. Стільники в

формі зірки, які розглянуто в [43, 44] демонструють менші ауксетичні властивості.

У роботі [45] запропоновано метод скінченно-елементної гомогенізації гексагонального стільникового заповнювача. На його основі в дисертаційній роботі запропоновано методику визначення ефективних пружних характеристик регулярних (не хіральних) заповнювачів.

Хіральні стільники не розглядаються в дисертаційній роботі.

Таким чином, математичні моделі механічного відгуку стільникових заповнювачів є добре розробленими. Методиці аналізу, утім, бракує універсальності та масштабованості: аналіз механічного відгуку для кожного виду комірки має свої особливості.

1.1.3 Функціонально-градієнтні матеріали

Окрім геометричної оптимізації, для створення полегшених конструкцій застосовується керування властивостями матеріалу, зокрема, із застосуванням функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ). Ці матеріали характеризуються гладкою зміною властивостей за рахунок змінної мікроструктури. За рахунок виключення різких переходів між шарами, якими характеризуються багатошарові конструкції, в ФГМ відсутня концентрація напружень та зменшені ризики розшарування під впливом динамічних навантажень [46–48].

Внаслідок змінної мікроструктури, ФГМ проявляють нелінійну динамічну поведінку. Для її опису розроблено низку методів моделювання еквівалентних властивостей ФГМ.

Згідно з класичним правилом змішування [49–53], механічні властивості ФГМ оцінюються шляхом простого осереднення, виходячи з припущення рівності деформацій. У деяких роботах [52] пропонується розвиток цієї моделі для підвищення точності. Дуже часто для моделювання застосовується степеневий закон розподілу властивостей за товщиною ФГМ [54–61].

Інші способи опису ФГМ включають в себе сігмоїдну функцію, яка забезпечує мінімізацію напружень на поверхнях матеріалу [62–69], а також закон експоненти, який підходить для моделювання процесів дифузії та інфільтрації [70–72]. Модель Морі-Танака забезпечує високу фізичну відповідність, розглядаючи матеріал посилення як включення в матрицю та враховуючи напруження між матрицею та включенням. Часто ця модель застосовується сумісно з одним з законів розподілу властивостей [73–78].

В даній роботі розглядаються функціонально градієнтні нанокомпозитні матеріали. Для аналізу їхньої динаміки значну роль відіграють обчислювальні підходи та симуляції. Ефективні пружні характеристики вуглецевих нанотрубок отримано в [79]. Ці властивості використано для визначення ефективних пружних характеристик нанокомпозитів методом Морі-Танака. У [80] описано визначення пружних властивостей нанокомпозитів за допомогою методу репрезентативного об’ємного елементу. Метод побудови конститутивних моделей полімерних композитів, армованих вуглецевими нанотрубками, розглянуто в [81]. У роботі [82] описано різноманітні моделі механічного відгуку нанокомпозитів.

Низкою дослідників було проведено експериментальний аналіз механічних характеристик нанокомпозитів. Так, тести на розтягнення лопаткоподібних зразків описано в [83]. Виявлено, що модуль Юнга та межа плинності матеріалу зросли в 2 та 4 рази при армуванні матриці 1% і 4% вуглецевих нанотрубок відповідно. У [84] наведено результати механічних експериментів та подальшого мікроскопічного аналізу нанокомпозитів. Виявлено, що армування вуглецевими нанотрубками жорстких матриць призводить до зниження міцності композиту та слабкої взаємодії між нанотрубками та матрицею. У той же час, армування м’яких матриць дозволяє підвищити їхню жорсткість без суттєвого зниження міцності. У [85] наведено експериментальний аналіз міцності епоксидної смоли, армованої вуглецевими нановолокнами. Досліджувались зразки зі змістом армуючого матеріалу до 10%. Не було виявлено значного підвищення жорсткості

композиту, тоді як його міцність значно зросла. У роботі [86] стверджується, що модуль Юнга нанокомпозиту, армованого направленими нанотрубками, може бути вп’ятеро вищим за нанокомпозит з довільною орієнтацією нанотрубок. Автори порівнюють результати експериментального дослідження з розрахунками за допомогою модифікованого правила змішування та роблять висновок, що результати є дуже близькими. Роботу [87] присвячено дослідженням епоксидних нанокомпозитів, армованих багатошаровими вуглецевими нанотрубками. У роботі виявлено, що навіть невелика кількість включень значно підвищує міцність та жорсткість композиту, а також запропоновано нову форму правила змішування для визначення механічних характеристик нанокомпозиту.

Таким чином, для визначення параметрів нанокомпозиту широко застосовується модифіковане правило змішування, яке демонструє високу точність у порівнянні з експериментальними дослідженнями та невибагливість стосовно емпіричних даних.

1.1.4 Посилені конструкції

В силу важливості оболонок з посиленнями, багато зроблено зусиль для дослідження таких конструкцій. Аналітичний аналіз втрати статичної стійкості циліндричної оболонки, посиленої шпангоутами, під дією зовнішнього тиску обговорюється в [88]. Для аналізу критичних навантажень отримані дві прості формули, результати розрахунку за цими формулами порівнюються з даними скінченно-елементного моделювання. У статті [89] розглядається деформування шпангоутів без урахування їх крутильної жорсткості. Будується дискретна модель шпангоута з використанням дельта-функцій. Аналіз вільних коливань шарнірно-опертої циліндричної оболонки, посиленої шпангоутами, представлено в [90]. Для аналізу коливань застосовується метод Релея-Рітца. Для запису потенційної енергії деформування використовується теорія Сандерса. У статті [91] розроблено теоретичний метод для дослідження впливу шпангоутів на вібраційні характеристики і на перехідні процеси композитної циліндричної оболонки

під дією ударних навантажень. Для розрахунку власних частот застосовується метод Релея-Рітца. Згинальний відгук циліндричної оболонки із шпангоутами досліджується в [92], [93]. Власні частоти оребреної циліндричної оболонки досліджуються в [94]. Стрингери і шпангоути утворюють ортогональну сітку. Вільні коливання складової конструкції, що складається з циліндричної, конічної і сферичної оболонок з шпангоутами, досліджуються за допомогою модифікованого варіаційного методу в [95]. Для формування математичної моделі використовується теорія Рейснера-Нагді. У статті [96] для опису деформування циліндричної оболонки використовується теорія Редді третього порядку, а для опису деформування стрингерів і шпангоутів використовується модель Ейлера-Бернуллі. Для аналізу втрати статичної стійкості циліндричної оболонки з шпангоутами під дією тиску в статті [97] застосовується метод Рітца. Шпангоути мають довільний поперечний переріз і довільно розташовані в поздовжньому напрямку циліндричної оболонки. В роботі [98] застосовується деяка автоматизація методу Рітца. Напів-аналітичний метод розвивається в [99] для дослідження вафельних циліндричних оболонок.

Таким чином, моделі оболонок зі стрингерами, шпангоутами та оребренням є добре розробленими.

1.2. Методи нелінійної динаміки для дослідження коливань композитних конструкцій

Дослідження нелінійної динаміки та коливань композитних конструкцій є сферою досліджень, що швидко розвивається. Анізотропія та неоднорідність композитних конструкцій призводять до складних динамічних процесів (наприклад, зв’язок між згинанням та скручуванням чи зв’язок розтягу і зсуву). Внаслідок цих зв’язків відбувається перехід механічної енергії між модами коливань, що проявляється в щільних внутрішніх резонансах та складних модальних взаємодіях у конструкції. Лінійні моделі не підходять для опису таких процесів [1].

Розглянемо, які методи нелінійної динаміки застосовуються при дослідженні коливань композитних конструкцій. Різноманіття задач, що виникають, розділимо на дві групи: аналіз нестаціонарного відгуку внаслідок ударного навантаження та аналіз усталеного режиму коливань внаслідок періодичного навантаження або втрати стійкості.

1.2.1 Методи аналізу нестаціонарного відгуку

Композитні конструкції, особливо зі стільниковими, пористими чи сітчастими заповнювачами, характеризуються надзвичайними можливостями з поглинання енергії високошвидкісного удару, що робить їх незамінними при розв'язанні задач захисту від ударів [1]. В умовах високошвидкісного удару, його енергія швидко розсіюється за рахунок локалізованих явищ, таких, як складання стінок стільника, зминання заповнювача або пробиття конструкції [100–102]. Однак зазвичай при експлуатації на тонкостінну конструкцію діють низькошвидкісні ударні навантаження, які викликають вигинання стінки та її пошкодження [1].

Незважаючи на те, що проблеми ударного контакту є значно нелінійними, вплив низькошвидкісного удару часто моделюється із застосуванням інтегралу Дюамеля до пружинно-масової моделі [103, 104–109]. Цей підхід є ефективним для аналізу систем, близьких до лінійних, але обмежений в аналізі складних нелінійних відгуків та об'єктів. Дослідження, засновані на цій методології, демонструють, що застосування в багатошаровій конструкції гофрованих, пористих та стільникових ауксетичних заповнювачів значно підвищує спротив удару та поглинання його енергії порівняно з загальноприйнятними конструкціями. Армування матеріалу додатково підвищує жорсткість конструкції, знижуючи її переміщення, тривалість контакту та вібраційний відгук [1].

Методи прямого інтегрування дозволяють проводити аналіз динаміки системи під дією низькошвидкісного ударного навантаження з високою точністю та гнучкістю, але потребують значних обчислювальних витрат [1]. Дослідження, в яких застосовано цей метод, свідчать, що використання

ауксетичних стільникових заповнювачів [110, 111] та нанокомпозитних матеріалів [112, 113] значно підвищують спротив конструкції ударним впливам.

Метод Ньюмарка широко застосовується для аналізу впливу низькошвидкісного удару на композитні конструкції завдяки його стійкості та можливості аналізу як лінійного, так і нелінійного відгуку [114–119]. Автори, які застосовують цей метод, підкреслюють, що відгук конструкції суттєво залежить від форми імпульсного навантаження, причому прямокутний імпульс призводить до найбільшого динамічного відгуку [114].

Для аналізу складної поведінки конструкцій та матеріалів метод скінченних елементів є найдосконалішим засобом, який, однак, потребує значних обчислювальних потужностей [120–126].

Новим напрямком для аналізу динаміки композитів є застосування штучного інтелекту. Розповсюдженими підходами є застосування сурогатних моделей для швидкого розрахунку відгуку конструкції на ударне навантаження [127–131], застосування нейронних мереж для оцінки рівня пошкоджень [132] та фізично-обґрунтовані нейронні мережі, які враховують фізичні закони для ефективної симуляції динаміки [133].

У [134] розглядається сендвіч-оболонка подвійної кривизни з ауксетичним стільниковим заповнювачем та алюмінієвими обшивками під дією вибухового навантаження. Нелінійну динаміку оболонки описано за допомогою теорій Редді 3 порядку та фон Кармана, для її аналізу застосовано чисельне інтегрування рівнянь руху. У [135] розглянуто нелінійну динаміку циліндричної сендвіч-панелі з ауксетичним стільниковим заповнювачем та нанокомпозитними обшивками на фундаменті Пастернака під дією вибухового навантаження. Застосовується чисельне інтегрування рівнянь руху для аналізу нелінійної динаміки. Нелінійну динаміку посиленої шпангоутами циліндричної сендвіч-оболонки з ауксетичним стільниковим заповнювачем під дією вибухового навантаження розглянуто в [136]. Для опису динаміки оболонки застосовано теорію Редді першого порядку у

поєднанні з теорією фон Кармана. Дослідження проводиться інтегруванням дискретизованих рівнянь руху, розглянуто вплив параметрів конструкції та навантаження на поведінку оболонки. У статті [137] розглядається нелінійний динамічний відгук циліндричної сендвіч-панелі з ауксетичним стільниковим заповнювачем та алюмінієвими обшивками на вибухове навантаження. Динаміка системи описана теорією Редді першого порядку разом з теорією фон Кармана для опису геометричної нелінійності. Отримано дискретизовано рівняння руху методом Гальоркіна. Динамічний відгук системи досліджено їхнім прямим чисельним інтегруванням. Досліджено вплив параметрів конструкції, навантаження та моделі пружного фундаменту на динамічний відгук.

Таким чином, для аналізу нестаціонарного відгуку оболонкових конструкцій використовується широкий перелік методів, серед яких розповсюдженим є метод прямого інтегрування.

1.2.2 Методи аналізу усталеного режиму коливань

Для аналізу усталеного режиму нелінійних коливань композитних конструкцій застосовуються методи, які можна розділити на аналітичні та чисельні.

Аналітичні методи, а саме метод багатьох масштабів [28,138–146], метод гармонійного балансу [147–152], метод збурень [153–159] є ефективними для аналізу простих систем. Дослідники розглянули нелінійні вільні коливання, первинний та вторинний резонанси, внутрішні резонанси та супергармонійні резонанси в композитних конструкціях. Результати демонструють керованість нелінійними відгуками, можливість вибору між жорстким та м’яким відгуком за рахунок зміни параметрів конструкції, таких, як товщина заповнювача, розподіл пор та градієнтні властивості матеріалу. Наприклад, показано, що товщина стільникового заповнювача [143, 160–162] та співвідношення товщини обшивок і заповнювача [138] суттєво впливають на резонансні характеристики та амплітуди коливань конструкції.

При необхідності врахування складних збуджень або великих нелінійностей аналітичні методи втрачають адекватність та застосовуються чисельні підходи. Вони включають в себе скінченно-елементний метод [38,163–165], пряме інтегрування [166–173], метод квадратур та метод продовження за довжиною дуги [61,174–179].

Методи квадратур [180–185], наприклад, метод диференційних квадратур, провадять високу точність при відносно невеликій кількості точок дискретизації, але неефективні для пошуку нестійких або хаотичних режимів. Метод продовження за довжиною дуги [186] є ефективним для аналізу стійких та нестійких гілок розв'язків, біфуркацій та внутрішніх резонансів у системах з великою кількістю ступенів свободи. Так, застосування цих методів дозволило виявити хаотичні коливання, обмін енергією між модами коливань та коливання великої амплітуди внаслідок нелінійного внутрішнього резонансу в пористих та функціонально градієнтних композитних оболонках [175].

У роботі [187] розглянуто нелінійну динаміку сендвіч-оболонки подвійної кривизни з п'єзоелектричним шаром. Для опису динаміки конструкції застосовано геометрично нелінійну теорію фон Кармана та зсувну теорію високого порядку. У роботі [188] розглянуто нелінійні коливання сендвіч-панелі з магнітореологічним шаром та стільниковим заповнювачем. Для опису оболонки застосовано теорію Редді 3 порядку. Досліджено вплив різних параметрів конструкції та середовища. У роботі [189] розглядаються нелінійні вимушені коливання циліндричної сендвіч-оболонки з пористим заповнювачем різних типів та нанокомпозитними обшивками. Для побудови рівнянь руху конструкцію зведено до еквівалентної одношарової оболонки. Роботу [190] присвячено аналізу вимушеної нелінійної динаміки оболонки подвійної кривизни під дією поперечної сили. Для аналізу застосовано метод гомотопії. Розглянуто вплив різних параметрів оболонки на її динаміку. Стаття [191] описує застосування нелінійного методу скінченних елементів для моделювання коливань великої

амплітуди, які виникають в сендвіч-пластинах з ауксетичною решіткою в ролі заповнювача. Описано вплив параметрів решітки на динаміку конструкції. У [192] запропоновано метод гомогенізації, який дозволяє звести динаміку сендвіч-панелі до єдиного шару з нелінійними пружними характеристиками. Вимушені нелінійні коливання прямокутної сендвіч-панелі, яку защемлено за контуром, проаналізовано за допомогою методу гомотопії у [193]. Застосовано методику гомогенізації конструкції, модель динаміки конструкції отримано на базі класичної теорії пластин. У статті [194] метод гомотопії застосовано для аналізу головного нелінійного резонансу прямокутної сендвіч-панелі, яка є шарнірно опертою за контуром. Рівняння динаміки конструкції виведено із застосуванням теорії Редді 3 порядку та принципу Гамільтона. Роботу [195] присвячено аналізу вільних коливань великої амплітуди багатошарових композитних косих пластин. Для аналізу застосовано метод диференційних квадратур, рівняння динаміки пластини отримано із застосуванням теорії фон Кармана. Досліджено вплив різних параметрів методу на його збіжність та точність. У [196] розглянуто нелінійну динаміку тонкої 5-шарової пластини з ауксетичним шарами під дією латеральних сил. Динаміка оболонки описується за теорією фон Кармана та класичною теорією зсуву. Для пошуку приблизного аналітичного розв’язку застосовано метод багатьох масштабів. Роботу [197] присвячено біфуркаціям та хаотичній динаміці прямокутної сендвіч-пластини під дією одночасно латерального та поперечного навантаження. Динаміку пластини описано на базі теорії Редді 3 порядку та теорії фон Кармана. Методом Гальоркіна отримано дискретизовано рівняння руху, які досліджуються методом Мельникова. Виявлено хаотичні режими коливань конструкції.

Є обмежена кількість досліджень, які присвячені параметричним коливанням композитних оболонок. У роботі [198] розглянуто нелінійний параметричний резонанс багатошарової композитної циліндричної оболонки, що обертається, під дією осьового навантаження та гідротермального середовища. Нелінійні рівняння руху оболонки отримано з нелінійної теорії

деформування Лява та принципу Гамільтона. Усталений режим руху оболонки досліджується методом багатьох масштабів. У роботі [199] досліджено сумісні згинальні та обертальні коливання конічної сендвіч-оболонки під дією параметричного збудження, що повільно змінюється. Отримано рівняння руху системи у вигляді рівнянь Лагранжа. Досліджено положення рівноваги системи та втрату ним рівноваги, яка супроводжується втратою симетрії. У статті [200] розглянуто нелінійні параметричні коливання багатошарової пологої оболонки. Для опису динаміки конструкції використано теорію зсуву першого порядку та теорію фон Кармана. Для дискретизації рівнянь руху використовується метод Гальоркіна. Дискретизована модель має вигляд системи з двох звичайних диференційних рівнянь другого порядку.

У дисертаційній роботі розглядається динаміка складеної коніко-циліндричної оболонки. Коливання складених оболонок розглядаються в обмеженій кількості робіт. Так, у роботі [201] розглянуто композитну складену коніко-циліндричну оболонку з демпфуючим покриттям. Для опису динаміки складеної оболонки застосовано віртуальні пружини, що з’єднують конічну та циліндричну частини оболонки. Динаміку оболонки описано теорією зсуву першого порядку. У роботі описано експериментальні результати з дослідження коливань оболонки.

У статті [202] розглянуто інший підхід до опису складеної конструкції. Авторами розглянуто вільні коливання композитної коніко-циліндричної оболонки з підсиленнями у вигляді сітки. Переміщення конічної та циліндричної частин розглядаються окремо, з додатковими умовами безперервності на лінії з’єднання. Динаміка оболонки описується за теорією Доннела. Авторами знайдено власні форми та частоти коливань та проведено порівняння зі скінченно-елементним аналізом. Аналогічним чином діють автори статті [203], аналізуючи вільні коливання попередньо навантаженої складеної коніко-конічної сендвіч-оболонки. Рух кожної з конічних частин дискретизується окремо, з урахуванням рівнянь безперервності переміщень

на лінії з’єднання. Сендвіч-оболонка замінюється гомогенізованою оболонкою з ефективними пружними властивостями. Авторами проведено аналіз впливу типу матеріалу на вільні коливання оболонки. Таким самим принципом керуються автори роботи [204], досліджуючи вільні коливання складених коніко-конічних сендвіч-оболонок з пористим заповнювачем. У статті [205] розглянуто вільні коливання функціонально градієнтної коніко-сферичної оболонки. Рівняння руху різних компонентів оболонки будуються окремо і розв’язуються з урахуванням силових та кінематичних умов безперервності. Авторами проведено дослідження впливу типу закріплення та функціонально градієнтного матеріалу на власну динаміку конструкції.

Таким чином, аналіз усталеної динаміки багатошарових композитних оболонок часто відбувається на гомогенізованих моделях оболонки з осередненими характеристиками. Переважно застосовуються оболонкові теорії низького порядку. При дослідженні складених оболонок використовується методика роздільного опису руху компонентів з подальшим об’єднанням за рахунок додаткових граничних умов.

1.3. Аеропружність тонкостінних конструкцій у взаємодії з надзвуковим газовим струменем

Практично важливим випадком, який розглядається в роботі, є коливання композитної оболонки внаслідок її взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Багато робіт присвячено дослідженню цього явища. Так, у статті [206] розглянуто аероеластичність нанокомпозитної конічної панелі в надзвуковому газовому струмені. Для опису впливу струменя використано поршневу теорію. Нелінійна динаміка панелі описується відповідно до теорії Новожилова. Для розв’язання рівнянь руху застосовано метод диференційних квадратур. Досліджено вплив типу розподілу нанотрубок в композиті на критичний тиск. У роботі [207] цей підхід застосовано для дослідження флатера конічної нанокомпозитної оболонки під дією гідростатичного тиску та надзвукового струменя. Виявлено, що

аеропружність оболонки сильно залежить від геометричних параметрів оболонки та кута атаки.

У статті [208] запропоновано метод аналізу флатера багатошарової циліндричної оболонки в надзвуковому газовому струмені з урахуванням температурної втрати стійкості положенням рівноваги. Вплив струменя описується поршневою теорією. Для опису динаміки оболонки застосовано теорію Доннела. Розглянуто оболонку з пружними граничними умовами, які моделюються розподіленими пружинами. Досліджено вплив параметрів конструкції на її поведінку.

Робота [209] розглядає динамічний відгук циліндричної багатошарової оболонки на комбіноване навантаження з радіального гармонійного збудження, стискаючого навантаження та взаємодії з надзвуковим газовим струменем в умовах внутрішнього резонансу 1:2. Вплив струменя моделюється поршневою теорією першого порядку. Рівняння, що описують динаміку оболонки, отримано на базі теорії Доннела з принципу Гамільтона. Дискретизація рівнянь у часткових похідних здійснюється методом Гальоркіна. Для дослідження руху системи використовується метод багатьох масштабів, який дозволяє звести рух системи до системи чотирьох звичайних диференційних рівнянь. Авторами знайдено граничний цикл коливань оболонки, досліджено вплив на усталений режим геометричних параметрів оболонки.

У роботі [210] проведено аналіз аеропружності циліндричної армованої графеновими нанопластинками оболонки, що обертається. Оболонка взаємодіє з надзвуковим газовим струменем, який моделюється поршневою теорією першого порядку. Досліджено вплив типу армування на аеропружність конструкції.

Статтю [211] присвячено дослідженню втрати стійкості положенням рівноваги тонкої циліндричної оболонки зі змінним модулем пружності в поздовжньому напрямку внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Для опису впливу струменя застосовано лінеаризовану поршневу

теорію. Побудовано лінійну модель динаміки оболонки, на основі якої визначено умови втрати стійкості положенням рівноваги та виникнення флатера. Досліджено вплив способу армування оболонки викривленими волокнами для максимізації тиску вільного струму, що викликає флатер.

Робота [212] описує флатер конічної сендвіч-оболонки з магнітнореологічним заповнювачем у надзвуковому газовому струмені. Для опису динаміки оболонки застосовано теорію зсуву першого порядку, а газовий струмінь описується поршневою теорією. Для аналізу коливань оболонки застосовано метод диференційних квадратур. Досліджено вплив параметрів оболонки та магнітного поля на аеропружність конструкції.

Таким чином, при дослідженні флатеру композитних оболонок у взаємодії з надзвуковим газовим струменем основним способом опису впливу струменя є поршнева теорія, зазвичай, лінеаризована. Розгляд флатеру часто обмежується пошуком меж стійкості положення рівноваги. Усталений режим руху оболонки досліджується на дискретизованих моделях малої розмірності.

Висновки за розділом 1

В даному розділі зроблено огляд літератури, присвячений аналізу коливань багатошарових композитних оболонок. Розглянуто сендвіч-оболонки зі стільниковими заповнювачами та оболонки з армуванням вуглецевими нанотрубками.

Для опису динаміки композитних багатошарових оболонок більшість авторів застосовують гомогенізовану модель, яка характеризується осередненими пружними властивостями. Пошарова модель динаміки оболонки використовується вкрай рідко та лише з теоріями зсуву низького порядку. Цей підхід не дозволяє описувати нелінійні коливання сендвіч-оболонок з м’якими стільниковими заповнювачами, які є складовою ефективних полегшених конструкцій.

Слабко вивченими є задачі аналізу коливань складених багатошарових конструкцій. Методи опису їхньої динаміки зводяться до окремого опису коливань кожної складової та подальшому врахуванні додаткових граничних умов, що пов’язані з безперервністю оболонки.

Аналіз флатеру багатошарових композитних оболонок внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струмом здебільшого обмежений пошуком умов втрати стійкості положенням рівноваги оболонки. Режими усталених нелінійних коливань після цього є мало дослідженими.

Таким чином, головними завданнями дослідження є наступні:

– побудувати нелінійні математичні моделі динаміки композитних багатошарових оболонок;

– розробити методи аналізу нелінійних коливань композитних оболонок на базі побудованих математичних моделей;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки нанокомпозитних циліндричних оболонок, що взаємодіють з надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних циліндричних оболонок під дією параметричного навантаження;

– застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних конічних оболонок, що взаємодіють із надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу динамічної стійкості складених коніко-циліндричних композитних оболонок у взаємодії з надзвуковим газовим струменем;

– застосувати розроблені методи для аналізу вимушеної нелінійної динаміки композитних оболонок подвійної кривизни;

– розробити методи розрахунку властивостей стільникових заповнювачів та їхньої гомогенізації.

Основною метою роботи є розробка методики дослідження нелінійних

коливань багатошарових композитних оболонок з урахуванням їхнього геометрично нелінійного деформування, яка може бути застосована для дослідження динамічного відгуку оболонки на різні види збудження.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розділ присвячено розробці методичного забезпечення для аналізу нелінійних коливань багатошарових тонкостінних конструкцій. У ньому розглядаються моделі нелінійної динаміки багатошарових оболонок одинарної та подвійної кривизни, методи їхньої дискретизації та аналізу нелінійного частотного відгуку. Розглянуті моделі розвивають підхід для аналізу динаміки пластин, який описано в [213]. Сумісне застосування цих моделей з методом заданих форм для дискретизації рівнянь руху та методом продовження за параметром для аналізу біфуркаційної поведінки тонкостінних багатошарових конструкцій є новою методикою.

2.1 Математичні моделі нелінійної динаміки тонкостінних конструкцій

Основна задача побудови математичної моделі полягає в формуванні виразів механічних енергій у переміщеннях. Розглядаються два типи оболонок обертання: оболонки одинарної та подвійної кривизни. Для них отримано відповідні динамічні моделі.

2.1.1 Математична модель динаміки оболонки обертання одинарної кривизни

Розглянемо тонкостінну оболонку, радіус кривизни якої в одному з напрямків дорівнює нескінченності. Припустимо, що оболонка складається з трьох шарів, які є жорстко з'єднаними між собою (рис. 2.1, 2.2). Зовнішній та внутрішній шари оболонки назвемо обшивками, а серединний – заповнювачем.

Зв'яжемо з шарами оболонки набір систем координат (x, φ, z_i), де x – координата, яка відповідає нескінченному радіусу кривизни, φ – кругова координата, яка відповідає скінченному радіусу кривизни, z_i – поперечна

координата, яку спрямовано за нормаллю до серединної поверхні шару оболонки.

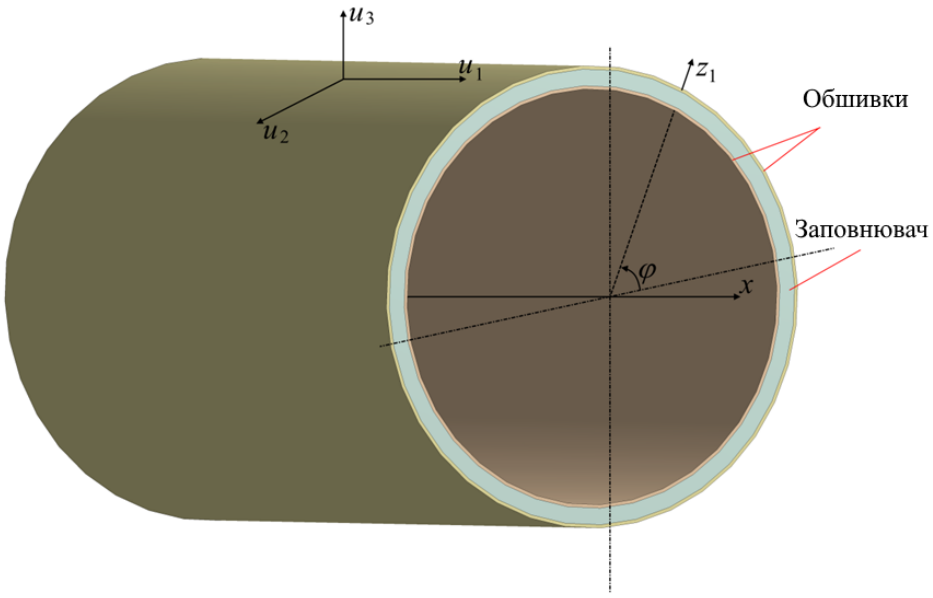


Рисунок 2.1 – Координатна система циліндричної оболонки

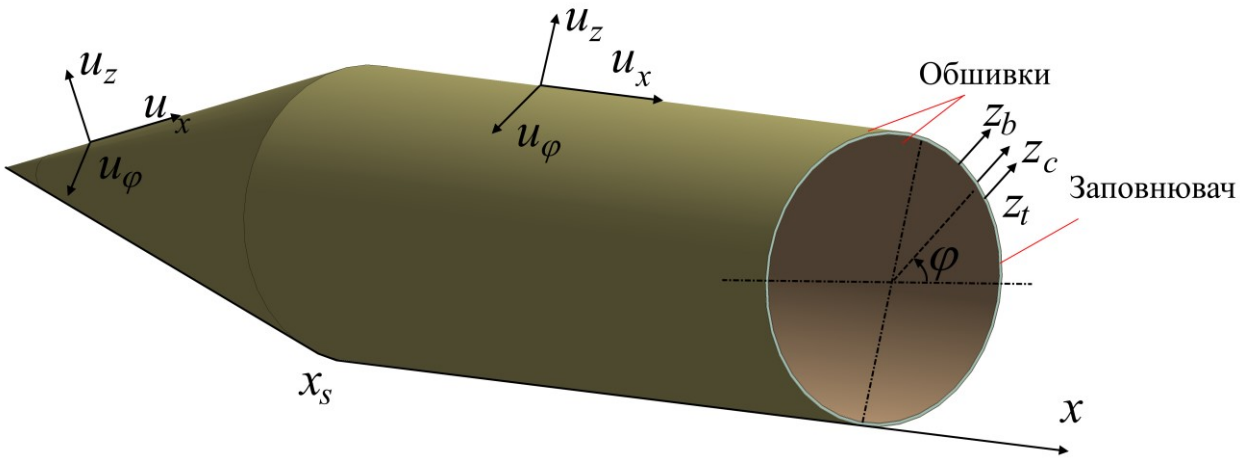


Рисунок 2.2 – Координатна система складеної коніко-циліндричної оболонки

Границі зміни координат оболонки приймемо наступними: $x \in [x_0; L]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, де h_i – товщина -го шару оболонки. Для зовнішньої обшивки оберемо індекс t, для внутрішньої – b, а для заповнювача – c.

Розглядається конструкція, шари якої створено з ортотропних матеріалів. Закон Гука для таких оболонок має форму:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \\ \sigma_{zz}^{(i)} \\ \sigma_{\varphi z}^{(i)} \\ \sigma_{xz}^{(i)} \\ \sigma_{x\varphi}^{(i)} \end{bmatrix} = C^{(i)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(i)} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} \\ 2\varepsilon_{\varphi z}^{(i)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(i)} \\ 2\varepsilon_{x\varphi}^{(i)} \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

де $\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}, \sigma_{\varphi z}^{(i)}, \sigma_{xz}^{(i)}, \sigma_{x\varphi}^{(i)}$ – елементи тензору напружень;

$\varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}, \varepsilon_{zz}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(i)}, \varepsilon_{xz}^{(i)}, \varepsilon_{x\varphi}^{(i)}$ – елементи тензору деформацій;

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad – \quad \text{матриця жорсткості,}$$

$C^{(i)} = S^{(i)^{-1}}$,

$$S^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x{}^{(i)}} & -\frac{\nu_{\varphi x}{}^{(i)}}{E_\varphi{}^{(i)}} & -\frac{\nu_{zx}{}^{(i)}}{E_z{}^{(i)}} & & & \\ -\frac{\nu_{x\varphi}{}^{(i)}}{E_x{}^{(i)}} & \frac{1}{E_\varphi{}^{(i)}} & -\frac{\nu_{z\varphi}{}^{(i)}}{E_z{}^{(i)}} & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ -\frac{\nu_{xz}{}^{(i)}}{E_x{}^{(i)}} & -\frac{\nu_{\varphi z}{}^{(i)}}{E_\varphi{}^{(i)}} & \frac{1}{E_z{}^{(i)}} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{\varphi z}{}^{(i)}} & 0 & 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}{}^{(i)}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{x\varphi}{}^{(i)}} \end{bmatrix};$$

$E_x{}^{(i)}, E_\varphi{}^{(i)}, E_z{}^{(i)}$ – модулі Гука i-го шару в відповідних напрямках;

$\nu_{x\varphi}{}^{(i)}$, $\nu_{\varphi x}{}^{(i)}$, $\nu_{xz}{}^{(i)}$, $\nu_{zx}{}^{(i)}$, $\nu_{\varphi z}{}^{(i)}$, $\nu_{z\varphi}{}^{(i)}$ – коефіцієнти Пуассона i-го шару в відповідних напрямках;

$G_{\varphi z}{}^{(i)}$, $G_{xz}{}^{(i)}$, $G_{x\varphi}{}^{(i)}$ – модулі зсуву i-го шару в відповідних площинах.

Проекції переміщень i-го шару оболонки на координатні лінії (x, φ, z_i) позначимо $u_x^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_\varphi^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_z^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), i = \{t, c, b\}$, де τ – час. Ці переміщення розкладемо за поперечною координатою z_i згідно зі зсувною теорією високого порядку [213]. Враховуючи жорсткий характер обшивок, для них застосуємо наступні розкладення:

$$u_x^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) = u^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i{}^2 \varphi_{1,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau);$$

$$u_\varphi^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) =$$

$$= \left(1 + \frac{z_i}{R_i(x)}\right) v^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) +$$

$$+ z_i{}^2 \varphi_{2,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau); \qquad (2.2)$$

$$u_z^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) = w^{(i)}(x, \varphi, \tau), i = \{t, b\},$$

де $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$, i=$\{t,b\}$ – проекції переміщень серединних поверхонь на координатні лінії (x, φ, z_i);

$R_b(x), R_t(x)$ – радіуси кривизни серединних поверхонь внутрішньої та зовнішньої обшивок;

$\varphi_{1,1}^{(i)}$, $\varphi_{2,1}^{(i)}$, i=$\{t,b\}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні;

функції $\varphi_{1,2}^{(i)}$, $\varphi_{2,2}^{(i)}$ визначаються з граничних умов.

Оскільки заповнювач є зазвичай більш податним, його розкладення переміщень заповнювача представляються наступним чином для урахування змін його товщини:

$$u_x^{(c)}(x, \varphi, z_i, \tau) =$$

$$= u^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi_{1,1}^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c{}^2 \varphi_{1,2}^{(c)}(x, \varphi, \tau) +$$

$$+ z_c{}^3 \varphi_{1,3}^{(c)}(x, \varphi, \tau);$$

$$u_{\varphi}^{(c)}(x,\varphi,z_c,\tau) =$$

$$= \left(1+\frac{z_i}{R_c(x)}\right)v^{(c)}(x,\varphi,\tau) + z_c\varphi_{2,1}^{(c)}(x,\varphi,\tau) + {z_c}^2\varphi_{2,2}^{(c)}(x,\varphi,\tau) +$$

$$+ {z_c}^3\varphi_{2,3}^{(c)}(x,\varphi,\tau);$$

$$u_z^{(c)}(x,\varphi,z_c,\tau) = w^{(c)}(x,\varphi,\tau) + z_c\varphi_{3,1}^{(c)}(x,\varphi,\tau) + {z_c}^2\varphi_{3,2}^{(c)}(x,\varphi,\tau), \qquad (2.3)$$

де $u^{(c)}$, $v^{(c)}$, $w^{(c)}$ – проекції переміщень серединної поверхні заповнювача на координатні лінії (x,φ,z_c);

$\varphi_{1,1}^{(c)}$, $\varphi_{2,1}^{(c)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні;

$R_c(x)$ – радіус кривизни серединної поверхні шару;

функції $\varphi_{1,2}^{(c)}$, $\varphi_{2,2}^{(c)}$, $\varphi_{3,2}^{(c)}$, $\varphi_{1,3}^{(c)}$, $\varphi_{2,3}^{(c)}$, $\varphi_{3,1}^{(c)}$ визначаються з умов безперервності переміщень на границях шарів.

Таким чином, напружено-деформований стан оболонки описується п’ятнадцятьма функціями $u^{(i)}(x,\varphi,\tau)$, $v^{(i)}(x,\varphi,\tau)$, $w^{(i)}(x,\varphi,\tau)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x,\varphi,\tau)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x,\varphi,\tau)$,$i=\{t,b,c\}$.

Зв’язок між переміщеннями та деформаціями шарів оболонки має вигляд [214 – 216]:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_i(x)}}\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial\varphi} + \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_x^{(i)}}{A_i(x)} + \frac{u_z^{(i)}}{R_i(x)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z_i}{R_i(x)}}\right)^2\left(\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi^{(i)}}{A_i(x)}\frac{dA_i(x)}{dx}\right)^2 +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial\varphi} + \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_x^{(i)}}{A_i(x)} + \frac{u_z^{(i)}}{R_i(x)}\right)^2 +$$

$$\left.+\left(\frac{u_\varphi^{(i)}}{R_i(x)} - \frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial\varphi}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi z}^{(i)} = \overline{\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}} + \gamma_{\varphi z}^{(i)}; \qquad (2.4)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \overline{\varepsilon_{xz}^{(i)}} + \gamma_{xz}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{x\varphi}^{(i)} = \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{\left(1+\frac{z_i}{R_i(x)}\right)}\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial\varphi} - \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_\varphi^{(i)}}{A_i(x)}\right) +$$

$$+\frac{1}{1+\frac{z_i}{R_i(x)}}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial\varphi} +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial\varphi} + + \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_x^{(i)}}{A_i(x)} + \frac{u_z^{(i)}}{R_i(x)}\right)\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial x} -$$

$$\left.-\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x}\left(\frac{u_\varphi^{(i)}}{R_i(x)} - \frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial\varphi}\right)\right);$$

$$i = t, c, b,$$

де $A_i; i = \{t, c, b\}$ –параметри Ляме серединних поверхонь шарів оболонки;

$\overline{\varepsilon_{\varphi z}^{(\iota)}} = \frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{\left(1+\frac{z_i}{R_i(x)}\right)}\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{\varphi}^{(i)}}{R_i(x)}\right)$ – лінійна модель зсувної деформації $\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}$;

$\gamma_{\varphi z}^{(i)} = \frac{1}{\left(1+\frac{z_i}{R_i(x)}\right)}\left(\left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_x^{(i)}}{A_i(x)} + \frac{u_z^{(i)}}{R_i(x)}\right)\frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial z} + \left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{dA_i(x)}{dx}\frac{u_{\varphi}^{(i)}}{A_i(x)}\right)\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \left(\frac{1}{A_i(x)}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{\varphi}^{(i)}}{R_i(x)}\right)\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}\right)$ – нелінійна частина моделі зсувної деформації $\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}$;

$\overline{\varepsilon_{xz}^{(\iota)}} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x}$ – лінійна модель зсувної деформації $\varepsilon_{xz}^{(i)}$;

$\gamma_{xz}^{(i)} = \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + u_z^{(i)}\right)\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_{\varphi}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}$ – нелінійна частина моделі зсувної деформації $\varepsilon_{x\varphi}^{(i)}$;

На границях оболонки напруження задовольняють наступним граничним умовам [213]:

$$\sigma_{xz}^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) = \sigma_{\varphi z}^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) = 0; \qquad (2.5)$$
$$\sigma_{xz}^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) = \sigma_{\varphi z}^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) = 0.$$

З умов жорсткого з’єднання шарів оболонки випливають умови безперервності переміщень на границях шарів, що мають вигляд:

$$u_i^{(t)}\left(x, \varphi, -\frac{h_t}{2}, \tau\right) = u_i^{(c)}\left(x, \varphi, \frac{h_c}{2}, \tau\right), i = 1,2,3;$$
$$u_i^{(b)}\left(x, \varphi, \frac{h_b}{2}, \tau\right) = u_i^{(c)}\left(x, \varphi, -\frac{h_c}{2}, \tau\right), i = 1,2,3. \qquad (2.6)$$

Урахування розкладень (2.2), (2.3) в виразах (2.5), (2.6) дозволяє визначити функції $\varphi_{1,2}^{(i)}, \varphi_{2,2}^{(i)}, i = \{t, b, c\}, \varphi_{3,2}^{(c)}, \varphi_{1,3}^{(c)}, \varphi_{2,3}^{(c)}, \varphi_{3,1}^{(c)}$:

$$\varphi_{1,2}^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} + \varphi_{1,1}^{(t)}\right);$$

$$\varphi_{1,2}^{(b)} = \frac{1}{h_b}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} + \varphi_{1,1}^{(t)}\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(t)} = \frac{1}{4{R_t}^2 A_t h_t}\left(-4R_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} + A_t\left(\left(h_t R_t - 4{R_t}^2\right)\varphi_{2,1}^{(t)} + v^{(t)}h_t\right)\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(b)} = \frac{1}{4{R_b}^2 A_b h_b}\left(4R_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} + A_b\left(\left(h_b R_b + 4{R_b}^2\right)\varphi_{2,1}^{(b)} + v^{(b)}h_b\right)\right);$$

$$\varphi_{1,3}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^3}\left(-h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} - 3h_b\varphi_{1,1}^{(b)} - 3h_t\varphi_{1,1}^{(t)} - 4h_c\varphi_{1,1}^{(c)} - \right.$$

$$\left. -4u^{(b)} + 4u^{(t)}\right);$$

$$\varphi_{2,3}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^3}\left(4v^{(t)} - 4v^{(b)} - 3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} - 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} - 4h_c\varphi_{2,1}^{(c)} - 4\frac{h_c}{R_c}v^{(c)}\right) -$$

$$-\frac{1}{{h_c}^3 R_b}\left(2h_b v^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4R_b}v^{(b)}\right) - \frac{h_b}{{h_c}^3 A_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} -$$

$$-\frac{1}{{h_c}^3 R_t}\left(2h_t v^{(t)} - \frac{{h_t}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(t)} - \frac{{h_t}^2}{4R_t}v^{(t)}\right) - \frac{h_t}{{h_c}^3 A_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}; \qquad (2.7)$$

$$\varphi_{3,2}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^2}\left(2w^{(t)} - 4w^{(c)} + 2w^{(b)}\right);$$

$$\varphi_{1,2}^{(c)} = \frac{1}{2{h_c}^2}\left(-h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} + h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} + 3h_b\varphi_{1,1}^{(b)} - 3h_t\varphi_{1,1}^{(t)} + 4u^{(b)} + 4u^{(t)} - \right.$$

$$\left. - 8u^{(c)}\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(c)} = \frac{1}{2{h_c}^2}\left(4v^{(t)} + 4v^{(b)} - 3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} - 8v^{(c)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2{h_c}^2 R_b}\left(2v^{(b)}h_b + \frac{{h_b}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4R_b}v^{(b)}\right) + \frac{h_b}{2{h_c}^2 A_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} -$$

$$-\frac{1}{2{h_c}^2 R_t}\left(2v^{(t)}h_t-\frac{{h_t}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(t)}-\frac{{h_t}^2}{4R_t}v^{(b)}\right)-\frac{h_t}{2{h_c}^2 A_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi};$$

$$\varphi_{3,1}^{(c)}=\frac{1}{h_c}\left(w^{(t)}-w^{(b)}\right).$$

Оскільки шари оболонки є тонкими, вираз $\frac{1}{\left(1+\frac{z_i}{R_i(x)}\right)}$ представляється у спрощеній формі усіченого ряду Тейлора $\frac{1}{\left(1+\frac{z_i}{R_i(x)}\right)}=1-\frac{z_i}{R_i(x)}+\left(\frac{z_i}{R_i(x)}\right)^2$. Тоді підстановка співвідношень (2.7), (2.2), (2.3) в (2.4) дозволяє представити компоненти тензору деформацій у формі поліноміальних розкладень за $z_i, i=\{t,b,c\}$:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{xx}^{(i)}=\varepsilon_{xx,0}^{(i)}+z_i k_{xx,0}^{(i)}+z_i^2 k_{xx,1}^{(i)}+z_i^3 k_{xx,2}^{(i)};\\
\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}=\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}+z_i k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}+z_i^2 k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}+z_i^3 k_{\varphi\varphi,2}^{(i)};\\
\varepsilon_{x\varphi}^{(i)}=\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}+z_i k_{x\varphi,0}^{(i)}+z_i^2 k_{x\varphi,1}^{(i)}+z_i^3 k_{x\varphi,2}^{(i)};\\
\varepsilon_{xz}^{(i)}=\varepsilon_{xz,0}^{(i)}+z_i k_{xz,0}^{(i)}+z_i^2 k_{xz,1}^{(i)}+z_i^3 k_{xz,2}^{(i)};\\
\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}=\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}+z_i k_{\varphi z,0}^{(i)}+z_i^2 k_{\varphi z,1}^{(i)}+z_i^3 k_{\varphi z,2}^{(i)};\\
i=\{t,b,c\};\\
\varepsilon_{zz}^{(c)}=\varepsilon_{zz,0}^{(c)}+z_c k_{zz,0}^{(c)}.
\end{gathered}\tag{2.8}$$

Коефіцієнти розкладень (2.8) визначаються через переміщення точок оболонки та їхні похідні за координатами x,φ. Формули, за якими обчислюються ці коефіцієнти, є громіздкими та винесені у Додаток В.

Співвідношення (2.8) застосовуються для обчислення потенційної енергії оболонки. Потенційна енергія оболонки складається з потенційних енергій шарів:

$$\Pi=\sum_{i=t,b,c}\Pi^{(i)}.$$

Потенційні енергії шарів оболонки розраховуються за формулою:

$$\Pi^{(i)} = 0.5 \int_{x_0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} \left(\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \sigma_{zz}^{(i)} \varepsilon_{zz}^{(i)} + 2\sigma_{x\varphi}^{(i)} \varepsilon_{x\varphi}^{(i)} + 2\sigma_{\varphi z}^{(i)} \varepsilon_{\varphi z}^{(i)} + \right.$$

$$\left. + 2\sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}^{(i)} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_i} \right) A_i dz_i \, d\varphi \, dx. \qquad (2.9)$$

Нелінійні частини виразів (2.9) є складними та об'ємними, тому для отримання їх в аналітичному вигляді було застосовано систему комп'ютерної алгебри Maple 2021. Підінтегральні функції при цьому є поліномами відносно z_i $i = \{t, b, c\}$, тому інтегрування за цими змінними проводиться аналітично.

Кінетична енергія оболонки дорівнює сумі кінетичних енергій її шарів:

$$T = 0.5 \sum_{i=t,c,b} \int_{x_0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i \left[\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2} \right] \left(1 + \frac{z_i}{R_i} \right) A_i dz_i \, d\varphi \, dx, \quad (2.10)$$

де $\dot{u}_k^{(i)} = \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \tau}, k = \{x, \varphi, z\}, i = \{t, c, b\}$;

ρ_i – густина матеріалу -го шару, $i = \{t, c, b\}$.

Таким чином, отримано вирази для визначення механічних енергій оболонки, які дозволяють побудувати модель її руху за загальноприйнятою методикою.

2.1.2 Математична модель динаміки оболонки подвійної кривизни

Розглянемо коливання багатошарової оболонки подвійної кривизни, подібної до тієї, що зображено на рис. 2.3. Оболонка має N_l шарів, які мають постійні товщини h_i, $i = 1 \ldots N_l$. Шари оболонки створено з ортотропних

матеріалів. Така модель може описувати елементи конструкції літальних апаратів та ракетокосмічної техніки.

З оболонкою зв'яжемо криволінійні координати (x, y), які відповідають її напрямам кривизни. Для опису переміщень окремих шарів введемо поперечні координати z_i, $i = 1 \ldots N_l$. Границі зміни координат є наступними: $x \in [0; b]$; $y \in [0; a]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, $i = 1 \ldots N_l$, де b та a – довжина оболонки вздовж відповідних координатних вісей.

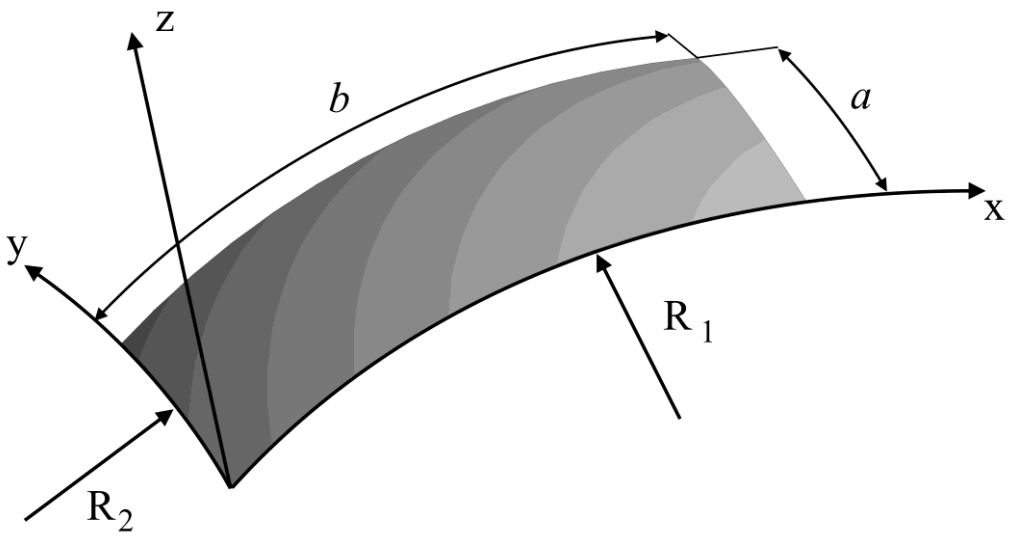


Рисунок 2.3 – Ескіз оболонки

Розглядаються коливання оболонки в умовах, коли амплітуди коливань точок оболонки є співставними з її товщиною. Таким чином, виникають геометрично нелінійні деформації оболонки, які і є джерелом нелінійності в задачі.

Ортотропні пружні властивості i-го шару оболонки описуються законом Гука у формі:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}^{(i)}\\ \sigma_{yy}^{(i)}\\ \sigma_{zz}^{(i)}\\ \sigma_{yz}^{(i)}\\ \sigma_{xz}^{(i)}\\ \sigma_{xy}^{(i)}\end{bmatrix} = \mathrm{C}^{(i)} \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(i)}\\ \varepsilon_{yy}^{(i)}\\ \varepsilon_{zz}^{(i)}\\ 2\varepsilon_{yz}^{(i)}\\ 2\varepsilon_{xz}^{(i)}\\ 2\varepsilon_{xy}^{(i)}\end{bmatrix}, \qquad (2.11)$$

де $\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}, \sigma_{yz}^{(i)}, \sigma_{xz}^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)}, \varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}, \varepsilon_{zz}^{(i)}, \varepsilon_{yz}^{(i)}, \varepsilon_{xz}^{(i)}, \varepsilon_{xy}^{(i)}$ – елементи тензорів напружень та деформацій.

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} {C_{11}}^{(i)} & {C_{12}}^{(i)} & {C_{13}}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ {C_{21}}^{(i)} & {C_{22}}^{(i)} & {C_{23}}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ {C_{31}}^{(i)} & {C_{32}}^{(i)} & {C_{33}}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {C_{44}}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {C_{55}}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {C_{66}}^{(i)} \end{bmatrix}$$ – матриця

жорсткості, $C^{(i)} = S^{-1}$,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{{E_{11}}^{(i)}} & -\frac{{\nu_{21}}^{(i)}}{{E_{22}}^{(i)}} & -\frac{{\nu_{31}}^{(i)}}{{E_{33}}^{(i)}} & & & \\ -\frac{{\nu_{12}}^{(i)}}{{E_{11}}^{(i)}} & \frac{1}{{E_{22}}^{(i)}} & -\frac{{\nu_{32}}^{(i)}}{{E_{33}}^{(i)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{{\nu_{13}}^{(i)}}{{E_{11}}^{(i)}} & -\frac{{\nu_{23}}^{(i)}}{{E_{22}}^{(i)}} & \frac{1}{{E_{33}}^{(i)}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{{G_{23}}^{(i)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{{G_{13}}^{(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{{G_{12}}^{(i)}} \end{bmatrix};$$

${E_{11}}^{(i)}, {E_{22}}^{(i)}, {E_{33}}^{(i)}$ – модулі Юнга матеріалу i-го шару;

${\nu_{12}}^{(i)}, {\nu_{21}}^{(i)}, {\nu_{13}}^{(i)}, {\nu_{31}}^{(i)}, {\nu_{23}}^{(i)}, {\nu_{32}}^{(i)}$ – коефіцієнти Пуасона матеріалу i-го шару;

${G_{23}}^{(i)}, {G_{13}}^{(i)}, {G_{12}}^{(i)}$– модулі зсуву матеріалу i-го шару.

Коливання конструкції описуються переміщеннями її шарів у трьох напрямках: $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}, i = 1 \dots N_l$. Розглядається оболонка помірної товщини, для опису якої застосовується теорія зсуву високого порядку [217, 218].

Аналіз коливань багатошарових оболонок ускладнюється громіздкими виразами при зростанні параметру N_l. Для проведення такого аналізу при великих значеннях N_l, а також при складних фізичних властивостях матеріалів – наприклад, якщо розглядаються функціонально-градієнтні матеріали, – доцільно застосовувати системи комп'ютерної алгебри. Як приклад, розглянемо практично значущий випадок тришарової оболонки, яка складається з двох жорстких ортотропних обшивок та набагато м'якшого шару стільникового заповнювача між ними. Такі оболонки широко використовуються в аерокосмічній техніці завдяки високому співвідношенню жорсткості та питомої маси [219]. Пронумеруймо шари наступним чином: шари 1 та 3 відповідають верхній та нижній (в напрямку поперечних координат z_i) обшивкам оболонки, а шар 2 – стільниковому заповнювачу між ними.

Для жорстких обшивок оболонки, товщина яких може вважатися незмінною, закон Гука набуває наступної форми:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(j)} \\ \sigma_{yy}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(j)} \\ \varepsilon_{yy}^{(j)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = 2\bar{C}_{66}\varepsilon_{xy}^{(j)};$$

$$\sigma_{xz}^{(j)} = 2\bar{C}_{55}\varepsilon_{xz}^{(j)};$$

$$\sigma_{yz}^{(j)} = 2\bar{C}_{44}\varepsilon_{yz}^{(j)}; j = 1{,}3, \qquad (2.12)$$

де $\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}, \sigma_{xz}^{(j)}, \sigma_{yz}^{(j)}, \varepsilon_{xx}^{(j)}, \varepsilon_{yy}^{(j)}, \varepsilon_{xy}^{(j)}, \varepsilon_{xz}^{(j)}, \varepsilon_{yz}^{(j)}; j = 1{,}3$ – елементи тензорів напружень та деформацій верхньої та нижньої обшивки, відповідно.

Для моделювання динамічного відгуку середнього шару стільникового заповнювача його механічні властивості осереднюються шляхом процедури гомогенізації [45, 220]. Закон Гука для нього має форму (2.11).

Проєкції переміщень обшивок на вісі (x, y, z) розкладаються за поперечною координатою наступним чином:

$$u_1^{(i)}(x, y, z_i) = u^{(i)}(x, y)\left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right) + z_i\phi_1^{(i)}(x, y) + z_i^2\varphi_1^{(i)}(x, y);$$

$$u_2^{(i)}(x, y, z_i) = v^{(i)}(x, y)\left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right) + z_i\phi_2^{(i)}(x, y) + z_i^2\varphi_2^{(i)}(x, y);$$

$$u_3^{(i)}(x, y, z_i) = w^{(i)}(x, y); i = 1,3, \qquad (2.13)$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$ – проекції переміщень середніх поверхонь обшивок на координатні вісі $(x, y, z_i); i = 1,3$; $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні шару; $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}$ – невідомі функції, які будуть знайдені. Переміщення середнього шару представляються наступним чином:

$$u_1^{(2)}(x, y, z_c) = u^{(2)}(x, y)\left(1 + \frac{z_2}{R_1}\right) + z_2\phi_1^{(2)}(x, y) + z_2^2\varphi_1^{(2)}(x, y) + z_2^3\gamma_1^{(2)}(x, y);$$

$$u_2^{(2)}(x, y, z_2) =$$

$$= v^{(2)}(x, y)\left(1 + \frac{z_2}{R_2}\right) + z_2\phi_2^{(2)}(x, y) + z_2^2\varphi_2^{(2)}(x, y) + z_2^3\gamma_2^{(2)}(x, y);$$

$$u_3^{(2)}(x, y, z_2) = w^{(2)}(x, y) + z_2 w_1^{(2)}(x, y) + z_2^2 w_2^{(2)}(x, y), \qquad (2.14)$$

де $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$ – проекції переміщень серединної поверхні шару 2; $\phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні шару 2; $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}$ – невідомі функції, які будуть знайдені.

На верхній та нижній поверхнях оболонки задовольняються наступні граничні умови: [217, 218]

$$\varepsilon_{xz}^{(1)}\Big|_{z_1=0.5h_1} = \varepsilon_{yz}^{(1)}\Big|_{z_1=0.5h_1} = \varepsilon_{xz}^{(3)}\Big|_{z_3=-0.5h_3} = \varepsilon_{yz}^{(3)}\Big|_{z_3=-0.5h_3} = 0, \qquad (2.15)$$

де

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)^{-1}\left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1}\right);$$

$$\varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2}\right); i = 1,3;$$

$$\psi = {}^{x}/_{R_1}; \theta = {}^{y}/_{R_2}.$$

На границях між шарами оболонки виконуються умови безперервності переміщень:

$$u_i^{(1)}(z_1 = -0.5h_1) = u_i^{(2)}(z_2 = 0.5h_2);$$

$$u_i^{(3)}(z_3 = 0.5h_3) = u_i^{(2)}(z_2 = -0.5h_2); i = 1,2,3. \quad (2.16)$$

Підставляючи розкладення (2.13, 2.14) у рівняння (2.15, 2.16), можна визначити невідомі функції розкладень (2.13, 2.14):

$$\varphi_1^{(i)} = -\frac{1}{h_i}\left(\phi_1^{(i)} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \psi}\right), i = 1,3; \quad (2.17)$$

$$\varphi_2^{(i)} = -\frac{1}{h_i}\left(\phi_2^{(i)} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta}\right), i = 1,3;$$

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{2}{h_2^2}\left[u^{(1)} + u^{(3)} - 2u^{(2)} + \frac{h_3}{2}\phi_1^{(3)} - \frac{h_1}{2}\phi_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{4}\varphi_1^{(1)} + \frac{h_3^2}{4}\varphi_1^{(3)}\right];$$

$$\varphi_2^{(2)} = \frac{2}{h_2^2}\left[v^{(1)} + v^{(3)} - 2v^{(2)} + \frac{h_3}{2}\phi_2^{(3)} - \frac{h_1}{2}\phi_2^{(1)} + \frac{h_1^2}{4}\varphi_2^{(1)} + \frac{h_3^2}{4}\varphi_2^{(3)}\right];$$

$$\gamma_1^{(2)} = \frac{2}{h_2^3}\left[u^{(1)} + u^{(3)} - u^{(2)}\frac{h_2}{R_1} - \frac{h_3}{2}\phi_1^{(3)} - \frac{h_1}{2}\phi_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{4}\varphi_1^{(1)} - \frac{h_3^2}{4}\varphi_1^{(3)} - h_2\phi_1^{(2)}\right];$$

$$\gamma_2^{(2)} = \frac{2}{h_2^3}\left[u^{(1)} + u^{(3)} - u^{(2)}\frac{h_2}{R_2} - \frac{h_3}{2}\phi_2^{(3)} - \frac{h_1}{2}\phi_2^{(1)} + \frac{h_1^2}{4}\varphi_2^{(1)} - \frac{h_3^2}{4}\varphi_2^{(3)} - h_2\phi_2^{(2)}\right];$$

$$w_1^{(2)} = \frac{w^{(1)} - w^{(3)}}{h_2};$$

$$w_2^{(2)} = \frac{2}{h_2^2}\left(w^{(1)} + w^{(3)} - 2w^{(2)}\right).$$

Таким чином, деформований стан оболонки описується п’ятнадцятьма змінними:

$$\left(u^{(i)}, \phi_1^{(i)}, v^{(i)}, \phi_2^{(i)}, w^{(i)}\right); i = 1,2,3. \tag{2.18}$$

Для опису динаміки оболонки визначимо її механічні енергії. Геометрично нелінійні деформації оболонки характеризуються нелінійним зв’язком між деформаціями та переміщеннями. У [221] ці співвідношення наведено в загальному вигляді в криволінійних координатах. Для оболонки, що розглядається, вони мають вигляд:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} + 0.5\left(\varepsilon_1^{(i)2} + \omega_1^{(i)2} + \theta^{(i)2}\right);$$

$$\varepsilon_{yy}^{(i)} = \varepsilon_2^{(i)} + 0.5\left(\varepsilon_2^{(i)2} + \omega_2^{(i)2} + \psi^{(i)2}\right);$$

$$\varepsilon_{xy}^{(i)} = \omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)}\omega_2^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}\omega_1^{(i)} + \theta^{(i)}\psi^{(i)};$$

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1} + \left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{R_1 \partial \psi} + \frac{u_3^{(i)}}{R_1}\right)\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{R_1 \partial \psi}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1}\right)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i}\right\};$$

$$\varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2} + \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{R_2 \partial \theta} + \frac{u_3^{(i)}}{R_2}\right)\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{R_2 \partial \theta}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2}\right)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i}\right\}, i = 1,2,3, \tag{2.19}$$

де

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{1}{1 + \frac{z_i}{R_1}}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{u_3^{(i)}}{R_1}\right);$$

$$\omega_1^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_1}}\left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{R_1 \partial \psi}\right);$$

$$\theta^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_1}}\left(-\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{u_1^{(i)}}{R_1}\right);$$

$$\varepsilon_2^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_3^{(i)}}{R_2}\right);$$

$$\omega_2^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}}\left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{R_2 \partial \theta}\right);$$

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}}\left(-\frac{1}{R_2}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_2^{(i)}}{R_2}\right).$$

Підстановка розкладень (2.13, 2.14) у вирази (2.19) та виділення членів при різних ступенях координати z_i дозволяє представити співвідношення між деформаціями та переміщеннями у вигляді:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \varepsilon_{xx,0}^{(i)} + z_i k_{xx,0}^{(i)} + z_i^2 k_{xx,1}^{(i)} + z_i^3 k_{xx,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{yy}^{(i)} = \varepsilon_{yy,0}^{(i)} + z_i k_{yy,0}^{(i)} + z_i^2 k_{yy,1}^{(i)} + z_i^3 k_{yy,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{xy}^{(i)} = \varepsilon_{xy,0}^{(i)} + z_i k_{xy,0}^{(i)} + z_i^2 k_{xy,1}^{(i)} + z_i^3 k_{xy,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \varepsilon_{xz,0}^{(i)} + z_i k_{xz,0}^{(i)} + z_i^2 k_{xz,1}^{(i)} + z_i^3 k_{xz,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{yz}^{(i)} = \varepsilon_{yz,0}^{(i)} + z_i k_{yz,0}^{(i)} + z_i^2 k_{yz,1}^{(i)} + z_i^3 k_{yz,2}^{(i)}, i = t, c, b; \qquad (2.20)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{zz,0}^{(c)} + z_c k_{zz,0}^{(c)},$$

Коефіцієнти розкладень (2.20) є громіздкими для представлення та винесені в Додаток В. Всі нелінійні складові виразів (2.20), що описують геометрично нелінійні деформації оболонки, зосереджені в доданках при нульових ступенях z_i.

Потенційна енергія пружного деформування обшивок виражається наступним чином:

$$U_i = 0.5 \int_{V_i} \left(\sigma_{xx}^{(i)}\varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{yy}^{(i)}\varepsilon_{yy}^{(i)} + \sigma_{xy}^{(i)}\varepsilon_{xy}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)}\varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{yz}^{(i)}\varepsilon_{yz}^{(i)}\right)\left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{z_i}{R_2}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i =$$

$$= \int_{V_i} \left(\bar{C}_{11}\varepsilon_{xx}^{(i)2} + \bar{C}_{22}\varepsilon_{yy}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12}\varepsilon_{yy}^{(i)}\varepsilon_{xx}^{(i)} + 2\bar{C}_{66}\varepsilon_{xy}^{(i)2} + 2\bar{C}_{55}\varepsilon_{xz}^{(i)2} + \right.$$

$$\left. + 2\bar{C}_{44}\varepsilon_{yz}^{(i)2}\right)\left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i, i =$$

$$= 1,3, \qquad (2.21)$$

де V_i – об'єм, який займає шар оболонки. Після підстановка (2.20) у (2.21) та інтегрування за змінною z_i,вираз (12) набуває форми:

$$U_i = 0.5 \int_D \left(\Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(4)}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta; i = t, b, \qquad (2.22)$$

де D – серединна поверхня шару оболонки;

вирази для $\Pi_i^{(0)}$, $\Pi_i^{(2)}$, $\Pi_i^{(4)}$ винесено в Додаток В.

Потенційна енергія середнього шару обчислюється наступним чином:

$$U_2 = 0.5 \int_{V_2} \left(\sigma_{xx}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(2)} + \sigma_{yy}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \sigma_{xy}^{(2)}\varepsilon_{xy}^{(2)} + \sigma_{xz}^{(2)}\varepsilon_{xz}^{(2)} + \sigma_{yz}^{(2)}\varepsilon_{yz}^{(2)}\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{z_2}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z_2}{R_2}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_2 = 0.5 \int_{V_2} \left(C_{11}\varepsilon_{xx}^{(2)2} + C_{22}\varepsilon_{yy}^{(2)2} + 2C_{12}\varepsilon_{xx}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)}\right.$$

$$\left. + 2C_{55}\varepsilon_{xz}^{(2)2} + 2C_{66}\varepsilon_{xy}^{(2)2} + 2C_{44}\varepsilon_{yz}^{(2)2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z_2}{R_2}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_2 +$$

$$+ 0.5 \int_{V_c} \left(C_{33}\varepsilon_{zz}^{(2)2} + 2C_{23}\varepsilon_{yy}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \right.$$

$$\left. + 2C_{13}\varepsilon_{xx}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)}\right)\left(1 + \frac{z_2}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z_2}{R_2}\right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_c. \quad (2.23)$$

Перший інтегральний доданок (2.23) аналогійний виразу (2.22) при $i = 2$. Другий доданок (2.23) представляється у формі:

$$\int_{-0.5h_c}^{0.5h_c} \left(C_{33}\varepsilon_{zz}^{(c)2} + 2C_{23}\varepsilon_{yy}^{(c)}\varepsilon_{zz}^{(c)} + 2C_{13}\varepsilon_{xx}^{(c)}\varepsilon_{zz}^{(c)}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_1}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_2}\right)dz_c. =$$

$$= \widetilde{U}_2^{(0)} + \widetilde{U}_2^{(2)} + \widetilde{U}_2^{(4)},$$

де $\widetilde{U}_2^{(0)}$, $\widetilde{U}_2^{(2)}$, $\widetilde{U}_2^{(4)}$ винесено в Додаток В.

Таким чином, потенційна енергія середнього шару має форму:

$$U_2 = 0.5\int_D \left(\Pi_2^{(0)} + \Pi_2^{(2)} + \Pi_2^{(4)} + \widetilde{U}_2^{(0)} + \widetilde{U}_2^{(2)} + \widetilde{U}_2^{(4)}\right) R_1R_2 d\psi d\theta. \qquad (2.24)$$

Кінетична енергія шарів оболонки обчислюється наступним чином:

$$T_i = 0.5\int_{V_i} \rho_i \left(\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2}\right)\left(1+\frac{z_i}{R_1}\right)\left(1+\frac{z_i}{R_2}\right) R_1R_2 d\psi d\theta dz_i =$$

$$0.5\int_D \left(\lambda_0^{(i)} + \lambda_2^{(i)} + \lambda_4^{(i)}\right) R_1R_2 d\psi d\theta\,, i = 1,2,3, \qquad (2.25)$$

де ρ_i – густина матеріалу i –го шару;

$\dot{u}_1^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}$;

вирази для $\lambda_0^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$, $\lambda_4^{(i)}$ наведено в Додатку Б.

Таким чином, побудовано вирази для механічних енергій оболонки, які дозволяють описати її власну динаміку та відгук на зовнішній вплив.

Розроблені в параграфах 2.1.1, 2.1.2 моделі розширюють описану в [213] модель для тришарових пластин на тонкі оболонки та дозволяють

описати власну динаміку оболонок та їхній відгук на зовнішнє збудження. У подальшому ці вирази дискретизуються, завдяки чому формулюється модель руху оболонки в формі звичайних нелінійних диференційних рівнянь II порядку.

2.2 Застосування методу заданих форм для аналізу коливань тонкостінних конструкцій

Розглянемо оболонку з N_l шарів, напружено-деформований стан якої описується, як було раніше показано, $5 \cdot N_l$ функціями $u^{(i)}(x,y,t), v^{(i)}(x,y,t), w^{(i)}(x,y,t), {\psi_X}^{(i)}(x,y,t), {\psi_Y}^{(i)}(x,y,t),\ i = 1 \dots N_l$, де t – час; x, y – криволінійні координати, які спрямовані вздовж ліній кривизни оболонки; $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ – переміщення точок оболонки вздовж ліній кривизни; $w^{(i)}$ – поперечні переміщення точок оболонки; ${\psi_X}^{(i)}$, ${\psi_Y}^{(i)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні оболонки. Закріплення оболонки описується граничними умовами:

$$\mathbf{B}(\Xi)|_{\Gamma} = 0, \tag{2.26}$$

де $\Xi = \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, {\psi_X}^{(i)}, {\psi_Y}^{(i)}, i = 1 \dots N_l\}$;

Г – заданий контур серединної поверхні оболонки.

Нехай для оболонки знайдено вирази для потенційної енергії $\Pi(\Xi)$ та кінетичної енергії $T(\Xi)$ у наступній формі:

$$\Pi(\Xi) = \iint_S \widetilde{\Pi}(\Xi)\, dS;$$

$$T(\Xi) = \iint_S \tilde{T}(\Xi)\, dS,$$

де $\widetilde{\Pi}(\Xi), \tilde{T}(\Xi)$ – диференційні вирази в часткових похідних;

$\widetilde{\Pi}(\boldsymbol{\Xi}) = \widetilde{\Pi}_2(\boldsymbol{\Xi}) + \widetilde{\Pi}_*(\boldsymbol{\Xi})$, де $\widetilde{\Pi}_2(\boldsymbol{\Xi})$ – вираз, складається виключно з мономів другого порядку відносно компонентів $\boldsymbol{\Xi}$ та їхніх похідних; $\widetilde{\Pi}_*$ – вираз, який містить всі мономи вищих порядків відносно компонентів $\boldsymbol{\Xi}$ та їхніх похідних;

S – серединна поверхня оболонки.

Для побудови рівнянь коливань оболонки застосовується метод заданих форм [222]. Нелінійні коливання розкладаються за власними формами коливань наступним чином:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} q_{\{N_w(i-1)+j\}}(t) W_{i,j}(x,y)\,;$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 1}} q_{\{N_l N_w + N_v(i-1)+j\}}(t) V_{i,j}(x,y);$$

$$\psi_X{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 2}} q_{\{N_l N_w + N_l N_v + N_X(i-1)+j\}}(t) X_{i,j}(x,y);$$

$$\psi_Y{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} q_{\{N_l N_w + N_l N_v + N_l N_X + N_Y(i-1)+j\}}(t) Y_{i,j}(x,y);$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} q_{\{N_l N_w + N_l N_v + N_l N_X + N_l N_Y + N_u(i-1)+j\}}(t) U_{i,j}(x,y);\, i = 1,\dots,N_l, \quad (2.27)$$

де $W_{i,j}, V_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}, U_{i,j},$ – власні форми коливань оболонки, процедуру пошуку яких описано нижче; i – номер шару оболонки; j – номер власної форми; $\mathbf{q}(t) = \left(q_1(t),\dots,q_{N_*(t)}\right)$; N_w, N_v, N_X, N_Y, N_u – глибина розкладень за власними формами відповідних змінних задачі; $N_* = N_l(N_w + N_v + N_X + N_Y + N_u)$; $\mathbf{q}$ – вектор узагальнених координат. Знак фігурних дужок у (2.27) застосовано для надання тексту структурованості.

Розкладення (2.27) підставляються в вирази для кінетичної та потенційної енергії та проводиться інтегрування за змінними x, y. Кінетична енергія представляється у вигляді квадратичної форми відносно узагальнених швидкостей: $T(\Xi) = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_*})$. Потенційна енергія, в свою чергу, приймає наступного вигляду:

$$\Pi(\Xi) = \Pi^{(2)}\left(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)\right) + \Pi^{(3)}\left(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)\right) + \\ + \Pi^{(4)}\left(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)\right), \qquad (2.28)$$

де $\Pi^{(2)}(q_1, \dots, q_{N_*})$ містить квадратичні мономи узагальнених координат, $\Pi^{(3)}(q_1, \dots, q_{N_*})$ – кубічні мономи, $\Pi^{(4)}(q_1, \dots, q_{N_*})$ – мономи четвертого ступеня.

Таким чином, інтегро-диференційні вирази в часткових похідних $\Pi(\Xi)$, $T(\Xi)$ вдалося перетворити на поліноми відносно узагальнених координат $q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)$ та узагальнених швидкостей $\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{N_*}(t)$. Завдяки цьому рівняння руху оболонки формулюються в формі системи звичайних нелінійних диференційних рівнянь II порядку відносно узагальнених координат, і для їхньої побудови застосовуються загальновідомі методи.

Для визначення базисних функцій методу заданих форм знайдемо власні форми коливань оболонки методом Релея-Рітца [227]. Лінійні коливання оболонки представимо наступним чином:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \psi_X{}^{(i)} \\ \psi_Y{}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x,y) \\ V_i(x,y) \\ W_i(x,y) \\ X_i(x,y) \\ Y_i(x,y) \end{bmatrix} \cos(\omega t)\,; i = 1 \dots N_l \qquad (2.29)$$

де ω – частота лінійних коливань;

$U_i(x,y), V_i(x,y), W_i(x,y), X_i(x,y),\ Y_i(x,y)$ – невідомі власні форми коливань шарів оболонки, які задовольняють граничним умовам (2.26). Ці функції представимо у вигляді розкладень за базисними функціями [227]:

$$U_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu j}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x)\, U_y^{(j)}(y);$$

$$V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\mu j}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x)\, V_y^{(j)}(y);$$

$$W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x)\, W_y^{(j)}(y);$$

$$X_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\mu j}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x)\, F_y^{(j)}(y);$$

$$Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\mu j}^{(f)} G_x^{(\mu)}(x)\, G_y^{(j)}(y), \qquad (2.30)$$

де $\mathbf{A} = \left(A_{t11}, A_{t12}, \dots, A_{bN_b^{(g)}L_b^{(g)}}\right)$ – вектор невідомих коефіцієнтів. Задля подальшого використання перейменуємо компоненти вектора $\mathbf{A}$ наступним чином: $\mathbf{A} = \left(A_1, A_2, \dots, A_{N_*}\right)$; $N_* = \sum_{i=1}^{N_l} N_i^{(u)} L_i^{(u)} + N_i^{(v)} L_i^{(v)} + N_i^{(w)} L_i^{(w)} + N_i^{(f)} L_i^{(f)} + N_i^{(g)} L_i^{(g)}$;

$U_x^{(1)}(x), U_x^{(2)}(x), \dots, G_y^{\left(L_b^{(g)}\right)}(y)$ – базисні функції.

Для пошуку власних форм використовується лінеаризована модель деформування оболонки. Для цього випадку потенційна енергія оболонки обчислюється наступним чином:

$$\Pi_2(\Xi) = \iint\limits_S \widetilde{\Pi}_2(\Xi) dS. \tag{2.31}$$

Кінетична енергія оболонки має форму:

$$T(\Xi) = \iint\limits_S \tilde{T}(\Xi) dS. \tag{2.32}$$

Для дослідження лінійних коливань оболонки скористаймося принципом Гамільтона:

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} \big(\Pi_2(\Xi) - T(\Xi)\big) dt \to min. \tag{2.33}$$

Підстановка розкладень (2.30) у вирази для механічних енергій (2.31, 2.32) дозволяє представити їх у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi_2(\Xi) &= \widetilde{U}(\mathbf{A}) cos^2(\omega t); \\ T(\Xi) &= \omega^2 \widetilde{K}(\mathbf{A}) sin^2(\omega t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

де функції $\widetilde{U}(\mathbf{A}), \widetilde{K}(\mathbf{A})$ є квадратичними формами відносно компонентів вектору **A.**

Підстановка (2.34) у (2.33) дозволяє представити цю задачу в наступній формі:

$$\widetilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \widetilde{K}(\mathbf{A}) \to min. \tag{2.35}$$

Квадратична форма (23) набуває свого мінімуму в точці екстремуму, що задовольняє системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left(\widetilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \widetilde{K}(\mathbf{A})\right) = 0; j = 1, \dots, N_*. \quad (2.36)$$

Таким чином, рівняння (2.36) описують узагальнену проблему власних значень, розв'язок якої дозволяє знайти власні форми та власні частоти коливань оболонки. Використання власних форм як базисних функцій методу заданих форм дозволяє дискретизувати вирази для енергій оболонки та побудувати її динамічну модель у формі системи звичайних нелінійних диференційних рівнянь II порядку.

2.3 Метод продовження за параметром при аналізі динамічної стійкості тонкостінних конструкцій

Розглянемо систему звичайних диференційних рівнянь у головних координатах, яка описує нелінійну динаміку тонкостінної оболонки:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\omega}\beta\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, \tau), \quad (2.37)$$

де $\boldsymbol{\eta}$ – вектор головних координат системи розмірністю N;

$\boldsymbol{\omega}$ – діагональна матриця розмірністю $N \times N$, що містить в собі квадрати власних частот системи;

β – коефіцієнт дисипації, що пропорційна матриці мас;

$\mathbf{H}(\boldsymbol{\eta})$ – вектор-функція розмірністю N, що містить в собі нелінійні компоненти;

$\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ – N-вимірний вектор періодичної узагальненої сили з періодом Ω.

Перепишемо рівняння (25) у формі Коші та масштабуємо час таким чином, щоб привести параметричну силу до постійного періоду, що дорівнює 1:

$$\tau \to \tau \frac{\Omega}{2\pi};$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}, \tau), \tag{2.38}$$

де $\mathbf{y}$ – вектор розмірності $2N$;

$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}, \tau)$ – вектор-функція розмірності $2N$: $\Gamma_i(\mathbf{y}, \tau) = \frac{2\pi}{\Omega} y_{i+N}$; $\Gamma_{i+N}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{2\pi}{\Omega}\left(-{\omega_i}^2 y_i - \frac{\Omega}{2\pi}{\omega_i}^2 \dot{y}_i - H_i(\boldsymbol{\eta})|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{y}_{1\dots N}} + G_i(\boldsymbol{\eta}, \tau)|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{y}_{1\dots N}}\right)$, $i = 1 \dots N$.

Будемо шукати періодичні розв'язки системи рівнянь (2.38) з періодом, що дорівнює T. Для цього застосуємо метод пристрілки сумісно з методом продовження за довжиною дуги амплітудно-частотного відгуку [224, 225].

Припустимо, що $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y_0}$ – набір начальних умов системи (2.38). Проведемо чисельне інтегрування цієї системи на відрізку $\tau \in [0; T]$. Результатом такого інтегрування стає набір значень $\mathbf{y}_T = \mathbf{y}(T)$. Для того, щоб начальні умови $\mathbf{y_0}$ приводили до періодичного розв'язку з заданим періодом T, достатньо, щоб задовольнялись співвідношення $\mathbf{y_0} = \mathbf{y}_T$. Таким чином, можна сформулювати наступну задачу. Необхідно знайти такі значення $\mathbf{y_0}, \Omega$, які є розв'язком векторного рівняння:

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{y_0}, \Omega) = 0, \tag{2.39}$$

де $\mathbf{\Theta}(\mathbf{y_0}, \Omega) = \mathbf{y}_T - \mathbf{y_0}$.

Для розв'язку рівняння (2.39) застосуємо метод продовження за довжиною дуги. Припустимо, що на i-му кроці знайдено розв'язок (2.39) ${\mathbf{y}_0}^{(i)}$, а дотична до кривої розв'язку є вектором $\left[\frac{d{\mathbf{y}_0}^{(i)}}{ds} \middle| \frac{d\Omega^{(i)}}{ds}\right]^T$. Будемо розшукувати наступний розв'язок (2.39) ${\mathbf{y}_0}^{(i+1)}$ таким чином, щоб довжина проекції вектору ${\mathbf{y}_0}^{(i+1)} - {\mathbf{y}_0}^{(i)}$ на дотичну до кривої розв'язку дорівнювала заданій величині Δs. Для цього доповнимо (2.39) рівнянням:

$$\left(\mathbf{y}_0{}^{(i+1)} - \mathbf{y}_0{}^{(i)}\right) \cdot \frac{d\mathbf{y}_0{}^{(i)}}{ds} + \left(\Omega^{(i+1)} - \Omega^{(i)}\right) \cdot \frac{d\Omega^{(i)}}{ds} = \Delta s, \qquad (2.40)$$

де крапка є оператором скалярного множення.

Розв'язок системи рівнянь (2.39), (2.40) проводиться методом Ньютона:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(j+1)} \\ \Omega^{(i+1)(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(j)} \\ \widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)} \end{bmatrix} - \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Theta}\left(\widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(j)}, \Omega^{(i+1)(j)}\right), j = 0, \dots;$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(0)} \\ \widetilde{\Omega}^{(i+1)(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0{}^{(i)} \\ \Omega^{(i)} \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(j)}$ – оцінка $\mathbf{y}_0{}^{(i+1)}$ на ітерації за номером j;

$\widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)}$ – оцінка $\Omega^{(i+1)}$ на ітерації за номером j;

$\mathbf{J}$ – якобіан системи (2.39), (2.40).

Ітерації завершуються, коли досягнуто достатньо малого значення нев'язки рівняння (2.39).

Якобіан системи (2.39), (2.40) має вигляд:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_1}{d\Omega} \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_2}{d\Omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_{2N}}{d\Omega} \\ \frac{dy_0{}^{(i)}{}_1}{ds} & \frac{dy_0{}^{(i)}{}_2}{ds} & \dots & \frac{dy_0{}^{(i)}{}_{2N}}{ds} & \frac{d\Omega^{(i)}}{ds} \end{bmatrix},$$

де $y_{0,i}, i = 1 \dots 2N$ – i-й компонент вектору $\mathbf{y}_0$.

Обговоримо, як знайти значення $\mathbf{J}$. Його отримано шляхом інтегрування рівнянь в варіаціях. Диференціювання (2.38) за начальними умовами $\mathbf{y}_0$ приводить до виразів:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}(y,\tau)}{\partial \mathbf{y}}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0}. \tag{2.41}$$

Позначимо $\xi_{ij} = \frac{dy_i}{dy_{0,j}}$. Рівняння (2.41) перетворюються на додаткову систему $4N^2$ рівнянь:

$$\dot{\xi_{ij}} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial \Gamma_i(y,\tau)}{\partial y_k}\xi_{kj}. \tag{2.42}$$

$$\xi_{ii}(0) = 1;\ \xi_{ij}(0) = 0, i \neq j, i,j = 1 \dots 2N.$$

Сумісне інтегрування рівнянь (2.38) та (2.42) дозволяє знайти лівий верхній блок розміром $(2N) \times (2N)$ матриці **J**. В момент $\tau = T$ $\left[\frac{\partial \Theta_{1\dots 2N}}{\partial y_{0,1\dots 2N}}\right] = \left[\xi_{1\dots 2N,1\dots 2N}(T)\right] - \mathbf{E}$, де **E** – одинична матриця $(2N) \times (2N)$.

Аналогічно, вектор $\frac{d\mathbf{\Theta}}{d\Omega}$ є розв'язком рівняння:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{1,2N+1} \\ \dots \\ \dot{\xi}_{2N,2N+1} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{y}} \begin{bmatrix} \xi_{1,2N+1} \\ \dots \\ \xi_{2N,2N+1} \end{bmatrix} - \frac{1}{\Omega}\mathbf{\Gamma}; \tag{2.43}$$

$$\xi_{i,2N+1}(0) = 0, i = 1 \dots 2N.$$

Таким чином, для реалізації j-й ітерації методу Ньютона проводиться одночасне інтегрування рівнянь (2.38) з начальних умов $\widetilde{\mathbf{y}_0}^{(i+1)(j)}$, рівнянь (2.42) та (2.43) при значенні частоти параметричного збудження $\widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)}$.

Після того, як значення $\mathbf{y}_0{}^{(i+1)}$, $\Omega^{(i+1)}$ успішно знайдено, обчислюється нове значення вектора дотичної до кривої розв'язку з наступного рівняння:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_1}{d\Omega} \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_2}{d\Omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial\Theta_{2N}}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_{2N}}{d\Omega} \\ \frac{dy_0{}^{(i)}{}_1}{ds} & \frac{dy_0{}^{(i)}{}_2}{ds} & \dots & \frac{dy_0{}^{(i)}{}_{2N}}{ds} & \frac{d\Omega^{(i)}}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy^{(i+1)}{}_1}{ds} \\ \frac{dy^{(i+1)}{}_2}{ds} \\ \dots \\ \frac{dy^{(i+1)}{}_{2N}}{ds} \\ \frac{d\Omega^{(i+1)}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Нарешті, Після розв'язку рівняння (2.44) вектор дотичної необхідно нормувати до значення Евклідової норми 1.

Важливим моментом є також вибір початкового наближення $\mathbf{y}_0{}^{(0)}$. Для його визначення проводиться пошук усталеного режиму розв'язку (2.38) після великої кількості періодів параметричного збудження, який знайдено з довільних ненульових начальних умов $\mathbf{y}(0)$.

Аналіз стійкості знайденої траєкторії проводиться методом мультиплікаторів. Мультиплікатори системи (2.38) є власними значеннями матриці $\left[\xi_{1\dots2N,1\dots2N}(T)\right]$. Якщо в системі присутній хоча б один мультиплікатор, який перевищує за модулем 1, розв'язок є нестійким. Характер переходу мультиплікатора, який є в загальному випадку комплексним, через значення модуля 1, визначає тип біфуркації.

Таким чином, описано метод аналізу частотного відгуку багатошарової тонкостінної композитної конструкцій на базі методу продовження за довжиною дуги частотного відгуку та методу пристрілки, який відрізняється методикою обчислення якобіану, що дозволяє значно підвищити швидкодію методу на кожній ітерації методу Ньютона та зменшити кількість цих ітерацій.

Висновки за розділом 2

В даному розділі запропоновано нові моделі коливань багатошарових оболонок, які базуються на теорії деформацій зсуву високого порядку та

враховують геометрично нелінійне деформування конструкції. Дискретизація моделей проводиться за допомогою методу заданих форм. Для отримання базисних функцій методу заданих форм використовується метод Релея-Рітца, за допомогою якого обчислюються власні форми та частоти коливань оболонки.

Для аналізу нелінійного частотного відгуку оболонки використовується метод продовження за довжиною дуги частотного відгуку сумісно з методом пристрілки. Запропонований метод також дозволяє аналізувати стійкість знайдених розв’язків за методом мультиплікаторів.

Таким чином, у розділі описано нову методику аналізу коливань композитних багатошарових оболонок під дією різних зовнішніх впливів з урахуванням геометрично нелінійного деформування.

Моделі та методи, які описано в цьому розділі, використано в подальших розділах, а також у публікаціях [1–7, 11, 15–20, 25–27, 29, 30, 32, 34, 36–39, 41–46, 48, 50–54], які наведені в Додатку А.

РОЗДІЛ 3

НЕЛІНІЙНІ ПАРАМЕТРИЧНІ ТА АВТОКОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

У розділі розглядаються нелінійні коливання для двох об'єктів: нанокомпозитної циліндричної оболонки та тришарової сендвіч-оболонки. Аналіз здійснюється з єдиних методичних засад.

3.1 Нелінійна динаміка нанокомпозитної циліндричної оболонки в надзвуковому повітряному струмені

Розглянемо циліндричну оболонку постійної товщини h, зроблену з нанокомпозитного матеріалу, що взаємодіє з надзвуковим повітряним струмом. Зв'яжемо з оболонкою криволінійну систему координат (x, θ, z) (рис. 3.1). Для опису напружено-деформованого стану оболонки застосовується модель (2.22), (2.24), (2.25), адаптована для тонкої одношарової оболонки з функціонально градієнтного матеріалу. Основні відмінності цієї конструкції від попередньо розглянутої є наступними:

– одношарова конструкція;

– матеріал оболонки є достатньо жорстким, щоб не зважати на деформації вздовж вісі z;

– функціонально градієнтний за товщиною оболонки матеріал, що приводить до змінних властивостей матеріалу.

Ставиться задача аналізу втрати динамічної стійкості оболонкою внаслідок взаємодії з повітряним струмом. Значущість такого аналізу полягає в тому, що це явище призводить до значного підвищення амплітуд коливань оболонки, та її геометрично нелінійного деформування, а також може призводити до автоколивань оболонки (флатеру).

Розглядається оболонка, яку створено з функціонально градієнтного нанокомпозитного матеріалу. Основні види армування за розподілом вуглецевих нанотрубок в товщині матеріалу наведено на рис. 3.2. Всі види

армування, крім UD, характеризуються змінною концентрацією нанотрубок в товщині матеріалу, що і приводить до створення функціонально градієнтного нанокомпозиту. Всі нанотрубки вважаються орієнтованими вздовж вісі x оболонки.

У табл. 3.1 наведено залежності об'ємних часток нанотрубок в композиті від поперечної координати для різних видів армування. Параметр V_{CNT}^{*} позначає загальну об'ємну частку нанотрубок в композиті; $V_{CNT}(z)$ – об'ємну частку нанотрубок в перерізі, який відповідає значенню поперечної координати z [226–228].

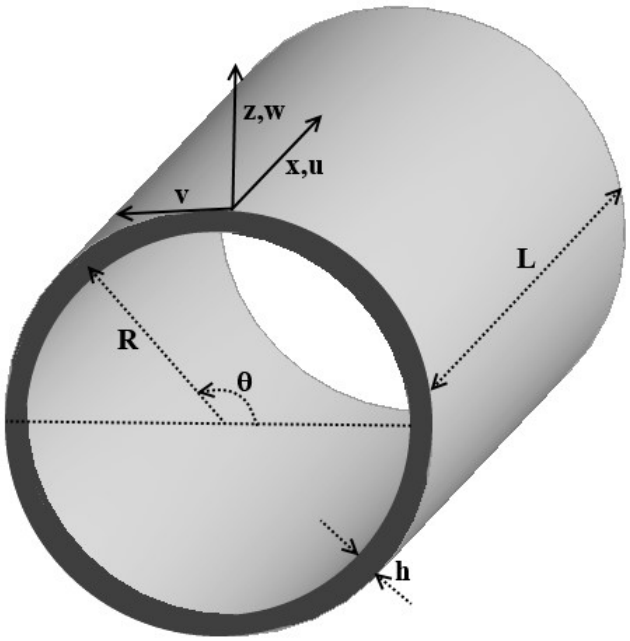


Рисунок 3.1 – Ескіз конструкції, що розглядається

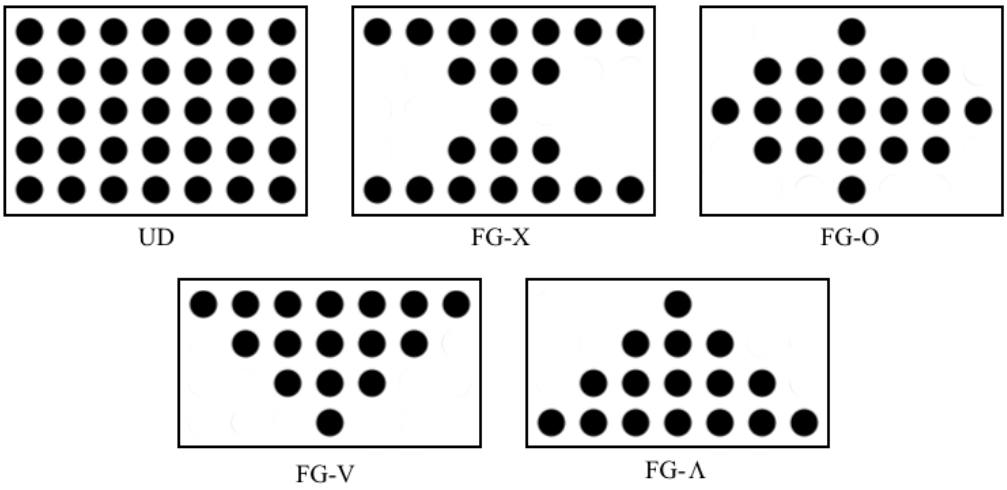


Рисунок 3.2 – Типи армування вуглецевими нанотрубками вздовж координати z

Таблиця 3.1 – Залежність об’ємної частки нанотрубок від координати z для різних типів армування

Тип армування	Об’ємна частка нанотрубок в перерізі z
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^{*};$
FGV-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^{*};$
FG**Λ**-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^{*};$
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4\lvert z\rvert}{h} V_{CNT}^{*};$
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2\left(1 - \frac{2\lvert z\rvert}{h}\right) V_{CNT}^{*}.$

Для оцінки механічних властивостей нанокомпозитного матеріалу застосовується розширене правило змішування [226, 227]:

$$
\begin{gathered}
E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m; \\
E_{22}(z) = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}}; \\
G_{12}(z) = \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} G^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}}; \\
\mu_{12}(z) = V_{CNT}(z) \mu_{12}^{CNT} + V_m(z) \mu^m; \\
\mu_{21}(z) = \frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)} E_{22}(z); \\
\rho(z) = V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m; \\
V_m(z) = 1 - V_{CNT}(z),
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

де $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ – модулі Юнга та модуль зсуву вуглецевих нанотрубок;

μ_{12}^{CNT} – коефіцієнт Пуассона вуглецевих нанотрубок;

η_1, η_2, η_3 – коефіцієнти ефективності армування, які визначаються експериментально;

E^m, G^m – модуль Юнга та модуль зсуву матриці;

ρ^{CNT}, ρ^{m} – густина вуглецевих нанотрубок та матриці відповідно.

При побудові моделі руху оболонки слід враховувати поперечний зсув, тоді як поперечними деформаціями можна знехтувати [229, 230]. Згідно з роботою [237], модулі зсуву нанокомпозиту обчислюються так: $G_{13}(z) = G_{12}(z);\ G_{23}(z) = G_{12}(z)$.

Закон Гука для матеріалу має форму:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{XX}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11}(z) & Q_{12}(z)\\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{XX}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{bmatrix}; \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\theta Z} = G_{23}(z)\gamma_{\theta Z};$$

$$\sigma_{XZ} = G_{13}(z)\gamma_{XZ};$$

$$\sigma_{X\theta} = G_{12}(z)\gamma_{X\theta},$$

де елементи матриці жорсткості

$$Q_{11}(z) = \frac{E_{XX}(z)}{1-\mu_{X\theta}(z)\mu_{\theta X}(z)};\ Q_{22}(z) = \frac{E_{\theta\theta}(z)}{1-\mu_{X\theta}(z)\mu_{\theta X}(z)}; \tag{3.3}$$

$$Q_{12}(z) = \frac{\mu_{\theta X}(z)E_{XX}(z)}{1-\mu_{X\theta}(z)\mu_{\theta X}(z)};$$

$\gamma_{XZ}, \gamma_{\theta Z}$ – деформації зсуву;

$\varepsilon_{XX}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{\theta Z}, \gamma_{XZ}, \gamma_{X\theta}$ – елементи тензору деформацій;

$\sigma_{XZ}, \sigma_{\theta Z}$ – напруження зсуву;

$\sigma_{XX}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{X\theta}$ елементи тензору напружень;

E_{XX} – модуль Юнга матеріалу вздовж вісі x;

$E_{\theta\theta}$ – модуль Юнга матеріалу вздовж вісі θ;

$\mu_{X\theta}, \mu_{\theta X}$ – коефіцієнти Пуассона в відповідних напрямках.

3.1.1 Рівняння руху

Для побудови рівнянь руху системи застосовується модель оболонки(2.22), (2.24), (2.26). Проєкції переміщень точок оболонки, що знаходяться на відстані z від серединної поверхні, позначимо $u_x(x,\theta,t,z), u_\theta(x,\theta,t,z)$ та $u_z(x,\theta,t,z)$. Застосовується теорія зсуву високого порядку [218, 215]:

$$u_x(x,\theta,t,z) = u(x,\theta,t) + z\phi_1(x,\theta,t) + z^2\psi_1(x,\theta,t) + z^3\gamma_1(x,\theta,t); \quad (3.4)$$

$$u_\theta(x,\theta,t,z) = \left(1+\frac{z}{R}\right)v(x,\theta,t) + z\phi_2(x,\theta,t) + z^2\psi_2(x,\theta,t) + z^3\gamma_2(x,\theta,t);$$

$$u_z(x,\theta,t,z) = w(x,\theta,t),$$

де R – радіус циліндричної оболонки;

ϕ_1 та ϕ_2 – кути обертання нормалі до серединної поверхні навколо вісей θ та x відповідно. Нелінійна динаміка оболонки описується п'ятьма функціями $(x,\theta,t), v(x,\theta,t), w(x,\theta,t), \quad \phi_1(x,\theta,t), \ \phi_2(x,\theta,t)$. Невідомі функції $\psi_1(x,\theta,t), \gamma_1(x,\theta,t), \psi_2(x,\theta,t), \gamma_2(x,\theta,t)$ з розкладень (3.4) визначаються з граничних умов:

$$\gamma_{XZ}|_{Z=\pm 0.5h} = 0; \quad (3.5)$$

$$\gamma_{\theta Z}|_{Z=\pm 0.5h} = 0,$$

де

$$\gamma_{XZ} = \frac{\partial u_X}{\partial z} + \frac{\partial u_Z}{\partial x};$$

$$\gamma_{\theta Z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{1+zR^{-1}}\left(\frac{\partial u_Z}{R\partial\theta} - \frac{u_\theta}{R}\right). \quad (3.6)$$

Підставляючи (3.4) у (3.5), для невідомих функцій маємо:

$$\psi_1 = 0; \ \ \gamma_1 = -\frac{4}{3h^2}\left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\phi_2}{2R}; \quad (3.7)$$

$$\gamma_2 = \frac{h^2-8R^2}{6R^3h^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{h^2+8R^2}{6R^2h^2}\phi_2 - \frac{v}{3R^3}.$$

Кінетична енергія циліндричної оболонки представляється у формі:

$$T = 0.5\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-0.5h}^{0.5h}\rho(z)\left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)dzdxRd\theta, \quad (3.8)$$

де $\dot{u}_X = \frac{\partial u_X}{\partial t}$;

L – довжина оболонки.

З (3.8), враховуючи (3.4), для кінетичної енергії маємо:

$$T = 0.5\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-0.5h}^{0.5h}\rho(z)\left\{\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2+2z\left(\frac{\dot{v}^2}{R}+\dot{u}\dot{\phi}_1+\dot{v}\dot{\phi}_2\right)+\right. \quad (3.9)$$

$$z^2\left(\frac{\dot{v}^2}{R^2}+\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2+\frac{2}{R}\dot{v}\dot{\phi}_2+2\dot{v}\dot{\psi}_2\right)+2z^3\left(\dot{u}\dot{\gamma}_1+\frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R}+\dot{\gamma}_2\dot{v}+\dot{\phi}_2\dot{\psi}_2\right)+$$

$$\left.z^4\left(2\dot{\phi}_1\dot{\gamma}_1+\dot{\psi}_2^2+\frac{2}{R}\dot{\gamma}_2\dot{v}+2\dot{\phi}_2\dot{\gamma}_2\right)+z^5 2\dot{\psi}_2\dot{\gamma}_2+z^6(\dot{\gamma}_1^2+\dot{\gamma}_2^2)\right\}\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{z}{R}\right)dzdxRd\theta.$$

В роботі [231] доведено, що можна застосувати наступне наближене співвідношення: $1+\frac{z}{R}\approx 1$. Тоді кінетична енергія набуває вигляду:

$$T = 0.5\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left\{r_0(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)+2r_1\left(\frac{\dot{v}^2}{R}+\dot{u}\dot{\phi}_1+\dot{v}\dot{\phi}_2\right)+\right.$$

$$+r_2\left(\frac{\dot{v}^2}{R^2}+\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2+\frac{2}{R}\dot{v}\dot{\phi}_2+2\dot{v}\dot{\psi}_2\right)+2r_3\left(\dot{u}\dot{\gamma}_1+\frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R}+\dot{\gamma}_2\dot{v}+\dot{\phi}_2\dot{\psi}_2\right)+$$

$$\left.+r_4\left(2\dot{\phi}_1\dot{\gamma}_1+\dot{\psi}_2^2+\frac{2}{R}\dot{\gamma}_2\dot{v}+2\dot{\phi}_2\dot{\gamma}_2\right)+r_5 2\dot{\psi}_2\dot{\gamma}_2+r_6(\dot{\gamma}_1^2+\dot{\gamma}_2^2)\right\}dxRd\theta, \quad (3.10)$$

де

$$r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i\rho(z)dz;\ \ i=0,\dots,6.$$

Потенційна енергія оболонки обчислюється наступним чином:

$$\Pi = $$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (\sigma_{XX}\varepsilon_{XX} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta Z}\gamma_{\theta Z} + \sigma_{XZ}\gamma_{XZ} + \sigma_{X\theta}\gamma_{X\theta})\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{Z}{R}\right) dzRd\theta dx. \qquad (3.11)$$

Підстановка рівнянь (3.2) у потенційну енергію (3.11) дозволяє виразити її через деформації оболонки:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (Q_{11}\varepsilon_{XX}^2 + 2Q_{12}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{XX} + Q_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^2 + G_{23}\gamma_{\theta Z}^2 + G_{13}\gamma_{XZ}^2 +$$

$$+ G_{12}\gamma_{X\theta}^2)\left(1 + \frac{Z}{R}\right) dzRd\theta dx. \qquad (3.12)$$

Пояснимо, яким чином обчислюються деформації ε_{XX}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\gamma_{\theta Z}$, γ_{XZ}, $\gamma_{X\theta}$ в (3.12). Для геометрично нелінійного деформування оболонки співвідношення між деформаціями та переміщеннями має наступний вигляд [216]:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u_X}{\partial x} + 0.5\left[\left(\frac{\partial u_X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_Z}{\partial x}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R(1 + zR^{-1})}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_Z\right) + \frac{1}{2R^2(1 + zR^{-1})^2}\left[\left(\frac{\partial u_X}{\partial \theta}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_Z\right)^2 + \left(-\frac{\partial u_Z}{\partial \theta} + u_\theta\right)^2\right];$$

$$\gamma_{X\theta} = \frac{1}{R(1 + zR^{-1})}\frac{\partial u_X}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R(1 + zR^{-1})}\left\{\frac{\partial u_X}{\partial \theta}\frac{\partial u_X}{\partial x} + \right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_Z\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{\partial u_Z}{\partial x}\left(-\frac{\partial u_Z}{\partial \theta} + u_\theta\right)\right\}. \qquad (3.13)$$

Спростимо наведені вирази. З урахуванням (3.4), (3.6) та (3.13) після виділення членів при однакових ступенях z маємо для деформацій:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{XX} &= \varepsilon_{XX,0} + zk_{XX}^{(0)} + z^2k_{XX}^{(1)} + z^3k_{XX}^{(2)};\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta,0} + zk_{\theta\theta}^{(0)} + z^2k_{\theta\theta}^{(1)} + z^3k_{\theta\theta}^{(2)};\\
\gamma_{X\theta} &= \gamma_{X\theta,0} + zk_{X\theta}^{(0)} + z^2k_{X\theta}^{(1)} + z^3k_{X\theta}^{(2)};\\
\gamma_{XZ} &= \gamma_{XZ,0} + zk_{XZ}^{(0)} + z^2k_{XZ}^{(1)} + z^3k_{XZ}^{(2)};\\
\gamma_{\theta Z} &= \gamma_{\theta Z,0} + zk_{\theta Z}^{(0)} + z^2k_{\theta Z}^{(1)} + z^3k_{\theta Z}^{(2)},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

де коефіцієнти розкладень мають вигляд:

$$\varepsilon_{XX,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]; \tag{3.15}$$

$$k_{XX}^{(0)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x};\ k_{XX}^{(1)} = 0;$$

$$k_{XX}^{(2)} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$\varepsilon_{\theta\theta,0} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^2 + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right\};$$

$$k_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta};$$

$$k_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{2R^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \theta};$$

$$k_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{4R^2 + h^2}{3R^4h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3h^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{3R^4}\frac{\partial v}{\partial \theta};$$

$$\gamma_{X\theta,0} = \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\};$$

$$k_{X\theta}^{(0)} = \frac{\partial \phi_1}{R\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{R\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x};$$

$$k_{X\theta}^{(1)} = -\frac{\partial \phi_1}{R^2\partial \theta} + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial \phi_2}{2R\partial x};$$

$$k_{X\theta}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2R}\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{h^2 + 8R^2}{6R^2h^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{1}{3R^3}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2 - 16R^2}{6R^3h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta};$$

$$\gamma_{XZ,0} = \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$k_{XZ}^{(0)} = 0;$$

$$k_{XZ}^{(1)} = -\frac{4}{h^2}\left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right); k_{XZ}^{(2)} = 0;$$

$$\gamma_{\theta Z,0} = \phi_2 + \frac{\partial w}{R\partial\theta};\ k_{\theta Z}^{(0)} = 0;$$

$$k_{\theta Z}^{(1)} = -\frac{4}{Rh^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{4}{h^2}\phi_2;$$

$$k_{\theta Z}^{(2)} = \frac{4R^2 + h^2}{3R^4h^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3h^2}\phi_2 + \frac{v}{3R^4}.$$

Таким чином, розподіл деформацій за координатою z описується виразами (3.14). Параметри $k_{XX}^{(0)}, \dots, k_{XX}^{(2)}, k_{\theta\theta}^{(0)}, \dots, k_{\theta\theta}^{(2)}, k_{X\theta}^{(0)}, \dots, k_{X\theta}^{(2)}$ описують зміну кривизни та скручування оболонки. У роботах [214, 216] показано, що нелінійні члени слабко впливають на зміну кривизни оболонки, тому в цих виразах враховується лише лінійна залежність зміни кривизни оболонки від проекцій переміщень. Тому вирази $\varepsilon_{XX,0}; \varepsilon_{\theta\theta,0}; \gamma_{X\theta,0}$ є нелінійними функціями проекцій переміщень, а деформації зсуву γ_{XZ} та $\gamma_{\theta Z}$ є лінійними функціями проекцій переміщень.

Підстановка рівнянь (3.14) в формулу для потенційної енергії (3.12) та проведення інтегрування за змінною z приводить потенційну енергію до форми:

$$\Pi = 0.5\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{6}\widetilde{\Pi}_\nu\right)dxRd\theta, \qquad (3.16)$$

де

$$\widetilde{\Pi}_0 = Q_{11}^{(0)}\varepsilon_{XX,0}^2 + 2Q_{12}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta,0}\varepsilon_{XX,0} + Q_{22}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta,0}^2 + G_{23}^{(0)}\gamma_{\theta Z,0}^2 + G_{12}^{(0)}\gamma_{X\theta,0}^2 + \\ + G_{13}^{(0)}\gamma_{XZ,0}^2;$$

$$\widetilde{\Pi}_1 = 2Q_{11}^{(1)}\varepsilon_{XX,0}k_{XX}^{(0)} + 2Q_{22}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(0)} + 2Q_{12}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{XX}^{(0)} + 2Q_{12}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(0)}\varepsilon_{XX,0} + \\ + 2G_{12}^{(1)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(0)};$$

$$\widetilde{\prod}_2 = 2Q_{12}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(2)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(0)2} + 2G_{13}^{(2)}\gamma_{XZ,0}k_{XZ}^{(1)} + 2G_{23}^{(2)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(1)} + Q_{11}^{(2)}k_{XX}^{(0)2} + 2Q_{22}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(1)} + 2Q_{12}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{XX,0} + G_{12}^{(2)}k_{X\theta}^{(0)2};$$

$$\widetilde{\prod}_3 = 2G_{12}^{(3)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(2)} + 2G_{12}^{(3)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(1)} + 2G_{23}^{(3)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(2)} + 2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{XX,0} + 2Q_{22}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(1)} + 2Q_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{XX}^{(2)} + 2Q_{11}^{(3)}\varepsilon_{XX,0}k_{XX}^{(2)} + + 2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(0)};$$

$$\widetilde{\prod}_4 = Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(1)2} + G_{23}^{(4)}k_{\theta Z}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(2)} + G_{13}^{(4)}k_{XZ}^{(1)2} + G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(2)} + 2Q_{11}^{(4)}k_{XX}^{(0)}k_{XX}^{(2)};$$

$$\widetilde{\prod}_5 = 2G_{23}^{(5)}k_{\theta Z}^{(1)}k_{\theta Z}^{(2)} + 2Q_{12}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(2)} + 2G_{12}^{(5)}k_{X\theta}^{(1)}k_{X\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(2)};$$

$$\widetilde{\prod}_6 = 2Q_{12}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(2)} + Q_{11}^{(6)}k_{XX}^{(2)2} + Q_{22}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)2} + G_{23}^{(6)}k_{\theta Z}^{(2)2} + G_{12}^{(6)}k_{X\theta}^{(2)2};$$

$$\left(Q_{11}^{(i)}, Q_{12}^{(i)}, Q_{22}^{(i)}, G_{23}^{(i)}, G_{13}^{(i)}, G_{12}^{(i)}\right) = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i (Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, G_{23}, G_{13}, G_{12})dz\,. \quad (3.17)$$

Таким чином, отримано вирази (3.10) для кінетичної та (3.17) для потенційної енергій нанокомпозитної циліндричної оболонки

Розглянемо модель навантаження оболонки. На оболонку діє надзвуковий газовий струм, кут атаки якого є паралельним до твірної лінії оболонки. Взаємодія оболонки з газом описується лінійною поршневою теорією [206, 210–212]. Згідно з поршневою теорією, формула для радіального аеродинамічного тиску має вигляд:

$$p = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2 - 1}}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2R\sqrt{M_*^2 - 1}}\right], \quad (3.18)$$

де γ – адіабатична експонента;

p_∞ – статичний тиск вільного струму;

M_* – число Маха;

a_∞ – швидкість звуку вільного струму.

Віртуальна робота тиску (3.18) представляється наступним чином:

$$\delta A = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2-1}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{w}{2R\sqrt{M_*^2-1}} \right] \delta w dx R d\theta, \qquad (3.19)$$

де δw – варіація радіального переміщення.

Вираз (3.19) містить в собі аеродинамічне демпфування, яке при деяких умовах є набагато більшим, ніж втрати енергії в нанокомпозиті. При недостатній адгезії між вуглецевими нанотрубками та полімерною матрицею між ними відбувається тертя, яке призводить до значного демпфування в матеріалі нанокомпозиту [232, 233]. Однак у випадку, коли деформування нанотрубок відбувається разом з деформуванням матриці, їхнє відносне ковзання припиняється [234–236]. У роботах [233, 237] наведено експериментальні значення коефіцієнту демпфування в нанокомпозиті. В кількох випадках демпфування в матеріалі було набагато менше за аеродинамічне демпфування, яке описано в (3.19). Тому в подальшому аналізі враховується лише аеродинамічне демпфування.

Доповнимо модель умовами закріплення оболонки. Для шарнірно опертої оболонки, що розглядається, граничні умови є наступними:

$$w|_{x=0} = v|_{x=0} = \phi_2|_{x=0} = w|_{x=L} = v|_{x=L} = \phi_2|_{x=L} = 0; \qquad (3.20)$$

$$N_X|_{x=0} = M_X|_{x=0} = N_X|_{x=L} = M_X|_{x=L} = 0, \qquad (3.21)$$

де N_X – мембранна сила;

M_X – мембранний момент.

3.1.2 Аналіз власних коливань оболонки

Аналіз лінійних власних коливань оболонки проводиться описаним методом Релея-Рітца. При застосуванні цього методу розв'язок достатньо обмежити тільки геометричними граничними умовами (3.20), силові граничні умови (3.21) при цьому автоматично задовольняються [238].

Лінійні коливання циліндричної оболонки представляються в наступній формі [239, 240]:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x)cos(n\theta) \\ V_n(x)sin(n\theta) \\ W_n(x)\cos(n\theta) \\ X_n(x)\cos(n\theta) \\ Y_n(x)\sin(n\theta) \end{bmatrix} cos(\omega t), \tag{3.22}$$

де функції $U_n(x), V_n(x), W_n(x), X_n(x), Y_n(x)$ мають вигляд:

$$U_n(x) = \sum_{m=1}^{N_U} A_m^{(U)} \cos(\lambda_m x);$$

$$V_n(x) = \sum_{m=1}^{N_V} A_m^{(V)} \sin(\lambda_m x);$$

$$W_n(x) = \sum_{m=1}^{N_W} A_m^{(W)} \sin(\lambda_m x);$$

$$X_n(x) = \sum_{m=1}^{N_X} A_m^{(X)} \cos(\lambda_m x);$$

$$Y_n(x) = \sum_{m=1}^{N_Y} A_m^{(Y)} \sin(\lambda_m x); \lambda_m = \frac{m\pi}{L}, \tag{3.23}$$

де N_U, N_V, N_W, N_X, N_Y – глибина розкладень;

n – кількість хвиль в окружному напрямку;

m – кількість поздовжніх напівхвиль;

$A_m^{(U)}$, $A_m^{(V)}$, $A_m^{(W)}$, $A_m^{(X)}$, $A_m^{(Y)}$ – коефіцієнти розкладень;

L – довжина оболонки.

Застосування методу Релея-Рітца [238] дозволяє отримати параметри вільних коливань конструкції з розв'язку проблеми власних значень.

Для аналізу автоколивань побудуємо динамічну систему зі скінченною кількістю ступенів свободи за допомогою методу заданих форм. При цьому автоколивання циліндричної оболонки апроксимуються наступними розкладеннями [215, 241, 242]:

$$w(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{N_1}[A_m(t)cos(n\theta) + B_m(t)sin(n\theta)]sin(\lambda_m x) + \\ + \sum_{m=1}^{N_2} C_m(t)\, sin(\lambda_{2m-1}x);$$

$$u(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{N_1+m}(t)cos(n\theta) + B_{N_1+m}(t)sin(n\theta)\right]cos(\lambda_m x) + \\ + \sum_{m=1}^{N_2} C_{N_2+m}(t)\, cos(\lambda_{2m-1}x);$$

$$v(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{2N_1+m}(t)cos(n\theta) + B_{2N_1+m}(t)sin(n\theta)\right]sin(\lambda_m x);$$

$$\phi_1(x,\theta,t) = \\ = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{3N_1+m}(t)cos(n\theta) + B_{3N_1+m}(t)sin(n\theta)\right]cos(\lambda_m x) + \\ + \sum_{m=1}^{N_2} C_{2N_2+m}(t)\, cos(\lambda_{2m-1}x);$$

$$\phi_2(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{4N_1+m}(t)cos(n\theta) + B_{4N_1+m}(t)sin(n\theta)\right]sin(\lambda_m x), \quad (3.24)$$

де

$\mathbf{q} = [A_1, \dots, A_{3N_1}, B_1, \dots, B_{3N_1}, C_1, \dots, C_{2N_2}, A_{3N_1+1}, \dots, A_{5N_1}, B_{3N_1+1}, \dots, B_{5N_1}, C_{2N_2+1}, \dots, C_{3N_2}] \equiv [q_1, \dots, q_{N_*}]$ – вектор узагальнених координат розмірністю $N_* = 10N_1 + 3N_2$. Оскільки оболонка здійснює геометрично нелінійні коливання, в розкладеннях (3.24) враховано пари спряжених форм та вісесиметричні форми.

Рівняння руху оболонки будуються в формі рівнянь Лагранжа II роду. Після підстановки (3.24) до виразу (3.10) та проведення інтегрування, кінетична енергія представляється у вигляді квадратичної форми узагальнених швидкостей $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_*})$. Підстановка (3.24) у вираз (3.16) з наступним інтегруванням дозволяє виразити потенційну енергію як функцію узагальнених координат $\prod = \prod(q_1, \dots, q_{N_*})$. Ця функція містить узагальнені координати в другому, третьому та четвертому ступенях. В цих умовах рівняння Лагранжа відносно узагальнених координат мають вигляд:

$$\sum_{j=1}^{N_*}(m_{ij}\ddot{q}_j + K_{ij}q_j) = \sum_{\nu=1}^{N_*}\sum_{j=1}^{j\le\nu}\alpha_{\nu j}^{(i)}q_\nu q_j + \sum_{\nu=1}^{N_*}\sum_{j=1}^{j\le\nu}\sum_{j_1=1}^{j_1\le j}\beta_{\nu j j_1}^{(i)}q_\nu q_j q_{j_1} + Q_i \ ; \quad (3.25)$$

$$i = 1, \dots, N_*,$$

де $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}_{i=1,\dots,N_*}^{j=1,\dots,N_*}$; $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}_{i=1,\dots,N_*}^{j=1,\dots,N_*}$ – матриці мас та жорсткостей;

$\alpha_{\nu j}^{(i)}, \beta_{\nu j j_1}^{(i)}$ – параметри, що описують геометрично нелінійні коливання конструкції;

$\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_{N_*}]$ – узагальнені сили, які виражаються наступним чином:

$$Q_\nu = \sum_{m=1}^{N_1}(\lambda_{\nu m}q_m + \eta_{\nu m}\dot{q}_m); \quad (3.26)$$

$$Q_{3N_1+\nu} = \sum_{m=1}^{N_1} \left(\lambda_{\nu m} q_{3N_1+m} + \eta_{\nu m} \dot{q}_{3N_1+m}\right);\ \ \nu = 1, \dots, N_1; \tag{3.27}$$

$$Q_{6N_1+\nu} = \sum_{m=1}^{N_2} \left(\hat{\lambda}_{\nu m} q_{6N_1+m} + \hat{\eta}_{\nu m} \dot{q}_{6N_1+m}\right); \nu = 1, \dots, N_2, \tag{3.28}$$

$$\lambda_{\nu m} = -\xi_1 \pi \int_0^L \left(\lambda_m cos(\lambda_m x) - \xi_3 sin(\lambda_m x)\right) sin(\lambda_\nu x) dx; \tag{3.29}$$

$$\hat{\lambda}_{\nu m} = -2\xi_1 \pi \int_0^L \left(\lambda_{2m-1} cos(\lambda_{2m-1} x) - \xi_3 sin(\lambda_{2m-1} x)\right) sin(\lambda_{2\nu-1} x) dx; \tag{3.30}$$

$$\hat{\eta}_{\nu m} = -2\xi_1 \pi \xi_2 \int_0^L sin(\lambda_{2m-1} x) sin(\lambda_{2\nu-1} x) dx\ ;\ \nu = 1, \dots, N_2; m =$$

$$= 1, \dots, N_2; \tag{3.31}$$

$$\eta_{\nu m} = -\xi_1 \pi \xi_2 \int_0^L sin(\lambda_m x) sin(\lambda_\nu x) dx, \tag{3.32}$$

де $\xi_1 = \frac{\gamma p_\infty M_*^2 R}{\sqrt{M_*^2 - 1}}$; $\xi_2 = \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)}$; $\xi_3 = \frac{1}{2R\sqrt{M_*^2 - 1}}$. (3.33)

У систему (3.25) входять квадратичні та кубічні мономи узагальнених координат, які описують геометрично нелінійні коливання конструкції. Таким чином, автономна динамічна система (3.25) описує автоколивання оболонки. Узагальнені сили Q_i при цьому характеризують обмін енергією між надзвуковим струмом та циліндричною оболонкою.

3.1.3 Втрата динамічної стійкості нанокомпозитною оболонкою при взаємодії з надзвуковим повітряним струменем

Перед проведенням аналізу автоколивань конструкції проводиться аналіз динамічної нестійкості тривіального положення рівноваги. Для цього система (3.25) обмежується лише лінійною частиною, оскільки поблизу

положення рівноваги переміщення точок оболонки є малими. В цих умовах динамічна система може бути представлена в наступній матричній формі:

$$\mathbf{M\ddot{q} + Kq = \Lambda q + H\dot{q}}, \tag{3.34}$$

де $\mathbf{Q = \Lambda q + H\dot{q}}$ – вектор узагальнених сил, який описує взаємодію циліндричної оболонки з газовим струмом. Динамічна система (3.34) переписується в формі Коші у фазових координатах $\boldsymbol{y} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P\,y}, \tag{3.35}$$

де

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{M^{-1}(\Lambda - K)} & \mathbf{M^{-1}H} \end{bmatrix};$$

I – одинична матриця. Для аналізу стійкості тривіального положення рівноваги $\mathbf{y} \equiv 0$ застосовується метод характеристичних експонент [243, 244]. Для цього обчислюються параметри ξ з наступної задачі на власні значення:

$$det[\mathbf{P} - \xi\mathbf{I}] = 0. \tag{3.36}$$

Стійкість тривіального положення рівноваги визначається з чисельних значень характеристичних експонент ξ [244].

3.1.4 Автоколивання нанокомпозитної циліндричної оболонки в надзвуковому повітряному струмені

Тривіальне положення рівноваги динамічної системи (3.25) $\mathbf{q} \equiv 0$ втрачає стійкість внаслідок взаємодії оболонки з газовим струмом, що призводить до автоколивань. Для дослідження цих коливань застосовується

метод гармонійного балансу. Періодичні автоколивання представляються в формі [234, 235]:

$$q_i = A_i^{(0)} + A_i cos(\Omega t) + B_i sin(\Omega t); i = 1, \dots, N_*, \qquad (3.37)$$

де Ω – частота автоколивань. Результати чисельного моделювання свідчать, що наближення (3.37) достатньо для аналізу автоколивань конструкції

Невідомими величинами задачі є параметри розкладення (3.37) $\Omega, A_1^{(0)}, \dots, A_{N_*}^{(0)}; A_1, \dots, A_{N_*}, B_1, \dots, B_{N_*}$. Оскільки динамічна система (3.25) є автономною, час може бути зсунуто на довільну константу t_0: $t \to t + t_0$. Застосування такої заміни дозволяє зсунути розв'язок таким чином, що $B_1 = 0$.

Для подальшого застосування методу гармонійного балансу, розкладення (3.37) підставляється до (3.25). При цьому використовуються наступні перетворення:

$$q_\nu q_j = F_{\nu j}^{(0)} + F_{\nu j}^{(C)} cos(\Omega t) + F_{\nu j}^{(S)} sin(\Omega t);\ \nu = 1, \dots, N_*; j = 1, \dots, \nu; \qquad (3.38)$$

$$q_\nu q_j q_{j_1} = G_{\nu j j_1}^{(0)} + G_{\nu j j_1}^{(C)} cos(\Omega t) + G_{\nu j j_1}^{(S)} sin(\Omega t); \qquad (3.39)$$

$$\nu = 1, \dots, N_*; j = 1, \dots, \nu;\ j_1 = 1, \dots, j,$$

де $F_{\nu j}^{(0)}, F_{\nu j}^{(C)}, F_{\nu j}^{(S)}, G_{\nu j j_1}^{(0)}, G_{\nu j j_1}^{(C)}, G_{\nu j j_1}^{(S)}$ – функції амплітуд (3.37), наведені нижче:

$$F_{\nu j}^{(0)} = A_\nu^{(0)} A_j^{(0)} + 0.5 A_\nu A_j + 0.5 B_\nu B_j;$$

$$F_{\nu j}^{(C)} = A_\nu^{(0)} A_j + A_\nu A_j^{(0)};\ F_{\nu j}^{(S)} = A_\nu^{(0)} B_j + B_\nu A_j^{(0)};$$

$$G_{\nu j j_1}^{(0)} = A_\nu^{(0)} A_j^{(0)} A_{j_1}^{(0)} + 0.5 A_\nu^{(0)} A_j A_{j_1} + 0.5 A_\nu^{(0)} B_j B_{j_1} + 0.5 A_\nu A_j^{(0)} A_{j_1} +$$

$$+0.5 A_\nu A_j A_{j_1}^{(0)} + 0.5 B_\nu A_j^{(0)} B_{j_1} + 0.5 B_\nu B_j A_{j_1}^{(0)};$$

$$G_{\nu j j_1}^{(C)} = A_\nu^{(0)} A_j^{(0)} A_{j_1} + A_\nu^{(0)} A_j A_{j_1}^{(0)} + A_\nu A_j^{(0)} A_{j_1}^{(0)} + 0.75 A_\nu A_j A_{j_1} + 0.25 A_\nu B_j B_{j_1} +$$

$$+0.25 B_\nu A_j B_{j_1} + 0.25 B_\nu B_j A_{j_1};$$

$$G_{\nu j j_1}^{(S)} = A_\nu^{(0)} A_j^{(0)} B_{j_1} + A_\nu^{(0)} B_j A_{j_1}^{(0)} + B_\nu A_j^{(0)} A_{j_1}^{(0)} + 0.25 A_\nu A_j B_{j_1} + 0.75 B_\nu B_j B_{j_1} +$$
$$+0.25 A_\nu B_j A_{j_1} + 0.25 B_\nu A_j A_{j_1}.$$

В результаті зазначених перетворень автоколивання описуються системою нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\Omega, A_1^{(0)}, \dots, A_{N_*}^{(0)};\ A_1, \dots, A_{N_*}, B_1, \dots, B_{N_*}$:

$$\sum_{j=1}^{N_*} K_{ij} A_j^{(0)} - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} F_{\nu j}^{(0)} - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} G_{\nu j j_1}^{(0)} - \sum_{j=1}^{N_*} \lambda_{ij} A_j^{(0)} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N_*} \left(K_{ij} A_j - m_{ij} \Omega^2 A_j\right) - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} F_{\nu j}^{(C)} - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} G_{\nu j j_1}^{(C)} -$$
$$\sum_{j=1}^{N_*} \left(\lambda_{ij} A_j + \Omega \eta_{ij} B_j\right) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N_*} \left(K_{ij} B_j - m_{ij} \Omega^2 B_j\right) - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} F_{\nu j}^{(S)} - \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} G_{\nu j j_1}^{(S)} -$$
$$\sum_{j=1}^{N_*} \left(\lambda_{ij} B_j - \Omega \eta_{ij} A_j\right) = 0;$$
$$i = 1, \dots, N_*. \qquad (3.40)$$

Таким чином, отримано систему $3N_*$ нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $3N_*$ невідомих. Для розв'язання цієї системи застосовується метод Ньютона. Аналіз автоколивань проводиться для кожного заданого значення p_∞.

3.1.5 Результати чисельного аналізу

Для аналізу нелінійних процесів у конструкції важливо розуміти, якими є властивості лінійних коливань оболонки. Поміж іншим, визначимо

достатню кількість членів у розкладеннях (3.4) та (3.16) для адекватного опису коливань оболонки з різними типами армування вуглецевими нанотрубками.

Аналіз лінійних коливань. Аналіз параметрів лінійних коливань системи (3.25) проводиться, виходячи з різної кількості членів розкладення (3.4) та потенційної енергії (3.16). Розрахунки було проведено для трьох типів розкладень, які будемо називати моделями:

1. У розкладеннях (3.4) враховано лінійні члени по z. У потенційній енергії (3.16) враховано члени до z^3.

2. У розкладеннях (3.4) та потенційних енергіях враховуються члени до z^2.

3. У розкладеннях (3.4) та потенційних енергіях враховуються всі члени.

Проводиться аналіз лінійних коливань оболонки методом Релея-Рітца. Оболонка вважається тонкою, якщо $\frac{h}{R} < 0.05$ [245]. Якщо $0.05 < \frac{h}{R} < 0.33$, оболонка вважається товстою.

Результати аналізу лінійних коливань, проведеного методом Релея-Рітца, порівняно з результатами аналізу методом скінченних елементів (МСЕ) у середовищі ANSYS з метою верифікації отриманих власних частот та вибору моделі, яка адекватно описує лінійні коливання системи.

Опишемо проведені чисельні експерименти. Для розрахунку властивостей нанокомпозитного матеріалу необхідні механічні характеристики вуглецевих нанотрубок та композитної матриці згідно з [240, 244]. Вони приймаються такими:

$$E_{11}^{CNT} = 5.6466 \text{ ТПа}; E_{22}^{CNT} = 7.08 \text{ ТПа}; G_{12}^{CNT} = 1.9445 \text{ ТПа};$$
$$\mu_{12}^{CNT} = 0.175; \rho^{CNT} = 1400 \ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3};$$
$$E^m = 2.5 \text{ ГПа}; \mu^m = 0.34; \rho^m = 1150 \ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}.$$

Параметри ефективності армування η_1, η_2, η_3 вказано в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Параметри ефективності армування

V_{CNT}^*	η_1	η_2	η_3
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

У табл. 3.3 наведено результати розрахунків для такої оболонки, яку створено з нанокомпозиту з FGV-армуванням. Об'ємна частка нанотрубок складає $V_{CNT}^* = 0.12$. Геометричні параметри оболонки є наступними:

$$R = 0.25 \text{ м}; h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \frac{h}{R} = 0.02;\ L = 1 \text{ м}. \qquad (3.41)$$

Таблиця 3.3 – Власні частоти (Гц) циліндричної оболонки з геометричними параметрами (3.41)

	n	Власні частоти, отримані МСЕ, Гц	Власні частоти, отримані методом Релея-Рітца за різними моделями, Гц					
			1	Відносна похибка	2	Відносна похибка	3	Відносна похибка
1	4	131.01	128.1	0.02	128.17	0.022	128.1	0.022
2	3	134.66	132.21	0.018	132.22	0.018	132.20	0.018
3	5	160.9	158.19	0.017	158.32	0.016	158.15	0.017
4	2	176.93	176.86	$4 \cdot 10^{-4}$	176.87	$3.39 \cdot \cdot 10^{-4}$	176.87	$3.39 \cdot \cdot 10^{-4}$
5	6	216.26	212.2	0.019	212.42	0.018	212.12	0.019

З табл. 3.3 видно, що власні частоти, отримані за допомогою різних моделей, є близькими. Це пояснюється тим, що оболонка є тонкою.

Таким чином, лінійного розкладення переміщень (3.4) за z достатньо для визначення власних частот оболонки з параметрами (3.41).

Відмітимо, що Всі власні частоти оболонки, які відповідають частотам з табл. 3.3, є спряженими, що буде враховано в розкладеннях (3.24).

Розглянемо, як на цей результат впливають різні параметри геометрії та армування матеріалу оболонки. Було проведено розрахунки власних коливань оболонок різної товщини та довжини, з різною об'ємною часткою нанотрубок V_{CNT}^{*}.в FGV-нанокомпозиті. Результати аналізу наведено в табл. 3.4, 3.5, 3.6.

Таблиця 3.4 – Власні частоти оболонок з $V_{CNT}^{*} = 0.28$, $R = 0.25$ м; $L = 1$м, Гц

	n	Власні частоти за МСЕ, Гц	Власні частоти, отримані методом Релея-Рітца за різними моделями, Гц			відносна похибка моделі 2
			1	2	3	
h=0.0125 $\frac{h}{R} = 0.05$ товста оболонка	3	248.4	243.54	244.16	243.41	0.017
	2	259.68	259.29	259.38	259.24	0.0012
	4	342.29	331.27	332.88	330.9	0.027
	1	386.54	388.98	388.98	388.96	0.0063
h=0.015 $\frac{h}{R} = 0.06$ товста оболонка	3	264.7	268.84	269.81	268.63	0.019
	2	268.9	265.80	265.93	265.72	0.011
	4	387.1	386.60	388.98	385.98	0.0048
	1	387.7	390.51	390.51	390.48	0.007
h=0.017 $\frac{h}{R} = 0.068$ товста оболонка	2	269.6	271.56	271.76	271.44	0.007
	3	289.2	290.08	291.39	289.76	0.002
	1	387.0	391.87	391.88	391.83	0.012
	4	430.1	431.01	434.10	430.10	0
h=0.02	2	279.1	281.03	281.34	280.81	0.006

$\frac{h}{R} = 0.08$ товста оболонка	3	322.0	323.03	324.95	322.52	0.0016
	1	389.4	394.14	394.14	394.06	0.01
	4	496.1	497.33	501.667	495.92	0.00040
h=0.025 $\frac{h}{R} = 0.10$ товста оболонка	2	300.88	298.61	299.18	298.16	0.006
	3	390.33	379.50	382.65	378.51	0.02
	1	394.65	398.44	398.44	398.27	0.009
	4	627.56	605.96	612.78	603.35	0.02
h=0.050 $\frac{h}{R} = 0.20$ товста оболонка	2	395.56	401.34	404.61	398.01	0.006
	1	412.67	426.09	426.11	424.46	0.028
	3	647	652.88	666.21	647.09	0
h=0.08 $\frac{h}{R} = 0.32$ товста оболонка	1	433.96	460.78	460.83	455.34	0.049
	2	504.18	518.22	527.59	509.49	0.01
	3	904.92	917.75	949.36	904.44	0.00053

Таблиця 3.5 – Власні частоти оболонок з $V_{CNT}^{*} = 0.28$; $R = 0.25$ м; $L = 0.5$ м, Гц

	n	Власні частоти за МСЕ, Гц	Власні частоти, отримані методом Релея-Рітца за різними моделями, Гц			відносна похибка моделі 2
			1	2	3	
h=0.013 $\frac{h}{R} = 0.052$ товста оболонка	3	474.84	468.54	468.96	467.39	0.012
	4	507.82	501.46	502.76	499.95	0.009
	2	543.24	539.89	539.96	539.11	0.006
	5	626.02	620.58	623.18	618.52	0.004
	1	751.23	753.93	753.93	753.55	0.003
	6	811.75	806.16	810.31	803.077	0.002

h=0.015 $\frac{h}{R} = 0.06$ товста оболонка	3	507.17	500.48	501.09	498.68	0.01
	4	560.66	554.26	556.06	551.98	0.008
	2	561.58	558.03	558.13	556.78	0.006
	5	705.14	699.99	703.50	696.93	0.002
	1	759.09	762.76	762.76	762.14	0.005
	6	921.75	916.54	922.09	911.98	0.0004
h=0.017 $\frac{h}{R} = 0.068$ товста оболонка	3	538.65	533.43	534.25	530.80	0.008
	2	578.76	577.24	577.37	575.34	0.002
	4	611.72	607.38	609.75	604.14	0.003
	1	764.48	772.32	772.32	771.35	0.01
	5	780	778.57	783.12	774.27	0.004
	6	1023	1024	1031.8	1018.31	0.008
h=0.02 $\frac{h}{R} = 0.08$ товста оболонка	3	589.11	583.68	584.89	579.50	0.007
	2	609.67	607.34	607.54	604.19	0.003
	4	690.74	686.58	689.96	681.57	0.001
	1	780.38	787.70	787.70	786.03	0.009
	5	895.97	894.00	900.34	887.41	0.005
h=0.025 $\frac{h}{R} = 0.1$ товста оболонка	2	656.82	658.79	659.14	652.79	0.006
	3	667.98	666.95	668.98	659.41	0.01
	1	801.4	814.93	814.94	811.58	0.01
	4	814.24	814.81	820.21	806.04	0.01
	5	1074.8	1077.90	1087.79	1066.48	0.008
h=0.05 $\frac{h}{R} = 0.2$ товста оболонка	2	831.92	876.78	878.54	850.29	0.02
	1	875.94	938.09	938.12	921.22	0.05
	3	974.97	1013.28	1022.43	984.16	0.009
	4	1303	1340	1361.5	1307.3	0.003
	5	1766.7	1808.62	1844.23	1764.9	0.001
h=0.08	1	901.25	1020.6	1020.65	992.6	0.1
	2	936.2	1025.81	1030.88	984.56	0.05

$\frac{h}{R} = 0.32$ товста оболонка	3	1205.6	1277.42	1300.84	1234.56	0.02
	4	1679	1745.88	1793.89	1695.03	0.009

Таблиця 3.6 – Власні частоти оболонок з $V_{CNT}^{*} = 0.12$; $R = 0.25$ м; $L = 1$ м, Гц

	n	Власні частоти за МСЕ, Гц	Власні частоти, отримані методом Релея-Рітца за різними моделями, Гц			відносна похибка моделі 2
			1	2	3	
h=0.005 $\frac{h}{R} = 0.02$	4	131.01	128.1	128.17	128.10	0.02
	3	134.66	132.206	132.22	132.20	0.018
	5	160.9	158.19	158.32	158.15	0.017
	2	176.93	176.86	176.87	176.87	0.0004
	6	216.26	212.2	212.42	212.12	0.019
h=0.010 $\frac{h}{R} = 0.04$	3	158.91	159.60	159.69	159.55	0.004
	2	182.53	183.25	183.26	183.24	0.004
	4	195.54	201.22	201.56	201.11	0.028
	1	274.66	279.64	279.65	279.64	0.018
h=0.015 $\frac{h}{R} = 0.06$ товста оболонка	3	190.17	195.29	195.61	195.15	0.026
	2	190.74	192.22	192.26	192.17	0.007
	4	266.03	281.56	282.49	281.15	0.05
	1	276.14	281.72	281.72	281.70	0.02
h=0.025 $\frac{h}{R} = 0.1$ товста оболонка	2	215.25	216.034	216.21	215.77	0.0024
	3	274.08	276.36	277.602	275.72	0.006
	1	281.52	287.23	287.24	287.14	0.02
	4	434.9	442.41	445.74	440.65	0.013

З табл. 3.4, 3.5, 3.6 видно, що власні частоти, отримані за трьома моделями, є близькими до отриманих за МСЕ в більшості випадків. На рис. 3.3 наведено залежність максимальної відносної похибки визначення

власних частот товстих оболонок методом Релея-Рітца за моделлю 3 для оболонок довжиною 1 м та 0.5 м. Обмеживши допустимою похибкою в 5%, зазначимо, що для оболонки довжиною 1 м метод Релея-Рітца дозволяє коректно знайти власні частоти навіть для товстої оболонки з $\frac{h}{R} = 0.35$. З іншого боку, визначення власних частот короткої оболонки довжиною 0.5 м є незадовільним вже для значень $0.25 \leq \frac{h}{R} \leq 0.35$.

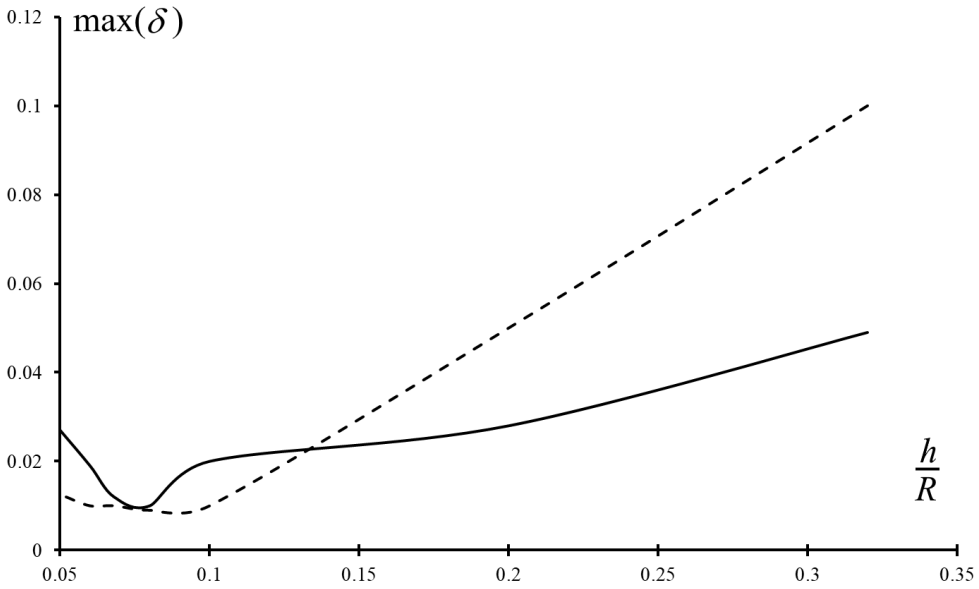


Рисунок 3.3 – Залежність максимальної відносної похибки власних частот, отриманих методом Релея-Рітца, від співвідношення $\frac{h}{R}$. Суцільна лінія – $L = 1$ м, пунктирна лінія – $L = 0.5$ м

Вплив типу армування на власні частоти. Далі, розглянемо вплив об'ємної частки вуглецевих нанотрубок та типу армування на власні частоти оболонки. У табл. 3.7 наведено власні частоти, які знайдено методом Релея-Рітца за моделлю 3 для товстих циліндричних оболонок з наступними параметрами: $\frac{h}{R} = 0.32; R = 0.25$ м; $h = 0.08$ м, які зроблено з нанокомпозитів з різною об'ємною часткою нанотрубок та різним типом армування.

Таблиця 3.7 – Власні частоти оболонок з різних нанокомпозитів та $\frac{h}{R} = 0.32; L = 1$ м; $h = 0.08$ м, Гц

V_{CNT}^{*}	Тип армування	Перша власна частота,Гц, n=1	Друга власна частота Гц, n=2	Третя власна частота Гц, n=2
0.28	UD-CNT	454.32	515.51	907.408
0.17	UD-CNT	420.73	477.18	858.78
0.12	UD-CNT	329.58	374.11	667.18
0.28	FGX-CNT	473.63	551.806	975.17
0.17	FGX-CNT	435.73	501.84	892.17
0.12	FGX-CNT	340.71	390.77	685.80
0.28	FGV-CNT	455.34	509.49	904.44
0.17	FGV-CNT	418.86	474.44	857.82
0.12	FGV-CNT	327.22	371.87	666.41
0.28	FG**Λ**-CNT	443.94	508.84	934.02
0.17	FG**Λ**-CNT	402.09	458.41	862.07
0.12	FG**Λ**-CNT	314.01	357.25	664.58
0.28	FGO-CNT	440.21	480.41	865.48
0.17	FGO-CNT	401.54	446.80	831.51
0.12	FGO-CNT	313.01	350.95	649.23

На рис. 3.4 наведено графічне представлення даних з табл. 3.7. Видно, що найбільші власні частоти спостерігаються для оболонок з FGX-армованого нанокомпозиту. Найнижчі перші власні частоти демонструють FG**Λ** та FGO-армовані нанокомпозити. В залежності від типу армування перша власна частота оболонки з $V_{CNT}^{*} = 0.28$ може змінюватись від 440.21 Гц до 473.64 Гц.

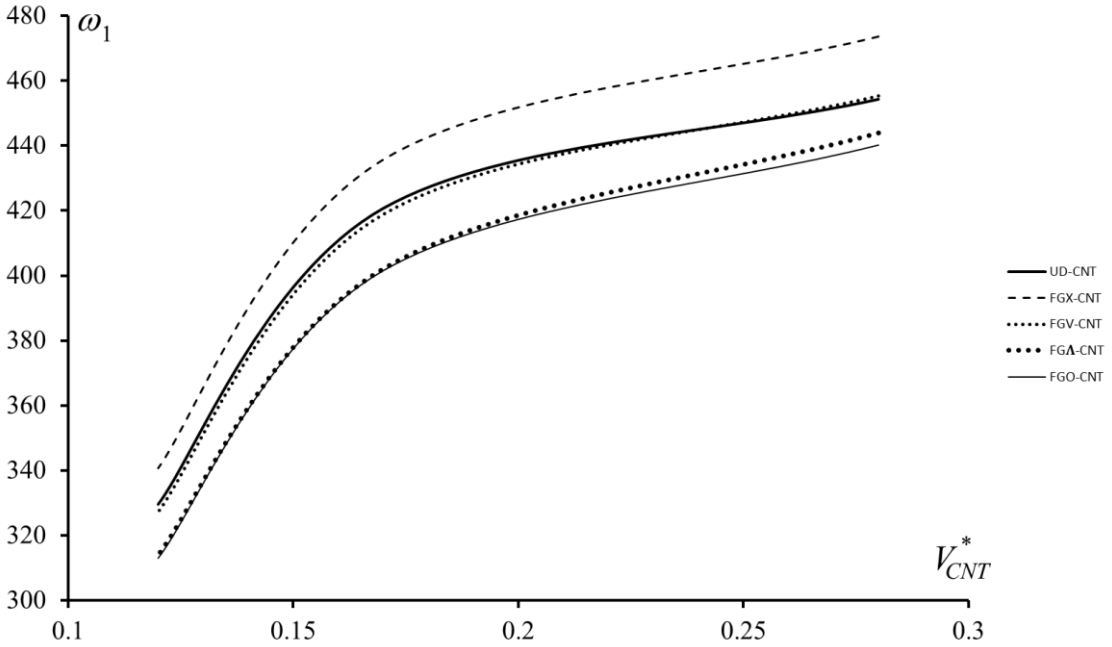


Рисунок 3.4 – Залежність першої власної частоти від об’ємної частки нанотрубок для різних типів армування

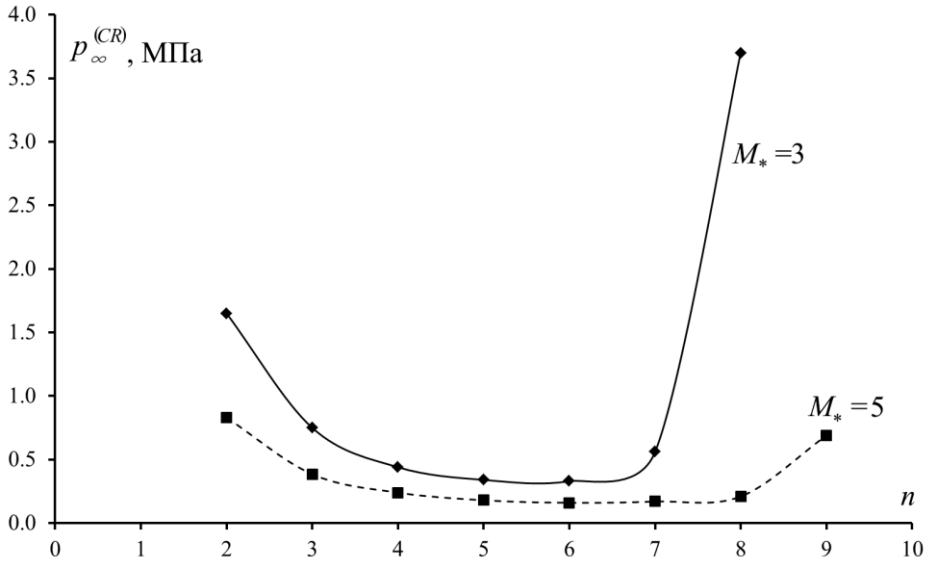
Таким чином, з наведених результатів випливає важливий висновок, що відстроювання оболонки від резонансу можливо проводити шляхом раціонального вибору типу армування вуглецевими нанотрубками та їхньої об’ємної частки.

Аналіз втрати динамічної стійкості. Для аналізу втрати динамічної стійкості положення рівноваги оболонки застосовувався метод характеристичних експонент (3.34) – (3.36). Для побудови матриць динамічної системи (3.34) враховано всі члени розкладення (3.4) та механічних енергій (3.9), (3.12).

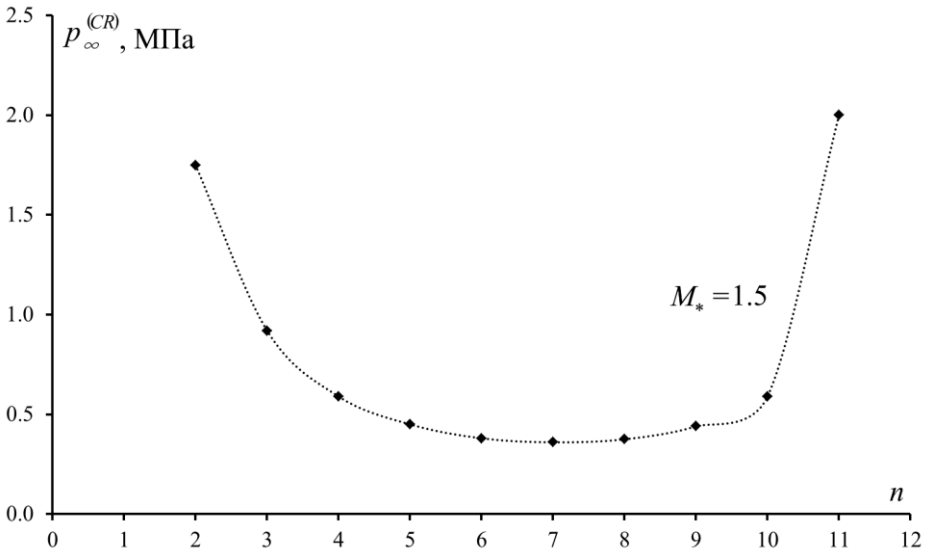
Викладемо основні етапи аналізу. Розглядається циліндрична оболонка з параметрами (3.41), $V^*_{CNT} = 0.12$ та FGV-армуванням. Власні частоти цієї оболонки наведено в табл. 3.6. Умови аналізу є наступними. Розрахунки проведено для чисел Маха $M_* = 5; M_* = 3$ та $M_* = 1.5$. Параметри розкладень (3.24) дорівнюють $N_1 = 2;\ N_2 = 1$. Таким чином, кількість ступенів свободи динамічної системи (3.34) дорівнює $N_* = 23$. Параметри надзвукового струму приймаються наступними: $\gamma = 1.4;\ a_\infty = 213.36\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$.

Втрату стійкості положенням рівноваги оболонки досліджено для різних значень кількості окружних хвиль n. При цьому проблему власних значень (3.36) розв'язано чисельно для різних значень статичного тиску вільного струму. В результаті отримано границі стійкості тривіального положення рівноваги. Подальший чисельний аналіз свідчить, що втрата стійкості тривіального положення рівноваги та розвиток автоколивань відбуваються внаслідок біфуркації Хопфа [244]. Значення статичного тиску вільного струму, які викликають біфуркацію, звуться критичними значеннями тиску $p_{\infty}^{(CR)}$.

Результати розрахунків наведено на рис. 3.5. На рис. 3.5а відображено залежність між значенням критичного тиску та кількістю хвиль n при $M_* = 3$ (суцільна лінія) та $M_* = 5$ (пунктирна лінія). На рис. 3.5б наведено аналогічну криву для $M_* = 1.5$. Мінімальне значення критичного тиску спостерігається при $n = 6$ для $M_* = 3$ та $M_* = 5$. Для $M_* = 1.5$ мінімальний критичний тиск відповідає формі з $n = 7$. Таким чином, швидкість струму значно впливає на критичний тиск..

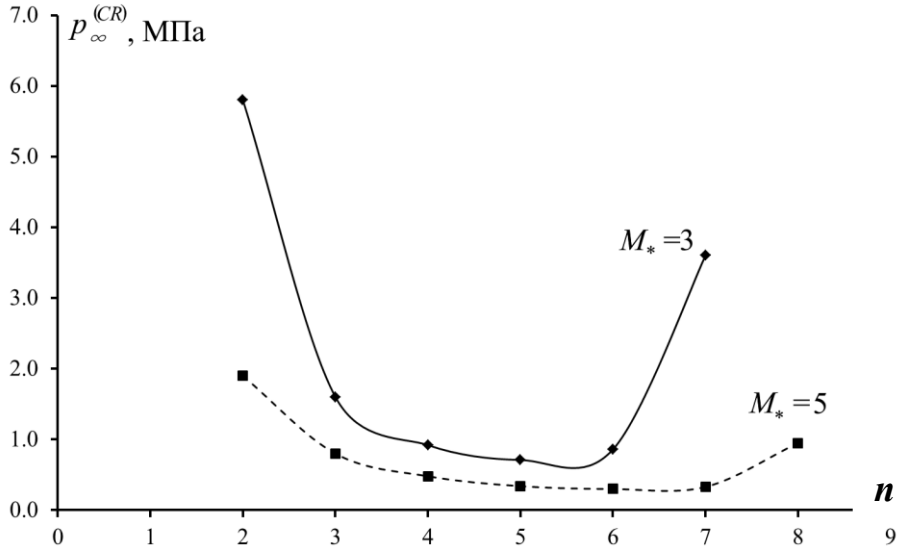


а.

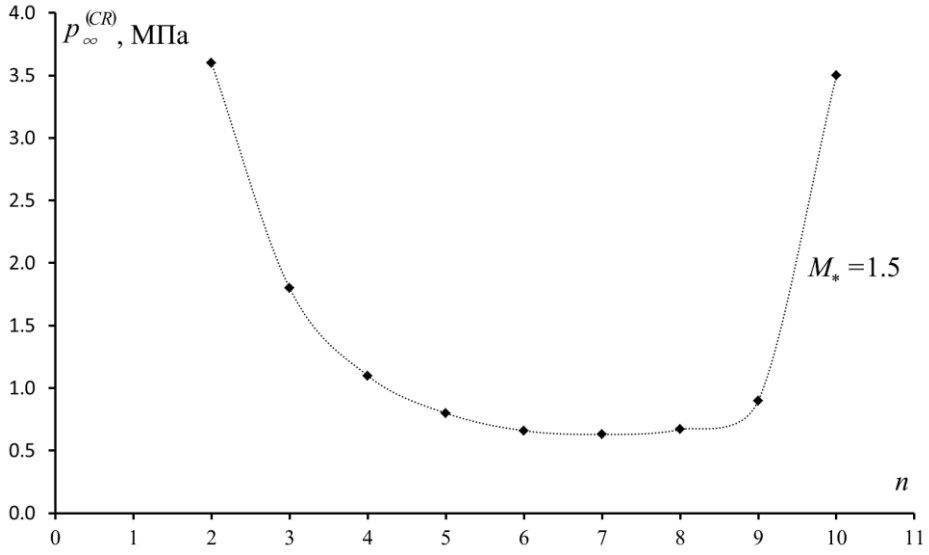


б.

Рисунок 3.5 – Залежність між критичним тиском та кількістю хвиль **в** круговому напрямку n для циліндричної оболонки з параметрами (3.41), FGV-армуванням та $V_{CNT}^{*} = 0.12$. а. – при значеннях числа Маха струменя $M_* = 3$ та $M_* = 5$; б – число Маха струменя дорівнює $M_* = 1.5$



а.



б.

Рисунок 3.6 –Залежність між критичним тиском та кількістю хвиль **в** круговому напрямку n для циліндричної оболонки з параметрами (3.41), FGO-армуванням та $V_{CNT}^{*} = 0.28$. а. – при значеннях числа Маха струменя $M_* = 3$; та $M_* = 5$; б. – число Маха струменя дорівнює $M_* = 1.5$

На рис. 3.6 наведено результати розрахунків для оболонки з параметрами (3.41), FGO-армуванням та $V_{CNT}^{*} = 0.28$. На рис. 3.6а наведено залежність між критичним тиском та кількістю хвиль n для $M_* = 3$ та $M_* = 5$. Мінімальне значення критичного тиску спостерігається при $n = 5$ та $n = 6$ для $M_* = 3$ та $M_* = 5$, відповідно. На Рис. 3.6б наведено значення критичного тиску при $M_* = 1.5$. Мінімальне значення критичного тиску спостерігається при $n = 7$. Зазначимо, в [241] визначено мінімальне значення критичного тиску ізотропної циліндричної оболонки в надзвуковому струмі при $n = 27$. Кількість хвиль у окружному напрямку n, яким відповідає мінімальне значення критичного тиску вільного струму для нанокомпозитних циліндричних оболонок є значно нижчою, ніж для ізотропних оболонок.

Вплив типу армування на значення критичного тиску. Далі розглянемо вплив типу армування та об'ємної частки нанотрубок V_{CNT}^{*} на значення критичного тиску. У табл. 3.8 наведено результати аналізу втрати стійкості положенням рівноваги оболонки з параметрами (3.41), $M_* = 3$ в

залежності від матеріалу оболонки. Зазначимо, що критичний тиск часто спостерігався при $n = 5$ та рідше – $n = 6$.

Таблиця 3.8 – Значення критичного тиску при $M_* = 3$ для різних типів армування

Тип армування	V_{CNT}^*	$\boldsymbol{n}$	$p_\infty^{(CR)}$, МПа
FGV-CNT	0.12	6	0.33
	0.17	5	0.68
	0.28	5	0.97
FGX-CNT	0.12	5	0.38
	0.17	5	0.76
	0.28	5	1.21
FGO-CNT	0.12	6	0.27
	0.17	5	0.56
	0.28	5	0.71
FG$\boldsymbol{\Lambda}$-CNT	0.12	6	0.26
	0.17	5	0.54
	0.28	5	0.77
UD-CNT	0.12	6	0.32
	0.17	5	0.64
	0.28	5	0.86

Було проведено інтегрування системи (3.34) при різних значеннях p_∞ для перевірки факту втрати стійкості тривіальним положенням рівноваги. Якщо амплітуди, що отримані інтегруванням, зростають у часі, положення рівноваги є нестійким; якщо знижуються, – стійким. Таким чином, отримано значення критичного тиску для деяких комбінацій параметрів матеріалу оболонки – UD-армування з часткою нанотрубок 0.12 та 0.18. Для першого

випадку відносні похибка між значеннями критичного тиску, отриманими різними методами, склала 0.03, для другого випадку – 0.02.

З табл. 3.8 можна зробити висновки, що найбільший критичний тиск має оболонка з FGX-армуванням, а найменший – з FGO-армуванням. Тип армування може значно (до двох разів) вплинути на значення критичного тиску.

Внаслідок втрати динамічної стійкості амплітуди коливань оболонки зростають, призводячи до геометрично нелінійного деформування. Нелінійність у рівняннях руху конструкції обмежує амплітуди її коливань та виникають автоколивання.

Аналіз автоколивань. Для аналізу автоколивань застосовано метод гармонійного балансу (див. 3.1.4). Для верифікації результатів, отриманих методом гармонійного балансу, проведено також чисельне інтегрування рівнянь (3.25) з початкових умов, які отримано методом гармонійного балансу.

Умови моделювання є наступними. Розглянуто оболонку з UD-армованого нанокомпозиту з $V_{CNT}^{*} = 0.12$. Параметри оболонки відповідають (3.41). Параметри надзвукового струму прийнято наступними: $\gamma = 1.4$; $a_{\infty} = 213.36\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$; $M_{*} = 3$. Розглядається розв'язок, що відповідає 6 хвилям в круговому напрямку $n = 6$.

Результати чисельного аналізу автоколивань циліндричної оболонки з наведено на рис. 3.7. Тут наведено залежність амплітуди A_1 автоколивань координати $q_1(t)$ від статичного тиску вільного струму p_{∞}. Тривіальне положення рівноваги оболонки є стійким при $p_{\infty} < 0.32$ МПа. При $p_{\infty} = 0.32$ МПа виникає біфуркація Хопфа, яка призводить до втрати стійкості тривіального положення рівноваги та виникнення автоколивань. Амплітуди автоколивань, які визначено методом гармонійного балансу, наведено суцільною лінією, а результати чисельного інтегрування – маркерами. Видно, що результати, отримані різними методами, є близькими; крім того, це свідчить про стійкий характер автоколивань.

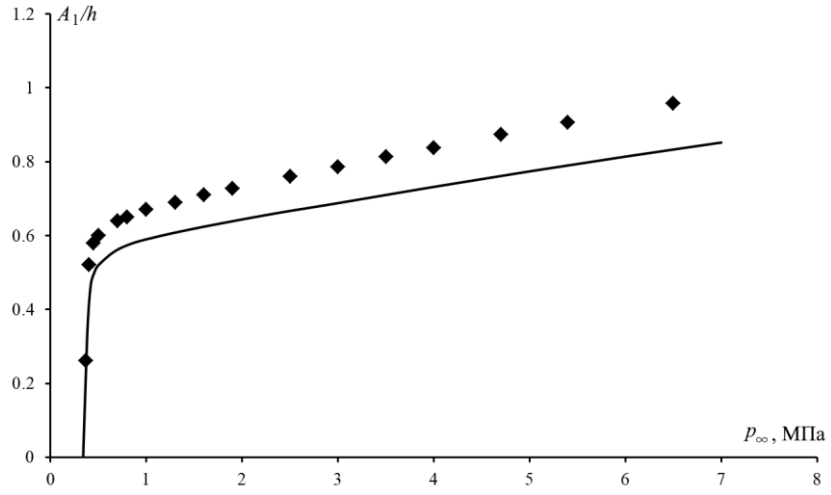
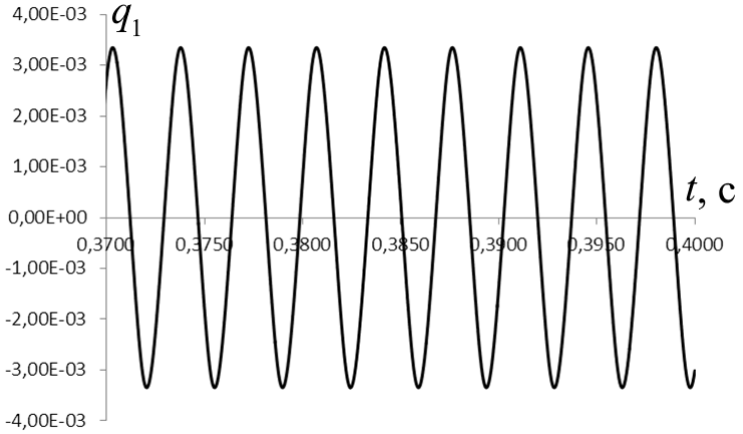
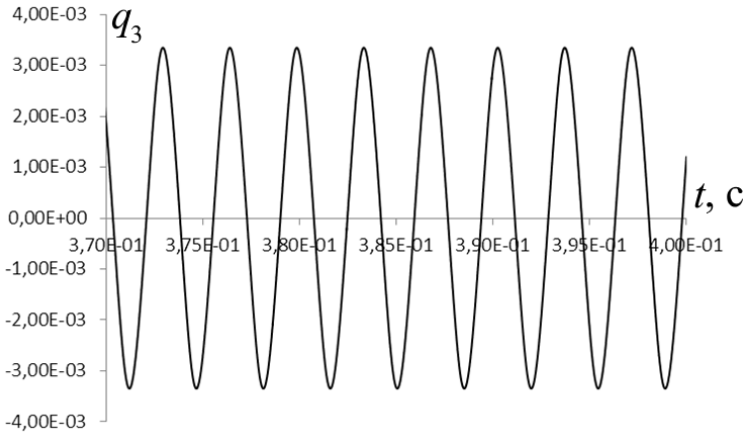


Рисунок 3.7 – Динамічний відгук оболонки в режимі автоколивань



а.



б.

Рисунок 3.8 – Часова залежність узагальнених координат в режимі автоколивань при $p_\infty = 1$ МПа: а. – $q_1(t)$; б. – $q_3(t)$

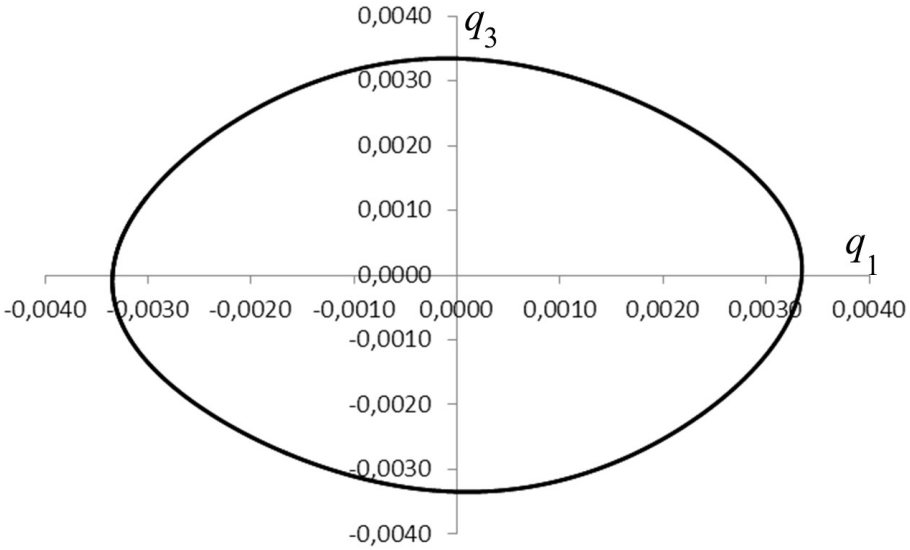


Рисунок 3.9 – Портрет автоколивань у конфігураційній площині (q_1, q_3)

На рис. 3.8 наведено результати чисельного інтегрування рівнянь руху (3.25) при $p_\infty = 1$ МПа. На рис. 3.9 наведено цю залежність на конфігураційній площині (q_1, q_3). З рис. 3.9 видно, що автоколивання є моногармонійними. Це є обґрунтуванням того, що в методі гармонійного балансу достатньо враховувати одну гармоніку.

Результати чисельного аналізу свідчать, що кут $\phi_2(x, \theta, t)$ має значні амплітуди коливань, причому $|\phi_2| \gg |\phi_1|$, тому на рис. 3.10 наведено залежність амплітуди A_{21} узагальненої координати q_{21}, яка входить в розкладення $\phi_2(x, \theta, t)$, від p_∞. Суцільною кривою наведено результати розрахунку методом гармонійного балансу, маркерами – інтегруванням рівнянь руху (3.25). Результати, отримані різними методами, є близькими. На рис. 3.11 наведено залежність між частотою автоколивань та статичним тиском вільного струму p_∞. Видно, що при зростанні p_∞ частота автоколивань зростає.

Також було проведено аналіз автоколивань циліндричної оболонки з UD-армованого нанокомпозиту з об'ємною часткою нанотрубок $V_{CNT}^* = 0.28$. Параметри оболонки відповідали (3.41), параметри струму аналогічні попередньому випадку. Тривіальне положення рівноваги втрачає стійкість

внаслідок біфуркації Хопфа при $p_\infty = 0.86$ МПа (рис. 3.12). Результати, які отримано методом гармонійного балансу, показані суцільною кривою, результати інтегрування рівнянь руху (3.25) з відповідних початкових умов – маркерами. Результати, які отримано різними методами, є близькими. Таким чином, автоколивання є стійкими. На рис. 3.13 наведено залежність частоти автоколивань від p_∞. Характер зміни частоти є аналогічним до попереднього прикладу.

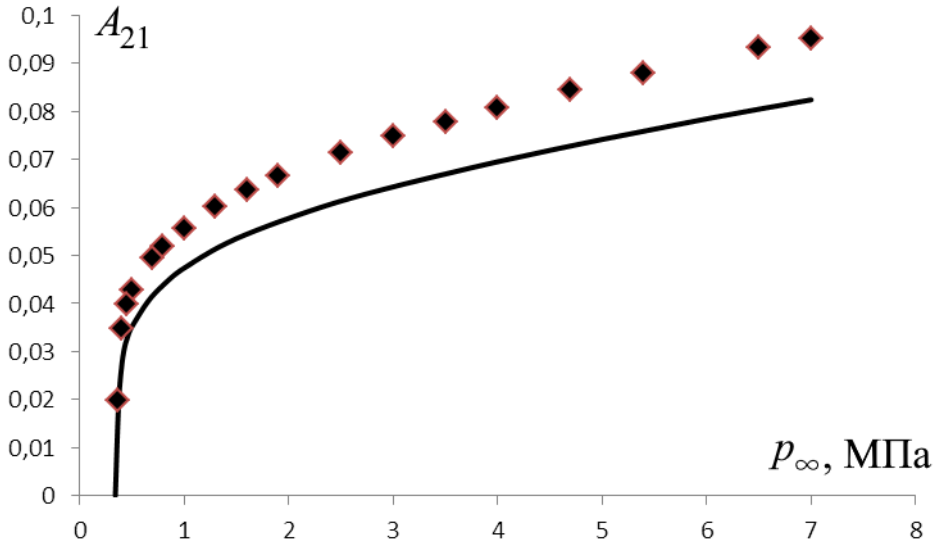


Рисунок 3.10 – Залежність A_{21} від p_∞ в режимі автоколивань

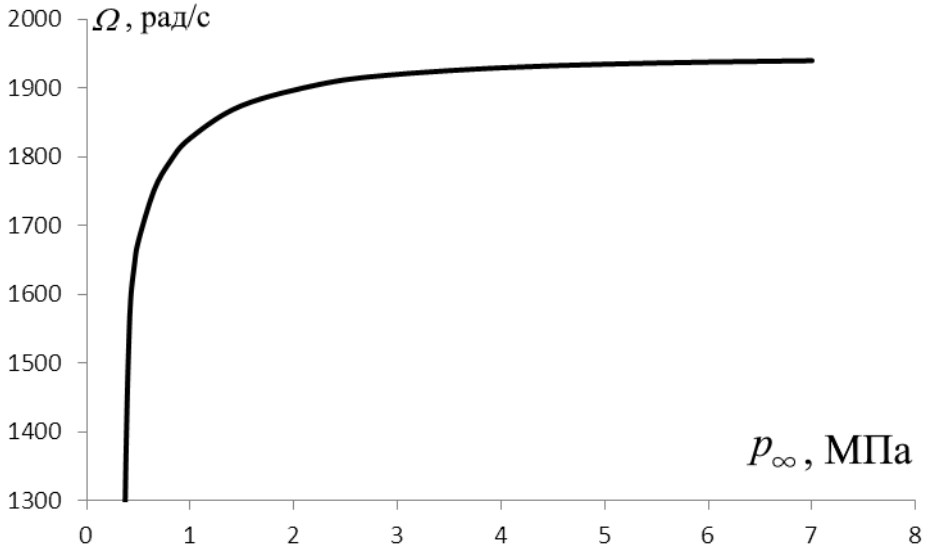
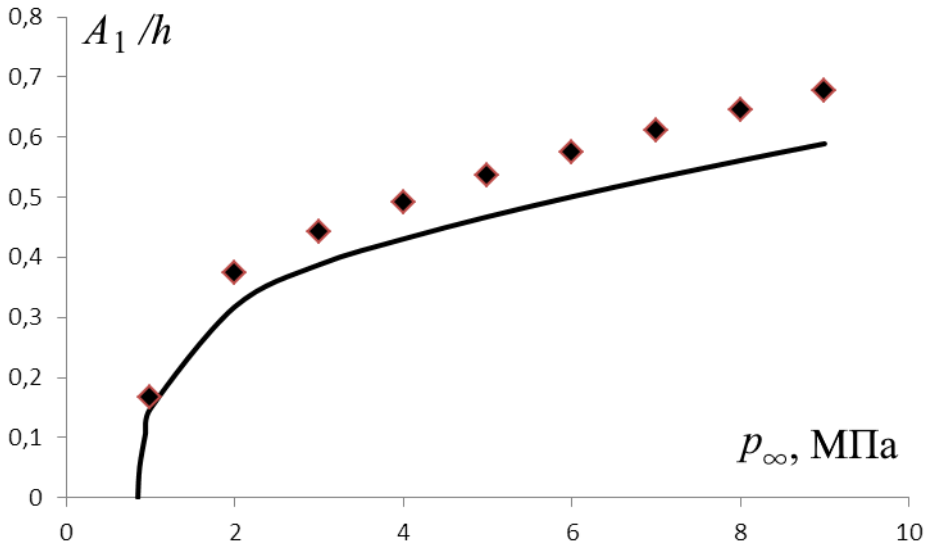
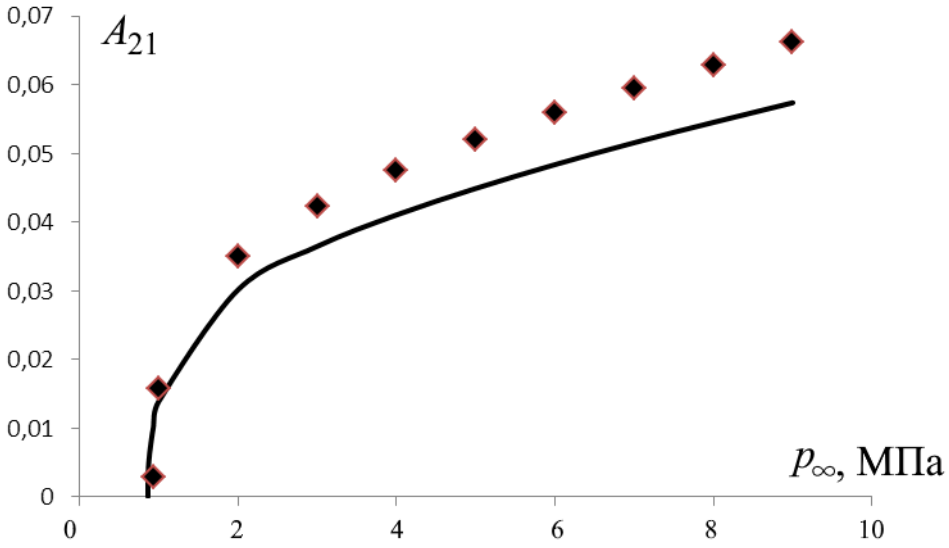


Рисунок 3.11 – Зв’язок між частотами автоколивань та тиском p_∞



а.



б.

Рисунок 3.12 – Залежність між амплітудами коливань та тиском p_∞ при автоколиваннях оболонки з $V_{CNT}^* = 0.28$ та UD-наноармуванням:

а. – A_1/h; б. – A_{21}

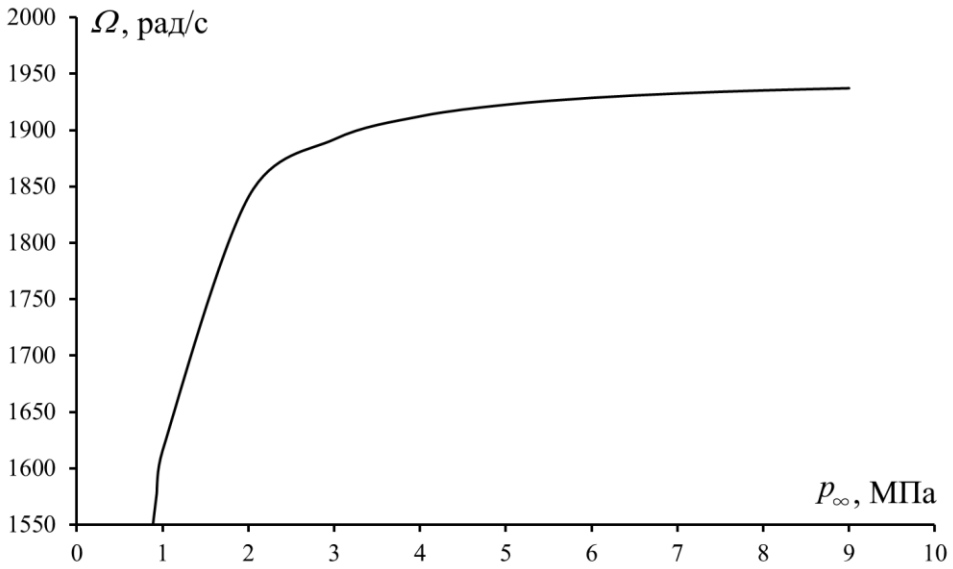


Рисунок 3.13 – Залежність між частотами автоколивань та p_∞ при $V_{CNT}^* = 0.28$

З порівняння рис. 3.10 та рис. 3.12 видно, що підвищення об'ємної частки нанотрубок в композиті приводить до зниження амплітуд автоколивань. Так, при підвищення частки нанотрубок від 0.12 до 0.28 амплітуда автоколивань зменшилась у 1.66 разів. У той же час, Частоти автоколивань незначно знижуються при підвищенні V_{CNT}^*.

3.2 Нелінійна динаміка тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем під дією параметричного навантаження

Розглядається тришарова циліндрична оболонка довжини L та внутрішнього радіусу R, яку зображено на рис. 3.14. Вона має наступні характерні риси:

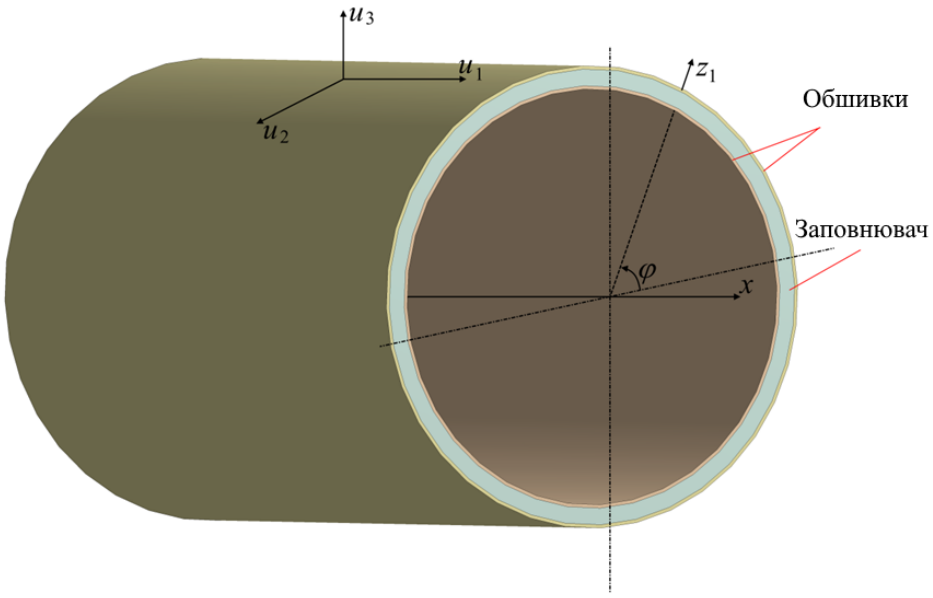


Рисунок 3.14 – Ескіз тришарової циліндричної оболонки

– стільниковий заповнювач, який має велику (десятки мм) товщину, виготовляється за допомогою адитивних технологій;

– обшивки виготовлено з жорсткого ортотропного композитного матеріалу;

– з'єднання між шарами вважається абсолютно жорстким.

Шари оболонки позначено t, c, b – зовнішня обшивка, заповнювач та внутрішня обшивка відповідно.

На торець оболонки діє розподілена сила $\Phi \cdot \sin(\Omega\tau)$. Розглядаються геометрично нелінійні параметричні коливання оболонки внаслідок цього збудження.

Для опису напружено-деформованого стану конструкції застосовується циліндрична система координат. Поздовжню та окружну координати оболонки позначимо x, φ. Для кожного шару введемо локальні поперечні координати z_t, z_c, z_b.

Стільниковий заповнювач замінюється еквівалентною ортотропною речовиною шляхом гомогенізації заповнювача [45, 220]. Закон Гука для цієї речовини має форму:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}^{(c)}\\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}\\ \sigma_{zz}^{(c)}\\ \sigma_{\varphi z}^{(c)}\\ \sigma_{xz}^{(c)}\\ \sigma_{xy}^{(c)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(c)}\\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}\\ \varepsilon_{zz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{\varphi z}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)}\end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

де $\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{\varphi z}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору напружень;

$\varepsilon_{xx}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}, \varepsilon_{zz}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(c)}, \varepsilon_{xz}^{(c)}, \varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору деформацій.

Елементи матриці (3.42) $C_{11}, C_{12}, \ldots$ отримано шляхом скінченно-елементних розрахунків за допомогою комплексу ANSYS та методики гомогенізації.

Обшивки є ортотропними та жорсткими, що дозволяє нехтувати їхніми поперечними деформаціями. Закон Гука для них має вигляд:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}(z) & Q_{12}(z)\\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}; \tag{3.43}$$

$$\sigma_{\varphi Z} = G_{23}(z)\varepsilon_{\varphi z};$$

$$\sigma_{xz} = G_{13}(z)\varepsilon_{xz};$$

$$\sigma_{x\varphi} = G_{12}(z)\varepsilon_{x\varphi},$$

де

$$Q_{11}(z) = \frac{E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)};\ Q_{22}(z) = \frac{E_{22}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}; \tag{3.44}$$

$$Q_{12}(z) = \frac{\mu_{21}(z)E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)};$$

$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\varphi z}$ – деформації зсуву;

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{x\varphi}$ – елементи тензору деформацій Гріна;

$\sigma_{xz}, \sigma_{\varphi z}$ – напруження зсуву;

$\sigma_{xx}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{x\varphi}$ – елементи тензору напружень.

Досліджуються нелінійні коливання оболонки (рис. 3.14) під дією параметричного навантаження, властивості шарів якої описано формулами (3.42), (3.43). Шари оболонки мають товщину h_t, h_c, h_b для зовнішньої обшивки, заповнювача та внутрішньої обшивки відповідно. Обидва кінця оболонки є защемленими.

3.2.1 Математична модель багатошарової циліндричної тонкостінної конструкцій

Модель руху циліндричної сендвіч-оболонки будується на базі моделі (2.22), (2.24), (2.25). Параметри Ляме вздовж координати φ для шарів оболонки в координатах $x, \varphi, z_i, i = t, b, c$ дорівнюють $A_i = R_i, i = t, b, c$, де $R_b = R + \frac{h_b}{2}$; $R_c = R + h_b + \frac{h_c}{2}$; $R_t = R + h_b + h_c + \frac{h_t}{2}$ – радіуси кривизни шарів оболонки.

Проекції переміщень шарів оболонки розкладаються за поперечними координатами за формулами (2.2), (2.3). Напружено-деформований стан конструкції описується п’ятнадцятьма функціями $u^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $v^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $w^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, i={t,b,c}.

У порівнянні з (2.4) зв’язок між переміщеннями та деформаціями оболонки має спрощений вигляд завдяки тому, що параметри Ляме та радіуси кривизни є постійними вздовж поздовжньої координати. Цей зв’язок виглядає наступним чином [246]:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = C_i\left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \varphi} + u_3^{(i)}\right) + \frac{1}{2}{C_i}^2\left(\left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \varphi} + u_3^{(i)}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(u_2^{(i)} - R_i\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \varphi}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi z}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + C_i\left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \varphi} - u_2^{(i)}\right) + C_i\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \varphi}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} -$$

$$- C_i\left(u_2^{(i)} - R_i\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i}; \qquad (3.45)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{x\varphi}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x} + C_i\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \varphi} + C_i\frac{1}{R_i}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \varphi} + C_i\left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \varphi} + u_3^{(i)}\right)\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x} -$$

$$- C_i\left(u_2^{(i)} - R_i\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x},$$

$$, i = t, c, b,$$

де $C_i = \frac{1}{R_i + z_i}$.

З урахуванням граничних умов (2.5), (2.6) вирази (2.7) набувають наступної форми:

$$\varphi_{1,2}^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} + \varphi_{1,1}^{(t)}\right);$$

$$\varphi_{1,2}^{(b)} = \frac{1}{h_b}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} + \varphi_{1,1}^{(b)}\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(t)} = \frac{1}{4{R_t}^2 h_t}\left(-4\varphi_{2,1}^{(t)}{R_t}^2 + R_t h_t \varphi_{2,1}^{(t)} - 4R_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} + v^{(t)}h_t\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(b)} = \frac{1}{4{R_b}^2 h_b}\left(4\varphi_{2,1}^{(b)}{R_b}^2 + R_b h_b \varphi_{2,1}^{(b)} + 4R_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} + v^{(b)}h_b\right);$$

$$\varphi_{1,3}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^3}\left(-h^{(t)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - h^{(b)}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} - 3h^{(b)}\varphi_{1,1}^{(b)} - 3h^{(t)}\varphi_{1,1}^{(t)} - 4h^{(c)}\varphi_{1,1}^{(c)} -\right.$$

$$-4u^{(b)} + 4u^{(t)}\Big);$$

$$\varphi_{2,3}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^3}\Big(4v^{(t)} - 4v^{(b)} - 3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} - 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} - 4h_c\varphi_{2,1}^{(c)} - 4\frac{h_c}{R_c}v^{(c)}\Big) -$$

$$-\frac{1}{{h_c}^3 R_b}\left(h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + 2h_b v^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4R_b}v^{(b)}\right) -$$

$$-\frac{1}{{h_c}^3 R_t}\left(h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} + 2h_t v^{(t)} - \frac{{h_t}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(t)} - \frac{{h_t}^2}{4R_t}v^{(t)}\right); \qquad (3.46)$$

$$\varphi_{3,2}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^2}\big(2w^{(t)} - 4w^{(c)} + 2w^{(b)}\big);$$

$$\varphi_{1,2}^{(c)} = \frac{1}{2{h_c}^2}\left(-h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} + h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} + 3h_b\varphi_{1,1}^{(b)} - 3h_t\varphi_{1,1}^{(t)} + 4u^{(b)} + 4u^{(t)} - \right.$$

$$\left. - 8u^{(c)}\right);$$

$$\varphi_{2,2}^{(c)} = \frac{1}{2{h_c}^2}\Big(4v^{(t)} + 4v^{(b)} - 3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} - 8v^{(c)}\Big) +$$

$$+\frac{1}{2{h_c}^2 R_b}\left(h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + 2v^{(b)}h_b + \frac{{h_b}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(b)} + \frac{{h_b}^2}{4R_b}v^{(b)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2{h_c}^2 R_t}\left(-h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} - 2v^{(t)}h_t + \frac{{h_t}^2}{4}\varphi_{2,1}^{(t)} + \frac{{h_t}^2}{4R_t}v^{(b)}\right);$$

$$\varphi_{3,1}^{(c)} = \frac{1}{h_c}\big(w^{(t)} - w^{(b)}\big).$$

Замінимо вираз $\frac{1}{R_i+z_i}$ наближеним розкладенням $\frac{1}{R_i+z_i} = R_i - z_i + \frac{{z_i}^2}{R_i} - \frac{{z_i}^3}{{R_i}^2}$. Тоді підстановка розкладень (2.2), (2.3) сумісно з (3.46) у вирази (3.45) після нехтування високими ступенями z_i, дозволяє представити деформації у вигляді:

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \varepsilon_{xx,0}^{(j)} + z_j k_{xx,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xx,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xx,2}^{(j)};$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(j)} = \varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(j)} + z_j k_{\varphi\varphi,0}^{(j)} + z_j^2 k_{\varphi\varphi,1}^{(j)} + z_j^3 k_{\varphi\varphi,2}^{(j)};$$

$$\varepsilon_{x\varphi}^{(j)} = \varepsilon_{x\varphi,0}^{(j)} + z_j k_{x\varphi,0}^{(j)} + z_j^2 k_{x\varphi,1}^{(j)} + z_j^3 k_{x\varphi,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{xz}^{(j)} = \varepsilon_{xz,0}^{(j)} + z_j k_{xz,0}^{(j)} + z_j^2 k_{xz,1}^{(j)} + z_j^3 k_{xz,2}^{(j)};$$
$$\varepsilon_{\varphi z}^{(j)} = \varepsilon_{\varphi z,0}^{(j)} + z_j k_{\varphi z,0}^{(j)} + z_j^2 k_{\varphi z,1}^{(j)} + z_j^3 k_{\varphi z,2}^{(j)}; \quad (3.47)$$
$$j = t, b, c;$$
$$\varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{zz,0}^{(c)} + z_c k_{zz,0}^{(c)}.$$

Складові, що входять до (3.47), являють собою громіздкі вирази і винесені у Додаток Г.

Визначимо механічні енергії оболонки. Кінетична енергія оболонки має наступний вигляд:

$$T(\tau) = \sum_i \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i(z) \cdot$$
$$\cdot \left(\left(\dot{u}_1^{(i)}(x, \varphi, z, \tau) \right)^2 + \left(\dot{u}_2^{(i)}(x, \varphi, z, \tau) \right)^2 + \left(\dot{u}_3^{(i)}(x, \varphi, z, \tau) \right)^2 \right) (R_i +$$
$$+ z_i) dz_i \, d\varphi \, dx \, , i = \{t, c, b\} \quad (3.49)$$

де $\rho_i(z)$ – густина i-го шару; крапка означає похідну по часу.

Підстановка розкладень (2.2), (2.3) в кінетичну енергію (3.47) та інтегрування по z дозволяє представити її в формі:

$$T = 0.5 \sum_i \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(r_0{}^{(i)} T_0{}^{(i)} + r_1{}^{(i)} T_1{}^{(i)} + \cdots + r_5{}^{(i)} T_5{}^{(i)} \right) d\varphi dx +$$
$$+ 0.5 \rho_c \int_0^L \left(T_0{}^{(c)} + T_2{}^{(c)} + T_4{}^{(c)} + T_6{}^{(c)} \right) d\varphi dx, \quad (3.50)$$

де $r_j^{(i)} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i{}^j \rho_i(z_i) dz_i \,; i = t, b;$

вирази для $T_j^{(i)}$, $j = 0 \ldots 5$, $i = t, b$, а також $T_0{}^{(c)}$, $T_2{}^{(c)}$, $T_4{}^{(c)}$, $T_6{}^{(c)}$ винесено в Додаток Г.

Перейдемо до визначення потенційної енергії оболонки. Потенційна енергія заповнювача має вигляд:

$$\Pi^{(c)}(\tau) = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left(\sum_{j=1}^{6} \sigma_j^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \varepsilon_j^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \right) (R_c + z_c) dz_c \, d\varphi \, dx, \quad (3.51)$$

де $\sigma^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \sigma_{zz}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \sigma_{\varphi z}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \sigma_{xz}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \sigma_{x\varphi}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \end{bmatrix}$ – вектор напружень у заповнювачі;

$\varepsilon^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \varepsilon_{zz}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \varepsilon_{\varphi z}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \varepsilon_{xz}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \\ \varepsilon_{x\varphi}^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) \end{bmatrix}$ – вектор деформацій в заповнювачі.

Деформації та напруження $\sigma^{(c)}$, $\varepsilon^{(c)}$ пов’язані законом Гука (3.42). В цих умовах потенційна енергія заповнювача має вигляд:

$$\Pi^{(c)}(\tau) = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left(\sigma_{xx}^{(c)} \varepsilon_{xx}^{(c)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} + \sigma_{zz}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + 2\sigma_{x\varphi}^{(c)} \varepsilon_{x\varphi}^{(c)} + 2\sigma_{\varphi z}^{(c)} \varepsilon_{\varphi z}^{(c)} + 2\sigma_{xz}^{(c)} \varepsilon_{xz}^{(c)} \right) (R_c + z_c) dz_c \, d\varphi \, dx.$$

Врахування розкладень (3.48) в потенційній енергії та інтегрування за змінною z_c приводить потенційну енергію до вигляду:

$$\Pi^{(c)}(\tau) = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\Pi_0^{(c)} + \Pi_2^{(c)} + \Pi_4^{(c)} + \Pi_6^{(c)} \right) d\varphi \, dx, \qquad (3.52)$$

де вирази для обчислення $\Pi_0^{(c)}$, $\Pi_2^{(c)}$, $\Pi_4^{(c)}$, $\Pi_6^{(c)}$ винесено в Додаток Г.

У свою чергу, потенційна енергія обшивок представляється наступним чином:

$$\Pi^{(i)}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \left(\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \sigma_{\varphi z}^{(i)} \varepsilon_{\varphi z}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{x\varphi}^{(i)} \varepsilon_{x\varphi}^{(i)} \right) (R_i + z_i) dz_i \, d\varphi \, dx \,, i = t, b. \qquad (3.53)$$

З урахуванням підстановки (3.43) у (3.53), маємо:

$$\Pi^{(i)}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \left(Q_{11} {\varepsilon_{xx}^{(i)}}^2 + 2Q_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + Q_{22} {\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}}^2 + G_{23} {\varepsilon_{\varphi z}^{(i)}}^2 + G_{13} {\varepsilon_{xz}^{(i)}}^2 + G_{12} {\varepsilon_{x\varphi}^{(i)}}^2 \right) (R_i + z_i) dz_i \, d\varphi \, dx, i = t, b. \qquad (3.54)$$

Після інтегрування за z потенційна енергія набуває форми:

$$\Pi^{(i)}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{5} \Pi_j^{(i)}(x, \varphi, \tau) d\varphi \, A_\varphi dx \,, i = t, b, \qquad (3.55)$$

де вирази для обчислення $\Pi_j^{(i)}, j = 0 \ldots 5, i = t, b$ винесено в Додаток Г.

Таким чином, потенційна енергія всієї оболонки обчислюється за формулою:

$$\Pi(\tau) = \Pi^{(t)}(\tau) + \Pi^{(c)}(\tau) + \Pi^{(b)}(\tau). \qquad (3.56)$$

Визначимо граничні умови для оболонки. Геометричні граничні умови для оболонки, яку защемлено з обох боків, мають вигляд:

$$u_1^{(i)}\Big|_{x=0} = u_2^{(i)}\Big|_{x=0} = u_3^{(i)}\Big|_{x=0} = u_1^{(i)}\Big|_{x=L} = u_2^{(i)}\Big|_{x=L} = u_3^{(i)}\Big|_{x=L} = 0;$$
$$\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=L} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=L} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0. \qquad (3.57)$$

Для побудови рівнянь руху необхідно знайти роботу зовнішньої сили $\Phi\sin(\Omega\tau)$. Вона обчислюється наступним чином:

$$\widetilde{W} = -\frac{\Phi\sin(\Omega\tau)}{2}\left(h_t R_t \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi + h_c R_c \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + h_b R_b \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi \right). \qquad (3.58)$$

Таким чином, отримано всі компоненти математичної моделі для побудови рівнянь руху.

3.2.2 Побудова рівнянь руху конструкції. Для побудови рівнянь руху циліндричної оболонки застосовується метод заданих форм, який описано у (2.27), (2.28). Розглянемо особливості його застосування для циліндричної оболонки.

Для пошуку власних форм оболонки застосовується метод Релея-Рітца. Проекції переміщень серединної поверхні та кути обертання нормалі до неї представляються наступним чином:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \varphi_{1,1}^{(i)} \\ \varphi_{2,1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \Phi_i \\ \Psi_i \end{bmatrix} \cos(\omega\tau), \qquad i = t, c, b, \tag{3.59}$$

де $\omega -$ частота власних коливань; $U_i(x,\varphi), V_i(x,\varphi), W_i(x,\varphi), \Phi^{(i)}(x,\varphi), \Psi^{(i)}(x,\varphi) -$ невідомі функції, що задовольняють граничним умовам (3.57). Ці функції представимо в наступному вигляді:

$$U_i = \left(\sum_{m=1}^{N_u^{(i)}} U_m^{(i)} F_m^{(u)}(x) \right) \cos(n\varphi);$$

$$V_i = \left(\sum_{m=1}^{N_v^{(i)}} V_m^{(i)} F_m^{(v)}(x) \right) \sin(n\varphi);$$

$$W_i = \left(\sum_{m=1}^{N_w^{(i)}} W_m^{(i)} F_m^{(w)}(x) \right) \cos(n\varphi);$$

$$\Phi_i = \left(\sum_{m=1}^{N_\Phi^{(i)}} \Phi_m^{(i)} F_m^{(\Phi)}(x) \right) \cos(n\varphi);$$

$$\Psi_i = \left(\sum_{m=1}^{N_\Psi^{(i)}} \Psi_m^{(i)} F_{m,n}^{(\Psi)}(x) \right) \sin(n\varphi), i = t, c, b, \tag{3.60}$$

де $F_m^{(u)}(x), F_m^{(v)}(x), F_m^{(w)}(x), F_m^{(\Phi)}(x), F_m^{(\Psi)}(x) -$ базисні функції;

n – кількість хвиль за окружною координатою на власній формі.

Об'єднаємо невідомі коефіцієнти розкладення (3.60) у вектор $\mathbf{A} = \left(A_1, \dots, A_{N_*}\right)$, в яких включено $U_m^{(i)}, V_m^{(i)}, W_m^{(i)}, \Phi_m^{(i)}, \Psi_m^{(i)}$. Після підстановки в (3.50), (3.56) розкладень (3.59), (3.60), вони набувають наступної форми:

$$T_\Sigma = \omega^2 sin^2(\omega\tau)\tilde{T}(\mathbf{A});$$
$$U_\Sigma = cos^2(\omega\tau)\tilde{U}(\mathbf{A}). \qquad (3.61)$$

Функції $\tilde{T}(\mathbf{A}), \tilde{U}(\mathbf{A})$ є результатами розрахунку подвійних інтегралів (3.55), (3.52), (3.50).

Вільні коливання конструкції відбуваються згідно з принципом мінімуму функціоналу дії:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(T(t) - \Pi(t)\right)d\tau \to min. \qquad (3.62)$$

Підстановка (3.61) у (3.62) дозволяє звести задачу до мінімізації за $A_j, j = 1 \dots N_*$ наступної квадратичної форми:

$$\frac{\pi}{\omega}\left[\tilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2\tilde{T}(\mathbf{A})\right] \to min. \qquad (3.63)$$

Для визначення мінімуму складемо систему рівнянь $\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\tilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2\tilde{T}(\mathbf{A})\right] = 0; j = 1,2, \dots, N_*$. Її розв'язок еквівалентний проблемі власних значень, що відповідає вільним коливанням конструкції. Знайдені власні форми застосовано для побудови рівнянь руху оболонки.

Для цього скористаємось методом заданих форм. Представимо змінні $u^{(i)}(x,\varphi,\tau),\ v^{(i)}(x,\varphi,\tau),\ w^{(i)}(x,\varphi,\tau),\ \varphi_{1,1}^{(i)}(x,\varphi,\tau),\ \varphi_{2,1}^{(i)}(x,\varphi,\tau),\ i=\{t,b,c\}$ у формі:

$$\begin{bmatrix} w^{(t)} \\ v^{(t)} \\ u^{(t)} \\ \varphi_{1,1}^{(t)} \\ \varphi_{2,1}^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1+6N_f}(\tau){W_t}^{(0)}(x) \\ q_{4+12N_f}(\tau){V_t}^{(0)}(x) \\ q_{7+18N_f}(\tau){U_t}^{(0)}(x) \\ q_{10+24N_f}(\tau){\Phi_t}^{(0)}(x) \\ q_{13+30N_f}(\tau){\Psi_t}^{(0)}(x) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_i(\tau){W_t}^{(i)}(x) \\ q_{3+6N_f+i}(\tau){V_t}^{(i)}(x) \\ q_{6+12N_f+i}(\tau){U_t}^{(i)}(x) \\ q_{9+18N_f+i}(\tau){\Phi_t}^{(i)}(x) \\ q_{12+24N_f+i}(\tau){\Psi_t}^{(i)}(x) \end{bmatrix} cos(n_i\varphi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_{N_f+i}(\tau){W_t}^{(i)}(x) \\ q_{3+7N_f+i}(\tau){V_t}^{(i)}(x) \\ q_{6+13N_f+i}(\tau){U_t}^{(i)}(x) \\ q_{9+19N_f+i}(\tau){\Phi_t}^{(i)}(x) \\ q_{12+25N_f+i}(\tau){\Psi_t}^{(i)}(x) \end{bmatrix} sin(n_i\varphi);$$

$$\begin{bmatrix} w^{(c)} \\ v^{(c)} \\ u^{(c)} \\ \varphi_{1,1}^{(c)} \\ \varphi_{2,1}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{2+6N_f}(\tau){W_c}^{(0)}(x) \\ q_{5+12N_f}(\tau){V_c}^{(0)}(x) \\ q_{8+18N_f}(\tau){U_c}^{(0)}(x) \\ q_{11+24N_f}(\tau){\Phi_c}^{(0)}(x) \\ q_{14+30N_f}(\tau){\Psi_c}^{(0)}(x) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_{2N_f+i}(\tau){W_c}^{(i)}(x) \\ q_{3+8N_f+i}(\tau){V_c}^{(i)}(x) \\ q_{6+14N_f+i}(\tau){U_c}^{(i)}(x) \\ q_{9+20N_f+i}(\tau){\Phi_c}^{(i)}(x) \\ q_{12+26N_f+i}(\tau){\Psi_c}^{(i)}(x) \end{bmatrix} cos(n_i\varphi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_{3N_f+i}(\tau){W_c}^{(i)}(x) \\ q_{3+9N_f+i}(\tau){V_c}^{(i)}(x) \\ q_{6+15N_f+i}(\tau){U_c}^{(i)}(x) \\ q_{9+21N_f+i}(\tau){\Phi_c}^{(i)}(x) \\ q_{12+27N_f+i}(\tau){\Psi_c}^{(i)}(x) \end{bmatrix} sin(n_i\varphi);$$

(3.64)

$$\begin{bmatrix} w^{(b)} \\ v^{(b)} \\ u^{(b)} \\ \varphi_{1,1}^{(b)} \\ \varphi_{2,1}^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{3+6N_f}(\tau) W_b{}^{(0)}(x) \\ q_{6+12N_f}(\tau) V_b{}^{(0)}(x) \\ q_{9+18N_f}(\tau) U_b{}^{(0)}(x) \\ q_{12+24N_f}(\tau) \Phi_b{}^{(0)}(x) \\ q_{15+30N_f}(\tau) \Psi_b{}^{(0)}(x) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_{4N_f+i}(\tau) W_b{}^{(i)}(x) \\ q_{3+10N_f+i}(\tau) V_b{}^{(i)}(x) \\ q_{6+16N_f+i}(\tau) U_b{}^{(i)}(x) \\ q_{9+22N_f+i}(\tau) \Phi_b{}^{(i)}(x) \\ q_{12+28N_f+i}(\tau) \Psi_b{}^{(i)}(x) \end{bmatrix} cos(n_i \varphi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_f} \begin{bmatrix} q_{5N_f+i}(\tau) W_b{}^{(i)}(x) \\ q_{3+11N_f+i}(\tau) V_b{}^{(i)}(x) \\ q_{6+17N_f+i}(\tau) U_b{}^{(i)}(x) \\ q_{9+23N_f+i}(\tau) \Phi_b{}^{(i)}(x) \\ q_{12+29N_f+i}(\tau) \Psi_b{}^{(i)}(x) \end{bmatrix} sin(n_i \varphi),$$

де N_f – кількість невісесиметричних форм, які враховуються в розрахунку;

$q_i(\tau), i = 1 \dots 15 + 30N_f$ – узагальнені координати;

$U_j{}^{(i)}(x),\ V_j{}^{(i)}(x),\ W_j{}^{(i)}(x),\ \Phi_j{}^{(i)}(x),\ \Psi_j{}^{(i)}(x),\ j = \{t, c, b\},\ i = 0..N_f$ – власні форми коливань оболонки, які знайдено методом Релея-Рітца та які задовольняють умовам (3.57);

$n_i, i = 1 \dots N_f$ – кількість хвиль за окружною координатою, які відповідають -й формі.

Розкладення (3.64) містять в собі N_f невісесиметричних власних форм коливань оболонки та одну вісесиметричну форму. Невісесиметричні власні форми представлені двома сполученими формами. Усього розкладення (3.64) містять $15 + 30N_f$ узагальнених координат.

Підстановка (3.64) у вирази для потенційної та кінетичної енергій і роботи зовнішньої сили, а також проведення інтегрування за змінними $x, \varphi, z_i, i = \{t, c, b\}$ дозволяє побудувати рівняння руху оболонки в формі рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{T}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{q}, \tau)}{\partial q_i} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0, i = 1 \dots 15 + 30N_f, \quad (3.65)$$

де $\tilde{T}$ – квадратична форма відносно $\dot{\mathbf{q}}$;

$\tilde{\Pi}$ – поліноміальна вектор-функція 4 порядку відносно $\mathbf{q}$;

$\mathbf{B}$ – матриця, яка характеризує дисипацію в системі;

$\widetilde{W} =$

$$-\frac{\Phi\sin(\Omega\tau)}{2}\left(q_1{}^2 h_t R_t \int_0^{2\pi}\int_0^L \left(\frac{\partial W_t(x,\varphi)}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi + \right.$$

$$\left. q_3{}^2 h_c R_c \int_0^{2\pi}\int_0^L \left(\frac{\partial W_c(x,\varphi)}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi + q_5{}^2 h_b R_b \int_0^{2\pi}\int_0^L \left(\frac{\partial W_b(x,\varphi)}{\partial x}\right)^2 dx\, d\varphi\right);$$

$\mathbf{q} = [q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_{15+30N_f}(\tau)]^T$.

Для забезпечення обчислювальної стійкості проведемо обезрозмірювання рівнянь (3.66) шляхом наступної заміни змінних:

$$\mathbf{q} \to \frac{\mathbf{q}}{h_c};\ \tau \to \omega_1 \tau.$$

В матричній формі рівняння (3.65) мають вигляд:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \beta\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \tau), \tag{3.66}$$

де $\mathbf{M}$ – матриця мас $(15 + 30N_f) \times (15 + 30N_f)$;

$\mathbf{K}$ – матриця жорсткостей $(15 + 30N_f) \times (15 + 30N_f)$;

β – коефіцієнт дисипації, яка обирається пропорційною матриці жорсткості;

$\boldsymbol{\Xi}$ – $(15 + 30N_f)$-мірна поліноміальна вектор-функція 3 порядку відносно узагальнених координат;

$\mathbf{F}$ – $(15 + 30N_f)$-мірний вектор узагальненої сили, $\mathbf{F}_i = \frac{\partial \widetilde{W}(\mathbf{q},\tau)}{\partial q_i}$.

Таким чином, побудовано нелінійні звичайні диференційні рівняння руху оболонки, які досліджуються на предмет динамічної нестійкості.

3.2.3 Особливості аналізу динаміки багатошарових композитних конструкцій зі стільниковим заповнювачем

При побудові та аналізі рівнянь (3.66) виявлено, що матриця **M** є слабо обумовленою, що призводить до значних обчислювальних похибок. Це явище викликано слабким впливом деяких узагальнених координат на динаміку системи, що проявляється в малих значеннях компонентів матриці мас. Для підвищення обчислювальної стійкості задачі застосовується процедура зниження розмірності моделі.

Переформулюємо рівняння (3.66) в узагальнених координатах $q_1 \dots q_{6+12N_f}$, які відповідають переміщенням оболонки $w^{(i)}, v^{(i)}, i = \{t, b, c\}$. Введемо

$$\mathbf{q}_{6+12N_f \dots 15+30N_f} = \tilde{\mathbf{p}};$$
$$\tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{K_{22}}^{-1}\mathbf{K_{21}}\mathbf{r}, \qquad (3.67)$$

де $\tilde{\mathbf{p}}$ – $\left(9 + 18N_f\right)$-вимірний вектор підстановки;

$\mathbf{K_{22}} = \mathbf{K}_{7+12N_f \dots 15+30N_f, 7+12N_f \dots 15+30N_f}$ – матриця $\left(9 + 18N_f\right) \times \left(9 + 18N_f\right)$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\mathbf{K_{21}} = \mathbf{K}_{7+12N_f \dots 15+30N_f, 1 \dots 6+12N_f}$ – матриця $\left(9 + 18N_f\right) \times \left(6 + 12N_f\right)$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\mathbf{r} = \left[q_1 \dots q_{6+12N_f}\right]$ – редукований вектор узагальнених координат.

Застосування підстановки (3.67) до рівнянь (3.66) дозволяє перейти до рівнянь у редукованих координатах:

$$\mathbf{M_{11}}\ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{K}}\beta\dot{\mathbf{r}} + \tilde{\Xi}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \tau), \qquad (3.68)$$

де $\mathbf{M_{11}} = \mathbf{M}_{1\dots6+12N_f,1\dots6+12N_f}$ – матриця мас редукованої системи розмірністю $(6+12N_f)\times(6+12N_f)$, яка є блоком матриці мас;

$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K_{11}} - \mathbf{K_{12}}\mathbf{K_{22}}^{-1}\mathbf{K_{21}}$;

$\mathbf{K_{11}} = \mathbf{K}_{1\dots6+12N_f,1\dots6+12N_f}$ – матриця жорсткостей редукованої системи розмірністю $(6+12N_f)\times(6+12N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей

$\mathbf{K_{12}} = \mathbf{K}_{1\dots6+12N_f,7+12N_f\dots15+30N_f}$ – матриця $(6+12N_f)\times(9+18N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\tilde{\mathbf{F}}$ – $(6+12N_f)$-вимірний вектор узагальненої сили **F** після застосування підстановки (3.67).

Таким чином, систему $15+30N_f$ звичайних диференційних рівнянь (3.66) зведено до системи з $6+12N_f$ звичайних диференційних рівнянь (3.68).

3.2.4 Втрата динамічної стійкості тришаровою циліндричною оболонкою під дією параметричного навантаження

Наступною задачею є аналіз динамічної нестійкості оболонки. Для аналізу динамічної нестійкості оболонки, рух якої описується системою (3.68), застосовується метод визначників Хілла. При цьому в розкладеннях (3.64) врахуємо лише одну невісесиметричну форму. Таким чином, система рівнянь (3.68) перетворюється на систему 6 звичайних лінійних диференційних рівнянь. Узагальнені координати **r** шукаються у вигляді:

$$r_i = \sum_{j=1}^{H} A_{i+12(j-1)}\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H} A_{i+12j-6}\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right), i = 1\dots6, \qquad (3.69)$$

де r_i – компоненти вектора **r**;

A_j – невідомі коефіцієнти;

H – кількість членів розкладення.

Підставляючи (3.64), (3.69) у (3.65) та обчислюючи $\tilde{\mathbf{F}}$, отримуємо вирази:

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = -2\pi R\Phi\sin(\Omega t)h_t\left(\sum_{j=1}^{H} A_{12j-11}\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H} A_{12j-5}\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right)\right)\int_0^L \left(\frac{dW_t}{dx}\right)^2 dx;$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_3 = -2\pi R\Phi\sin(\Omega t)h_c\left(\sum_{j=1}^{H} A_{12j-9}\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H} A_{12j-3}\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right)\right)\int_0^L \left(\frac{dW_c}{dx}\right)^2 dx; \quad (3.70)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_5 = -2\pi R\Phi\sin(\Omega t)h_b\left(\sum_{j=1}^{H} A_{12j-7}\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H} A_{12j-1}\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right)\right)\int_0^L \left(\frac{dW_b}{dx}\right)^2 dx;$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_2 = \tilde{\mathbf{F}}_4 = \tilde{\mathbf{F}}_6 = 0.$$

Застосовуючи до (3.70) тригонометричні формули перетворення множення в суму, компоненти узагальненої сили представлено наступним чином:

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \sum_{j=1}^{H+2} s_j\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H+2} c_j\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right), i = 1,3,5, \quad (3.71)$$

де s_j, c_j є лінійними комбінаціями коефіцієнтів $A_k, k = 1 \dots 12H$ та залежать від Ω і Ф.

Підставляючи розкладення (3.69) у лінійну частину рівнянь (3.68), ліві частини останніх приймають вигляд:

$$\mathbf{M_{11}\ddot{r}} + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{H} \mathbf{SA}\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right) + \sum_{j=1}^{H} \mathbf{CA}\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right), \quad (3.72)$$

де $\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ – матриці 6x6, компоненти яких залежать від Ω;

$\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_{12H}]^T$ – вектор невідомих коефіцієнтів розмірністю 12H.

Прирівнюючи (3.71) та (3.72), а також коефіцієнти при $\sin\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right)$ та $\cos\left(j\frac{\Omega}{2}\tau\right)$, $j = 1 \dots H + 2$, отримуємо однорідну СЛАР відносно компонентів вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{GA} = \mathbf{0}, \quad (3.73)$$

де $\mathbf{G}$ – матриця розмірністю $12H \times 12H$, елементи якої залежать від Ω і Ф.

Існування розв'язку СЛАР (3.73) відповідає границі стійкості системи рівнянь (3.68). Оскільки її розв'язок може існувати тільки при умові $\|\mathbf{G}\| = 0$, рівняння для отримання границь стійкості системи має вигляд:

$$\|\mathbf{G}(\Omega, \Phi)\| = 0. \quad (3.74)$$

Рівняння (3.74), як встановлено при моделюванні, доцільно розв'язувати, зафіксувавши значення амплітуди зовнішньої сили Φ та звівши задачу до розв'язку одного нелінійного рівняння відносно Ω.

Таким чином, побудова границь динамічної стійкості оболонки полягає у послідовному розв'язку рівнянь (3.74) для різних значень амплітуди зовнішньої сили Φ та отриманні відповідних значень її частоти Ω.

3.2.5 Аналіз режимів нелінійних коливань тришарової циліндричної оболонки під дією параметричного навантаження методом продовження за параметром

Важливим етапом дослідження динаміки системи є визначення режимів її нелінійних коливань. Для дослідження нелінійних рівнянь (3.68), перейдемо до головних координат відповідної лінійної системи:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta},$$

де $\mathbf{Q}$ – матриця, стовпці якої є власними векторами матриці $\mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}$;

$\boldsymbol{\eta}$ – вектор головних координат системи (3.68).

Для визначеності, відсортуємо стовпчики матриці $\mathbf{Q}$ наступним чином. Перші $2N_f$ стовпців містять власні вектори, що відповідають невісесиметричним власним формам оболонки, відсортованим за зростанням власної частоти. Ці форми є попарно спряженими. Стовпець з номером $2N_f + 1$ містить власний вектор, що відповідає вісесиметричній власній формі оболонки.

В координатах $\boldsymbol{\eta}$ система (3.68) набуває вигляду:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q}\beta\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Xi}}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \tau), \quad (3.75)$$

де матриця $\mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}$ є діагональною з квадратами власних значень матриці $\mathbf{M_{11}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}$ на головній діагоналі.

Оскільки розкладення (3.64) містять тільки N_f невісесиметричних форм та одну вісесиметричну форму, головними координатами $\eta_i, i = 2 + 2N_f \dots 6 + 12N_f$ можна знехтувати, як і відповідними рівняннями. Тоді рівняння (3.75) приймають вигляд:

$$\ddot{\eta}_{2i} + {\omega_i}^2\eta_{2i} + {\omega_i}^2\dot{\eta}_{2i} + H_{2i}(\boldsymbol{\eta}) = G_{2i}(\boldsymbol{\eta}, \tau);$$
$$\ddot{\eta}_{2i-1} + {\omega_i}^2\eta_{2i-1} + {\omega_i}^2\dot{\eta}_{2i-1} + H_{2i-1}(\boldsymbol{\eta}) = G_{2i-1}(\boldsymbol{\eta}, \tau), i = 1 \dots N_f; \quad (3.76)$$

$$\ddot{\eta}_{2N_f+1} + {\omega_0}^2\eta_{2N_f+1} + {\omega_0}^2\dot{\eta}_{2N_f+1} + H_{2N_f+1}(\boldsymbol{\eta}) = G_{2N_f+1}(\boldsymbol{\eta}, \tau)$$

де ω_i – i-ті власні частоти коливань циліндричної оболонки, що відповідають невісесиметричним формам;

ω_0 – власна частота вісесиметричної форми;

вектор-функції $\mathbf{H}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M_{11}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta})|_{\eta_i=0, i=2+2N_f \ldots 6+12N_f}$;

$\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M_{11}}^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \tau)|_{\eta_i=0, i=2+2N_f \ldots 6+12N_f}$.

Дослідження нелінійних коливань оболонки здійснюється методом продовження за параметром. З лінійного аналізу (див. розділ 3.2.4) відомо, що втрата стійкості положення рівноваги оболонки відбувається тоді, коли період розв'язку (3.77) вдвічі більший за період параметричної сили. Таким чином, розшукуються періодичні розв'язки безрозмірного періоду 2.

3.2.6 Результати чисельного аналізу

Розглядається циліндрична оболонка з обшивками товщиною 1 мм, які виготовлено з вуглепластику SIGRAPREG C U200 з 4 шарами, що розташовані під кутами 0°/90°/0°/90°. Його механічні властивості є наступними:

$E_{11} = 35$ ГПа; $E_{22} = 35$ ГПа; $E_{33} = 8$ ГПа; $\nu_{23} = 0.09$; $\nu_{13} = 0.09$; $\nu_{12} = 0.01$; $G_{23} = 30$ ГПа; $G_{13} = 30$ ГПа; $G_{12} = 6$ ГПа; $\rho_i = 1477\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, i = \{t, b\}$.

Стільниковий заповнювач товщиною 10 мм виготовлено з матеріалу ULTEM 9085 методом FDM друку. Елемент заповнювача наведено на рис. 3.15. Його розміри є наступними: $l_1 = 6.1054$ мм; $l_2 = 3.0527$ мм; $\theta = 60^\circ$; $h_1 = h_2 = 0.4$ мм. Гомогенізовані властивості заповнювача дорівнюють: $E_{xx} = 2.91$ МПа; $E_{\varphi\varphi} = 2.91$ МПа; $E_{zz} = 215.10$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0.972$; $\nu_{\varphi z} = 0.0051$; $\nu_{xz} = 0.0042$; $G_{x\varphi} = 1.118$ МПа; $G_{\varphi z} = 39.1$ МПа; $G_{xz} = 39.1$ МПа;

ρ_c =253.189 $\frac{кг}{м^3}$. Докладно процедуру гомогенізації описано у сьомому розділі.

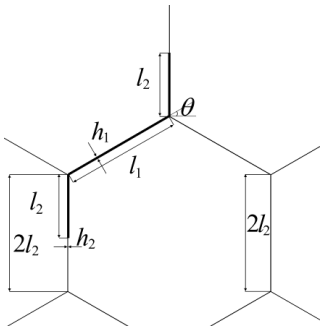


Рисунок 3.15 – Ескіз елементу заповнювача

Довжина циліндру дорівнює 1 м, внутрішній радіус – 0.25 м.

Було проведено розрахунок власних частот та форм оболонки. Результати аналізу власних коливань конструкції порівнювались зі скінченно-елементним моделюванням у середовищі ANSYS. У табл. 3.9 наведено власні частоти (в Гц), які отримано методом Релея-Рітца та скінченно-елементним моделюванням. Метод Релея-Рітца застосовано зі значенням $N_x = 25$.

Таблиця 3.9 – Власні частоти коливань тришарової циліндричної оболонки

Номер	Метод Релея-Рітца	n	МСЕ	Похибка, %
1	385.56	2	381.76	1.00
2	414.62	3	411.97	0.64
3	590.17	1	587.82	0.40
4	590.38	4	588.85	0.26
5	618.56	3	607.65	1.79
6	698.61	4	690.84	1.12
7	732.77	2	721.83	1.52
8	811.01	5	809.93	0.13

9	857.70	0	857.70	0.00
10	874.43	5	869.16	0.61
11	875.88	4	859.16	1.95
12	886.29	3	867.26	2.19
13	990.61	5	977.72	1.32
14	1042.87	6	1042.00	0.08
15	1085.67	6	1081.80	0.36
16	1091.85	4	1063.40	2.68
17	1100.56	2	1084.10	1.52
18	1129.06	1	1122.90	0.55
19	1150.29	5	1126.00	2.16
20	1165.04	3	1135.70	2.58
21	1166.81	6	1157.00	0.85
22	1276.77	7	1276.00	0.06
23	1285.99	6	1266.30	1.55
24	1309.06	7	1305.90	0.24
25	1319.48	4	1282.50	2.88

Таким чином, метод Релея-Рітца дозволив знайти власні частоти та форми оболонки з високою точністю. Перша власна частота $\bar{\omega}_1$ не приймає участі в резонансах 1:2, 1:3, тому якщо частота періодичної сили задовольняє умові параметричного резонансу $\bar{\Omega} \approx 2\bar{\omega}_1$, будуть збуджені лише дві спряжені форми, що відповідають резонансу 1:1.

Третя та четверта власні частоти відповідають умовам внутрішнього резонансу 1:1. Оскільки відповідні форми мають спряжені пари, в системі спостерігатиметься внутрішній резонанс 1:1:1:1. Ці власні частоти не приймають участі в резонансах 1:2, 1:3, тому інші форми не будуть збуджені. Третя та четверта форми будуть збуджені при виконанні умови параметричного резонансу $\bar{\Omega} \approx 2\bar{\omega}_3$.

Аналіз нелінійних параметричних коливань проводився для двох випадків внутрішнього резонансу, які описано вище: резонанс 1:1 між двома

спряженими формами з частотою $\overline{\omega}_1$ та резонанс 1:1:1:1 між попарними спряженими формами з частотами $\overline{\omega}_3$, $\overline{\omega}_4$. Для першого випадку редукована динамічна система (3.68) має наступний вигляд:

$$\ddot{\hat{q}}_i + \hat{\delta}_1\dot{\hat{q}}_i + \overline{\omega}_1^2\hat{q}_i + \tilde{\mathcal{R}}_{1,i}(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{q}_3) + \hat{\Phi}\sin(\overline{\Omega}\mathrm{t})\sum_{j=1}^{3}\hat{\tilde{K}}_{11,ij}^{(st)}\hat{q}_j = 0; i = 1{,}2; \quad (3.77)$$

$$\ddot{\hat{q}}_3 + \hat{\delta}_3\dot{\hat{q}}_3 + \overline{\omega}_0^2\hat{q}_3 + \tilde{\mathcal{R}}_{1,3}(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{q}_3) + \hat{\Phi}\sin(\overline{\Omega}\mathrm{t})\sum_{j=1}^{3}\hat{\tilde{K}}_{11,3j}^{(st)}\hat{q}_j = 0,$$

де $\hat{q}_1, \hat{q}_2$ – узагальнені координати, що відповідають двом спряженим формам з частотою $\overline{\omega}_1$;

$\hat{q}_3$ – узагальнена координата, що відповідає вісесиметричній формі з частотою $\overline{\omega}_0$. Вісесиметрична форма описує рівномірне розширення оболонки, яке має місце при геометрично нелінійному деформуванні;

$\tilde{\mathcal{R}}_{1,i}(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{q}_3)$ – поліном з кубічними складовими відносно узагальнених координат.

Проведено чисельний аналіз параметричних коливань оболонки з параметрами, які наведено вище. Для аналізу застосовано метод продовження за параметром сумісно з методом пристрілки, які описано в параграфах 2.3.4, 3.2.5. Отримано частотний відгук оболонки, визначено точки біфуркацій та проаналізовано стійкість розв'язків. Розраховані режими коливань оболонки представлено в узагальнених координатах системи (3.66) $q_1, \dots, q_{N_1}$.

Частотний відгук системи поблизу основного параметричного резонансу наведено на рис. 3.16 та 3.17.

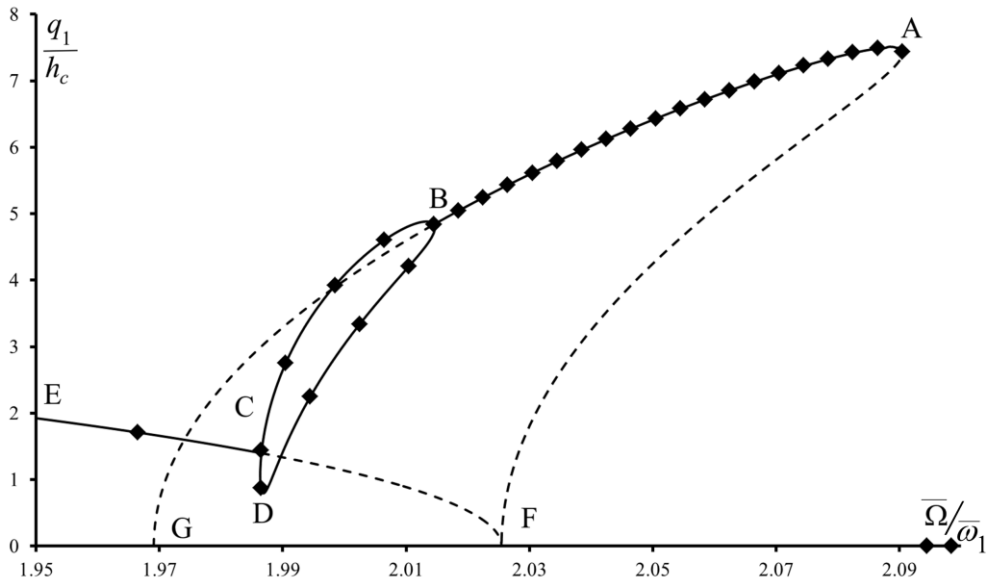


Рисунок 3.16 – Частотний відгук узагальненої координати q_1

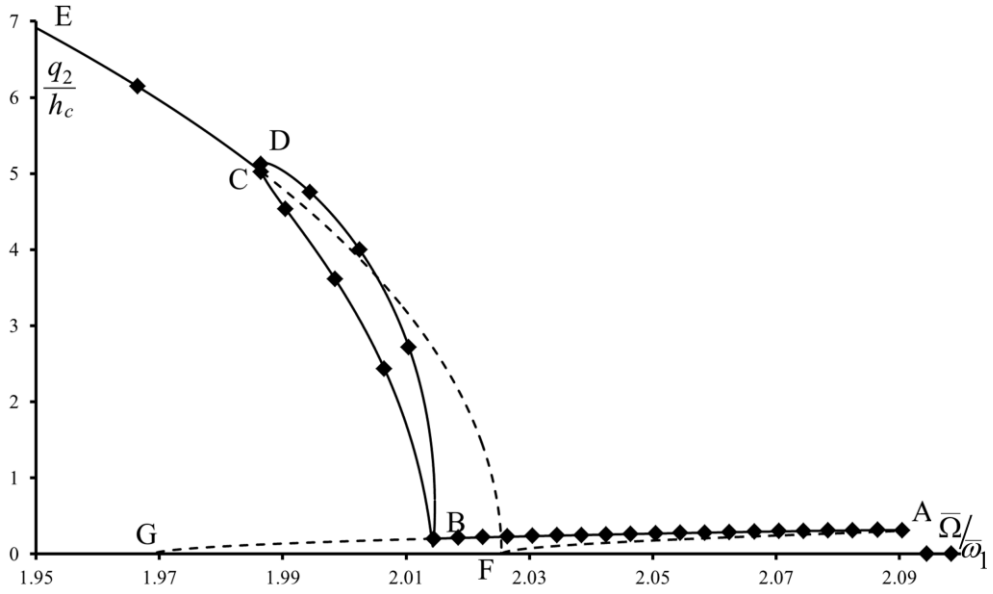


Рисунок 3.17 – Частотний відгук узагальненої координати q_2

Для верифікації результатів було проведено чисельне інтегрування динамічної системи (3.66) з 18 ступенями свободи. Результати інтегрування наведено маркерами на рис. 3.16, 3.17. Збіжність розв’язків, отриманих різними методами, доводить коректність отриманих результатів та застосованих перетворень.

Розглянемо поведінку оболонки в режимах, які наведено на рис. 3.16, 3.17. Стійкі та нестійкі розв’язки показано суцільною та пунктирною

кривими. Резонансні періодичні режими виникають внаслідок страти стійкості положенням рівноваги. Тривіальне положення рівноваги є нестійким на відрізку (GF). Кільце (BCDB) характеризує режими, коли внаслідок взаємодії спряжених форм виникають бігучі хвилі в окружному напрямку. При цьому спостерігається обмін енергією між спряженими формами. Інші ділянки розв'язків, які наведено на рис. 3.16, 3.17 описують стоячі хвилі, які характеризуються збудженням лише одної зі спряжених форм.

У точці G виникають нестійкі періодичні коливання, які стають стійкими в точці біфуркації B, де виникає кільце, що відповідає бігучим хвилям. В цій точці множник Флоке стоячої хвилі дорівнює 1 ($\lambda = 1$). У точці F виникають дві гілки нестійких періодичних коливань. Одна з них стає стійкою в точці C, в якій гілка з'єднується з кільцем бігучих хвиль. Гілка нестійких періодичних коливань (FA) в точці A проходить через сідловузлову біфуркацію.

Зупинимось докладніше на явищі бігучих хвиль, що характеризуються кільцем (BCDB) (рис. 3.16 та 3.17). Частина розкладення (3.64), що описує $w^{(j)}$, має вигляд:

$$W_j^{(1)}(x)[q_1 cos(n_1\varphi) + q_2 sin(n_1\varphi)] = W_j^{(1)}(x)A(t)sin(n_1\varphi + \varphi_0(t)), \quad (3.78)$$

де $A(t) = \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2}$;

$$\sin\varphi_0 = \frac{q_1}{\sqrt{{q_1}^2+{q_2}^2}};$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{q_2}{\sqrt{{q_1}^2+{q_2}^2}}.$$

Якщо функція $\varphi_0(t)$ приймає лише постійні значення, має місце стояча хвиля. Якщо φ_0 є монотонною функцією часу, спостерігаються бігучі хвилі вздовж кругової координати. Вигляд функції $\varphi_0(t)$ для стоячих хвиль наведено на рис. 3.18, вона приймає лише два значення $\mp 0.5\pi$. Функція $\varphi_0(t)$, що відповідає бігучим хвилям при $\Omega = 2.00005$ показана на рис. 3.19.

Період, з яким бігучі хвилі проходять повне коло, дорівнює подвоєному періоду параметричного навантаження. На рис. 3.19 функція $\varphi_0(t)$ наведена з урахуванням 2π-періодичності кругової координати.

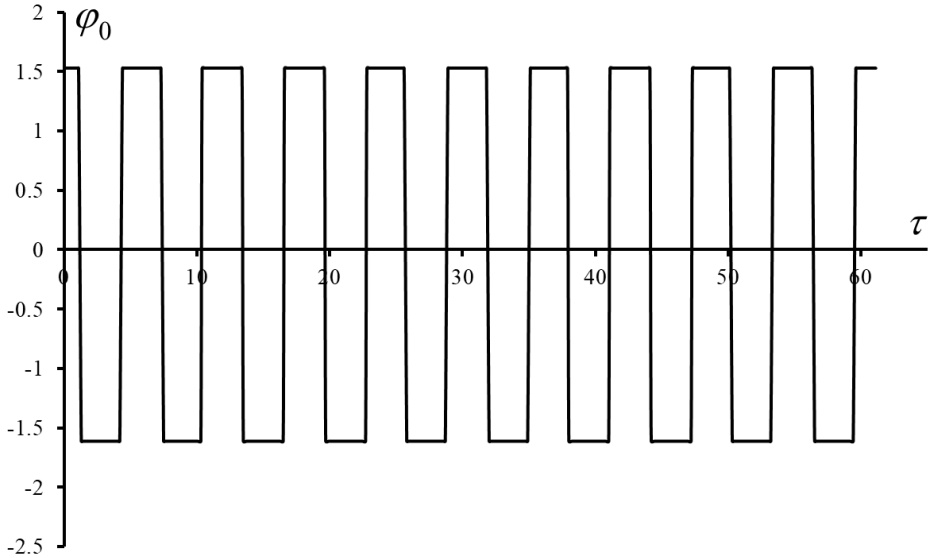


Рисунок 3.18 – Функція $\varphi_0(t)$ при $\Omega = 2.0547$. Коливання знаходяться на гілці (AB) частотного відгуку (рис. 3.21)

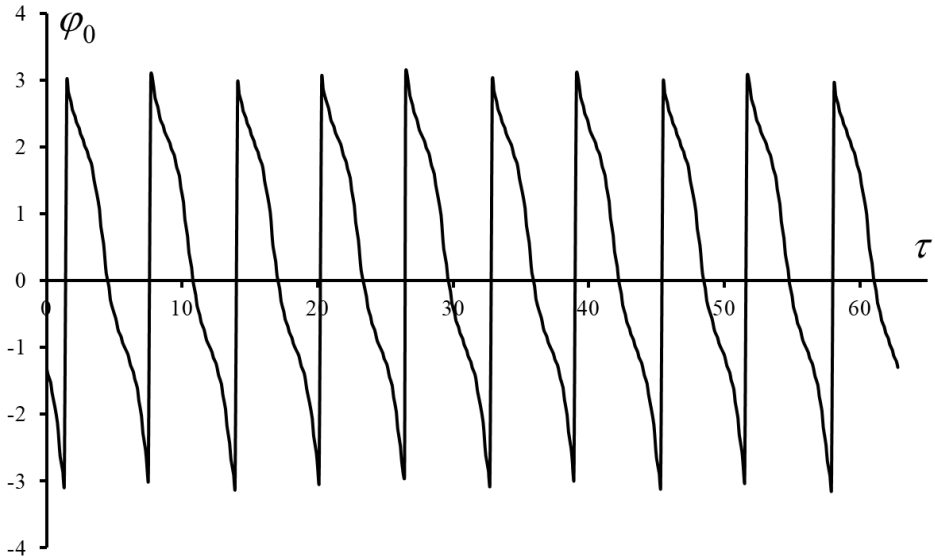


Рисунок 3.19 – Функція $\varphi_0(t)$ при $\Omega = 2.00005$. Коливання знаходяться на гілці (BC) частотного відгуку (рис. 3.21)

Розглянемо випадок параметричного резонансу з частотою $\bar{\omega}_3$ або $\bar{\omega}_4$ (Табл. 3.9). Нелінійні параметричні коливання аналізуються в умовах резонансу 1:1:1:1, коли форми для кожної з частот є спряженими.

Розкладення (3.64) застосовується з $N_f = 2$. Кількість хвиль у окружному напрямку дорівнює (Табл. 3.9) $n_1 = 1;\ \ n_2 = 4$. Коливання тонкостінної конструкції описується нелінійною динамічною системою в модельних координатах (3.68). У цьому випадку система (3.68) має п'ять ступенів свободи:

$$\ddot{\hat{q}}_{2i-1} + \hat{\delta}_i \dot{\hat{q}}_{2i-1} + \tilde{\omega}_i^2 \hat{q}_{2i-1} + \tilde{\mathcal{R}}_{1,2i-1}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_5) + \hat{\Phi}\sin(\bar{\Omega}\mathrm{t}) \sum_{j=1}^{5} \hat{\bar{K}}^{(st)}_{11,(2i-1),j}\, \hat{q}_j = 0;$$

$$\ddot{\hat{q}}_{2i} + \hat{\delta}_i \dot{\hat{q}}_{2i} + \tilde{\omega}_i^2 \hat{q}_{2i} + \tilde{\mathcal{R}}_{1,2i}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_5) + \hat{\Phi}\sin(\bar{\Omega}\mathrm{t}) \sum_{j=1}^{5} \hat{\bar{K}}^{(st)}_{11,(2i),j}\, \hat{q}_j = 0; i = 1{,}2;$$

$$\ddot{\hat{q}}_5 + \hat{\delta}_5 \dot{\hat{q}}_5 + \bar{\omega}_0^2 \hat{q}_5 + \tilde{\mathcal{R}}_{1,5}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_5) + \hat{\Phi}\sin(\bar{\Omega}\mathrm{t}) \sum_{j=1}^{5} \hat{\bar{K}}^{(st)}_{11,5j}\, \hat{q}_j = 0, \quad (3.79)$$

де $\tilde{\omega}_1 \equiv \bar{\omega}_3$;

$\tilde{\omega}_2 \equiv \bar{\omega}_4$;

$\hat{q}_1, \hat{q}_2$ – узагальнені координати, що відповідають спряженим формам з частотою $\tilde{\omega}_1$;

$\hat{q}_3, \hat{q}_4$ – узагальнені координати, що відповідають спряженим формам з частотою $\tilde{\omega}_2$;

$\hat{q}_5$ – узагальнена координата, що відповідає вісесиметричній формі;

$\tilde{\mathcal{R}}_{1,i}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)$ – поліном з кубічними складовими відносно узагальнених координат.

Було проведено аналіз впливу лінійного демпфування на нелінійні параметричні коливання. Для цього проводилися розрахунки при двох значеннях демпфування $\beta_1 = 0.021$ та $\beta_2 = 0.0062$.

На рис. 3.20, 3.21 наведено результати розрахунків при $\beta = \beta_1 = 0.021$. Узагальнені координати q_3, q_4 системи (3.66) є найбільш активними. Узагальнені координати q_1, q_2 мають малі амплітуди.

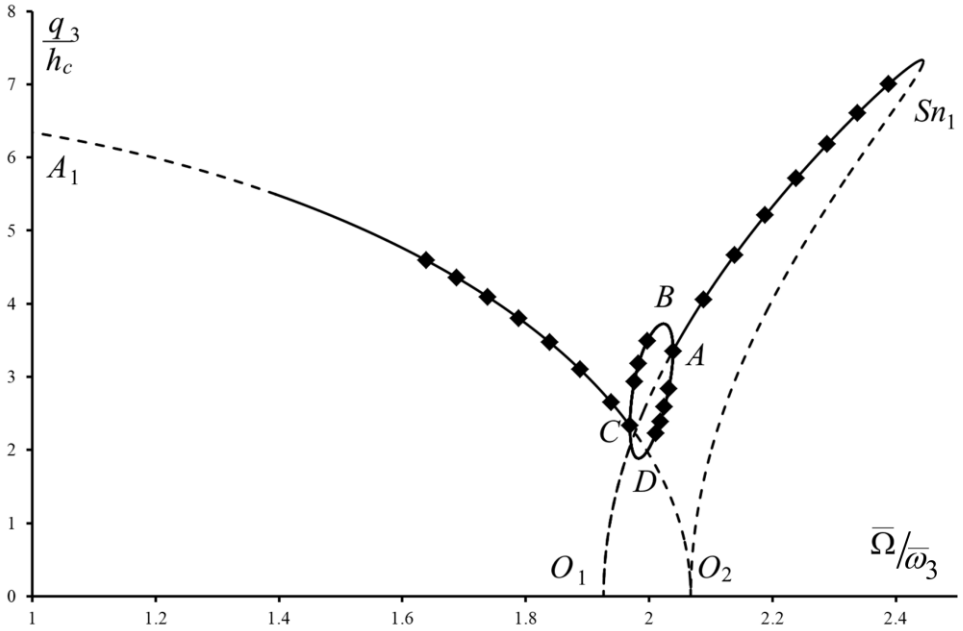


Рисунок 3.20 –Частотний відгук координати q_3

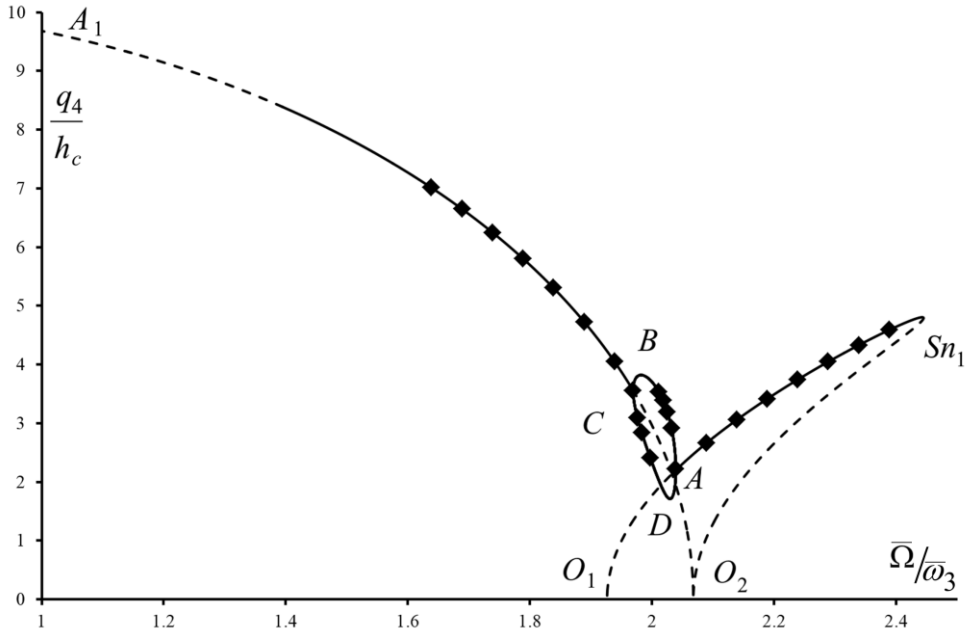


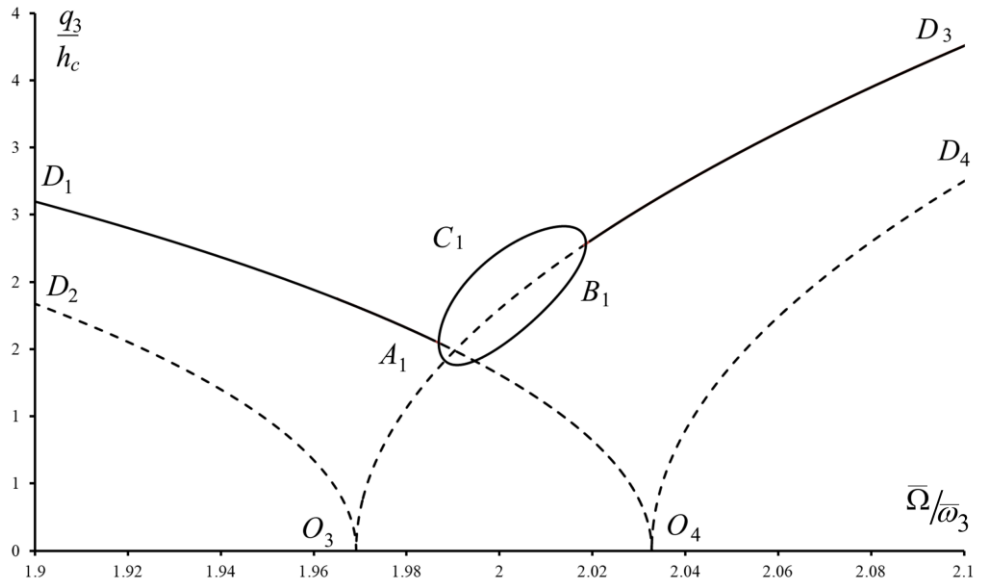
Рисунок 3.21 – Частотний відгук координати q_4

Верифікація результатів проводилась шляхом чисельного інтегрування динамічної системи (3.66) з 75 ступенями свободи. Результати, які отримано чисельним інтегруванням, наведено на рис. 3.20, 3.21 маркерами. Результати методу продовження за параметром – суцільними та пунктирними лініями. Близькість результатів, отриманих різними методами, підтверджує коректність застосованих перетворень та правильність отриманих результатів.

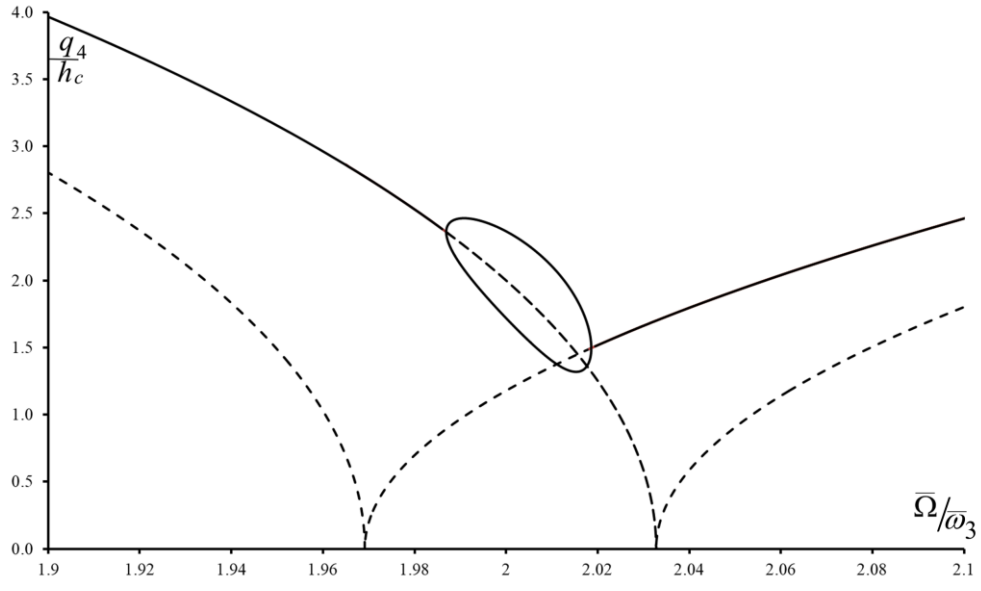
Суцільні та пунктирні лінії на рис. 3.20, 3.21 відображають стійкі та нестійкі розв'язки. Кільце (ABCD) характеризується бігучими хвилями вздовж кругової координати. Інші гілки розв'язків характеризуються стоячими хвилями. У точках O_1 та O_2 тривіальне положення рівноваги втрачає стійкість та виникають періодичні нестійкі коливання. У точці біфуркації A поєднуються гілки стоячих та бігучих хвиль, а стійкість розв'язків зі стоячими хвилями змінюється.

У точці біфуркації C гілки стоячих та бігучих хвиль з'єднуються. Це приводить до зміни стійкості гілки стоячих хвиль. У точці сідло-вузлової біфуркації Sn_1 стійкість стоячих хвиль змінюється.

На рис. 3.22, 3.23 наведено результати чисельного аналізу коливань тонкостінної конструкції з лінійним демпфуванням $\beta = \beta_2 = 0.0062$. Суцільними лініями наведено стійкі розв'язки, пунктиром – нестійкі. Аналіз свідчить про співставні амплітуди узагальнених координат $q_1, \dots, q_4$. Таким чином, на відповідному кільці можна спостерігати дві бігучі хвилі в круговому напрямку.

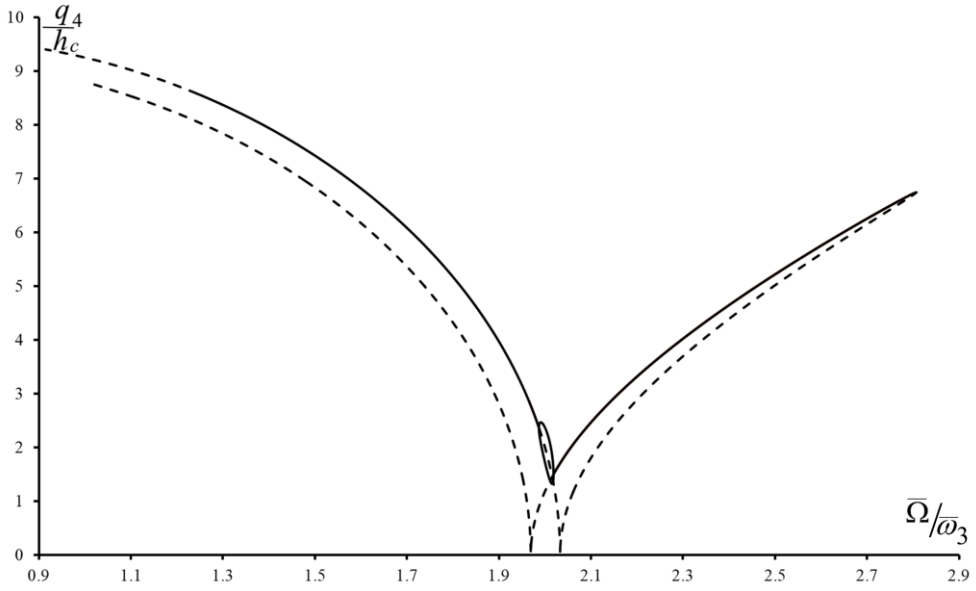


а.

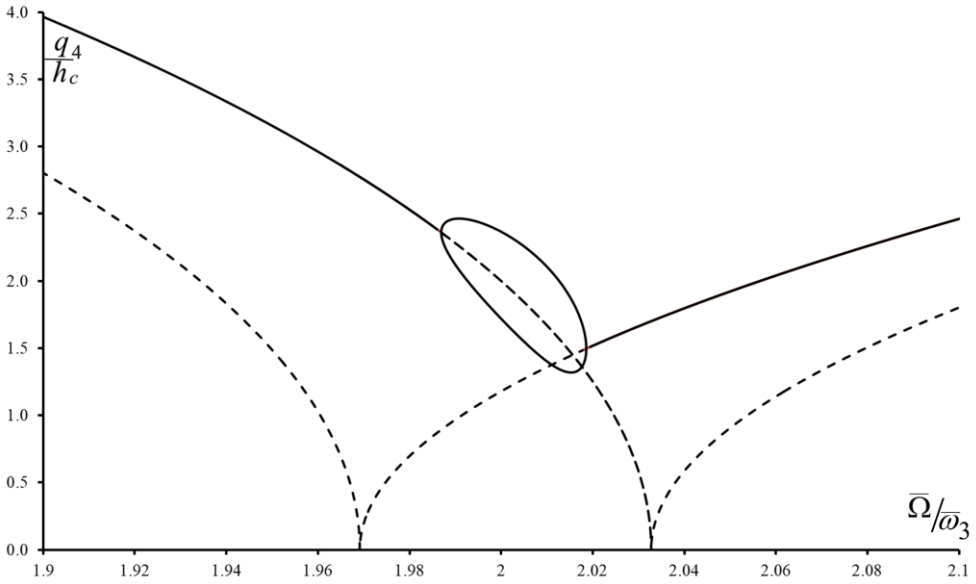


б.

Рисунок 3.22 – Частотний відгук координати q_3: а. – менший масштаб; б. – більший масштаб



а.



б.

Рисунок 3.23 – Частотний відгук координати q_4: а. – менший масштаб; б. – більший масштаб

Кільце $(A_1B_1C_1)$ (рис. 3.22б) характеризує бігучі хвилі в конструкції . Всі інші гілки характеризують стоячі хвилі. У точках біфуркації O_3 та O_4 починаються дві гілки нестійких періодичних коливань. У точці біфуркації A_1 стоячі хвилі, що описуються гілкою (O_4D_1), змінюють стійкість після перетину гілок стоячих та бігучих хвиль. Гілка стоячих хвиль в точці

біфуркації A_1 характеризується множником Флоке $\lambda = 1$. Гілка стоячих хвиль (O_3D_3) перетинається з гілкою бігучих хвиль в точці біфуркації B_1, і стійкість стоячих хвиль змінюється. У точці сідло-вузлової біфуркації Sn_2 (рис. 3.22а) стійка (O_3D_3) та нестійка (O_4D_4) гілки стоячих хвиль з'єднуються.

Таким чином, при зниженні лінійного демпфування амплітуди резонансних нелінійних параметричних коливань підвищувались. Отриманий ефект докорінно відрізняється від загальновідомих. Так, у [247] стверджується, що демпфування слабко впливає на амплітуди нелінійних параметричних коливань стрижнів. У [248] зроблено висновок, що амплітуди нелінійних параметричних коливань тонкостінних конструкцій не залежать від значення коефіцієнту демпфування.

Висновки за розділом 3

У розділі розглянуто застосування методики, яку запропоновано у розділі 2, до розв'язання задач аналізу нелінійних коливань циліндричних оболонок під дією різних видів навантаження.

1. Запропоновано метод аналізу автоколивань функціонально градієнтної нанокомпозитної циліндричної оболонки, що взаємодіє з надзвуковим струмом.

2. Отримано нову модель геометрично нелінійних коливань функціонально градієнтних нанокомпозитних циліндричних оболонок на базі теорії зсувних деформацій Редді високого порядку Проєкції переміщень розкладено за спряженими та вісесиметричними формами коливань оболонки. Флатер конструкції описується системою звичайних нелінійних диференційних рівнянь, яку побудовано методом заданих форм. Метод гармонійного балансу з моногармонійною апроксимацією автоколивань застосовано для дослідження автоколивань конструкції.

3. Встановлено, що втрата динамічної стійкості нанокомпозитною циліндричної оболонкою в надзвуковому струмі відбувається внаслідок

біфуркації Хопфа. Мінімальний критичний тиск вільного струму спостерігається при кількості хвиль в круговому напрямку $n = 5$ та $n = 6$. Це значення суттєво менше ніж таке для ізотропних оболонок, для яких найменший критичний тиск спостерігається при $n = 27$.

4. Визначено, що тип армування вуглецевими нанотрубками суттєво впливає на значення критичного тиску. За рахунок раціонального вибору типу армування критичний тиск може бути змінений в два рази.

5. Як свідчать результати аналізу флатера циліндричної нанокомпозитної оболонки, в точці біфуркації Хопфа виникають стійкі автоколивання. У цьому режимі велику роль грає змінна $\phi_2(x, \theta, t)$, тобто спостерігається суттєве скручування оболонки. Підвищення об'ємної кількості вуглецевих нанотрубок в композиті значно знижує амплітуди автоколивань; частоти автоколивань при цьому змінюються несуттєво.

6. Отримано нову математичну модель для опису параметричних нелінійних коливань композитної багатошарової циліндричної оболонки. Модель має форму системи звичайних нелінійних диференційних рівнянь. Для опису напружено-деформованого стану застосовано теорію деформацій зсуву високого порядку для кожного з шарів конструкції в поєднанні з умовами безперервності переміщень між шарами. Модель враховує геометрично нелінійне деформування конструкції. Для дискретизації застосовано метод заданих форм.

7. Досліджено нелінійну динаміку композитної циліндричної сендвіч-оболонки, яка знаходиться під дією осьового періодичного навантаження. На границі стійкості тривіального положення рівноваги оболонки виникає одна чи дві гілки періодичних коливань.

8. У частотному відгуку сендвіч-оболонки на параметричне навантаження поблизу параметричного резонансу вперше знайдено замкнені кільця розв'язків, що відповідають бігучим хвилям вздовж кругової координати. Всі інші розв'язки характеризують стоячі хвилі в круговому напрямку.

9. Встановлено, що у точках перетину гілок стоячих та бігучих хвиль перші змінюють стійкість. Таких точок завжди спостерігалось дві.

10. Визначено, що поблизу параметричного резонансу спостерігався значний вплив коефіцієнту лінійного демпфування на амплітуди резонансних коливань: при підвищенні демпфування амплітуди знижувались.

Результати, які описано в цьому розділі, було використано в публікаціях [1, 2, 10, 12, 16, 25, 37, 38, 41, 44, 45, 47, 49, 54], які наведено в Додатку А.

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІКА КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК

Розділ присвячено дослідженню динаміки конічних оболонок під впливом імпульсного навантаження та надзвукового повітряного струменя. Такі умови є типовими для руху ракетоносіїв на атмосферній ділянці польоту.

Дослідження спрямовано на визначення безпечних та критичних умов для композитної оболонки і є необхідним при проєктуванні відповідних об’єктів.

4.1 Динаміка композитної конічної оболонки зі шпангоутом під дією імпульсного навантаження

Розглянемо усічену конічну оболонку з композитного матеріалу, на вершині якої розташовано металічне кільце. Така конструкція може використовуватися в ракетокосмічній техніці як адаптер або як корпусний елемент наземного чи повітряного апарату. Ескіз об’єкта наведено на рис. 4.1. Конічну оболонку зроблено з композитного ортотропного матеріалу. Кільце є ізотропним та жорстко кріпиться до оболонки. Оболонка вважається защемленою по нижньому краю.

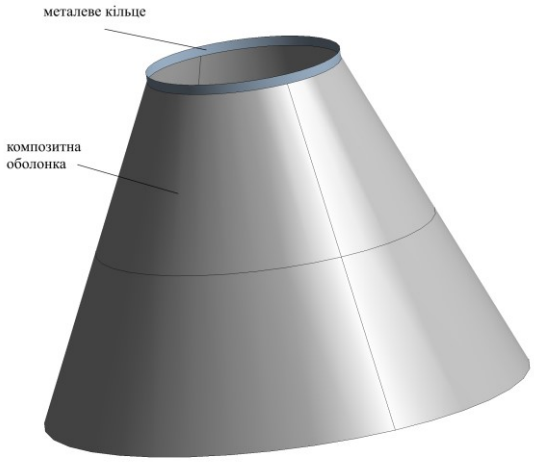
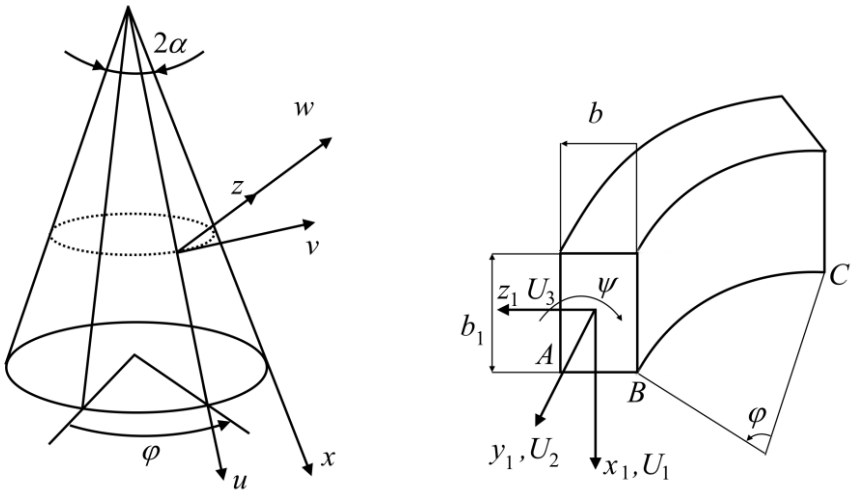


Рисунок 4.1 – Ескіз оболонки

На об’єкт діє імпульсне навантаження, що паралельно вісі оболонки та застосовується до ізотропного кільця. Навантаження характеризується високою інтенсивністю та малою тривалістю. Внаслідок його дії в оболонці виникають перехідні процеси, які можуть призвести до її руйнування. Дослідимо ці перехідні процеси.

Зв’яжемо з конічною оболонкою систему координат, яку наведено на рис. 4.2а. Вісь x спрямовано вздовж твірної лінії конуса; кругова координата φ вимірюється в площині, яка є паралельною до основи конуса; вісь z є нормальною до поверхні. Точка відліку вісі x розташована на вершині конуса; відлік вздовж вісі z ведеться від серединної поверхні оболонки. Для опису ізотропного кільця застосовується система координат $[x_1, \varphi, z_1]$, де координати x_1, z_1 описують переріз кільця (рис. 4.2б). Описані координати змінюються в наступних межах: $x \in [x_0; L]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; $z \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$; $x_1 \in \left[-\frac{b_1}{2}; \frac{b_1}{2}\right]$; $z_1 \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$, де x_0 – довжина твірної лінії від вершини конуса до верхньої кромки усіченого конуса; L – довжина твірної лінії від вершини конуса до нижньої кромки усіченого конуса; h – товщина конічної оболонки.



а. б.

Рисунок 4.2 – Зв’язані системи координат: а. – конічної оболонки; б. – ізотропного кільця

Матеріал оболонки характеризується дев’ятьма параметрами:

– E_{xx}, $E_{\varphi\varphi}$, E_{zz} – модулі Юнга у відповідних напрямках;

– $G_{\varphi z}$, G_{xz}, G_{xy} – модулі зсуву у відповідних площинах;

– $\mu_{\varphi z}, \mu_{xz}, \mu_{xy}$ – коефіцієнти Пуассона.

Оскільки матеріал оболонки є жорстким, а сама вона є тонкою, можна знехтувати зміною товщини оболонки у напрямку z. Таким чином, закон Гука для оболонки має вигляд:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{bmatrix};$$

$$\sigma_{xz}=G_{xz}\gamma_{xz};$$

$$\sigma_{x\varphi}=G_{x\varphi}\gamma_{x\varphi};$$

$$\sigma_{\varphi z}=G_{\varphi z}\gamma_{\varphi z},$$

де елементи матриці $Q_{11}=\frac{E_{xx}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}$; $Q_{22}=\frac{E_{\varphi\varphi}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}$; $Q_{12}=\frac{\mu_{\varphi x}E_{xx}}{1-\mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}$;

$\gamma_{xz}, \gamma_{x\varphi}, \gamma_{\varphi z}$ – деформації зсуву;

ε_{xx}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – елементи тензору деформацій;

σ_{xz}, $\sigma_{\varphi z}$, $\sigma_{\text{x}\varphi}$ – напруження зсуву;

$\sigma_{xx}, \sigma_{\varphi\varphi}$ – елементи тензору напружень.

4.1.1 Математична модель динаміки композитної конічної оболонки з ізотропним кільцем

Геометрія конічної оболонки задається двома основними параметрами – параметром Ляме та радіусом кривизни. Параметр Ляме дорівнює радіусу кола серединної поверхні, площина якої є паралельною основі конуса: $r = x \cdot \sin\alpha$. Радіус кривизни поверхні конуса в цій точці дорівнює $R_\varphi = x \cdot \text{tg}(\alpha)$.

При аналізі динаміки оболонки враховуються зсув та інерція обертання. Для цього застосовано теорію зсуву високого порядку (див. розділ

2.1.1) [218, 215]. Проєкцію переміщень точок оболонки на твірну лінію конуса позначимо u_X; проєкцію переміщень на окружну координату позначимо u_φ; проекцію переміщення на нормаль до серединної поверхні оболонки характеризує u_Z. Представимо проєкції переміщень у наступній формі [218, 215]:

$$\begin{gathered} u_X = u(x,\varphi,t) + z\psi_X(x,\varphi,t) + z^2\theta_X + z^3\gamma_X; \\ u_\varphi = \left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right) v(x,\varphi,t) + z\psi_\varphi(x,\varphi,t) + z^2\theta_\varphi + z^3\gamma_\varphi; \\ u_Z = w(x,\varphi,t), \end{gathered} \tag{4.1}$$

де $u, v, w -$ проекції переміщень точок серединної поверхні на твірну, окружну координати та нормаль до серединної поверхні (рис. 2а). Коефіцієнти розкладень (4.1) $\theta_X, \gamma_X, \theta_\varphi, \gamma_\varphi$ знаходяться з граничних умов:

$$\sigma_{XZ}|_{z=\pm 0.5h} = \sigma_{\varphi Z}\big|_{z=\pm 0.5h} = 0, \tag{4.2}$$

де $h -$ товщина оболонки;

$$\begin{gathered} \gamma_{XZ} = \frac{\partial u_X}{\partial z} + \frac{\partial u_Z}{\partial x}; \\ \gamma_{\varphi Z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{1 + zR_\varphi^{-1}}\left(\frac{\partial u_z}{r\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{R_\varphi}\right). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Застосування розкладень (4.1) у (4.3) перетворює граничні умови (4.2) на систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Її розв'язок приводить до таких співвідношень для $\theta_X, \gamma_X, \theta_\varphi, \gamma_\varphi$:

$$\theta_X = 0;\ \gamma_X = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_X\right);$$

$$\theta_\varphi = \frac{1}{2R_\varphi r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R_\varphi}\psi_\varphi;$$

$$\gamma_\varphi = -\frac{8R_\varphi^2 + h^2}{6R_\varphi^2 h^2}\psi_\varphi - \frac{\left(8R_\varphi^2 - h^2\right)}{6rh^2R_\varphi^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{3R_\varphi^3}. \quad (4.4)$$

Таким чином, задача аналізу напружено-деформованого стану конструкції може бути сформульована відносно п’яти невідомих функцій: $u(x,\varphi,t), v(x,\varphi,t), w(x,\varphi,t), \psi_X(x,\varphi,t), \psi_\varphi(x,\varphi,t)$.

Для формування рівнянь руху конструкції застосовано метод заданих форм (див. розділ 2.2).

Для опису динаміки оболонки отримаємо вирази для потенційної та кінетичної енергій конструкції, як функцій переміщень та швидкостей її точок.

Зв’язок деформацій та переміщень точок конічної оболонки має вигляд [215]:

$$\varepsilon_{XX} = \varepsilon_{X,0} + z\left(k_X^{(0)} + zk_X^{(1)} + z^2k_X^{(2)}\right); \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi,0} + z\left(k_\varphi^{(0)} + zk_\varphi^{(1)} + z^2k_\varphi^{(2)}\right);$$

$$\gamma_{x\varphi} = \gamma_{x\varphi,0} + z\left(k_{x\varphi}^{(0)} + zk_{x\varphi}^{(1)} + z^2k_{x\varphi}^{(2)}\right);$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz,0} + z\left(k_{xz}^{(0)} + zk_{xz}^{(1)} + z^2k_{xz}^{(2)}\right);$$

$$\gamma_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z,0} + z\left(k_{\varphi z}^{(0)} + zk_{\varphi z}^{(1)} + z^2k_{\varphi z}^{(2)}\right),$$

де

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$k_x^{(0)} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x};$$

$$k_x^{(1)} = 0;$$

$$k_x^{(2)} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi,0} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\sin(\alpha)}{r}u + \frac{w}{R_\varphi};$$

$$k_\varphi^{(0)} = \frac{\partial \psi_\varphi}{r\partial \varphi} - \frac{w}{R_\varphi^2} - \frac{u\sin(\alpha)}{rR_\varphi} + \frac{\psi_x}{r}\sin(\alpha);$$

$$k_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{R_\varphi r}\left[\frac{\partial \psi_\varphi}{2\partial \varphi} + \frac{1}{R_\varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{2r\partial \varphi^2}\right] - \frac{\psi_x}{xR_\varphi};$$

$$k_\varphi^{(2)} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_\varphi}{r\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial \varphi^2} + \frac{\sin(\alpha)}{r}\psi_X + \frac{\sin(\alpha)}{r}\frac{\partial w}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{1}{3R_\varphi^2}\left(\frac{2\partial \psi_\varphi}{r\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial \varphi^2}\right);$$

$$\gamma_{x\varphi,0} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \varphi} - \frac{\sin(\alpha)}{r}v;$$

$$k_{x\varphi}^{(0)} = \frac{\partial \psi_x}{r\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial x} - \frac{\psi_\varphi}{r}\sin(\alpha) - \frac{\partial u}{R_\varphi r\partial \varphi} + \frac{\partial v}{R_\varphi \partial x};$$

$$k_{x\varphi}^{(1)} = -\frac{\partial \psi_x}{R_\varphi r\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_\varphi}{2R_\varphi \partial x} + \frac{\partial^2 w}{2R_\varphi r\partial x\partial \varphi} + \frac{\sin(\alpha)}{r}\left(\frac{\psi_\varphi}{2R_\varphi} + \frac{v}{R_\varphi^2} - \frac{\partial w}{rR_\varphi \partial \varphi}\right);$$

$$k_{x\varphi}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{r\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial x} + \frac{2\partial^2 w}{r\partial \varphi\partial x} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}sin(\alpha) - \frac{\psi_\varphi}{r}\sin(\alpha)\right) +$$

$$+\frac{2\psi_\varphi}{3rR_\varphi^2}sin(\alpha) - \frac{1}{6R_\varphi^2}\frac{\partial \psi_\varphi}{\partial x} + \frac{sin(\alpha)}{6r^2R_\varphi^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{6rR_\varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \varphi};$$

$$\gamma_{xz,0} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$k_{xz}^{(0)} = k_{xz}^{(2)} = 0;$$

$$k_{xz}^{(1)} = -\frac{4}{h^2}\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\gamma_{\varphi z,0} = \psi_\varphi + \frac{\partial w}{r\partial \varphi};$$

$$k_{\varphi z}^{(0)} = k_{\varphi z}^{(2)} = 0;$$

$$k_{\varphi z}^{(1)} = -\frac{4}{h^2}\left(\psi_\varphi + \frac{\partial w}{r\partial\varphi}\right) + \frac{v}{R_\varphi^3}.$$

Потенційна енергія конічної оболонки представляється в формі [215]:

$$\Pi = 0.5 \iiint\limits_V \{Q_{11}(z)\varepsilon_{XX}^2 + 2Q_{12}(z)\varepsilon_{\varphi\varphi}\,\varepsilon_{XX} + Q_{22}(z)\varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + G_{23}(z)\gamma_{\varphi z}^2 +$$

$$+ G_{13}(z)\gamma_{xz}^2 + G_{21}(z)\gamma_{x\varphi}^2\}\left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right)dzrdxd\varphi, \qquad (4.6)$$

де $V -$ об'єм, який займає конічна оболонка. Урахування розкладень (4.5) в потенційній енергії (4.6) та збирання членів при однакових ступенях координати z приводить потенційну енергію до остаточного вигляду:

$$\Pi = 0.5 \iint\limits_A rdxd\varphi \sum_{j=0}^{5} h_j, \qquad (4.7)$$

де $A -$ область серединної поверхні конічної оболонки;

$$h_0 = \tilde{P}_0^{(0)};$$

$$h_j = \tilde{P}_j^{(j)} + \frac{\tilde{P}_{j-1}^{(j)}}{R_\varphi}; j = 1, \dots, 5;$$

$$\tilde{P}_0^{(j)} = Q_{11}^{(j)}\varepsilon_{x,0}^2 + 2Q_{12}^{(j)}\varepsilon_{x,0}\varepsilon_{\varphi,0} + Q_{22}^{(j)}\varepsilon_{\varphi,0}^2 + G_{23}^{(j)}\gamma_{\varphi z,0}^2 + G_{13}^{(j)}\gamma_{xz,0}^2 + G_{21}^{(j)}\gamma_{x\varphi,0}^2;$$

$$\tilde{P}_1^{(j)} = 2Q_{11}^{(j)}\varepsilon_{x,0}k_x^{(0)} + 2Q_{12}^{(j)}\left(\varepsilon_{x,0}k_\varphi^{(0)} + \varepsilon_{\varphi,0}k_X^{(0)}\right) + 2Q_{22}^{(j)}\varepsilon_{\varphi,0}k_\varphi^{(0)} +$$

$$+ 2G_{21}^{(j)}\gamma_{x\varphi,0}k_{x\varphi}^{(0)};$$

$$\tilde{P}_2^{(j)} = Q_{11}^{(j)}k_x^{(0)2} + 2Q_{12}^{(j)}\left(\varepsilon_{x,0}k_\varphi^{(1)} + k_\varphi^{(0)}k_X^{(0)}\right) + Q_{22}^{(j)}\left(k_\varphi^{(0)2} + 2\varepsilon_{\varphi,0}k_\varphi^{(1)}\right) +$$

$$2G_{23}^{(j)}\gamma_{\varphi z,0}k_{\varphi z}^{(1)} + 2G_{13}^{(j)}\gamma_{xz,0}k_{xz}^{(1)} + G_{21}^{(j)}\left(2\gamma_{x\varphi,0}k_{x\varphi}^{(1)} + k_{x\varphi}^{(0)2}\right);$$

$$\tilde{P}_3^{(j)} = 2Q_{11}^{(j)}k_x^{(2)}\varepsilon_{x,0} + 2Q_{12}^{(j)}\left(\varepsilon_{x,0}k_\varphi^{(2)} + k_\varphi^{(1)}k_X^{(0)} + k_X^{(2)}\varepsilon_{\varphi,0}\right) +$$

$$2Q_{22}^{(j)}\left(k_\varphi^{(0)}k_\varphi^{(1)} + \varepsilon_{\varphi,0}k_\varphi^{(2)}\right) + 2G_{21}^{(j)}\left(\gamma_{x\varphi,0}k_{x\varphi}^{(2)} + k_{x\varphi}^{(0)}k_{x\varphi}^{(1)}\right);$$

$$\tilde{P}_4^{(j)} = 2Q_{11}^{(j)}k_x^{(2)}k_x^{(0)} + 2Q_{12}^{(j)}\left(k_\varphi^{(2)}k_X^{(0)} + k_X^{(2)}k_\varphi^{(0)}\right) + Q_{22}^{(j)}\left(k_\varphi^{(1)2} + 2k_\varphi^{(2)}k_\varphi^{(0)}\right) +$$

$$G_{13}^{(j)}k_{xz}^{(1)2} + G_{21}^{(j)}\left(k_{x\varphi}^{(1)2} + 2k_{x\varphi}^{(0)}k_{x\varphi}^{(2)}\right) + G_{23}^{(j)}k_{\varphi z}^{(1)2};$$

$$\tilde{P}_5^{(j)} = 2Q_{12}^{(j)}k_\varphi^{(1)}k_X^{(2)} + Q_{22}^{(j)}2k_\varphi^{(2)}k_\varphi^{(1)} + G_{21}^{(j)}2k_{x\varphi}^{(1)}k_{x\varphi}^{(2)}.$$

Кінетична енергія конічної оболонки представляється в формі [215]:

$$T = 0.5\iiint\limits_V \rho(z)\left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_\varphi^2 + \dot{u}_z^2\right)\left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right)dzrdxd\varphi, \tag{4.8}$$

де крапка означає диференціювання за змінною t. Урахування розкладень (4.1) в виразі (4.8) приводить кінетичну енергію до наступного виду:

$$T = 0.5\iint\limits_A rdxd\varphi\sum_{j=0}^{5} r_j P_j, \tag{4.9}$$

де

$$r_j = \int\limits_{-0.5h}^{0.5h} z^j\rho(z)dz; j = 0,1,\ldots$$

$$P_0 = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2;$$

$$P_1 = 2\dot{u}\dot{\psi}_x + \frac{2\dot{v}^2}{R_\varphi} + 2\dot{v}\dot{\psi}_\varphi + \frac{1}{R_\varphi}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2);$$

$$P_2 = \dot{\psi}_x^2 + \frac{\dot{v}^2}{R_\varphi^2} + \dot{\psi}_\varphi^2 + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\psi}_\varphi + 2\dot{v}\dot{\theta}_\varphi + \frac{1}{R_\varphi}\left(2\dot{u}\dot{\psi}_x + \frac{2\dot{v}^2}{R_\varphi} + 2\dot{v}\dot{\psi}_\varphi\right);$$

$$P_3 = 2\dot{u}\dot{\gamma}_X + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\theta}_\varphi + 2\dot{v}\dot{\gamma}_\varphi + 2\dot{\psi}_\varphi\dot{\theta}_\varphi +$$

$$+\frac{1}{R_\varphi}\left(\dot{\psi}_x^2 + \frac{\dot{v}^2}{R_\varphi^2} + \dot{\psi}_\varphi^2 + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\psi}_\varphi + 2\dot{v}\dot{\theta}_\varphi\right);$$

$$P_4 = 2\dot{\psi}_x\dot{\gamma}_X + \dot{\theta}_\varphi^2 + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\gamma}_\varphi + 2\dot{\psi}_\varphi\dot{\gamma}_\varphi + \\ + \frac{1}{R_\varphi}\left(2\dot{u}\dot{\gamma}_X + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\theta}_\varphi + 2\dot{v}\dot{\gamma}_\varphi + 2\dot{\psi}_\varphi\dot{\theta}_\varphi\right);$$

$$P_5 = 2\dot{\theta}_\varphi\dot{\gamma}_\varphi + \frac{1}{R_\varphi}\left(2\dot{\psi}_x\dot{\gamma}_X + \dot{\theta}_\varphi^2 + \frac{2}{R_\varphi}\dot{v}\dot{\gamma}_\varphi + 2\dot{\psi}_\varphi\dot{\gamma}_\varphi\right).$$

Додамо граничні умови. Для оболонки, яка є защемленою по нижній кромці, виконуються наступні граничні умови:

$$u|_{x=L} = v|_{x=L} = w|_{x=L} = \psi_x|_{x=L} = \psi_\varphi\big|_{x=L} = 0. \qquad (4.10)$$

Врахуємо додаткові елементи конструкції оболонки. Монтажне кільце та конічна оболонка з'єднуються на поверхні $x = x_0$. Кільце (рис. 2б) виготовлено з ізотропного матеріалу. Стороною АВС воно кріпиться до композитної оболонки. З'єднання між кільцем та оболонкою вважається жорстким. При цьому деформування кільця описується гіпотезою Ейлера-Бернуллі. Внаслідок перехідних процесів під дією ударних навантажень кільце вигинається в двох перпендикулярних площинах, які описуються переміщеннями центрів тяжіння поперечного перерізу $\bar{u}(\varphi, t)$ та $\bar{w}(\varphi, t)$. Поздовжнє деформування описується окружними переміщеннями центрів тяжіння поперечного перерізу $\bar{v}(\varphi, t)$. Кручення описується поворотом поперечного перерізу на кут $\psi(\varphi, t)$ навколо центру тяжіння. Переміщення довільної точки поперечного перерізу описуються трьома проекціями U_1, U_2, U_3 (рис.2б), які виражаються наступним чином:

$$U_1 = \bar{u}(\varphi, t) - z_1\psi(\varphi, t);$$
$$U_3 = \bar{w}(\varphi, t) + x_1\psi(\varphi, t);$$
$$U_2 = \bar{v}(\varphi, t) + x_1\psi_1(\varphi, t) - z_1\psi_2(\varphi, t), \qquad (4.11)$$

де $\psi_1(\varphi,t), \psi_2(\varphi,t)$ – кути обертання поперечного перерізу, перпендикулярного серединній лінії, при вигині в двох перпендикулярних площинах (рис. 4.3).

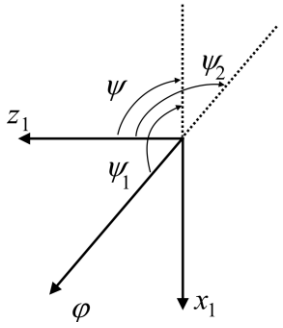


Рисунок 4.3 – Кути обертання поперечного перерізу при деформуванні кільця

Окружна деформація точок поперечного перерізу описується наступним чином:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi} - x_1\chi_X + z_1\chi_r, \tag{4.12}$$

де χ_X та χ_r – зміна кривизни серединної лінії в напрямах вісей x_1, z_1. Величини $\varepsilon_{\varphi}, \chi_X, \chi_r$ пов'язані з проекціями переміщень центру тяжіння поперечного перерізу кільця наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{R_r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi} + \frac{\bar{w}}{R_r}; \\ \chi_x &= \frac{1}{R_r^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\varphi^2} - \frac{\psi}{R_r}; \\ \chi_r &= -\frac{1}{R_r^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{R_r^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

де R_r – радіус серединної лінії кільця.

Кутова деформація зсуву γ при обертанні визначається, як $\gamma = \rho_*\chi(\varphi,t)$; $\rho_* = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. В свою чергу, параметр $\chi(\varphi,t)$, як

$$\chi(\varphi,t) = -\frac{1}{R_r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\psi_1}{R_r}. \tag{4.14}$$

Потенційна енергія деформування кільця представляється наступним чином:

$$\Pi_1 = 0.5\int_0^{2\pi}\left(EA\varepsilon_\varphi^2 + EJ_x\chi_x^2 + EJ_r\chi_r^2 + GJ\chi^2\right)R_r d\varphi, \tag{4.15}$$

де E – модуль Юнга; G – модуль зсуву; $A = b_1 b$ – площа поперечного перерізу кільця;

геометричні моменти інерції: полярні

$J_x = \int_{-0.5b}^{0.5b}\int_{-0.5b_1}^{0.5b_1} x_1^2 dx_1 dz_1 = \frac{1}{12} b{b_1}^3$;

$J_r = \int_{-0.5b}^{0.5b}\int_{-0.5b_1}^{0.5b_1} z_1^2 dx_1 dz_1 = \frac{1}{12} b^3 b_1$;

осьовий $J = \int_{-0.5b}^{0.5b}\int_{-0.5b_1}^{0.5b_1}(x_1^2 + z_1^2)dx_1 dz_1 = \frac{1}{12}\left(b{b_1}^3 + b^3 b_1\right)$.

Підстановка (13), (14) в (15) дозволяє представити потенційну енергію кільця у вигляді квадратичної форми від переміщень серединної лінії.

Для врахування безперервності переміщень та кутів обертання на поверхні з'єднання кільця та оболонки $x = x_0$ виводяться умови зшиття. Складемо три рівняння зшиття, які виражають проекції переміщень на вісі x_1, y_1, z_1 на поверхні з'єднання конічної оболонки та кільця:

$$\begin{gathered}\widetilde{U}_2 = v|_{x=x_0};\\ \widetilde{U}_3 = u|_{x=x_0} sin\alpha + w|_{x=x_0} cos\alpha;\\ \widetilde{U}_1 = u|_{x=x_0} cos\alpha - w|_{x=x_0} sin\alpha,\end{gathered} \tag{4.16}$$

де

$$\widetilde{U}_1 = U_1|_{z_1=0}\ ;\ \widetilde{U}_2 = U_2|_{z_1=0;\ x_1=0.5b_1};\ \widetilde{U}_3 = U_3|_{\ x_1=0.5b_1}.$$

Умови безперервності кутів обертання в точці з'єднання оболонки та кільця мають вигляд:

$$\begin{aligned}\psi &= -\psi_X(L_1,\varphi);\\ \psi_2 &= -\psi_\varphi(L_1)cos\alpha;\\ \psi_1 &= -\psi_\varphi(L_1)sin\alpha.\end{aligned} \qquad (4.17)$$

Урахування рівнянь (4.11), (4.1), (4.17) в умовах (4.16) дозволяє отримати співвідношення, що зв'язують переміщення центру тяжіння кільця та узагальнені переміщення оболонки:

$$\begin{aligned}\overline{v}(\varphi,t) &= v(x_0,\varphi,t) + 0.5b_1\psi_\varphi(x_0,\varphi,t)sin\alpha;\\ \overline{w}(\varphi,t) &= u(x_0,\varphi,t)sin\alpha + w(x_0,\varphi,t)cos\alpha + 0.5b_1\psi_x(x_0,\varphi,t);\\ \overline{u}(\varphi,t) &= u(x_0,\varphi)\cos(\alpha) - w(x_0,\varphi)\sin(\alpha).\end{aligned} \qquad (4.18)$$

Деформації $\varepsilon_\varphi, \chi_X, \chi_r, \chi$ виражаються через переміщення оболонки наступним чином:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_r}\left\{\frac{\partial v(x_0,\varphi)}{\partial\varphi} + 0.5b_1\sin(\alpha)\frac{\partial\psi_\varphi(x_0,\varphi)}{\partial\varphi} + w(x_0,\varphi)\cos(\alpha) + \right.$$

$$\left. + 0.5b_1\psi_x(x_0,\varphi) + u(x_0,\varphi)\sin(\alpha)\right\};$$

$$\chi_x = \frac{1}{R_r^2}\left(\frac{\partial^2 u(x_0,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos(\alpha) - \frac{\partial^2 w(x_0,\varphi)}{\partial\varphi^2}\sin(\alpha)\right) + \frac{\psi_x(x_0,\varphi)}{R_r};$$

$$\chi_r = \frac{1}{R_r^2}\left\{\frac{\partial v(x_0,\varphi)}{\partial\varphi} + 0.5b_1\sin(\alpha)\frac{\partial\psi_\varphi(x_0,\varphi)}{\partial\varphi} - \cos(\alpha)\frac{\partial^2 w(x_0,\varphi)}{\partial\varphi^2} - \right.$$

$$\left. - 0.5b_1\frac{\partial^2\psi_x(x_0,\varphi)}{\partial\varphi^2} - \sin(\alpha)\frac{\partial^2 u(x_0,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right\};$$

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{\partial \psi_x(x_0, \varphi)}{R_r \partial \varphi} - \frac{\sin(\alpha)}{R_r} \psi_\varphi(x_0, \varphi). \qquad (4.19)$$

Таким чином, урахування (4.19) у співвідношеннях (4.15) дозволяє виразити потенційну енергію кільця через переміщення оболонки.

Розглянемо кінетичну енергію кільця:

$$T_1 = 0.5 \int_0^{2\pi} R_r d\varphi \iint_{A_1} dx_1 dz_1 \rho_r \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} \right)^2 \right], \qquad (4.20)$$

де ρ_r – густина матеріалу кільця. Знехтувавши малою інерцією обертання та врахувавши (4.11) у (4.20), кінетичну енергію перепишемо в формі:

$$T_1 = 0.5 \rho_r A \int_0^{2\pi} R_r \, d\varphi \left\{ \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} \right)^2 + \frac{J}{A} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\}. \qquad (4.21)$$

Для вираження кінетичної енергії кільця (4.21) через переміщення конічної оболонки, рівняння (4.18) враховуються в (4.21). Тоді кінетична енергія кільця набуває наступної форми:

$$T_1 = 0.5\rho_r A \int_0^{2\pi} R_r\, d\varphi \left\{ \left(\frac{\partial u(x_0,\varphi,t)}{\partial t}\cos(\alpha) - \frac{\partial w(x_0,\varphi,t)}{\partial t}\sin(\alpha) \right)^2 + \right.$$
$$+ \left(\frac{\sin(\alpha)\partial u(x_0,\varphi,t)}{\partial t} + \frac{\cos(\alpha)\partial w(x_0,\varphi,t)}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + 0.5 b_1 \frac{\partial \psi_x(x_0,\varphi,t)}{\partial t} \right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial v(x_0,\varphi,t)}{\partial t} + 0.5 b_1 \sin(\alpha) \frac{\partial \psi_\varphi(x_0,\varphi,t)}{\partial t} \right)^2 +$$
$$\left. + \frac{J}{A} \left(\frac{\partial \psi_x(x_0,\varphi,t)}{\partial t} \right)^2 \right\}. \qquad (4.22)$$

Нарешті, кінетична та потенційна енергія конструкції з конічної оболонки та кільця складається з енергій її компонентів:

$$T_\Sigma = T + T_1; \qquad (4.23)$$
$$\Pi_\Sigma = \Pi + \Pi_1.$$

Для дослідження нестаціонарної динаміки конструкції застосовано метод заданих форм, при якому нестаціонарний відгук розкладається за формами власних коливань конструкції. Для аналізу власних коливань було застосовано метод Релея-Рітца [238, 249].

Згідно з цим методом, коливання конічної оболонки представляються у вигляді:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x)\cos(n\varphi) \\ V_n(x)\sin(n\varphi) \\ W_n(x)\cos(n\varphi) \\ X_n(x)\cos(n\varphi) \\ Y_n(x)\sin(n\varphi) \end{bmatrix} cos(\omega t), \qquad (4.24)$$

де ω – власна частота конструкції; n – кількість хвиль в окружному напрямку. Функції $U_n(x), V_n(x), W_n(x), X_n(x), Y_n(x)$ розкладаються за базисними функціями наступним чином:

$$\begin{gathered} U_n(x) = \sum_{i=1}^{N_1} A_i \vartheta_i(x); \\ V_n(x) = \sum_{i=1}^{N_2} A_{N_1+i} \vartheta_i(x); \\ W_n(x) = \sum_{i=1}^{N_3} A_{N_1+N_2+i} \vartheta_i(x); \\ X_n(x) = \sum_{i=1}^{N_4} A_{N_1+N_2+N_3+i} \vartheta_i(x); \\ Y_n(x) = \sum_{i=1}^{N_5} A_{N_1+N_2+N_3+N_4+i} \vartheta_i(x), \end{gathered} \tag{4.25}$$

де $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_{N_*}]$ – коефіцієнти розкладень, які визначаються за методом Релея-Рітца; $N_* = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$; $\vartheta_i(x)$ – базисні функції, які задовольняють граничним умовам (4.10), а саме $\vartheta_i(x) = \sin\left[\frac{(2i-1)\pi(L_2-L_1-x)}{2(L_2-L_1)}\right]$.

Застосування розкладень (4.25) в виразах для кінетичної та потенційної енергій (4.23) дозволяє розділити часову та просторову компоненти:

$$\begin{gathered} T_\Sigma = \omega^2 \sin^2(\omega t) \tilde{T}_\Sigma; \\ \Pi_\Sigma = \cos^2(\omega t) \tilde{\Pi}_\Sigma. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Скористаємось принципом Гамільтона:

$$\delta \int_0^{2\pi/\omega} (T_\Sigma - \prod_\Sigma) dt = 0, \tag{4.27}$$

де δ – варіація.

Після підстановки (4.26) у (4.27), функціонал дії набуває вигляду:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (T_\Sigma - \Pi_\Sigma)dt = \frac{\pi}{\omega}\left[\widetilde{\Pi}_\Sigma(A_1, \dots, A_{N_*}) - \omega^2 \tilde{T}_\Sigma(A_1, \dots, A_{N_*})\right] = 0. \quad (4.28)$$

Стаціонарне значення функціонала (4.28) досягається за умови виконання співвідношень:

$$\frac{\partial}{\partial A_i}(\widetilde{\Pi}_\Sigma - \omega^2 \tilde{T}_\Sigma) = 0; i = 1 \dots N_*. \quad (4.29)$$

Оскільки вирази для енергій є квадратичними формами відносно коефіцієнтів розкладень A_i, співвідношення (4.29) зводиться до проблеми власних значень:

$$\left[\tilde{\mathbf{C}} - \omega^2 \widetilde{\mathbf{M}}\right]\mathbf{A} = 0, \quad (4.30)$$

де $\tilde{\mathrm{C}}, \widetilde{\mathbf{M}} -$ матриці жорсткості та мас.

Таким чином, розв'язання проблеми власних значень (4.30) дозволяє знайти власні частоти та форми коливань конструкції.

Перейдемо до аналізу нестаціонарного відгуку конструкції. Розглянемо випадок, в якому на конструкцію діють два ударних навантаження, які застосовано до протилежних боків кільця (рис. 4.4). Їхнє розташування – посередині верхнього перерізу кільця при значеннях окружної координати $\varphi_1 = 0;\ \varphi_2 = \pi$. Зосереджені сили представляються наступним чином [250]:

$$Q = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2} Q_0 sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(\varphi - \varphi_j); 0 \le t \le T; \\ 0; \qquad\qquad t > T, \end{cases} \tag{4.31}$$

де T – тривалість ударного навантаження;

$\delta(\cdot)$ – дельта-функція.

Параметр Q_0 визначається за заданим значенням імпульсу. Зосереджені сили Q спрямовані перпендикулярно до нижньої основи конуса.

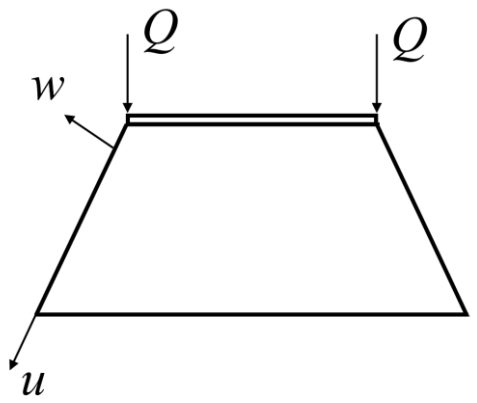


Рисунок 4.4 – Схема навантаження конструкції

Нестаціонарний відгук конструкції розкладається за власними формами коливань (4.25) наступним чином:

$$u = \sum_{j=1}^{m_1} U_{n_j}(x) q_j(t) cos(n_j \varphi);$$

$$v = \sum_{j=1}^{m_2} V_{n_j}(x) q_{m_1+j}(t) sin(n_j \varphi);$$

$$w = \sum_{j=1}^{m_3} W_{n_j}(x) q_{m_1+m_2+j}(t) cos(n_j \varphi);$$

$$\psi_X = \sum_{j=1}^{m_4} X_{n_j}(x) q_{m_1+m_2+m_3+j}(t) cos\left(n_j \varphi\right);$$

$$\psi_Y = \sum_{j=1}^{m_5} Y_{n_j}(x) q_{m_1+m_2+m_3+m_4+j}(t) sin\left(n_j \varphi\right), \qquad (4.32)$$

де $q = \left[q_1, \dots, q_{m_*}\right]$, $m_* = m_1 + \dots + m_5$ – вектор узагальнених координат конструкції. У розкладенні (4.32) враховуються форми коливань з різною кількістю окружних хвиль.

Підстановка (4.32) у вираз (4.23) для потенційної енергії Π_Σ та проведення інтегрування дозволяє отримати потенційну енергію у вигляді квадратичної форми узагальнених координат $\Pi_\Sigma = 0.5 \sum_{i,k=1}^{m_*} c_{ik}\, q_i q_k$. Аналогічні дії стосовно виразу (4.23) для кінетичної енергії T_Σ дозволяють представити кінетичну енергію як квадратичну форму узагальнених швидкостей $T_\Sigma = 0.5 \sum_{i,k=1}^{m_*} m_{ik}\, \dot{q}_\imath \dot{q}_k$. Завдяки такій формі представлення механічних енергій вдається визначити матриці мас та жорсткостей конструкції $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}; \mathbf{M} = \{m_{ij}\}$ як якобіани потенційної та кінетичної енергій за узагальненими координатами та швидкостями, відповідно.

Для побудови рівнянь руху знайдемо узагальнені сили, що діють на конструкцію. Віртуальна робота представляється в формі:

$$\delta A = \int_0^{2\pi} Q \delta U_x d\varphi, \qquad (4.33)$$

де δU_x – варіація переміщення конструкції вздовж координати x.

Оскільки зосереджені навантаження прикладаються на поверхні кільця в точці $z_1 = \frac{b_1}{2}$ (рис.2б), робота (4.33) набуває вигляду:

$$\delta A = Q_0 sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sum_{j=1}^{2}\delta\bar{u}(\varphi_j, t).$$

Врахування зв'язку (4.18), дозволяє представити віртуальну роботу наступним чином:

$$\delta A = Q_0 sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\cos(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\delta u(L_1, \varphi_j) - Q_0 sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\delta w(L_1, \varphi_j).$$

Застосування розкладень (4.32) до цього виразу дозволяє визначити узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам q_i. При $t \le T$ вони мають вигляд:

$$Q_i = Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) U_{n_i}(L_1)\cos(\alpha)\sum_{j=1}^{2} cos(n_i\varphi_j)\,; i = 1, \dots, m_1;$$

$$Q_{m_1+m_2+i} = -Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) W_{n_i}(L_1)\sin(\alpha)\sum_{j=1}^{2} cos(n_i\varphi_j)\,;\ i = 1, \dots, m_3. \quad (4.34)$$

При $t > T$ всі узагальнені сили є нульовими

Таким чином, рівняння нестаціонарного відгуку конструкції формулюються як рівняння Лагранжа II роду:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Cq} = \mathbf{Q}, \quad (4.35)$$

де $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{m_1}\}$ – вектор узагальнених сил.

Дослідження нестаціонарного відгуку проведемо чисельним інтегруванням рівнянь руху (4.35).

4.1.2 Результати чисельного аналізу

Розглянуто два варіанти конструкції оболонки: функціонально-градієнтна нанокомпозитна оболонка з алюмінієвим шпангоутом та вуглепластикові оболонка зі сталевим кільцем.

А. Аналіз коливань нанокомпозитної конічної оболонки з верхнім шпангоутом. Дослідимо власні частоти і форми коливань консольної усіченої оболонки з верхнім шпангоутом. Параметри нанокомпозитної конічної оболонки обиралися наступними:

$$\eta_1 = 0.141, \eta_2 = 1.585, \eta_3 = 1.109,$$
$$E_{11}^{CNT} = 224.7 \text{ ГПа}, E_{22}^{CNT} = 5.5027 \text{ ГПа}, G_{12}^{CNT} = 1.436 \text{ ГПа},$$
$$\mu_{12}^{CNT} = 0.29380, \mu_{21}^{CNT} = 0.007194, \rho^{CNT} = 1400 \ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3},$$
$$\rho^{m} = 1150 \ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}, \mu^{m} = 0.34, E^{m} = 2.5 \text{ ГПа}. \qquad (4.36)$$

Геометричні параметри конічної оболонки приймалися такими:

$$x_0 = 0.225 \text{ м}; \ L = 0.5 \text{ м}; \ h = 5 \cdot 10^{-3} \text{м}. \qquad (4.37)$$

Шпангоут у вигляді кільця з прямокутним поперечним перерізом виготовлений з матеріалу АМг6, який має щільність $\rho_r = 2640 \ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, модуль Юнга $E = 71$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0.33$; модуль зсуву $G = 27$ ГПа. Геометричні характеристики поперечного перерізу шпангоута такі: висота поперечного перерізу $h = 20 \times 10^{-3}$ м, ширина поперечного перерізу $b = 5 \times 10^{-3}$ м.

Для розрахунку власних частот і форм коливань застосовано метод Релея-Рітца. Досліджено усічену конічну оболонку з рівномірним наноармуванням UD-CNT і наступним числом доданків:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = N.$$

Результати розрахунку власних частот коливань наводяться в табл. 4.1. У таблиці представлені результати розрахунку перших 27 власних частот. У першому стовпці – номер власної частоти. У другому стовпці – число доданків в розкладаннях (4.32) m_*, в третьому стовпці – число хвиль в окружному напрямку n, у четвертому стовпці наведено власні частоти ω_i, що отримані методом Релея-Рітца, за допомогою розробленого програмного забезпечення в середовищі Maple. У п'ятому стовпці представлені $\bar{\omega}_i$ – результати розрахунку власних частот коливань цієї ж конструкції, отримані в скінченно-елементному програмному комплексі ANSYS. У шостому стовпці таблиці представлена відносна різниця власних частот, яка розраховувалася так:

$$\delta_i = \left|\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i}\right|.$$

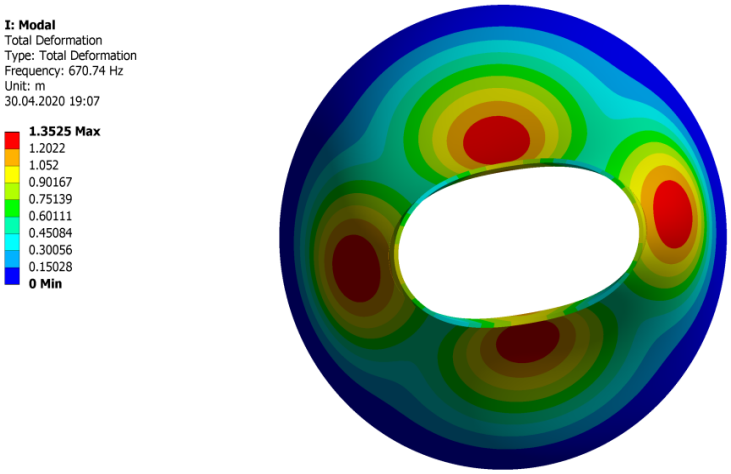
Підкреслимо, що всі власні частоти, представлені в табл. 4.1, є кратними, тобто одній власній частоті відповідають дві власні форми коливань.

З табл. 4.1 видно, що відносна похибка результатів знаходиться в межах, які вважаються допустимими. На рис. 4.5 представлені перші чотири форми коливань консольної оболонки із шпангоутами, що отримані в програмному комплексі ANSYS.

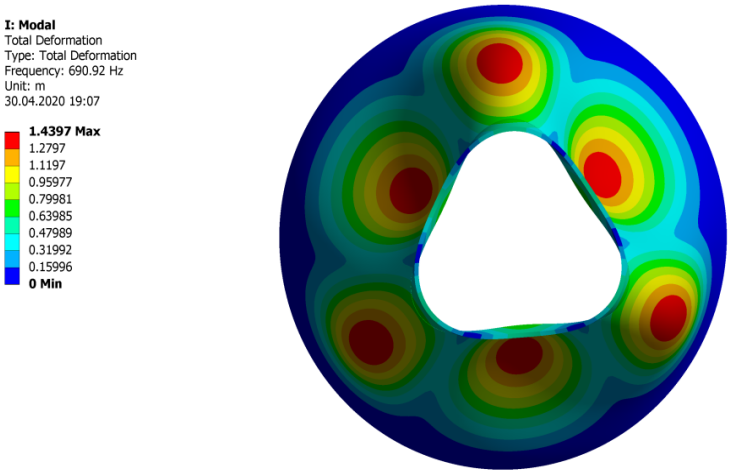
Таблиця 4.1 – Власні частоти коливань конічної оболонки із шпангоутом

№	N	n	ω_i, Гц	$\bar{\omega}_i$, Гц, ANSYS	δ
1	7	2	669.75	670.74	0.001
2	7	3	719.30	690.92	0.040
3	7	4	813.40	764.83	0.060

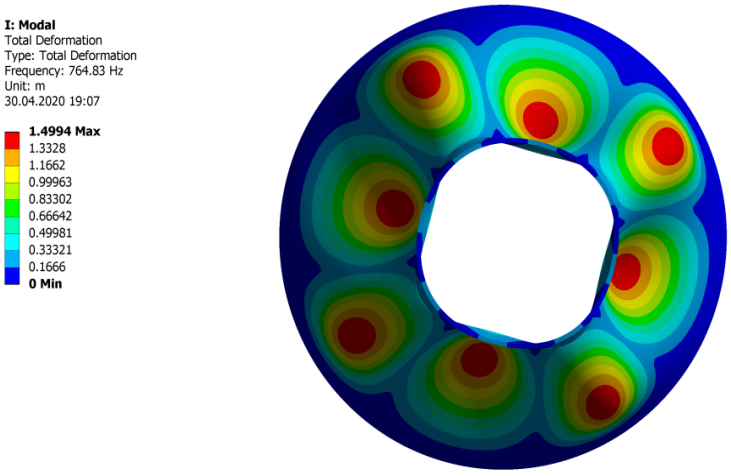
4	7	5	892.85	851.41	0.040
5	7	1	900.21	907.69	0.008
6	7	6	988.13	966.06	0.020
7	7	7	1113.21	1113.40	1.7e-4
8	7	8	1270.38	1290.70	0.015
9	7	2	1456.07	1464.10	0.005
10	7	9	1455.92	1493.50	0.025
11	7	3	1514.83	1522.70	0.005
12	7	10	1665.04	1717.00	0.030
13	7	4	1746.16	1724.10	0.010
14	7	1	1703.22	1736.10	0.019
15	7	5	1920.74	1874.40	0.020
16	7	11	1893.43	1958.10	0.030
17	7	6	2037.56	1995.10	0.020
18	7	7	2151.15	2126.80	0.010
19	7	12	2137.80	2214.6	0.030
20	7	8	2286.92	2286.0	4e-4
21	7	9	2455.23	2480.9	0.010
22	7	2	2483.21	2481.6	6.48e-4
23	7	13	2396.87	2486.3	0.035
24	7	3	2531.27	2521.7	0.0037
25	7	1	2606.84	2635.1	0.010
26	7	10	2659.80	2712.2	0.019
27	7	14	2669.31	2772.0	0.037


I: Modal
Total Deformation
Type: Total Deformation
Frequency: 670.74 Hz
Unit: m
30.04.2020 19:07
1.3525 Max
1.2022
1.052
0.90167
0.75139
0.60111
0.45084
0.30056
0.15028
0 Min

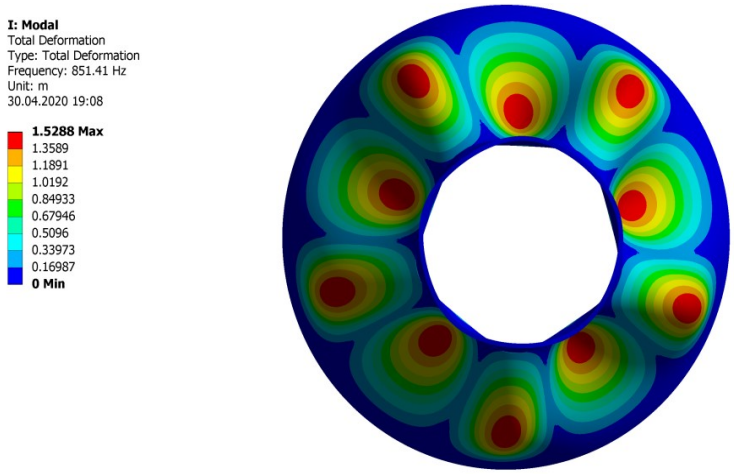
а.


I: Modal
Total Deformation
Type: Total Deformation
Frequency: 690.92 Hz
Unit: m
30.04.2020 19:07
1.4397 Max
1.2797
1.1197
0.95977
0.79981
0.63985
0.47989
0.31992
0.15996
0 Min

б.


I: Modal
Total Deformation
Type: Total Deformation
Frequency: 764.83 Hz
Unit: m
30.04.2020 19:07
1.4994 Max
1.3328
1.1662
0.99963
0.83302
0.66642
0.49981
0.33321
0.1666
0 Min

в.



г.

а – 670.74 Гц; б – 690.92 Гц; в – 764.83 Гц; г – 851.41 Гц

Рисунок 4.5 – Власні форми конструкції

Для дослідження нестаціонарного відгуку конструкції була створена програма в середовищі Maple. В програмі розраховуються елементи матриці системи (4.35) і проводиться чисельне інтегрування цієї системи. Параметри імпульсного навантаження приймалися наступними:

$$Q_0 = 3454 \text{ Н}, T = 5 \times 10^{-4}\text{с}. \qquad (4.38)$$

Розкладання переміщень в (4.32) відбувалося за всіма 27 формами коливань, частоти яких наведено в табл. 4.1. Як випливає із співвідношень (4.34), всі узагальнені сили пропорційні параметру $C_i = \sum_{j=1}^{2} cos(n_i \varphi_j)$.

В результаті чисельного інтегрування встановлено, що перехідні процеси відбуваються протягом короткого інтервалу часу і потім в системі встановлюються вільні коливання конструкції. Саме перехідний процес, що відбувається протягом короткого інтервалу часу, є предметом подальшого дослідження.

Результати розрахунку нестаціонарних процесів в точці $x = 0.5(L_1 + L_2)$ і $\varphi = 0.5\pi$ наведено на рис. 4.6. На рисунку суцільною лінією представлені результати, отримані за допомогою розробленої

програми. Пунктирною лінією представлені результати моделювання в програмному комплексі ANSYS. Як видно, результати, отримані двома методами, близькі. Це свідчить про адекватність розробленої математичної моделі.

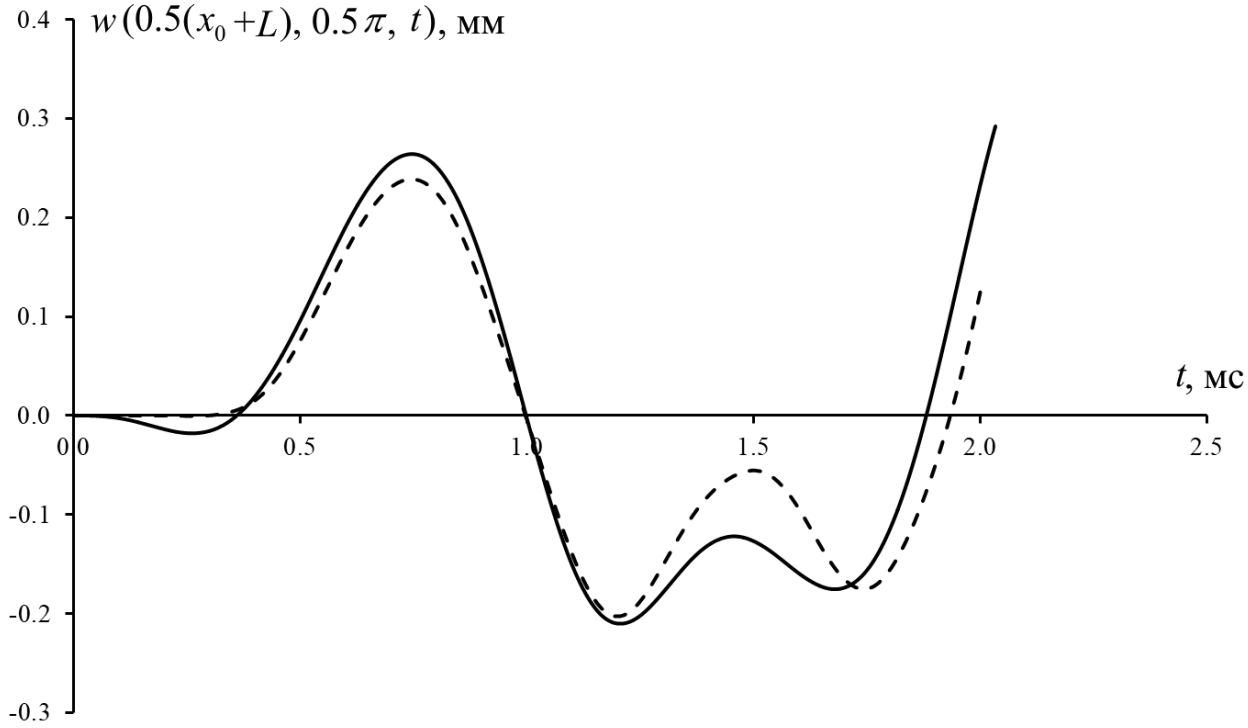
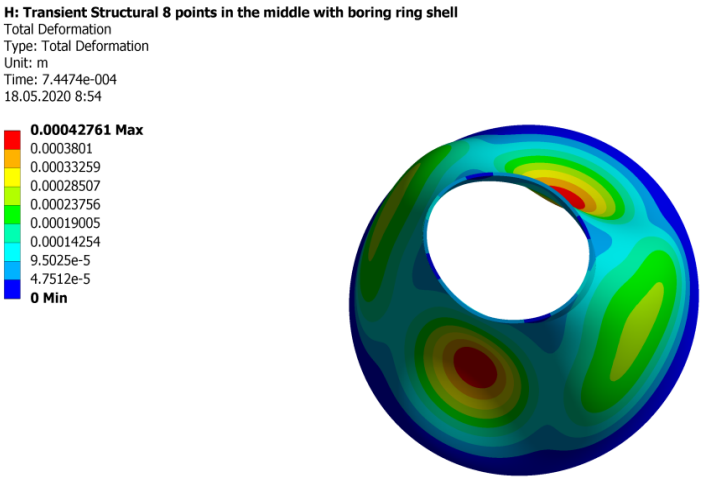
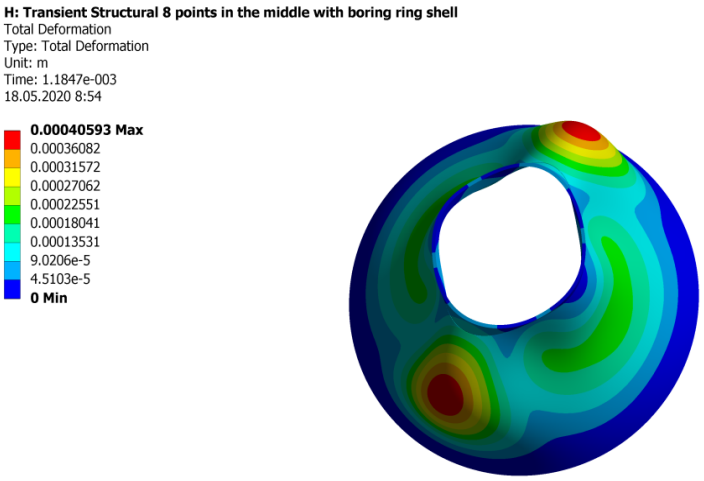


Рисунок 4.6 – Поперечне переміщення конічної конструкції зі шпангоутом з плином часу в точці $x = 0.5(L_1 + L_2), \varphi = 0.5\pi$

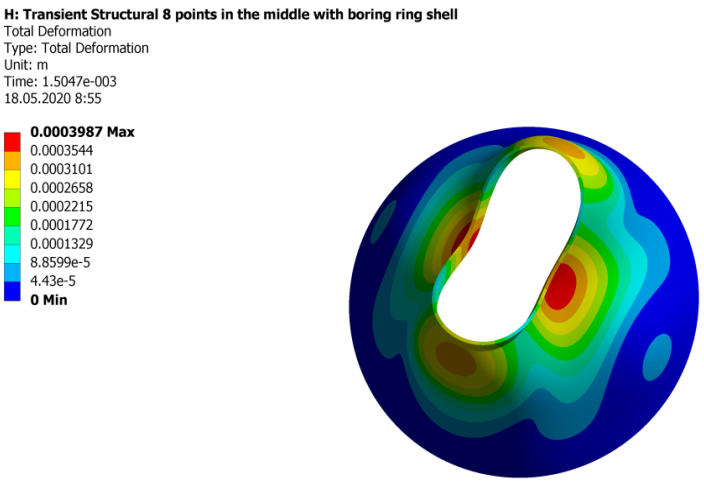
На рис. 4.7 представлено форми радіальних переміщень конструкції в різні моменти часу при нестаціонарному деформуванні оболонки. Їх було отримано в програмному комплексі ANSYS. На рис. 4.7, а, б, в наведено форми руху конструкції, які відповідають формі коливань з двома вузлами в окружному напрямку. Ця форма коливань відповідає першій власній частоті, що наведена в табл. 4.1. В момент часу $t = 1.7447 \times 10^{-3}$ (рис. 4.7, г) форма має більш складний вигляд.


H: Transient Structural 8 points in the middle with boring ring shell
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 7.4474e-004
18.05.2020 8:54
0.00042761 Max
0.0003801
0.00033259
0.00028507
0.00023756
0.00019005
0.00014254
9.5025e-5
4.7512e-5
0 Min

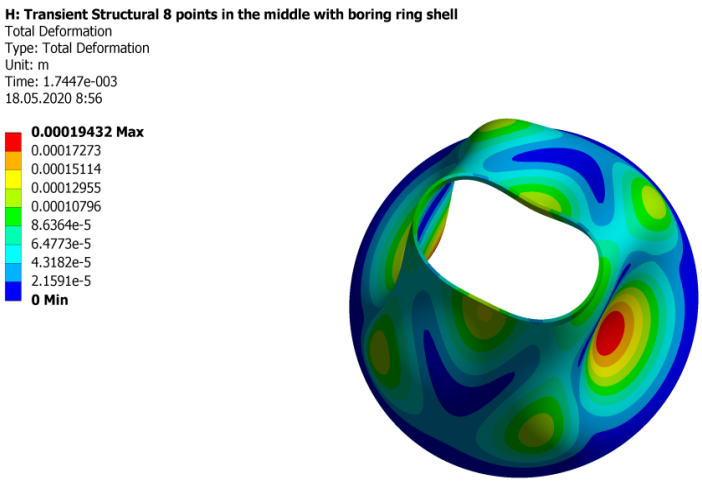
а.


H: Transient Structural 8 points in the middle with boring ring shell
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1.1847e-003
18.05.2020 8:54
0.00040593 Max
0.00036082
0.00031572
0.00027062
0.00022551
0.00018041
0.00013531
9.0206e-5
4.5103e-5
0 Min

б.


H: Transient Structural 8 points in the middle with boring ring shell
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1.5047e-003
18.05.2020 8:55
0.0003987 Max
0.0003544
0.0003101
0.0002658
0.0002215
0.0001772
0.0001329
8.8599e-5
4.43e-5
0 Min

в.



г.

Рисунок 4.7 – Форми радіальних переміщень конструкції в різні моменти часу: а. – $t = 0.7447$ мс; б. – $t = 1.1847$ мс; в. – $t = 1.5047$мс; г. – $t = 1.7447$ мс

Проаналізуємо вплив виду армування на амплітуди нестаціонарного відгуку конструкції. Розглянемо UD, FG-X, FG-O види наноармування: (рис. 3.2). Безрозмірну амплітуду нестаціонарного відгуку конструкції знайдемо так:

$$A_w = \left[\max_t[w(0.5(L_1 + L_2), 0.5\pi, t)] - \min_t[w(0.5(L_1 + L_2), 0.5\pi, t)]\right]/h,$$

де $\max_t[w(0.5(L_1 + L_2), 0.5\pi, t)]$ – перший максимум нестаціонарного процесу;

$\min_t[w(0.5(L_1 + L_2), 0.5\pi, t)]$ – перший мінімум нестаціонарного процесу.

Результати розрахунку A_w наведено в табл. 4.2. Тут показується їхня залежність займаного вуглецевими нанотрубками об'єму V_{CNT}^* і від виду наноармування.

Таблиця 4.2 – Залежність безрозмірних амплітуд нестаціонарного відгуку A_w від виду армування

Вид наноармування	V^*_{CNT}		
	0.28	0.17	0.12
FG-X	0.0860	0.098	0.14
UD	0.0930	0.110	0.15
FG-O	0.1018	0.120	0.17

При зменшенні параметра V^*_{CNT} жорсткість конструкції падає, і амплітуда нестаціонарного відгуку зростає. Як випливає з [92], з трьох розглянутих видів армування найбільш жорстка конструкція при FG-X, а найменш – при FG-O. Тому найменші амплітуди нестаціонарного відгуку спостерігаються при FG-X армуванні, а найбільші – при FG-O армуванні.

Б. Результати аналізу динамічного відгуку вуглепластикової оболонки. Було проведено розрахунок динамічного відгуку вуглепластикової конічної оболонки зі сталевим ізотропним кільцем під дією імпульсного навантаження. Параметри конструкції наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Геометричні параметри конструкції

Параметр конструкції	Значення
Радіус основи усіченої конічної оболонки, м	0,5
Радіус верхнього отвору усіченої конічної оболонки, м	0,2
Товщина оболонки, м	0,005
Висота оболонки, м	0,687
Кут при вершині конічної оболонки, °	23,58
Значення x_0, м	0,5
Значення L, м	1,25
Товщина кільця, м	0,005
Висота кільця, м	0,02

Конічну оболонку зроблено з вуглепластику, властивості якого є наступними: $\rho = 1400\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$; $E_{xx} = E_{\varphi\varphi} = 45$ ГПа; $\mu_{\varphi z} = \mu_{xz} = \mu_{x\varphi} = 0{,}3$; $G_{\varphi z} = G_{xz} = 600$ МПа; $G_{x\varphi}$=2,775 ГПа. Кільце зроблено зі сталі, його властивості приймались наступними: $\rho = 7850\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$; $E = 200$ ГПа; $\mu = 0{,}3$; $G = 76{,}9$ ГПа.

Порівняння власних частот конструкції з результатами скінченно-елементного розрахунку наведено в табл. 4.4. Видно, що власні частоти відтворюються з великою точністю, що підтверджує достовірність методу та правильність його реалізації.

Таблиця 4.4 – Власні частоти конструкції

Номер	*n*	Частота за методом Релея-Рітца, Гц	Частота за МСЕ, Гц	Похибка, %
1	3	262,70	251,94	4.27
2	2	281,33	278,04	1.18
3	4	281,10	278,1	1.08
4	5	320,34	320,49	-0.05
5	6	384,02	384,76	-0.19
6	3	436,82	421,66	3.60
7	4	471,20	455,24	3.51
8	1	461,63	461,36	0.06
9	7	463,82	464,85	-0.22
10	5	498,21	495,20	0.61
11	2	545,16	540,28	0.90
12	8	557,08	558,42	-0.24
13	6	558,54	559,10	-0.10
14	4	645,31	631,38	2.21

15	7	659,02	646,63	1.92
16	3	662,12	663,41	-0.19
17	9	673,94	663,85	1.52
18	5	692,13	679,68	1.83
19	6	740,63	738,74	0.26
20	8	749,22	750,97	-0.23
21	10	777,62	779,8	-0.28
22	4	829,23	817,14	1.48
23	7	837,15	830,6	0.79
24	5	866,75	865,39	0.16
25	9	877,39	868,97	0.97

На рис. 4.8 наведено приклад залежності $w(t)$, розрахованої за запропонованим методом в точці з координатами $x = \frac{x_0+L}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Значення амплітуди сили становило $Q_0 = 34{,}5$ кН. Суцільною лінією наведено результати розрахунку розробленим програмним засобом, а пунктиром – результати скінченно-елементного аналізу, які отримані із застосуванням 35 базисних функцій.

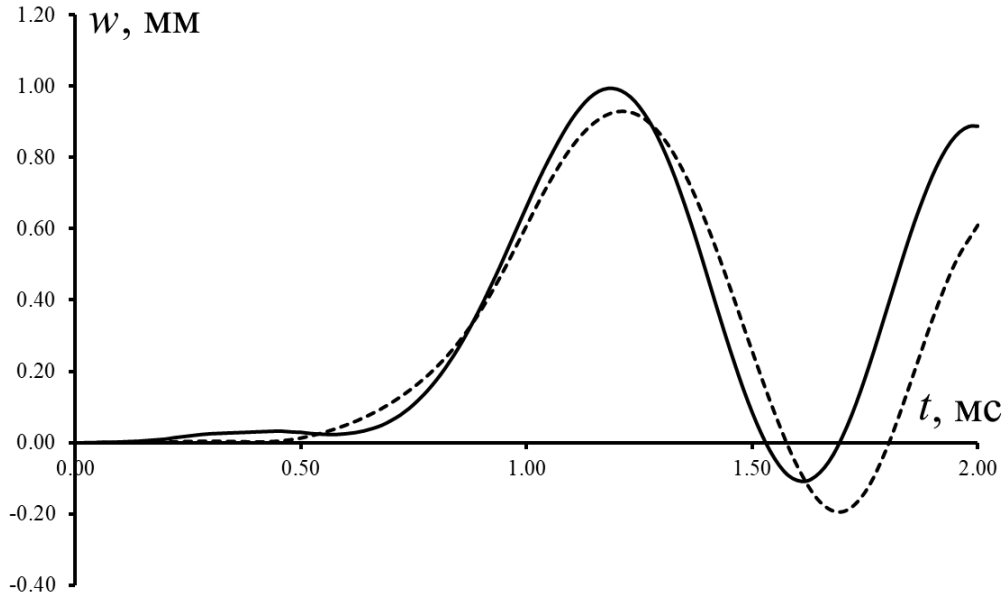


Рисунок 4.8 – Результати аналізу нестаціонарного відгуку системи

На рис. 4.9 наведено аналіз збіжності розробленого методу. Видно, що при використанні 40 базисних функцій розв’язок стабілізується і майже не відрізняється від такого, отриманого на 35 базисних функціях. Таким чином, алгоритм демонструє обчислювальну збіжність.

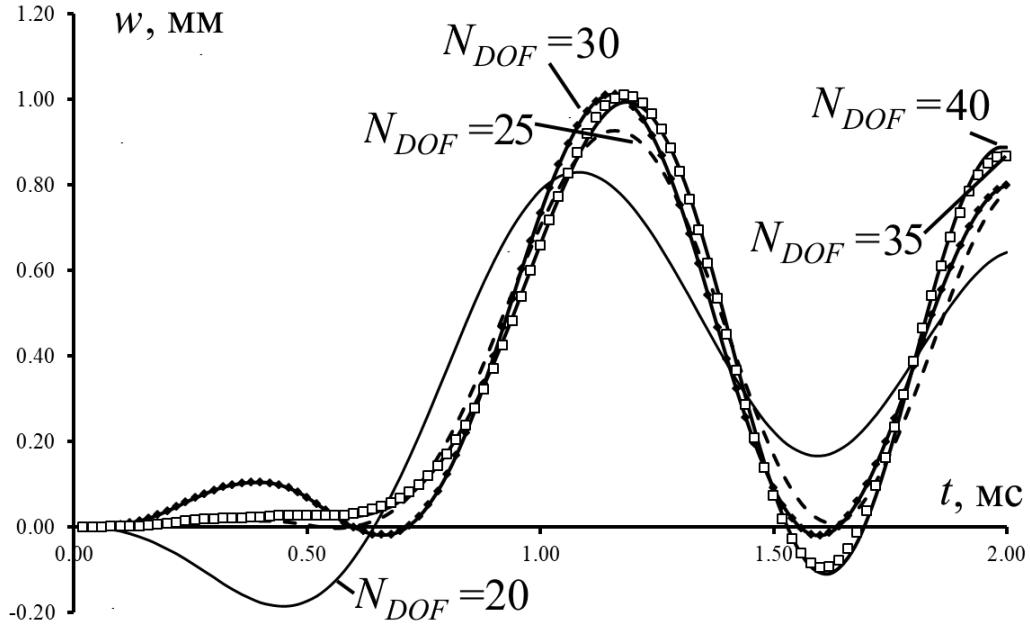


Рисунок 4.9 – Збіжність запропонованого методу

Слід зазначити, що швидкодія запропонованого методу в десятки разів вища за метод скінченних елементів, що дозволяє проводити множинні варіативні розрахунки.

4.2 Нелінійна динаміка тришарової конічної оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим повітряним струменем

Розглянемо тришарову усічену конічну оболонку, яку наведено на рис. 4.10. Середній шар оболонки (заповнювач) створено зі стільникового заповнювача (рис. 4.11), обшивки – з вуглепластикового композиту. Заповнювач має значно більшу товщину, однак більш м’який та легкий, ніж обшивки.

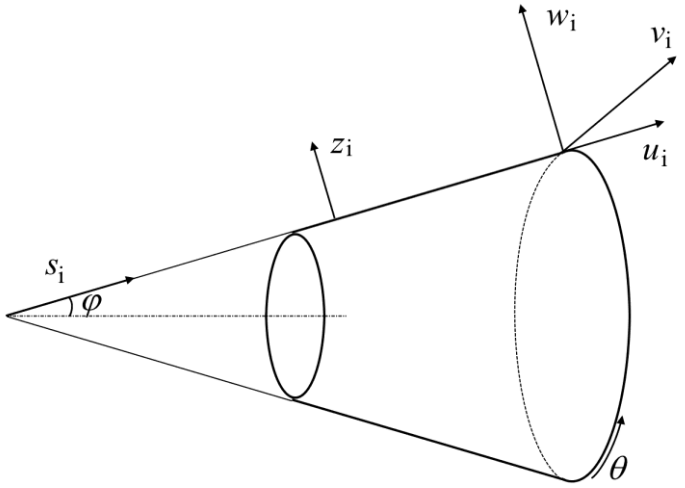


Рисунок 4.10 – Ескіз конічної оболонки

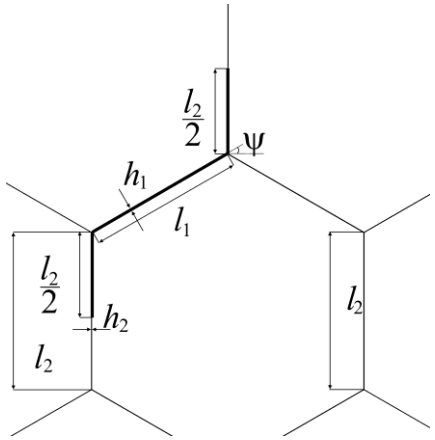


Рисунок 4.11 – Комірка стільникового заповнювача

Дослідимо втрату динамічної стійкості та автоколивання цієї оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Втрата стійкості призводить до зростання амплітуд коливань конструкції, тому для їхнього аналізу необхідно враховувати нелінійний зв’язок між деформаціями та переміщеннями точок оболонки. Як показав аналіз динаміки оболонки, ця нелінійність обмежує амплітуди коливань та виникають автоколивання.

Для опису руху конструкції зв’яжемо з серединними поверхнями шарів криволінійні системи координат $(s_t, \theta, z_t), (s_c, \theta, z_c), (s_b, \theta, z_b)$. Координати з індексом t, b відповідають зовнішній та внутрішній обшивкам, з індексом c – заповнювачу. s є поздовжньою координатою, θ – круговою, а z – поперечною координатою в напрямку нормалі до серединної поверхні. Координати змінюються в межах: $s_i \epsilon \left[{s_i}^{(1)}; {s_i}^{(2)} \right]$, де ${s_i}^{(1)}$, ${s_i}^{(2)}$ – координати кінця

усіченого циліндру з меншим та з більшим радіусом; $\theta \in [0; 2\pi]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, де h_i – товщина i-го шару оболонки.

Незважаючи на те, що значення ${s_i}^{(1)}$ та ${s_i}^{(2)}$ відрізняються для різних шарів оболонки, ця різниця є незначною. Тому пропонується застосовувати одну поздовжню координату для всієї конструкції $s_i = {s_i}^{(1)} + s; i = t, b, c$. Таким чином, напружено-деформований стан оболонки досліджується в координатах $(z_i; s; \theta); i = t, c, b$. Довжина оболонки за серединною поверхнею складає $L = s_c^{(2)} - s_c^{(1)}$.

Конструкція є оболонкою одинарної кривизни. Її радіуси кривизни вздовж окружної координати відрізняються для різних шарів та дорівнюють:

$$R_\theta^{(j)} = \left(s_j^{(1)} + \mathrm{s}\right) \mathrm{tg}(\varphi)\,; j = t, c, b.$$

Параметри Ляме оболонки вздовж окружної координати дорівнюють:

$$A_s^{(j)} = 1; A_\theta^{(j)} = \left(s_j^{(1)} + \mathrm{s}\right) \sin(\varphi).$$

Для визначення впливу стільникового заповнювача на динамічний відгук конструкції, його замінено еквівалентним шаром ортотропної речовини, властивості якої визначаються шляхом процедури гомогенізації стільникового заповнювача [95, 96]. Закон Гука для цього шару має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss}^{(c)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{\theta z}^{(c)} \\ \sigma_{sz}^{(c)} \\ \sigma_{s\theta}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ss}^{(c)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{sz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{s\theta}^{(c)} \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

де $\sigma_{ss}^{(c)}, \sigma_{\theta\theta}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{\theta z}^{(c)}, \sigma_{sz}^{(c)}, \sigma_{s\theta}^{(c)}, \varepsilon_{ss}^{(c)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} \varepsilon_{\theta z}^{(c)} \varepsilon_{sz}^{(c)} \varepsilon_{s\theta}^{(c)}$ – елементи тензорів напружень та деформацій для заповнювача. Елементи матриці (4.39)

$C_{11}, C_{12}, \ldots$ отримано шляхом скінченно-елементного моделювання в ході процедури гомогенізації.

Обшивки тришарової конічної оболонки зроблено з вуглепластикового композитну. Вони мають однакові пружні характеристики та описуються законом Гука у формі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ss}^{(j)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{s\theta}^{(j)} = 2\bar{C}_{33}\varepsilon_{s\theta}^{(j)};$$

$$\sigma_{sz}^{(j)} = 2\bar{C}_{44}\varepsilon_{sz}^{(j)};$$

$$\sigma_{\theta z}^{(j)} = 2\bar{C}_{55}\varepsilon_{\theta z}^{(j)}; j = b, t, \tag{4.40}$$

де $\sigma_{ss}^{(i)}, \sigma_{\theta\theta}^{(i)}, \sigma_{s\theta}^{(i)}, \sigma_{sz}^{(i)}, \sigma_{\theta z}^{(i)}, \varepsilon_{ss}^{(i)}, \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \varepsilon_{s\theta}^{(i)}, \varepsilon_{sz}^{(i}, \varepsilon_{\theta z}^{(i)}, i = t; b$ – елементи тензорів напружень та деформацій для відповідних обшивок.

Для опису напружено-деформованого стану оболонки застосовується теорія зсуву високого порядку (див. розділ 2.1.1).

Проекції переміщень точок обшивок на вісі криволінійної системи координат розкладаються за поперечними координатами наступним чином:

$$u_1^{(i)} = u^{(i)} + z_i\phi_1^{(i)} + z_i^2\psi_1^{(i)};$$

$$u_2^{(i)} = \left(1 + \frac{z_i}{\left(s_i^{(1)} + \mathrm{s}\right)\tan(\varphi)}\right)v^{(i)} + z_i\phi_2^{(i)} + z_i^2\psi_2^{(i)};$$

$$u_3^{(i)} = w^{(i)}; i = t, b, \tag{4.41}$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$ – проекції переміщень точок серединної поверхні на вісі криволінійної системи координат;

$\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – кути повороту нормалей до серединних поверхонь;

$\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}$ – невідомі функції, які необхідно визначити.

Проєкції переміщень точок заповнювача $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, u_3^{(c)}$ розкладаються за поперечною координатою наступним чином:

$$u_1^{(c)} = u^{(c)} + z_c \phi_1^{(c)} + z_c^2 \psi_1^{(c)} + z_c^3 \gamma_1^{(c)};$$

$$u_2^{(c)} = \left(1 + \frac{z_c}{\left(s_c^{(1)} + \mathrm{s}\right)\tan(\varphi)}\right) v^{(c)} + z_c \phi_2^{(c)} + z_c^2 \psi_2^{(c)} + z_c^3 \gamma_2^{(c)};$$

$$u_3^{(c)} = w^{(c)} + z_c w_1^{(c)} + z_c^2 w_2^{(c)}, \tag{4.42}$$

де $u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}$ – проекції переміщень серединної поверхні заповнювача на вісі криволінійної системи координат;

$\phi_1^{(c)}, \phi_2^{(c)}$ кути повороту нормалі до серединної поверхні;

$\psi_1^{(c)}, \psi_2^{(c)}, \gamma_1^{(c)}, \gamma_2^{(c)}, w_1^{(c)}, w_2^{(c)}$ – невідомі функції, які необхідно визначити.

Граничні умови на обшивках оболонки:

$$\sigma_{sz}{}^{(t)}\big|_{z_t = 0.5h_t} = \sigma_{\theta z}{}^{(t)}\big|_{z_t = 0.5h_t} = 0; \tag{4.43}$$

$$\sigma_{sz}{}^{(b)}\big|_{z_b = -0.5h_b} = \sigma_{\theta z}{}^{(b)}\big|_{z_b = -0.5h_b} = 0 \tag{4.44}$$

використовуються для визначення параметрів розкладення (4.41).

Умови безперервності переміщень на границях між шарами оболонки мають вигляд:

$$u_t(z_t = -0.5h_t) = u_c(z_c = 0.5h_c);$$
$$v_t(z_t = -0.5h_t) = v_c(z_c = 0.5h_c);$$
$$w_t(z_t = -0.5h_t) = w_c(z_c = 0.5h_c);$$
$$u_b(z_b = 0.5h_b) = u_c(z_c = -0.5h_c);$$
$$v_b(z_b = 0.5h_b) = v_c(z_c = -0.5h_c);$$

$$w_b(z_b = 0.5h_b) = w_c(z_c = -0.5h_c). \quad (4.45)$$

Таким чином, невідомі функції з розкладень (4.41, 4.42) було визначено з умов (4.43, 4.44, 4.45):

$$\psi_1^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\phi_1^{(t)} + \frac{\partial w^{(t)}}{\partial s}\right);$$

$$\psi_2^{(t)} = -\frac{1}{h_t f_1(s)}\left(\phi_2^{(t)} + \frac{1}{\left(s_t^{(1)} + \mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \theta}\right);$$

$$\psi_1^{(b)} = \frac{1}{h_b}\left(\phi_1^{(b)} + \frac{\partial w^{(b)}}{\partial s}\right);$$

$$\psi_2^{(b)} = \frac{1}{h_b f_2(s)}\left(\phi_2^{(b)} + \frac{1}{\left(s_b^{(1)} + \mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \theta}\right);$$

$$\psi_1^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left\{u^{(t)} + u^{(b)} - 2u^{(c)} + 0.75h_b\phi_1^{(b)} - 0.75h_t\phi_1^{(t)} + \frac{h_b}{4}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial s} - \right.$$

$$\left. - \frac{h_t}{4}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial s}\right\};$$

$$\gamma_1^{(c)} = \frac{4}{h_c^3}\left\{u^{(t)} - u^{(b)} - h_c\phi_1^{(c)} - 0.75h_b\phi_1^{(b)} - 0.75h_t\phi_1^{(t)} - \frac{h_b}{4}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial s} - \right.$$

$$\left. - \frac{h_t}{4}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial s}\right\};$$

$$\psi_2^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left\{f_3(s)v^{(t)} + f_4(s)v^{(b)} - \frac{h_t}{2}\left[1 + \frac{1}{2f_1(s)}\right]\phi_2^{(t)} + \frac{h_b}{2}\left[1 + \frac{1}{2f_2(s)}\right]\phi_2^{(b)} - \right.$$

$$- \frac{h_t}{4f_1(s)\left(s_t^{(1)} + \mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \theta} +$$

$$\left. + \frac{h_b}{4f_2(s)\left(s_b^{(1)} + \mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \theta} - 2v^{(c)}\right\};$$

$$\gamma_2^{(c)} = \frac{4}{h_c^3}\Big\{f_3(s)v^{(t)} - f_4(s)v^{(b)} - \frac{h_t}{2}\left[1+\frac{1}{2f_1(s)}\right]\phi_2^{(t)} - \frac{h_b}{2}\left[1+\frac{1}{2f_2(s)}\right]\phi_2^{(b)} -$$

$$- \frac{h_t}{4f_1(s)\left(s_t^{(1)}+\mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\theta} -$$

$$- \frac{h_b}{4f_2(s)\left(s_b^{(1)}+\mathrm{s}\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\theta} - \frac{h_c}{\left(s_c^{(1)}+\mathrm{s}\right)\mathrm{tg}(\varphi)}v^{(c)} - h_c\phi_2^{(c)}\Big\};$$

$$w_2^{(c)} = \frac{2}{h_c^2}\left(w^{(t)} + w^{(b)} - 2w^{(c)}\right);$$

$$w_1^{(c)} = \frac{1}{h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right); \qquad (4.46)$$

де

$$f_1(s) = 1 + \frac{h_t}{4\left(s_t^{(1)}+\mathrm{s}\right)\mathrm{tg}(\varphi)}; f_2(s) = 1 - \frac{h_b}{4\left(s_b^{(1)}+\mathrm{s}\right)\mathrm{tg}(\varphi)};$$

$$f_3(s) = 1 - \frac{h_t}{2\left(s_t^{(1)}+\mathrm{s}\right)\mathrm{tg}(\varphi)}; f_4(s) = 1 + \frac{h_b}{2\left(s_b^{(1)}+\mathrm{s}\right)\mathrm{tg}(\varphi)}.$$

Нелінійний зв’язок між деформаціями та переміщеннями точок конструкції виражається наступним чином [113]:

$$\varepsilon_{ss}^{(i)} = \bar{\varepsilon}_1^{(i)} + 0.5\left(\bar{\varepsilon}_1^{(i)2} + \bar{\omega}_1^{(i)2} + \bar{\theta}^{(i)2}\right); \qquad (4.47)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \bar{\varepsilon}_2^{(i)} + 0.5\left(\bar{\varepsilon}_2^{(i)2} + \bar{\omega}_2^{(i)2} + \bar{\psi}^{(i)2}\right);$$

$$\varepsilon_{s\theta}^{(i)} = \bar{\omega}_1^{(i)} + \bar{\omega}_2^{(i)} + \bar{\varepsilon}_1^{(i)}\bar{\omega}_2^{(i)} + \bar{\varepsilon}_2^{(i)}\bar{\omega}_1^{(i)} + \bar{\theta}^{(i)}\bar{\psi}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{sz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_s^{(i)}}}\Bigg[\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial s} - \frac{u_1^{(i)}}{R_s^{(i)}} + \left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial s} + \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial\theta}u_1^{(i)} +$$

$$\frac{u_3^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right)\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial s} - \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial\theta}u_1^{(i)}\right)\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial s} - \frac{u_1^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i}\Bigg];$$

$$\varepsilon_{\theta z}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left[\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{u_2^{(i)}}{R_\theta^{(i)}} + \left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial s}u_1^{(i)} + \frac{u_3^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right)\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial s}u_2^{(i)}\right)\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{u_2^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i}\right];$$

$$i = t, c, b,$$

де

$$\bar{\varepsilon}_1^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial s} + \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \theta}u_2^{(i)} + \frac{u_3^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right);$$

$$\bar{\varepsilon}_2^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial s}u_1^{(i)} + \frac{u_3^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right);$$

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial s} - \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \theta}u_1^{(i)}\right);$$

$$\bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial s}u_2^{(i)}\right);$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left(-\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial s} + \frac{u_1^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right);$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left(-\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_2^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right).$$

Підстановка виразів (4.41, 4.42, 4.46) у (4.47) та розкладення за поперечною координатою z_i привели до такого представлення деформацій:

$$\varepsilon_{SS}^{(i)} = \varepsilon_{S,0}^{(i)} + z_i k_{s,0}^{(i)} + z_i^2 k_{s,1}^{(i)} + z_i^3 k_{s,2}^{(i)}; \qquad (4.48)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + z_i k_{\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{S\theta}^{(i)} = \varepsilon_{S\theta,0}^{(i)} + z_i k_{S\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{S\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{S\theta,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{SZ}^{(i)} = \varepsilon_{SZ,0}^{(i)} + z_i k_{SZ,0}^{(i)} + z_i^2 k_{SZ,1}^{(i)} + z_i^3 k_{SZ,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{\theta Z}^{(i)} = \varepsilon_{\theta Z,0}^{(i)} + z_i k_{\theta Z,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta Z,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta Z,2}^{(i)}; i = t, c, b,$$

$$\varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{z,0}^{(c)} + z_c k_{z,0}^{(c)},$$

де коефіцієнти розкладень винесено в Додаток Ґ внаслідок їхньої громіздкості.

Потенційна енергія обшивок представляється у формі:

$$U_i = 0.5 \int_{\bar{V}_i} \left(\sigma_{SS}^{(i)} \varepsilon_{SS}^{(i)} + \sigma_{\theta\theta}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} + \sigma_{\theta Z}^{(i)} \varepsilon_{\theta Z}^{(i)} + \sigma_{SZ}^{(i)} \varepsilon_{SZ}^{(i)} + \sigma_{S\theta}^{(i)} \varepsilon_{S\theta}^{(i)}\right) \left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{z_i}{\left(s_i^{(1)} + s\right) \tan(\varphi)}\right) \left(s_i^{(1)} + s\right) \sin(\varphi)\, ds d\theta dz_i =$$

$$= 0.5 \int_{A_i} \left(\bar{C}_{11} \varepsilon_{SS}^{(i)2} + \bar{C}_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12} \varepsilon_{SS}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} + 2\bar{C}_{55} \varepsilon_{\theta Z}^{(i)2} + \right.$$

$$\left. + 2\bar{C}_{44} \varepsilon_{SZ}^{(i)2} + 2\bar{C}_{33} \varepsilon_{S\theta}^{(i)2}\right) \left(1 + \frac{z_i}{\left(s_i^{(1)} + s\right) \mathrm{tg}(\varphi)}\right) \left(s_i^{(1)} + \right.$$

$$\left. + s\right) \sin(\varphi)\, ds d\theta dz_i; \qquad (4.49)$$

$$i = t, b,$$

де $\bar{V}_i$ – об’єм, який займає шар оболонки;

A_i – серединна поверхня шару оболонки.

Після підстановки розкладень (4.48) у вирази (4.49) та проведення інтегрування за z_i, потенційні енергії обшивок набули вигляду:

$$U_i = 0.5 \int_{A_i} \left(\Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(4)}\right) (s_i^{(1)} + s) \sin(\varphi)\, ds d\theta; i = t, b, \qquad (4.50)$$

де вирази для $\Pi_i^{(0)}$, $\Pi_i^{(2)}$, $\Pi_i^{(4)}$, $i = t, b$ винесено в Додаток Ґ.

Потенційна енергія заповнювача обчислюється за формулою:

$$U_c = 0.5 \int_{\bar{V}_c} \left(\sigma_{SS}^{(c)}\varepsilon_{SS}^{(c)} + \sigma_{\theta\theta}^{(c)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} + \sigma_{ZZ}^{(c)}\varepsilon_{ZZ}^{(c)} + \sigma_{\theta Z}^{(c)}\varepsilon_{\theta Z}^{(c)} + \sigma_{SZ}^{(c)}\varepsilon_{SZ}^{(c)} + \sigma_{S\theta}^{(c)}\varepsilon_{S\theta}^{(c)}\right)\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{z_c}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right)\left(s_c^{(1)} + s\right)\sin(\varphi)\, dsd\theta dz_c =$$

$$= 0.5 \int_{A_c} \left(C_{11}\varepsilon_{SS}^{(c)2} + C_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)2} + C_{33}\varepsilon_{zz}^{(c)2} + 2C_{12}\varepsilon_{SS}^{(c)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} + \right.$$

$$+ 2C_{13}\varepsilon_{SS}^{(c)}\varepsilon_{ZZ}^{(c)} + 2C_{23}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)}\varepsilon_{ZZ}^{(c)} + 2C_{44}\varepsilon_{\theta Z}^{(i)2} +$$

$$\left. + 2C_{55}\varepsilon_{SZ}^{(c)2} + 2C_{66}\varepsilon_{S\theta}^{(c)2}\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{z_c}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right)\left(s_c^{(1)} + s\right)\sin(\varphi)\, dsd\theta dz_c. \qquad (4.51)$$

Підстановка розкладень (4.48) у (4.51) та проведення інтегрування за поперечною координатою z_c дозволяє представити потенційну енергію заповнювача у формі (4.50). Вирази $\Pi_c^{(0)}, \Pi_c^{(2)}, \Pi_c^{(4)}$ винесено в Додаток Ґ.

Вираз для кінетичних енергій шарів оболонки має наступний вигляд:

$$T_i = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^{s_i^{(2)} - s_i^{(1)}} \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} \rho_i \left(\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2}\right)\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{z_i}{\left(s_i^{(1)} + s\right)\tan(\varphi)}\right)\left(s_i^{(1)} + s\right)\sin(\varphi)\, d\theta ds dz_i,\ i = t, c, b, \quad (4.53)$$

де ρ_i – густина матеріалу шару;

$\dot{u}_j^{(i)} = \frac{\partial u_j^{(i)}}{\partial t}, j = 1,2,3; i = t, c, b.$

Підстановка розкладень (4.41) та (4.42) у вирази (4.53) та інтегрування за z_i дозволяє представити кінетичні енергії в наступній формі:

$$T_i = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^{s_i^{(2)} - s_i^{(1)}} \left(\Lambda_0^{(i)} + \Lambda_2^{(i)} + \Lambda_4^{(i)}\right)\left(s_i^{(1)} + s\right) \sin(\varphi)\, ds d\theta; i = t, c, b, \quad (4.54)$$

де вирази для $\Lambda_0^{(i)}$, $\Lambda_2^{(i)}$, $\Lambda_4^{(i)}$ винесено в Додаток Ґ.

Таким чином, отримані вирази кінетичної та потенційної енергій обшивок та наповнювача разом із процедурою їх обчислення покладено в основу подальшого аналізу.

4.2.1 Автоколивання тришарової конічної оболонки при взаємодії з надзвуковим повітряним струменем

Тиск p надзвукового газового струменя на конічну оболонку описується поршневою теорією [210–212]:

$$p = \frac{\gamma p_\infty M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[\frac{\partial w_t}{\partial s} \cos\beta + \frac{\partial w_t}{R(s)\partial\theta} \sin\beta + \frac{M^2 - 2}{(M^2 - 1) M a_\infty} \frac{\partial w_t}{\partial t} - \right.$$
$$\left. - \frac{w_t}{2R(s)\sqrt{M^2 - 1}} \right], \quad (4.55)$$

де β – кут атаки;

p_∞, M, γ – статичний тиск вільного струменя, число Маха та адіабатична експонента;

a_∞ – швидкість звуку вільного струменя;

$R(s) = (s_t^{(1)} + s) \sin(\varphi)$.

Дослідження втрати динамічної стійкості та автоколивань оболонки проведено методом заданих форм (див. розділ 2.2). Для нього достатнім є врахування лише геометричних граничних умов для опису зв'язків оболонки.

В подальшому розглядаються два випадки: оболонка є защемленою з обох боків та випадок консольної оболонки за контуром $s = s_i^{(2)}$.

Для першого випадку граничні умови, що описують зв'язки оболонки, є наступними:

$$w^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(1)}} = v^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(1)}} = u^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(1)}} = \phi_1^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}} = \phi_2^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}} = 0; \quad (4.56)$$

$$w^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(2)}} = v^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(2)}} = u^{(i)}\big|_{s_i=s_i^{(2)}} = \phi_1^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}} = \phi_2^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}} = 0; i = t, c, b. \quad (4.57)$$

Для другого випадку використовуються тільки граничні умови (4.57).

Для дослідження втрати динамічної стійкості оболонкою побудовано рівняння її руху. Для цього вирази (4.50), (4.51), (4.54), (4.55) дискретизовано за допомогою методу заданих форм (див. розділ 2.2). Коливання оболонки у взаємодії з надзвуковим струменем розкладаються за її власними формами, які знайдено за методом методом Релея-Рітца. Представимо лінійні коливання оболонки у вигляді:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(s)\cos(n\theta) \\ V_i(s)\sin(n\theta) \\ W_i(s)\cos(n\theta) \\ X_i(s)\cos(n\theta) \\ Y_i(s)\sin(n\theta) \end{bmatrix} \cos(\omega t)\,, i = t, c, b, \quad (4.58)$$

де n – кількість хвиль в окружному напрямку.

Функції $U_i(s), V_i(s), W_i(s), X_i(s), Y_i(s)$ задовольняють граничним умовам, що описують зв'язки оболонки (4.56), (4.57) і представляються у наступному вигляді:

$$U_i(s) = \sum_{m=1}^{N_u} U_m^{(i)} \Psi_m^{(U)}(s);$$

$$V_i(s) = \sum_{m=1}^{N_v} V_m^{(i)} \Psi_m^{(V)}(s);$$

$$W_i(s) = \sum_{m=1}^{N_w} W_m^{(i)} \Psi_m^{(W)}(s);$$

$$X_i(s) = \sum_{m=1}^{N_X} X_m^{(i)} \Psi_m^{(X)}(s);$$

$$Y_i(s) = \sum_{m=1}^{N_Y} Y_m^{(i)} \Psi_m^{(Y)}(s), \qquad (4.59)$$

де $\Psi_m^{(U)}(s), \Psi_m^{(V)}(s), \Psi_m^{(W)}(s) \Psi_m^{(X)}(s) \Psi_m^{(Y)}(s)$ – базисні функції;

$U_m^{(i)}, V_m^{(i)}, W_m^{(i)}, X_m^{(i)}, Y_m^{(i)}$ – невідомі коефіцієнти, які розшукуються.

Розкладення (4.58) підставляється в вирази для енергій оболонки (4.50), (4.51), (4.54). Після проведення подвійного інтегрування, потенційна та кінетична енергії оболонки приймають форму:

$$U_\Sigma = \tilde{U}(\mathbf{A}) cos^2(\omega t);$$

$$T_\Sigma = \omega^2 \tilde{T}(\mathbf{A}) sin^2(\omega t), \qquad (4.60)$$

де $\mathbf{A} = \left(U_1^{(t)}, \dots, U_{N_u}^{(t)}, U_1^{(c)}, \dots, Y_{N_Y}^{(b)}\right)$ – вектор розмірності $N_* = 3(N_u + N_v + N_w + N_X + N_Y)$, який складається з невідомих коефіцієнтів розкладень (4.59);

$\tilde{U}(\mathbf{A}), \tilde{T}(\mathbf{A})$ – квадратичні форми елементів вектору $\mathbf{A}$.

Для аналізу вільних коливань оболонки застосовано принцип Гамільтона [98]:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left(U_\Sigma - T_\Sigma\right) dt \to min. \tag{4.61}$$

Підстановка (4.60) у (4.61) привела до наступної задачі:

$$\tilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \tilde{T}(\mathbf{A}) \to min. \tag{4.62}$$

Оскільки ліва частина (4.62) є квадратичною формою, ця задача еквівалентна системі N_* рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\tilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \tilde{T}(\mathbf{A})\right] = 0; j = 1, \dots, N_*. \tag{4.63}$$

Рівняння (4.63) відповідають задачі про власні вектори та значення. Квадрати власних частот конструкції відповідають власним значенням задачі (4.63), а власні форми конструкції – власним векторам (4.63).

Для отримання нелінійної динамічної системи зі скінченною кількістю ступенів свободи, що описує коливання конструкції внаслідок взаємодії з надзвуковим струменем, автоколивання конструкції розкладаються за власними формами наступним чином:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} W_{i,j}(s)\left[q_{i,j}(t)\cos(n\theta) + q_{i,j+N_w}(t)\sin(n\theta)\right] + \\ + \sum_{j=1}^{\bar{N}_w} W_{i,2j-1}(s) q_{i,2N_w+j}(t);$$

$$\phi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 1}} X_{i,j}(s)\left[q_{i,N^{(w)}+j}(t)\cos(n\theta) + q_{i,N^{(w)}+N_{\phi 1}+j}(t)\sin(n\theta)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\bar{N}_{\phi 1}} X_{i,2j-1}(s)\, q_{i,N^{(w)}+2N_{\phi 1}+j}(t);$$

$$\phi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 2}} Y_{i,j}(s)\left[q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+j}(t)\cos(n\theta) + q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_{\phi 2}+j}(t)\sin(n\theta)\right];$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} U_{i,j}(s)\left[q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+j}(t)\cos(n\theta) +\right.$$

$$\left. + q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+N_u+j}(t)\sin(n\theta)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\bar{N}_u} U_{i,2j-1}(s)\, q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+2N_u+j}(t); \qquad (4.64)$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} V_{i,j}(s)\left[q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+N^{(u)}+j}(t)\cos(n\theta) +\right.$$

$$\left. + q_{i,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+N^{(u)}+N_v+j}(t)\sin(n\theta)\right];$$

$$i = t, c, b,$$

де $\mathbf{q}$ – вектор узагальнених координат:

$$\mathbf{q} = \left[q_{1,1}, \dots, q_{1,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+N^{(u)}+N^{(v)}}, \dots, q_{3,1}, \dots, q_{3,N^{(w)}+N_1^{(\phi)}+N_2^{(\phi)}+N^{(u)}+N^{(v)}}\right] =$$

$$= \left[q_1, \dots, q_{N_*}\right];$$

N_* – кількість ступенів свободи конструкції;

$N^{(w)} = 2N_w + \bar{N}_w; N_1^{(\phi)} = 2N_{\phi 1} + \bar{N}_{\phi 1}; N_2^{(\phi)} = 2N_{\phi 2}; N^{(u)} = 2N_u + \bar{N}_u; N^{(v)} = 2N_v;$

$W_{i,j}(s), X_{i,j}(s), Y_{i,j}(s), U_{i,j}(s), V_{i,j}(s)$ – власні форми конструкції.

В розкладеннях автоколивань (4.64) враховується вісесиметрична власна форма. Такі форми завжди проявляються при геометрично нелінійних коливаннях оболонок обертання [113, 215, 245].

Підстановка (4.64) у (4.50), (4.51) та проведення інтегрування дозволили виразити потенційну енергію в формі поліноміальної залежності від узагальнених координат. Цей вираз має форму:

$$U_\Sigma = \mathfrak{Q}_2(\mathbf{q}) + \mathfrak{Q}_3(\mathbf{q}) + \mathfrak{Q}_4(\mathbf{q}), \tag{4.65}$$

де $\mathfrak{Q}_i(\mathbf{q})$ – поліноми i-го порядку відносно узагальнених координат.

В свою чергу, підстановка (4.64) у (4.54) та проведення інтегрування приводить до такого виразу для кінетичної енергії:

$$T_\Sigma = \mathfrak{S}_2(\dot{\mathbf{q}}), \tag{4.66}$$

де $\mathfrak{S}_2(\dot{\mathbf{q}})$ – квадратичний поліном відносно узагальнених швидкостей.

Віртуальна робота узагальненої сили, що відповідає тиску надзвукового струменя (4.55), має вигляд:

$$\delta A = -\int_0^{2\pi}\int_0^{s_t^{(2)}-s_t^{(1)}} p\delta w^{(t)}\left(s_t^{(1)}+s\right)\sin(\varphi)\,d\theta ds = \\ = \sum_{j=1}^{N^{(w)}} Q_{1,j}\delta q_j, \tag{4.67}$$

де $\delta w^{(t)}$ – віртуальне переміщення;

Q_j – узагальнена сила.

Підстановка (4.64) у (4.55) та (4.67) дозволила знайти узагальнені сили в формі:

$$Q_{1,j_1} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1,j}^{(1)} q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1,j}^{(1)} \dot{q}_{1,j} ;$$

$$Q_{1,j_1+N_w} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1+N_w,j}^{(1)} q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1+N_w,j+N_w}^{(1)} \dot{q}_{1,j+N_w} ; j_1 = 1, \dots, N_w; \quad (4.68)$$

$$Q_{1,2N_w+j_1} = \sum_{j=1}^{\bar{N}_w} \left(G_{2N_w+j_1,2N_w+j}^{(1)} q_{1,2N_w+j} + \Gamma_{2N_w+j_1,2N_w+j}^{(1)} \dot{q}_{1,2N_w+j} \right); j_1 = 1, \dots, \bar{N}_w,$$

де вирази для обчислення $G_{j_1,j}^{(1)}$, $\Gamma_{j_1,j}^{(1)}$, $j_1 = 1, \dots, 2N_w + \bar{N}_w$, $j = 1, \dots, 2N_w + \bar{N}_w$ винесено в Додаток Ґ.

Рівняння руху конструкції отримано в формі рівнянь Лагранжа II роду:

$$\sum_{j=1}^{N_*} \left(m_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j \right) = \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} q_\nu q_j + \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} q_\nu q_j \, q_{j_1} + Q_i, \quad (4.69)$$

де $\{m_{ij}\}, \{K_{ij}\}$ – матриці мас та жорсткостей;

$\alpha_{\nu j}^{(i)}, \beta_{\nu j j_1}^{(i)}$ залежать від параметрів конструкції.

Динамічна система (4.69) у матричній формі має вигляд:

$$\mathbf{M\ddot{q} + Kq} = \mathfrak{R}_2(\mathbf{q}) + \mathfrak{R}_3(\mathbf{q}) + \mathbf{Gq} + \mathbf{\Gamma\dot{q}}, \quad (4.70)$$

де $\mathbf{G}$ – матриця аеродинамічної жорсткості;

$\mathbf{\Gamma}$ – матриця аеродинамічного демпфування;

$\mathfrak{R}_2(\mathbf{q}), \mathfrak{R}_3(\mathbf{q})$ – квадратичні та кубічні поліноми відносно узагальнених координат.

Чисельні розрахунки системи (4.70) показують, що значна частина елементів матриці $\mathbf{M}$ є близькими до нуля. Це є наслідком малої товщини обшивок та малої густини заповнювача. Для врахування цієї особливості, представимо матриці та вектори системи (4.70) в наступній формі:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}}\\ \mathbf{M_{21}} & \mathbf{M_{22}}\end{bmatrix};\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K_{11}} & \mathbf{K_{12}}\\ \mathbf{K_{21}} & \mathbf{K_{22}}\end{bmatrix};\mathbf{q}=[\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}]^{T};$$

$$\mathfrak{R}_2=\left[\bar{\mathfrak{R}}_2,\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_2\right]^{T};\ \mathfrak{R}_3=\left[\bar{\mathfrak{R}}_3,\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_3\right]^{T}.$$

Знехтуємо малими елементами матриці мас, поклавши $\mathbf{M_{21}}\equiv\mathbf{0}$; $\mathbf{M_{22}}\equiv\mathbf{0}$; $\mathbf{M_{12}}\equiv\mathbf{0}$. Тоді система (4.70) приймає вигляд:

$$\mathbf{M_{11}}\ddot{\mathbf{q}}_1+\mathbf{K_{11}q_1}+\mathbf{K_{12}q_2}=\bar{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})+\bar{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})+\mathbf{Gq}+\mathbf{\Gamma\dot{q}}\ ;(4.71)$$

$$\mathbf{K_{21}q_1}+\mathbf{K_{22}q_2}=\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_2(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})+\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}).\qquad(4.72)$$

З рівнянь (4.72) отримано наступні відношення між узагальненими координатами:

$$\mathbf{q_2}=\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1})=$$

$$=\mathbf{K_{22}^{-1}}\left[-\mathbf{K_{21}q_1}+\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_2\left(\mathbf{q_1};-\mathbf{K_{22}^{-1}K_{21}q_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_3\left(\mathbf{q_1};-\mathbf{K_{22}^{-1}K_{21}q_1}\right)\right].\qquad(4.73)$$

Врахування (4.73) у динамічній системі (4.71) приводить її до форми:

$$\mathbf{M_{11}}\ddot{\mathbf{q}}_1+\bar{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{q_1}=\tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1})+\tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1})+\mathbf{Gq_1}+\mathbf{\Gamma\dot{q}_1},\qquad(4.74)$$

де $\bar{\mathbf{K}}_{11}=\mathbf{K_{11}}-\mathbf{K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}}$;

$$\tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1})+\tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1})=$$

$$=\bar{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1},\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1}))+\bar{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1},\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1}))-$$

$$-\mathbf{K_{12}K_{22}^{-1}}\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_2\left(\mathbf{q_1};-\mathbf{K_{22}^{-1}K_{21}q_1}\right)-\mathbf{K_{12}K_{22}^{-1}}\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_3\left(\mathbf{q_1};-\mathbf{K_{22}^{-1}K_{21}q_1}\right);$$

$\tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1})$ та $\tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1})$ – квадратичні та кубічні поліноми відносно узагальнених координат, що входять до вектору $\mathbf{q_1}$. В розгорнутому вигляді динамічна система (4.74) має наступний вигляд:

$$\sum_{j=1}^{N_1}\left(\tilde{m}_{ij}\ddot{q}_j+\tilde{k}_{ij}q_j\right)=\sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu j}^{(i)}q_\nu q_j+\sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{j_1=1}^{j}\tilde{\beta}_{\nu j j_1}^{(i)}q_\nu q_j\,q_{j_1}+\sum_{j=1}^{N_1}\tilde{G}_{ij}q_j+$$

$$+\sum_{j=1}^{N_1}\tilde{\Gamma}_{ij}\dot{q}_j\,; \qquad (4.75)$$

$$i=1,\dots N_1.$$

Розглянемо стійкість тривіального положення рівноваги $\mathbf{q_1}\equiv\mathbf{0}$ динамічної системи (4.75). З цією метою відкинемо нелінійні члени $\widetilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q_1}),\widetilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q_1})$. Отримана лінійна система має розв'язки в формі: $(\mathbf{q_1},\dot{\mathbf{q}}_1)\equiv(\mathbf{q_1},\mathbf{v})=\mathbf{P}_*\exp(\lambda t)$, де λ – характеристична експонента, $\mathbf{P}_*$ – константний вектор. Підстановка цього розв'язку в (4.74) дозволяє сформулювати задачу на власні значення:

$$\mathbf{R}\lambda\mathbf{P}_*=\mathfrak{J}\mathbf{P}_*, \qquad (4.76)$$

де

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M_{11}}\end{bmatrix};$$

$$\mathfrak{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{G}-\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{11}} & \mathbf{\Gamma}\end{bmatrix};$$

$\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Висновки стосовно стійкості тривіального положення рівноваги залежать від розташування значень λ на комплексній площині.

Подальший аналіз періодичних автоколивань конструкції та їхніх біфуркацій проведено за допомогою методів пристрілки та продовження за параметром [224, 225].

4.2.2 Результати чисельного аналізу

Розглянуто два варіанти закріплення оболонки: защемлена з обох боків та консольна.

А. Оболонка, що защемлена з обох боків

Для защемленої з обох боків оболонки мають місце граничні умови (4.56) та (4.57). Для їх врахування використаємо наступні базисні функції в розкладеннях (20): $\Psi_m^{(U)}(\xi) = \Psi_m^{(V)}(\xi) = \Psi_m^{(W)}(\xi) = \Psi_m^{(X)}(\xi) = \Psi_m^{(Y)}(\xi) = sin\left[\frac{m\pi\xi}{L}\right]$.

Властивості гексагонального стільникового заповнювача з матеріалу ULTEM 9085 визначено за методикою гомогенізації [113]. Розглядається заповнювач з наступними розмірами (рис. 3.15):

$$l_1 = 6.1054 \text{ мм}; l_2 = 3.0527 \text{ мм}; \theta = 60^{\circ}; l_c = 10 \text{ мм}; \bar{h}_c = 0.4 \text{ мм}, \quad (4.77)$$

де $\bar{h}_c$ – товщина стінки комірки;

l_c – товщина заповнювача.

Заповнювач вважається орієнтованим вздовж вісей s, θ. Його механічні властивості є наступними:

$$E_{ss} = 2.91 \text{ МПа}; E_{\theta\theta} = 2.91 \text{ МПа}; E_{zz} = 215.10 \text{ МПа}; \nu_{s\theta} = 0.972;$$
$$\nu_{\theta z} = 0.0051; \nu_{sz} = 0.0042; G_{s\theta} = 1.118 \text{ МПа}; G_{\theta z} = 39.1 \text{ МПа};$$
$$G_{sz} = 39.1 \text{ МПа}; \rho_{\text{с}} = 253.189 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4.78)$$

Обшивки зроблено з ортотропного вуглепластику, який має наступні механічні характеристики:

$$E_{ss} = 160 \text{ ГПа}; E_{\theta\theta} = 6.8 \text{ ГПа}; \nu_{s\theta} = 0.32;$$
$$G_{s\theta} = 800 \text{ МПа}; G_{sz} = G_{\theta z} = 4\text{ГПа}; \rho_t = \rho_b = 1400 \, {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}. \quad (4.79)$$

Конструкція має такі розміри:

$$\varphi = \frac{\pi}{12};\ s_t^{(1)} = 2.354 \text{ м};\ s_c^{(1)} = 2.33 \text{ м}; s_b^{(1)} = 2.313 \text{ м};\ L = 1 \text{ м};$$
$$h_t = h_b = 10^{-3} \text{ м};\ h_c = 10^{-2} \text{ м}. \quad (4.80)$$

У табл. 4.5 наведено перші 10 власних частот конструкції. У другому стовпці наведено N_* – кількість базисних функцій. У третьому стовпці наведено власні частоти, які знайдено методом Релея-Рітца, у четвертому – скінченно-елементним моделюванням. У п’ятому стовпці наведено похибку розв’язку методом Релея-Рітца відносно скінченно-елементної моделі. Результати свідчать, по-перше, що метод збігається при достатній кількості базисних функцій, по-друге – що власні частоти, які отримано різними методами, є близькими.

Таблиця 4.5 – Власні частоти оболонки, защемленої з обох боків

n	N_*	ω, Гц	ω_{FEM}, Гц	δ
1	180	412.84		
	210	412.25		
	270	411.83	421.98	0.024
2	180	431.29		
	210	430.61		
	240	430.1	438.45	0.019
3	180	449.92		
	210	449.14		
	240	448.56	455.76	0.015
8	210	451.6		
	240	450.80		
	270	450.22	460.61	0.022

7	210	452.73		
	240	451.96		
	270	451.41	462.27	0.023
6	210	458.77		
	240	458.06		
	270	457.54	467.82	0.022
9	210	459.88		
	240	459.05		
	270	458.46	466.99	0.018
4	180	461.70		
	210	460.85		
	240	460.24	467.5	0.015
5	180	464.27		
	210	463.35		
	240	462.71	471.14	0.018
10	210	479.25		
	240	478.42	482.81	0.0091

Перша власна частота відповідає значенню $n = 1$. Власні частоти конструкції розташовані дуже щільно. Перші десять власних частот займають відрізок $\omega \in [411.83; 478.42]$ Гц.

Проблему втрати динамічної стійкості оболонкою розглянуто при наступних значеннях параметрів струменя: $\gamma = 1.4$; $a_\infty = 213.36$ м/с; $\beta = 0$. Аналіз проведено при різних значеннях кількості членів $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v$ у розкладеннях (4.64). Розглядаються значення $N_w = \{2,3,4\}$. Для аналізу втрати динамічної стійкості обчислюються характеристичні експоненти з проблеми власних значень (4.76).

На рис. 4.12 наведено значення критичного тиску для різних власних форм при числі Маха струменя $M = 1.5$, $M = 5$ та при $N_w = 3$. Криві

збігаються з отриманими для значень $N_w = 2$ та $N_w = 4$. Мінімальні значення $p_\infty^{(cr)}$ у всіх випадках відповідають значенням $n = 1$. Зазначимо, що в ізотропних оболонках втрата динамічної стійкості відбувається при набагато більших значеннях n [113]. З рис. 4.12 видно, що з підвищенням числа Маха критичний тиск знижується.

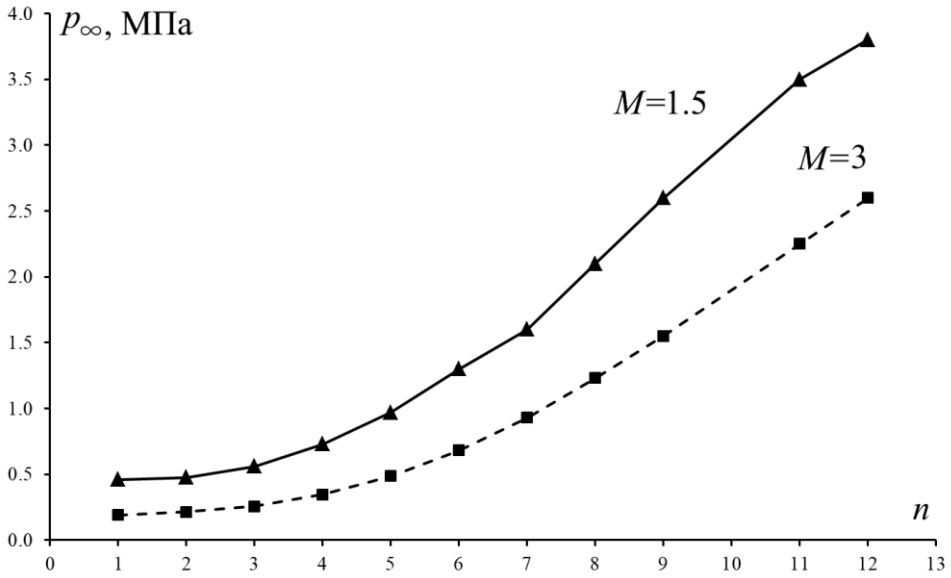


Рисунок 4.12 – Зв'язок між критичним тиском та типом власної форми

Значення критичного тичку вільного струменя $p_\infty^{(cr)}$, отримані для різної кількості членів N_w у розкладеннях (4.64), наведено в табл. 4.6. У останньому стовпчику наведено значення критичного тиску, які отримано за результатаим нелінійного аналізу. Значення критичного тиску, які обчислено за лінійною моделлю для $N_w = 3, N_w = 4$ та за нелінійною моделлю є близькими.

Таблиця 4.6 – Значення критичного тиску $p_\infty^{(cr)}$ при $n = 1$

N_w	$N_w = 2$	$N_w = 3$	$N_w = 4$	Нелінійний розрахунок
$p_\infty^{(cr)}$, Па	$4.85 \cdot 10^5$	$4.60 \cdot 10^5$	$4.65 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^5$

Вплив кута атаки на значення критичного тиску наведено на рис. 4.13 при $n = 1$. Видно, що при збільшенні кута атаки критичний тиск росте.

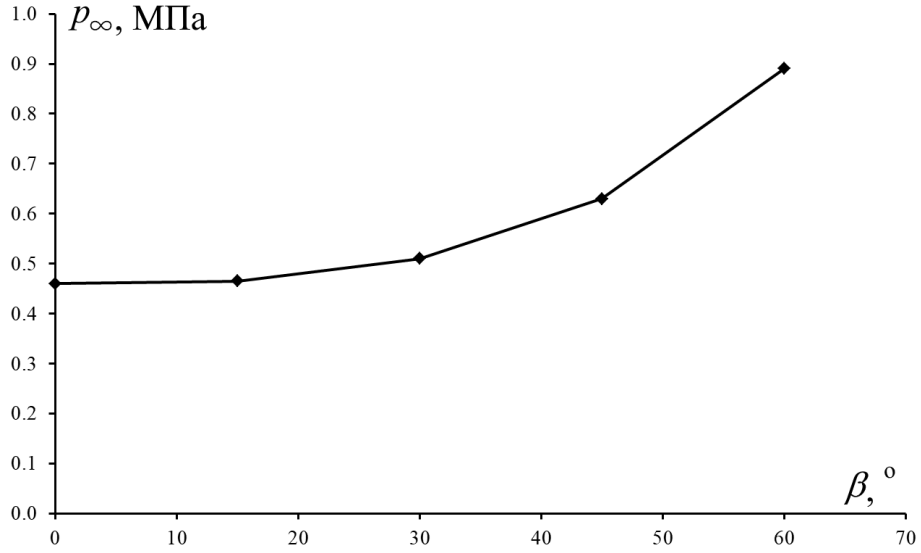
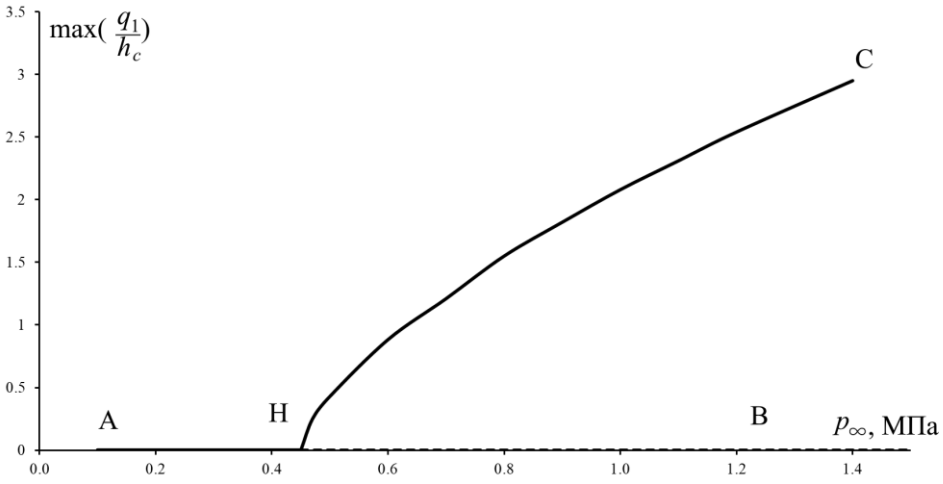
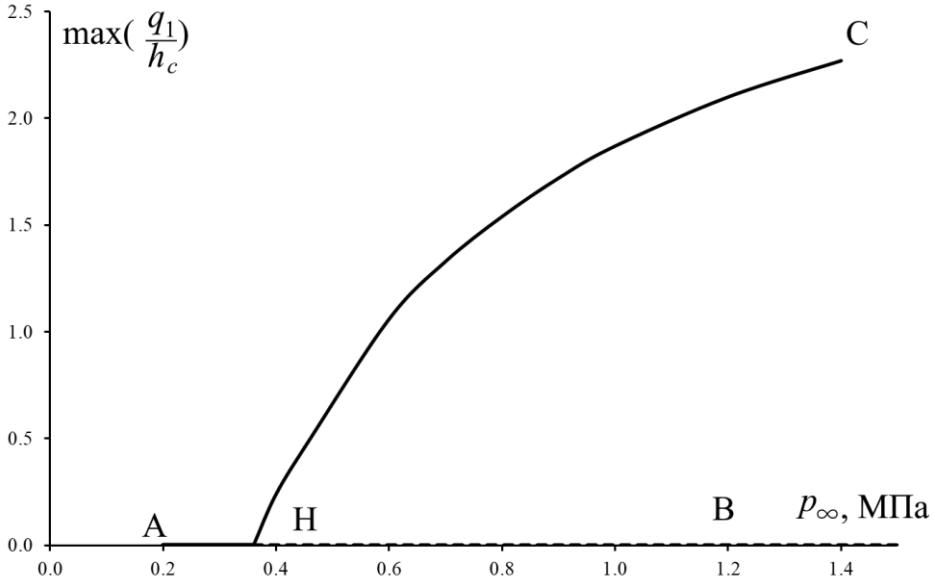


Рисунок 4.13 – Залежність критичного тиску від кута атаки

Біфуркаційну поведінку конічної оболонки, защемленої з обох боків, проаналізовано за описаною методикою (див. розділ 2.3). На рис. 4.14 наведено біфуркаційну поведінку конструкції при значеннях числа Маха $M = 1.5$ та $M = 3$. Якісний характер біфуркаційної поведінки при різних значеннях числа Маха є однаковим. У точці H спостерігається біфуркація Хопфа, положення рівноваги втрачає стійкість та виникають автоколивання. На рис. 4.14 відповідна гілка позначена як (HC). Чисельне моделювання свідчить, що автоколивання є стійкими на всьому діапазоні зміни p_∞.



а.



б.

Рисунок 4.14 – Біфуркаційна діаграма оболонки, защемленої з двох боків, для різних чисел Маха: а. – $M = 1.5$, б. – $M = 3$

Б. Консольна оболонка

Розглянемо оболонку, широкий кінець якої є защемленим, а інший – вільним. Таке закріплення відповідає граничним умовам (4.57). Йому задовольняють базисні функції наступного вигляду:

$$\Psi_m^{(U)}(s) = \Psi_m^{(V)}(s) = \Psi_m^{(W)}(s) = \Psi_m^{(X)}(s) = \Psi_m^{(Y)}(s) = sin\left[\frac{(2m-1)\pi(L-s)}{2L}\right].$$

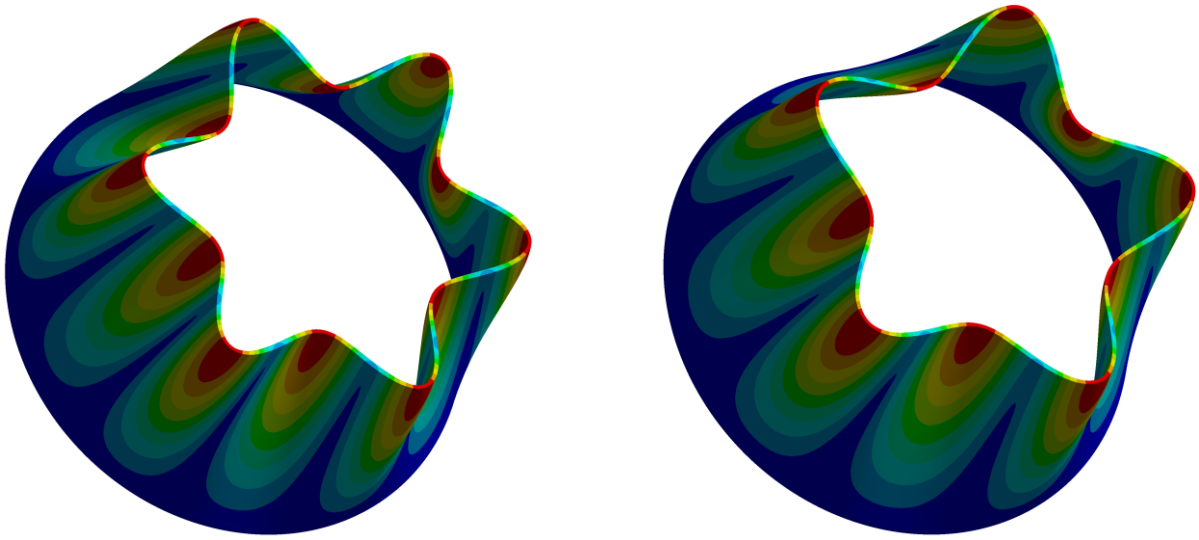
Розглядається оболонка з геометричними параметрами (4.80) та механічними характеристиками (4.78), (4.79), аналогічними оболонці, розглянутій вище.

Власні частоти консольної оболонки наведено в табл. 4.7. Власні частоти, що отримані методом Релея-Рітца, є близькими до таких, що отримано методом скінченних елементів. Перша власна частота характеризується $n = 6$ хвилями в окружному напрямку.

Власні форми коливань консольної оболонки характеризуються значними амплітудами вільного кінця (рис. 4.15). Це якісно відрізняє їх від форм оболонки, що защемлена з обох боків.

Таблиця 4.7 – Власні частоти консольної оболонки

n	N_*	ω, Гц	ω_{FEM}, Гц	Відносна похибка
1	210	409.46	417.15	0.018
2	210	409.58	409.9	$7.8 \cdot 10^{-4}$
3	210	365.95	353.16	0.036
4	210	307.81	292.54	0.05
5	210	271.49	265.06	0.02
6	210	262.1	264.29	0.006
7	210	274.41	280.2	0.02
8	210	302.77	307.97	0.016
9	210	342.96	345	0.006
10	210	391.95	389.58	0.006



а. б.

Рисунок 4.15 – Власні форми консольної оболонки, що відповідають різним значенням n: а. – $n = 6$; б. – $n = 5$

Втрата динамічної стійкості положенням рівноваги оболонки під дією надзвукового струменя досліджена описаним раніше методом. Зв'язок між критичним тиском та кількістю хвиль в окружному напрямку наведено на рис. 4.16 для різних значень числа Маха.

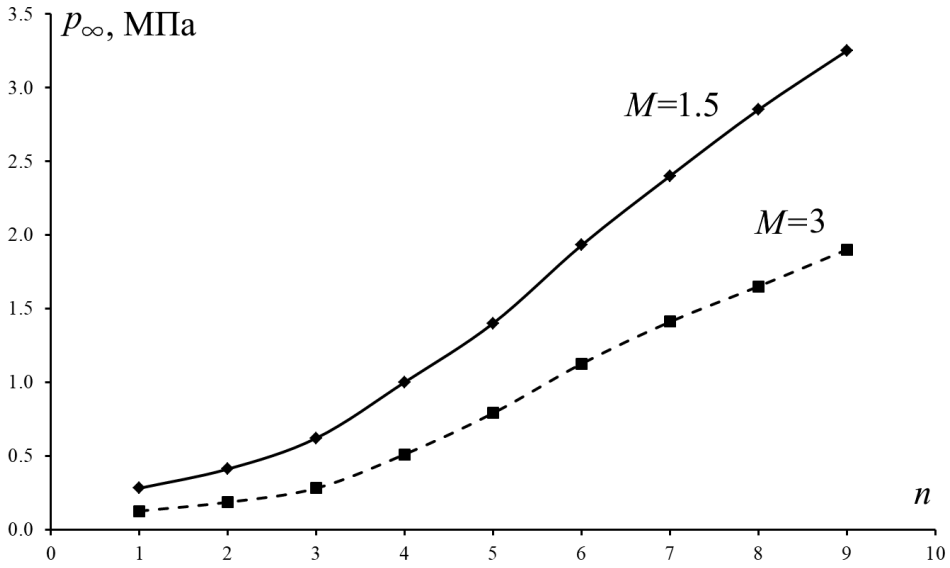


Рисунок 4.16 – Зв'язок між кількістю хвиль в окружному напрямку та критичним тиском для консольної оболонки

Результати обчислень свідчать, що мінімальний критичний тиск досягається при $n = 1$. Значення критичного тиску для цієї власної форми при $M = 1.5$ та $M = 5$ наведено в табл. 4.8. Порівняння їх зі значеннями, що отримані з аналізу нелінійної динамічної системи (4.75) свідчить про високу точність результатів, оскільки похибка не перевищує 4%.

Таблиця 4.8 – Значення критичного тиску для консольної оболонки

M	$p_\infty^{(cr)}$, Па нелінійний аналіз	$p_\infty^{(cr)}$, Па лінійний аналіз	Відносна похибка
1.5	$2.6 \cdot 10^5$	$2.7 \cdot 10^5$	0.038
5	$1.2 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$	0.04

На рис. 4.17 наведено порівняння залежностей критичного тиску від кута атаки для консольної оболонки та оболонки, що є защемленою з двох сторін. Видно, що значення критичного тиску для консольної оболонки нижче при всіх значеннях кута атаки.

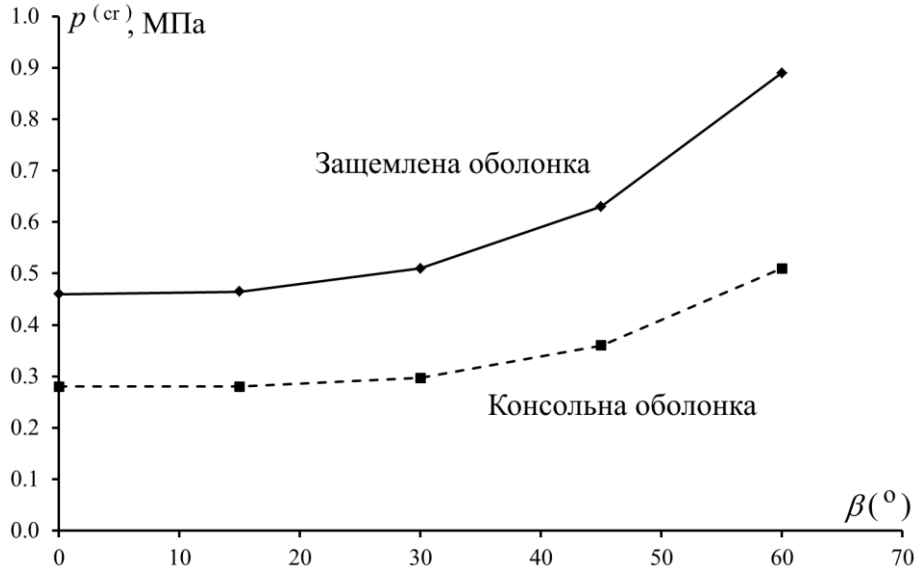


Рисунок 4.17 – Залежність критичного тиску від кута атаки

Також було проведено аналіз автоколивань оболонки у взаємодії з надзвуковим газовим струменем з кутом атаки 0°. Кількість членів в розкладеннях (4.64) дорівнювала: $N_w = N_{\phi_1} = N_{\phi_2} = N_u = N_v = 3$; $\overline{N}_w = N_{\phi_1} = \overline{N}_u = 1$. В розкладеннях (4.64) враховувалась одна вісесиметрична форма, що описує рівномірне розширення оболонки. Нелінійна система (4.75) має 21 ступінь свободи. Аналіз динамічної системи (4.75) проводився чисельно за допомогою методу пристрілки сумісно з продовженням за параметром (див. розділ 2.3).

Біфуркаційні діаграми системи наведено на рис. 4.18 у вигляді залежності амплітуди q_1/h_c від статичного тиску вільного струменя p_∞. Стійкі та нестійкі режими наведено суцільною лінією та пунктиром відповідно. Тривіальне положення рівноваги, яке зображено лінією AB, існує при будь-якому значенні p_∞. В точці H виникає біфуркація Хопфа. В результаті неї стійке положення рівноваги AH стає нестійким (HB). Виникають стійкі автоколивання, які відповідають кривій HN_s. У точці N_s спостерігається біфуркація Неймарка-Сакера, і стійкі автоколивання перетворюються в нестійкі та виникають квазіперіодичні автоколивання. Їхня амплітуда описується кривою N_sD. На рис. 4.19, а наведено автоколивання $q_1(t)$ при $p_\infty = 0.27$ МПа. На рис. 10б та 10в наведено квазіперіодичні автоколивання $q_1(t)$ при $p_\infty = 0.9$ МРа та $p_\infty = 1.3$ МПа.

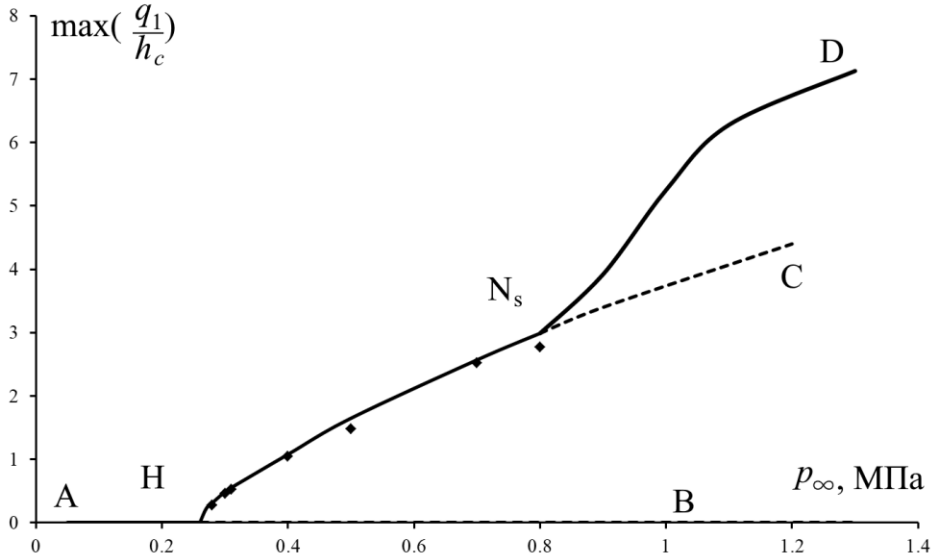
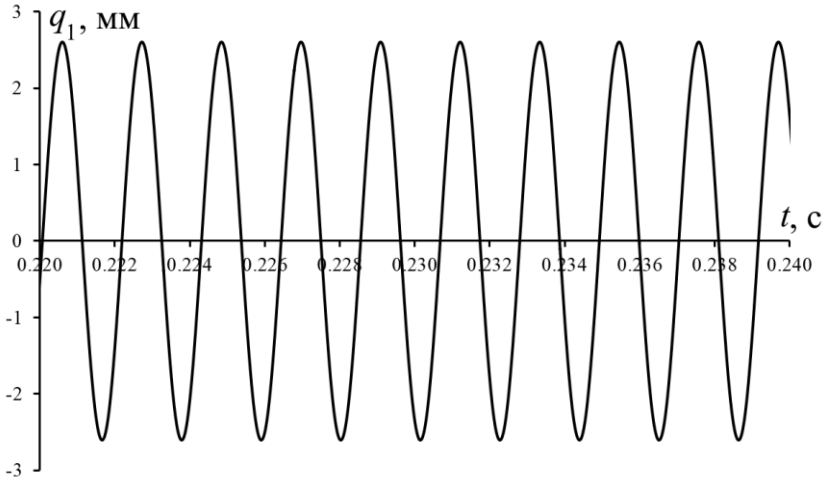
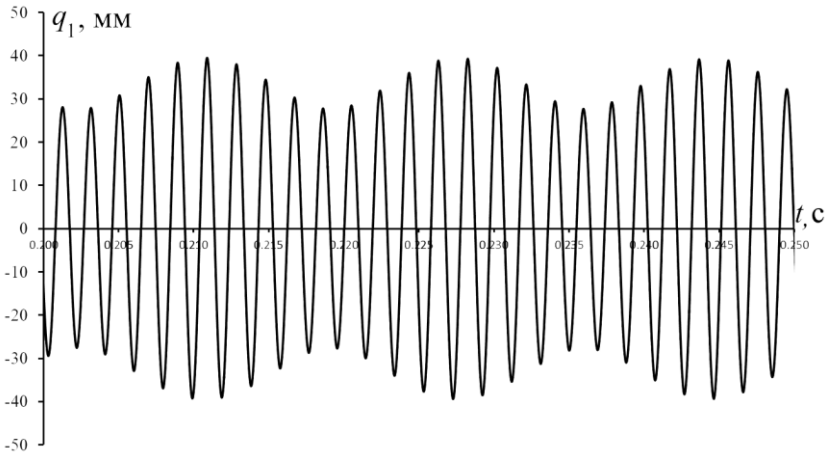


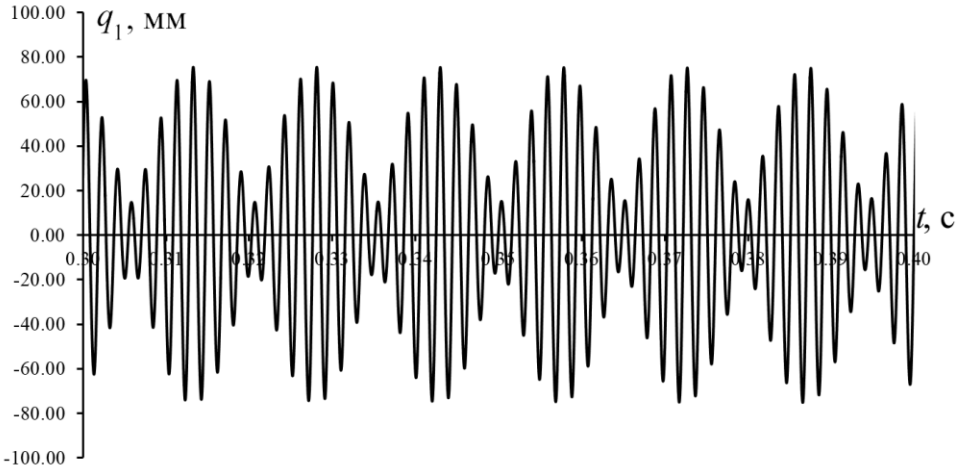
Рисунок 4.18 – Біфуркаційна діаграма автоколивань консольної оболонки при M=1.5



а.



б.



в.

Рисунок 4.19 – Автоколивання конструкції $q_1(t)$ при наступних значеннях статичного тиску вільного струменя: а. – $p_\infty = 0.27$ МПа; б. – $p_\infty = 0.9$ МПа; в. – $p_\infty = 1.3$ МПа

Чисельно побудовано перетини Пуанкаре квазіперіодичних коливань Розглядається перетин траєкторією динамічної системи поверхні

$$\Sigma = \{(q_1, \dots, q_{21}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{21}) \in R^{42} | q_1 = 0;\ \dot{q}_1 > 0\}.$$

На рис. 4.20 наведено перетин Пуанкаре квазіперіодичних коливань на площині $(\dot{q}_9, q_9)$ при $p_\infty = 1$ МПа, який свідчить, що спостерігається інваріантний тор. Його можна спостерігати на всіх перетинах режимів, що описуються ділянкою $N_s D$ (рис. 4.18).

З рис. 4.18 видно, що амплітуди квазіперіодичних коливань є набагато більшими за амплітуди періодичних автоколивань, тому вони можуть призвести то втомних пошкоджень конструкції.

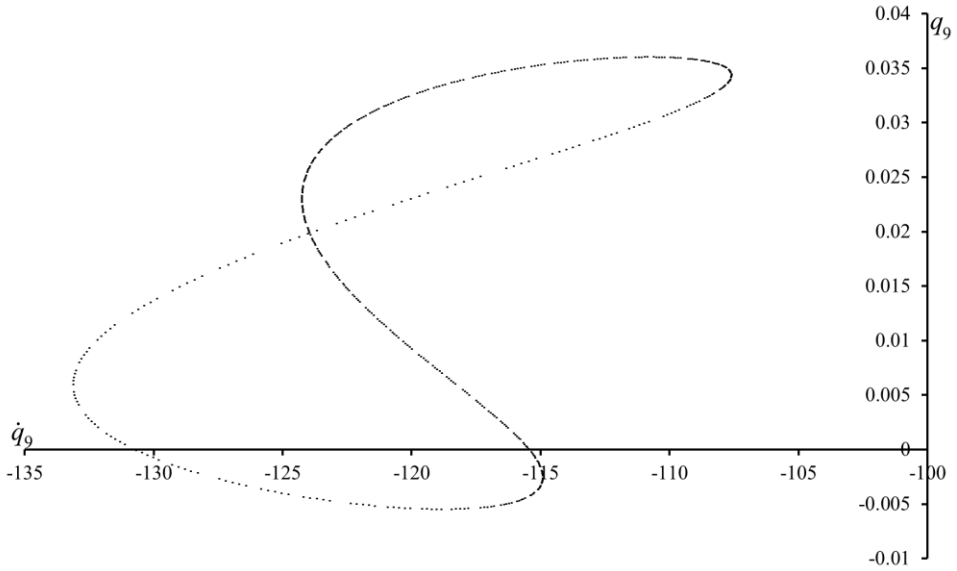


Рисунок 4.20 – Перетин Пуанкаре при $p_\infty = 1$ МПа

З метою дослідження збіжності результатів, які описано вище, проведено аналіз динамічної системи (4.75) з більшою кількістю ступенів свободи. Для цього використано наступні параметри розкладень (4.64): $N_w = 4$; $\overline{N}_w = 1$. Динамічна система (4.75) в такому разі має 27 ступенів свободи. Її аналіз проведено шляхом чисельного інтегрування, результати якого наведено маркерами на рис. 4.18. Видно, що результати аналізу систем з різною кількістю ступенів свободи є близькими, що свідчить про збіжність отриманих розв'язків.

Додатково проведено аналіз динаміки конструкції у взаємодії з надзвуковим газовим струменем при числі Маха M=5. В результаті отримано біфуркаційну діаграму, яку зображено на рис. 4.21. У точці H внаслідок біфуркації Хопфа виникають стійкі автоколивання, амплітуда яких описується кривою HC. Біфуркації Неймарка-Сакера не спостерігається, а квазіперіодичні режими не виникають.

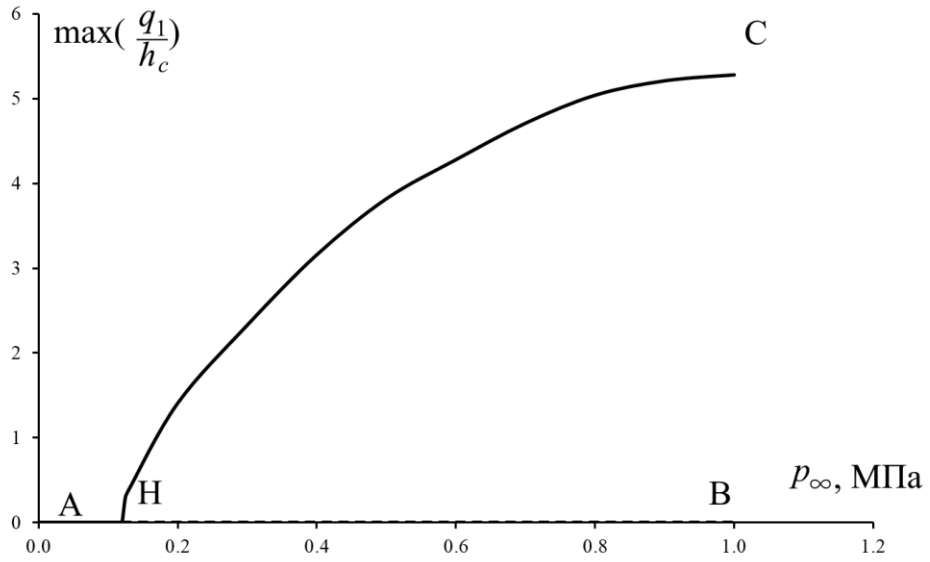


Рисунок 4.21 – Біфуркаційна діаграма консольної оболонки при M=5

На рис. 4.22 наведено результати аналізу автоколивань при фіксованому значенні $p_\infty = 0.9$ МПа та числі Маха, що варіюється. Біфуркація Неймарка-Сакера спостерігається в точці NS_* та приводить до перетворення нестійких автоколивань (A_*NS_*) у стійкі (NS_*C_*) та виникає гілка стійких квазіперіодичних автоколивань. Їхні амплітуди відповідають ділянці NS_*B_* на рис. 4.22. При подальшому зниженні числа Маха стійкі квазіперіодичні коливання перетворюються на хаотичні. На рис. 4.23 наведено хаотичні автоколивання $q_1(t)$ при $M = 1.45$. Дивний атрактор автоколивань на площині $(\dot{q}_9, q_9)$ показано на рис. 4.24. Як видно з рис. 4.22, спостерігається значене підвищення амплітуд автоколивань на ділянках хаотичних та квазіперіодичних режимів.

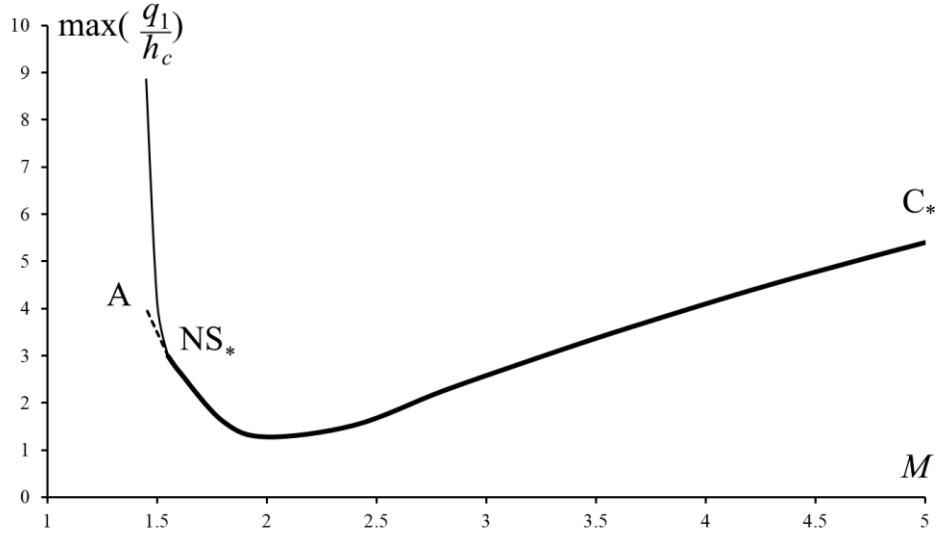


Рисунок 4.22 – Біфуркаційна діаграма автоколивань при $p_\infty = 0.9$ МПа

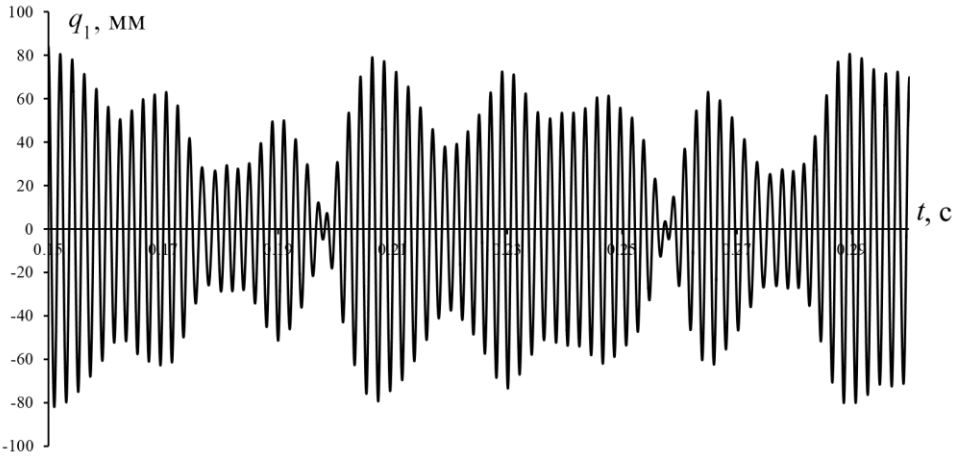


Рисунок 4.23 – Хаотичні автоколивання $q_1(t)$ при M=1.45

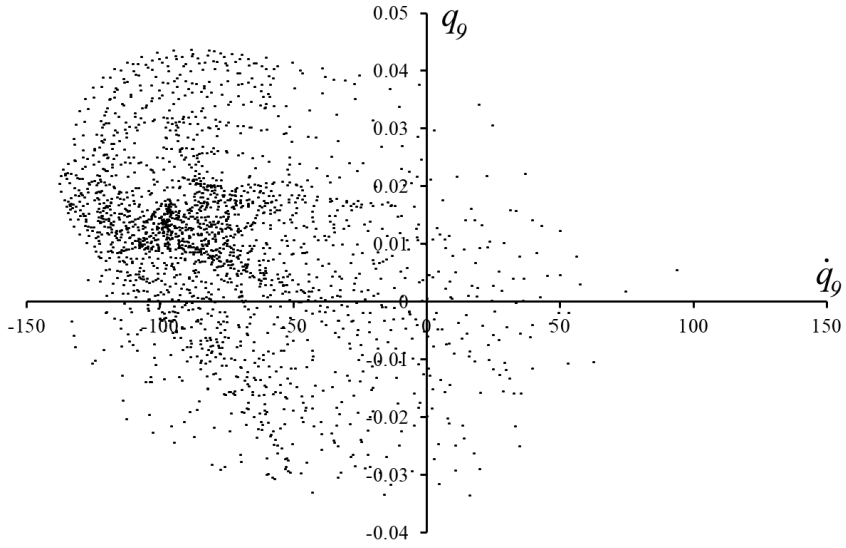


Рисунок 4.24 – Дивний атрактор хаотичних автоколивань при $M = 1.45$

Висновки за розділом 4

За матеріалами, наведеними в розділі, можна зробити такі висновки:

– Виведено модель напружено-деформованого стану усіченої конічної оболонки з ортотропного матеріалу з ізотропним кільцем з прямокутним поперечним перерізом. При побудові математичної моделі кільця застосовано гіпотези Ейлера-Бернуллі;

– Побудовано модель нестаціонарного відгуку конічної оболонки з верхнім шпангоутом у вигляді лінійної системи диференційних рівнянь ІІ порядку;

– Нестаціонарну динаміку конічної оболонки з ізотропним кільцем досліджено методом скінченних елементів для випадків нанокомпозитного конуса з рівномірним армуванням вуглецевими нанотрубками та вуглепластикового конуса. Проведено порівняння динамічного відгуку оболонки із результатами розрахунків запропонованим методом. Результати порівняння є близькими;

– Чисельно досліджено залежність амплітуд нестаціонарного відгуку нанокомпозитної конструкції від типу наноармування. Найбільші амплітуди перехідного процесу спостерігаються при FGO армуванні, а найменші при FGX;

– Побудовано нелінійну математичну модель автоколивань тришарової конічної оболонки зі стільниковим заповнювачем. Модель враховує геометрично нелінійне деформування композитної конструкції внаслідок її взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Напружено-деформований стан кожного шару описується п’ятьма змінними. Для опису напруженого стану конструкції використовується теорія деформацій зсуву високого порядку. Для побудови нелінійної математичної моделі у формі рівнянь руху Лангранжа ІІ роду використовується метод заданих форм;

– Проведено редукування розробленої моделі з урахуванням значної неоднорідності властивостей шарів оболонки;

– Проведено аналіз динамічної поведінки оболонки шляхом застосування методу пристрілки та методу продовження за параметром. Проведено аналіз стійкості періодичних режимів;

– Проведено аналіз лінійних коливань консольної конічної оболонки та оболонки, защемленої з двох боків. Для аналізу власних коливань застосовано метод Релея-Рітца. Проведено аналіз втрати динамічної стійкості цими оболонками внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Мінімальний критичний тиск для обох оболонки виявлено на згинальній формі. Консольна оболонка характеризується меншим критичним тиском, ніж оболонка, защемлена з обох боків;

– Проведено аналіз впливу параметрів струменя на критичний тиск. Виявлено, що при підвищенні кута атаки критичний тиск підвищується. При підвищенні числа Маха – знижується;

– Результати аналізу нелінійної динаміки оболонок свідчать, що консольна оболонка має більш різноманітну біфуркаційну поведінку. В обох оболонках виникають стійкі періодичні автоколивання внаслідок біфуркації Хопфа. Оболонка, защемлена з двох боків, демонструє цю поведінку в широкому діапазоні параметрів струменя. У консольній оболонці спостерігалося виникнення біфуркації Неймарка-Сакера, яка приводила до перетворення періодичних автоколивань на квазіперіодичні, які в свою чергу перетворюються на хаотичні. Для аналізу цих режимів побудовано перетини Пуанкаре, які свідчать, що при квазіперіодичних автоколиваннях в фазовому просторі спостерігається інваріантний тор. Амплітуди квазіперіодичних та хаотичних коливань є значно вищими за амплітуди періодичних автоколивань, що необхідно враховувати при проєктуванні конструкцій та виборі їхніх робочих режимів.

Результати, які отримано в цьому розділі, використано в публікаціях [6, 7, 10, 18, 19, 27, 29, 36, 46, 48, 53], які наведено в Додатку А.

РОЗДІЛ 5

ВТРАТА ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ СКЛАДЕНИМИ ТРИШАРОВИМИ ОБОЛОНКАМИ В НАДЗВУКОВОМУГАЗОВОМУ СТРУМЕНІ

Даний розділ присвячено виявленню умов втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною оболонкою в надзвуковому газовому струмені. Такий об’єкт часто виступає математичною моделлю обтічників ракетокосмічної техніки, тому аналіз його динамічної поведінки у взаємодії з надзвуковим струменем є практично значущою задачею.

Розглянемо тонкостінну оболонкову конструкцію, яка складається з конічної та циліндричної оболонок (рис. 5.1), зроблених з тришарового композиту зі стільниковим заповнювачем. Циліндричний кінець оболонки защемлений, конічний є вільним. Зовнішній та внутрішній шари оболонки (обшивки) є тонкими та виготовлені з жорсткого ортотропного матеріалу. Середній шар оболонки (заповнювач) являє собою стільниковий заповнювач з геометрією комірки, яку зображено на рис. 5.2, виготовлений за технологією FDM. Шар заповнювача є набагато товстішим за шари обкладинок, але має значно нижчу густину. З’єднання між обшивками і заповнювачем вважається абсолютно жорстким.

Довжина оболонки вздовж утворюючої лінії дорівнює $L = x_s + L_2$, де x_s [м] – довжина конічної частини оболонки вздовж утворюючої лінії; L_2 [м] – довжина циліндричної частини оболонки вздовж утворюючої лінії. Внутрішній радіус циліндричної частини оболонки дорівнює R. Шари оболонки мають товщини h_t, h_c, h_b, де h_t [м] – товщина зовнішньої обшивки, h_c[м] – товщина заповнювача, h_b[м] – товщина внутрішньої обшивки.

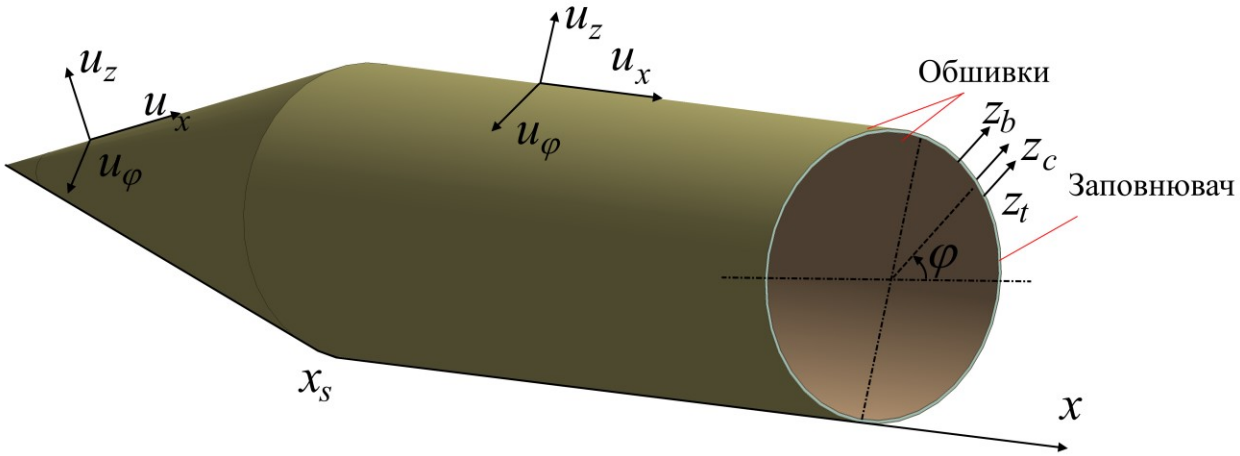


Рисунок 5.1 – Ескіз складеної конструкції

Оболонка знаходиться в надзвуковому газовому струмені під кутом атаки β. Ставиться задача аналізу динамічної нестійкості оболонки внаслідок взаємодії зі струменем.

5.1 Методика аналізу динамічної стійкості складеною тришаровою оболонкою внаслідок взаємодії з надзвуковим струмом

5.1.1 Математична модель руху оболонки

Для побудови математичної моделі оболонки введемо систему координат, яку зображено на рис. 5.1. Координата x [м] $\in [0; L]$ (поздовжня) спрямована вздовж утворюючої лінії оболонки. Кругова координата φ [рад] $\in [0; 2\pi]$ визначається в площині, яка є перпендикулярною до вісі оболонки. Поперечні координати z_i[м] $\in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right], i = t, b, c$ спрямовані вздовж нормалі до серединної поверхні відповідного шару: індекс t відповідає зовнішній обшивці, b – внутрішній обшивці, c – шару заповнювача. При цьому частина конструкції (рис. 5.1), яка не може бути описана оболонковими моделями, при побудові математичної моделі відкидається.

Обшивки оболонки створено з жорсткого композитного матеріалу. Механічні властивості такого матеріалу є ортотропними вздовж

координатних ліній $(x, \varphi, z_i), i = t, b$. Закон Гука для них має наступну форму:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(i)} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

$$\sigma_{\varphi z}^{(i)} = G_{\varphi z}\varepsilon_{\varphi z}^{(i)};$$

$$\sigma_{xz}^{(i)} = G_{xz}\varepsilon_{xz}^{(i)};$$

$$\sigma_{x\varphi}^{(i)} = G_{x\varphi}\varepsilon_{x\varphi}^{(i)},$$

$$i = t, b,$$

де

$$Q_{11} = \frac{E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}};\ Q_{\varphi\varphi} = \frac{E_{\varphi\varphi}}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}}; \tag{5.2}$$

$$Q_{12} = \frac{\mu_{\varphi x}E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi}\mu_{\varphi x}};$$

$\varepsilon_{xz}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(i)}$ – деформації зсуву;

$\varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(i)}, \varepsilon_{xz}^{(i)}, \varepsilon_{x\varphi}^{(i)}$ – елементи тензора деформацій;

$\sigma_{xz}^{(i)}, \sigma_{\varphi z}^{(i)}$ – напруження зсуву;

$\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}, \sigma_{x\varphi}^{(i)}$ – елементи тензора напружень;

$E_{xx}, E_{\varphi\varphi}$ – модулі Юнга матеріалу обшивок вздовж координатних ліній x та φ відповідно;

$\mu_{x\varphi}, \mu_{\varphi x}$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу обшивок;

$G_{\varphi z}, G_{xz}, G_{x\varphi}$ – модулі зсуву матеріалу обшивок у відповідних координатних площинах.

Шар стільникового заповнювача створено технологією FDM 3D-друку. Вигляд комірки заповнювача зображено на рис. 5.2. Усереднені механічні властивості цього шару були розраховані за процедурою скінченно-

елементної гомогенізації. Вони також є ортотропними вздовж координатних ліній (x, φ, z_c).

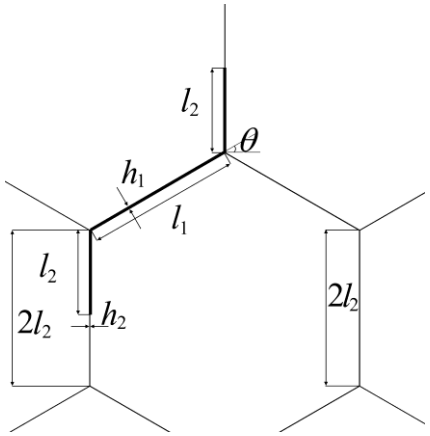


Рисунок 5.2 – Ескіз комірки стільникового заповнювача

Закон Гука для шару стільникового заповнювача має форму:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi z}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \\ \sigma_{xy}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{\varphi z}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

де $\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{\varphi z}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору напружень;

$\varepsilon_{xx}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}, \varepsilon_{zz}^{(c)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(c)}, \varepsilon_{xz}^{(c)}, \varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензору деформацій;

елементи матриці $C_{11}, C_{12}, \ldots$ – визначаються за процедурою скінченно-елементної гомогенізації.

Проекції переміщень i-го шару оболонки на координатні лінії (x, φ, z_i) позначимо $u_x^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_\varphi^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_z^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), i = \{t, c, b\}$, де τ – час.

Модель динаміки власно оболонки достеменно описана в розділі 2.1.1. Особливостями моделі складеної конструкції є кусково-лінійний характер геометричних параметрів оболонки:

$$R_b(x) = \begin{cases} x\mathrm{tg}\alpha + 0.5\dfrac{h_b}{\cos\alpha}, x < x_s; \\ R + 0.5h_b, x \geq x_s \end{cases}$$

$$R_c(x) = \begin{cases} x\mathrm{tg}\alpha + \dfrac{h_b + 0.5h_c}{\cos\alpha}, x < x_s \\ R + h_b + h_c + 0.5h_t, x \geq x_s \end{cases};$$

$$R_t(x) = \begin{cases} x\mathrm{tg}\alpha + \dfrac{h_b + h_c + 0.5h_t}{\cos\alpha}, x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5h_t, x \geq x_s \end{cases}$$

$$\alpha = arcsin\left(\frac{R}{x_s}\right),$$

де $R_b(x)$, $R_c(x)$, $R_t(x)$ – радіуси кривизни серединних поверхонь внутрішньої обшивки, заповнювача та зовнішньої обшивки.

Параметри Ляме шарів оболонки мають наступну форму:

$$A_b = \begin{cases} x\sin\alpha + \dfrac{0.5h_b}{\cos\alpha}, x < x_s \\ R + 0.5h_b, x \geq x_s \end{cases};$$

$$A_c = \begin{cases} x\sin\alpha + \dfrac{h_b + 0.5h_c}{\cos\alpha}, x < x_s; \\ R + h_b + 0.5h_c, x \geq x_s \end{cases}$$

$$A_t = \begin{cases} x\sin\alpha + \dfrac{h_b + h_c + 0.5h_t}{\cos\alpha}, x < x_s. \\ R + h_b + h_c + 0.5h_t, x \geq x_s \end{cases}$$

Таким чином, підінтегральні функції функціоналів механічних енергій оболонки T (див. формулу 2.10) та П (див. формулу 2.9) є кусково-лінійними відносно координати x. Обчислення інтегралів (2.9)–(2.10) доцільно

проводити, розділюючи інтервал інтегрування на два підінтервали $x_0 \leq x < x_s$ та $x_s . \leq x < L$.

Оболонка защемлена на кінці $x = L$ та є вільною на кінці $x = x_0$. Тому граничні умови для оболонки мають вигляд:

$$u^{(i)}\big|_{x=L} = v^{(i)}\big|_{x=L} = w^{(i)}\big|_{x=L} = \varphi_{1,1}^{(i)}\Big|_{x=L} = \varphi_{2,1}^{(i)}\Big|_{x=L} = 0;$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = 0; \quad (5.4)$$

$$i = \{t, c, b\}.$$

На лінії $x = x_s$ переміщення точок оболонки задовольняють умовам безперервності:

$$u^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) = u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t)\cos\alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t)\sin\alpha;$$

$$w^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) = -u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t)\sin\alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t)\cos\alpha;$$

$$v^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) = v^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \quad (5.5)$$

$$\varphi_{1,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t)\cos\alpha = \varphi_{1,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t);$$

$$\varphi_{2,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) = \varphi_{2,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t);$$

$$i = \{t, b, c\}.$$

Таким чином, вирази (2.9)–(2.10) в поєднанні з граничними умовами (5.4) та виразами (5.5) дозволяють побудувати математичну модель коливань оболонки.

5.1.2 Аналіз вільних коливань оболонки

Для аналізу вільних коливань оболонки застосуємо метод Релея-Рітца. Представимо функції $u^{(i)}(x, \varphi, t)$, $v^{(i)}(x, \varphi, t)$, $w^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $i = \{t, b, c\}$ у наступній формі:

$$u^{(i)}(x,\varphi,t) = \widetilde{u^{(i)}}(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);$$
$$v^{(i)}(x,\varphi,t) = \widetilde{v^{(i)}}(x)\sin(n\varphi)\cos(\omega t);$$
$$w^{(i)}(x,\varphi,t) = \widetilde{w^{(i)}}(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t);$$
$$\varphi_{1,1}^{(i)}(x,\varphi,t) = \widetilde{\varphi_{1,1}^{(i)}}(x)\cos(n\varphi)\cos(\omega t); \qquad (5.6)$$
$$\varphi_{2,1}^{(i)}(x,\varphi,t) = \widetilde{\varphi_{2,1}^{(i)}}(x)\sin(n\varphi)\cos(\omega t);$$
$$i = \{t, b, c\},$$

де n – кількість кругових хвиль;

ω – власна частота оболонки;

$\widetilde{u^{(i)}}(x)$, $\widetilde{v^{(i)}}(x)$, $\widetilde{w^{(i)}}(x)$, $\widetilde{\varphi_{1,1}^{(i)}}(x)$, $\widetilde{\varphi_{2,1}^{(i)}}(x)$ – функції, які обираються для виконання співвідношень (5.6) наступним чином:

$$\widetilde{u^{(i)}}(x) = \begin{cases} U^{(i)}(x)\cos\alpha + W^{(i)}(x)\sin\alpha; & x < x_s; \\ U^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases}$$
$$\widetilde{w^{(i)}}(x) = \begin{cases} -U^{(i)}(x)\sin\alpha + W^{(i)}(x)\cos\alpha; & x < x_s; \\ U^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases}$$
$$\widetilde{v^{(i)}}(x) = V^{(i)}(x); \qquad (5.7)$$
$$\widetilde{\varphi_{1,1}^{(i)}}(x) = X^{(i)}(x);$$
$$\widetilde{\varphi_{2,1}^{(i)}}(x) = \begin{cases} \Phi^{(i)}(x); & x < x_s; \\ \Phi^{(i)}(x)\cos\alpha; & x \geq x_s; \end{cases}$$
$$i = \{t, b, c\},$$

де функції $U^{(i)}(x)$, $W^{(i)}$, $V^{(i)}$, $X^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ розкладаються по базисних функціях $P_i(x)$ наступним чином:

$$U^{(t)}(x) = \sum_{i=1}^{N_U} A_i P_i(x);$$

$$V^{(t)}(x) = \sum_{i=1}^{N_V} A_{i+N_U} P_i(x);$$

$$W^{(t)}(x) = \sum_{i=1}^{N_W} A_{i+N_U+N_V} P_i(x);$$

$$X^{(t)}(x) = \sum_{i=1}^{N_X} A_{i+N_U+N_V+N_W} P_i(x);$$

$$\Phi^{(t)}(x) = \sum_{i=1}^{N_\phi} A_{i+N_U+N_V+N_W+N_X} P_i(x);$$

$$U^{(c)}(x) = \sum_{i=1}^{N_U} A_{i+N_U+N_V+N_W+N_X+N_\phi} P_i(x);$$

$$V^{(c)}(x) = \sum_{i=1}^{N_V} A_{i+2N_U+N_V+N_W+N_X+N_\phi} P_i(x);$$

$$W^{(c)}(x) = \sum_{i=1}^{N_W} A_{i+2N_U+2N_V+N_W+N_X+N_\phi} P_i(x);$$

$$X^{(c)}(x) = \sum_{i=1}^{N_X} A_{i+2N_U+2N_V+2N_W+N_X+N_\phi} P_i(x);$$

$$\Phi^{(c)}(x) = \sum_{i=1}^{N_\phi} A_{i+2N_U+2N_V+2N_W+2N_X+N_\phi} P_i(x); \qquad (5.8)$$

$$U^{(b)}(x) = \sum_{i=1}^{N_U} A_{i+2N_U+2N_V+2N_W+2N_X+2N_\phi} P_i(x);$$

$$V^{(b)}(x) = \sum_{i=1}^{N_V} A_{i+3N_U+2N_V+2N_W+2N_X+2N_\phi} P_i(x);$$

$$W^{(b)}(x) = \sum_{i=1}^{N_W} A_{i+3N_U+3N_V+2N_W+2N_X+2N_\phi} P_i(x);$$

$$X^{(b)}(x) = \sum_{i=1}^{N_X} A_{i+3N_U+3N_V+3N_W+2N_X+2N_\phi} P_i(x);$$

$$\Phi^{(b)}(x) = \sum_{i=1}^{N_\phi} A_{i+3N_U+3N_V+3N_W+3N_X+2N_\phi} P_i(x),$$

де функції $P_i(x)$ задовольняють граничним умовам (5.5);

$\mathbf{A} = \left[A_1, \dots, A_{N_\Sigma}\right]; N_\Sigma = 3N_U + 3N_V + 3N_W + 3N_X + 3N_\phi$ – невідомі коефіцієнти розкладень;

N_U, N_V, N_W, N_X, N_Φ – кількість базисних функцій для розкладень відповідних змінних.

Для дослідження вільних коливань оболонки методом Релея-Рітца [249] мінімізується інтеграл дії:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (\mathrm{T} - \Pi) d\tau \to min.$$

Для цього розкладення (5.6)–(5.8) підставляються в вирази (2.9)–(2.10). Після проведення інтегрування вирази для Т, П набувають форми:

$$T = \omega^2 sin^2(\omega t)\tilde{T}\left(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}\right);$$

$$\Pi = cos^2(\omega t)\widetilde{\Pi}\left(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}\right),$$

де $\tilde{T}$, $\widetilde{\Pi}$ – квадратичні форми відносно коефіцієнтів $\mathbf{A}$.

Таким чином, задача мінімізації інтеграла дії зводиться до мінімізації квадратичної форми:

$$\frac{\pi}{\omega}\left[\omega^2\tilde{T}\left(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}\right) - \widetilde{\Pi}\left(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}\right)\right] \to min.$$

Мінімум функціонала досягається на розв'язку задачі про власні вектори та власні значення:

$$[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{A} = 0, \tag{5.9}$$

де $\mathbf{C} = [C_{ij}]$, $\mathbf{M} = [M_{ij}]$ – квадратні матриці жорсткостей та мас розмірності $N_\Sigma \times N_\Sigma$;

$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} \widetilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$;

$M_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} \widetilde{\mathrm{T}}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$.

Таким чином, отримані значення коефіцієнтів розкладень **A** дозволяють встановити власні форми коливань конструкції у вигляді (5.6). Власні значення задачі (5.9) є квадратами власних частот коливань оболонки.

5.1.3 Побудова рівнянь руху

Для побудови рівнянь коливань оболонки під дією надзвукового повітряного струму застосовується метод заданих форм [222]. Представимо змінні задачі $u^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $v^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $w^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $i = \{t, b, c\}$ у вигляді розкладень за власними формами коливань:

$$\begin{bmatrix} w^{(t)} \\ u^{(t)} \\ v^{(t)} \\ \varphi_{1,1}^{(t)} \\ \varphi_{2,1}^{(t)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_f} \left(\begin{bmatrix} q_{2i-1}(\tau) W_i^{(t)}(x) \\ q_{2i-1+6N_f}(\tau) U_i^{(t)}(x) \\ q_{2i-1+12N_f}(\tau) V_i^{(t)}(x) \\ q_{2i-1+18N_f}(\tau) \Phi_i^{(t)}(x) \\ q_{2i-1+24N_f}(\tau) \Psi_i^{(t)}(x) \end{bmatrix} \cos(n\varphi) + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} q_{2i}(\tau) W_i^{(t)}(x) \\ q_{2i+6N_f}(\tau) U_i^{(t)}(x) \\ q_{2i+12N_f}(\tau) V_i^{(t)}(x) \\ q_{2i+18N_f}(\tau) \Phi_i^{(t)}(x) \\ q_{2i+24N_f}(\tau) \Psi_i^{(t)}(x) \end{bmatrix} \sin(n\varphi) \right);$$

$$\begin{bmatrix} w^{(c)} \\ u^{(c)} \\ v^{(c)} \\ \varphi_{1,1}^{(c)} \\ \varphi_{2,1}^{(c)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_f} \left(\begin{bmatrix} q_{2i-1+2N_f}(\tau) W_i^{(c)}(x) \\ q_{2i-1+8N_f}(\tau) U_i^{(c)}(x) \\ q_{2i-1+14N_f}(\tau) V_i^{(c)}(x) \\ q_{2i-1+20N_f}(\tau) \Phi_i^{(c)}(x) \\ q_{2i-1+26N_f}(\tau) \Psi_i^{(c)}(x) \end{bmatrix} \cos(n\varphi) + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} q_{2i+2N_f}(\tau) W_i^{(c)}(x) \\ q_{2i+8N_f}(\tau) U_i^{(c)}(x) \\ q_{2i+14N_f}(\tau) V_i^{(c)}(x) \\ q_{2i+20N_f}(\tau) \Phi_i^{(c)}(x) \\ q_{2i+26N_f}(\tau) \Psi_i^{(c)}(x) \end{bmatrix} \sin(n\varphi) \right); \qquad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} w^{(b)} \\ u^{(b)} \\ v^{(b)} \\ \varphi_{1,1}^{(b)} \\ \varphi_{2,1}^{(b)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_f} \left(\begin{bmatrix} q_{2i-1+4N_f}(\tau) W_i^{(b)}(x) \\ q_{q_{2i-1+10N_f}11}(\tau) U_i^{(b)}(x) \\ q_{2i-1+16N_f}(\tau) V_i^{(c)}(x) \\ q_{2i-1+22N_f}(\tau) \Phi_i^{(b)}(x) \\ q_{2i-1+28N_f}(\tau) \Psi_i^{(b)}(x) \end{bmatrix} \cos(n\varphi) + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} q_{2i+4N_f}(\tau) W_i^{(b)}(x) \\ q_{q_{2i+10N_f}}(\tau) U_i^{(b)}(x) \\ q_{2i+16N_f}(\tau) V_i^{(c)}(x) \\ q_{2i+22N_f}(\tau) \Phi_i^{(b)}(x) \\ q_{2i+28N_f}(\tau) \Psi_i^{(b)}(x) \end{bmatrix} \sin(n\varphi) \right),$$

де $\mathbf{q} = \left[q_i(\tau), i = 1 \dots 30N_f \right]^T$ – вектор узагальнених координат;

N_f – кількість форм, які враховуються при розрахунку, що характеризуються однаковою кількістю хвиль у круговому напрямку;

$U_j^{(i)}(x)$, $V_j^{(i)}(x)$, $W_j^{(i)}(x)$, $\Phi_j^{(i)}(x)$, $\Psi_j^{(i)}(x)$, $i = \{t, c, b\}$, $j = 1 \dots N_f$ – власні форми коливань оболонки, які знайдено методом Релея-Рітца. Вони мають вигляд кускових функцій.

Підстановка розкладень (5.10) у вирази для потенційної та кінетичної енергії дозволяє представити їх, як квадратичні форми узагальнених координат:

$$\Pi = \Pi\left(q_1, \dots, q_{30N_f}\right); \mathrm{T} = \mathrm{T}\left(q_1, \dots, q_{30N_f}\right). \tag{5.11}$$

При дослідження динаміки оболонки для опису надзвукового струму застосовується поршнева теорія [144], згідно з якою тиск газу дорівнює виразу:

$$p = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2-1}}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\cos\beta + \frac{1}{A_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}\sin\beta + \frac{M_*^2-2}{M_* a_\infty (M_*^2-1)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial t} - \right.$$
$$\left. - \frac{w^{(t)}}{2A_t\sqrt{M_*^2-1}}\right), \qquad (5.12)$$

де p – тиск газу;

γ – адіабатична експонента;

p_∞ – статичний тиск вільного струму;

M_* – число Маха;

a_∞ – швидкість звуку вільного струму;

β – кут атаки.

Віртуальна робота тиску (5.12) має вигляд:

$$\delta A = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2-1}}\int_{x_0}^{L}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\cos\beta + \frac{1}{A_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}\sin\beta + \frac{M_*^2-2}{M_* a_\infty (M_*^2-1)}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial t} - \right.$$
$$\left. - \frac{w^{(t)}}{2A_t\sqrt{M_*^2-1}}\right)\delta w^{(t)} A_t\, dx\, d\varphi, \qquad (5.13)$$

де δ – символ варіації.

Підстановка (5.10) у (5.13) дозволяє обчислити аеродинамічну силу:

$$F_i = 0, i > 2N_f;$$

$$F_i = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2-1}} \int_{x_0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{N_f} \left(q_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + q_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) \frac{dW_i^{(t)}}{\partial x} \cos\beta + \right.$$

$$+ \frac{1}{A_t} \sum_{i=1}^{N_f} \left(-q_{2i-1}(\tau)\sin(n\varphi) + q_{2i}(\tau)\cos(n\varphi) \right) n W_t \sin\beta +$$

$$+ \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\dot{q}_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + \dot{q}_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) W_i^{(t)} -$$

$$- \frac{1}{2A_t\sqrt{M_*^2-1}} \sum_{i=1}^{N_f} \left(q_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + \right.$$

$$\left. \left. + q_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) W_i^{(t)} \right) W_i^{(t)} \cos n\varphi A_t dx d\varphi, i \le 2N_f, i \bmod 2 =$$

$$= 0; \qquad (5.14)$$

$$F_i = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2-1}} \int_{x_0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{N_f} \left(q_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + q_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) \frac{dW_i^{(t)}}{\partial x} \cos\beta + \right.$$

$$+ \frac{1}{A_t} \sum_{i=1}^{N_f} \left(-q_{2i-1}(\tau)\sin(n\varphi) + q_{2i}(\tau)\cos(n\varphi) \right) n W_t \sin\beta +$$

$$+ \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\dot{q}_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + \dot{q}_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) W_i^{(t)} -$$

$$- \frac{1}{2A_t\sqrt{M_*^2-1}} \sum_{i=1}^{N_f} \left(q_{2i-1}(\tau)\cos(n\varphi) + \right.$$

$$\left. \left. + q_{2i}(\tau)\sin(n\varphi) \right) W_i^{(t)} \right) W_i^{(t)} \cos n\varphi A_t dx d\varphi, i \le 2N_f, i \bmod 2 = 1.$$

Аеродинамічна сила (5.14) в матричній формі представляється як сума двох компонентів, які є лінійними комбінаціями узагальнених координат та швидкостей:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda q} + \mathbf{H\dot{q}}, \tag{5.15}$$

де $\mathbf{F} = \left[F_i, i = 1 \dots 30N_f\right]^T$ – вектор розмірності $30N_f$;

$\mathbf{\Lambda}$ – матриця $30N_f \times 30N_f$;

$\mathbf{H}$ – матриця аеродинамічного демпфування $30N_f \times 30N_f$.

Для формулювання рівнянь руху оболонки скористаємось виразами (5.11), (5.15) та побудуємо рівняння Лагранжа II роду. У матричній формі ці рівняння мають вигляд:

$$\mathbf{\Sigma\ddot{q}} + \mathbf{\Omega q} = \mathbf{\Lambda q} + \mathbf{H\dot{q}}, \tag{5.16}$$

де $\mathbf{\Sigma}$ – матриця мас системи: $\Sigma_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, i, j = 1..30N_f$;

$\mathbf{\Omega}$ – матриця жорсткостей системи: $\Omega_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}, i, j = 1..30N_f$.

Таким чином, побудовано модель руху оболонки у вигляді системи звичайних диференційних рівнянь другого порядку (5.16). Ця система може бути досліджена на предмет стійкості положення рівноваги під впливом надзвукового повітряного струму.

Дослідимо явище втрати динамічної стійкості складеною конструкцією, рух якої описується рівняннями (5.16). Для проведення аналізу спочатку знизимо розмірність моделі, щоб підвищити її обчислювальну стійкість.

5.1.4 Зниження розмірності моделі

При побудові рівнянь руху (5.16) виявилось, що матриця мас $\mathbf{\Sigma}$ є погано обумовленою внаслідок слабкого впливу частини узагальнених координат на рух конструкції, що призводить до виникнення рядків та стовпчиків матриці $\mathbf{\Sigma}$, заповнених значеннями, які є близькими до нуля. Виключимо такі

координати щоб підвищити обчислювальну стійкість задачі та прискорити обчислювальний процес.

На рух системи впливають значення переміщень $w^{(i)}, u^{(i)}, v^{(i)}$, $i = \{t, b, c\}$. Відмітимо, що на відміну від циліндричної та конічної оболонок переміщення $u^{(i)}$ є значущими внаслідок їхнього взаємного впливу з компонентами $w^{(i)}$. Значущим переміщенням відповідають узагальнені координати $\mathbf{r} = \left[q_1, \dots, q_{18N_f}\right]^T$. Всі інші узагальнені координати виразимо через компоненти вектора **r:**

$$\mathbf{q}_{18N_f+1\dots30N_f} = -\mathbf{K_{22}}^{-1}\mathbf{K_{21}}\mathbf{r}, \tag{5.17}$$

де $\mathbf{K_{22}} = \mathbf{\Omega}_{18N_f+1\dots30N_f,18N_f+1\dots30N_f}$ – матриця розмірністю $12N_f \times 12N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\mathbf{K_{21}} = \mathbf{\Omega}_{18N_f+1\dots30N_f,1\dots18N_f}$ – матриця розмірністю $12N_f \times 18N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей.

Рівняння (у2.23) в редукованих координатах мають вигляд:

$$\mathbf{M_{11}}\ddot{\mathbf{r}} + \left(\mathbf{K_{11}} - \mathbf{K_{12}}\mathbf{K_{22}}^{-1}\mathbf{K_{21}}\right)\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{r} + \widetilde{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{r}}, \tag{5.18}$$

де $\mathbf{M_{11}} = \mathbf{\Sigma}_{1..18N_f,1..18N_f}$ – матриця мас редукованої системи розмірністю $18N_f \times 18N_f$, яка є блоком матриці мас;

$\mathbf{K_{12}} = \mathbf{\Omega}_{1\dots18N_f,18N_f+1\dots30N_f}$ – матриця розмірністю $18N_f \times 12N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\mathbf{K_{11}} = \mathbf{\Omega}_{1\dots18N_f,1\dots18N_f}$ – матриця розмірністю $18N_f \times 18N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей;

$\widetilde{\mathbf{\Lambda}}$, $\widetilde{\mathbf{H}}$ – матриці **Λ, H** з урахуванням підстановки (у5.1).

Таким чином, систему $30N_f$ звичайних диференційних рівнянь (5.16) зведено до системи $18N_f$ звичайних диференційних рівнянь (5.18).

5.1.5 Аналіз втрати динамічної стійкості положенням рівноваги

Для аналізу втрати динамічної стійкості положення рівноваги оболонки запишемо систему рівнянь (5.18) у формі задачі Коші. Для цього введемо вектор узагальнених швидкостей $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$. У фазових координатах $[\mathbf{r}^T|\mathbf{p}^T]^T$ рівняння (5.18) набувають форми:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{E_{12}}\\ \mathbf{M_{11}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{C}) & \mathbf{M_{11}}^{-1}\widetilde{\mathbf{H}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

де $\mathbf{C} = \left(\mathbf{K_{11}} - \mathbf{K_{12}}\mathbf{K_{22}}^{-1}\mathbf{K_{21}}\right)$;

$\mathbf{E_{12}}$ – одинична матриця розмірністю $18N_f \times 18N_f$.

Для аналізу стійкості положення рівноваги системи (5.19) її розв'язок представляється у формі:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{r_0}\\ \mathbf{p_0}\end{bmatrix} e^{\lambda\tau},$$

де λ – характеристичний показник, який необхідно знайти;

$\begin{bmatrix}\mathbf{r_0}\\ \mathbf{p_0}\end{bmatrix}$ – вектор початкових значень.

Тоді рівняння (5.19) набувають вигляду:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r_0}\\ \mathbf{p_0}\end{bmatrix}\lambda e^{\lambda\tau} = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{E_{12}}\\ \mathbf{M_{11}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{C}) & \mathbf{M_{11}}^{-1}\widetilde{\mathbf{H}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r_0}\\ \mathbf{p_0}\end{bmatrix} e^{\lambda\tau},$$

або

$$\left(\begin{bmatrix}0 & \mathbf{E_{12}}\\ \mathbf{M_{11}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{C}) & \mathbf{M_{11}}^{-1}\widetilde{\mathbf{H}}\end{bmatrix} - \lambda\mathbf{E}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{r_0}\\ \mathbf{p_0}\end{bmatrix} = 0, \tag{5.20}$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця $36N_f \times 36N_f$.

Для аналізу стійкості положення рівноваги оболонки показники λ визначаються з задачі на власні значення (5.20). Знак дійсної частини показника визначає стійкість положення рівноваги: якщо серед характеристичних показників хоча б один є правим, положення рівноваги є нестійким, в іншому випадку – стійким.

Таким чином, описано метод аналізу динамічної стійкості положення рівноваги складеної конструкції під дією надзвукового повітряного струму.

5.2 Результати чисельного аналізу

Розглянемо складену оболонку з наступними геометричними параметрами:

$R = 0.5$ м; $h_t = h_b = 2$ мм; $h_c = 10$ мм; $L = 5$ м; $x_s = 2$ м; $\alpha = 14°$.

Обшивки оболонки створено з вуглепластику на базі SIGRAPREG C U200-0/NF-E310/30% з кутами укладення шарів 0/90°/0/90°. Його механічні властивості є наступними:

$$E_x = 160 \text{ ГПа};\ E_\varphi = 6.8 \text{ ГПа};\ \nu_{x\varphi} = 0.32;\ \nu_{\varphi x} = 0.0136;$$

$$G_{x\varphi} = 800 \text{ ГПа};\ G_{xz} = G_{\varphi z} = 4 \text{ ГПа};\ \rho_t = \rho_b = 1400\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}.$$

Середній шар товщиною 10 мм складається зі стільникового заповнювача, комірку якого наведено на рис. 5.2. Комірка заповнювача має параметри $l_1 = 6.1054$ мм; $l_2 = 3.0527$ мм; $\theta = 60^\circ$; $h_1 = h_2 = 0.4$ мм. Заповнювач надруковано матеріалом ULTEM 9085. Його гомогенізовані властивості дорівнюють: $E_{xx} = 2.91$ МПа; $E_{\varphi\varphi} = 2.91$ МПа; $E_{zz} = 215.10$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0.972$; $\nu_{\varphi z} = 0.0051$; $\nu_{xz} = 0.0042$; $G_{x\varphi} = 1.118$ МПа; $G_{\varphi z} = 39.1$ МПа; $G_{xz} = 39.1$ МПа; ρ_c =253.189 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Було проведено аналіз вільних коливань оболонки, отримано її власні частоти та форми. З метою контролю правильності моделі було проведено порівняння зі скінченно-елементним аналізом власних коливань оболонки, зробленим у системі ANSYS.

Аналіз власних коливань проводився при $N_U = N_V = N_W = N_X = N_\Phi = N$ для значень $N = 10, N = 15, N = 20$.

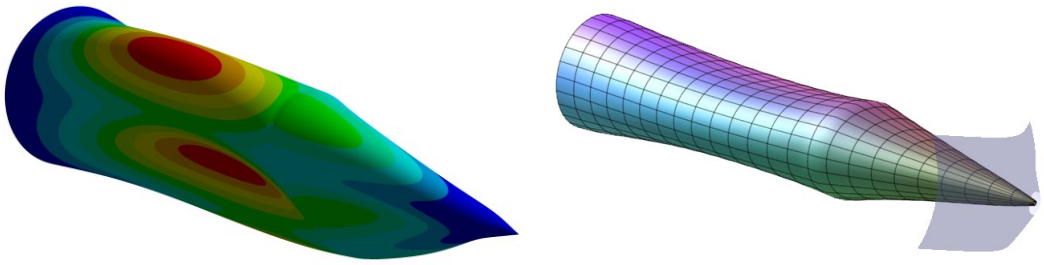
У табл. 5.1 наведено результати порівняння власних частот, які отримано за допомогою скінченно-елементного аналізу та методом Релея-Рітца.

Таблиця 5.1 – Результати порівняння власних частот (Гц)

n	ANSYS	$N = 10$	Відносна похибка	$N = 15$	похибка	$N = 20$	Відносна похибка
2	85.84	93.25	0.086	90.42	0.053	88.84	0.035
3	121.49	125.71	0.035	124.22	0.022	123.26	0.015
2	145.65	158.37	0.087	153.43	0.053	151.22	0.038
3	171.07	191.86	0.121	180.63	0.056	178.03	0.041
4	198.1	200.23	0.011	199.41	0.007	199.01	0.005
4	217.94	230.29	0.057	223.66	0.026	221.92	0.018
2	219.55	246.69	0.124	231.96	0.057	228.76	0.042
3	223.38	250.29	0.120	237.31	0.062	232.94	0.043

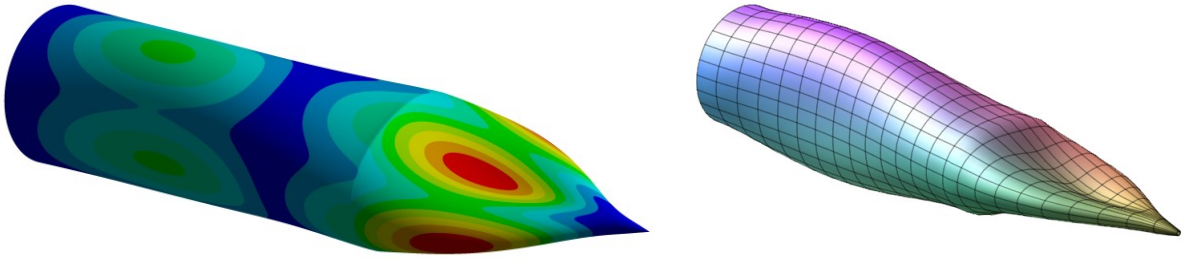
З табл. 5.1 випливає, що при збільшенні кількості базисних функцій N власні частоти наближаються до обчисленим методом скінченних елементів, що свідчить про збіжність методу. Застосування $N = 20$ дозволяє обмежити похибку визначення власної частоти на рівні 5%, тому доцільно використовувати саме цей базис.

На рис. 5.3–5.8 наведено власні форми коливань оболонки для $n = 2$ та $n = 3$.



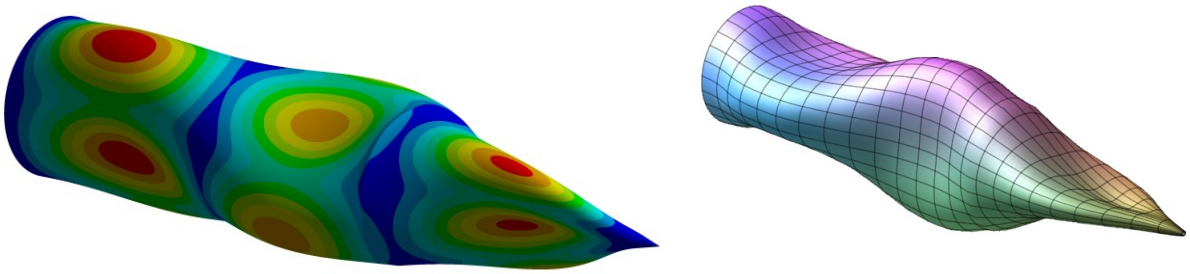
а. б.

Рисунок 5.3 – Власна форма для $n = 2$ з частотою 85.84 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца



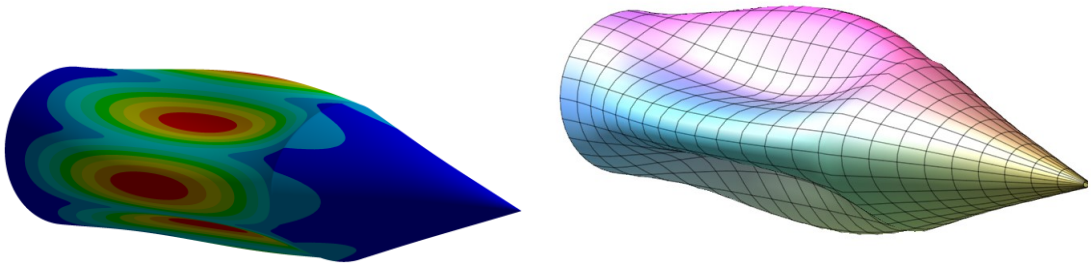
а. б.

Рисунок 5.4– Власна форма для $n = 2$ з частотою 145.65 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца



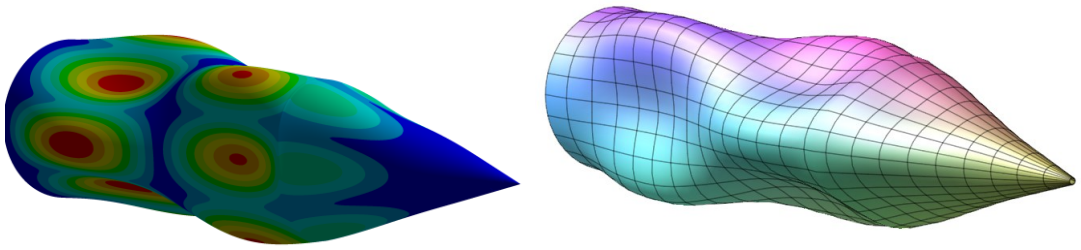
а. б.

Рисунок 5.5 – Власна форма для $n = 2$ з частотою 219.55 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца



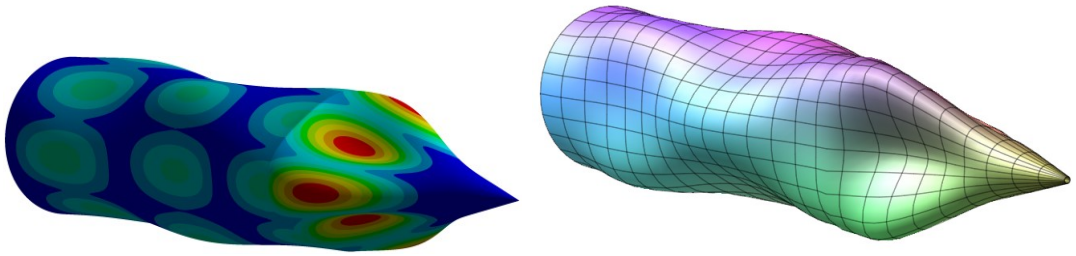
а. б.

Рисунок 5.6 – Власна форма для $n = 3$ з частотою 121.49 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца



а. б.

Рисунок 5.7 – Власна форма для $n = 3$ з частотою 171.07 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца



а. б.

Рисунок 5.8 – Власна форма для $n = 3$ з частотою 222.38 Гц: а. – результати скінченно-елементного аналізу; б. – результати аналізу методом Релея-Рітца

З рис. 5.3–5.8 видно, що метод Релея-Рітца коректно встановлює особливості власних форм оболонки.

Таким чином, результати аналізу власних форм складеної оболонки свідчать, що обраний метод дозволяє з необхідною точністю проводити розрахунки власної динаміки конструкції.

Було проведено аналіз динамічної стійкості описаної вище оболонки під дією надзвукового струму при різних параметрах струму. Розглядався діапазон значень числа Маха від 2 до 4.5. Кут атаки приймав значення 12°, 6°, 0°. Значення параметру n приймалось від 2 до 15. Кількість форм при розрахунку $N_f = 2$. Для побудови розкладень (5.10) застосовано власні форми коливань оболонки, отримані з параметром $N = 20$.

У табл. 5.2 наведено значення критичного тиску (МПа), при якому оболонка втрачає стійкість положення рівноваги, для різних значень M_* та n

при куті атаки $\beta = 12°$. Напівжирним шрифтом виділені значення $p_{\text{крит}}$, які є мінімальними для заданого M_*. Оболонка втрачає стійкість положення рівноваги при значеннях $p_\infty > p_{\text{крит}}$.

Таблиця 5.2 – Значення критичного тиску $p_{\text{крит}}$ [МПа] для різних значень M_*, n при $\beta = 12°$

		Число Маха M_*					
		2	2.5	3	3.5	4	4.5
Кількість хвиль в окружному напрямку n	2	2.124	1.830	1.479	1.173	1.009	0.901
	3	**1.988**	**1.683**	1.309	1.074	0.910	0.801
	4	2.640	2.000	**1.000**	**0.678**	0.537	0.453
	5	16.358	16.630	10.195	1.456	**0.487**	**0.345**
	6	40.781	43.681	36.794	25.466	10.286	0.498
	7	73.950	82.039	75.630	62.631	44.0378	23.051
	8	118.900	128.190	122.181	108.818	90.115	63.362
	9	171.100	184.468	181.585	167.399	143.859	114.638
	10	226.200	250.942	247.021	235.442	209.690	173.650
	11	295.800	328.154	323.026	307.885	283.831	243.918
	12	377.001	406.454	412.806	393.455	362.717	323.045
	13	452.400	501.882	509.725	485.831	463.058	412.411
	14	545.200	604.832	614.283	604.685	557.444	513.894
	15	661.200	712.857	723.996	712.683	679.276	626.208

На рис. 5.9 наведено залежність $p_{\text{крит}}(M_*)$ для $n = \{2, 3, 4, 5\}$. Видно, що при низьких значеннях M_* домінуючою є форма з $n = 3$. З підвищенням швидкості струменя її заміняє форма з $n = 4$, яку надалі заміняє форма з $n = 5$.

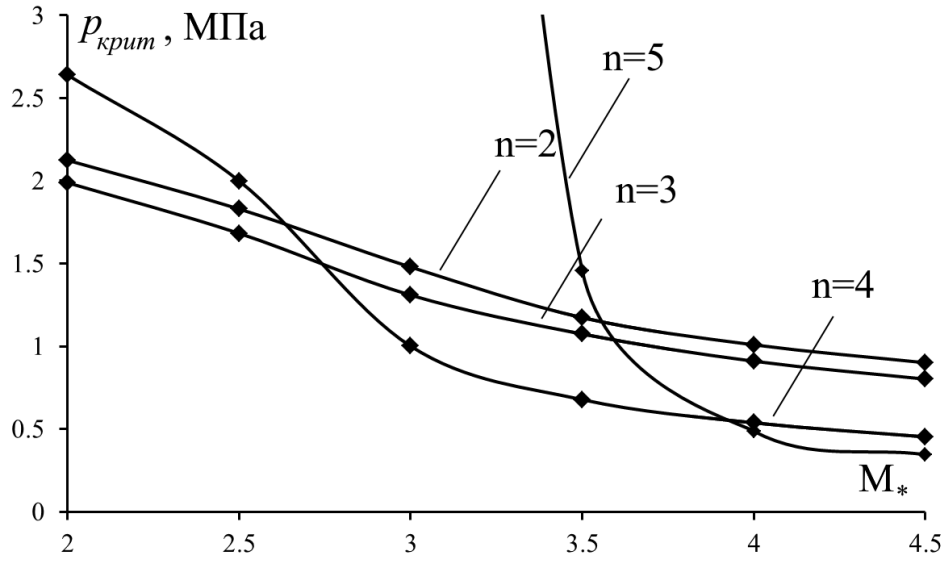


Рисунок 5.9 – Залежність $p_{\text{крит}}(M_*)$ при $\beta = 12°$

У табл. 5.3 наведено значення критичного тиску (МПа), при якому оболонка втрачає стійкість положення рівноваги, для різних значень M_* та n при куті атаки $\beta = 6°$. Напівжирним шрифтом виділені значення $p_{\text{крит}}$, які є мінімальними для заданого M_*.

Таблиця 5.3 – Значення критичного тиску $p_{\text{крит}}$ [МПа] для різних значень M_*, n при $\beta = 6°$

		Число Маха M_*					
		2	2.5	3	3.5	4	4.5
Кількість хвиль в окружному напрямку n	2	**2.764**	**2.548**	**2.031**	1.682	1.393	1.197
	3	3.535	3.259	2.190	**1.472**	**1.127**	0.933
	4	10.331	10.816	8.281	4.206	1.233	**0.704**
	5	28.275	31.368	28.918	24.851	18.251	11.122
	6	56.550	62.736	61.756	58.861	50.584	43.471
	7	97.150	107.777	106.093	104.435	96.276	88.755
	8	142.100	162.084	164.617	162.044	154.449	142.382
	9	200.100	221.987	232.393	228.762	225.187	214.632
	10	272.600	302.416	307.142	311.942	307.068	292.674
	11	342.200	379.629	397.424	403.634	397.328	378.703
	12	435.000	482.579	505.200	497.307	505.078	481.402
	13	522.000	579.095	606.240	615.713	606.093	596.622
	14	638.000	707.782	740.960	729.382	740.779	729.205
	15	730.800	833.569	872.643	886.279	872.431	858.799

На рис. 5.10 наведено залежність $p_{\text{крит}}(M_*)$ для $n = \{2, 3, 45\}$. Видно, що при низьких значеннях M_* домінуючою є форма з $n = 2$. З підвищенням швидкості струму її заміняє форма з $n = 3$, яку надалі заміняє форма з $n = 4$.

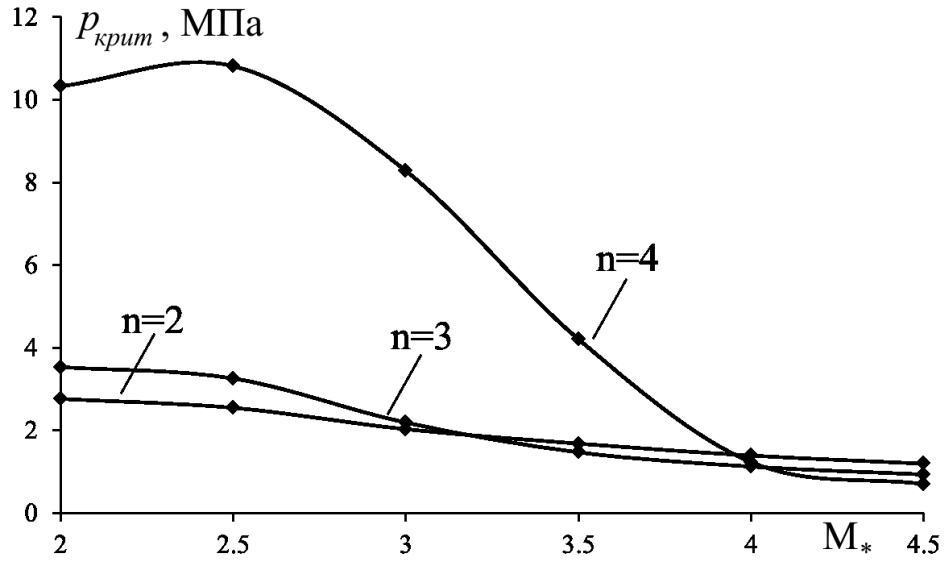


Рисунок 5.10 – Залежність $p_{\text{крит}}(M_*)$ при $\beta = 6°$

У табл. 5.4 наведено значення критичного тиску (МПа), при якому оболонка втрачає стійкість положення рівноваги, для різних значень M_* та n при куті атаки $\beta = 0°$. Напівжирним шрифтом виділені значення $p_{\text{крит}}$, які є мінімальними для заданого M_*.

Таблиця 5.4 – Значення критичного тиску $p_{\text{крит}}$ [МПа] для різних значень M_*, n при $\beta = 0°$

		Число Маха M_*					
		2	2.5	3	3.5	4	4.5
Кількість хвиль в окружному напрямку n	2	**3.897**	**3.836**	**3.417**	**2.936**	**2.432**	**2.014**
	3	7.069	7.401	6.592	5.047	3.391	2.067
	4	17.038	18.902	18.606	17.153	14.741	12.207
	5	36.975	42.175	42.835	42.165	40.189	38.305
	6	68.150	77.734	78.949	80.183	78.931	77.697
	7	113.100	121.937	127.653	129.648	131.674	129.617
	8	165.300	183.380	191.977	194.977	198.024	194.930

	9	226.200	250.942	262.705	266.810	270.980	275.214
	10	295.800	328.154	353.791	359.320	364.935	370.637
	11	377.000	418.235	450.910	457.956	465.112	472.380
	12	475.600	527.620	552.352	578.244	587.280	578.104
	13	568.400	630.569	679.833	690.456	701.245	712.202
	14	684.400	759.257	818.574	831.365	844.355	857.549
	15	800.400	912.957	955.753	970.687	985.854	1001.259

Всі значення критичного тиску при $M_* \in [2; 4.5]$ та $\beta = 0°$ реалізуються на формах з $n = 2$.

На рис. 5.11 наведено порівняння критичного тиску струму для різних кутів атаки. Видно, що зі збільшенням кута атаки критичний тиск знижувався.

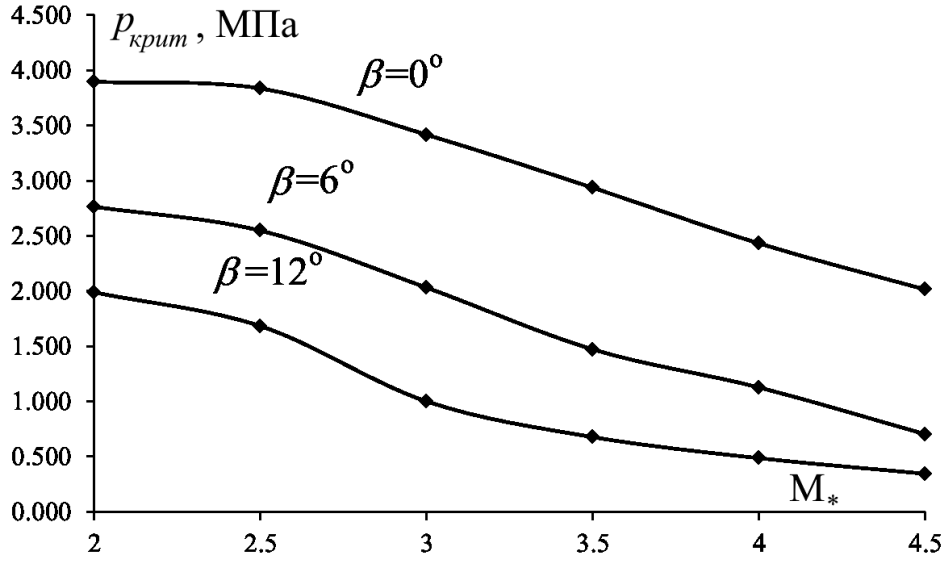


Рисунок 5.11 – Зв’язок між критичним тиском та кутом атаки

Висновки за розділом 5

Таким чином, запропоновано метод для аналізу втрати динамічної стійкості положенням рівноваги складеної тришарової коніко-циліндричної оболонки. Цей тип оболонок є практично значущим та моделює, зокрема, обтічники ракетокосмічної та авіаційної техніки. Запропоновано систему базисних функцій, яка автоматично задовольняє граничним умовам

закріплення оболонки та умовам безперервності переміщень на стику конічної та циліндричної оболонок.

Проведено аналіз власних коливань тришарової коніко-циліндричної оболонки методом Релея-Рітца. Власні форми та частоти оболонки порівняно з результатами скінченно-елементних розрахунків.

Проведено аналіз втрати динамічної стійкості для заданої оболонки при різних параметрах струму. Втрата динамічної стійкості відбувалася на формах з невеликою (2–5) кількістю хвиль у круговому напрямку. З підвищенням швидкості струму збуджувались форми з більшою кількістю хвиль у круговому напрямку. Збільшення кута атаки приводило до зменшення критичного тиску, що відрізняє складену оболонку від конічної, яку було розглянуто у розділі 4. Зі збільшенням швидкості струму критичний тиск зменшувався.

Результати, які описано в цьому розділі, було використано в публікаціях [4, 5, 15, 51, 52], які перелічено в Додатку А.

РОЗДІЛ 6

ВИМУШЕНА НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРИШАРОВОЇ ОБОЛОНКИ ПОДВІЙНОЇ КРИВИЗНИ ЗІ СТІЛЬНИКОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Оболонки подвійної кривизни є поширеними елементами автомобільних, будівельних, ракето-космічних конструкцій. Під час експлуатації на них впливають сили, які призводять до суттєвих деформацій оболонки. При цьому можуть виникати небезпечні режими коливань конструкції, для адекватного аналізу яких необхідно враховувати геометрично нелінійне деформування оболонки.

Розглядаються нелінійні вимушені коливання тришарової оболонки подвійної кривизни, ескіз якої зображено на рис. 2.3. Обшивки оболонки зроблено з вуглепластикового композиту. Середній шар оболонки є стільниковим заповнювачем, подібним до зображеного на рис. 3.15. Верхній, середній та нижній шари оболонки мають постійну товщину h_t, h_c, h_b відповідно. Нейтральні поверхні шарів є серединними.

Зв'яжемо з оболонкою криволінійну систему координат (x, y), де вісі спрямовані за напрямками головних кривин. Радіуси кривизни, що відповідають цим напрямкам, дорівнюють R_1 та R_2 і є константами. Вісь z (рис. 2.3) спрямована за нормаллю до серединної поверхні. Для опису переміщень точок оболонки введемо три поперечні вісі z_t, z_c, z_b, які є нормальними до серединних поверхонь її верхнього, середнього та нижнього шарів. Оболонкові координати змінюються в межах $x \in [0; b]$; $y \in [0; a]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, де a, b – довжина країв оболонки.

Обшивки оболонки є ортотропними та задовольняють закону Гука в наступній формі:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}^{(j)}\\ \sigma_{yy}^{(j)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12}\\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(j)}\\ \varepsilon_{yy}^{(j)}\end{bmatrix};$$

$$\sigma_{xy}^{(j)}=2\bar{C}_{66}\varepsilon_{xy}^{(j)};$$

$$\sigma_{xz}^{(j)}=2\bar{C}_{55}\varepsilon_{xz}^{(j)};$$

$$\sigma_{yz}^{(j)}=2\bar{C}_{44}\varepsilon_{yz}^{(j)};j=b,t, \qquad (6.1)$$

де $\sigma_{xx}^{(j)},\sigma_{yy}^{(j)},\sigma_{xy}^{(j)},\sigma_{xz}^{(j)},\sigma_{yz}^{(j)},\varepsilon_{xx}^{(j)},\varepsilon_{yy}^{(j)},\varepsilon_{xy}^{(j)},\varepsilon_{xz}^{(j)},\varepsilon_{yz}^{(j)};t,b$ – елементи тензорів напружень та деформацій обшивок.

Пружний відгук стільникового заповнювача враховується шляхом гомогенізації його властивостей [220]. Гомогенізований заповнювач має дві ортогональні площини симетрії. Закон Гука для гомогенізованого заповнювача має вигляд:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}^{(c)}\\ \sigma_{yy}^{(c)}\\ \sigma_{zz}^{(c)}\\ \sigma_{yz}^{(c)}\\ \sigma_{xz}^{(c)}\\ \sigma_{xy}^{(c)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(c)}\\ \varepsilon_{yy}^{(c)}\\ \varepsilon_{zz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{yz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)}\end{bmatrix}, \qquad (6.2)$$

де $\sigma_{xx}^{(c)},\sigma_{yy}^{(c)},\sigma_{zz}^{(c)},\sigma_{yz}^{(c)},\sigma_{xz}^{(c)},\sigma_{xy}^{(c)},\varepsilon_{xx}^{(c)},\varepsilon_{yy}^{(c)},\varepsilon_{zz}^{(c)},\varepsilon_{yz}^{(c)},\varepsilon_{xz}^{(c)},\varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензорів напружень та деформацій заповнювача.

Коливання конструкції описуються переміщеннями її шарів: $u_1^{(t)},u_2^{(t)},u_3^{(t)},u_1^{(c)},u_2^{(c)},u_3^{(c)},u_1^{(b)},u_2^{(b)},u_3^{(b)}$. Розглядаються оболонки помірної товщини, тому для дослідження деформованого стану конструкції застосовано теорії зсувних деформацій високого порядку [217, 218].

Розглядаються нелінійні коливання оболонки під дією зосередженої поздовжньої сили $F_0cos(\Omega t)$. Амплітуди коливань оболонки співставні з товщиною оболонки, тому застосовується модель геометрично нелінійних

деформацій оболонки. Динаміка оболонки описується нелінійною моделлю (див. розділ 2.1.2).

6.1 Аналіз вимушеної динаміки оболонки з урахуванням геометрично нелінійного деформування

6.1.1 Аналіз власних коливань оболонки

Для аналізу оболонки застосовується метод заданих форм (див. розділ 2.2). Вимушені коливання оболонки розкладаються за власними формами її лінійних коливань. Для пошуку цих форм використано метод Релея-Рітца [223]. Лінійні коливання шукаються у наступній формі:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x,y) \\ V_i(x,y) \\ W_i(x,y) \\ X_i(x,y) \\ Y_i(x,y) \end{bmatrix} \cos(\omega t)\,; i = b, c, t, \tag{6.3}$$

де ω – частота лінійних коливань;

$U_i(x,y), V_i(x,y), W_i(x,y), X_i(x,y), \quad Y_i(x,y)$ – невідомі функції, що задовольняють граничним умовам закріплення оболонки. Ці функції представляються в наступній формі:

$$U_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu j}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x)\, U_y^{(j)}(y);$$

$$V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\mu j}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x)\, V_y^{(j)}(y);$$

$$W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x)\, W_y^{(j)}(y);$$

$$X_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\mu j}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x)\, F_y^{(j)}(y);$$

$$Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\mu j}^{(f)} G_x^{(\mu)}(x)\, G_y^{(j)}(y), \qquad (6.4)$$

де $\mathbf{A} = \left(A_{t11}, A_{t12}, \dots, A_{bN_b^{(g)}L_b^{(g)}}\right)$ – вектор невідомих коефіцієнтів розмірності N_*, $N_* = \sum_{i=1}^{3} N_i^{(u)} L_i^{(u)} + N_i^{(v)} L_i^{(v)} + N_i^{(w)} L_i^{(w)} + N_i^{(f)} L_i^{(f)} + N_i^{(g)} L_i^{(g)}$;

$U_x^{(1)}(x), U_x^{(2)}(x), \dots, G_y^{\left(L_b^{(g)}\right)}(y)$ – базисні функції.

У вирази для потенційної (2.24) та кінетичної (2.25) енергій оболонки підставляються розкладення (6.4). При цьому у виразі для потенційної енергії враховуються лише квадратичні члени, оскільки проводиться аналіз лінійних коливань конструкції.

Для аналізу власних коливань застосовано принцип Гамільтона:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left(U_\Sigma - T_\Sigma\right) dt \to min, \qquad (6.5)$$

де U_Σ – лінеаризована потенційна енергія оболонки після підстановки (6.4);

T_Σ – кінетична енергія оболонки після підстановки (6.4);

$$U_\Sigma = \widetilde{U}(\mathbf{A}) cos^2(\omega t);$$

$$T_\Sigma = \omega^2 \widetilde{T}(\mathbf{A}) sin^2(\omega t), \qquad (6.6)$$

де функції $\widetilde{U}(\mathbf{A}), \widetilde{T}(\mathbf{A})$ є квадратичними формами відносно елементів вектору $\mathbf{A}$.

Після підстановки (6.6) у (6.5) та інтегрування, (6.6) зводиться до задачі:

$$\widetilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \widetilde{T}(\mathbf{A}) \to min. \tag{6.7}$$

Задачу мінімізації (6.7) розв'язано через наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\widetilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \widetilde{T}(\mathbf{A})\right] = 0; j = 1, \dots, N_*, \tag{6.8}$$

які зводяться до проблеми власних значень, що описує власну лінійну динаміку конструкції. Таким чином, знайдено власні частоти та форми коливань: власні значення задачі (6.8) є квадратами власних частот оболонки, а власні вектори в поєднанні з розкладеннями (6.3) відповідають її власним формам.

6.1.2 Побудова рівнянь руху

Наступним етапом аналізу є побудова рівнянь руху оболонки. Розглянемо нелінійні вимушені коливання конструкції. Вони відбуваються внаслідок дії періодичної поперечної зосередженої сили, яка прикладена в точці $x = x_0; y = y_0$. Ця сила описується формулою:

$$F = F_0 \cos(\Omega t)\, \delta(x - x_0, y - y_0), \tag{6.9}$$

де F_0, Ω – амплітуда та частота сили;

$\delta(x - x_0, y - y_0)$ дельта-функція.

Згідно з методом заданих форм, геометрично нелінійні вимушені коливання розкладаються за власними формами у вигляді:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_w(i-1)+j} W_{i,j}(x, y)\,;$$

$$\phi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 1}} q_{3N_w+N_{\phi 1}(i-1)+j} X_{i,j}(x,y);$$

$$\phi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 2}} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+N_{\phi 2}(i-1)+j} Y_{i,j}(x,y);$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+3N_{\phi 2}+N_u(i-1)+j} U_{i,j}(x,y);$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} q_{3N_w+3N_{\phi 1}+3N_{\phi 2}+3N_u+N_v(i-1)+j} V_{i,j}(x,y); i = 1,\dots,3, \qquad (6.10)$$

де $W_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}, U_{i,j}, V_{i,j}$ – власні форми коливань оболонки;

i – номер шару;

j – номер власної форми;

$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_*})$; $N_* = 3N_w + 3N_{\phi 1} + 3N_{\phi 2} + 3N_u + 3N_v$; – вектор узагальнених координат.

Для побудови рівнянь руху визначено віртуальну роботу зовнішньої сили:

$$\delta A = -\int_D F \delta w^{(1)} dxdy.$$

Узагальнені сили Q_j, які відповідають узагальненим координатам $q_j; j = 1, \dots, N_w$, мають вигляд:

$$Q_j = H_j \cos(\Omega t), \qquad (6.11)$$

де $H_j = -F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)$.

Розкладення (6.9) підставляються у вирази для кінетичної та потенційної енергій (2.25), (2.24). Таким чином, кінетична енергія стає квадратичною формою відносно узагальнених швидкостей $T_\Sigma = T_\Sigma(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_*})$. Після підстановки (6.9) у потенційну енергію, маємо:

$$U_\Sigma = U_\Sigma^{(2)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right) + U_\Sigma^{(3)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right) + U_\Sigma^{(4)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right), \qquad (6.12)$$

де $U_\Sigma^{(2)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right)$ – квадратичний поліном узагальнених координат;

$U_\Sigma^{(3)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right)$ – кубічний поліном узагальнених координат;

$U_\Sigma^{(4)}\left(q_1, \dots, q_{N_*}\right)$ – поліном узагальнених координат четвертого порядку.

Нарешті, рівняння руху системи побудовано в формі рівнянь Лагранжа II роду. У матричній формі вони мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}} \\ \mathbf{M_{21}} & \mathbf{M_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K_{11}} & \mathbf{K_{12}} \\ \mathbf{K_{21}} & \mathbf{K_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\ \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t), \qquad (6.13)$$

де $\mathbf{H} = \left[H_1, \dots, H_{N_w}, 0,0, \dots\right]$;

$\mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ – вектор-функції, що складаються з квадратичних поліномів узагальнених координат;

$\mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ – вектор-функції, що складаються з кубічних поліномів узагальнених координат.

6.1.3 Зниження розмірності моделі та перехід до безрозмірних координат

Внаслідок того, що обшивки оболонки є тонкими, а густина гомогенізованого заповнювача є малою, елементи матриць $\mathbf{M_{12}}, \mathbf{M_{22}}, \mathbf{M_{21}}$ є близькими до нуля. Це погіршує обчислювальну стійкість задачі, тому в

подальшому аналізі ці матриці вважаються нульовими. Тоді динамічна система (6.13) набуває форми:

$$\mathbf{M_{11}\ddot{q}_1} + \mathbf{K_{11}q_1} + \mathbf{K_{12}q_2} + \mathbf{\Re_1^{(2)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathbf{\Re_1^{(3)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = \mathbf{H}\cos(\Omega t);$$
$$\mathbf{K_{21}q_1} + \mathbf{K_{22}q_2} + \mathbf{\Re_2^{(2)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) + \mathbf{\Re_2^{(3)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = 0. \qquad (6.14)$$

Розглянемо друге матричне рівняння (6.14). Знехтувавши нелінійними членами, виразимо узагальнені координати $\mathbf{q_2}$ через $\mathbf{q_1}$:

$$\mathbf{q_2} = \mathbf{Rq_1}; \mathbf{R} = -\mathbf{K_{22}^{-1}K_{21}}. \qquad (6.15)$$

Підстановка (6.15) у друге рівняння (6.14) дозволяє отримати наступне уточнене співвідношення:

$$\mathbf{q_2} = \mathbf{Rq_1} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1}), \qquad (6.16)$$

де $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q_1}) = -\mathbf{K_{22}^{-1}}\left[\mathbf{\Re_2^{(2)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{Rq_1}) + \mathbf{\Re_2^{(3)}}(\mathbf{q_1}, \mathbf{Rq_1})\right]$.

Підстановка (6.16) у перше матричне рівняння (6.14) дозволяє отримати наступну систему диференційних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N_1} m_{ij}\ddot{q}_j + \beta_i\dot{q}_i + \sum_{j=1}^{N_1} K_{ij}q_j + \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} q_\nu q_j + \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{j_1=1}^{j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} q_\nu q_j q_{j_1} = H_i\cos(\Omega t), \qquad (6.17)$$

де $N_1 = \dim(\mathbf{q_1})$;

m_{ij} – елементи матриці мас;

$\alpha_{\nu j}^{(i)}, \beta_{\nu j j_1}^{(i)}$ – коефіцієнти при нелінійних членах системи;

$K_{11}^{(\Sigma)} = \{K_{ij}\}$ – матриця жорсткості, яка визначається наступним чином:

$$\mathbf{K_{11}^{(\Sigma)}} = \mathbf{K_{11}} - \mathbf{K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}}.$$

Проведемо обезрозмірювання змінних для подальшого розв'язку:

$$\vartheta_j = \frac{q_j}{h_c};\ \tau = \omega_1 t;\ \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_1}; \tag{6.18}$$

$$\tau_1 = \bar{\Omega}\tau;$$

$$\bar{m}_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_0};\ \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i}{m_0\omega_1^2};\ \bar{K}_{ij} = \frac{K_{ij}}{m_0\omega_1^2};\ \bar{\alpha}_{\nu j}^{(i)} = \frac{\alpha_{\nu j}^{(i)} h_c}{m_0\omega_1^2};$$

$$\bar{\beta}_{\nu j j_1}^{(i)} = \frac{\beta_{\nu j j_1}^{(i)} h_c^2}{m_0\omega_1^2};\ \ \bar{H}_i = \frac{H_i}{m_0\omega_1^2 h_c} = \frac{F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)}{m_0\omega_1^2 h_c} = \bar{F}_0 W_{1,j}(x_0, y_0)\ ;$$

$$m_0 = \rho_c h_c ab,$$

де ω_1 – перша власна частота конструкції.

У безрозмірних змінних остаточно система (6.17) має вигляд:

$$\bar{\Omega}^2 \sum_{j=1}^{N_1} \bar{m}_{ij}\vartheta_j'' + \bar{\Omega}\bar{\beta}_i\vartheta_j' + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{K}_{ij}\vartheta_j + \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu} \bar{\alpha}_{\nu j}^{(i)}\,\vartheta_\nu\vartheta_j +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{j_1=1}^{j} \bar{\beta}_{\nu j j_1}^{(i)}\,\vartheta_\nu\vartheta_j\vartheta_{j_1} = \bar{H}_i cos(\tau_1), \tag{6.19}$$

де $\bar{\mathbf{M}} = \{\bar{m}_{ij}\}$.

Отримана система звичайних диференційних рівнянь є моделлю, яка використовується для аналізу нелінійної динаміки оболонки.

6.2 Результати чисельного аналізу

Розглядаються оболонки з гексагональним заповнювачем (рис. 3.15), який зроблено методом FDM-друку з матеріалу ULTEM 9085. Геометричними параметри комірки заповнювача є l_1, l_2, h_c, ψ, l_c, де h_c – товщина стінки заповнювача, l_c – товщина шару заповнювача, а інші параметри зображено на рис. 3.15. Розглядається заповнювач з параметрами:

$$l_1 = 6.1054 \text{ мм}; l_2 = 3.0527 \text{ мм}; \theta = 60^\circ; l_c = 10 \text{ мм}; \bar{h}_c = 0.4 \text{ мм}. \tag{6.20}$$

Його гомогенізовані властивості є наступними:

$$E_{11} = 2.91 \text{ МПа}; E_{22} = 2.91 \text{ МПа}; E_{33} = 215.10 \text{ МПа}; \nu_{12} = 0.972;$$
$$\nu_{23} = 0.0051; \nu_{13} = 0.0042; G_{12} = 1.118 \text{ МПа}; G_{23} = 39.1 \text{ МПа};$$
$$G_{13} = 39.1 \text{ МПа}; \rho_c = 253.189 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (6.21)$$

Обшивки оболонки зроблено з вуглепластикового композиту, який задовольняє закону Гука. Механічні властивості цього матеріалу є наступними:

$$E_x = 160 \text{ ГПа}; E_y = 6.8 \text{ ГПа}; \nu_{xy} = 0.32; \nu_{yx} = 0.0136;$$
$$G_{xy} = 800 \text{ ГПа}; G_{xz} = G_{yz} = 4 \text{ ГПа}; \rho_t = \rho_b = 1400 \, {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}. \quad (6.22)$$

Позначимо контур оболонки ∂D. Розглядаються оболонки, защемлені по контуру, для них граничні умови закріплення мають вигляд:

$$u^{(i)}\big|_{\partial D} = v^{(i)}\big|_{\partial D} = w^{(i)}\big|_{\partial D} = \phi_1^{(i)}\Big|_{\partial D} = \phi_2^{(i)}\Big|_{\partial D} = 0; i = t, c, b. \quad (6.23)$$

В цих умовах проведено аналіз вимушених коливань для сферичної оболонки та оболонки в формі гіперболічного параболоїда.

6.2.1 Вимушені коливання сферичної оболонки

Оболонка має вигляд, який наведено на рис. 2.3. Її геометричні параметри є наступними:

$$a = 0.22 \text{ м}; b = 0.33 \text{ м}; R_1 = R_2 = 1 \text{ м};$$
$$h_t = h_b = 10^{-3} \text{ м}; h_c = 10^{-2} \text{ м}. \quad (6.24)$$

Для застосування методу Релея-Рітца обираються базисні функції розкладення (6.3), що задовольняють умовам (6.23). Ці функції мають вигляд:

$$U_y^{(\mu)} = V_y^{(\mu)} = W_y^{(\mu)} = F_y^{(\mu)} = G_y^{(\mu)} = sin\left(\frac{\mu\pi y}{a}\right);$$

$$U_x^{(\mu)} = V_x^{(\mu)} = W_x^{(\mu)} = F_x^{(\mu)} = G_x^{(\mu)} = sin\left(\frac{\mu\pi x}{b}\right).$$

Кількість базисних функції в розкладеннях (6.4) приймається однаковою для всіх розкладень: $N_i^{(u)} = L_i^{(u)} = N_i^{(v)} = L_i^{(v)} = N_i^{(w)} = L_i^{(w)} = N_i^{(f)} = L_i^{(f)} = N_i^{(g)} = L_i^{(g)}$. У табл. 6.1 наведені результати аналізу збіжності власних частот. Передостанній рядок таблиці містить результати оцінки власних частот методом скінченних елементів, а останній – похибку оцінки методом Релея-Рітца при $N_i^{(u)} = 9$. З таблиці можна зробити висновок, що власні частоти, які отримано різними методами, є близькими.

Таблиця 6.1 – Результати обчислення власних частот

$N_i^{(u)}$	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
5	1748	1964	2396	2581	2869	3423	3502	3988	4660
6	1722	1935	2369	2389	2789	3087	3288	3335	3703
7	1715	1900	2308	2352	2719	3000	3057	3254	3650
8	1702	1885	2289	2300	2696	2965	2972	3192	3549
9	1700	1871	2268	2277	2654	2891	2957	3152	3530
FEM	1667	1808	2192	2218	2591	2842	2861	3041	3471
δ	0.019	0.03	0.03	0.026	0.024	0.017	0.03	0.036	0.017

У табл. 6.2 наведено результати аналізу залежності власних частот сферичної оболонки від її радіусу кривизни. При зменшенні радіусу кривизни власні частоти оболонки зростають внаслідок зростання жорсткості оболонки. На рис. 6.1 наведено залежність перших двох власних частот від радіусу кривизни оболонки. Видно, що залежність власних частот від радіусу кривизни є близькою до лінійної.

Таблиця 6.2 – Залежність власних частот сферичної оболонки від радіусу її кривизни $R_1 = R_2$, м

$R_1 = R_2$, м	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
1.0	1700	1871	2268	2277	2654	2891	2957	3152	3530
0.9	1808	1931	2308	2376	2717	2909	3042	3181	3592
0.8	1937	2009	2359	2519	2802	2935	3158	3222	3639
0.7	2080	2112	2456	2712	2919	2976	3281	3320	3656
0.6	2214	2247	2652	2983	3046	3085	3369	3554	3685

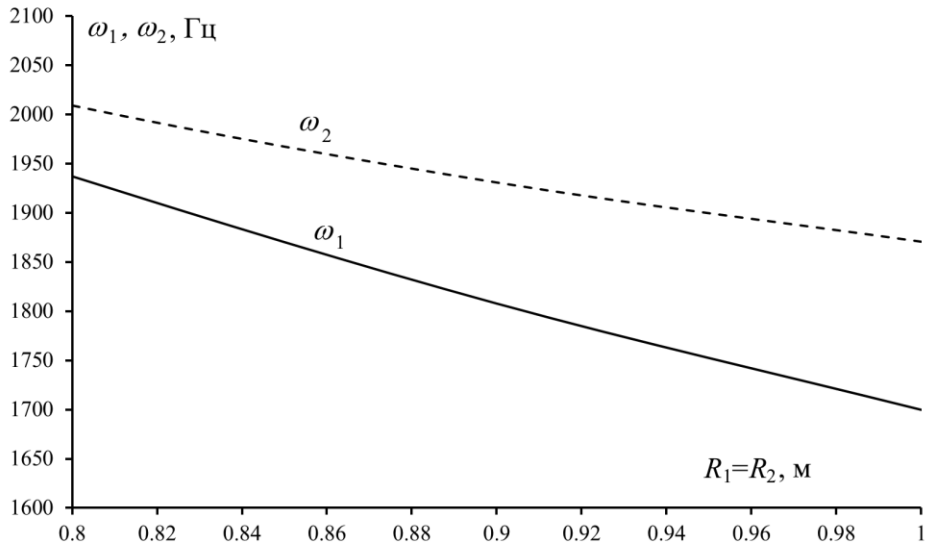


Рисунок 6.1 – Залежність перших двох власних частот від радіусу кривизни сферичної оболонки $R_1 = R_2$, м

Перейдемо до аналізу вимушених нелінійних коливань сферичної тришарової оболонки. Досліджено вимушені коливання поблизу головного резонансу конструкції з радіусом кривизни $R_1 = R_2 = 1$ м. Ці коливання описуються системою звичайних нелінійних диференційних рівнянь (6.19). Кількість членів в розкладеннях (6.10) дорівнює $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 2$. Таким чином, динамічна система має $N_* = 30$ ступенів свободи. Редукована динамічні система (6.19) має 6 ступенів свободи.

Розглядаються вимушені коливання конструкції, власні частоти якої наведено в табл. 6.2. Амплітуда зовнішньої сили дорівнює $\bar{F}_0 = 0.003$. Горизонтальну силу прикладено в точці $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$.

Для аналізу частотного відгуку системи застосовується метод пристрілки сумісно з методом продовження за параметром [224, 225] (див. розділ 2.3). Отримані періодичні розв'язки (6.19) $\vartheta_j(\tau_1); j = 1, \ldots, 6$ розкладаються в ряд Фур'є. Як свідчить гармонійний аналіз, періодичні коливання поблизу головного резонансу є близькими до моногармонійного руху з домінантною першою гармонікою. Результати аналізу вимушених коливань наведено на рис. 6.2, де показано зв'язок першої гармоніки періодичних розв'язків $\vartheta_1(\tau_1)$ з безрозмірною частотою $\bar{\Omega}$. Стійкі та нестійкі розв'язки показано суцільною та пунктирною лініями. Таким чином, частотний відгук, який зображено на рис. 6.2, має жорстку поведінку.

Збіжність періодичних розв'язків, які наведено на рис. 6.2, досліджено шляхом їхнього порівняння з розв'язками системи (6.19) при $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 3$. У цьому випадку система (6.13) має 45 ступенів свободи, а редукована система (6.19) – дев'ять. Проведено нелінійний аналіз та отримано серію розв'язків, які наведено на рис. 6.2 маркерами. Розв'язки, які отримано з різною кількістю членів в розкладеннях (6.10), є близькими.

Значення поперечного переміщення $w^{(i)}$, що відповідає значенням $\vartheta_1 \sim 12$, є малими. Власні форми характеризуються малою амплітудою цієї змінної $\max(W_{i,j}) \sim 0.01$, тому оцінка амплітуди переміщення $w^{(i)}$ дорівнює $w^{(i)} \sim 0.12h_c$. Ця особливість зберігається для всіх знайдених частотних відгуків.

Проведено аналіз впливу радіусу кривизни оболонки на нелінійні коливання. На рис. 6.3 та 6.4 показано результати цього аналізу. Рис. 6.3 містить два частотні відгуки, що відповідають $R_1 = R_2 = 1$ та $R_1 = R_2 = 0.8$. Рис. 6.4 містить два частотні відгуки, що відповідають $R_1 = R_2 = 0.8$ та $R_1 = R_2 = 0.6$. Вісь ординат на рис. 6.3 та 6.4 показує амплітуди перших

гармонік періодичних розв'язків $\vartheta_1(\tau_1)$. З рисунків видно, що при зниженні радіусу кривизни конструкція стає жорсткішою, і резонансні частоти $\bar{\Omega}$ підвищуються, при цьому амплітуда резонансних періодичних коливань знижується.

Якісна картина частотного відгуку поблизу головного резонансу не залежить від радіусу кривизни оболонки.

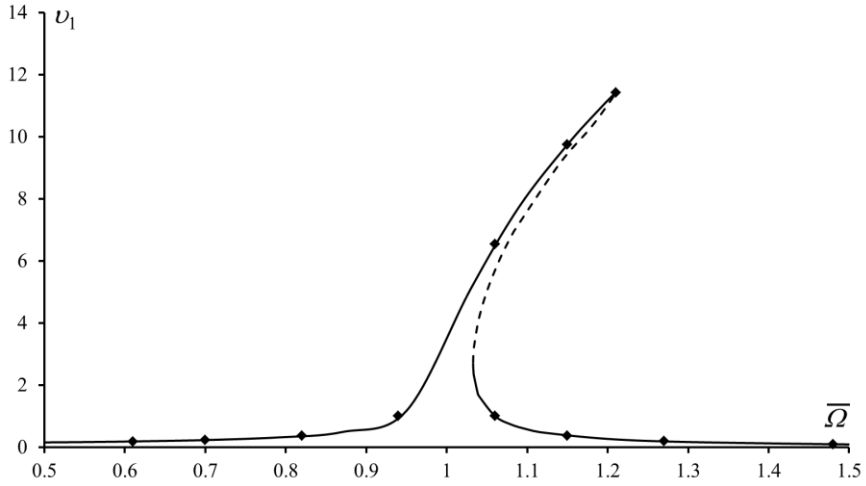


Рисунок 6.2 – Частотний відгук сферичної оболонки при $R_1 = R_2 = 1$

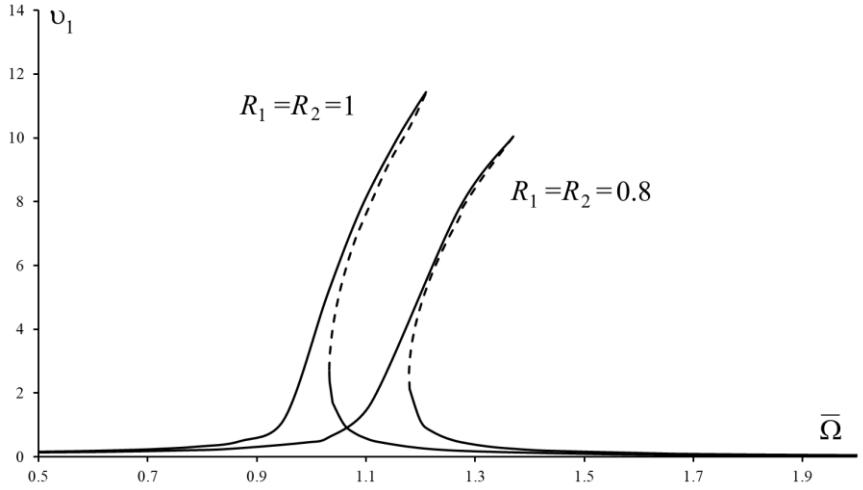


Рисунок 6.3 – Частотні відгуки сферичної оболонки при $R_1 = R_2 = 1$ та $R_1 = R_2 = 0.8$

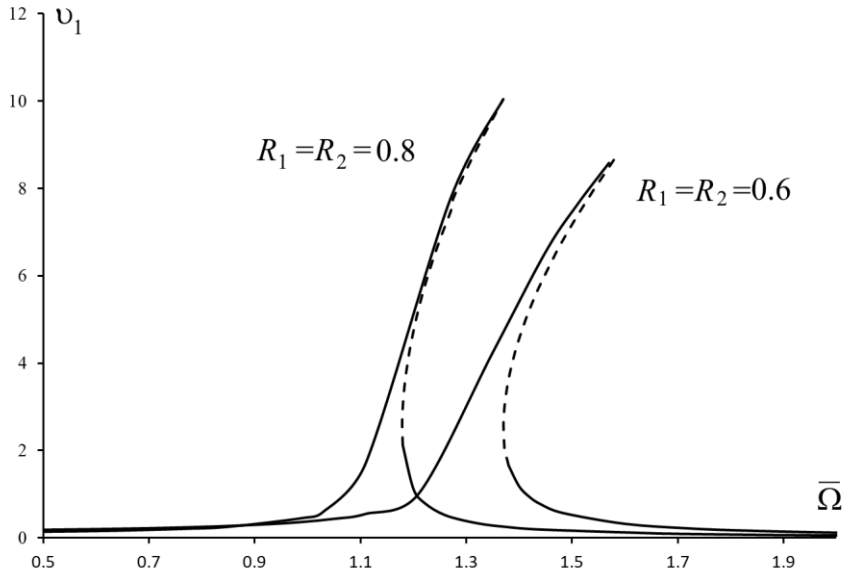


Рисунок 6.4 – Частотні відгуки сферичної оболонки при $R_1 = R_2 = 0.8$ та $R_1 = R_2 = 0.6$

Таким чином, проведено аналіз коливань тришарової сферичної оболонки під дією періодичної зосередженої сили. Знайдено режими коливань, що характеризуються великою амплітудою. Амплітудно-частотна характеристика коливань оболонки є жорсткою, а при зменшенні радіусу кривизни зміщується праворуч.

6.2.2 Оболонка в формі гіперболічного параболоїда $\left({R_1}/{R_2} = -1\right)$

Оболонка в формі гіперболічного параболоїда характеризується співвідношенням $R_1 = -R_2$. Розглядається конструкція з геометричними параметрами (39) та $R_1 = -R_2 = 1$. Ескіз оболонки наведено на рис. 6.5.

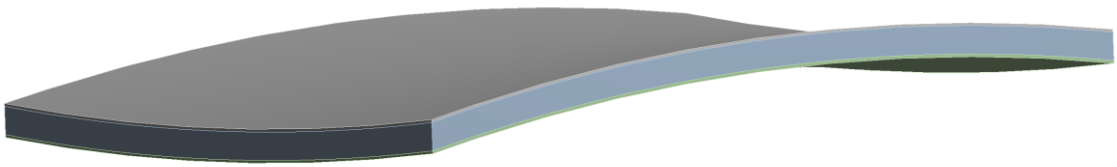


Рисунок 6.5 – Ескіз оболонки в формі гіперболічного параболоїда

Знайдено власні частоти оболонки та проведено аналіз їхньої збіжності в залежності від кількості членів розкладення. Результати цього аналізу наведено в табл. 6.3. Передостанній рядок таблиці містить результати оцінки власних частот методом скінченних елементів, а останній – похибку оцінки методом Релея-Рітца при $N_i^{(u)} = 9$. З табл. 6.3 видно, що результати, які отримано різними методами, є близькими.

Таблиця 6.3 – Збіжність власних частот

$N_i^{(u)}$	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
8	1617	1838	2211	2271	2613	2914	2962	3146	3465
9	1615	1824	2180	2260	2570	2881	2906	3104	3446
10	1607	1815	2176	2223	2562	2856	2868	3073	3389
11	1606	1808	2158	2219	2534	2825	2853	3046	3380
FEM	1573	1752	2089	2104	2424	2676	2706	2894	3283
δ	0.02	0.03	0.03	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.03

Аналіз зв’язку власних частот від радіусу кривизни свідчить, що зі зростанням радіусу кривизни власні частоти та жорсткість оболонки зменшуються. Результати аналізу наведено у табл. 6.4. Рис. 6.6 показує зв’язок перших двох власних частот від радіусу кривизни оболонки. Видно, що лінійний характер залежності, який демонструвала сферична оболонка, порушується для гіперболічного параболоїда.

Таблиця 6.4 – Залежність власних частот гіперболічного параболоїда від радіусу кривизни

$R_1 = -R_2$, м	ω_1, Гц	ω_2, Гц	ω_3, Гц	ω_4, Гц	ω_5, Гц	ω_6, Гц	ω_7, Гц	ω_8, Гц	ω_9, Гц
1	1606	1808	2158	2219	2535	2825	2853	3046	3380
0.9	1699	1861	2249	2250	2582	2842	2929	3067	3424

0.8	1808	1929	2298	2370	2644	2866	3033	3096	3485
0.7	1927	2018	2391	2532	2730	2905	3140	3178	3542
0.6	2039	2133	2567	2751	2848	2971	3214	3388	3569

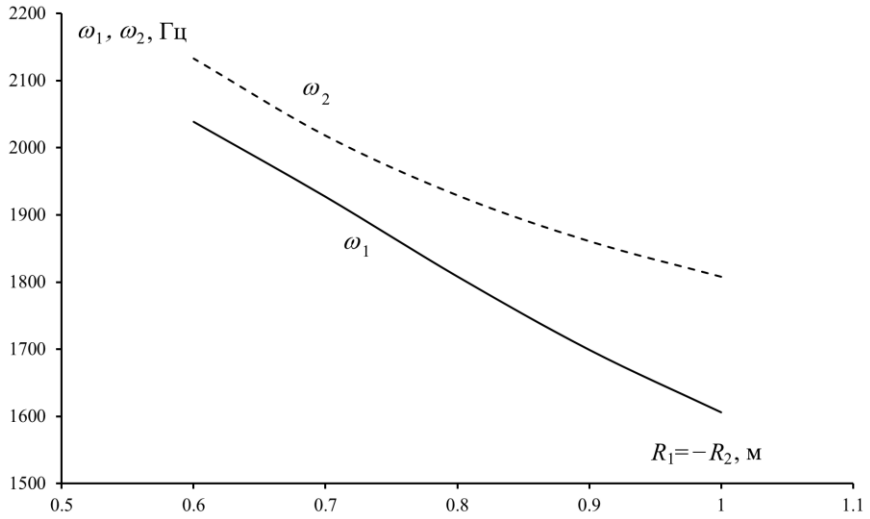


Рисунок 6.6 – Зв’язок між першими двома власними частотами та радіусом кривизни оболонки

За описаною в цьому розділі методикою досліджено вимушені нелінійні коливання защемленої по контуру оболонки в формі гіперболічного параболоїда. У розкладеннях (6.10) було прийнято однакову кількість членів в різних розкладеннях $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 2$. Динамічна система (6.13) містить 30 ступенів свободи, а редукована система (6.19) – шість. Аналіз частотного відгуку проведено методом пристрілки в поєднанні з методом продовження за параметром [224, 225] при амплітуді зовнішньої сили $\bar{F}_0 = 0.003$, яку застосовано в точці $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$. Результати цього аналізу наведено на рис. 6.7 для радіусів кривизни $R_1 = -R_2 = 0.6$ та $R_1 = -R_2 = 0.8$. Вздовж вісі ординат показано першу гармоніку коливань $\vartheta_1(\tau_1)$. Резонансні коливання конструкції є близькими до моногармонійних. Домінує перша гармоніка ряду Фур’є. Зі зниженням радіусу кривизни частотний відгук зсувається праворуч та зменшується за амплітудою. Частотні відгуки (рис. 6.7) мають жорсткий характер.

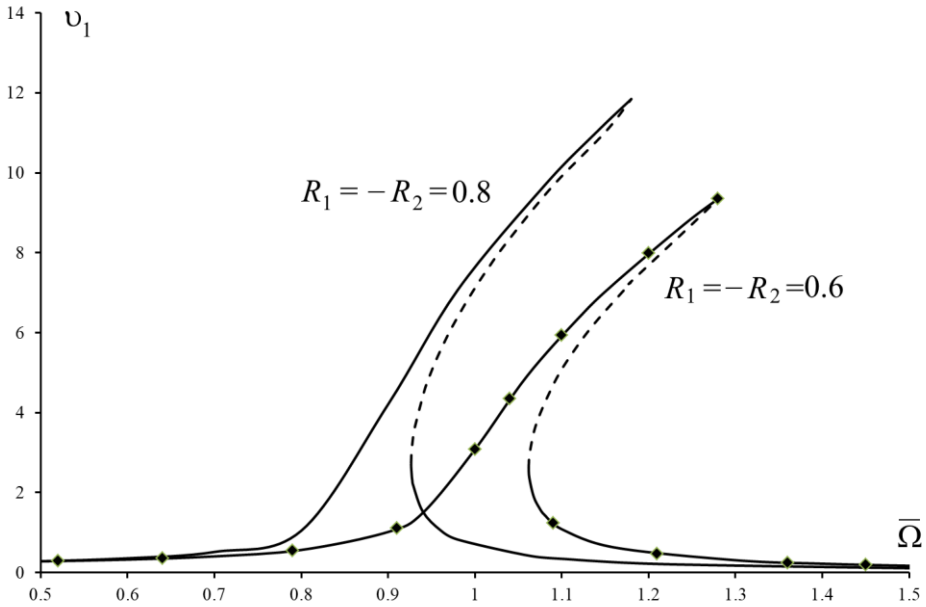
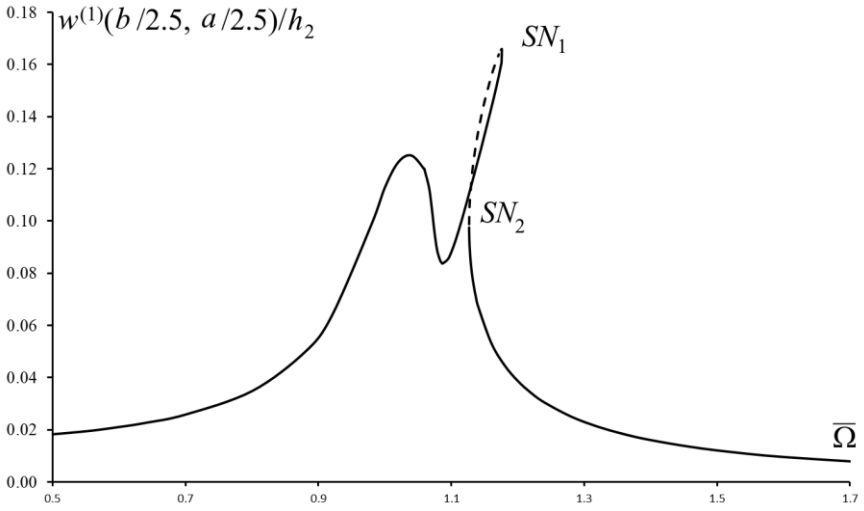


Рисунок 6.7 – Частотний відгук гіперболічного параболоїда при $R_1 = -R_2 = 0.8$ та $R_1 = -R_2 = 0.6$

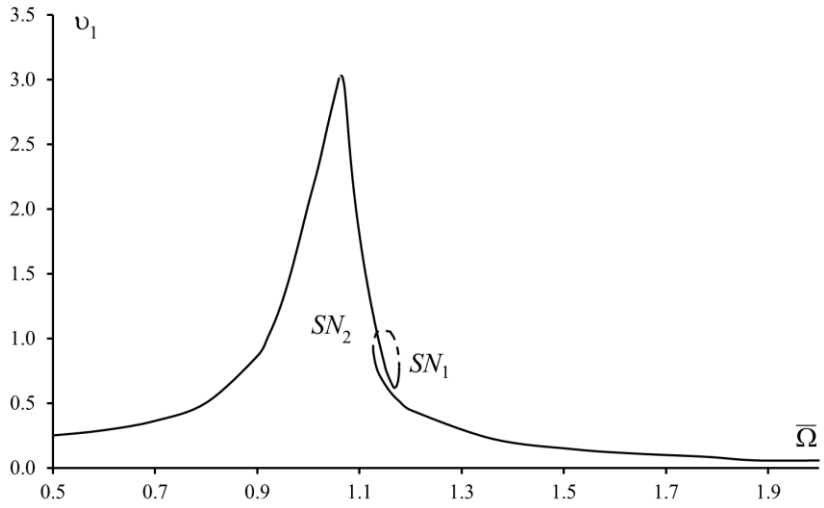
Додатково проведено аналіз збіжності отриманих розв'язків для конструкції з $R_1 = -R_2 = 0.6$. Для цього використано розкладення (6.10) з параметрами $N_w = N_{\phi 1} = N_{\phi 2} = N_u = N_v = 3$. При цьому динамічна система (6.13) має 45 ступенів свободи, а редукована система (6.19) – дев'ять. Результати аналізу частотного відгуку системи наведено на рис. 6.7 маркерами. Видно, що результати, які отримано за моделями з різною кількістю ступенів свободи, є близькими.

Було проведено аналіз нелінійних вимушених коливань оболонки з радіусами кривизни $R_1 = -R_2 = 0.6$ м за умови дії поперечної зосередженої сили амплітудою $F_0 = 0.009$ в точці $(x_0, y_0) = (b, a)/3$. На рис. 6.8 показано результати аналізу нелінійних вимушених коливань. На рис. 6.8а наведено залежність поперечного переміщення верхньої обшивки $w^{(1)}$ в точці $(x_0, y_0) = (b, a)/2.5$ від частоти зовнішньої сили. Частотний відгук містить дві седловузлові біфуркації SN_1 та SN_2. На частотному відгуку видно два екстремуми, що свідчить про те, що спостерігаються два резонанси в малому діапазоні частоти зовнішньої сили. Це пояснюється наявністю внутрішнього резонанса $\omega_1 = 2038.74$ Гц та $\omega_2 = 2132.98$ Гц (табл. 6.4). На рис. 6.8б та

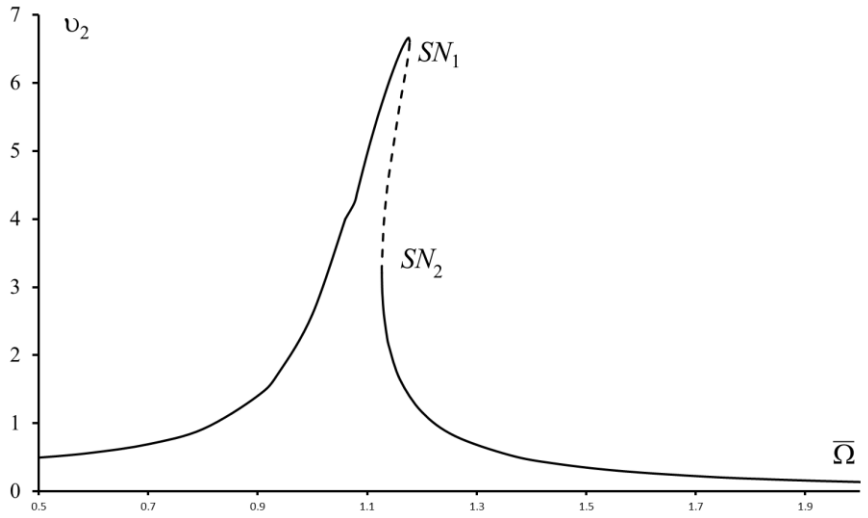
6.8в наведено частотні відгуки першої гармоніки ряду Фур'є $\vartheta_1(\tau_1)$ та $\vartheta_2(\tau_1)$. Переміщення $w^{(1)}$ є зваженою суперпозицією $\vartheta_1(\tau_1)$ та $\vartheta_2(\tau_1)$, що і призводить до двох резонансів на рис. 6.8а.



а.



б.



в.

Рисунок 6.8 – Частотний відгук оболонки при $F_0 = 0.009$;
а. –залежність $w^{(1)}(b/2.5\,;a/2.5)/h_c$; б. – залежність першої гармоніки ϑ_1; в. – залежність першої гармоніки ϑ_2

Зміна амплітуди зовнішньої сили ($F_0 = 0.09$) приводить до якісної зміни частотного відгуку. На рис. 6.9 наведено залежність амплітуди першої гармоніки $w^{(1)}(\frac{b}{2.5};\frac{a}{2.5})/h_c$ від безрозмірної частоти. На рис. 6.10 показано стійкі періодичні коливання $\vartheta_1(\tau_1)$ при $\bar{\Omega} = 0.643$. З рис. 6.10 видно, що коливання є мультигармонійними.

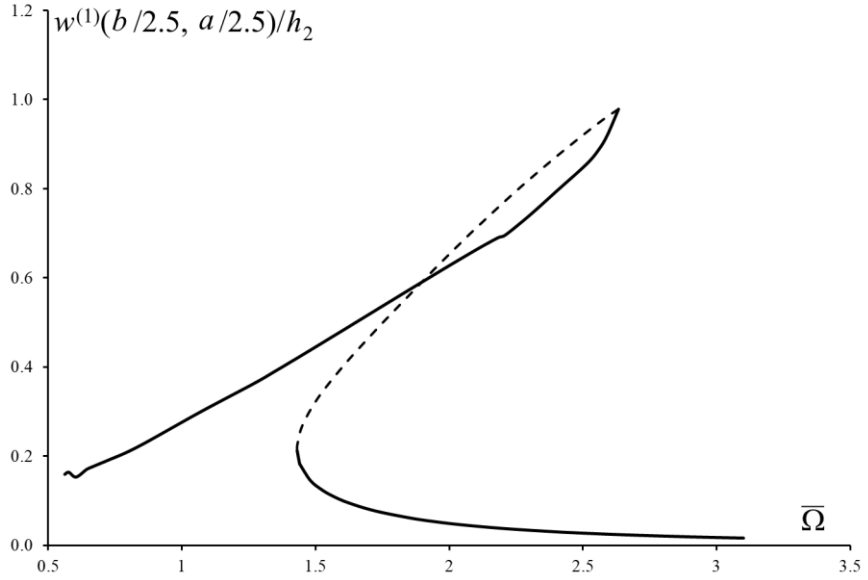


Рисунок 6.9 – Частотний відгук оболонки при $R_1 = -R_2 = 0.6$ м та $F_0 = 0.09$

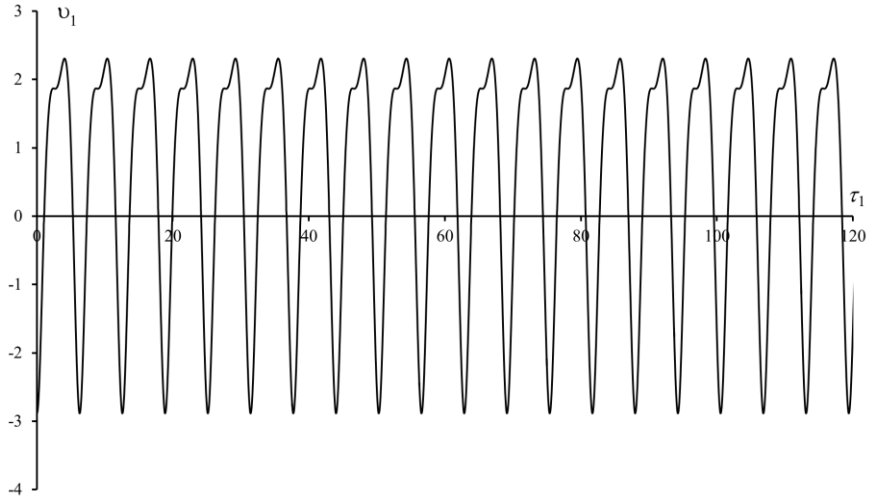


Рисунок 6.10 – Вимушені періодичні коливання $\vartheta_1(\tau_1)$ при $\bar{\Omega} = 0.643$

Розглянемо періодичні коливання, які виникають при субгармонійному резонансі зовнішньої сили з власними частотами оболонки. Такий резонанс описується умовою: $\bar{\Omega} = 2\bar{\omega}_1 + \varepsilon\sigma$,

де $\bar{\omega}_1$ – перша власна частота конструкції;

$0 < \varepsilon \ll 1$ – малий параметр;

σ – розстройка.

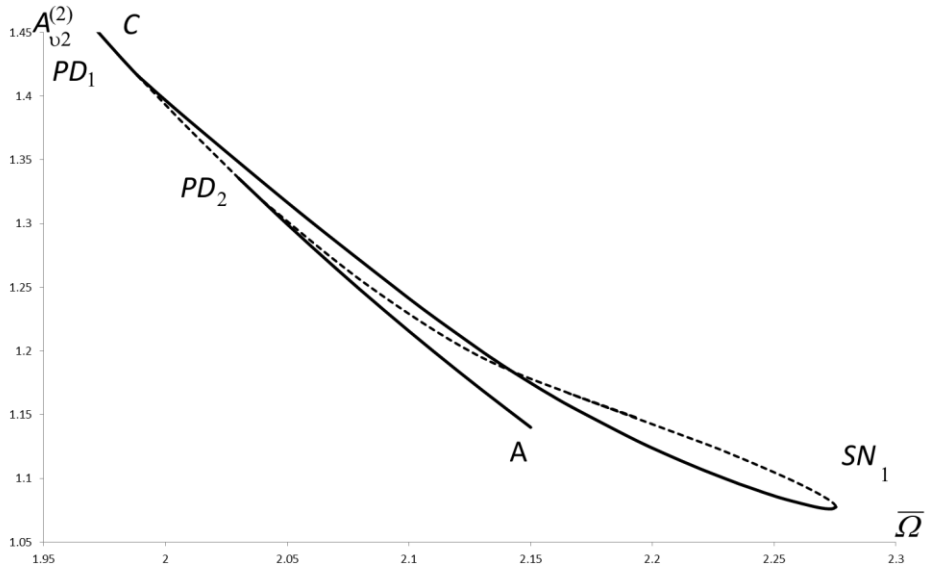
Проведено чисельний аналіз біфуркаційної поведінки конструкції, частотний відгук якої наведено на рис. 6.9. Застосовано поєднання методу пристрілки та продовження за параметром. Знайдені частотні відгуки наведено на рис. 6.11 та 6.12. На рис. 6.11а, 6.12а наведено залежність других гармонік субгармонійних коливань $\vartheta_2(\tau_1)$, $\vartheta_1(\tau_1)$ від частоти $\bar{\Omega}$. Крива (АС) на рис. 6.11а описує гармонійні періодичні коливання поблизу головного резонансу. Ці коливання проходять дві біфуркації подвоєння періоду PD_1 та PD_2. В результаті виникають субгармонійні режими другого порядку. Такі розв'язки показано суцільною лінією між точками біфуркацій PD_1 та SN_1. Гілка субгармонійних режимів проходить через седловузлову біфуркацію SN_1, внаслідок чого стійкі субгармонійні коливання стають нестійкими. Ці режими показано пунктирною лінією між точками біфуркацій SN_1 та PD_2. Ця нестійка гілка субгармонійних коливань з'єднується з гілкою гармонійних

режимів в точці біфуркації подвоєння періоду PD_2. Нестійкі гармонійні коливання стають стійкими.

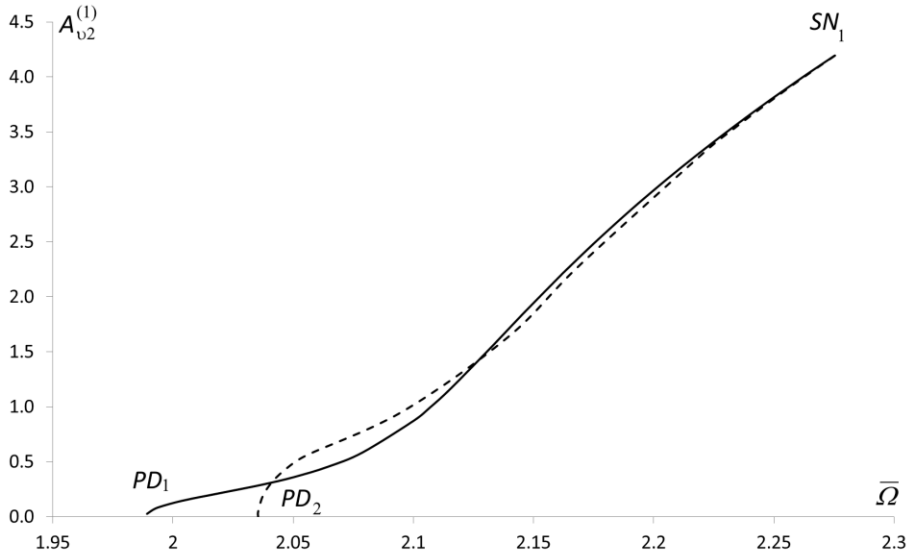
Розглянуті субгармонійні коливання є мультигармонійними. Амплітуди перших гармонік $\vartheta_2(\tau_1)$ та $\vartheta_1(\tau_1)$ наведено на рис. 6.11б та 6.12б. З рис. 6.11, 6.12 видно, що перші гармоніки мають набагато більші амплітуди, ніж другі. Наприклад, на рис. 6.13 наведено субгармонійне коливання другого порядку $\vartheta_2(\tau_1)$.

В розглянутій системі не спостерігалося нескінченної послідовності біфуркацій подвоєння періоду, що призводила б до хаотичних коливань.

Супергармонійних режимів коливань не було знайдено в розглянутій системі.

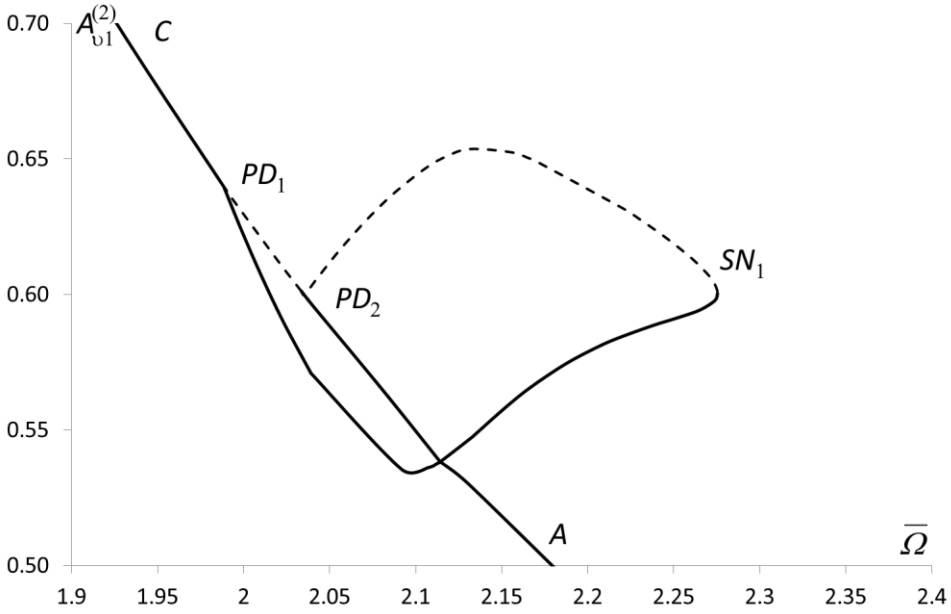


а.

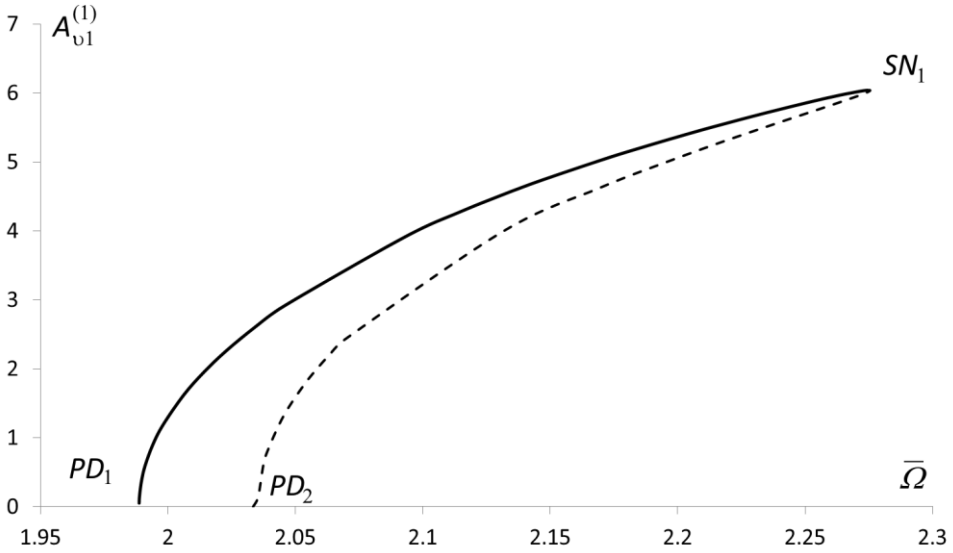


б.

Рисунок 6.11 – Частотний відгук гармонік Фур'є координати $\vartheta_2(\tau_1)$; а. – друга гармоніка ряду Фур'є $A^{(2)}_{\theta 2}$; б. – перша гармоніка ряду Фур'є $A^{(1)}_{\theta 2}$



а.



б.

Рисунок 6.12 – Частотний відгук гармонік Фур'є координати $\vartheta_1(\tau_1)$; а. – друга гармоніка ряду Фур'є $A_{\theta 1}^{(2)}$; б. – перша гармоніка ряду Фур'є $A_{\theta 1}^{(1)}$

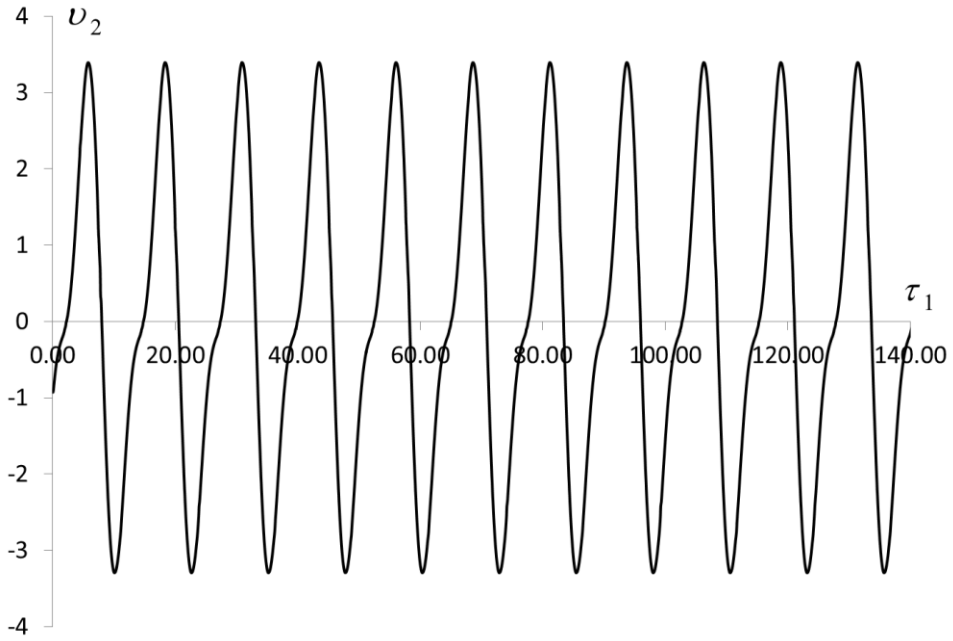


Рисунок 6.13 – Субгармонійні коливання другого порядку при частоті зовнішньої сили $\bar{\Omega} = 2.187$

Висновки за розділом 6

На підставі отриманих у розділі результатів можна зробити такі висновки:

– Запропоновано нову математичну модель нелінійних коливань тришарової оболонки подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем. Деформований стан конструкції описується за допомогою теорії зсуву високого порядку. Динамічна поведінка кожного шару описується п’ятьма змінними;

– За допомогою методу заданих форм отримано систему звичайних нелінійних диференційних рівнянь, яка описує коливання оболонки. Частина узагальнених координат демонструє квазістатичну поведінку внаслідок малої товщини обшивок та низької густини заповнювача. Це дозволяє знизити розмірність динамічної системи за рахунок вираження цих координат через інші;

– Проведено чисельний аналіз отриманої нелінійної динамічної системи та знайдено періодичні режими руху оболонки. Для аналізу застосовано метод пристрілки сумісно з методом продовження за параметром. Було отримано частотні відгуки та біфуркаційну поведінку конструкцій;

– Чисельний аналіз нелінійних коливань оболонок подвійної кривизни в широкому діапазоні радіусів кривизни свідчить, що частотні відгуки оболонок якісно схожі, якщо зосереджену силу застосовано до центру тяжіння верхнього шару конструкції. Всі частотні відгуки мають дві седловузлові біфуркації, а також є жорсткими. Відповідні коливання близькі до моногармонійних з домінантною першою гармонікою. При зниженні радіусів кривизни частотні відгуки зсуваються праворуч, а їхні амплітуди знижуються;

– При субгармонійному резонансі, коли частота зовнішньої сили приблизно вдвічі більша за першу власну частоту конструкції, виникають коливання зі значними амплітудами. Джерелом цих коливань є біфуркація подвоєння періоду гармонійних коливань. Субгармонійні коливання проходять через седловузлову біфуркацію. Вони є мультигармонійними, з домінуючою першою гармонікою ряду Фур’є. У розглянутій системі не

спостерігалося хаотичних коливань внаслідок нескінченної послідовності біфуркацій подвоєння періоду.

Запропонований підхід до аналізу нелінійних коливань тришарових оболонок може бути застосований для широкого класу багатошарових оболонок.

Моделі та результати, які описано в цьому розділі, було використано в публікаціях [11, 17, 26, 30, 32], які наведено в Додатку А.

РОЗДІЛ 7

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТІЛЬНИКОВИХ ЗАПОВНЮВАЧІВ

Для застосування в розрахунках статичного та вібраційного відгуку сендвіч-оболонок зі стільниковими заповнювачами останні замінюються ортотропною однорідною речовиною шляхом так званої процедури гомогенізації. Хоча ця процедура може відбуватись по-різному, найбільш гнучкою виглядає гомогенізація із застосуванням методу скінченних елементів.

Розглянемо підхід до визначення механічних характеристик ортотропної однорідної речовини, яка описує пружний відгук стільникового заповнювача.

Стільниковий заповнювач замінюється референтним об’ємом – частиною комірки заповнювача, яка, з урахуванням симетрії, відображає геометрію стільникового шару. Слідуючи [45], простір навколо матеріалу стільника доповнюється до паралелепіпеду «пружним повітрям» – ізотропним матеріалом з малим модулем пружності. Проводиться серія обчислювальних експериментів, які дозволяють визначити матрицю C закону Гука (2.1). Матриця, яка є оберненою до C, зв’язується з інженерними константами матеріалу заповнювача наступним чином [45]:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

де $E_{11},E_{22},E_{33},G_{23},G_{13},G_{12}$ – модулі Юнга та зсуву гомогенізованого матеріалу у вісях, які наведено на рис. 7.1;

$\nu_{12},\nu_{21},\nu_{13},\nu_{31},\nu_{23},\nu_{32}$ – коефіцієнти Пуассона.

Використовуючи співвідношення (7.1) та $E_{jj}\nu_{ij} = \nu_{ji}E_{ii}, i,j = 1 \dots 3, i \neq j$, можуть бути визначені всі 9 інженерних констант матеріалу заповнювача.

Приклад референтного об’єму гексагонального стільникового заповнювача наведено на рис. 7.1. Розміри паралелепіпеду a_1, a_2, a_3 можуть бути розраховані з геометрії заповнювача.

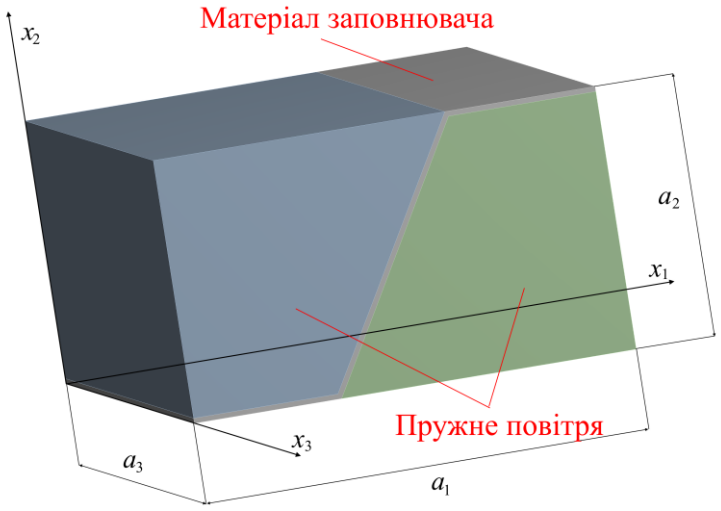


Рисунок 7.1 – Референтний об’єм гексагонального заповнювача

Було проведено моделювання статичного пружного відгуку референтного об’єму (рис. 7.1) в середовищі скінченно-елементного аналізу ANSYS. Для скінченно-елементної дискретизації референтного об’єму застосовуються тривимірні скінченні елементи. У [220] показано, що тривимірні скінченно-елементні моделі мають набагато більшу точність при оцінці модулю зсуву G_{12}. за рахунок більш точної моделі напружено-деформованого стану стільникового заповнювача в області стику стінок.

У табл. 7.1, 7.2 наведено умови розрахунків для оцінки механічних характеристик заповнювача. Обчислювальні експерименти 1–3 застосовуються для оцінки параметрів E_{xx},E_{yy},E_{zz} та коефіцієнтів Пуассона. Експерименти 4–6 дозволяють оцінити модулі зсуву матеріалу.

Таблиця 7.1 – Умови розрахунків 1–3

	Експеримент 1			Експеримент 2			Експеримент 3		
Грань	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3
$x_1 = 0$	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна
$x_1 = a_1$	u	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна
$x_2 = 0$	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна
$x_2 = a_2$	Вільна	0	Вільна	Вільна	u	Вільна	Вільна	0	Вільна
$x_3 = 0$	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0
$x_3 = a_3$	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	0	Вільна	Вільна	u
Деформація	$\varepsilon_1 = \frac{u}{a_1}$			$\varepsilon_2 = \frac{u}{a_2}$			$\varepsilon_3 = \frac{u}{a_3}$		

Таблиця 7.2 – Умови розрахунків 4–6

	Експеримент 4			Експеримент 5			Експеримент 6		
Грань	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3
$x_1 = 0$	0	Вільна	Вільна	Вільна	0	0	Вільна	0	0
$x_1 = a_1$	0	Вільна	Вільна	Вільна	0	0	Вільна	0	0
$x_2 = 0$	0	Вільна	0	Вільна	0	Вільна	0	Вільна	0
$x_2 = a_2$	0	Вільна	0	Вільна	0	Вільна	u	0	0
$x_3 = 0$	0	0	Вільна	0	0	Вільна	Вільна	Вільна	0
$x_3 = a_3$	0	u	0	u	0	0	Вільна	Вільна	0
Деформація	$\varepsilon_4 = \frac{u}{a_3}$			$\varepsilon_5 = \frac{u}{a_3}$			$\varepsilon_6 = \frac{u}{a_2}$		

Під час обчислювального експерименту грані паралелепіпеду (рис. 7.1) піддаються рівномірному переміщенню u. Граничні умови для експериментів наведено в табл. 7.1 та 7.2. У верхніх рядках наведено номер експерименту. У другому рядку наведено переміщення вздовж вісей x_1, x_2, x_3, які позначено U_1, U_2, U_3. Переміщення граней референтного об'єму можуть складати 0 чи u. Переміщення 0 та u відображають переміщення відповідної грані в відповідному напрямку. Позначка «Вільна» відображає, що на переміщення грані не накладено обмежень. Грані, на які накладаються відповідні обмеження, наведено в першому стовпці. В останніх рядках табл. 7.1 та 7.2 наведено співвідношення, за якими розраховуються деформації гомогенізованого матеріалу.

У результаті чисельного моделювання визначаються елементи тензору напружень, які усереднено за об'ємом. Значення усереднених напружень в четвертій частині комірки визначаються наступним чином:

$$\sigma_{ij}^{(c)} = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{N_f} \bar{\sigma}_{ij}^{(k)} v_k \,; i,j = 1,2,3, \tag{7.2}$$

де $V = a_1 a_2 a_3$ – об'єм паралелепіпеда;

N_f – кількість скінченних елементів;

$\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$ – осереднене значення напруження в k-м скінченному елементі;

v_k – об'єм k-го скінченного елемента.

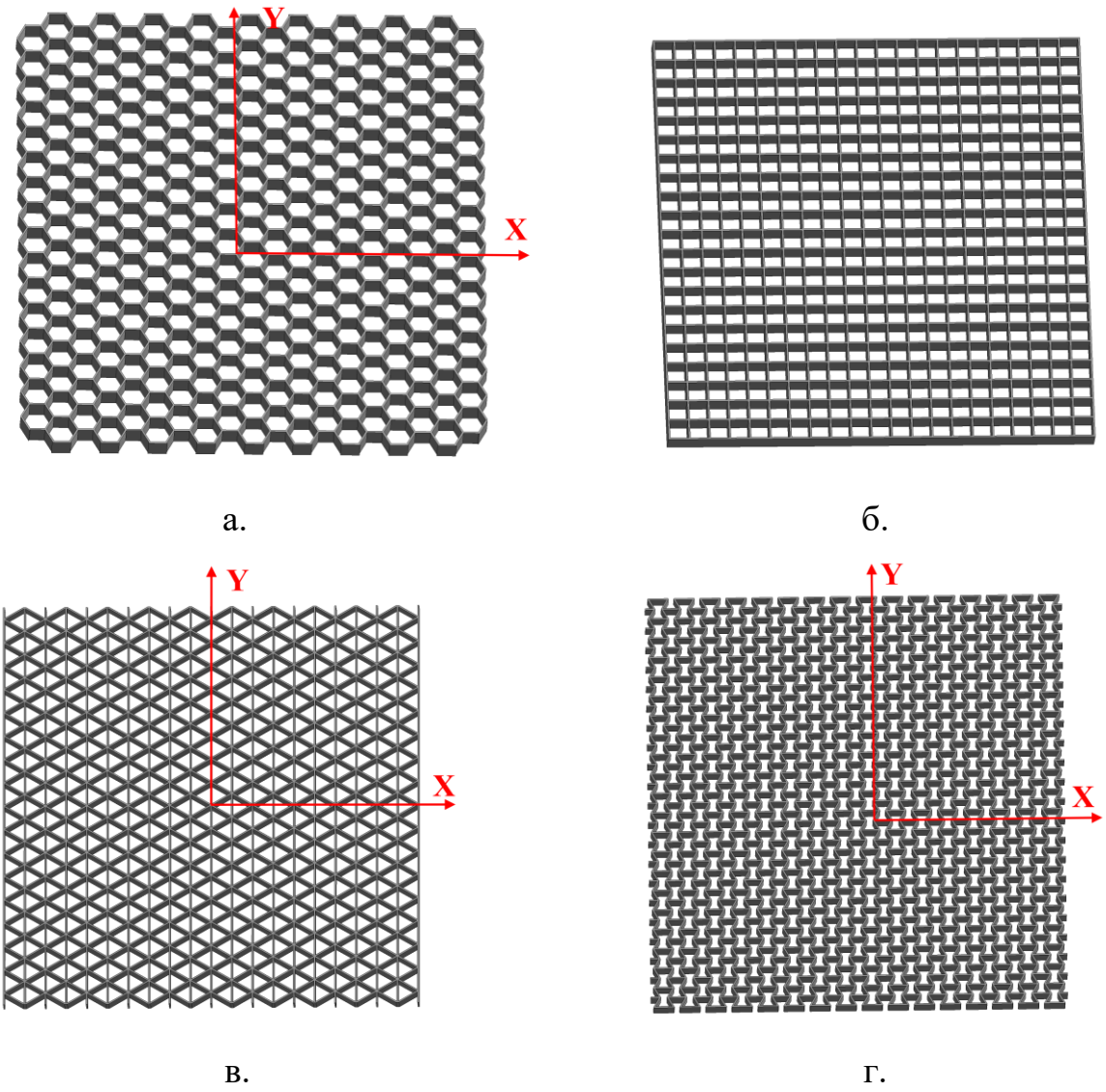
Елементи матриці C рівняння (7.1) розраховуються зі співвідношень:

$$C_{ij} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_j};\ i,j = 1,2,3;$$

$$C_{ii} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, i = 4,5,6.$$

Проводився аналіз стільникових заповнювачів з різною геометрією комірки із застосуванням пакету скінченно-елементних розрахунків ANSYS Mechanical. Геометричні моделі пластин стільникового заповнювача

зображено на рис. 7.2. Також на рисунку позначено напрямки зразків X та Y, які використовуються при моделюванні.



а. б. в. г.

Рисунок 7.2 – Геометричні моделі пластин заповнювача з різними комірками: а. – гексагональною, б. – квадратною; в. – трикутною; г. – ауксетичною.

На рис. 7.3 наведено референтні об’єми для заповнювачів із гексогональною квадратною трикутною та ауксетичною коміркою заповнювача. Референтні об’єми складаються з матеріалу комірки та «еластичного повітря», яке має незначні механічні характеристики та використовується для збереження безперервності переміщень.

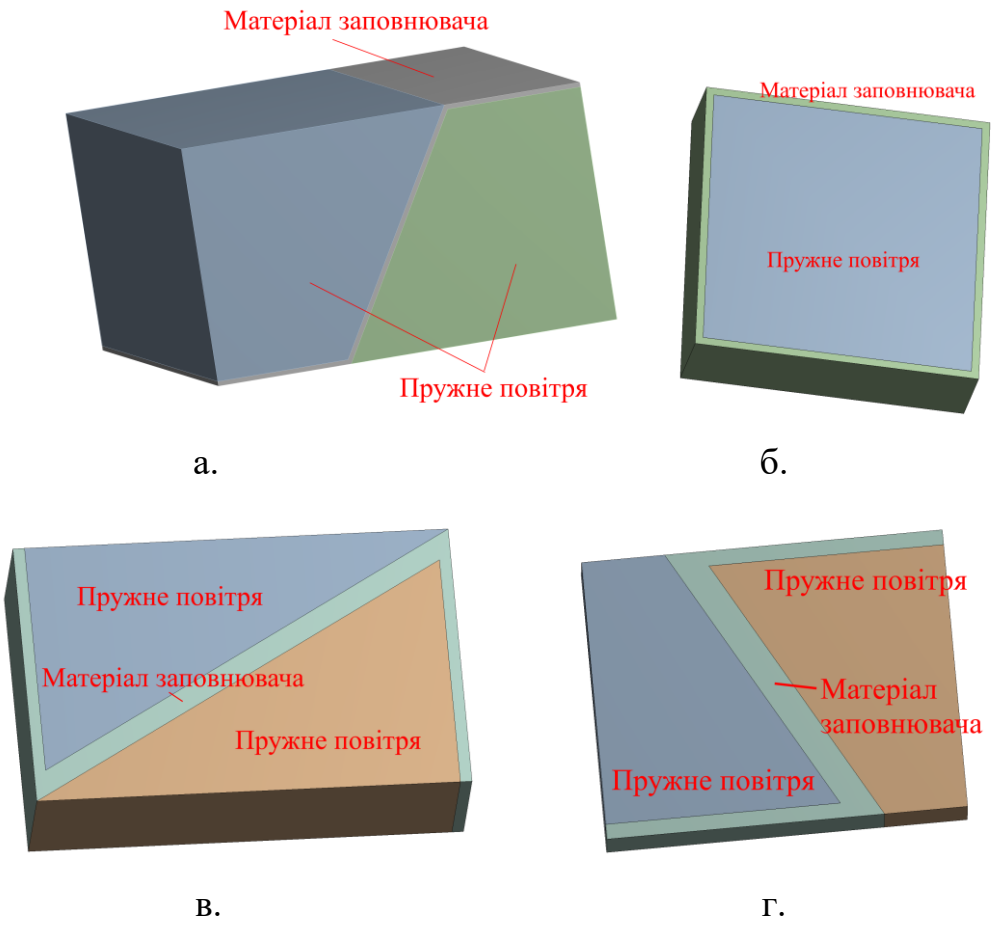


Рисунок 7.3 – Референтні об’єми для скінченно-елементної гомогенізації стільникових заповнювачів: а. – комірка гексагонального заповнювача; б. – квадратна комірка; в. трикутна комірка; г – комірка ауксетичного заповнювача

В результаті моделювання було отримано гомогенізовані механічні характеристики заповнювачів, які наведено у табл. 7.3. Напрями x, y властивостей матеріалу зображені на рис. 7.2. Напрям z ортогональний до площини XY. У таблиці використано наступні позначення: E – модуль Юнга; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – осереднена густина матеріалу. В табл. 7.3 також наведено механічні характеристики, які отримано експериментально. В стовпцях А та В наведено розрахункові та експериментальні результати. З табл. 7.3 видно, що розрахункові та експериментальні результати є близькими. Зазначимо, що деякі механічні характеристики складно оцінити шляхом фізичного експерименту.

Таблиця 7.3 – Осереднені механічні характеристики стільникових заповнювачів

	Гексагональна		Квадратна		Трикутна		Ауксетична	
	A	B	A	B	A	B	A	B
E_x, МПа	12.3	15.4	142,2	155.5	162.4	161.5	29,6	29.3
E_y, МПа	12.5	15.2	142,0	155.5	173.1	171.2	59,2	83.3
E_z, МПа	77.2		327,8		387.3		342,4	
ν_{xy}	0.96	0.94	-0,037	0	0.272	0.11	-0,657	-0.64
ν_{xz}	0.008		0,197		0.130		0,009	
ν_{yz}	0.005		0,197		0.139		0,018	
G_{yz}, МПа	60.9	58.0	34,2	31.8	52.1	48.5	81,3	73.6
G_{xz}, МПа	61.0	55.7	34,3	31.8	67.9	45.5	78,7	56.4
G_{xy}, МПа	4.85		0,9		57.3		7,0	
ρ, кг/м^3	141		203		240		283	

Аналіз осереднених характеристик стільникових заповнювачів дозволяє описати їх наступним чином:

– заповнювач з **гексагональною** коміркою є найбільш легким з-поміж заповнювачів з таким самим радіусом комірки та товщиною стінки. Він характеризується найкращим співвідношенням між поперечними модулями зсуву (G_{yz}, G_{xz}) та питомою масою. При розтягуванні швидко демонструє пластичну поведінку. За співвідношенням між міцністю на поперечний зсув та питомою масою значно випереджає інші типи заповнювачів.

– заповнювач з **квадратною** коміркою є найбільш податним при поперечному зсуві та найбільш жорстким при розтягненні. При розтягненні практично не змінює ширини. Має високе співвідношення між жорсткістю на поперечний стиск (E_z) та питомою масою.

– заповнювач з **трикутною** коміркою має високе співвідношення між жорсткістю на поперечний стиск (E_z) та питомою масою; при розтягненні в одному напрямку є надзвичайно жорстким, в іншому демонструє жорсткість вищу за гексагональний та ауксетичний заповнювачі. Є найміцнішим на розтяг. Має найвищий модуль зсуву в площині (G_{xy}). Слабко змінює ширину при розтягненні.

– **ауксетичний** заповнювач має високі характеристики при поперечних впливах (E_z, G_{yz}, G_{xz}), але низку жорсткість та міцність при розтягненні. Крім того, від'ємний коефіцієнт Пуассона додає йому особливих властивостей в таких застосуваннях, як протиударний захист.

Таким чином, можна сформулювати наступні рекомендації:

– якщо застосування є чутливим до маси, слід використовувати гексагональний заповнювач у поєднанні з жорсткими обшивками;

– якщо вид навантаження на заповнювач є достеменно невідомим, слід використовувати заповнювач з трикутними комірками;

– ауксетичний заповнювач доречно використовувати в застосуваннях, де його якісні особливості будуть корисними.

Висновки за розділом 7

У розділі описано методику скінченно-елементної гомогенізації стільникових заповнювачів для оцінки їхніх пружних властивостей. Ця методика може бути використана для аналізу стільникових заповнювачів з різною геометрією комірки. Проведено оцінку пружних властивостей чотирьох заповнювачів: з гексагональною, квадратною, трикутною та ауксетичною комірками. Результати аналізу порівняно з експериментальними. Надано рекомендації щодо вибору типу заповнювача.

Результати та підходи, які наведено в цьому розділі, використано в публікаціях [6, 8–17, 21–37, 40, 41, 43–46, 53], які наведено в Додатку А.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розроблено нову методику для аналізу коливань композитних багатошарових оболонок при геометрично нелінійному деформуванні. Застосування цієї методики дозволяє розв’язати важливу наукову проблему аналізу нелінійних коливань композитних оболонок різної форми. Одержано наступні результати:

1. Запропоновано моделі нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсуву високого порядку. Для дискретизації моделі застосовується метод заданих форм.

2. Запропоновано застосування методу пристрілки сумісно з продовженням за довжиною дуги частотного відгуку для аналізу нелінійних коливань багатошарових оболонок.

3. Проведено аналіз нелінійних коливань функціонально градієнтної нанокомпозитної циліндричної оболонки, що взаємодіє з надзвуковим газовим струменем. Виявлено умови при яких в оболонці виникають автоколивання.

Втрата динамічної стійкості нанокомпозитною циліндричної оболонкою в надзвуковому струмені відбувається внаслідок біфуркації Хопфа. Мінімальний критичний тиск вільного струменя спостерігається при кількості хвиль в круговому напрямку n=5 та n=6. Це значення суттєво менше ніж таке для ізотропних оболонок, для яких найменший критичний тиск спостерігається при n=27. Тип армування вуглецевими нанотрубками суттєво впливає на значення критичного тиску. За рахунок раціонального вибору типу армування критичний тиск може бути змінений в два рази.

Як свідчать результати аналізу флатера циліндричної нанокомпозитної оболонки, в точці біфуркації Хопфа виникають стійкі автоколивання. Підвищення об’ємної кількості вуглецевих нанотрубок в композиті значно знижує амплітуди автоколивань; частоти автоколивань при цьому змінюються несуттєво.

4. Проведено аналіз нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем. У частотному відгуку сендвіч-оболонки на параметричне навантаження поблизу параметричного резонансу знайдено замкнені кільця розв’язків, що відповідають бігучим хвилям вздовж кругової координати. Всі інші розв’язки характеризують стоячі хвилі в круговому напрямку. У точках перетину гілок стоячих та бігучих хвиль перші змінюють стійкість. Таких точок завжди спостерігалось дві. Поблизу параметричного резонансу спостерігався значний вплив коефіцієнту лінійного демпфування на амплітуди резонансних коливань: при підвищенні демпфування амплітуди знижувались

5. Проведено аналіз нестаціонарного відгуку композитної усіченої конічної оболонки зі шпангоутом на імпульсне навантаження. Методика аналізу вирізняється точністю та швидкодією при порівнянні з методом скінченних елементів. В результаті використання методики отримано часові залежності перехідних процесів у оболонці.

6. Проведено аналіз нелінійної динаміки конічної тришарової оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Розглянуто оболонку, защемлену з двох боків, та консольне закріплення оболонки.

Результати аналізу нелінійної динаміки оболонок свідчать, що консольна оболонка має більш різноманітну біфуркаційну поведінку. В обох оболонках виникають стійкі періодичні автоколивання внаслідок біфуркації Хопфа. Оболонка, защемлена з двох боків, демонструє цю поведінку в широкому діапазоні параметрів струменя. У консольній оболонці спостерігалося виникнення біфуркації Неймарка-Сакера, яка приводила до перетворення періодичних автоколивань на квазіперіодичні, які в свою чергу перетворюються на хаотичні. Для аналізу цих режимів побудовано перетини Пуанкаре, які свідчать, що при квазіперіодичних автоколиваннях в фазовому просторі спостерігається інваріантний тор. Амплітуди квазіперіодичних та

хаотичних коливань є значно вищими за амплітуди періодичних автоколивань.

7. Запропоновано методику аналізу втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною тришаровою оболонкою зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Основою методики є застосування спеціальної системи кусково-лінійних базисних функцій, що забезпечує виконання граничних умов. Було проведено аналіз втрати динамічної стійкості для заданої оболонки при різних параметрах струменя. Втрата динамічної стійкості відбувалася на формах з невеликою (2–5) кількістю хвиль у круговому напрямку. З підвищенням швидкості струменя збуджувались форми з більшою кількістю хвиль у круговому напрямку. Збільшення кута атаки приводило до зменшення критичного тиску, що відрізняє складену оболонку від конічної. Зі збільшенням швидкості струменя критичний тиск зменшувався.

8. Проведено аналіз нелінійних вимушених коливань тришарових оболонок подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем. Проаналізовано поведінку сферичної оболонки та оболонки в формі гіперболічного параболоїда. Чисельний аналіз нелінійних коливань оболонок подвійної кривизни в широкому діапазоні радіусів кривизни свідчить, що частотні відгуки оболонок якісно схожі, якщо зосереджену силу застосовано до центру тяжіння верхнього шару конструкції. Всі частотні відгуки мають дві седловузлові біфуркації, а також є жорсткими. Відповідні коливання близькі до моногармонійних з домінантною першою гармонікою. При зниженні радіусів кривизни частотні відгуки зсуваються праворуч, а їхні амплітуди знижуються.

Якщо зосереджену періодичну силу застосовано на відстані від центру тяжіння верхнього шару, спостерігаються сильні взаємодії між узагальненими координатами. Якщо дві власні частоти є близькими, спостерігається два екстремума поблизу головного резонансу при малих амплітудах зовнішньої сили. Якщо амплітуда зовнішньої сили є значною,

головний резонанс має один екстремум, а частотний відгук характеризується жорсткою поведінкою.

При субгармонійному резонансі, коли частота зовнішньої сили приблизно вдвічі більша за першу власну частоту конструкції, виникають коливання зі значними амплітудами. Джерелом цих коливань є біфуркація подвоєння періоду гармонійних коливань. Субгармонійні коливання проходять через седловузлову біфуркацію. Вони є мультигармонійними, з домінуючою першою гармонікою ряду Фур'є. У розглянутій системі не спостерігалося хаотичних коливань.

9. Запропоновано методику аналізу механічних характеристик стільникових заповнювачів з різною формою комірок. Отримано оцінки механічних характеристик гексагональних, квадратних, трикутних, ауксетичних заповнювачів. Проведено порівняння з експериментальними даними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Liu Yunfei, Vella Dominic, Qin Zhaoye, Chu Fulei, Amabili Marco. A review of nonlinear dynamics and vibration in lightweight composite structures: Recent advances and challenges. *Engineering Structures*. 2026. Vol. 360. paper. 122835. DOI: 10.1016/j.engstruct.2026.122835

2. Lee G.-C., Kweon J.-H., Choi J.-H. Optimization of composite sandwich cylinders for underwater vehicle application. *Composite Structures*. 2013. Vol. 96. P. 691 – 697. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.08.055

3. Katsaprakakis D.Al., Papadakis N., Ntintakis I. A comprehensive analysis of wind turbine blade damage. *Energies*. 2021. Vol. 14 (18). art. no. 5974. DOI: 10.3390/en14185974

4. Azad M.M.,Kim H.S. Vibration data for laminated composite structures: healthy and delamination states. *Mendeley Data*. 2025. DOI: 10.17632/n35zwbzhcf.2

5. Sharma A.K., Bhandari R., Aherwar A., Rimašauskiene R. Matrix materials used in composites: A comprehensive study. *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 21. P. 1559 – 1562. DOI: 10.1016/j.matpr.2019.11.086

6. Muley A.V., Aravindan S., Singh I.P. Nano and hybrid aluminum based metal matrix composites: An overview. *Manufacturing Review*. 2015. Vol. 2. art. no. 2015018. DOI: 10.1051/mfreview/2015018

7. Bhoi N.K., Singh H., Pratap S. Developments in the aluminum metal matrix composites reinforced by micro/nano particles – A review. *Journal of Composite Materials*. 2020, Vol. 54 (6). P. 813 – 833. DOI: 10.1177/0021998319865307

8. Sharma A.K., Bhandari R., Aherwar A., Rimašauskiene R., Pinca-Bretotean C. A study of advancement in application opportunities of aluminum metal matrix composites. *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 26. P. 2419 – 2424. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.02.516

9. Guedes R.M. Creep and fatigue in polymer matrix composites. New-York: Elsevier, 2019. 586p. DOI: 10.1016/C2017-0-02292-9

10. Jiang D., Murugadoss V., Wang Y., Lin J., Ding T., Wang Z., Shao Q., Wang C., Liu H., Lu N., Wei R., Subramania A., Guo Z. Electromagnetic Interference Shielding Polymers and Nanocomposites – A Review. *Polymer Reviews*. 2019. Vol. 59 (2). P. 280 – 337. DOI: 10.1080/15583724.2018.1546737

11. Yang X., Fan S., Li Y., Guo Y., Li Y., Ruan K., Zhang S., Zhang J., Kong J., Gu J. Synchronously improved electromagnetic interference shielding and thermal conductivity for epoxy nanocomposites by constructing 3D copper nanowires/thermally annealed graphene aerogel framework. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2020. Vol. 128. art. no. 105670. DOI: 10.1016/j.compositesa.2019.105670

12. Wang L., Ma Z., Zhang Y., Chen L., Cao D., Gu J. Polymer-based EMI shielding composites with 3D conductive networks: A mini-review. *SusMat*. 2021. Vol. 1 (3). P. 413 – 431. DOI: 10.1002/sus2.21

13. Iqbal A., Sambyal P., Koo C.M. 2D MXenes for Electromagnetic Shielding: A Review. *Advanced Functional Materials*. 2020. Vol. 30 (47). art. no. 2000883. DOI: 10.1002/adfm.202000883

14. Bian H., Yang Y., Wang Y., Tian W., Jiang H., Hu Z., Yu W. Effect of Microstructure of Composite Powders on Microstructure and Properties of Microwave Sintered Alumina Matrix Ceramics. *Journal of Materials Science and Technology*. 2013. Vol. 29 (5). P. 429 – 433. DOI: 10.1016/j.jmst.2013.03.024

15. Binner J., Porter M., Baker B., Zou J., Venkatachalam V., Diaz V.R., D'Angio A., Ramanujam P., Zhang T., Murthy T.S.R.C. Selection, processing, properties and applications of ultra-high temperature ceramic matrix composites, UHTCMCs–a review. *International Materials Reviews*. 2020. Vol. 65 (7). P. 389 – 444. DOI: 10.1080/09506608.2019.1652006

16. Chawla K.K. Composite Materials: Science and Engineering. Cham (Switzerland): Springer Cham, 2019.

17. Deve H.E., McCullough C. Continuous-fiber reinforced composites: A new generation. *JOM*. 1995. Vol 47 (7). P. 33 – 37. DOI: 10.1007/BF03221227

18. Ekşi S., Genel K. Comparison of mechanical properties of unidirectional and woven carbon, glass and aramid fiber reinforced epoxy composites. *Acta Physica Polonica A*. 2017. Vol. 132 (3). P. 879–882. DOI: 10.12693/APhysPolA.132.879

19. Byron Pipes R., McCullough R.L., Taggart D.G. Behavior of discontinuous fiber composites: Fiber orientation. *Polymer Composites*. 1982. Vol. 3 (1). P. 34 – 39. DOI: 10.1002/pc.750030107

20. Ibrahim I.A., Mohamed F.A., Lavernia E.J. Particulate reinforced metal matrix composites – a review. *Journal of Materials Science*. 1991. Vol. 26 (5). P. 1137 – 1156. DOI: 10.1007/BF00544448

21. Zhou H., Wang H., Du X., Mo Y., Yuan H., Liu H.-Y. Hybrid three-dimensional graphene fillers and graphite platelets to improve the thermal conductivity and wear performance of epoxy composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2019. Vol. 123. P. 270 – 277. DOI: 10.1016/j.compositesa.2019.05.016

22. Anand Sekhar R., Rakesh Pillai R., Mubarak Ali M., Shyam Kumar C.N. Enhanced mechanical and wear properties of aluminium-based composites reinforced with a unique blend of granite particles and boron carbide for sustainable material recycling. *Journal of Alloys and Compounds*. 2023. Vol. 963. art. no. 171165. DOI: 10.1016/j.jallcom.2023.171165

23. Wang Z. Recent advances in novel metallic honeycomb structure. *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 166. P. 731 – 741. DOI: 10.1016/j.compositesb.2019.02.011

24. Zhou H., Xu P., Xie S. Composite energy-absorbing structures combining thin-walled metal and honeycomb structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. 2017. Vol. 231 (4). P. 394 – 405. DOI: 10.1177/0954409716631579

25. Olympio K.R., Gandhi F. Flexible skins for morphing aircraft using cellular honeycomb cores. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2010. Vol. 21 (17). P. 1719 – 1735. DOI: 10.1177/1045389X09350331

26. Hales T.C. The honeycomb conjecture. *Discrete and Computational Geometry*. 2001. Vol. 25 (1). P. 1 – 22. DOI: 10.1007/s004540010071

27. Liu Y., Qin Z., Chu F. A Nonlinear Repeated Impact Model of Auxetic Honeycomb Structures Considering Geometric Nonlinearity and Tensile/ Compressive Deformation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 2023. Vol. 90 (9). art. no. 091008. DOI: 10.1115/1.4062592

28. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear vibrations of auxetic honeycomb thin plates based on the modified Gibson functions. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 193. art. no. 111259. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111259

29. Zhakatayev A., Kappassov Z., Varol H.A. Analytical modeling and design of negative stiffness honeycombs. *Smart Materials and Structures*. 2020. Vol. 29 (4). art. no. 045024. DOI: 10.1088/1361-665X/ab773a

30. Tao R., Ji L., Li Y., Wan Z., Hu W., Wu W., Liao B., Ma L., Fang D. 4D printed origami metamaterials with tunable compression twist behavior and stress-strain curves. *Composites Part B: Engineering*. 2020. Vol. 201. art. no. 108344. DOI: 10.1016/j.compositesb.2020.108344

31. Son M.-A., Chae K.-W., Kim J.S., Kim S.-H. Structural origin of negative thermal expansion of cordierite honeycomb ceramics and crystal phase evolution with sintering temperature. *Journal of the European Ceramic Society*. 2019. Vol. 39 (7). P. 2484 – 2492. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2019.02.017

32. Zhou P., Huang L., Xie J., Liang D., Lu H., Deng L. Prediction of microwave absorption behavior of grading honeycomb composites based on effective permittivity formulas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2015. Vol. 63 (8). art. no. 7105386. P. 3496 – 3501. DOI: 10.1109/TAP.2015.2431721

33. Gao Q., Zhao X., Wang C., Wang L., Ma Z. Multi-objective crashworthiness optimization for an auxetic cylindrical structure under axial

impact loading. *Materials and Design*. 2018. Vol. 143. P. 120 – 130. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.01.063

34. Li H., Hu Y., Huang H., Chen J., Zhao M., Li B. Broadband low-frequency vibration attenuation in 3D printed composite meta-lattice sandwich structures. *Composites Part B: Engineering*. 2021. Vol. 215. art. no. 108772. DOI: 10.1016/j.compositesb.2021.108772

35. Chen S., Tan X., Hu J., Zhu S., Wang B., Wang L., Jin Y., Wu L. A novel gradient negative stiffness honeycomb for recoverable energy absorption. *Composites Part B: Engineering*. 2021. Vol. 215. art. no. 108745. DOI: 10.1016/j.compositesb.2021.108745

36. Gibson L.J., Ashby M.F., Schajer G.S., Robertson C.I. The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proceedings of The Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1982. Vol. 382 (1782). P. 25 – 42.

37. Gibson L.J. Cellular solids. *MRS Bulletin*. 2003. Vol. 28 (4). P. 270 – 274. DOI: 10.1557/mrs2003.79

38. Li H., Liu Y., Shi X., Wang Z., Wang X., Xiong J., Guan Z. Nonlinear vibrations of all-composite sandwich plates with a hexagon honeycomb core: Theoretical and experimental investigations. *Composite Structures*. 2023. Vol. 305. art. no. 116512. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116512

39. Masters I.G., Evans K.E. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite Structures*. 1996. Vol. 35 (4). P. 403 – 422. DOI: 10.1016/S0263-8223(96)00054-2

40. Grima J.N., Attard D., Ellul B., Gatt R. An improved analytical model for the elastic constants of auxetic and conventional hexagonal honeycombs. *Cellular Polymers*. 2011. Vol. 30 (6). P. 287 – 310. DOI: 10.1177/026248931103000602

41. Larsen U.D., Sigmund O., Bouwstra S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 1997. Vol. 6 (2). P. 99 – 106. DOI: 10.1109/84.585787

42. Berinskii I.E. In-plane elastic properties of auxetic multilattices. *Smart Materials and Structures*. 2018. Vol. 27 (7). art. no. 075012. DOI: 10.1088/1361-665X/aac292

43. Grima J.N., Gatt R., Alderson A., Evans K.E. On the potential of connected stars as auxetic systems. *Molecular Simulation*. 2005. Vol. 31 (13). P. 925 – 935. DOI: 10.1080/08927020500401139

44. Mizzi L., Mahdi E.M., Titov K., Gatt R., Attard D., Evans K.E., Grima J.N., Tan J.-C. Mechanical metamaterials with star-shaped pores exhibiting negative and zero Poisson's ratio. *Materials and Design*. 2018. Vol. 146. P. 28 – 37. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.02.051

45. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Composite Structures*. 2014. Vol. 118. P. 664–676. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.07.057

46. Van Doan D., Van Minh P., Van Ke T., Nhung N.T.C., Van Thom D. An Overview of Functionally Graded Materials: From Civil Applications to Defense and Aerospace Industries. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2025. Vol. 13 (1). art. no. 68. DOI: 10.1007/s42417-024-01691-8

47. Xu F., Zhang X., Zhang H. A review on functionally graded structures and materials for energy absorption. *Engineering Structures*. 2018. Vol. 171. P. 309 – 325. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.094

48. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. Boca Raton (USA): CRC Press, 2016. 257 p.

49. Ong O.Z.S., Ghayesh M.H., Losic D., Amabili M. Coupled dynamics of double beams reinforced with bidirectional functionally graded carbon nanotubes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022. Vol. 143. P. 263 – 282. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.06.023

50. Chakraborty S., Amabili M., Moghaddasi H.R., Yadav A., Dey T., Kumar R. Nonlinear dynamics of axially functionally graded, porous sandwich

panel subjected to periodic non-uniform in-plane excitation. *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol. 211. art. no. 113076. DOI: 10.1016/j.tws.2025.113076

51. Ruan M., Wang Z.-M. Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *JVC/Journal of Vibration and Control*. 2016. Vol. 22 (16). P. 3504 – 3517. DOI: 10.1177/1077546314563967

52. Zhang Z., Sun Y., Cao X., Xu J., Yao L. A slice model for thermoelastic analysis of porous functionally graded material sandwich beams with temperature-dependent material properties .*Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 198. art. no. 111700. DOI: 10.1016/j.tws.2024.111700

53. . Sklepus S.M. Method of Solving Geometrically Nonlinear Bending Problems of Functionally Graded Shallow Shells of Complex Shape. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59. P.725–733. DOI: 10.1007/s10778-024-01255-z

54. Alijani F., Amabili M. Chaotic vibrations in functionally graded doubly curved shells with internal resonance. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2012. Vol. 12 (6). art. no. 1250047. DOI: 10.1142/S0219455412500472

55. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2011. Vol. 330 (7). P. 1432 – 1454. DOI: 10.1016/j.jsv.2010.10.003

56. Sibtain M., Yee K., Ong O.Z.S., Ghayesh M.H., Amabili M. Dynamics of size-dependent multilayered shear deformable microbeams with axially functionally graded core and non-uniform mass supported by an intermediate elastic support. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023. Vol. 146. P. 263 – 283. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.10.030

57. Alijani F., Amabili M., Bakhtiari-Nejad F. Thermal effects on nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93 (10). P. 2541 – 2553. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.04.016

58. Alijani F., Amabili M. Nonlinear parametric instability of functionally graded rectangular plates in thermal environments. *ASME International*

Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE), 4 (PARTS A AND B). P. 949 – 956. ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2012, Houston, 9 November 2012 – 15 November 2012. DOI: 10.1115/IMECE2012-89140

59. Yadav A., Amabili M., Panda S.K., Dey T. Non-linear vibration response of functionally graded circular cylindrical shells subjected to thermo-mechanical loading. *Composite Structures*. 2019. Vol. 229. art. no. 111430. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111430

60. Alijani F., Amabili M. Non-linear dynamic instability of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2013. Vol. 50. P. 109 – 126. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.10.009

61. Liu Y., Wang J., Hu J., Qin Z., Chu F. Multiple internal resonances of rotating composite cylindrical shells under varying temperature fields. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. 2022. Vol. 43 (10). P. 1543 – 1554. DOI: 10.1007/s10483-022-2904-9

62. Jung W.-Y., Han S.-C. Analysis of sigmoid functionally graded material (S-FGM) nanoscale plates using the nonlocal elasticity theory. *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. art. no. 476131. DOI: 10.1155/2013/476131

63. Duc N.D., Cong P.H. Nonlinear dynamic response of imperfect symmetric thin sigmoid-functionally graded material plate with metal-ceramic-metal layers on elastic foundation. *JVC/Journal of Vibration and Control*. 2015. Vol. 21 (4). P. 637 – 646. DOI: 10.1177/1077546313489717

64. Thang P.T., Duc N.D., Nguyen-Thoi T. Effects of variable thickness and imperfection on nonlinear buckling of sigmoid-functionally graded cylindrical panels. *Composite Structures*. 2016. Vol. 155. P. 99 – 106. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.08.007

65. Nguyen D.D. Nonlinear thermo- electro-mechanical dynamic response of shear deformable piezoelectric sigmoid functionally graded sandwich circular cylindrical shells on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2018. Vol. 20 (3). P. 351 – 378. DOI: 10.1177/1099636216653266

66. Singh S.J., Harsha S.P. Analysis of porosity effect on free vibration and buckling responses for sandwich sigmoid function based functionally graded material plate resting on Pasternak foundation using Galerkin Vlasov's method. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2021. Vol. 23 (5). P. 1717 – 1760. DOI: 10.1177/1099636220904340

67. Wang Y.Q., Zu J.W. Vibration characteristics of moving sigmoid functionally graded plates containing porosities. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2018. Vol. 14 (4). P. 473 – 489. DOI: 10.1007/s10999-017-9385-2

68. Singh B.N., Hota R.N., Dwivedi S., Jha R., Ranjan V. Acoustic Response of Sigmoid Functionally Graded Thin Plates: A Parametric Investigation. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2022. Vol. 10 (7). P. 2509 – 2529. DOI: 10.1007/s42417-022-00500-4

69. Kumar P., Harsha S.P. Static and vibration response analysis of sigmoid function-based functionally graded piezoelectric non-uniform porous plate. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2022. Vol. 33 (17). DOI: 10.1177/1045389X221077433

70. Nie G.J., Zhong Z., Chen S. Analytical solution for a functionally graded beam with arbitrary graded material properties *Composites Part B: Engineering*. 2013. Vol. 44 (1). P. 274 – 282. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.05.029

71. Chakraverty S., Pradhan K.K. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerospace Science and Technology*. 2014. Vol. 36. P. 132 – 156. DOI: 10.1016/j.ast.2014.04.005

72. Kumar V., Singh S.J., Saran V.H., Harsha S.P. Vibration response of the exponential functionally graded material plate with variable thickness resting on the orthotropic Pasternak foundation *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024. Vol. 52 (5). P. 2841 – 2868. DOI: 10.1080/15397734.2023.2193623

73. Zhang C., Wang Q. Free vibration analysis of elastically restrained functionally graded curved beams based on the Mori–Tanaka scheme. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 26 (21). P. 1821 – 1831. DOI: 10.1080/15376494.2018.1452318

74. Loja M.A.R., Barbosa J.I., Mota Soares C.M. A study on the modeling of sandwich functionally graded particulate composites. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94 (7). P. 2209 – 2217. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.02.015

75. Tsiatas G.C., Charalampakis A.E. Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures*. 2017. Vol. 160. P. 256 – 266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.057

76. Ghayesh M.H. Dynamics of functionally graded viscoelastic microbeams. International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 124. P. 115 – 131. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.004

77. Alijani F., Amabili M. Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*. 2014. Vol. 113 (1). P. 89 – 107. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.03.006

78. Shen H.-S., Wang Z.-X. Assessment of Voigt and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94 (7). P. 2197 – 2208. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.02.018

79. Seidel G.D., Lagoudas D.C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mechanics of Materials*. 2006. Vol. 38. P. 884–907 DOI: 10.1016/j.mechmat.2005.06.029

80. Liu Y.J., Chen, X.L. Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials*. 2003. Vol. 35. P. 69–81. DOI: 10.1016/S0167-6636(02)00200-4

81. Odegard G.M., Gates T.S., Wise K.E., Park C., Siochi E.J. Constitutive modeling of nanotube–reinforced polymer composites. *Composites Science and Technology*. 2003. Vol. 63. P. 1671–1687. DOI: 10.1016/S0266-3538(03)00063-0

82. Hu H., Onyebueke L., Abatan A.:. Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites-Review and Evaluation. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*. 2010. Vol. 9 (4). P. 275-319. DOI: 10.4236/jmmce.2010.94022

83. Allaoui A., Bai S., Cheng H.M., Bai J.B. Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Science and Technology*. 2002. Vol. 62. P. 1993–1998. DOI: 10.1016/S0266-3538(02)00129-X

84. Lijie Ci, JinBo Bai. The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. *Composites Science and Technology*. 2006. Vol. 66. P. 599–603. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.05.020

85. Richard P., Prasse T., Cavaille J.Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet J. Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. *Materials Science and Engineering: A*. 2203. Vol. 352. P. 344–348. DOI: 10.1016/S0921-5093(02)00895-X

86. Kanagaraj S., Varanda F.R., Zhil'tsova T.V., Oliveira M.S.A., Simoes J.A.O.. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 67. P. 3071–3077. DOI: 10.1016/j.compscitech.2007.04.024

87. Omidi M., Rokni H., Milani A.S., Seethaler R.J., Arasteh R. Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a new form of the rule of mixtures. *Carbon*. 2010. Vol. 48. P. 3218–3228. DOI: 10.1016/j.carbon.2010.05.007

88. Shiomitsu D., Yanagihara D. Elastic local shell and stiffener-tripping buckling strength of ring-stiffened cylindrical shells under external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 148. art. no. 106622. DOI: 10.1016/j.tws.2020.106622

89. Bert C. W., Kim C.-D., Birman V. Vibration of composite-material cylindrical shells with ring and/or stringer stiffeners. Composite Structures. 1993. Vol. 25. P. 477–484. DOI: 10.1016/0263-8223(93)90195-V

90. Jafari A.A., Bagheri M. Free vibration of rotating ring stiffened cylindrical shells with non-uniform stiffener distribution. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 296. P. 353–367. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.001

91. Kim Y.W., Lee Y.S. Transient analysis of ring-stiffened composite cylindrical shells with both edges clamped. *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 252(1). P. 1–17. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4020

92. Li L., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. P. 765–781. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00174-3

93. Loy C. T., Lam K. Y. Vibration of cylindrical shell with ring support. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1997. Vol.39 (4). P. 455–471. DOI: 10.1016/S0020-7403(96)00035-5

94. Mustafa B. A. J., Ali R. An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells. *Computers & Structures*. 1989. Vol. 32 (2). P. 355–363. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90047-3

95. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 69. P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026

96. Sobhaniaragh B., Nejati M., Mansur W.J. Buckling Modelling of Ring and Stringer Stiffened Cylindrical Shells Aggregated by Graded CNTs. *Composites Part B: Engineering*. 2017. Vol. 124. P. 120–133. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.05.045

97. Tian J., Wang C.M., Swaddiwudhipong S. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shells under general pressure loading via the Ritz method. *Thin-Walled Structures*. 1999. Vol. 35. P. 1–24. DOI: 10.1016/S0263-8231(99)00012-9

98. Wang C.M., Swaddiwudhipong S., Tian J. Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of Engineering*

Mechanics. 1997. Vol. 123. P. 134–142. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:2(134)

99. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 69. P. 271–281. DOI: 10.1016/S0045-7949(97)00047-3

100. Feli S., Namdari Pour M.H. An analytical model for composite sandwich panels with honeycomb core subjected to high-velocity impact. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43 (5). P. 2439 – 2447. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.11.028

101. Paul D., Velmurugan R., Gupta N.K. Experimental and analytical studies of syntactic foam core composites for impact loading. *International Journal of Crashworthiness*. 2022. Vol. 27 (1). P. 299 – 316. DOI: 10.1080/13588265.2020.1797346

102. Liu J., Yang W., Liu J., Liu J., Huang W. Ballistic impact analyses of foam-filled double-arrow auxetic structure. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 182. art. no. 110173. DOI: 10.1016/j.tws.2022.110173

103. Liu Y., Hu W., Zhu R., Safaei B., Qin Z., Chu F. Dynamic responses of corrugated cylindrical shells subjected to nonlinear low-velocity impact. *Aerospace Science and Technology*. 2022. Vol. 121. art. no. 107321. DOI: 10.1016/j.ast.2021.107321

104. Li S., Li B., Fu T. Low-velocity impact response of sandwich plates with corrugation star-shaped honeycomb hybrid core. *Applied Mathematical Modelling*. 2025. Vol. 137. art. no. 115715. DOI: 10.1016/j.apm.2024.115715

105. Fu T., Hu X., Yang C. Impact response analysis of stiffened sandwich functionally graded porous materials doubly-curved shell with re-entrant honeycomb auxetic core. *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 124. P. 553 – 575. DOI: 10.1016/j.apm.2023.08.024

106. Dong Y.H., Zhu B., Wang Y., He L.W., Li Y.H., Yang J. Analytical prediction of the impact response of graphene reinforced spinning cylindrical

shells under axial and thermal loads. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 71. P. 331 – 348. DOI: 10.1016/j.apm.2019.02.024

107. Yang F.L., Wang Y.Q., Liu Y. Low-velocity impact response of axially moving functionally graded graphene platelet reinforced metal foam plates. *Aerospace Science and Technology*. 2022. Vol. 123. art. no. 107496. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107496

108. Li H., Li Z., Xiao Z., Xiong J., Wang X., Han Q., Zhou J., Guan Z. Vibro-impact response of FRP sandwich plates with a foam core reinforced by chopped fiber rods. *Composites Part B: Engineering*. 2022. Vol. 242. art. no. 110077. DOI: 10.1016/j.compositesb.2022.110077

109. Liu Y., Qin Z., Chu F. Analytical study of the impact response of shear deformable sandwich cylindrical shell with a functionally graded porous core. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29 (9). P. 1338 – 1347. DOI: 10.1080/15376494.2020.1818904

110. Tian Y., Li Q., Feng Y., Luo Z., Ruan D., Gao W. Nonlinear dynamic analysis of the graphene platelets reinforced porous plate with magneto-electro-elastic sheets subjected to impact load. *Nonlinear Dynamics*. 2024. Vol. 112 (3). P. 1661 – 1690. DOI: 10.1007/s11071-023-09093-3

111. Zhang Y.-W., She G.-L. Nonlinear low-velocity impact response of graphene platelet-reinforced metal foam cylindrical shells under axial motion with geometrical imperfection *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 111 (7). P. 6317 – 6334. DOI: 10.1007/s11071-022-08186-9

112. Zarei H., Fallah M., Bisadi H., Daneshmehr A., Minak G. Multiple impact response of temperature-dependent carbon nanotube-reinforced composite (CNTRC) plates with general boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*. 2017. Vol. 113. P. 206 – 217. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.01.021

113. Li L., Nie L., Ren Y. Low-velocity impact response of the post-buckled FG-MEE plate resting on visco-Pasternak foundation: Magneto-electro-mechanical

effects-based interaction analysis. *Composite Structures*. 2024. Vol. 331. art. no. 117869. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.117869

114. Chen D., Yang J., Schneider J., Kitipornchai S., Zhang L. Impact response of inclined self-weighted functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 179. art. no. 109501. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109501

115. Zhang W., Guo L.-J., Wang Y., Mao J.-J., Yan J. Nonlinear low-velocity impact response of GRC beam with geometric imperfection under thermo-electro-mechanical loads *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 110 (4). P. 3255 – 3272. DOI: 10.1007/s11071-022-07809-5

116. Fu W., Hua F., You Q., Zhou X. Impact Response Analysis on Orthogrid Stiffened Composite Sandwich Plates Embedded with Viscoelastic Material Considering Temperature and Moisture Effects. *International Journal of Applied Mechanics*. 2023. Vol. 15 (9). art. no. 2350072. DOI: 10.1142/S1758825123500722

117. Das A., Rout M., Karmakar A. Time dependent response of impact induced functionally graded conical shell considering porosity. *Sadhana - Academy Proceedings in Engineering Sciences*. 2020. Vol. 45 (1). art. no. 219. DOI: 10.1007/s12046-020-01455-6

118. Zhou X., Fu W., Wang Y., Yan H., Huang Y. Impact Responses and Wave Dissipation Investigation of a Composite Sandwich Shell Reinforced by Multilayer Negative Poisson's Ratio Viscoelastic Polymer Material Honeycomb. *Materials*. 2024. Vol. 17 (1). art. no. 233. DOI: 10.3390/ma17010233

119. Heshmati M., Jalali S.K., Pugno N.M. Wave propagation in beams with functionally graded porosity distribution under highly transient axial and transverse impacts. *Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 196. art. no. 111548. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111548

120. Zhou J., Hassan M.Z., Guan Z., Cantwell W.J. The low velocity impact response of foam-based sandwich panels. *Composites Science and Technology*. 2012. Vol. 72 (14). P. 1781 – 1790. DOI: 10.1016/j.compscitech.2012.07.006

121. Zhang J., Zhu X., Yang X., Zhang W. Transient nonlinear responses of an auxetic honeycomb sandwich plate under impact loads. *International Journal of Impact Engineering*. 2019. Vol. 134. art. no. 103383. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2019.103383

122. Xie K., Wang Y., Chen H., Li J., Wang Y. Nonlinear dynamic response of a sandwich plate with negative Poisson's ratio honeycomb-core layer under low-velocity collision impact. *Computers and Structures*. 2024. Vol. 304. art. no. 107507. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107507

123. Xiao D., Chen X., Li Y., Wu W., Fang D. The structure response of sandwich beams with metallic auxetic honeycomb cores under localized impulsive loading-experiments and finite element analysis *Materials and Design*. 2019. Vol. 176. art. no. 107840. DOI: 10.1016/j.matdes.2019.107840

124. Ivañez I., Sanchez-Saez S. Numerical modelling of the low-velocity impact response of composite sandwich beams with honeycomb core. *Composite Structures*. 2013. Vol. 106. P. 716 – 723. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.07.025

125. Acanfora V., Zarrelli M., Riccio A. Experimental and numerical assessment of the impact behaviour of a composite sandwich panel with a polymeric honeycomb core. *International Journal of Impact Engineering*. 2023. Vol. 171. art. no. 104392. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104392

126. Gunes R., Arslan K. Development of numerical realistic model for predicting low-velocity impact response of aluminium honeycomb sandwich structures. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2016. Vol. 18 (1). P. 95 – 112. DOI: 10.1177/1099636215603047

127. Hiremath S., Jung Y., Oh J., Kim T.-W. Impact behavior analysis of carbon fiber-reinforced polymer composites via a data-driven scheme with Artificial Neural Network approach. *Polymer Composites*. 2025. Vol. 46 (6). P. 5400 – 5418. DOI: 10.1002/pc.29299

128. Stephen C., Thekkuden D.T., Mourad A.-H.I., Shivamurthy B., Selvam R., Behara S.R. Prediction of impact performance of fiber reinforced polymer composites using finite element analysis and artificial neural network. *Journal of*

the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2022. Vol. 44 (9). art. no. 408. DOI: 10.1007/s40430-022-03711-8

129. Ni Z., Yang J., Fan Y., Hang Z., Zeng B., Feng C. Multi-factors effects analysis of nonlinear vibration of FG-GNPRC membrane using machine learning. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024. Vol. 52 (11). P. 8988 – 9014. DOI: 10.1080/15397734.2024.2332642

130. Saurabh S., Padhy S.P., Viet Hoang V.N., Kiran R., Chauhan V.S. Automated and explainable machine learning for accelerating nonlinear vibration prediction in bioinspired helicoidal laminated composite structures. *Structures*. 2026. Vol. 86. art. no. 111358. DOI: 10.1016/j.istruc.2026.111358

131. Drosopoulos G., Foutsitzi G., Daraki M.-S., Stavroulakis G.E. Vibration Suppression of Graphene Reinforced Laminates Using Shunted Piezoelectric Systems and Machine Learning. *Signals*. 2024. Vol. 5 (2). P. 326 – 342. DOI: 10.3390/signals5020017

132. Mezeix L., Rivas A.S., Relandeau A., Bouvet C. A New Method to Predict Damage to Composite Structures Using Convolutional Neural Networks. *Materials*. 2023. Vol. 16 (22). art. no. 7213. DOI: 10.3390/ma16227213

133. Khalid S., Yazdani M.H., Azad M.M., Elahi M.U., Raouf I., Kim H.S. Advancements in Physics-Informed Neural Networks for Laminated Composites: A Comprehensive Review. *Mathematics*. 2025. Vol. 13 (1). art. no. 17. DOI: 10.3390/math13010017

134. Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., Duc N. D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Composite Structures*. 2018. Vol. 185. P. 455–465. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.11.047

135. Quyen N. V., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. art. no. 107571. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107571

136. Cong P.H., Long P. T., Nhat N. V., Duc N. D. Geometrically nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened circular cylindrical shells with negative poisson's ratio in auxetic honeycombs core layer. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 152. P. 443–453. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.052

137. Duc N. D., Seung-Eock K., Tuan N. D., Tran P., Khoa N. D. New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 70. P. 396–404. DOI: 10.1016/j.ast.2017.08.023

138. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear dynamic responses of sandwich functionally graded porous cylindrical shells embedded in elastic media under 1:1 internal resonance. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. 2021. Vol. 42 (6). P. 805 – 818. DOI: 10.1007/s10483-021-2740-7

139. Dong B., Li H., Wang X., Sun W., Luo Z., Ma H., Qin Z., Han Q. Nonlinear forced vibration of hybrid fiber/graphene nanoplatelets/polymer composite sandwich cylindrical shells with hexagon honeycomb core. *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 110 (4). P. 3303 – 3331. DOI: 10.1007/s11071-022-07811-x

140. Arani M.S., Bakhtiari M., Lakis A.A. Analyzing softening and hardening behavior in vibration of a thin incompressible hyperelastic cylindrical shell. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 189. art. no. 110943. DOI: 10.1016/j.tws.2023.110943

141. Arani M.S., Bakhtiari M., Toorani M., Lakis A.A. Studying the nonlinear response of incompressible hyperelastic thin circular cylindrical shells with geometric imperfections. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2024. Vol. 155. art. no. 106562. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2024.106562

142. Eipakchi H., Mahboubi Nasrekani F. Linear and nonlinear free vibration analysis of super-light composite beams with honeycomb core layer and adjustable Poisson's ratio using multiple-scale method. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233 (11). P. 4763 – 4783. DOI: 10.1007/s00707-022-03354-9

143. Eipakchi H., Mahboubi Nasrekani F. Geometrically nonlinear frequency analysis of composite cylinders with metamaterial honeycomb layer and adjustable Poisson's ratio using the multiple scale method. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 169. art. no. 108441. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108441

144. Palathingal S., Vella D. Axisymmetric membrane nano-resonators: A comparison of nonlinear reduced-order models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2025. Vol. 168. art. no. 104933. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104933

145. Li H., Dong B., Zhao J., Zou Z., Zhao S., Wang Q., Han Q., Wang X. Nonlinear free vibration of functionally graded fiber-reinforced composite hexagon honeycomb sandwich cylindrical shells. *Engineering Structures*. 2022. Vol. 263. art. no. 114372. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.114372

146. Gao K., Gao W., Wu B., Wu D., Song C. Nonlinear primary resonance of functionally graded porous cylindrical shells using the method of multiple scales. *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 125. P. 281 – 293. DOI: 10.1016/j.tws.2017.12.039

147. Liu Y.-F., Qin Z.-Y., Chu F.-L. Nonlinear free vibration of graphene platelets reinforced composite corrugated plates. *Journal of Central South University*. 2022. Vol. 29 (9). P. 3054 – 3064. DOI: 10.1007/s11771-022-5086-6

148. Duc N.D., Cong P.H., Quang V.D. Nonlinear dynamic and vibration analysis of piezoelectric eccentrically stiffened FGM plates in thermal environment. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016. Vol. 115-116. P. 711 – 722. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2016.07.010

149. Keleshteri M.M., Jelovica J. Nonlinear vibration behavior of functionally graded porous cylindrical panels. *Composite Structures*. 2020. Vol. 239. art. no. 112028. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112028

150. Li H., Wang X., Chen J. Nonlinear electro-mechanical coupling vibration of corrugated graphene/piezoelectric laminated structures. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 150. P. 705 – 714. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.052

151. Xie K., Wang Y., Niu H., Chen H. Large-amplitude nonlinear free vibrations of functionally graded plates with porous imperfection: A novel approach based on energy balance method. *Composite Structures*. 2020. Vol. 246. art. no. 112367. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112367

152. Youzera H., Selim Saleh M.M., Ghazwani M.H., Meftah S.A., Tounsi A., Cuong-Le T. Nonlinear damping and forced vibration analysis of sandwich functionally graded material beams with composite viscoelastic core layer. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024. Vol. 52 (7). P. 4191 – 4210. DOI: 10.1080/15397734.2023.2229911

153. Shen H.-S., Li C. Re-examination of nonlinear vibration and nonlinear bending of porous sandwich cylindrical panels reinforced by graphene platelets. *Nanotechnology Reviews*. 2023. Vol. 12 (1). art. no. 20220544. DOI: 10.1515/ntrev-2022-0544

154. Karimiasl M., Alibeigloo A. Nonlinear bending and vibration analysis of sandwich plate with graphene reinforced micro composite facing sheets and auxetic honeycomb core in thermal environment. *Microsystem Technologies*. 2023. Vol. 29 (12). P. 1739 – 1755. DOI: 10.1007/s00542-023-05561-3

155. Huang X.-L., Dong L., Wei G.-Z., Zhong D.-Y. Nonlinear free and forced vibrations of porous sigmoid functionally graded plates on nonlinear elastic foundations. *Composite Structures*. 2019. Vol. 228. art. no. 111326. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111326

156. Hosseini S.A., Hamidi B.A., Maboudi G. On new nonlinearity in third-order elastic modulus for vibrational analysis of FG porous beam based on nonlocal strain gradient and surface energy by modified homotopy perturbation method. *European Physical Journal Plus*. 2022. Vol. 137 (4). art. no. 468. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02650-6

157. Barati M.R., Shahverdi H. Nonlinear vibration of nonlocal four-variable graded plates with porosities implementing homotopy perturbation and Hamiltonian methods. *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229 (1). P. 343 – 362. DOI: 10.1007/s00707-017-1952-y

158. Shen H.-S., Yang D.-Q. Nonlinear vibration of functionally graded fiber-reinforced composite laminated cylindrical shells in hygrothermal environments. *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39 (5-6). P. 1480 – 1499. DOI: 10.1016/j.apm.2014.09.010

159. Karimiasl M., Alibeigloo A. Nonlinear free and forced vibration analysis of sandwich cylindrical panel with auxetic core and GPLRC facing sheets in hygrothermal environment. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 175. art. no. 109164. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109164

160. Nasrekani F.M., Eipakchi H. Moderately large amplitude forced vibration of sandwich functionally graded auxetic beams: an analytical approach. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. 2026. Vol. 47 (1). P. 99 – 114. DOI: 10.1007/s10483-026-3340-7

161. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H. FG layers' effect on nonlinear free vibrations of sandwich auxetic cylinders. *European Journal of Mechanics*. *A/Solids*. 2025. Vol. 114. art. no. 105784. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2025.105784

162. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H. Geometrically Nonlinear Free Vibration Analysis of Axially Loaded Super-Light Auxetic Beams Reinforced by Functionally Graded Face Sheets. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2025. Vol. 13 (1). art. no. 102. DOI: 10.1007/s42417-024-01680-x

163. Ansari R., Hassani R., Hasrati E., Rouhi H. Studying nonlinear vibrations of composite conical panels with arbitrary-shaped cutout reinforced with graphene platelets based on higher-order shear deformation theory. *JVC/Journal of Vibration and Control*. 2022. Vol. 28 (21-22). P. 3019 – 3041. DOI: 10.1177/10775463211024847

164. Li C., Shen H.-S., Wang H. Nonlinear Vibration of Sandwich Beams with Functionally Graded Negative Poisson's Ratio Honeycomb Core. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019. Vol. 19 (3). art. no. 1950034. DOI: 10.1142/S0219455419500342

165. Nguyen N.V., Nguyen H.X., Lee S., Nguyen-Xuan H. Geometrically nonlinear polygonal finite element analysis of functionally graded porous plates. *Advances in Engineering Software*. 2018. Vol. 126. P. 110 – 126. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2018.11.005

166. Duc N.D., Seung-Eock K., Tuan N.D., Tran P., Khoa N.D. New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 70. P. 396 – 404. DOI: 10.1016/j.ast.2017.08.023

167. Trinh M.-C., Nguyen D.-D., Kim S.-E. Effects of porosity and thermomechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature. *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 87. P. 119 – 132. DOI: 10.1016/j.ast.2019.02.010

168. Li Q., Wu D., Chen X., Liu L., Yu Y., Gao W. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 148. P. 596 – 610. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.09.020

169. Duc N.D., Quang V.D., Nguyen P.D., Chien T.M. Nonlinear dynamic response of functionally graded porous plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2018. Vol. 4 (4). P. 245 – 259. DOI: 10.22055/jacm.2018.23219.1151

170 .Nguyen D.D., Pham C.H. Nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite plates with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2018. Vol. 20 (6). P. 692 – 717. DOI: 10.1177/1099636216674729

171. Nguyen T.P., Nguyen-Thoi T., Tran D.K., Ho D.T., Vu H.N. Nonlinear vibration of full-filled fluid corrugated sandwich functionally graded cylindrical shells. *JVC/Journal of Vibration and Control*. 2021. Vol. 27 (9-10). P. 1020 – 1035. DOI: 10.1177/1077546320936537

172. Li H., Zhang W., Zhang Y.F., Jiang Y. Nonlinear vibrations of graphene-reinforced porous rotating conical shell with arbitrary boundary conditions using traveling wave vibration analysis. *Nonlinear Dynamics*. 2024. Vol. 112 (6). P. 4363 – 4391. DOI: 10.1007/s11071-023-09255-3

173. Van Quyen N., Van Thanh N., Quan T.Q., Duc N.D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. art. no. 107571. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107571

174. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear forced vibrations of functionally graded piezoelectric cylindrical shells under electric-thermo-mechanical loads. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 201. art. no. 106474. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106474

175. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104 (2). P. 1007 – 1021. DOI: 10.1007/s11071-021-06358-7

176. Liu Y., Qin Z., Chu F. Investigation of magneto-electro-thermo-mechanical loads on nonlinear forced vibrations of composite cylindrical shells. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022. Vol. 107. art. no. 106146. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106146

177. Ni Z., Fan Y., Yang J., Hang Z., Feng C., Yang J. Nonlinear dynamics of FG-GNPRC multiphase composite membranes with internal pores and dielectric properties. *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 111 (18). P. 16679 – 16703. DOI: 10.1007/s11071-023-08754-7

178. Liu T., Zheng H., Guo X., Zheng Y. Internal resonance and nonlinear dynamics of an axially moving FGM sandwich cylindrical shell. *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol. 208. art. no. 112783. DOI: 10.1016/j.tws.2024.112783

179. Liu T., Zheng H.Y., Zhang W., Zheng Y., Qian Y.J. Nonlinear forced vibrations of functionally graded three-phase composite cylindrical shell subjected to aerodynamic forces, external excitations and hygrothermal environment. *Thin-*

Walled Structures. 2024. Vol. 195. art. no. 111511. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111511

180. Hao Y.X., Li H., Zhang W., Gu X.J., Yang S.W. Nonlinear vibration of porous truncated conical shell under unified boundary condition and mechanical load. *Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 195. art. no. 111355. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111355

181. Ansari R., Zargar Ershadi M., Faraji Oskouie M., Rouhi H. A VDQ approach to nonlinear vibration analysis of functionally graded porous circular plates resting on elastic foundation under hygrothermal shock. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234 (10). P. 5115 – 5129. DOI: 10.1007/s00707-023-03649-5

182. Nguyen N.V., Phan D.-H. Nonlinear free vibration of bi-directional functionally graded porous plates. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 192. art. no. 111198. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111198

183. Chen D., Kitipornchai S., Yang J. Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 107. P. 39 – 48. DOI: 10.1016/j.tws.2016.05.025

184. Keleshteri M.M., Jelovica J. Nonlinear vibration analysis of bidirectional porous beams. *Engineering with Computers*. 2022. Vol. 38 (6). P. 5033 – 5049. DOI: 10.1007/s00366-021-01553-x

185. Zargar Ershadi M., Faraji Oskouie M., Ansari R. Nonlinear vibration analysis of functionally graded porous circular plates under hygro-thermal loading. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024. Vol. 52 (2). P. 1042 – 1059. DOI: 10.1080/15397734.2022.2134147

186. Kuznetsov Y.A., Kuznetsov I.A., Kuznetsov Y. Elements of applied bifurcation theory, 4th Edition. Cham (Netherlands): Springer Cham, 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4

187. Karimiasla M., Ebrahimia F., Maheshb V. Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 143. art. no. 106152. DOI: 10.1016/j.tws.2019.04.044

188. Karimiasl M., Ebrahimi F. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol, 144. art. no. 106128. DOI 10.1016/j.tws.2019.04.020.

189. Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R. Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*.2021. Vol. 510. art. no. 116283. DOI 10.1016/j.jsv.2021.116283

190. Zhang Y., Li Y. Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Composite Structures*. 2019. Vol. 221. art. no. 110884. DOI 10.1016/j.compstruct.2019.04.056

191. Li C., Shen H.-S., Wang H., Yu Z. Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 174. art. no. 105472. DOI https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105472

192. Goncalves B. R., Jelovica J., Romanoff J. A homogenization method for geometric nonlinear analysis of sandwich structures with initial imperfections. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 87. P. 194–205. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2016.02.009

193. Yongqiang L., Feng L., Yongliang H. Geometrically nonlinear forced vibrations of the symmetric rectangular honeycomb sandwich panels with completed clamped supported boundaries. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93 (2). P. 360–368. DOI 10.1016/j.compstruct.2010.09.006

194. Li Y., Zhou M., Wang T., Zhang Y. Nonlinear primary resonance with internal resonances of the symmetric rectangular honeycomb sandwich panels with simply supported along all four edges. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 147. art. no. 106480. DOI 10.1016/j.tws.2019.106480

195. Malekzadeh P. A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates. *Thin-Walled Structures*. 2007. Vol. 45 (2). P. 237–250. DOI 10.1016/j.tws.2007.01.011

196. Chen X., Feng Z. Dynamic behaviour of a thin laminated plate embedded with auxetic layers subject to in-plane excitation. *Mechanics Research Communications*. 2017. Vol. 85. P. 45–52. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2017.07.013

197. Hao W. L., Zhang W., Yao M. H. Multipulse Chaotic dynamics of six-dimensional nonautonomous nonlinear system for a honeycomb sandwich plate. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24. art. no. 1450138. DOI:10.1142/S0218127414501387

198. Li X. Parametric resonances of rotating composite laminated nonlinear cylindrical shells under periodic axial loads and hygrothermal environment. *Composite Structures*. 2021. Vol. 255. art. no. 112887. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112887

199. Hao Y.X., Wang M. X., Zhang W., Yang, Liu L. T., Qian Y. H. Bending-torsion coupling bursting oscillation of a sandwich conical panel under parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*. 2021. Vol. 495. art. no. 115904. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115904

200. Foroutan K., Dai L., Zhao, H. Non-linear parametric vibration of the laminated composite shallow shells including primary and 1:2 internal resonances. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. Vol. 31(15). P. 3444–3475. https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2177911

201. Li J., Li H., Yang Y., Fang Y., Wang H., Wang X., Zhang H., Wang H., Cao H., Hou J., Sun G., Du D., Liu X., Xu Z., Sun W., Luo Z., Han Q. Vibration behaviours of composite conical–cylindrical shells with damping coating: Theory and experiment. *Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 203(10). art. no. 112218. DOI: 10.1016/j.tws.2024.112218

202. Zarei M., Rahimi G. H., Hemmatnezhad M. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 161(4). art. no. 107465. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107465

203. Soureshjani A. H., Talebitooti R., Talebitooti M. A semi-analytical approach on the effect of external lateral pressure on free vibration of joined sandwich aerospace composite conical-conical shells. *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 99(4). art. no. 105559. DOI: 10.1016/j.ast.2019.105559

204. Li H., Hao Y. X., Zhang W., Liu L. T., Yang S. W., Cao Y. T. Natural vibration of an elastically supported porous truncated joined conical-conical shells using artificial spring technology and generalized differential quadrature method. *Aerospace Science and Technology*. 2022. Vol. 121(2). art. no. 107385. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107385

205. Bagheri H., Kiani Y., Eslami M. R. Free vibration of FGM conical–spherical shells. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 160(3). art. no. 107387. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107387

206. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M.A. Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 318. P. 957-980. DOI: 10.1016/j.cma.2017.02.020

207. Mehri M., Asadi H., Wang Q. On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Structures*. 2016. Vol. 153. P. 938–951. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.07.009

208. Chai Y., Song Z., Li F. Investigations on the aerothermoelastic properties of composite laminated cylindrical shells with elastic boundaries in supersonic airflow based on the Rayleigh–Ritz method. *Aerospace Science and Technology*. 2018. Vol. 82-83. P. 534-544. DOI: 10.1016/j.ast.2018.09.040

209. Chen J., Li Q.S. Nonlinear aeroelastic flutter and dynamic response of composite laminated cylindrical shell in supersonic air flow. *Composite Structures*. 2017. Vol. 168. P. 474–484. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.02.019

210. Majidi-Mozafari K., Bahaadini R., Saidi A.R. Aeroelastic flutter analysis of functionally graded spinning cylindrical shells reinforced with graphene nanoplatelets in supersonic flow. *Materials Research Express*. 2021. Vol. 8. art. no. 115012. DOI: 10.1088/2053-1591/ac2ce4

211. Cachulo D., Akhavan H., Ribeiro P. Supersonic flutter of variable stiffness circular cylindrical shells. *Composite Structures*. 2023. Vol. 313. art. no. 116927. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116927

212. Houshangi A., Jafari A.A., Haghighi S.E., Nezami M. Supersonic flutter characteristics of truncated sandwich conical shells with MR core. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 173. art. no. 108888. DOI: 10.1016/j.tws.2022.108888

213. Amabili M., Reddy J. N. Nonlinear mechanics of sandwich plates: Layerwise third-order thickness and shear deformation theory. *Composite Structures*. 2012. Vol. 278. art. no. 114693. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114693

214. Amabili M: Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. DOI: 10.1121/1.3021311

215. Amabili M., Reddy J.N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. P. 409–418. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.013

216. Amabili M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *Composite Structures*. 2001. Vol. 94. P. 207–220. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.07.001

217. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. P. 745–752. DOI: 10.1115/1.3167719

218. Reddy J.N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*. 1984. Vol. 20. P. 881–896. DOI: 10.1016/0020-7683(84)90056-8

219. M. Xu, D. Liu, P. Wang, Z. Zhang, H. Jia, H. Lei, D. Fang. In-plane compression behavior of hybrid honeycomb metastructures: Theoretical and experimental studies, *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 106. art. no. 106081. DOI: 10.1016/j.ast.2020.106081

220. Grediac M. A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. P. 1777–1788. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90233-W

221. Amabili M. Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781316422892

222. Meirovitch L. Elements of vibration analysis. New York: McGraw-Hill, 1998.

223. Meirovitch L.: Fundamentals of Vibrations. New York: Mc Graw Hill, 1970.

224. Kim Sitae, Palazzolo Alan. Shooting/continuation based bifurcation analysis of large order nonlinear rotordynamic systems. *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 211. art. no. 18003. DOI: 10.1051/matecconf/201821118003

225. Roose D., Szalai R. Continuation and Bifurcation Analysis of Delay Differential Equations. In: Krauskopf, B., Osinga, H.M., Galán-Vioque, J. (eds) Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems. Understanding Complex Systems. Dordrecht: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-1-4020-6356-5_12

226. Shen H.S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Structures*. 2009. Vol. 91. P. 9–19. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.04.026

227. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite

doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Structures*. 2017. Vol. 174. P. 87–109. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.04.038

228. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 182. P. 364–379. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.09.043

229. Keleshteri M.M., Asadi H., Wang Q. On the snap-through instability of post-buckled FG-CNTRC rectangular plates with integrated piezoelectric layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 331. P. 53–71. DOI: 10.1016/j.cma.2017.11.015

230. Mei C., Abdel-Motagaly K., Chen R. Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds. *Applied Mechanics Reviews*. 1999. Vol. 52. P. 321–332. DOI: 10.1115/1.3098919

231. Alijani F., Amabili M., Bakhtiari-Nejad F. Thermal effects on nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. P. 2541–2553. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.04.016

232. Man Y., Li Z., Zhang Z. Interfacial friction damping characteristics in MWNT-filled polycarbonate composites. *Frontiers of Materials Science in China*. 2009. Vol. 3. P. 266–272. DOI: 10.1007/s11706-009-0040-1

233. Khan S., Li C., Siddiqui N., Kim J. Vibration damping characteristics of carbon fiber-reinforced composites containing multi-walled carbon nanotubes. *Composites Science and Technology*. 2011. Vol. 71. P. 1486–1494. DOI: 10.1016/j.compscitech.2011.03.022

234. Avramov K.V. Bifurcation behavior of steady vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities interacting with three-dimensional inviscid potential flow. *Journal of Vibration and Control*. 2016. Vol. 22 (5). P. 1198–1216. DOI: 10.1177/107754631453471

235. Avramov K.V., Strel'nikova E.A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with

geometrical non-linearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 70. P. 1335–1354. DOI:10.1007/s11071-012-0537-5

236. Avramov K.V., Papazov S.V., Breslavsky I.D. Dynamic instability of shallow shells in three-dimensional incompressible inviscid potential flow. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 394. P. 593–611. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.01.048

237. Zhou X., Shin E., Wang K.W., Bakis C.E. Interfacial damping characteristics of carbon nanotube-based composites. *Composites Science and Technology*. 2004. Vol. 64. P. 2425–2437. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.06.001

238. Guimarães T.A.M., Marques F.D., Ferreira A.J.M. On the modeling of nonlinear supersonic flutter of multibay composite panels. *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. art. no. 111522. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111522

239. Messina A., Soldatos K.P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 227. P. 749–768. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2347

240. Timarci T., Soldatos K.P. Comparative dynamic studies for symmetric cross-ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *Journal of Sound and Vibration*. 1995. Vol. 187. P. 609–624. DOI: 10.1006/jsvi.1995.0548

241. Amabili M., Pellicano F. Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells. *AIAA Journal*. 2001. Vol. 39. P. 564–573. DOI: 10.2514/2.1365

242. Amabili M.: A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 264. P. 1091–1125. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01385-8

243. Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

244. Asadi H. Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 138. P. 214–224. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.05.039

245. Марчук М.В., Тучапський Р.І. Розрахунок локально навантажених тонких ортотропних замкнених конічних оболонок на основі класичної та деяких уточнених теорій. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2024. 67, № 3-4. С. 172–194. DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.3-4.172-194

246. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 69. P. 109–128. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026

247. Malyshev S., Avramov K. Nonlinear normal modes and bifurcations of geometrically nonlinear vibrations of flexible beams with breathing cracks. *Acta Mechanica*. 2025. Vol. 236(2). P. 1317–1337. DOI: :10.1007/s00707-024-04191-8

248. Bolotin V.V. The Dynamic Stability of Elastic Systems. Holden-Day, Inc., 1964. 451 p.

249. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M.. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. *Meccanica*. 2014. Vol. 49 (8). DOI: 10.1007/s11012-014-0027-6

250. Larin O., Potopalska K., Timchenko G., Vasylchenko N. Simulation of Vibro-Isolation Performance in Sensitive Cargo Transportation Platforms with Quasi-Zero-Stiffness Suspension under Impact Perturbations. *Engineering Transactions*. 2026. Vol. 74 (1). P. 105–120. DOI: 10.24423/engtrans.2025.3484

ДОДАТОК А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Avramov K.V., Chernobryvko M.V., Uspensky B.V. Free vibrations of functionally gradient cnt-infused cylindrical shells | Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. *Space Science and Technology*. 2019. Vol. 25, № 2(117). P. 23-37. DOI: 10.15407/KNIT2019.02.023. *(квартиль Q4)*

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання вільних коливань наноармованої циліндричної оболонки.

2. Avramov K.V., Chernobryvko M. , Uspensky B. , Seitkazrnova K.K. , Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite cylindrical shells in supersonic flow. *Nonlinear dynamics*. 2019. №98. P. 1853-1876. DOI: 10.1007/s11071-019-05292-z. *(квартиль Q1)*

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань циліндричної оболонки в надзвуковому струмені.

3. Avramov K., Myrzaliyev D., Uspensky B., Sakhno N., Seitkazenova K.K. Buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite joined spherical-cylindrical-spherical thin-walled structure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science (PIC)*. 2021. Vol. 235, issue 22. Pp. 6287-6310. DOI: 10.1177/09544062211005795. *(квартиль Q2)*

Здобувачу належить розробка алгоритмічного та програмного забезпечення, а також проведення оптимізаційних заходів та тестування.

4. Сахно Н.Г., Аврамов К.В., Успенський Б.В. Dynamic Instability of a Compound Nanocomposite Shell [Динамічна втрата стійкості складеною нанокомпозитною оболонкою]. *Космічна наука і технологія*. 2021, № 5 (22). С. 60-70. DOI: 10.15407/knit2021.05.060. *(квартиль Q4)*

Здобувачем запропоновано методику аналізу коливань складених оболонок.

5. Uspensky B., Avramov K., Sakhno N. and Nikonov O. Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Conical-Cylindrical Shell. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22, No. 7. Paper 2250039. 28 pages. DOI: 10.1142/S0219455422500390. *(квартиль Q1)*

Здобувачем проведено аналіз втрати динамічної стійкості складеною оболонкою.

6. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear supersonic flutter of sandwich truncated conical shell with flexible honeycomb core manufactured by fused deposition modeling. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 143. Paper 104039. 18 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104039. *(квартиль Q1)*

Здобувачем проведено аналіз автоколивань тришарової конічної оболонки.

7. Avramov K., Uspensky B., Sakhno N., Nikonov O. Transient response of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite conical shell with ring-stiffener under the action of impact loads. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2022. № 91. Paper 104429. 13 pages. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104429 *(квартиль Q1)*

Здобувачем запропоновано модель деформування композитної конічної оболонки.

8. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Polishchuk O. & Salenko A. Experimental and Numerical Study on Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modelling. *Applied Composite Materials*. 2022. Vol. 29. P. 2033–2061. DOI: 10.1007/s10443-022-10057-w. *(квартиль Q2)*

Здобувачем проведено аналіз та узагальнення експериментальних даних та обчислювальний експеримент.

9. Derevianko I., Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Maksymenko-Sheiko K. Experimental and numerical analysis of mechanical characteristics of fused deposition processed honeycomb fabricated from PLA or ULTEM 9085. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2022. Vol. 25, Issue 2. P. 264-283. DOI: 10.1177/10996362221137292 *(квартиль Q1)*

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання експерименту.

10. Avramov K.V., Uspensky B.V., Derevyanko I.I., Degtyarev M.O., Polishchuk O.F., Chernobryvko M.V. Dynamic properties of nanocomposite and three-layer thin-walled aerospace elements manufactured by additive technologies. *Space Science & Technology*. 2023. Vol. 29(1). P. 52-64. DOI: 10.15407/knit2023.01.052 *(квартиль Q4)*

Здобувачем проведено чисельний аналіз властивостей стільникових заповнювачів та розроблено програмне забезпечення для аналізу коливань оболонкових елементів конструкцій.

11. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear vibrations of doubly curved composite sandwich shells with FDM additively manufactured flexible honeycomb core. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234, Issue 3. P. 1183–1210. DOI: 10.1007/s00707-022-03426-w *(квартиль Q2)*

Здобувачем реалізовано модель деформування оболонки та метод аналізу частотного відгуку.

12. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shell with Fused Deposition Processed Honeycomb Core and Carbon Nanotubes Reinforced Composite Faces Sheets. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023. Vol. 12(2). 2003–2023 DOI: 10.1007/s42417-023-00960-2 *(квартиль Q2)*

Здобувачем запропоновано модель деформування оболонки та розроблено програмне забезпечення для аналізу коливань оболонки.

13. Avramov K, Chernobryvko Marina, Pierre C., Uspensky Boris, Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Influence of cell breakings on the buckling

of composite sandwich shells with FDM additively manufactured honeycomb cores. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2025. Vol. 239 (8). P. 774-791. DOI: 10.1177/09544100241308955 *(квартиль Q2)*

Здобувачем запропоновано підхід до моделювання недосконалості стільникового заповнювача.

14. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Maksymenko-Sheiko K., Chernobryvko M. Mechanical properties of auxetic honeycombs realized via material extrusion additive manufacturing: Experimental testing and numerical studies. *Applied Composite Materials*. 2025. Vol. 32(1). P. 119–148. DOI: 10.1007/s10443-024-10269-2. *(квартиль Q2)*

Здобувачем проведено обчислювальні експерименти.

15. Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Nikonov O. Dynamic instability of composite sandwich joined conical–cylindrical shell interacting with supersonic gas stream. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2025. Vol. 105, Issue 5. Paper e70063. DOI: 10.1002/zamm.70063 *(квартиль Q3)*

Здобувачем запропоновано методику дискретизації механічних енергій оболонки та розроблено програмне забезпечення для аналізу втрати динамічної стійкості.

16. Uspensky B., Avramov K., Malyshev S., Nikonov O. Geometrically nonlinear oscillations of composite sandwich cylindrical shell with honeycomb core under axial time periodic force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2025. Vol. 178. Paper 105196. 14 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105196 *(квартиль Q1)*

Здобувачу належить розробка моделі нелінійного деформування циліндричної оболонки та застосування методу продовження за довжиною дуги для аналізу частотного відгуку

17. Avramov K., Uspensky B., Liubarskyi B.. Asymptotic analysis of resonant nonlinear oscillations of composite sandwich doubly curved shell with

soft honeycomb core under axial harmonic excitation. *Acta Mechanica*. 2026. Vol. 237. P. 3069-3090. DOI: 10.1007/s00707-026-04648-y *(квартиль Q2)*

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання власних форм оболонки.

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

18. Avramov K.V., Sakhno N.H., Uspensky B.V. Transient dynamic response of a nanocomposite conical shell with a ring stiffener under the action of an impact load. *Technical Mechanics*. 2020. No. 2. P. 64-78. DOI: 10.15407/itm2020.03.064

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання перехідного процесу.

19. Avramov K.V., Uspenskyi B.V., Sakhno N.H., Biblik I.V. Non-stationary Response of a Carbon Nanotube-reinforced Composite Conical Shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 23, no. 2. P. 21-32. DOI: 10.15407/pmach2020.02.021

Здобувачем розроблено математичну модель напружено-деформованого стану оболонки.

20. Avramov Kostiantyn V., Sakhno Nataliia H., Uspenskyi Borys V. Static buckling of a pre-loaded complex nano-composite shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, no. 1. P. 28-35. DOI: 10.15407/pmach2021.01.028

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

21. Успенский Б., Аврамов К., Деревянко И., Библик И. К расчету механических характеристик сотовых заполнителей, изготовленных аддитивными технологиями FDM. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2021. Вып.1. С. 14-20. DOI: 10.32620/aktt.2021.1.02.

Здобувачем проведено скінченно-елементну гомогенізацію стільникового заповнювача та отримано його пружні властивості.

22. Деревянко І. І., Аврамов К. В., Успенський Б. В., Саленко О. Ф. Експериментальний аналіз механічних характеристик деталей ракет-носіїв,

виготовлених за допомогою FDM адитивних технологій. *Технічна механіка*. 2021. № 1. С. 92-100. DOI: 10.15407/itm2021.01.092

Здобувач здійснював обчислювальний супровід експерименту.

23. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Derevianko Ihor I. Analytical calculation of the mechanical properties of honeycombs printed using the fdm additive manufacturing technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №2. P. 16-23. DOI: 10.15407/pmach2021.02.016

Здобувачем проведено оптимізацію програмного забезпечення та скінченно-елементний аналіз для верифікації результатів.

24. Derevianko I.I., Uspenskyi B.V., Avramov K.V., Salenko O.F., Biblik I.V. Experimental and numerical analysis of the shear properties of honeycomb cores produced using additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 71-76. DOI: 10.15407/pmach2021.04.071.

Здобувачем проведено обчислювальний експеримент, а також узагальнено експериментальні дані

25. Uspenskyi Borys V., Avramov Kostiantyn V., Derevianko Ihor I. Vibrations of a cylindrical sandwich shell with a honeycomb core made using FDM technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 49-60. DOI: 10.15407/pmach2021.04.049.

Здобувачем отримано власні частоти та форми коливань оболонки.

26. Avramov K. V., Uspensky B. V., Derevianko I. I. Nonlinear oscillations of a sandwich plate with a 3D-printed honeycomb core. *Technical mechanics*. 2021. № 4. P. 104-117. DOI: 10.15407/itm2021.04.104

Здобувачем проведено аналіз характеристик стільникового заповнювача та скінченно-елементне моделювання відгуку пластини.

27. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Biblik Iryna V. Instability of a Three-Layer Conical Shell with Honeycomb Structure Made by Additive Technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 6-14. DOI: 10.15407/pmach2022.01.006

Здобувачем проведено аналіз втрати стійкості положення рівноваги конічної оболонки.

28. Деревянко І. І., Успенський Б. В., Аврамов К. В., Саленко О. Ф. Експериментальний і числовий аналіз напруженого стану стільникових заповнювачів, виготовлених адитивними технологіями. *Технічна механіка*. 2022. № 1. С. 42-50. DOI: 10.15407/itm2022.01.042

Здобувачем проведено обчислювальний експеримент та проведено оцінку пластичних властивостей матеріалу стільників.

29. Avramov K. V., Uspensky B. V. Self-vibrations of a truncated conical sandwich shell with a honeycomb core made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2022. №2. P. 87-100. DOI: 10.15407/itm2022.02

Здобувачем реалізовано метод продовження за параметром для аналізу автоколивань оболонки.

30. Аврамов К. В., Успенський Б. В. Вимушені коливання тришарової оболонки подвійної кривизни з пружним стільниковим заповнювачем. *Технічна механіка*. 2022. № 4. С. 79-94. DOI: 10.15407/itm2022.04.079

Здобувачем побудовано вирази для опису напружено-деформованого стану оболонки.

31. Uspenskyi B. V., Derevianko I. I., Avramov K. V., Polishchuk O. F., Salenko O. F. Multi-Cycle Fatigue of Composite Three-Layer Plates with Honeycomb Structure Made by Additive FDM Technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia*. 2022. vol. 25, no. 3. P. 16-28. DOI: 10.15407/pmach2022.03.016.

Здобувачем побудовано S-N криві втомних властивостей матеріалу PLA та сендвіч-пластин.

32. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Urniaieva Inna A., Breslavskyi Ivan D. Bifurcations and Stability of Nonlinear Vibrations of a Three-Layer Composite Shell with Moderate Amplitudes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashinobuduvannia*. 2023. Vol. 26, no. 2. P. 6-15. DOI: 10.15407/pmach2023.02.006

Здобувачем запропоновано методику побудови біфуркаційних діаграм

33. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Marshuba I. S. Static stability of sandwich panels with honeycomb cores made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2023. Vol. 3. P. 88-97. DOI: 10.15407/itm2023.03.088

Здобувачем запропоновано методику аналізу деформування панелі після втрати стійкості

34. Uspenskyi B., Avramov K., Salenko O., Nikonov O. Dynamic instability in the interaction of a composite shell made by additive technologies with a gas flow. *Technical Mechanics*. 2024. Vol. 3. P. 91-109. DOI: 10.15407/itm2024.03.097

Здобувачем досліджено втрату стійкості оболонкою та проведено варіативні розрахунки.

35. Derevianko I. I., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Salenko O. F. Manufacturing Technology, Experimental and Numerical Analysis of Static Bending of Three-Layer Composite Plate with Honeycomb Structure. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27, no. 3. P. 25-33. DOI: 10.15407/pmach2024.03.025.

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання експерименту.

36. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Liubarskyi Borys H., Smetskykh Oleksii A. Linear vibrations analysis of a composite sandwich conical shell manufactured by additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2025. Vol. 28, no. 2. P. 27-35. DOI: 10.15407/pmach2025.02.027.

Здобувачем отримано власні частоти коливань оболонки.

37. Успенський Б., Аврамов К., Малишев С., Біблік І. Резонансні параметричні коливання циліндричної сендвіч-оболонки. *Технічна механіка*. 2025. № 3. С. 46-62. DOI: 10.15407/itm2025.03.046

Здобувачу належить написання програм та здійснення чисельного аналізу.

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій:

38. Avramov K., Sakhno N., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained oscillations of nanotubes reinforced composite thin-walled structures. *2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2020 conference IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 5–10 October 2020. P. 24-28. DOI:10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250099

Здобувачем запропоновано модель нелінійного деформування конструкції.

39. Avramov K. V., Uspensky B. V., Sakhno N. H., Nikonov O. Buckling of Joined Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Thin-Walled Structure. *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2021 conference IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13–17 September 2021. P. 323-327. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570016.

Здобувачем проведено чисельний аналіз деформування конструкції.

40. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Polishchuk O., Salenko O. Stiffness and Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2023. Vol. 536. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-20141-7_44.

Здобувачем проведено аналіз та узагальнення експериментальних даних, а також скінченно-елементне моделювання експерименту.

41. Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Nonlinear vibrations of sandwich shells of revolutions with carbon nanotubes reinforced composite faces and fused deposition processed honeycomb core. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced*

Technology (KhPIWeek): Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 03–07 October 2022, P. 64-69. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916364

Здобувачем проведено аналіз власних коливань оболонки та створено програмну реалізацію методу пристрілки.

42. Chernobryvko Maryna, Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Dynamic Deformation of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Spherical-Cylindrical-Spherical Shell. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*: Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 03–07 October 2022. P. 785-788. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916392

Здобувачем створено програмне рішення для аналізу відгуку оболонки.

43. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Urniaieva Inna. Geometrically Nonlinear Oscillations of Sandwich Thin-Walled Structure with Honeycomb Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_19

Здобувачем запропоновано метод аналізу частотного відгуку конструкції.

44. Uspensky B., Avramov K. Linear Parametric Vibrations of Sandwich Cylindrical Shell with Honeycomb Manufactured by FDM Additive Technology. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_20

Здобувачу належить алгоритмічна та програмна реалізація моделі деформування оболонки та методу аналізу частотного відгуку.

45. Uspensky B., Avramov K., Chernobryvko M., Nikonov O. Linear Vibrations of Sandwich Cylindrical Shells with Nanocomposite Layers. *Lecture Notes in Networks and Systems*: Smart Technologies in Urban Engineering / O.

Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2026. Vol. 1658. P. 140–150. DOI: 10.1007/978-3-032-06829-3_13.

Здобувачем досліджено залежність лінійних коливань оболонки від типу наноармування.

46. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Salenko A. Self-sustained Vibrations of Conical Sandwich Shell Interacting with Supersonic Gas Stream. *Тези доповіді на конференції Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024)*. 2024. 11 pages. DOI: 10.1007/978-3-031-94852-7_38

Здобувачем проведено аналіз вільних коливань оболонки.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

47. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes. Nicosia, Cyprus. 17-19 April, 2019. P. 371-372.

Здобувачем побудовано модель нанокомпозитного матеріалу та проведено скінченно-елементні розрахунки.

48. Аврамов К.В. Клименко Д.В., Чернобрывко М.В., Успенский Б. Флаттер тонкостенных конструкций из нанокомпозитов. Тезисы докладов Научно-практической конференции. «Современные расчетно-экспериментальные методы определения характеристик ракетно-космической техники». Дніпро, 10–12 грудня 2019. С. 36.

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань оболонки.

49. Chernobryvko Marina, Uspensky Boris, Avramov Konstantin, Sakhno Nataliia, Mesha Yurii, Kruszka Leopold. Advantages of using nanocomposite materials for manufacturing of body armour suit’s plates. Proceedings of the Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference. – October 8–9, 2019. – Roubaix, France. – P. 306-311.

Здобувачем проведено скінченно-елементні розрахунки деформування нанокомпозитних пластин.

50. Аврамов К.В. Чернобривко М.В., Успенський Б.В., Сахно Н.Г. Моделювання деформування корпусних елементів ракет з нанокомпозитного матеріалу при нестаціонарному навантаженні. Матеріали конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров‘я. 2020». – 13–15 травня 2020. Ч. 1. С. 61.

Здобувачем запропоновано підхід до дискретизації математичних моделей деформування складених оболонок.

51. Аврамов К.В., Успенский Б.В., Сахно Н.Г. Нестационарная динамика функционально-градиентной усиленной углеродными нанотрубками композитной составной оболочечной конструкции. Матеріали ІІ міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 379-380.

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

52. Успенский Б.В., Аврамов К.В., Сахно Н.Г. Динамическая неустойчивость составных нанокомпозитных оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Матеріали ІІ міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 336

Здобувачем отримано власні частоти та форми коливань конструкції.

53. Avramov Konstantin, Uspensky Borys. Nonlinear vibrations of sandwich shells with additive manufactured flexible honeycomb core interacting with supersonic gas flow. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

Здобувачем запропоновано методику дискретизації рівнянь руху оболонки.

54. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Marina. Self-sustained Vibrations and Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon

Nanotubes Reinforced Composite Shells. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань нанокомпозитної циліндричної оболонки.

ДОДАТОК Б

ЗАТВЕРДЖУЮ

ЗАСТУПНИК ДИРЕКТОРА З НАУКОВОЇ РОБОТИ
ІНСТИТУТУ ЕНЕРГЕТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ
ІМ. А.М.ПІДГОРНОГО НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ
НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНА
ІНСТИТУТ ЕНЕРГЕТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ ІМ.А.М.ПІДГОРНОГО НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ №03534570

_____ Кирило МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО

19 січня 2026

ДОВІДКА
Про впровадження результатів досліджень,
які містяться в дисертаційній роботі
Успенського Бориса Валерійовича

Наукові результати, що містяться в дисертаційній роботі Успенського Бориса Валерійовича на тему «Коливання композитних багатошарових тонкостінних конструкцій при геометрично нелінійному деформуванні» було використано при виконанні наступних грантових тематик:

– 0119U102947 «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням» (МОН, 2019-2020) – моделі коливань складених композитних оболонок, а також методика аналізу нестаціонарного відгуку композитної усіченої конічної оболонки зі шпангоутом на імпульсне навантаження;

– 0120U104923 «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій» (НФДУ, 2020-2021, 2023) – моделі коливань багатошарових циліндричних та складених оболонок, аналіз втрати ними динамічної стійкості;

– 0124U003951 «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів» (НФДУ, 2024-2025) – модель нелінійних коливань багатошарової циліндричної оболонки, аналіз її параметричних коливань, аналіз механічних характеристик стільникових заповнювачів різних видів;

– 0124U003710 «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA» SPS G6176 (2024–2026) – методика визначення осереднених властивостей стільникових заповнювачів.

Керівник наукових робіт
завідувач відділу нелінійної механіки
та математичного моделювання
чл.-кор. НАН України, д.т.н, проф. Костянтин АВРАМОВ

ДОДАТОК В

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 2

Коефіцієнти розкладень (2.8)

$$\varepsilon_{xx,0}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \widetilde{\varepsilon_{xx,0}^{(i)}}, i = \{t, b, c\};$$

$$k_{xx,0}^{(i)} = \frac{\partial \varphi_{11}^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{R_i}\frac{\partial u_i}{\partial x} + \widetilde{k_{xx,0}^{(i)}}, i = \{t, b, c\};$$

$$k_{xx,1}^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2}\right) + \widetilde{k_{xx,1}^{(t)}};$$

$$k_{xx,1}^{(b)} = \frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2}\right) + \widetilde{k_{xx,1}^{(b)}};$$

$$k_{xx,1}^{(c)} = -\frac{1}{2{h_c}^2}\left(h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} - h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + 3h_t\frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial x} - 3h_b\frac{\partial \varphi_{11}^{(b)}}{\partial x} - 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 8\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} - 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\right) + \widetilde{k_{xx,1}^{(c)}};$$

$$k_{xx,2}^{(i)} = \widetilde{k_{xx,2}^{(i)}}, i = \{t, b\};$$

$$k_{xx,2}^{(c)} = -\frac{1}{{h_c}^3}\left(h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + 3h_t\frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial x} + 3h_b\frac{\partial \varphi_{11}^{(b)}}{\partial x} + 4h_c\frac{\partial \varphi_{11}^{(c)}}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} + 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\right) + \widetilde{k_{xx,2}^{(c)}};$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \varphi} + {A_i}' u^{(i)}\right) + \frac{w^{(i)}}{R_i} + \widetilde{\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}}, i = \{t, b, c\};$$

$$k_{\varphi\varphi,0}^{(i)} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \varphi_{21}^{(i)}}{\partial \varphi} + {A_i}'\frac{\partial \varphi_{11}^{(i)}}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{A_i R_i}{A_i'}^{u^{(i)}} - \frac{w^{(i)}}{{R_i}^2} + \widetilde{k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}}, i = \{t, b\};$$

$$k_{\varphi\varphi,0}^{(c)} = \frac{1}{A_c}\left(\frac{\partial \varphi_{21}^{(c)}}{\partial \varphi} + {A_c}'\varphi_{11}^{(c)}\right) + \frac{1}{R_c A_c}\frac{dA_c}{dx}u^{(c)} - \frac{w^{(b)}}{h_c R_c} + \frac{w^{(c)}}{A_c {R_c}^2} - \frac{w^{(t)}}{h_c A_c R_c} +$$

$$+ \widetilde{k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(t)} = \frac{1}{4A_t{R_t}^2}\left(\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi} + 4A_t{}'u^{(t)}\right) - \frac{1}{4A_tR_t}\left(3\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial\varphi} + 4A_t{}'\varphi_{11}^{(t)}\right) -$$

$$- \frac{1}{A_th_t}\left(\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial\varphi} + A_t{}'\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} + A_t{}'\varphi_{11}^{(t)}\right) - \frac{1}{{A_t}^2h_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2} + \frac{w^{(t)}}{{R_t}^3} +$$

$$+ \widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(b)} = \frac{1}{4A_b{R_b}^2}\left(\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi} + 4A_b{}'u^{(b)}\right) - \frac{1}{4A_bR_b}\left(3\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial\varphi} + 4A_b{}'\varphi_{11}^{(b)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{A_bh_b}\left(\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial\varphi} + A_b{}'\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} + A_b{}'\varphi_{11}^{(b)}\right) + \frac{1}{{A_b}^2h_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2} + \frac{w^{(b)}}{{R_b}^3} +$$

$$+ \widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(b)}}$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(c)} = \frac{w^{(c)}}{{R_c}^3} + \frac{1}{8A_c{h_c}^2}\left(\frac{{h_b}^2}{R_b}\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial\varphi} + \frac{{h_t}^2}{R_t}\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial\varphi}\right) -$$

$$- \frac{1}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi} - \frac{h_b}{R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8A_c{h_c}^2}\left(\frac{{h_t}^2}{{R_t}^2}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi} + \frac{{h_b}^2}{{R_b}^2}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right) -$$

$$- \frac{A_c{}'}{2A_c{h_c}^2}\left(h_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - h_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right) - \frac{3A_c{}'}{2A_c{h_c}^2}\left(h_t\varphi_{11}^{(t)} - h_b\varphi_{11}^{(b)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2A_c{h_c}^2}\left(\frac{h_b}{A_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2} - \frac{h_t}{A_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{h_c{R_c}^2}\left(w^{(b)} - w^{(t)}\right) +$$

$$+ \frac{2}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi} - 2\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{2}{{h_c}^2R_c}\left(w^{(t)} - 2w^{(c)} + w^{(b)}\right) - \frac{\frac{\partial\varphi_{21}^{(c)}}{\partial\varphi}}{A_cR_c} +$$

$$+ \frac{3}{2A_c{h_c}^2}\left(h_b\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial\varphi} - h_t\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial\varphi}\right) + \frac{2A_c{}'}{A_c{h_c}^2}\left(u^{(t)} - 2u^{(c)} + u^{(b)}\right) -$$

$$- \frac{A_c{}'\varphi_{11}^{(c)}}{A_cR_c} + \frac{A_c{}'u^{(c)}}{A_c{R_c}^2} + \widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(t)} = \frac{\partial \varphi_{21}^{(t)}}{\partial \varphi} \frac{1}{A_t R_t} \left(\frac{3}{4R_t} + \frac{1}{h_t} \right) + \frac{3 \frac{\partial v^{(t)}}{\partial \varphi}}{4 A_t {R_t}^3} + \varphi_{11}^{(t)} A_t' \frac{1}{A_t R_t} \left(\frac{1}{R_t} + \frac{1}{h_t} \right) + \frac{\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial \varphi^2}}{{A_t}^2 h_t R_t} + \\ + \frac{{A_t}' \frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}}{A_t h_t R_t} + \widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(b)} = \frac{\partial \varphi_{21}^{(b)}}{\partial \varphi} \frac{1}{A_b R_b} \left(\frac{3}{4R_b} - \frac{1}{h_b} \right) + \frac{3 \frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi}}{4 A_b {R_b}^3} + \varphi_{11}^{(b)} A_b' \frac{1}{A_b R_b} \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{h_b} \right) - \\ - \frac{\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial \varphi^2}}{{A_b}^2 h_b R_b} - \frac{{A_b}' \frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}}{A_b h_b R_b} + \widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(b)}};$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(c)} = w^{(t)}\frac{1}{h_c {R_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}\right)+w^{(c)}\frac{4}{{h_c}^2{R_c}^2}-w^{(b)}\frac{1}{h_c {R_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}+\frac{2}{h_c}\right)-$$
$$-u^{(t)}\frac{2A_c'}{A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}\right)+u^{(c)}\frac{4A_c'}{A_c {h_c}^2{R_c}^2}-u^{(b)}\frac{2A_c'}{A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}+\frac{2}{h_c}\right)+$$
$$+\varphi_{11}^{(t)}\frac{3A_c'h_t}{2A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}\right)+\varphi_{11}^{(c)}\frac{A_c'}{A_c}\left(\frac{1}{{R_c}^2}-\frac{4}{{h_c}^2}\right)-$$
$$-\varphi_{11}^{(b)}\frac{3A_c'h_b}{2A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}+\frac{2}{h_c}\right)+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\frac{A_c'h_t}{2A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}\right)-$$
$$-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\frac{A_c'h_b}{2A_c {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}+\frac{2}{h_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_c {h_c}^2}\left(\frac{{h_t}^2}{4{R_t}^2h_c}-\frac{2h_t}{R_th_c}-\frac{2}{R_c}-\frac{{h_t}^2}{8{R_t}^2R_c}+\frac{h_t}{R_tR_c}+\frac{4}{h_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_c {R_c}^3}-$$
$$-\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_c {h_c}^2}\left(\frac{{h_b}^2}{4{R_b}^2h_c}+\frac{2h_b}{R_bh_c}+\frac{2}{R_c}+\frac{{h_b}^2}{8{R_b}^2R_c}+\frac{h_b}{R_bR_c}+\frac{4}{h_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{h_t}{A_c {h_c}^2}\left(-\frac{3}{h_c}-\frac{h_t}{8R_tR_c}+\frac{3}{2R_c}+\frac{h_t}{4R_th_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_{21}^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_c}\left(\frac{1}{{R_c}^2}-\frac{4}{{h_c}^2}\right)-$$
$$-\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{h_b}{A_c {h_c}^2}\left(\frac{3}{h_c}+\frac{h_b}{8R_bR_c}+\frac{3}{2R_b}+\frac{h_b}{4R_bh_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}\frac{h_t}{2A_cA_t {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}\right)-\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}\frac{h_b}{2A_cA_b {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}+\frac{2}{h_c}\right)+$$
$$+\widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}};$$

$$\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)} = -v^{(i)}\frac{A_c'}{A_c}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_i}+\widetilde{\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}}, i=\{t,b,c\};$$

$$k_{x\varphi,0}^{(i)} = -v^{(i)}\frac{R_i'}{{R_i}^2}-\varphi_{21}^{(t)}\frac{A_i'}{A_i}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\frac{1}{R_i}+\frac{\partial\varphi_{21}^{(i)}}{\partial x}-\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{1}{R_iA_i}+\frac{\partial\varphi_{11}^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_i}+$$
$$+\widetilde{k_{x\varphi,0}^{(i)}}, i=\{t,b,c\};$$

$$k_{x\varphi,1}^{(t)} = -v^{(t)}\frac{1}{2{R_t}^2}\left(\frac{A_t'}{2A_t}+\frac{R_t'}{R_t}\right)+\varphi_{21}^{(t)}\left(\frac{A_t'}{A_t h_t}+\frac{3A_t'}{4A_t R_t}-\frac{R_t'}{4{R_t}^2}\right)+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\frac{1}{4{R_t}^2}+$$
$$+\frac{\partial \varphi_{21}^{(t)}}{\partial x}\left(\frac{1}{4R_t}-\frac{1}{h_t}\right)+2\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{A_t'}{{A_t}^2 h_t}+\frac{\partial u^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{1}{{R_t}^2 A_t}-$$
$$-\frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{1}{A_t}\left(\frac{1}{h_t}+\frac{1}{R_t}\right)-2\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial \varphi}\frac{1}{A_t h_t}+\widetilde{k_{x\varphi,1}^{(t)}};$$

$$k_{x\varphi,1}^{(b)} = -v^{(b)}\frac{1}{2{R_b}^2}\left(\frac{A_b'}{2A_b}+\frac{R_b'}{R_b}\right)-\varphi_{21}^{(b)}\left(\frac{A_b'}{A_b h_b}-\frac{3A_b'}{4A_b R_b}+\frac{R_b'}{4{R_b}^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\frac{1}{4{R_b}^2}+\frac{\partial \varphi_{21}^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{1}{4R_b}+\frac{1}{h_b}\right)-2\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{A_b'}{{A_b}^2 h_b}+$$
$$+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{1}{{R_b}^2 A_b}+\frac{\partial \varphi_{11}^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{1}{A_b}\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{R_b}\right)+2\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial \varphi}\frac{1}{A_b h_b}+\widetilde{k_{x\varphi,1}^{(b)}};$$

$$k_{x\varphi,1}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^2}\Bigg(v^{(t)}\left(-\frac{A_c' {h_t}^2}{8{R_t}^2 A_c} + \frac{A_c' h_t}{R_t A_c} + \frac{R_t' h_t}{{R_t}^2} - \frac{R_t' {h_t}^2}{4{R_t}^3} - 2\frac{A_c'}{A_c}\right) + v^{(c)}\frac{4A_c'}{A_c} -$$

$$- v^{(b)}\left(\frac{A_c' {h_b}^2}{8{R_b}^2 A_c} + \frac{A_c' h_b}{R_b A_c} + \frac{R_b' h_b}{{R_b}^2} + \frac{R_b' {h_b}^2}{4{R_b}^3} + 2\frac{A_c'}{A_c}\right) -$$

$$- \varphi_{11}^{(t)}\left(\frac{A_c' {h_t}^2}{8R_t A_c} + \frac{R_t' {h_t}^2}{8{R_t}^2} - \frac{3A_c' h_t}{2A_c}\right) + \varphi_{21}^{(c)}\frac{A_c' {h_c}^2}{R_c A_c} -$$

$$- \varphi_{11}^{(b)}\left(\frac{A_c' {h_b}^2}{8R_b A_c} + \frac{R_b' {h_b}^2}{8{R_b}^2} + \frac{3A_c' h_b}{2A_c}\right) + \frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\left(2 - \frac{h_t}{R_t} + \frac{{h_t}^2}{8{R_t}^2}\right) -$$

$$- 4\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\left(2 + \frac{h_b}{R_b} + \frac{{h_b}^2}{8{R_b}^2}\right) + \frac{\partial \varphi_{21}^{(t)}}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}h_t + \frac{{h_t}^2}{8R_t}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_{21}^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{3}{2}h_b + \frac{{h_b}^2}{8R_b}\right) + \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{h_t}{A_t}\left(\frac{A_t'}{2A_t} + \frac{A_c'}{2A_c}\right) -$$

$$- \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{h_b}{A_b}\left(\frac{A_b'}{2A_b} + \frac{A_c'}{2A_c}\right) + \frac{\partial u^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{2}{A_c} + \frac{\partial u^{(c)}}{\partial \varphi}\frac{1}{A_c}\left(\frac{{h_c}^2}{{R_c}^2} - 4\right) +$$

$$+ \frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{2}{A_c} - \frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{3h_t}{2A_c} - \frac{\partial \varphi_{11}^{(c)}}{\partial \varphi}\frac{{h_c}^2}{R_c A_c} + \frac{\partial \varphi_{11}^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{3h_b}{2A_c} -$$

$$- \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x \partial \varphi}\frac{h_t}{2}\left(\frac{1}{A_t} + \frac{1}{A_c}\right) + \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x \partial \varphi}\frac{h_b}{2}\left(\frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_c}\right)\Bigg) + \widetilde{k_{x\varphi,1}^{(c)}};$$

$$k_{x\varphi,2}^{(t)} = \frac{1}{R_t A_t h_t}\Bigg(-v^{(t)}\frac{3h_t A_t'}{4{R_t}^2} - \varphi_{21}^{(t)}\left(A_t' + \frac{3h_t A_t'}{4R_t}\right) - \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi}\frac{A_t'}{A_t} +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_{11}^{(t)}}{\partial \varphi}\left(1 + \frac{h_t}{R_t}\right) + \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x \partial \varphi}\Bigg) + \widetilde{k_{x\varphi,2}^{(t)}};$$

$$k_{x\varphi,2}^{(b)} = \frac{1}{R_b A_b h_b}\Bigg(-v^{(b)}\frac{3h_b A_b'}{4{R_b}^2} + \varphi_{21}^{(b)}\left(A_b' - \frac{3h_b A_b'}{4R_b}\right) + \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi}\frac{A_b'}{A_b} -$$

$$- \frac{\partial \varphi_{11}^{(b)}}{\partial \varphi}\left(1 - \frac{h_b}{R_b}\right) - \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x \partial \varphi}\Bigg) + \widetilde{k_{x\varphi,2}^{(b)}};$$

$$k_{x\varphi,2}^{(c)} = v^{(t)}\frac{1}{R_cR_t{h_c}^2A_c}\left(-\frac{A_c'h_t}{h_c}+\frac{A_c'{h_t}^2}{8R_th_c}-\frac{A_c'{h_t}^2R_c}{4R_t{h_c}^2}+2\frac{A_c'h_tR_c}{{h_c}^2}-4\frac{A_c'R_cR_t}{{h_c}^2A_c}+\right.$$
$$\left.+2\frac{A_c'R_t}{h_c}-\frac{R_t'{h_t}^2A_cR_c}{2{R_t}^2{h_c}^2}+2\frac{R_t'h_tA_cR_c}{R_t{h_c}^2}\right)+$$
$$+v^{(c)}\frac{1}{{R_c}^2}\left(-\frac{A_c'}{R_cA_c}+\frac{4R_c'}{{h_c}^2}\right)+$$
$$+v^{(b)}\frac{1}{R_cR_b{h_c}^2A_c}\left(-\frac{A_c'h_b}{h_c}+\frac{A_c'{h_b}^2}{8R_bh_c}-\frac{A_c'{h_b}^2R_c}{4R_b{h_c}^2}+2\frac{A_c'h_bR_c}{{h_c}^2}-\right.$$
$$\left.-4\frac{A_c'R_cR_b}{{h_c}^2A_c}+2\frac{A_c'R_b}{h_c}-\frac{R_t'{h_b}^2A_cR_c}{2{R_b}^2{h_c}^2}+2\frac{R_t'h_bA_cR_c}{R_b{h_c}^2}\right)+$$
$$+\varphi_{21}^{(t)}\frac{1}{A_c{h_c}^2}\left(-\frac{A_c'{h_t}^2}{4R_th_c}-\frac{3A_c'h_t}{2R_c}+\frac{A_c'{h_t}^2}{8R_cR_t}+\frac{3A_c'h_t}{h_c}-\frac{R_t'{h_t}^2A_c}{4{R_t}^2h_c}\right)+$$
$$+\varphi_{21}^{(c)}\frac{A_c'}{A_c}\left(\frac{4}{{h_c}^2}-\frac{1}{{R_c}^2}\right)+$$
$$+\varphi_{21}^{(b)}\frac{1}{A_c{h_c}^2}\left(-\frac{A_c'{h_b}^2}{4R_bh_c}-\frac{3A_c'h_b}{2R_c}+\frac{A_c'{h_b}^2}{8R_cR_b}+\frac{3A_c'h_b}{h_c}-\frac{R_t'{h_b}^2A_c}{4{R_b}^2h_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\frac{1}{{h_c}^3}\left(4-2\frac{h_t}{R_t}+\frac{{h_t}^2}{4{R_t}^2}\right)-\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\frac{4}{R_c{h_c}^2}-$$
$$-\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\frac{1}{{h_c}^3}\left(4+2\frac{h_b}{R_b}+\frac{{h_b}^2}{4{R_b}^2}\right)+\frac{\partial\varphi_{21}^{(t)}}{\partial x}\frac{1}{{h_c}^3}\left(\frac{{h_t}^2}{4R_t}-3h_t\right)-$$
$$-\frac{4}{{h_c}^2}\frac{\partial\varphi_{21}^{(c)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{21}^{(b)}}{\partial x}\frac{1}{{h_c}^3}\left(\frac{{h_b}^2}{4R_b}+3h_b\right)+$$
$$+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{h_t}{A_t{h_c}^2}\left(\frac{A_t'}{A_th_c}-\frac{A_c'}{2R_cA_c}+\frac{A_c'}{2h_cA_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{h_b}{A_b{h_c}^2}\left(\frac{A_b'}{A_bh_c}-\frac{A_c'}{2R_cA_c}+\frac{A_c'}{2h_cA_c}\right)+$$
$$+\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{2}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{2}{h_c}-\frac{1}{R_c}\right)+\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{4}{A_c{h_c}^2R_c}-$$
$$-\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{2}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{2}{h_c}+\frac{1}{R_c}\right)+\frac{\partial\varphi_{11}^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{3h_t}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{1}{2R_c}-\frac{1}{h_c}\right)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_{11}^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_c}\left(\frac{1}{{R_c}^2}-\frac{4}{{h_c}^2}\right)-\frac{\partial\varphi_{11}^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{3h_b}{A_c{h_c}^2}\left(\frac{1}{2R_c}+\frac{1}{h_c}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}\frac{h_t}{{h_c}^2}\left(\frac{1}{2A_cR_c}-\frac{1}{A_ch_c}-\frac{1}{A_th_c}\right)-$$

$$-\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}\frac{h_b}{{h_c}^2}\left(\frac{1}{2A_cR_c}+\frac{1}{A_ch_c}+\frac{1}{A_bh_c}\right)+\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(c)}};$$

$$\varepsilon_{xz,0}^{(i)}=\varphi_{11}^{(i)}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}+\widetilde{\varepsilon_{xz,0}^{(i)}},i=\{t,b,c\};$$

$$k_{xz,0}^{(t)}=-\frac{2}{h_t}\left(\varphi_{11}^{(t)}+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(t)}};$$

$$k_{xz,0}^{(b)}=\frac{2}{h_b}\left(\varphi_{11}^{(b)}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(b)}};$$

$$k_{xz,0}^{(c)}=\frac{1}{{h_c}^2}\left(4u^{(t)}-8u^{(c)}+4u^{(b)}-3h_t\varphi_{11}^{(t)}+3h_b\varphi_{11}^{(b)}+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}(h_c-h_t)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}(h_c-h_b)\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(c)}};$$

$$k_{xz,1}^{(i)}=\widetilde{k_{xz,1}^{(i)}},i=\{t,b\};$$

$$k_{xz,1}^{(c)}=\frac{1}{{h_c}^3}\left(12u^{(t)}-12u^{(b)}-9h_t\varphi_{11}^{(t)}-12h_c\varphi_{11}^{(c)}-9h_b\varphi_{11}^{(b)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}(2h_c-3h_t)-4h_c\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}(2h_c-3h_b)\right)+\widetilde{k_{xz,1}^{(c)}};$$

$$k_{xz,2}^{(i)}=\widetilde{k_{xz,2}^{(i)}},i=\{t,b,c\};$$

$$\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}=\varphi_{21}^{(i)}+\frac{1}{A_i}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi}+\widetilde{\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}},i=\{t,b,c\};$$

$$k_{\varphi z,0}^{(t)}=v^{(t)}\frac{1}{2{R_t}^2}-\varphi_{21}^{(t)}\left(\frac{2}{h_t}+\frac{1}{2R_t}\right)-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{1}{A_t}\left(\frac{1}{R_t}+\frac{2}{h_t}\right)+\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,0}^{(b)} = v^{(b)} \frac{1}{2{R_b}^2} + \varphi_{21}^{(b)} \left(\frac{2}{h_b} - \frac{1}{2R_b} \right) - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} \frac{1}{A_b} \left(\frac{1}{R_b} - \frac{2}{h_b} \right) + \widetilde{k_{\varphi z,0}^{(b)}};$$

$$k_{\varphi z,0}^{(c)} = \frac{1}{{h_c}^2} \Bigg(v^{(t)} \left(4 - 2\frac{h_t}{R_t} + \frac{{h_t}^2}{4{R_t}^2} \right) - 8v^{(c)} + v^{(b)} \left(4 + 2\frac{h_b}{R_b} + \frac{{h_b}^2}{4{R_b}^2} \right) +$$
$$+ \varphi_{21}^{(t)} \left(-3h_t + \frac{{h_t}^2}{4R_t} \right) - \varphi_{21}^{(c)} \frac{{h_c}^2}{R_c} + \varphi_{21}^{(b)} \left(3h_b + \frac{{h_b}^2}{4R_b} \right) +$$
$$+ \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} \left(\frac{h_c}{A_c} - \frac{h_t}{A_t} \right) - \frac{\partial w^{(c)}}{\partial \varphi} \frac{{h_c}^2}{A_c R_c} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} \left(\frac{h_c}{A_c} - \frac{h_b}{A_b} \right) \Bigg) + \widetilde{k_{\varphi z,0}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(t)} = \frac{1}{R_t} \left(-v^{(t)} \frac{1}{4{R_t}^2} + \varphi_{21}^{(t)} \left(\frac{3}{4R_t} + \frac{1}{h_t} \right) + \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A_t h_t} + \frac{1}{A_t R_t} \right) \right) + \widetilde{k_{\varphi z,1}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(b)} = \frac{1}{R_b} \left(-v^{(b)} \frac{1}{4{R_b}^2} + \varphi_{21}^{(b)} \left(\frac{3}{4R_b} - \frac{1}{h_b} \right) + \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{A_b h_b} + \frac{1}{A_b R_b} \right) \right) +$$
$$+ \widetilde{k_{\varphi z,1}^{(b)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(c)} = v^{(t)} \frac{1}{R_t {h_c}^2} \left(-6\frac{h_t}{h_c} + \frac{3{h_t}^2}{4R_t h_c} - \frac{{h_t}^2}{8R_t R_c} + \frac{h_t}{R_c} + \frac{12R_t}{h_c} - 2\frac{R_t}{R_c} \right) -$$
$$- v^{(c)} \frac{8}{R_c {h_c}^2} -$$
$$- v^{(b)} \frac{1}{R_b {h_c}^2} \left(6\frac{h_b}{h_c} + \frac{3{h_b}^2}{4R_b h_c} + \frac{{h_b}^2}{8R_b R_c} + \frac{h_b}{R_c} + \frac{12R_b}{h_c} + 2\frac{R_b}{R_c} \right) +$$
$$+ \varphi_{21}^{(t)} \frac{1}{{h_c}^2} \left(-9\frac{h_t}{h_c} + \frac{3h_t}{2R_c} + \frac{3{h_t}^2}{4R_t h_c} - \frac{{h_t}^2}{8R_t R_c} \right) + \varphi_{21}^{(c)} \left(\frac{1}{{R_c}^2} - \frac{12}{{h_c}^2} \right) -$$
$$- \varphi_{21}^{(b)} \frac{1}{{h_c}^2} \left(9\frac{h_b}{h_c} + \frac{3h_b}{2R_c} + \frac{3{h_b}^2}{4R_b h_c} + \frac{{h_b}^2}{8R_b R_c} \right) +$$
$$+ \frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} \frac{1}{{h_c}^2} \left(-3\frac{h_t}{A_t h_c} - \frac{h_c}{R_c A_c} + \frac{2}{A_c} + \frac{h_t}{2R_c A_t} \right) +$$
$$+ \frac{\partial w^{(c)}}{\partial \varphi} \frac{1}{A_c} \left(\frac{1}{{R_c}^2} - \frac{4}{{h_c}^2} \right) +$$
$$+ \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi} \frac{1}{{h_c}^2} \left(-3\frac{h_b}{A_b h_c} + \frac{h_c}{R_c A_c} + \frac{2}{A_c} - \frac{h_b}{2R_c A_b} \right) + \widetilde{k_{\varphi z,1}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi z,2}^{(t)} = -v^{(t)}\frac{3}{4{R_t}^4} - \varphi_{21}^{(t)}\frac{1}{{R_t}^2}\left(\frac{3}{4R_t}+\frac{1}{h_t}\right) - \frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{1}{{R_t}^2 A_t h_t} + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,2}^{(b)} = -v^{(b)}\frac{3}{4{R_b}^4} - \varphi_{21}^{(b)}\frac{1}{{R_b}^2}\left(\frac{3}{4R_b}-\frac{1}{h_b}\right) + \frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{1}{{R_b}^2 A_b h_b} + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(b)}};$$

$$\begin{aligned} k_{\varphi z,2}^{(c)} = {} & v^{(t)}\frac{1}{R_t R_c {h_c}^2}\left(-\frac{h_t}{R_c}+\frac{2h_t}{h_c}+\frac{{h_t}^2}{8R_t R_c}-\frac{{h_t}^2}{4R_t h_c}+\frac{2R_t}{h_c}-\frac{4R_t}{h_c}\right) - v^{(c)}\frac{1}{{R_c}^4} + \\ & + v^{(b)}\frac{1}{R_b R_c {h_c}^2}\left(\frac{h_b}{R_c}+\frac{2h_b}{h_c}+\frac{{h_b}^2}{8R_b R_c}+\frac{{h_b}^2}{4R_b h_c}+\frac{2R_b}{h_c}+\frac{4R_b}{h_c}\right) + \\ & + \varphi_{21}^{(t)}\frac{1}{R_c {h_c}^2}\left(-\frac{3h_t}{2R_c}+\frac{3h_t}{h_c}+\frac{{h_t}^2}{8R_c R_t}-\frac{{h_t}^2}{4R_t h_c}\right) + \\ & + \varphi_{21}^{(c)}\frac{1}{R_c}\left(\frac{4}{{h_c}^2}-\frac{1}{{R_c}^2}\right) + \\ & + \varphi_{21}^{(b)}\frac{1}{R_c {h_c}^2}\left(\frac{3h_b}{2R_c}+\frac{3h_b}{h_c}+\frac{{h_b}^2}{8R_c R_b}+\frac{{h_b}^2}{4R_b h_c}\right) + \\ & + \frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{1}{R_c A_c h_c}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}-\frac{h_t A_c}{2R_c A_t h_c}+\frac{h_t A_c}{A_t {h_c}^2}\right) + \frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{4}{R_c A_c {h_c}^2} + \\ & + \frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{1}{R_c A_c h_c}\left(-\frac{1}{R_c}-\frac{2}{h_c}+\frac{h_b A_c}{2R_c A_b h_c}+\frac{h_b A_c}{A_b {h_c}^2}\right) + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(c)}}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz,0}^{(c)} = \frac{1}{h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right) + \widetilde{\varepsilon_{zz,0}^{(c)}};$$

$$k_{zz,0}^{(c)} = \frac{4}{{h_c}^2}\left(w^{(t)} - 2w^{(c)} + w^{(b)}\right) + \widetilde{k_{zz,0}^{(c)}},$$

де $\widetilde{\varepsilon_{xx,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{xx,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{xx,1}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{xx,1}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{xx,1}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{xx,2}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{xx,2}^{(c)}}$, $\widetilde{\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}}$, $\widetilde{\varepsilon_{x\varphi,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,1}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,1}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,1}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(c)}}$, $\widetilde{\varepsilon_{xz,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{xz,0}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{xz,0}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{xz,0}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{xz,1}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{xz,1}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{xz,2}^{(\iota)}}$, $\widetilde{\varepsilon_{\varphi z,0}^{(\iota)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,2}^{(t)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,2}^{(b)}}$, $\widetilde{k_{\varphi z,2}^{(c)}}$, $\widetilde{\varepsilon_{zz,0}^{(c)}}$, $\widetilde{k_{zz,0}^{(c)}}$ – нелінійні складові деформацій.

Коефіцієнти розкладень (2.20)

$$\varepsilon_{xx,0}^{(i)} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{w^{(i)}}{R_1} + $$

$$+ 0.5\left\{\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{w^{(i)}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \psi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{u^{(i)}}{R_1}\right)^2\right\};$$

$$i = 1,2,3;$$

$$k_{xx,0}^{(i)} = \frac{\partial \phi_1^{(i)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{w^{(i)}}{R_1^2};\ k_{xx,1}^{(i)} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial \psi} - \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial \phi_1^{(i)}}{R_1 \partial \psi} + \frac{\partial u^{(i)}}{R_1^2 \partial \psi}\right);$$

$$k_{xx,2}^{(i)} = -\frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{R_1^2 \partial \psi}; i = 1,3;$$

$$k_{xx,0}^{(2)} = \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{w^{(2)}}{R_1^2} + \frac{w_1^{(2)}}{R_1};$$

$$k_{xx,1}^{(2)} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial \psi} + \frac{w_2^{(2)}}{R_1} - \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial \phi_1^{(2)}}{R_1 \partial \psi} + \frac{\partial u^{(2)}}{R_1^2 \partial \psi} + \frac{w_1^{(2)}}{R_1}\right);$$

$$k_{xx,2}^{(2)} = \frac{\partial \gamma_1^{(2)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{R_1 \partial \psi} + \frac{w_2^{(2)}}{R_1}\right);$$

$$\varepsilon_{yy,0}^{(i)} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{w^{(i)}}{R_2} + $$

$$+ 0.5\left\{\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{w^{(i)}}{R_2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{v^{(i)}}{R_2}\right)^2\right\};$$

$$i = 1,2,3;$$

$$k_{yy,0}^{(i)} = \frac{\partial \phi_2^{(i)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{w^{(i)}}{R_2^2};\ k_{yy,1}^{(i)} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial \phi_2^{(i)}}{R_2 \partial \theta} + \frac{\partial v^{(i)}}{R_2^2 \partial \theta}\right);$$

$$k_{yy,2}^{(i)} = -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{R_2^2 \partial \theta}; i = 1,3;$$

$$k_{yy,0}^{(2)} = \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{w^{(2)}}{R_2^2} + \frac{w_1^{(2)}}{R_2};$$

$$k_{yy,1}^{(2)} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{w_2^{(2)}}{R_2} - \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial \phi_2^{(2)}}{R_2 \partial \theta} + \frac{\partial v^{(2)}}{R_2^2 \partial \theta} + \frac{w_1^{(2)}}{R_2}\right);$$

$$k_{yy,2}^{(2)} = \frac{\partial \gamma_2^{(2)}}{R_2 \partial \theta} - \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{R_2 \partial \theta} + \frac{w_2^{(2)}}{R_2}\right);$$

$$\varepsilon_{xy,0}^{(i)} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{w^{(i)}}{R_1}\right)\frac{1}{R_2}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} +$$

$$+ \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{w^{(i)}}{R_2}\right)\frac{1}{R_1}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \psi} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{u^{(i)}}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{v^{(i)}}{R_2}\right);$$

$$k_{xy,0}^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \psi}\left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_1^2}\right) + \frac{\partial \phi_2^{(i)}}{R_1 \partial \psi} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{\partial \phi_1^{(i)}}{R_2 \partial \theta};$$

$$k_{xy,1}^{(i)} = \frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{R_1 \partial \psi} - \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{\partial \phi_2^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{\partial v^{(i)}}{R_2 \partial \psi}\right) + \frac{1}{R_2}\frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{1}{R_2^2}\left(\frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u^{(i)}}{R_1 \partial \theta}\right);$$

$$i = 1,2,3;$$

$$k_{xy,2}^{(i)} = -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{R_1^2 \partial \psi} - \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{R_2^2 \partial \theta}; i = 1,3;$$

$$k_{xy,2}^{(c)} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \gamma_2^{(c)}}{\partial \psi} - \frac{\partial \varphi_2^{(c)}}{R_1^2 \partial \psi} - \frac{\partial \varphi_1^{(c)}}{R_2^2 \partial \theta} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial \gamma_1^{(c)}}{\partial \theta};$$

$$\varepsilon_{xz,0}^{(i)} = \phi_1^{(i)} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \psi} + \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \psi} + \frac{w^{(i)}}{R_1}\right)\left(\phi_1^{(i)} + \frac{u^{(i)}}{R_1}\right) + \frac{\partial v^{(i)}}{R_1 \partial \psi}\left(\phi_2^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{R_2}\right);$$

$$k_{xz,0}^{(i)} = 2\varphi_1^{(i)} - \frac{1}{R_1^2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \psi} - \frac{\phi_1^{(i)}}{R_1};\ k_{xz,1}^{(i)} = -\frac{\varphi_1^{(i)}}{R_1} + \frac{1}{R_1^2}\left(\phi_1^{(i)} + \frac{u^{(i)}}{R_1}\right);$$

$$k_{xz,2}^{(i)} = \frac{\varphi_1^{(i)}}{R_1^2}; i = 1,3;$$

$$\varepsilon_{xz,0}^{(2)} = \phi_1^{(2)} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \psi} + \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \psi} + \frac{w^{(2)}}{R_1}\right)\left(\phi_1^{(2)} + \frac{u^{(2)}}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial v^{(2)}}{R_1 \partial \psi}\left(\phi_2^{(2)} + \frac{v^{(2)}}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \psi} - \frac{u^{(2)}}{R_1}\right)w_1^{(2)};$$

$$k_{xz,0}^{(2)} = 2\varphi_1^{(2)} - \frac{1}{R_1^2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \psi} - \frac{\phi_1^{(2)}}{R_1} + \frac{\partial w_1^{(2)}}{R_1 \partial \psi};$$

$$k_{xz,1}^{(2)} = 3\gamma_1^{(2)} + \frac{\partial w_2^{(2)}}{R_1 \partial\psi} - \frac{\partial w_1^{(2)}}{R_1^2 \partial\psi} - \frac{\varphi_1^{(2)}}{R_1} + \frac{1}{R_1^2}\left(\phi_1^{(2)} + \frac{u^{(2)}}{R_1}\right);$$

$$k_{xz,2}^{(2)} = -\frac{\partial w_2^{(2)}}{R_1^2 \partial\psi} + \frac{\varphi_1^{(2)}}{R_1^2} - \frac{\gamma_1^{(2)}}{R_1};$$

$$\varepsilon_{yz,0}^{(i)} = \phi_2^{(i)} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\theta} + \frac{w^{(i)}}{R_2}\right)\left(\phi_2^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{R_2}\right) + \frac{\partial u^{(i)}}{R_2 \partial\theta}\left(\phi_1^{(i)} + \frac{u^{(i)}}{R_1}\right);$$

$$k_{yz,0}^{(i)} = 2\varphi_2^{(i)} - \frac{1}{R_2^2}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta} - \frac{\phi_2^{(i)}}{R_2};\ k_{yz,1}^{(i)} = -\frac{\varphi_2^{(i)}}{R_2} + \frac{1}{R_2^2}\left(\phi_2^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{R_2}\right);$$

$$k_{yz,2}^{(i)} = \frac{\varphi_2^{(i)}}{R_2^2}; i = 1,3;$$

$$\varepsilon_{yz,0}^{(2)} = \phi_2^{(2)} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial v^{(2)}}{\partial\theta} + \frac{w^{(2)}}{R_2}\right)\left(\phi_2^{(2)} + \frac{v^{(2)}}{R_2}\right) + + \frac{\partial u^{(2)}}{R_2 \partial\theta}\left(\phi_1^{(2)} + \frac{u^{(2)}}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta} - \frac{v^{(2)}}{R_2}\right)w_1^{(2)};$$

$$k_{yz,0}^{(2)} = 2\varphi_2^{(2)} - \frac{1}{R_2^2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta} - \frac{\phi_2^{(2)}}{R_2} + \frac{\partial w_1^{(2)}}{R_2 \partial\theta};$$

$$k_{yz,1}^{(2)} = 3\gamma_2^{(2)} + \frac{\partial w_2^{(2)}}{R_2 \partial\theta} - \frac{\partial w_1^{(2)}}{R_2^2 \partial\theta} - \frac{\varphi_2^{(2)}}{R_2} + \frac{1}{R_2^2}\left(\phi_2^{(2)} + \frac{v^{(2)}}{R_2}\right);$$

$$k_{yz,2}^{(2)} = -\frac{\partial w_2^{(2)}}{R_2^2 \partial\theta} + \frac{\varphi_2^{(2)}}{R_2^2} - \frac{\gamma_2^{(2)}}{R_2};$$

$$\varepsilon_{zz,0}^{(2)} = w_1^{(2)};\ k_{zz,0}^{(2)} = 2w_2^{(2)}.$$

Вирази для обчислення потенційних енергій обшивок (2.22)

$$\Pi_i^{(0)} = \bar{C}_{11}^{(0)}\varepsilon_{1,0}^{(i)2} + \bar{C}_{22}^{(0)}\varepsilon_{2,0}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12}^{(0)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)} + 2\bar{C}_{66}^{(0)}\varepsilon_{12,0}^{(i)2} + 2\bar{C}_{55}^{(0)}\varepsilon_{13,0}^{(i)2} + + 2\bar{C}_{44}^{(0)}\varepsilon_{23,0}^{(i)2};$$

$$\Pi_i^{(2)} = \bar{C}_{11}^{(2)}\left[2k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)} + k_{1,0}^{(i)2} + \frac{2k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{1,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] +$$

$$+\bar{C}_{22}^{(2)}\left[2k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)} + k_{2,0}^{(i)2} + \frac{2k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1} + \frac{2k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{2,0}^{(i)2}}{R_2 R_1}\right] +$$

$$2\bar{C}_{12}^{(2)}\left[k_{1,0}^{(i)}k_{2,0}^{(i)}+k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}+k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}+\frac{k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{k_{1,0}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_{2,0}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2R_1}\right]+2\bar{C}_{66}^{(2)}\left[2k_{12,1}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}+k_{12,0}^{(i)2}+\frac{2k_{12,0}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{12,0}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}}{R_2}+\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon_{12,0}^{(i)2}}{R_2R_1}\right]+2\bar{C}_{55}^{(2)}\left[k_{13,0}^{(i)2}+2k_{13,1}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}+\frac{2k_{13,0}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{13,0}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{\varepsilon_{13,0}^{(i)2}}{R_2R_1}\right]+$$

$$2\bar{C}_{44}^{(2)}\left[k_{23,0}^{(i)2}+2k_{23,1}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}+\frac{2k_{23,0}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{23,0}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{\varepsilon_{23,0}^{(i)2}}{R_2R_1}\right];$$

$$\Pi_i^{(4)}=\bar{C}_{11}^{(4)}\left[2k_{1,0}^{(i)}k_{1,2}^{(i)}+k_{1,1}^{(i)2}+\frac{2k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{2k_{1,0}^{(i)}k_{1,1}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{1,2}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{2k_{1,0}^{(i)}k_{1,1}^{(i)}}{R_2}+\frac{2k_{1,2}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{1,0}^{(i)2}}{R_2R_1}\right]+\bar{C}_{22}^{(4)}\left[2k_{2,0}^{(i)}k_{2,2}^{(i)}+k_{2,1}^{(i)2}+\frac{k_{2,0}^{(i)2}}{R_1R_2}+\right.$$

$$\left.\frac{2k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{2k_{2,0}^{(i)}k_{2,1}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{2,2}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{2,0}^{(i)}k_{2,1}^{(i)}}{R_2}+\frac{2k_{2,2}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2}\right]+$$

$$2\bar{C}_{12}^{(4)}\left[k_{1,1}^{(i)}k_{2,1}^{(i)}+k_{1,0}^{(i)}k_{2,2}^{(i)}+k_{1,2}^{(i)}k_{2,0}^{(i)}+\frac{k_{1,0}^{(i)}k_{2,1}^{(i)}}{R_1}+\frac{k_{1,1}^{(i)}k_{2,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{k_{1,2}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{k_{2,2}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1}+\right.$$

$$\left.\frac{k_{2,2}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{1,1}^{(i)}k_{2,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{1,2}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{1,0}^{(i)}k_{2,1}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{1,0}^{(i)}k_{2,0}^{(i)}}{R_2R_1}+\frac{k_{1,1}^{(i)}\varepsilon_{2,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{k_{2,1}^{(i)}\varepsilon_{1,0}^{(i)}}{R_1R_2}\right]+$$

$$2\bar{C}_{66}^{(4)}\left[2k_{12,0}^{(i)}k_{12,2}^{(i)}+k_{12,1}^{(i)2}+\frac{2k_{12,1}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{2k_{12,0}^{(i)}k_{12,1}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{12,2}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{12,0}^{(i)}k_{12,1}^{(i)}}{R_2}\right.$$

$$\left.+\frac{2k_{12,2}^{(i)}\varepsilon_{12,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{12,0}^{(i)2}}{R_1R_2}\right]+2\bar{C}_{55}^{(4)}\left[k_{13,1}^{(i)2}+2k_{13,0}^{(i)}k_{13,2}^{(i)}+\frac{2k_{13,1}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{2k_{13,0}^{(i)}k_{13,1}^{(i)}}{R_1}+\right.$$

$$\left.\frac{2k_{13,2}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{13,0}^{(i)}k_{13,1}^{(i)}}{R_2}+\frac{2k_{13,2}^{(i)}\varepsilon_{13,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{13,0}^{(i)2}}{R_1R_2}\right]+2\bar{C}_{44}^{(4)}\left[2k_{23,0}^{(i)}k_{23,2}^{(i)}+k_{23,1}^{(i)2}+\right.$$

$$\left.\frac{2k_{23,0}^{(i)}k_{23,1}^{(i)}}{R_2}+\frac{2k_{23,2}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}}{R_2}+\frac{k_{23,0}^{(i)2}}{R_1R_2}+\frac{2k_{23,1}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}}{R_1R_2}+\frac{2k_{23,0}^{(i)}k_{23,1}^{(i)}}{R_1}+\frac{2k_{23,2}^{(i)}\varepsilon_{23,0}^{(i)}}{R_1}\right];$$

$$\bar{C}_{ij}^{(k)} = \int_{-0.5h_t}^{0.5h_t} \bar{C}_{ij} z_t^k dz_t; k = 0,1, \ldots$$

Вирази для обчислення потенційної енергії заповнювача (2.23)

$$\widetilde{U}_2^{(0)} = C_{33}^{(0)} \varepsilon_{3,0}^{(2)2} + 2C_{23}^{(0)} \varepsilon_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)} + 2C_{13}^{(0)} \varepsilon_{1,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)};$$

$$\widetilde{U}_2^{(2)} = C_{33}^{(2)} \left[k_{3,0}^{(2)2} + \frac{2k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{2k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{\varepsilon_{3,0}^{(2)2}}{R_2 R_1} \right] + 2C_{23}^{(2)} \left[k_{2,0}^{(2)} k_{3,0}^{(2)} + \right.$$

$$+ k_{2,1}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)} +$$

$$\left. \frac{k_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{2,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{2,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{2,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2 R_1} \right] +$$

$$+ 2C_{13}^{(2)} \left[k_{1,0}^{(2)} k_{3,0}^{(2)} + k_{1,1}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)} + \right.$$

$$\left. \frac{k_{1,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{1,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{1,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{k_{3,0}^{(2)} \varepsilon_{1,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{1,0}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2 R_1} \right];$$

$$\widetilde{U}_2^{(4)} = C_{33}^{(2)} \frac{k_{3,0}^{(2)2}}{R_2 R_1} + 2C_{23}^{(4)} \left[k_{2,2}^{(2)} k_{3,0}^{(2)} + \frac{k_{2,1}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{2,2}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{2,1}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{k_{2,2}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \right.$$

$$\left. \frac{k_{2,0}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_1 R_2} + \frac{k_{2,1}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2 R_1} \right] + 2C_{13}^{(4)} \left[k_{1,2}^{(2)} k_{3,0}^{(2)} + \frac{k_{1,1}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{1,2}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_1} + \frac{k_{1,1}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_2} + \frac{k_{1,2}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2} \right.$$

$$\left. \frac{k_{1,0}^{(2)} k_{3,0}^{(2)}}{R_1 R_2} + \frac{k_{1,1}^{(2)} \varepsilon_{3,0}^{(2)}}{R_2 R_1} \right].$$

Вирази для обчислення кінематичних енергій шарів оболонки (2.25)

$$\lambda_0^{(2)} = \rho_2^{(0)} \left(\dot{u}^{(2)2} + \dot{v}^{(2)2} + \dot{w}^{(2)2} \right);$$

$$\lambda_2^{(2)} = \rho_2^{(2)} \left\{ 2\dot{u}^{(2)} \dot{\varphi}_1^{(2)} + \left(\frac{\dot{u}^{(2)}}{R_1} + \dot{\phi}_1^{(2)} \right)^2 + 2\dot{v}^{(2)} \dot{\varphi}_2^{(2)} + \left(\frac{\dot{v}^{(2)}}{R_2} + \dot{\phi}_2^{(2)} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\dot{w}^{(2)} \dot{w}_2^{(2)} + \dot{w}_1^{(2)2} + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\dot{u}^{(2)2} + \dot{v}^{(2)2} + \dot{w}^{(2)2} \right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \times \right.$$

$$\left[2\dot{u}^{(2)}\left(\frac{\dot{u}^{(2)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(2)}\right)+2\dot{v}^{(2)}\left(\frac{\dot{v}^{(2)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(2)}\right)+2\dot{w}^{(2)}\dot{w}_1^{(2)}\right]\Bigg\};$$

$$\lambda_4^{(2)}=\rho_2^{(4)}\Bigg\{2\left(\frac{\dot{u}^{(2)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(2)}\right)\dot{\gamma}_1^{(2)}+\dot{\varphi}_1^{(2)2}+2\left(\frac{\dot{v}^{(2)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(2)}\right)\dot{\gamma}_2^{(2)}+\dot{\varphi}_2^{(2)2}+$$

$$\dot{w}_2^{(2)2}+\frac{1}{R_1R_2}\Bigg[2\dot{u}^{(2)}\dot{\varphi}_1^{(2)}+\left(\frac{\dot{u}^{(2)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(2)}\right)^2+2\dot{v}^{(2)}\dot{\varphi}_2^{(2)}+\left(\frac{\dot{v}^{(2)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(2)}\right)^2+$$

$$+2\dot{w}^{(2)}\dot{w}_2^{(2)}+\dot{w}_1^{(2)2}\Bigg]+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)\Bigg[2\dot{u}^{(2)}\dot{\gamma}_1^{(2)}+2\left(\frac{\dot{u}^{(2)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(2)}\right)\dot{\varphi}_1^{(2)}+$$

$$2\dot{v}^{(2)}\dot{\gamma}_2^{(2)}+2\left(\frac{\dot{v}^{(2)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(2)}\right)\dot{\varphi}_2^{(2)}+2\dot{w}_1^{(2)}\dot{w}_2^{(2)}\Bigg]\Bigg\};$$

$$\lambda_0^{(i)}=\rho_i^{(0)}\left(\dot{u}^{(i)2}+\dot{v}^{(i)2}+\dot{w}^{(i)2}\right);$$

$$\lambda_2^{(i)}=\rho_i^{(2)}\Bigg\{2\dot{u}^{(i)}\dot{\varphi}_1^{(i)}+\left(\frac{\dot{u}^{(i)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(i)}\right)^2+2\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_2^{(i)}+\left(\frac{\dot{v}^{(i)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(i)}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{R_1R_2}\left(\dot{u}^{(i)2}+\dot{v}^{(i)2}+\dot{w}^{(i)2}\right)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\Bigg[2\dot{u}^{(i)}\left(\frac{\dot{u}^{(i)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(i)}\right)+$$

$$+2\dot{v}^{(i)}\left(\frac{\dot{v}^{(i)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(i)}\right)\Bigg]\Bigg\};$$

$$\lambda_4^{(i)}=\rho_c^{(4)}\Bigg\{\dot{\varphi}_1^{(i)2}+\dot{\varphi}_2^{(i)2}+\frac{1}{R_1R_2}\Bigg[2\dot{u}^{(i)}\dot{\varphi}_1^{(i)}+\left(\frac{\dot{u}^{(i)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(i)}\right)^2+2\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_2^{(i)}+$$

$$+\left(\frac{\dot{v}^{(i)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(i)}\right)^2\Bigg]+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)\Bigg[2\left(\frac{\dot{u}^{(i)}}{R_1}+\dot{\phi}_1^{(i)}\right)\dot{\varphi}_1^{(i)}+2\left(\frac{\dot{v}^{(i)}}{R_2}+\dot{\phi}_2^{(i)}\right)\dot{\varphi}_2^{(i)}\Bigg]\Bigg\};$$

$$i=1,2;$$

$$\rho_i^{(k)}=\int_{-0.5h_i}^{0.5h_i}\rho_i z_i^k dz_i; k=0,1,\dots,i=1,2,3.$$

ДОДАТОК Г

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 3

Коефіцієнти розкладень (3.47)

$$\varepsilon_{xx,0}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right), i = t, b, c;$$

$$k_{xx,0}^{(i)} = \frac{\partial \phi_{1,1}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial \phi_{1,1}^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial \phi_{2,1}^{(i)}}{\partial x}, i = t, b;$$

$$k_{xx,0}^{(c)} = \frac{\partial \phi_{1,1}^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial \phi_{1,1}^{(c)}}{\partial x} + \frac{1}{R_c}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial \phi_{2,1}^{(c)}}{\partial x} + \\ + \frac{1}{h_c}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right);$$

$$k_{xx,1}^{(t)} = -\frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right) - \frac{1}{h_t}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right)^2 + \\ + \frac{1}{R_t h_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}(4h_t - R_t) - \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + \frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}h_t\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}\right)^2;$$

$$k_{xx,1}^{(c)} = -\frac{1}{2{h_c}^2}\left(-h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + 3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x} - 3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x} + 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} - 8\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2{h_c}^2}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\left(h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} - h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} - 3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x} + 3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} - 8\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} + 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{{h_c}^2}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}\left(2\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - 4\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} + 2\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2{h_c}^2}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2R_tR_b{h_c}^2}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}R_bh_t + \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}R_th_b + \right.$$

$$+ 4\left(1 - \frac{h_t}{4R_t}\right)^2 R_b\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} + 4R_t\left(1 + \frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} -$$

$$- \left(3h_tR_b\left(R_t - \frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x} - 3R_th_b\left(R_b + \frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 8R_b\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\right)\Bigg) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}\right)^2;$$

$$k_{xx,1}^{(b)} = \frac{1}{h_b}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_b}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{R_bh_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}(4h_b + R_b) + \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}h_b\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}\right)^2;$$

$$k_{xx,2}^{(t)} = \frac{1}{h_t}\left(-\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{4{R_t}^2}\left(\frac{1}{R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}\right)\left(R_t(h_t - 4R_t)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x} - 4R_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x \partial \varphi} + \right.$$

$$\left.\left. + h_t\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\right)\right);$$

$$k_{xx,2}^{(c)} = -\frac{1}{{h_c}^3}\left(h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} + 3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x} + 3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x} + 4h_c\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x} - 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{{h_c}^3}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\left(-h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} - h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} - 3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x} - 4h_c\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - 3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x} + 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} - 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2{h_c}^2}\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x}\left(h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} - h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} - 3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x} + 3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} - 8\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} + 4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{1}{{h_c}^3}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)\left(2\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}-4\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}+2\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{R_t R_b {h_c}^3}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}R_b h_t-\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}R_t h_b+\right.$$

$$+4\frac{R_b}{R_t}\left(R_t-\frac{h_t}{4}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}-4\frac{R_t}{R_b}\left(R_b+\frac{h_b}{4}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}+$$

$$+\frac{3}{16}R_b h_t\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}+\frac{3}{16}R_t h_b\left(R_b+\frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}+$$

$$\left.+\frac{1}{4}R_t R_b h_c\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}+\frac{R_t R_b}{4R_c}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2R_t R_b {h_c}^2}\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}\right)\left(-R_b h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+R_t h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\right.$$

$$+4\left(R_t-\frac{h_t}{4}\right)^2\frac{R_b}{R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}+4\left(R_b+\frac{h_b}{4}\right)^2\frac{R_t}{R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}-$$

$$-3h_t R_b\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}+3h_b R_t\left(R_b+\frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}-$$

$$\left.-8R_t R_b\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\right);$$

$$k_{xx,2}^{(b)}=\frac{1}{h_b}\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{4{R_b}^2}\left(\frac{1}{R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}\right)\left(R_b(h_b-4R_b)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}-4R_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.\left.+h_b\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\right)\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}=\frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\varphi}+w^{(i)}\right)+\frac{1}{2{R_i}^2}\left(\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi}\right)^2\right),$$

$$i=t,b,c;$$

$$k_{\varphi\varphi,0}^{(i)} = \frac{1}{R_i}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial\varphi} - \frac{w^{(i)}}{{R_i}^2} +$$

$$+ \frac{1}{{R_i}^2}\left(\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\varphi} + w^{(i)}\right)\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial\varphi} - w^{(i)}\right) +\right.$$

$$+ \left(-\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi} + v^{(i)}\right)\left(v^{(i)} + R_i\varphi_{2,1}^{(i)}\right) - \left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi} - v^{(i)}\right)^2 +$$

$$\left. + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial\varphi} - \frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\right)^2\right), i = t, b;$$

$$k_{\varphi\varphi,0}^{(c)} = \frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi} + \frac{w^{(t)}}{R_c h_c} - \frac{w^{(c)}}{{R_c}^2} - + \frac{w^{(b)}}{R_c h_c} +$$

$$+ \frac{1}{{R_c}^2}\left(\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi} + w^{(c)}\right)\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi} - \frac{w^{(c)}}{R_c} + \frac{w^{(t)} - w^{(b)}}{h_c}\right) +\right.$$

$$+ \left(-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi} + v^{(c)}\right)\left(\frac{v^{(c)}}{R_c} + \varphi_{2,1}^{(c)} - \frac{1}{h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right) -$$

$$\left. - \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi} - v^{(c)}\right)^2 + \frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi} - \frac{1}{R_c}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\right)^2\right);$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(t)} = \frac{1}{4{R_t}^3 h_t}\left(-4R_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2} - \left(4{R_t}^2 + 3R_t h_t\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi} +\right.$$

$$\left. + 4h_t\left(w^{(t)} + \frac{1}{4}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{{R_t}^3}\left(\left(\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+w^{(t)}\right)\left(-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{R_t}{h_t}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{h_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{4R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R_t}w^{(t)}\right)-$$

$$-\frac{1}{4h_tR_t}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-v^{(t)}\right)\left(-4\varphi_{2,1}^{(t)}{R_t}^2+R_th_t\varphi_{2,1}^{(t)}-4R_t\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+v^{(t)}h_t+2v^{(t)}+2R_t\varphi_{2,1}^{(t)}\right)-\frac{R_t}{h_t}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)^2-2\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+$$

$$\left.+\frac{3}{2R_t}\left(\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-v^{(b)}\right)^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2{R_t}^2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{w^{(t)}}{R_t}\right)^2+\left(\frac{v^{(t)}}{R_t}+\varphi_{2,1}^{(t)}\right)^2\right);$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(c)} = \frac{1}{2R_c {h_c}^2}\Bigg(-3h_t \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial \varphi} + 3h_b \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial \varphi} - 2\frac{{h_c}^2}{R_c}\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial \varphi} + 4\frac{\partial v^{(t)}}{\partial \varphi} + 4\frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi} -$$

$$- 8\frac{\partial v^{(c)}}{\partial \varphi} + \left(4 - 2\frac{h_c}{R_c}\right) w^{(t)} + \left(4 + 2\frac{h_c}{R_c}\right) w^{(b)} -$$

$$- \left(8 - 2\frac{{h_c}^2}{{R_c}^2}\right) w^{(c)} +$$

$$+ \frac{h_b}{R_b}\left(\frac{h_b}{4}\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial \varphi^2} + \left(2 + \frac{h_b}{4R_b}\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+ \frac{h_t}{R_t}\left(\frac{h_t}{4}\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial \varphi^2} - \left(2 - \frac{h_t}{4R_t}\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial \varphi}\right)\Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{{R_c}^2}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial \varphi} + w^{(c)}\right)\Bigg(-\frac{1}{R_c}\varphi_{2,1}^{(c)} +$$

$$+ \frac{1}{{h_c}^2}\Bigg(-\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{{R_t}^2}\left(R_t - \frac{h_t}{4}\right)^2 \frac{\partial v^{(t)}}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{2}{{R_b}^2}\left(R_b + \frac{h_b}{4}\right)^2 \frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi} - \frac{3h_t}{2R_t}\left(R_t - \frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial \varphi} -$$

$$- \frac{3h_b}{2R_b}\left(R_b + \frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial \varphi} - 4\frac{\partial v^{(c)}}{\partial \varphi}\Bigg) + \frac{1}{{R_c}^2} w^{(c)} -$$

$$- \frac{1}{R_c h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right) + \frac{2}{{h_c}^2}\left(w^{(t)} - 2w^{(c)} + w^{(b)}\right)\Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{2{R_c}^2}\left(\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial \varphi} - \frac{w^{(c)}}{R_c} + \frac{1}{h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right)\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{{R_c}^2}\Bigg(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial \varphi} -$$

$$- v^{(c)}\Bigg)\Bigg(\frac{1}{{h_c}^2}\Bigg(-2\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} + 2\frac{\partial w^{(c)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial \varphi} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{2}{{R_t}^2}\left(R_t-\frac{h_t}{4}\right)^2 v^{(t)}+\frac{2}{{R_b}^2}\left(R_b-\frac{h_b}{4}\right)^2 v^{(b)}-$$

$$-\frac{3h_t}{2R_t}\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\varphi_{2,1}^{(t)}+\frac{3h_b}{2R_b}\left(R_b-\frac{h_b}{12}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}-4v^{(c)}\Bigg)-$$

$$-\frac{2}{h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{v^{(c)}}{R_c}+\varphi_{2,1}^{(c)}\Bigg)+\frac{3}{2{R_c}^4}\left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}-v^{(c)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2{R_c}^2{h_c}^2}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{h_c}{R_c}v^{(c)}-h_c\varphi_{2,1}^{(c)}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2{R_c}^2}\Bigg(\frac{1}{{h_c}^2}\Bigg(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\Bigg(h_b\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+3\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)-h_t\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+3\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+4\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}-2\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\Bigg)\Bigg)+\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{4}{R_c}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{3}{{R_c}^2}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\right)^2\Bigg);$$

$$k_{\varphi\varphi,1}^{(b)}=\frac{1}{4{R_b}^3h_b}\Bigg(4R_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+\left(4{R_b}^2-3R_bh_b\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{b}}{\partial\varphi}+$$

$$+4h_b\left(w^{(b)}+\frac{1}{4}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^3}\left(\left(\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+w^{(b)}\right)\left(-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{R_b}{h_b}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{h_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_b}w^{(b)}\right)-$$

$$-\frac{1}{4h_bR_b}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-v^{(b)}\right)\left(4\varphi_{2,1}^{(b)}{R_b}^2+R_bh_b\varphi_{2,1}^{(b)}+4R_b\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+v^{(b)}h_b+2v^{(b)}+2R_b\varphi_{2,1}^{(b)}\right)-\frac{R_b}{h_b}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)^2-2\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+$$

$$\left.+\frac{3}{2R_b}\left(\left(\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-v^{(b)}\right)^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2{R_b}^2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{w^{(b)}}{R_t}\right)^2+\left(\frac{v^{(b)}}{R_b}+\varphi_{2,1}^{(b)}\right)^2\right);$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(t)}=\frac{1}{4{R_t}^4h_t}\left(4R_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+\left(4{R_t}^2+3R_th_t\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-4h_t\left(w^{(t)}+\frac{1}{4}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^4}\left(\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+w^{(t)}\right)\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\left(\frac{3}{4}+\frac{h_t}{R_t}\right)+\frac{1}{h_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{4R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_t}w^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^4}\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_t}w^{(t)}\right)\left(-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}R_t\left(\frac{3}{4}-\frac{R_t}{h_t}\right)+\frac{1}{4}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+w^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^4}\left(\frac{v^{(t)}}{R_t}+\varphi_{2,1}^{(t)}\right)\left(\varphi_{2,1}^{(t)}R_t\left(-\frac{R_t}{h_t}+\frac{1}{4}\right)-\frac{R_t}{h_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+v^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^4}\left(\frac{1}{2R_t}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-v^{(t)}\right)\left(\varphi_{2,1}^{(t)}R_t\left(1-4\frac{R_t}{h_t}\right)-4\frac{R_t}{h_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+v^{(t)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{R_t}\left(v^{(t)}+R_t\varphi_{2,1}^{(t)}\right)^2+3\left(-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+v^{(t)}\right)\left(\frac{v^{(t)}}{R_t}+\varphi_{2,1}^{(t)}\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{R_t}\left(-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+v^{(t)}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^2}\left(-\frac{1}{h_t}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{R_t}\left(\frac{2}{h_t}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)^2\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{{R_t}^2}\left(3\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{{R_t}^3}\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\right)^2\right);$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}=\frac{1}{2{R_c}^2h_c^2}\left(3h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-3h_b\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{2{h_c}^2}{R_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{2h_c}{R_c}w^{(t)}-\right.$$

$$-\frac{2{h_c}^2}{{R_c}^2}w^{(c)}-\frac{2h_c}{R_c}w^{(b)}+\left(8\frac{R_c}{h_c}-4\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}-\left(8\frac{R_c}{h_c}+4\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}-$$

$$-8R_c\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-4w^{(b)}-4w^{(t)}+8w^{(c)}-6\frac{R_ch_b}{h_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-$$

$$-6\frac{R_ch_t}{h_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{1}{R_b}\left(\frac{{h_b}^2}{4}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(h_b+2\frac{R_ch_b}{h_c}\right)\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{R_c{h_b}^2}{2h_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{{R_b}^2}\left(\left(\frac{{h_b}^2}{4}+\frac{R_c{h_b}^2}{2h_c}\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{R_t}\left(-\frac{{h_t}^2}{4}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(h_t-2\frac{R_c h_t}{h_c}\right)\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{R_c {h_t}^2}{2h_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\frac{1}{{R_t}^2}\left(\left(\frac{{h_t}^2}{4}-\frac{R_c {h_t}^2}{2h_c}\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^3}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}+w^{(c)}\right)\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\right.$$

$$-\frac{1}{{h_c}^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{2}\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$+2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+\frac{3}{2}h_t\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{3}{2}h_b\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-$$

$$\left.-4v^{(c)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{h_c}^3}\left(-\frac{h_t R_c}{R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}-\frac{h_b R_c}{R_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+4R_c\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}-\right.$$

$$-4R_c\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+3h_t\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+$$

$$\left.+3h_b\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+h_c\left(R_c\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}\right)\right)-$$

$$\left.-\frac{w^{(c)}}{{R_c}^2}+\frac{w^{(t)}-w^{(b)}}{R_c h_c}-2\frac{w^{(t)}-2w^{(c)}+w^{(b)}}{{h_c}^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2}\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{w^{(c)}}{R_c}+\frac{w^{(t)}-w^{(b)}}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{{h_c}^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}+2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-4\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}\Bigg)+$$

$$\left.+\frac{w^{(c)}}{{R_c}^2}-\frac{w^{(t)}-w^{(b)}}{R_c h_c}+2\frac{w^{(t)}-2w^{(c)}+w^{(b)}}{{h_c}^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2{h_c}^3}\left(-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+v^{(c)}\right)\left(-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\frac{h_t}{R_t}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{h_b}{R_b}+4\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2 v^{(t)}-\right.$$

$$-4\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2 v^{(b)}+3h_t\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\varphi_{2,1}^{(t)}+3h_b\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}+$$

$$\left.+4h_c\left(\varphi_{2,1}^{(c)}+\frac{v^{(c)}}{R_c}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2}\left(\frac{1}{h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{v^{(c)}}{R_c}+\right.$$

$$\left.+\varphi_{2,1}^{(c)}\right)\left(\frac{1}{{h_c}^2}\left(2\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-4\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+2\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2 v^{(t)}-2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2 v^{(b)}-\frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\varphi_{2,1}^{(t)}+$$

$$\left.\left.+\frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}-4v^{(c)}\right)\right)+\frac{2}{{h_c}^2{R_c}^3}\left(-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+v^{(c)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-2\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+4\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}-2\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$+2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2 v^{(t)}+2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2 v^{(b)}-\frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(1-\frac{h_t}{12R_t}\right)\varphi_{2,1}^{(t)}+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(1+\frac{h_b}{12R_b}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}-4v^{(c)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2}\left(-\frac{1}{h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\varphi_{2,1}^{(c)}+\frac{v^{(c)}}{R_c}\right)^2+$$

$$+\frac{3}{{R_c}^3}\left(-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+v^{(c)}\right)\left(\frac{1}{h_c}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\varphi_{2,1}^{(c)}+\frac{v^{(c)}}{R_c}\right)-$$

$$-\frac{2}{{R_c}^5}\left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}-v^{(c)}\right)^2-\frac{1}{{R_c}^2}\left(\frac{1}{{h_c}^3}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\left(h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+3h_t\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+3h_c\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}+3h_b\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}+4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{2{h_c}^2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}\left(h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}-h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}-3h_t\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+3h_b\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}-2\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right)-\frac{1}{R_c}\left(\frac{1}{{h_c}^2}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\left(h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}-3h_t\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+3h_b\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+4\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}-2\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}\right)^2\right)+\frac{3}{{R_c}^2}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{2}{{R_c}^3}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\right)^2\Bigg);$$

$$k_{\varphi\varphi,2}^{(b)}=\frac{1}{4{R_b}^4h_b}\left(-4R_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+\left(-4{R_b}^2+3R_bh_b\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-4h_b\left(w^{(b)}+\frac{1}{4}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^4}\left(\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+w^{(b)}\right)\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\left(\frac{3}{4}-\frac{h_b}{R_b}\right)+\frac{1}{h_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{4R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_b}w^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^4}\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_b}w^{(b)}\right)\left(-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi}R_b\left(\frac{3}{4}-\frac{R_b}{h_b}\right)+\frac{1}{4}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+w^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^4}\left(\frac{v^{(b)}}{R_b}+\varphi_{2,1}^{(b)}\right)\left(\varphi_{2,1}^{(b)}R_b\left(-\frac{R_b}{h_b}+\frac{1}{4}\right)-\frac{R_b}{h_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+v^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^4}\left(\frac{1}{2R_t}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-v^{(b)}\right)\left(\varphi_{2,1}^{(b)}R_b\left(1-4\frac{R_b}{h_b}\right)-4\frac{R_b}{h_b}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+v^{(b)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{R_b}\left(v^{(b)}+R_b\varphi_{2,1}^{(b)}\right)^2+3\left(-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+v^{(b)}\right)\left(\frac{v^{(b)}}{R_b}+\varphi_{2,1}^{(b)}\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{R_b}\left(-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+v^{(b)}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^2}\left(-\frac{1}{h_b}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{R_b}\left(\frac{2}{h_b}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)^2\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{{R_b}^2}\left(3\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{{R_b}^3}\left(\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)^2\right);$$

$$\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}=\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}+\frac{1}{R_i}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\varphi}+w^{(i)}\right)+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}\left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi}-v^{(i)}\right)\right),$$

$$i=t,b,c;$$

$$k_{x\varphi,0}^{(i)}=\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial x}+\frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{{R_i}^2}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{R_i}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial x}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\varphi}+w^{(i)}\right)\left(\frac{1}{R_i}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial\varphi}-\frac{w^{(i)}}{R_i}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{R_i}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi}+\varphi_{2,1}^{(i)}\right)\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}\right),i=t,b;$$

$$k_{x\varphi,0}^{(c)}=\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}+\frac{1}{R_c}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{{R_c}^2}\frac{\partial u^{c}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2 h_c}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\left(h_c\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}+R_c\left(h_c\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-w^{(b)}+w^{(t)}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}\left(h_c\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+R_c\left(h_c\varphi_{2,1}^{(c)}-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right)+\right.$$

$$+R_c\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)+R_c h_c\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}\left(\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}+w^{(c)}\right)-$$

$$-h_c\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}-R_c\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{R_c}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_c h_c}v^{(c)}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right);$$

$$k_{x\varphi,1}^{(t)}=-\frac{1}{h_t}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}+\frac{1}{4h_t R_t}\left(h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}-8\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}-4\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{4{R_t}^2}\left(\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}-4\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{{R_t}^3}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{{R_t}^2 h_t}\left(-\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}R_t+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}+w^{(t)}\right)-\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2}-\right.$$

$$-R_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}\left(\left(R_t-\frac{h_t}{4}\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}-R_t h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(R_t+\frac{3h_t}{4}\right)w^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\left(\frac{h_t}{2R_t}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi}-\left(R_t-\frac{h_t}{4}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{h_t}{4R_t}w^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\left(\left(1+\frac{h_t}{R_t}\right)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(R_t+\frac{3h_t}{4}\right)\varphi_{2,1}^{(t)}-\frac{h_t}{4R_t}v^{(t)}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}\left(\frac{h_t}{R_t}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}-(R_t+h_t)\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}\left((R_t+h_t)\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}-R_t h_t\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}\right)\right);$$

$$k_{x\varphi,1}^{(c)} = \frac{1}{2{h_c}^2}\left(-3h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x} - 3h_b\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x} + 4\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} + 4\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x} - 4\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{h_b}{2R_b{h_c}^2}\left(\left(2+\frac{h_b}{4R_b}\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x} + \frac{h_b}{4}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}\right) +$$

$$+\frac{1}{2R_c{h_c}^2}\left(4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi} - 8h_c\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} + 3h_b\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi} + 4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi} -\right.$$

$$\left. - 3h_t\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi} - h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi} - h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}\right) - \frac{1}{{R_c}^2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi} + \frac{1}{{R_c}^3}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi} +$$

$$+\frac{h_t}{8R_t{h_c}^3}\left(4h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi} - 4\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi} - \left(8-\frac{h_t}{4R_t}\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{1}{R_c{h_c}^2}\left(-\frac{h_t}{2R_t}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}\left(R_t\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} + w^{(c)} + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}\right) +\right.$$

$$+\frac{h_b}{2R_b}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}\left(R_b\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x} + w^{(c)} + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}\right) - \frac{h_t}{2R_t}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial\varphi^2} +$$

$$+\frac{h_b}{2R_b}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2} - \frac{h_t}{2}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x^2} + \frac{h_b}{2}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}\left(-8\left(1-\frac{{h_c}^2}{8{R_c}^2}\right)\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi} + 2\left(1+\frac{h_t}{4R_t}-\frac{h_c}{2R_c}\right)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} +\right.$$

$$+2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}-\frac{h_c}{2R_c}\right)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + \frac{{h_c}^2}{R_c}\varphi_{2,1}^{(c)} - 2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2 v^{(t)} +$$

$$\left. +8v^{(c)} - 2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2 v^{(b)} + \frac{3}{2}\left(h_t\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\varphi_{2,1}^{(t)} - h_b\left(R_b-\frac{h_b}{12}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}\right)\right) +$$

$$+\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}\left(-8\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi} + 2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial\varphi} + 2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi} -\right.$$

$$\left. -\frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi} + \frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(R_b+\frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial\varphi} + 2\left(w^{(t)} - 4w^{(c)} + w^{(b)}\right)\right) +$$

$$+\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\varphi}\left(2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x} + 2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x} - \frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x} -\right.$$

$$-\frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(R_b+\frac{h_b}{12}\right)\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}\Bigg)+\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}\Bigg(\left(-8+\frac{{h_c}^2}{{R_c}^2}\right)\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}-\frac{{h_c}^2}{R_c}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x}-$$

$$-\frac{3h_t}{2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial x}+\frac{3h_b}{2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}+2\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x}+2\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}\Bigg)+$$

$$+\frac{\partial u^{(c)}}{\partial x}\left(-\frac{{h_c}^2}{R_c}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{3h_t}{2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{3h_b}{2}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}\right)\right)-$$

$$-\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}\left(\left(2-\frac{h_c}{R_c}\right)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}+\left(2+\frac{h_c}{R_c}\right)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\right)-2\left(1-\frac{h_t}{4R_t}\right)^2 w^{(c)}\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}-$$

$$-2\left(1+\frac{h_b}{4R_b}\right)^2 w^{(c)}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}\left(2v^{(c)}-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+h_c\varphi_{2,1}^{(c)}\right)+$$

$$+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\left(2v^{(c)}+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-h_c\varphi_{2,1}^{(c)}\right)+\frac{3}{2}\frac{h_t}{R_t}\left(R_t-\frac{h_t}{12}\right)w^{(c)}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{h_b}{R_b}\left(R_b+\frac{h_b}{12}\right)w^{(c)}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}h_c\left(h_c\left(\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_c}w^{(c)}\right)+w^{(t)}-w^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{{h_c}^2}{R_c}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}\Bigg);$$

$$k_{x\varphi,1}^{(b)}=\frac{1}{h_b}\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}+\frac{1}{4h_bR_b}\left(h_b\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}+8\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+4\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{4{R_b}^2}\left(\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}-4\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{{R_b}^3}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{{R_b}^2h_b}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}\left(\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}R_b+\frac{\partial v^{(b)}}{\partial\varphi}+w^{(b)}\right)+\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial\varphi^2}+\right.$$

$$+R_t\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x^2}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}-$$

$$-\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}\left(\left(R_b+\frac{h_b}{4}\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi}+R_b h_b\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial \varphi}+\left(R_b-\frac{3h_b}{4}\right)w^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}\left(\frac{h_b}{2R_b}\frac{\partial v^{(b)}}{\partial \varphi}+\left(R_b+\frac{h_b}{4}\right)\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial \varphi}+\frac{h_b}{4R_b}w^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}\left(-\left(1-\frac{h_b}{R_b}\right)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial \varphi}-\left(R_b-\frac{3h_b}{4}\right)\varphi_{2,1}^{(b)}-\frac{h_b}{4R_b}v^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}\left(\frac{h_b}{R_b}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}+(R_t-h_t)\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial \varphi}\left((R_b-h_b)\frac{\partial u^{(b)}}{\partial x}+R_b h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial x}\right)\Bigg);$$

$$k_{x\varphi,2}^{(t)}=\frac{1}{{R_t}^2 h_t}\left(\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial \varphi}+\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{{R_t}^3}\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial \varphi}-\frac{1}{{R_t}^4 h_t}\frac{\partial u^{(t)}}{\partial \varphi}+\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(t)}};$$

$$k_{x\varphi,2}^{(c)}=\frac{1}{{h_c}^3}\left(-3h_t\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial x}-3h_b\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}+4\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}-4\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}-4h_c\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(c)}}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{h_b}{R_b{h_c}^3}\left(\left(2+\frac{h_b}{4R_b}\right)\frac{\partial v^{(b)}}{\partial x}+\frac{h_b}{4}\frac{\partial \varphi_{2,1}^{(b)}}{\partial x}+\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial \varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{R_c{h_c}^3}\left(-4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}-4h_c\frac{\partial v^{(c)}}{\partial x}-4h_c\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial \varphi}+4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial \varphi}-3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial \varphi}-\right.$$

$$\left.-h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial \varphi}-h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial \varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{2{R_c}^2{h_c}^2}\left(8\frac{\partial u^{(c)}}{\partial \varphi}-4\frac{\partial u^{(t)}}{\partial \varphi}-4\frac{\partial u^{(b)}}{\partial \varphi}+h_t\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial \varphi}-h_b\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial \varphi}+3h_t\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(t)}}{\partial \varphi}-\right.$$

$$\left.-3h_b\frac{\partial \varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial \varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^3}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(c)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{{R_c}^4}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{h_t}{4R_t{h_c}^3}\left(4h_t\frac{\partial\varphi_{2,1}^{(t)}}{\partial\varphi}-4\frac{\partial^2 w^{(t)}}{\partial x\partial\varphi}-\left(8-\frac{h_t}{4R_t}\right)\frac{\partial v^{(t)}}{\partial x}\right)+$$

$$+\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(c)}};$$

$$k_{x\varphi,2}^{(b)}=-\frac{1}{{R_b}^2h_b}\left(\frac{\partial^2 w^{(b)}}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{{R_t}^3}\frac{\partial\varphi_{1,1}^{(b)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{{R_t}^4h_t}\frac{\partial u^{(b)}}{\partial\varphi}+\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(b)}};$$

$$\varepsilon_{xz,0}^{(i)}=\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}+\varphi_{1,1}^{(i)}+\widetilde{\varepsilon_{xz,0}^{(i)}},i=t,b,c;$$

$$k_{xz,0}^{(t)}=-\frac{2}{h_t}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}+\varphi_{1,1}^{(t)}\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(t)}};$$

$$k_{xz,0}^{(c)}=\frac{1}{{h_2}^2}\left((h_2-h_1)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}+(h_3-h_2)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}-3h_t\varphi_{1,1}^{(t)}+3h_b\varphi_{1,1}^{(b)}+4u^{(t)}-\right.$$

$$\left.-8u^{(c)}+4u^{(b)}\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(c)}};$$

$$k_{xz,0}^{(b)}=\frac{2}{h_b}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}+\varphi_{1,1}^{(b)}\right)+\widetilde{k_{xz,0}^{(b)}};$$

$$k_{xz,1}^{(t)}=k_{xz,1}^{(b)}=0;$$

$$k_{xz,1}^{(c)}=\frac{1}{{h_c}^3}\left((2h_c-3h_t)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x}+(2h_c-3h_b)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x}-4h_c\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x}-9h_t\varphi_{1,1}^{(t)}-\right.$$

$$\left.-12h_c\varphi_{1,1}^{(c)}-9h_b\varphi_{1,1}^{(b)}+12u^{(t)}-12u^{(b)}\right)+\widetilde{k_{xz,1}^{(c)}};$$

$$k_{xz,2}^{(t)}=k_{xz,2}^{(c)}=k_{xz,2}^{(b)}=0;$$

$$\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}=\varphi_{2,1}^{(i)}+\frac{1}{R_i}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\varphi}+\widetilde{\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}},i=t,b,c;$$

$$k_{\varphi z,0}^{(t)}=-\frac{1}{2{R_t}^2h_t}\left((4R_t+2h_t)\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(4{R_t}^2+R_th_t\right)\varphi_{2,1}^{(t)}+v^{(t)}h_t\right)+\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,0}^{(c)}=\frac{1}{{h_c}^2}\left(4v^{(t)}+4v^{(b)}+3h_t\varphi_{2,1}^{(t)}+3h_b\varphi_{2,1}^{(b)}-8v^{(c)}\right)+$$

$$+\frac{h_b}{4R_b{h_c}^2}\left(4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(8+\frac{h_b}{R_b}\right)v^{(b)}+h_b\varphi_{2,1}^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{R_c h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-\varphi_{2,1}^{(c)}-\frac{h_c}{R_c}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\frac{h_t}{4R_t{h_c}^2}\left(4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(8-\frac{h_t}{R_t}\right)v^{(t)}+h_t\varphi_{2,1}^{(t)}\right)+\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi z,0}^{(b)}=\frac{1}{2{R_b}^2h_b}\left((4R_b-2h_b)\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(4{R_b}^2-R_bh_b\right)\varphi_{2,1}^{(b)}+v^{(b)}h_b\right)+\widetilde{k_{\varphi z,0}^{(b)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(t)}=\frac{1}{4{R_t}^3}\left(4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-v^{(t)}\right)+\frac{1}{4{R_t}^2h_t}\left(3h_t\varphi_{2,1}^{(t)}+4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\right)+\frac{\varphi_{2,1}^{(t)}}{h_tR_t}+\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(c)}=-\frac{3}{{h_c}^3}\left(3h_t\varphi_{2,1}^{(t)}+3h_b\varphi_{2,1}^{(b)}+4v^{(t)}-4v^{(b)}-4h_c\varphi_{2,1}^{(c)}\right)-$$

$$-\frac{3h_b}{R_b{h_c}^3}\left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(2+\frac{h_b}{R_b}\right)v^{(b)}+\frac{h_b}{4}\varphi_{2,1}^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2R_c{h_c}^2}\left(3h_t\varphi_{2,1}^{(t)}-3h_b\varphi_{2,1}^{(b)}-16v^{(c)}+4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-8\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-4v^{(t)}-4v^{(b)}\right)-$$

$$-\frac{h_b}{8R_cR_b{h_c}^2}\left(h_b\varphi_{2,1}^{(b)}+4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+\left(8+\frac{h_b}{R_b}\right)v^{(b)}\right)+$$

$$+\frac{3h_t}{R_t{h_c}^3}\left(-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}-\left(2+\frac{h_t}{R_t}\right)v^{(t)}+\frac{h_t}{4}\varphi_{2,1}^{(t)}\right)+$$

$$+\frac{h_t}{8R_cR_t{h_c}^2}\left(-h_t\varphi_{2,1}^{(t)}+4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\left(8-\frac{h_t}{R_b}\right)v^{(t)}\right)+\frac{3v^{(t)}{h_t}^2}{4{h_c}^3{R_t}^2}+$$

$$+\frac{1}{{R_c}^2h_c}\left(-\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}+h_c\varphi_{2,1}^{(c)}\right)+\frac{1}{{R_c}^3}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}+\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi z,1}^{(b)}=\frac{1}{4{R_b}^3}\left(4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}-v^{(b)}\right)+\frac{1}{4{R_b}^2h_b}\left(3h_b\varphi_{2,1}^{(b)}-4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right)-\frac{\varphi_{2,1}^{(b)}}{h_bR_b}+\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(b)}};$$

$$k_{\varphi z,2}^{(t)} = -\frac{\varphi_{2,1}^{(t)}}{h_t {R_t}^2} - \frac{1}{4h_t {R_t}^3}\left(3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{4{R_t}^4}\left(-4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} + v^{(t)}\right) + \\ + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(t)}};$$

$$k_{\varphi z,2}^{(c)} = \frac{1}{R_c {h_c}^3}\left(3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} + 4h_c\varphi_{2,1}^{(c)} - 4v^{(t)} + 4v^{(b)}\right) + \\ + \frac{h_b}{4R_c R_b {h_c}^3}\left(h_b\varphi_{2,1}^{(b)} + 4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + \left(8 + \frac{h_b}{R_b}\right)v^{(b)}\right) + \\ + \frac{1}{2{R_c}^2 {h_c}^2}\left(-3h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} + 4v^{(b)} + 4v^{(t)} - 4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} - \right. \\ \left. - 4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + 8\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi}\right) + \\ + \frac{h_b}{8{R_c}^2 R_b {h_c}^2}\left(4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + \left(8 + \frac{h_b}{R_b}\right)v^{(b)} + h_b\varphi_{2,1}^{(b)}\right) + \\ + \frac{h_t}{4R_c R_t {h_c}^3}\left(-h_t\varphi_{2,1}^{(t)} + 4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} + \left(8 - \frac{h_t}{R_t}\right)v^{(t)}\right) + \\ + \frac{h_t}{8{R_c}^2 R_t {h_c}^2}\left(-4\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} - \left(8 - \frac{h_t}{R_t}\right)v^{(t)} + h_t\varphi_{2,1}^{(t)}\right) + \\ + \frac{1}{{R_c}^3 h_c}\left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\varphi} - \frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} - \varphi_{2,1}^{(c)}\right) - \frac{1}{{R_c}^4}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\varphi} + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(c)}};$$

$$k_{\varphi z,2}^{(b)} = \frac{\varphi_{2,1}^{(b)}}{h_b {R_b}^2} - \frac{1}{4h_b {R_b}^3}\left(3h_b\varphi_{2,1}^{(b)} - 4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{4{R_b}^4}\left(-4\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\varphi} + v^{(b)}\right) + \\ + \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(b)}};$$

$$\varepsilon_{zz,0}^{(c)} = \frac{1}{h_c}\left(w^{(t)} - w^{(b)}\right) + \widetilde{\varepsilon_{zz,0}^{(c)}};$$

$$k_{zz,0}^{(c)} = \frac{4}{{h_c}^2}\left(w^{(t)} - 2w^{(c)} + w^{(b)}\right) + \widetilde{k_{zz,0}^{(c)}}, \qquad (3.48)$$

$\widetilde{k_{x\varphi,2}^{(t)}}, \widetilde{k_{x\varphi,2}^{(c)}}, \widetilde{k_{x\varphi,2}^{(b)}}, \widetilde{\varepsilon_{xz,0}^{(\iota)}}, \widetilde{k_{xz,0}^{(t)}}, \widetilde{k_{xz,0}^{(c)}}, \widetilde{k_{xz,0}^{(b)}}, \widetilde{k_{xz,1}^{(c)}}, \widetilde{\varepsilon_{\varphi z,0}^{(\iota)}}, \widetilde{k_{\varphi z,0}^{(t)}}, \widetilde{k_{\varphi z,0}^{(c)}}, \widetilde{k_{\varphi z,0}^{(b)}}$,
$\widetilde{k_{\varphi z,1}^{(t)}}, \widetilde{k_{\varphi z,1}^{(c)}}, \widetilde{k_{\varphi z,1}^{(b)}}, \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(t)}}, \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(c)}}, \widetilde{k_{\varphi z,2}^{(b)}}, \widetilde{\varepsilon_{zz,0}^{(c)}}, \widetilde{k_{zz,0}^{(c)}}$ – нелінійні диференційні вирази відносно $w^{(i)}$, $v^{(i)}$, $u^{(i)}$, $\varphi_{1,1}^{(i)}$, $\varphi_{2,1}^{(i)}$.

Вирази для обчислення кінетичної енергії (3.50)

$$T_0{}^{(i)} = R_i\left(\dot{u}^{(i)2} + \dot{v}^{(i)2} + \dot{w}^{(i)2}\right);$$

$$T_1{}^{(i)} = 2R_i\dot{u}^{(i)}\dot{\varphi}_{1,1}^{(i)} + \dot{u}^{(i)2} + 3\dot{v}^{(i)2} + \dot{w}^{(i)2} + 2R_i\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)};$$

$$T_2{}^{(i)} = R_i\dot{\varphi}_{1,1}^{(i)2} + 2R_i\dot{\varphi}_{3,1}^{(i)}\dot{u}^{(i)} + 2\dot{u}^{(i)}\dot{\varphi}_{1,1}^{(i)} + R_i\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)2} + 4\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)} + 2R_i\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)} + \\ + \frac{3}{R_i}\dot{v}^{(i)2};$$

$$T_3{}^{(i)} = 2R_i\dot{\varphi}_{1,2}^{(i)}\dot{\varphi}_{1,1}^{(i)} + \dot{\varphi}_{1,1}^{(i)2} + 2\dot{\varphi}_{1,2}^{(i)}\dot{u}^{(i)} + 4\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)} + 2R_i\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)} + \\ + \frac{1}{R_i{}^2}\dot{v}^{(i)2} + \dot{\varphi}_{2,1}^{(i)2} + \frac{2}{R_i}\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)};$$

$$T_4{}^{(i)} = R_i\dot{\varphi}_{1,2}^{(i)2} + 2\dot{\varphi}_{1,2}^{(i)}\dot{\varphi}_{1,1}^{(i)} + R_i\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)2} + \frac{2}{R_i}\dot{v}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)} + 2\dot{\varphi}_{2,1}^{(i)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(i)};$$

$$T_5{}^{(i)} = \dot{\varphi}_{1,2}^{(i)2} + \dot{\varphi}_{2,2}^{(i)2};$$

$$T_0{}^{(c)} = R_c h_c\left(\dot{u}^{(c)2} + \dot{v}^{(c)2} + \dot{w}^{(c)2}\right);$$

$$T_2{}^{(c)} = R_c\frac{h_c{}^3}{12}\left(2\dot{u}^{(c)}\dot{\varphi}_{1,1}^{(c)} + \frac{3}{R_c}\dot{v}^{(c)2} + 4\dot{v}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(c)} + 2\dot{w}^{(c)}\dot{\varphi}_{3,1}^{(c)} + 2R_c\dot{u}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(c)} + \right. \\ \left. + R_c\dot{\varphi}_{1,1}^{(c)2} + 2R_c\dot{v}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,2}^{(c)} + R_c\dot{\varphi}_{2,1}^{(c)2} + 2R_c\dot{w}^{(c)}\dot{\varphi}_{3,2}^{(c)} + R_c\dot{\varphi}_{3,1}^{(c)2}\right);$$

$$T_4{}^{(c)} = \frac{h_c{}^5}{80}\left(R_c{}^2\dot{\varphi}_{2,2}^{(c)2} + 2\left(\dot{v}^{(c)} + \dot{\varphi}_{2,1}^{(c)}R_c\right)\dot{\varphi}_{2,2}^{(c)} + 2\left(\dot{\varphi}_{1,2}^{(c)}R_c + \dot{\varphi}_{1,3}^{(c)}R_c{}^2\right)\dot{\varphi}_{1,1}^{(c)} + \right. \\ + 2\dot{u}^{(c)}\dot{\varphi}_{1,3}^{(c)}R_c + 4\dot{v}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,3}^{(c)}R_c + 2\dot{\varphi}_{3,1}^{(c)}\dot{\varphi}_{3,2}^{(c)}R_c + R_c{}^2\dot{\varphi}_{1,2}^{(c)2} + \\ \left. + 2R_c{}^2\dot{\varphi}_{2,3}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,1}^{(c)} + R_c{}^2\dot{\varphi}_{3,2}^{(c)2}\right);$$

$$T_6{}^{(c)} = R_c\frac{h_c{}^7}{448}\left(2\dot{\varphi}_{1,2}^{(c)}\dot{\varphi}_{1,3}^{(c)} + 2\dot{\varphi}_{2,2}^{(c)}\dot{\varphi}_{2,3}^{(c)} + R_c\dot{\varphi}_{1,3}^{(c)2} + R_c\dot{\varphi}_{2,3}^{(c)2}\right).$$

Вирази для обчислення потенційної енергії заповнювача (3.52)

$$\Pi_0^{(c)} = h_c\left(\mathrm{C}_{11}R_c\varepsilon_{xx,0}^{(c)2} + 2C_{12}R_c\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + 2C_{13}R_c\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + \mathrm{C}_{22}R_c\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)2} + \right. \\ + 2C_{23}R_c\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + \mathrm{C}_{33}R_c\varepsilon_{zz,0}^{(c)2} + 2\mathrm{C}_{44}R_c\varepsilon_{\varphi z,0}^{(c)2} + 2\mathrm{C}_{55}R_c\varepsilon_{xz,0}^{(c)2} + \\ \left. + 2\mathrm{C}_{66}R_c\varepsilon_{x\varphi,0}^{(c)2}\right);$$

$$\Pi_2^{(c)} = \frac{{h_c}^3}{12}\Bigg(\mathrm{C}_{11}\left(R_c {k_{xx,0}^{(c)}}^2 + 2R_c k_{xx,1}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)} + 2k_{xx,0}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ C_{22}\left(R_c {k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}}^2 + 2R_c k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + 2k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ C_{33}\left(R_c {k_{zz,0}^{(c)}}^2 + 2k_{zz,0}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{12}\left(R_c k_{xx,0}^{(c)}k_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + R_c k_{xx,1}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + R_c k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)} + k_{xx,0}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} +\right.$$
$$\left. + k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{13}\left(R_c k_{xx,0}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + R_c k_{xx,1}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + k_{xx,0}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + k_{zz,0}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{23}\left(R_c k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + R_c k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)} + k_{zz,0}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{44}\left(R_c {k_{\varphi z,0}^{(c)}}^2 + 2R_c k_{\varphi z,1}^{(c)}\varepsilon_{\varphi z,0}^{(c)} + 2k_{\varphi z,0}^{(c)}\varepsilon_{\varphi z,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{55}\left(R_c {k_{xz,0}^{(c)}}^2 + 2R_c k_{xz,1}^{(c)}\varepsilon_{xz,0}^{(c)} + 2k_{xz,0}^{(c)}\varepsilon_{xz,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{66}\left(R_c {k_{x\varphi,0}^{(c)}}^2 + 2R_c k_{x\varphi,1}^{(c)}\varepsilon_{x\varphi,0}^{(c)} + 2k_{x\varphi,0}^{(c)}\varepsilon_{x\varphi,0}^{(c)}\right)\Bigg);$$

$$\Pi_4^{(c)} = \frac{{h_c}^5}{80}\Bigg(C_{11}\left(2R_c k_{xx,0}^{(c)}k_{xx,2}^{(c)} + 2k_{xx,2}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)} + R_c {k_{xx,1}^{(c)}}^2 + 2k_{xx,1}^{(c)}k_{xx,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ C_{22}\left(2R_c k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}k_{\varphi\varphi,2}^{(c)} + 2k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + R_c {k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}}^2 + 2k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}k_{\varphi\varphi,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{12}\left(R_c k_{xx,0}^{(c)}k_{\varphi\varphi,2}^{(c)} + R_c k_{xx,1}^{(c)}k_{\varphi\varphi,1}^{(c)} + R_c k_{xx,2}^{(c)}k_{\varphi\varphi,0}^{(c)} +\right.$$
$$\left. + k_{xx,0}^{(c)}k_{\varphi\varphi,1}^{(c)} + k_{xx,1}^{(c)}k_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + k_{xx,2}^{(c)}\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(c)} + k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}\varepsilon_{xx,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{13}\left(R_c k_{xx,2}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + k_{xx,1}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + k_{xx,2}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{23}\left(R_c k_{\varphi,2}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + k_{\varphi,1}^{(c)}k_{zz,0}^{(c)} + k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}\varepsilon_{zz,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{44}\left(2R_c k_{\varphi z,0}^{(c)}k_{\varphi z,2}^{(c)} + 2k_{\varphi z,1}^{(c)}k_{\varphi z,0}^{(c)} + R_c {k_{\varphi z,1}^{(c)}}^2 + 2k_{\varphi z,2}^{(c)}\varepsilon_{\varphi z,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{55}\left(2R_c k_{xz,0}^{(c)}k_{xz,2}^{(c)} + 2k_{xz,1}^{(c)}k_{xz,0}^{(c)} + R_c {k_{xz,1}^{(c)}}^2 + 2k_{xz,2}^{(c)}\varepsilon_{xz,0}^{(c)}\right) +$$
$$+ 2C_{66}\left(2R_c k_{x\varphi,0}^{(c)}k_{x\varphi,2}^{(c)} + 2k_{x\varphi,1}^{(c)}k_{x\varphi,0}^{(c)} + R_c {k_{x\varphi,1}^{(c)}}^2 + 2k_{x\varphi,2}^{(c)}\varepsilon_{x\varphi,0}^{(c)}\right)\Bigg);$$

$$\Pi_6^{(c)} = \frac{{h_c}^7}{448}\Big(C_{11}\left(R_c {k_{xx,2}^{(c)}}^2 + 2k_{xx,1}^{(c)}k_{xx,2}^{(c)}\right) + C_{22}\left(R_c {k_{\varphi\varphi,2}^{(c)}}^2 + 2k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}k_{\varphi,2}^{(c)}\right) +$$

$$+ 2C_{12}\left(R_c k_{xx,2}^{(c)}k_{\varphi\varphi,2}^{(c)} + k_{xx,1}^{(c)}k_{\varphi\varphi,2}^{(c)} + k_{xx,2}^{(c)}k_{\varphi\varphi,1}^{(c)}\right) +$$

$$+ 2C_{44}\left(2R_c {k_{\varphi z,2}^{(c)}}^2 + 2k_{\varphi z,1}^{(c)}k_{\varphi z,2}^{(c)}\right) +$$

$$+ 2C_{55}\left(2R_c {k_{xz,2}^{(c)}}^2 + 2k_{xz,1}^{(c)}k_{xz,2}^{(c)}\right) +$$

$$+ 2C_{66}\left(2R_c {k_{x\varphi,2}^{(c)}}^2 + 2k_{x\varphi,1}^{(c)}k_{x\varphi,2}^{(c)}\right)\Big).$$

Вирази для обчислення потенційних енергій обшивок (3.55)

$$\Pi_0^{(i)} = \left(Q_{11}^{(0)} + \frac{1}{R_i}Q_{11}^{(1)}\right){\varepsilon_{xx,0}^{(i)}}^2 + 2\left(Q_{12}^{(0)} + \frac{1}{R_i}Q_{12}^{(1)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}\varepsilon_{xx,0}^{(i)} + \left(Q_{22}^{(0)} +$$

$$\frac{1}{R_i}Q_{22}^{(1)}\right){\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}}^2 + \left(G_{23}^{(0)} + \frac{1}{R_i}G_{23}^{(1)}\right){\varepsilon_{\varphi z,0}^{i}}^2 + \left(G_{13}^{(0)} + \frac{1}{R_i}G_{13}^{(1)}\right){\varepsilon_{xz,0}^{(i)}}^2 + \left(G_{12}^{(0)} +$$

$$\frac{1}{R_i}G_{12}^{(1)}\right){\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}}^2;$$

$$\Pi_1^{(i)} = 2\left(Q_{11}^{(1)} + \frac{1}{R_i}Q_{11}^{(2)}\right)\varepsilon_{xx,0}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)} + 2\left(Q_{12}^{(1)} + \frac{1}{R_i}Q_{12}^{(2)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)} +\right.$$

$$\left. k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}\varepsilon_{xx,0}^{(i)}\right) + 2\left(Q_{22}^{(1)} + \frac{1}{R_i}Q_{22}^{(2)}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,0}^{(i)} + 2\left(G_{23}^{(1)} + \frac{1}{R_i}G_{23}^{(2)}\right)\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,0}^{(i)} +$$

$$2\left(G_{13}^{(1)} + \frac{1}{R_i}G_{13}^{(2)}\right)\varepsilon_{xz,0}^{(i)}k_{xz,0}^{(i)} + 2\left(G_{12}^{(1)} + \frac{1}{R_i}G_{12}^{(2)}\right)\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,0}^{(i)};$$

$$\Pi_2^{(i)} = \left(Q_{11}^{(2)} + \frac{1}{R_i}Q_{11}^{(3)}\right)\left({k_{xx,0}^{(i)}}^2 + 2\varepsilon_{xx,0}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)}\right) + 2\left(Q_{12}^{(2)} + \frac{1}{R_i}Q_{12}^{(3)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)} +\right.$$

$$\left. + k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)} + k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}\varepsilon_{xx,0}^{(i)}\right) + \left(Q_{22}^{(2)} + \frac{1}{R_i}Q_{22}^{(3)}\right)\left({k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}}^2 + 2\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}\right) +$$

$$\left(G_{23}^{(2)} + \frac{1}{R_i}G_{23}^{(3)}\right)\left({k_{\varphi z,0}^{(i)}}^2 + 2\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,1}^{(i)}\right) + \left(G_{13}^{(2)} + \frac{1}{R_i}G_{13}^{(3)}\right)\left({k_{xz,0}^{(i)}}^2 +\right.$$

$$\left. 2\varepsilon_{xz,0}^{(i)}k_{xz,1}^{(i)}\right) + \left(G_{12}^{(2)} + \frac{1}{R_i}G_{12}^{(3)}\right)\left({k_{x\varphi,0}^{(i)}}^2 + 2\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,1}^{(i)}\right);$$

$$\Pi_3^{(i)} = 2\left(Q_{11}^{(3)} + \frac{1}{R_\varphi}Q_{11}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{xx,0}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)} + k_{xx,0}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)}\right) + 2\left(Q_{12}^{(3)} + \frac{1}{R_i}Q_{12}^{(4)}\right)\times$$

$$\left(\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)} + k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)} + k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)} + k_{\varphi\varphi,2}^{(i)}\varepsilon_{xx,0}^{(i)}\right) +$$

$$2\left(Q_{22}^{(3)} + \frac{1}{R_i}Q_{22}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,2}^{(i)} + k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}\right) + 2\left(G_{23}^{(3)} + \frac{1}{R_i}G_{23}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,2}^{(i)} +\right.$$

$$\left. k_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,1}^{(i)}\right) + 2\left(G_{13}^{(3)} + + \frac{1}{R_i}G_{13}^{(4)}\right)k_{xz,0}^{(i)}k_{xz,1}^{(i)} + 2\left(G_{12}^{(3)} + \frac{1}{R_i}G_{12}^{(4)}\right)\left(\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,2}^{(i)} +\right.$$

$$+k_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,1}^{(i)}\Big);$$

$$\Pi_4^{(i)}=\left(Q_{11}^{(4)}+\frac{1}{R_i}Q_{11}^{(5)}\right)\left(k_{xx,1}^{(i)}{}^2+2k_{xx,0}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)}\right)+2\left(Q_{12}^{(4)}+\frac{1}{R_i}Q_{12}^{(5)}\right)\left(k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)}+\right.$$

$$\left.+k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)}+k_{\varphi\varphi,2}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)}+k_{\varphi\varphi,3}^{(i)}\varepsilon_{xx,0}^{(i)}\right)+\left(Q_{22}^{(4)}+\frac{1}{R_i}Q_{22}^{(5)}\right)\left(k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}{}^2+\right.$$

$$\left.2\varepsilon_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,3}^{(i)}++2k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,2}^{(i)}\right)+\left(G_{23}^{(4)}+\frac{1}{R_i}G_{23}^{(5)}\right)\left(k_{\varphi z,1}^{(i)}{}^2+2\varepsilon_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,3}^{(i)}+\right.$$

$$\left.2k_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,2}^{(i)}\right)+\left(G_{13}^{(4)}+\frac{1}{R_i}G_{13}^{(5)}\right)k_{xz,1}^{(i)}{}^2+\left(G_{12}^{(4)}+\frac{1}{R_i}G_{12}^{(5)}\right)\left(k_{x\varphi,1}^{(i)}{}^2+2\varepsilon_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,3}^{(i)}+\right.$$

$$\left.+2k_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,2}^{(i)}\right);$$

$$\Pi_5^{(i)}=Q_{11}^{(5)}k_{xx,1}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)}+2Q_{12}^{(5)}\left(k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}k_{xx,2}^{(i)}+k_{\varphi\varphi,2}^{(i)}k_{xx,1}^{(i)}+k_{\varphi\varphi,3}^{(i)}k_{xx,0}^{(i)}\right)+$$

$$2Q_{22}^{(5)}\left(k_{\varphi\varphi,0}^{(i)}k_{\varphi\varphi,3}^{(i)}+k_{\varphi\varphi,1}^{(i)}k_{\varphi\varphi,2}^{(i)}\right)+2G_{23}^{(5)}\left(k_{\varphi z,0}^{(i)}k_{\varphi z,3}^{(i)}+k_{\varphi z,1}^{(i)}k_{\varphi z,2}^{(i)}\right)+$$

$$2G_{12}^{(5)}\left(k_{x\varphi,0}^{(i)}k_{x\varphi,3}^{(i)}+k_{x\varphi,1}^{(i)}k_{x\varphi,2}^{(i)}\right);$$

$$Q_{ij}^{(k)}=\int_{-0.5h}^{0.5h}Q_{ij}z^k dz;$$

$$G_{ij}^{(k)}=\int_{-0.5h}^{0.5h}G_{ij}z^k dz.$$

ДОДАТОК Ґ

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ДО РОЗДІЛУ 4

Вирази для коефіцієнтів розкладень (4.48)

$$\varepsilon_{s,0}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial s} + 0.5\left[\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial s}\right)^2\right];$$

$$k_{s,0}^{(i)} = \frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial s};$$

$$k_{s,1}^{(i)} = \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial s}; i = b, c, t;$$

$$k_{s,2}^{(i)} = 0; i = b, t;$$

$$k_{s,2}^{(c)} = \frac{\partial \gamma_1^{(c)}}{\partial s};$$

$$\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} = \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} + \frac{w^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\mathrm{tg}(\varphi)} +$$

$$+ 0.5\left\{\left(\frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)}\right)^2 +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} + \frac{w^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right)^2 +$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right)^2\right\}; i = t, b, c;$$

$$k_{\theta,0}^{(i)} = \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial \phi_2^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\phi_1^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} - \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{\theta,1}^{(i)} = \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\psi_1^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} -$$

$$- \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial \phi_2^{(i)}}{\partial \theta} + \phi_1^{(i)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^3\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{\theta,2}^{(i)} = -\frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\psi_2^{(i)}}{\partial\theta}+\psi_1^{(i)}\right)+$$

$$+\frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\phi_2^{(i)}}{\partial\theta}+\phi_1^{(i)}\right)-$$

$$-\frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)}\left(u^{(i)}+\frac{w^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);i=t,b;$$

$$k_{\theta,0}^{(C)} = \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial\phi_2^{(c)}}{\partial\theta}+\frac{w_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}+\frac{\phi_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)}-$$

$$-\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(u^{(c)}+\frac{w^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{\theta,1}^{(c)} = \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial\psi_2^{(c)}}{\partial\theta}+\frac{\psi_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)}+\frac{w_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}-$$

$$-\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\phi_2^{(c)}}{\partial\theta}+\frac{w_1^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}+\phi_1^{(c)}\right)+$$

$$\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^3\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(u^{(c)}+\frac{w^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{\theta,2}^{(c)} = \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\,\sin(\varphi)}\frac{\partial\gamma_2^{(c)}}{\partial\theta}+\frac{\gamma_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)}-$$

$$-\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\psi_2^{(c)}}{\partial\theta}+\psi_1^{(c)}+\frac{w_2^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right)+$$

$$+\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\phi_2^{(c)}}{\partial\theta}+\frac{w_1^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}+\phi_1^{(c)}\right)-$$

$$-\frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)}\left(u^{(c)}+\frac{w^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$\varepsilon_{S\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial s} + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} + \\ + \frac{\partial u^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\partial \xi}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} - v^{(i)}\right) + \\ + \frac{\partial v^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\partial s}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right) - \\ - \frac{\partial w^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)\partial s}\left(-\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{v^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{s\theta,0}^{(i)} = -\frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\,\mathrm{tg}(\varphi)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial s} + \frac{\partial \phi_2^{(i)}}{\partial s} + \\ + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\,\sin(\varphi)}\frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{\phi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} - \\ - \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta};$$

$$k_{s\theta,1}^{(i)} = \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial s} + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)\,\sin(\varphi)}\frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{\psi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)} + s)} - \\ - \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \phi_2^{(i)}\right) + \\ + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta}; i = t, c, b;$$

$$k_{s\theta,2}^{(i)} = -\frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \psi_2^{(i)}\right) + \\ + \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^3\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial \theta} - \phi_2^{(i)}\right) - \\ - \frac{1}{(s_i^{(1)} + s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta}; i = t, b;$$

$$k_{s\theta,2}^{(c)} = \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial\gamma_1^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\gamma_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)} -$$
$$- \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\psi_1^{(c)}}{\partial\theta} - \psi_2^{(c)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial\phi_1^{(c)}}{\partial\theta} - \phi_2^{(c)}\right) -$$
$$- \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\theta} + \frac{\partial\gamma_2^{(c)}}{\partial s};$$

$$\varepsilon_{SZ,0}^{(i)} = \phi_1^{(i)} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial s} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial s}\phi_1^{(i)} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial s}\left(\phi_2^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right); i = t, b;$$

$$\varepsilon_{SZ,0}^{(c)} = \phi_1^{(c)} + \frac{\partial w^{(c)}}{\partial s} + \frac{\partial u^{(c)}}{\partial s}\phi_1^{(c)} + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial s}\left(\phi_2^{(c)} + \frac{v^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$
$$+ \frac{\partial w^{(c)}}{\partial s}w_1^{(c)};$$

$$k_{sz,0}^{(i)} = 2\psi_1^{(i)};\ k_{sz,1}^{(i)} = k_{sz,2}^{(i)} = 0;\ i = t, b.$$

$$k_{sz,0}^{(c)} = 2\psi_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial s};\ k_{sz,1}^{(c)} = \frac{\partial w_2^{(c)}}{\partial s} + 3\gamma_1^{(c)};\ k_{sz,2}^{(c)} = 0;$$

$$\varepsilon_{\theta z,0}^{(i)} = \phi_2^{(i)} + \frac{1}{(s_i^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta} +$$
$$+ \frac{1}{(s_i^{(1)}+s)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\theta} + u^{(i)} + \frac{w^{(i)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right)\left(\frac{v^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$
$$\left. + \phi_2^{(i)}\right) + \frac{\phi_1^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\theta} - v^{(i)}\right); i = t, b;$$

$$k_{\theta z,0}^{(i)} = 2\psi_2^{(i)} - \frac{\phi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\,\mathrm{tg}(\varphi)} - \frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta};$$

$$k_{\theta z,1}^{(i)} = -\frac{\psi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\,\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{\phi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}^2(\varphi)} + \\ + \frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta};$$

$$k_{\theta z,2}^{(i)} = \frac{\psi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}^2(\varphi)} - \frac{\phi_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^3(\varphi)} - \\ - \frac{1}{(s_i^{(1)}+s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\theta}; i = t, b;$$

$$\varepsilon_{\theta z,0}^{(c)} = \phi_2^{(c)} + \frac{1}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\theta} + \\ + \frac{1}{\left(s_c^{(1)}+s\right)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial v^{(c)}}{\partial\theta} + u^{(c)} + \frac{w^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right)\cdot \\ \cdot\left(\frac{v^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \phi_2^{(c)}\right) + \frac{\phi_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial u^{(c)}}{\partial\theta} - v^{(c)}\right) + \\ + \frac{w_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{v^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$k_{\theta z,0}^{(c)} = 2\psi_2^{(c)} + \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\phi_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\,\mathrm{tg}(\varphi)} - \\ - \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\theta};$$

$$k_{\theta z,1}^{(c)} = 3\gamma_2^{(c)} + \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)\sin(\varphi)}\frac{\partial w_2^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\psi_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\,\mathrm{tg}(\varphi)} - \\ - \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\phi_2^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right) + \\ + \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^3\,\mathrm{tg}^2(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\theta};$$

$$k_{\theta z,2}^{(c)} = -\frac{\gamma_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\,\mathrm{tg}(\varphi)} - \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^2\,\mathrm{tg}(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial w_2^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\psi_2^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^3\mathrm{tg}^2(\varphi)}\left(\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial\theta} - \frac{\phi_2^{(c)}}{\mathrm{tg}(\varphi)}\right) -$$

$$- \frac{1}{(s_c^{(1)}+s)^4\,\mathrm{tg}^3(\varphi)\sin(\varphi)}\frac{\partial w^{(c)}}{\partial\theta};$$

$$\varepsilon_{z,0}^{(c)} = w_1^{(c)};$$

$$k_{z,0}^{(c)} = 2w_2^{(c)}.$$

Вирази для обчислення потенційних енергій обшивок (4.50)

$$\Pi_i^{(0)} = \bar{C}_{11}^{(0)}\varepsilon_{S,0}^{(i)2} + \bar{C}_{22}^{(0)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12}^{(0)}\varepsilon_{S,0}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + 2\bar{C}_{55}^{(0)}\varepsilon_{\theta Z,0}^{(i)2} + 2\bar{C}_{44}^{(0)}\varepsilon_{SZ,0}^{(i)2} +$$

$$+ 2\bar{C}_{33}^{(0)}\varepsilon_{S\theta,0}^{(i)2};$$

$$\Pi_i^{(2)} = \bar{C}_{11}^{(2)}\left(k_{S,0}^{(i)2} + 2k_{s,1}^{(i)}\varepsilon_{s,0}^{(i)} + \frac{2k_{s,0}^{(i)}\varepsilon_{s,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ \bar{C}_{22}^{(2)}\left(k_{\theta,0}^{(i)2} + 2k_{\theta,1}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + \frac{2k_{\theta,0}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2\bar{C}_{12}^{(2)}\left(k_{S,0}^{(i)}k_{\theta,0}^{(i)} + k_{S,1}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + k_{\theta,1}^{(i)}\varepsilon_{S,0}^{(i)} + \frac{k_{s,0}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{\theta,0}^{(i)}\varepsilon_{s,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2\bar{C}_{55}^{(2)}\left(k_{\theta Z,0}^{(i)2} + 2k_{\theta z,1}^{(i)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(i)} + \frac{2k_{\theta z,0}^{(i)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(i)}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2\bar{C}_{44}^{(2)}\left(k_{SZ,0}^{(i)2} + \frac{2k_{sz,0}^{(i)}\varepsilon_{sz,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2\bar{C}_{33}^{(2)}\left(k_{S\theta,0}^{(i)2} + 2k_{s\theta,1}^{(i)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(i)} + \frac{2k_{s\theta,0}^{(i)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$\Pi_i^{(4)} = \bar{C}_{11}^{(4)}\left(k_{S,1}^{(i)2} + \frac{2k_{s,0}^{(i)}k_{s,1}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ \bar{C}_{22}^{(4)}\left(k_{\theta,1}^{(i)2} + 2k_{\theta,0}^{(i)}k_{\theta,2}^{(i)} + \frac{2k_{\theta,0}^{(i)}k_{\theta,1}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{\theta,2}^{(i)}\varepsilon_{\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2\bar{C}_{12}^{(4)}\left(k_{S,0}^{(i)}k_{\theta,2}^{(i)} + k_{S,1}^{(i)}k_{\theta,1}^{(i)} + \frac{k_{s,0}^{(i)}k_{\theta,1}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{s,1}^{(i)}k_{\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_{\theta,2}^{(i)}\varepsilon_{s,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2\bar{C}_{55}^{(4)}\left(k_{\theta Z,1}^{(i)2} + 2k_{\theta z,0}^{(i)}k_{\theta z,2}^{(i)} + \frac{2k_{\theta z,0}^{(i)}k_{\theta z,1}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$

$$\left. + \frac{2k_{\theta z,2}^{(i)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2\bar{C}_{33}^{(4)}\left(k_{S\theta,1}^{(i)2} + 2k_{s\theta,2}^{(i)}k_{s\theta,0}^{(i)} + \frac{2k_{s\theta,1}^{(i)}k_{s\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{s\theta,2}^{(i)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(i)}}{\left(s_i^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$\bar{C}_{ij}^{(k)} = \int_{-0.5h_t}^{0.5h_t} \bar{C}_{ij} z^k dz.$$

Вирази для обчислення потенційної енергії заповнювача (4.51)

$$\Pi_c^{(0)} = C_{11}^{(0)}\varepsilon_{S,0}^{(c)2} + C_{22}^{(0)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)2} + C_{33}^{(0)}\varepsilon_{z,0}^{(c)2} + 2C_{12}^{(0)}\varepsilon_{S,0}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)} + 2C_{13}^{(0)}\varepsilon_{S,0}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)} +$$

$$+ 2C_{23}^{(0)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)} + 2C_{44}^{(0)}\varepsilon_{\theta Z,0}^{(c)2} + 2C_{55}^{(0)}\varepsilon_{SZ,0}^{(c)2} + 2C_{66}^{(0)}\varepsilon_{S\theta,0}^{(i)2};$$

$$\Pi_c^{(2)} = C_{11}^{(2)}\left(k_{S,0}^{(c)2} + 2k_{s,1}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)} + \frac{2k_{s,0}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ C_{22}^{(2)}\left(k_{\theta,0}^{(c)2} + 2k_{\theta,1}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)} + \frac{2k_{\theta,0}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ C_{33}^{(2)}\left(k_{z,0}^{(c)2} + \frac{2k_{z,0}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2C_{12}^{(2)}\left(k_{S,0}^{(c)}k_{\theta,0}^{(c)} + k_{S,1}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)} + k_{\theta,1}^{(c)}\varepsilon_{S,0}^{(c)} + \frac{k_{s,0}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{\theta,0}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{13}^{(2)}\left(k_{S,0}^{(c)}k_{z,0}^{(c)} + k_{S,1}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)} + \frac{k_{s,0}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_{z,0}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{23}^{(2)}\left(k_{\theta,0}^{(c)}k_{z,0}^{(c)} + k_{\theta,1}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)} + \frac{k_{\theta,0}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_{z,0}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+2C_{44}^{(2)}\left(k_{\theta Z,0}^{(c)2} + 2k_{\theta z,1}^{(c)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(c)} + \frac{2k_{\theta z,0}^{(c)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{55}^{(2)}\left(k_{SZ,0}^{(c)2} + 2\varepsilon_{sz,0}^{(c)}k_{sz,1}^{(c)} + \frac{2k_{sz,0}^{(c)}\varepsilon_{sz,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{66}^{(2)}\left(k_{S\theta,0}^{(c)2} + 2k_{s\theta,1}^{(c)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(c)} + \frac{2k_{s\theta,0}^{(c)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)} + s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$\Pi_c^{(4)} = C_{11}^{(4)}\left(k_{S,1}^{(c)2} + 2k_{s,0}^{(c)}k_{s,2}^{(c)} + \frac{2k_{s,0}^{(c)}k_{s,1}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{s,2}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ C_{22}^{(4)}\left(k_{\theta,1}^{(c)2} + 2k_{\theta,0}^{(c)}k_{\theta,2}^{(c)} + \frac{2k_{\theta,0}^{(c)}k_{\theta,1}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{\theta,2}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{12}^{(4)}\left(\frac{k_{\theta,2}^{(c)}\varepsilon_{s,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{s,2}^{(c)}\varepsilon_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{s,1}^{(c)}k_{\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_{s,0}^{(c)}k_{\theta,1}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + k_{\theta,0}^{(c)}k_{s,2}^{(c)} + k_{\theta,2}^{(c)}k_{s,0}^{(c)} + k_{\theta,1}^{(c)}k_{s,1}^{(c)}\right) +$$

$$+ 2C_{13}^{(4)}\left(k_{z,0}^{(c)}k_{s,2}^{(c)} + \frac{k_{s,1}^{(c)}k_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{s,2}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{23}^{(4)}\left(k_{\theta,2}^{(c)}k_{z,0}^{(c)} + \frac{k_{\theta,1}^{(c)}k_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{k_{\theta,2}^{(c)}\varepsilon_{z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{44}^{(4)}\left(2k_{\theta z,0}^{(c)}k_{\theta z,2}^{(c)} +\right.$$

$$\left. + k_{\theta z,1}^{(c)2} + \frac{2k_{\theta z,0}^{(c)}k_{\theta z,1}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{\theta z,2}^{(c)}\varepsilon_{\theta z,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) +$$

$$+ 2C_{55}^{(4)}\left(k_{sz,1}^{(c)2} + \frac{2k_{sZ,0}^{(c)}k_{sz,1}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right) + 2C_{66}^{(4)}\left(k_{S\theta,1}^{(c)2} +\right.$$

$$\left. + 2k_{s\theta,2}^{(c)}k_{s\theta,0}^{(c)} + \frac{2k_{s\theta,1}^{(c)}k_{s\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)} + \frac{2k_{s\theta,2}^{(c)}\varepsilon_{s\theta,0}^{(c)}}{\left(s_c^{(1)}+s\right)\mathrm{tg}(\varphi)}\right);$$

$$C_{ij}^{(k)} = \int_{-0.5h_c}^{0.5h_c} C_{ij}z^k dz.$$

Вирази для обчислення кінетичних енергій шарів оболонки (4.54)

$$\Lambda_0^{(i)} = \rho_i^{(0)}\left(\dot{u}^{(i)2} + \dot{v}^{(i)2} + \dot{w}^{(i)2}\right); i = t, c, b;$$

$$\Lambda_2^{(c)} = \rho_c^{(2)}\left\{\dot{\phi}_1^{(c)2} + 2\dot{u}^{(c)}\dot{\psi}_1^{(c)} + \frac{2\dot{u}^{(c)}\dot{\phi}_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \left[\frac{\dot{v}^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(c)}\right]^2 + \right.$$

$$+ 2\dot{v}^{(c)}\dot{\psi}_2^{(c)} + \frac{2\dot{v}^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\left[\frac{\dot{v}^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(c)}\right] + \dot{w}_1^{(c)2} +$$

$$\left. + 2\dot{w}^{(c)}\dot{w}_2^{(c)} + \frac{2\dot{w}^{(c)}\dot{w}_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right\};$$

$$\Lambda_4^{(c)} = \rho_c^{(4)}\left\{\dot{\psi}_1^{(c)2} + 2\dot{\phi}_1^{(c)}\dot{\gamma}_1^{(c)} + \frac{2\dot{u}^{(c)}\dot{\gamma}_1^{(c)} + 2\dot{\phi}_1^{(c)}\dot{\psi}_1^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\psi}_2^{(c)2} + \right.$$

$$+ 2\dot{\gamma}_2^{(c)}\left[\frac{\dot{v}^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(c)}\right] + \frac{2\dot{v}^{(c)}\dot{\gamma}_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} +$$

$$+ \frac{2\dot{\psi}_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\left[\frac{\dot{v}^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(c)}\right] + \dot{w}_2^{(c)2} +$$

$$\left. + \frac{2\dot{w}_1^{(c)}\dot{w}_2^{(c)}}{(s_c^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\right\};$$

$$\Lambda_2^{(i)} = \rho_i^{(2)}\left\{\dot{\phi}_1^{(i)2} + 2\dot{u}^{(i)}\dot{\psi}_1^{(i)} + \frac{2\dot{u}^{(i)}\dot{\phi}_1^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \left[\frac{\dot{v}^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(i)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2\dot{v}^{(i)}\dot{\psi}_2^{(i)} + \frac{2\dot{v}^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\left[\frac{\dot{v}^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(i)}\right]\right\};$$

$$\Lambda_4^{(i)} = \rho_c^{(4)}\left\{\dot{\psi}_1^{(i)2} + \frac{2\dot{\phi}_1^{(i)}\dot{\psi}_1^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\psi}_2^{(i)2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\dot{\psi}_2^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)}\left[\frac{\dot{v}^{(i)}}{(s_i^{(1)}+s)\mathrm{tg}(\varphi)} + \dot{\phi}_2^{(i)}\right]\right\}; i = t, b;$$

$$\rho_i^{(k)} = \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} \rho_i\, z_i^k dz_i; i = t, c, b.$$

Вирази для обчислення узагальнених сил (4.68)

$$G^{(1)}_{j_1+N_w,j+N_w} = G^{(1)}_{j_1,j} =$$

$$= -\frac{\gamma p_\infty M^2 \pi \sin(\varphi)}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^L \left[\cos(\beta)\, W'_{1,j}(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{W_{1,j}(\xi)}{2\left(s_t^{(1)} + \xi\right)\sin(\varphi)\sqrt{M^2-1}} \right] \times W_{1,j}(\xi)\left(s_t^{(1)} + \xi\right) d\xi\,;$$

$$G^{(1)}_{j_1,j+N_w} = -\frac{\gamma p_\infty M^2 \pi n}{\sqrt{M^2-1}} \sin(\beta) \int_0^L W_{1,j}(\xi) W_{1,j_1}(\xi) d\xi\,;$$

$$\Gamma^{(1)}_{j_1+N_w,j+N_w} = \Gamma^{(1)}_{j_1,j} =$$

$$= -\frac{\gamma p_\infty M (M^2-2) \pi \sin(\varphi)}{(M^2-1)^{3/2} a_\infty} \int_0^L W_{1,j}(\xi) W_{1,j_1}(\xi) \left(s_t^{(1)} + \xi\right) d\xi\,;$$

$$G^{(1)}_{j_1+N_w,j} = \frac{\gamma p_\infty M^2 n \pi \sin(\beta)}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^L W_{1,j}(\xi) W_{1,j_1}(\xi) d\xi\,;$$

$$j_1 = 1, \dots, N_w; j = 1, \dots, N_w;$$

$$G^{(1)}_{j_1+2N_w,j+2N_w} =$$

$$= -\frac{\gamma p_\infty M^2 2\pi \sin(\varphi)}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^L \left[\cos(\beta)\, W'_{1,2j-1}(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{W_{1,2j-1}(\xi)}{2\left(s_t^{(1)} + \xi\right)\sin(\varphi)\sqrt{M^2-1}} \right] W_{1,2j-1}(\xi)\left(s_t^{(1)} + \xi\right) d\xi\,;$$

$$\Gamma^{(1)}_{j_1+2N_w,j+2N_w} =$$

$$= -\frac{\gamma p_\infty M (M^2-2) 2\pi \sin(\varphi)}{(M^2-1)^{3/2} a_\infty} \int_0^L W_{1,2j-1}(\xi) W_{1,2j_1-1}(\xi) \left(s_t^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \xi\right) d\xi\,;$$

$$j_1 = 1, \dots, \overline{N}_w; j = 1, \dots, \overline{N}_w.$$