

Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного
Національна академія наук України

УСПЕНСЬКИЙ БОРИС ВАЛЕРІЙОВИЧ



УДК 534.12

**КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНИХ БАГАТОШАРОВИХ ТОНКОСТІННИХ
КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2026

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у відділі нелінійної механіки та математичного моделювання Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України.

Науковий консультант:

член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор
Аврамов Костянтин Віталійович,
Інститут енергетичних машин і систем
ім. А.М.Підгорного Національної академії
наук України,
завідувач відділу нелінійної механіки та
математичного моделювання

Опоненти:

член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор
Ларін Олексій Олександрович,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
м. Харків, в.о. проректора з наукової роботи

доктор фізико-математичних наук, професор
Марчук Михайло Володимирович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, завідувач відділу моделювання
композитних структур і складних систем

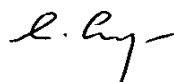
доктор технічних наук, старший науковий
співробітник
Склепус Сергій Миколайович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
Національної академії наук України, м. Київ,
заступник завідувача відділу термопластичності

Захист відбудеться «03» листопада 2026 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61099, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічній бібліотеці Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61099, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10.

Автореферат розісланий «21» вересня 2026 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Олена СТРЕЛЬНИКОВА

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Композитні оболонки набувають великого значення в аерокосмічній, автомобільній галузях, оборонної промисловості та ракетобудуванні. Наразі архітектура тонких композитних оболонок ускладнюється, включаючи в себе функціонально градієнтні матеріали, стільникові заповнювачі з нетиповою геометрією та інші елементи. Тому дослідження динаміки тонких композитних оболонок швидко розвиваються.

Тонкостінним композитним оболонкам притаманна складна нелінійна поведінка: автоколивання, хаотичні коливання, втрата стійкості. Ці явища характеризуються значними амплітудами коливань і можуть призводити до пошкодження та руйнування конструкцій. Тому аналіз нелінійної динаміки стає обов'язковим етапом конструювання оболонкової конструкції. Створення нових методик дослідження нелінійних явищ у тонкостінних композитних конструкціях під дією різних видів навантаження дозволяє проводити аналіз, який стандартними методиками (лінійний, скінченно-елементний аналіз) не вдається виконати.

Таким чином, розробка ефективних методів аналізу нелінійних коливань тонкостінних композитних конструкцій, які враховують особливості їхнього нелінійного деформування, є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у відділі нелінійної механіки та математичного моделювання Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України. Здобувач брав участь у виконанні держбюджетних та грантових тематик, в тому числі:

– «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA» SPS G6176 (грант НАТО, 2024–2026), ДР № 0124U003710

– «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій» (НФДУ, 2020-2021, 2023), ДР № 0120U104923;

– «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням» (МОН, 2019-2020), ДР № 0119U102947;

– «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів» (НФДУ, 2024-2025), ДР № 0124U003951.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних методів для аналізу нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок з урахуванням їхнього геометрично нелінійного деформування, що дозволить виявляти особливі режими коливань внаслідок різних видів навантаження.

Для досягнення цієї мети було поставлено і розв'язано наступні задачі:

– побудувати нелінійні математичні моделі динаміки композитних багатошарових оболонок;

- розробити методи аналізу нелінійних коливань композитних оболонок на базі побудованих математичних моделей;

- застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки нанокompозитних циліндричних оболонок, що взаємодіють з надзвуковим газовим струменем;

- застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних циліндричних оболонок під дією параметричного навантаження;

- застосувати розроблені методи для аналізу нелінійної динаміки композитних конічних оболонок, що взаємодіють із надзвуковим газовим струменем;

- застосувати розроблені методи для аналізу динамічної стійкості складених коніко-циліндричних композитних оболонок у взаємодії з надзвуковим газовим струменем;

- застосувати розроблені методи для аналізу вимушеної нелінійної динаміки композитних оболонок подвійної кривизни;

- розробити методи розрахунку властивостей стільникових заповнювачів та їхньої гомогенізації.

Об'єкт дослідження – нелінійна динаміка тонкостінних композитних конструкцій.

Предмет дослідження – коливання композитних оболонок при геометрично нелінійному деформуванні.

Методи дослідження.

- Для дослідження біфуркацій та стійкості нелінійних коливань застосовується метод пристрілки сумісно із методом продовження;

- методи аналізу стійкості динамічних систем (розрахунки мультиплікаторів, визначників Хілла, характеристичних експонент);

- для аналізу власних коливань використовується метод Релея-Рітца;

- метод Рунге-Кутта для чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь застосовано для аналізу динаміки лінійних систем та для верифікації результатів;

- метод скінченних елементів застосовано для верифікації результатів та для аналізу статичного відгуку стільникових заповнювачів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

- розвинуто моделі геометрично нелінійних коливань композитних багатошарових оболонок.

- вдосконалено метод продовження за параметром довжини дуги частотного відгуку для аналізу параметричних та вимушених нелінійних коливань багатошарових оболонок;

- запропоновано нову методику аналізу коливань композитних багатошарових оболонок під дією параметричних, вимушених навантажень та надзвукового газового струменя з урахуванням геометрично нелінійного деформування;

- виявлено нові властивості нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки під дією періодичного стискаючого навантаження. Уперше виявлено в таких оболонках біфуркаційну поведінку, що

характеризується переходом від стоячої до бігучої хвилі та навпаки;

- виявлено нові властивості автоколивань тришарової усіченої конічної оболонки в надзвуковому повітряному струмені. Виявлено, що в оболонці можуть виникати майже періодичні та хаотичні коливання, які мають набагато більшу амплітуду за періодичні режими;

- вперше запропоновано нову математичну модель для аналізу коливань складених тришарових коніко-циліндричних оболонок, яка дозволяє звести цю задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь;

- виявлено нові властивості нелінійних вимушених коливань тришарової оболонки подвійної кривизни. Біфуркаційна поведінка оболонки вирізняється складністю;

- уперше отримано гомогенізовані властивості різноманітних стільникових заповнювачів шляхом скінченно-елементної гомогенізації.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені математичні методи, а також програмне забезпечення, яке їх реалізує, дозволили провести розрахунки нелінійних коливань композитних багатошарових оболонок, які можуть представляти обтічники, адаптери, корпуси аерокосмічної та іншої техніки. Було виявлено нові явища та режими коливань, які можуть виникати в таких конструктивних елементах. Запропонована методика гомогенізації стільникових заповнювачів може використовуватися для вибору геометричних властивостей стільників для задоволення потреб при їх проектуванні.

Наукові результати роботи використано при виконанні держбюджетних тем, а також при виконанні науково-дослідних робіт: «Розроблення програмного забезпечення для аналізу динаміки та міцності корпусних композитних елементів з наноармуванням», «Оптимізація топології та підвищення міцнісних характеристик багатошарових оболонок і твердих тіл при використанні адитивних технологій», «Композитні метаматеріали для аерокосмічних конструкцій – CoMetA», «Використання тонкостінних композитних сендвіч-конструкцій із виготовленими адитивними технологіями стільниковими заповнювачами для підвищення динамічної міцності та зменшення питомої ваги ракет і безпілотних літальних апаратів».

Особистий внесок здобувача. Положення і результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримані здобувачем особисто. Серед них: побудова математичних моделей геометрично нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсувних деформацій високого порядку; адаптація та застосування методу продовження за параметром для побудови частотних відгуків композитних оболонок; аналіз втрати динамічної стійкості та автоколивань циліндричної нанокомпозитної оболонки у взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості та параметричних коливань циліндричної сендвіч-оболонки під дією періодичного стискаючого навантаження; аналіз нестационарного відгуку композитної конічної оболонки з ізотропним шпангоутом під дією імпульсного навантаження; аналіз втрати стійкості та автоколивань конічної сендвіч-оболонки внаслідок взаємодії з надзвуковим газовим струменем; аналіз втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною сендвіч-оболонкою; аналіз нелінійних вимушених коливань

сендвіч-оболонки подвійної кривизни під впливом зосередженої періодичної сили; скінченно-елементний аналіз пружних властивостей стільникових заповнювачів; програмні реалізації вищезазначених методів і моделей і задач; скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

Апробація результатів роботи. Загальні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 14 українських та міжнародних наукових конференціях: 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes (Nicosia, Cyprus. 17-19 April, 2019); Науково-практична конференція «Сучасні розрахунково-експериментальні методи визначення характеристик ракетно-космічної техніки» (Дніпро, 10–12 грудня 2019); Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference (Roubaix, France, October 8–9, 2019); Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я, 2020» (м. Харків, 13–15 травня 2020); 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 5–10 October 2020); II міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 5–8 жовтня 2020 року); 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 13–17 September 2021); ENOC 2020+2 (Lyon, France, July 17–22, 2022); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2022 (Kharkiv, 9–11 June 2022); 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) (Kharkiv, 03–07 October 2022); IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), (Kharkiv, 2–6 October 2023); Smart Technologies in Urban Engineering, STUE 2023 (Kharkiv, 8–10 June 2023); STUE 2024 International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering (Kharkiv, 12–14 June 2024); Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024) (Kharkiv, 12–14 December 2024).

Публікації. Основні положення та наукові результати дисертаційної роботи опубліковані в 54 наукових працях, з них:

– 46 статей, з яких 17 включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection, з яких 14 статей опубліковано в різних журналах (у тому числі 13 статей – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 кuartилів, 4 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 кuartилів); 20 статей – в збірниках наукових праць, що входять до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 9 статей – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (з яких 2 статті опубліковано в різних зарубіжних видавництвах);

– 8 публікацій – тези доповідей на конференціях (з яких 4 роботи видано в зарубіжних видавництвах).

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (250 найменувань на 32 сторінках) та 5 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 365 сторінок; робота містить 77 рисунків і 28 таблиць. Основний текст дисертації складає 257 сторінок та додатки на 71 сторінці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, викладено основні результати, описано їхню наукову новизну та практичне значення, окреслено особистий внесок автора, наведено відомості про публікації та апробацію роботи.

У **першому розділі** наведено огляд літературних джерел за темою дисертації. Проведено аналіз сучасних робіт, що розглядають питання нелінійної динаміки та геометрично нелінійних коливань композитних тонкостінних конструкцій. Розглядаються властивості та будова оболонок трьох типів: нанокомпозитних, сендвіч-конструкцій та конструкцій з посиленням у вигляді стрингерів, шпангоутів та оребрень. Розглянуто роботи, які присвячено флатеру та параметричним коливанням композитних оболонок.

Фундаментальний внесок в розвиток теорії нелінійних коливань тонких оболонок зробили В.В. Болотін, А.С. Вольмір, В.І. Гуляєв, В.Д. Кубенко, Ю.В. Міхлін, М. Amabili, Е.Н. Dowell, D.A.Evensen, М.Р. Païdoussis, F. Pellicano.

Аналіз представлених наукових джерел показав, що попри глибоке вивчення окремих аспектів механіки композитів та аеропружності, цілісний підхід до розв'язання окресленої проблеми досі відсутній. Зокрема, більшість існуючих праць обмежується дослідженням регулярних геометричних форм або лінійних наближень, що не відображає реального стану експлуатації сучасних об'єктів. Питання нелінійних коливань багатошарових та наноармованих тонкостінних елементів внаслідок взаємодії з повітряним струменем або параметричного збурення залишаються найменш висвітленими в літературі.

На основі аналізу літератури обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, що пов'язана зі створенням універсальної методики розрахунку динамічної поведінки багатошарових тонкостінних конструкцій при геометрично нелінійному деформуванні.

Другий розділ присвячено опису розроблених методів дослідження. Основним інструментом, застосованим у роботі, є нова математична модель динаміки багатошарових оболонок. У межах моделі розглядаються оболонки із жорстким зчепленням між шарами. Деформування матеріалів описується лінійним законом Гука, причому з кожним окремим шаром конструкції пов'язана власна криволінійна система координат (x, y, z_i) ; $x \in [x_0; b]$; $y \in [y_0; a]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$. Криволінійні координати x, y відповідають напрямкам кривизни оболонки.

Розглянемо тришарову оболонку подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем. Математичну модель побудовано на основі зсувної теорії високого порядку. Переміщення точок деформівного тіла апроксимуються функціями u_1, u_2, u_3 . Для крайніх шарів (обшивок) деформаційні співвідношення представлені розкладаннями за формулою: $u_1^{(i)}(x, y, z_i) = u^{(i)}(x, y) \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right) + z_i \phi_1^{(i)}(x, y) + z_i^2 \varphi_1^{(i)}(x, y)$; $u_2^{(i)}(x, y, z_i) = v^{(i)}(x, y) \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right) + z_i \phi_2^{(i)}(x, y) + z_i^2 \varphi_2^{(i)}(x, y)$; $u_3^{(i)}(x, y, z_i) = w^{(i)}(x, y)$; $i = 1, 3$, де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$ – проекції переміщень середніх поверхонь обшивок на координатні вісі (x, y, z_i) ; $i = 1, 2$; $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – кути

повороту нормалі до серединної поверхні шару; $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}$ – невідомі функції, які будуть знайдені; R_1, R_2 – радіуси кривизни оболонки вздовж координатних ліній x, y .

Натомість для середнього шару використано розкладання вищого порядку, що дозволяє додатково врахувати можливість зміни його товщини в процесі деформації:

$$u_1^{(2)}(x, y, z_2) = u^{(2)}(x, y) \left(1 + \frac{z_2}{R_1}\right) + z_2 \phi_1^{(2)}(x, y) + z_2^2 \varphi_1^{(2)}(x, y) + z_2^3 \gamma_1^{(2)}(x, y);$$

$$u_2^{(2)}(x, y, z_2) = v^{(2)}(x, y) \left(1 + \frac{z_2}{R_2}\right) + z_2 \phi_2^{(2)}(x, y) + z_2^2 \varphi_2^{(2)}(x, y) + z_2^3 \gamma_2^{(2)}(x, y);$$

$$u_3^{(2)}(x, y, z_2) = w^{(2)}(x, y) + z_2 w_1^{(2)}(x, y) + z_2^2 w_2^{(2)}(x, y),$$

де $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$ – проекції переміщень серединної поверхні шару 2; $\phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні шару 2; $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}$ – невідомі функції, які будуть знайдені.

Пошук невідомих функцій апроксимації здійснюється шляхом задоволення відповідних граничних умов, а також умов неперервності поля переміщень на міжшарових границях.

На верхній та нижній поверхнях оболонки задовольняються наступні граничні умови: $\varepsilon_{xz}^{(1)} \Big|_{z_1=0.5h_1} = \varepsilon_{yz}^{(1)} \Big|_{z_1=0.5h_1} = \varepsilon_{xz}^{(3)} \Big|_{z_3=-0.5h_3} = \varepsilon_{yz}^{(3)} \Big|_{z_3=-0.5h_3} = 0$, де

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{A_1 \partial x} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1}\right); \quad \varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{A_2 \partial y} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2}\right); \quad i = 1, 3;$$

A_1, A_2 – параметри Ляме оболонки вздовж координатних ліній x, y .

Умова неперервності переміщень між шарами оболонки: $u_i^{(1)}(z_1 = -0.5h_1) = u_i^{(2)}(z_2 = 0.5h_2); u_i^{(3)}(z_3 = 0.5h_3) = u_i^{(2)}(z_2 = -0.5h_2); i = 1, 2, 3$.

У результаті повна кінематика руху оболонки описується п'ятнадцятьма незалежними змінними $(u^{(i)}, \phi_1^{(i)}, v^{(i)}, \phi_2^{(i)}, w^{(i)}); i = 1, 2, 3$.

У роботі розглядається випадок геометрично нелінійного деформування конструкції, коли величини переміщень стають сумірними з її загальною товщиною. З огляду на це, кінематичний зв'язок між переміщеннями та деформаціями подано у вигляді нелінійного диференціального оператора:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} + 0.5 \left(\varepsilon_1^{(i)2} + \omega_1^{(i)2} + \theta^{(i)2} \right);$$

$$\varepsilon_{yy}^{(i)} = \varepsilon_2^{(i)} + 0.5 \left(\varepsilon_2^{(i)2} + \omega_2^{(i)2} + \psi^{(i)2} \right);$$

$$\varepsilon_{xy}^{(i)} = \omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)} \omega_2^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)} \omega_1^{(i)} + \theta^{(i)} \psi^{(i)};$$

$$\varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_1}\right)^{-1} \left\{ \frac{\partial u_3^{(i)}}{A_1 \partial x} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1} + \left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{A_1 \partial x} + \frac{u_3^{(i)}}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} u_2^{(i)} \right) \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{A_1 \partial x} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} u_1^{(i)} \right) \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{A_1 \partial x} - \frac{u_1^{(i)}}{R_1} \right) \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i} \right\};$$

$$\varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \left(1 + \frac{z_i}{R_2}\right)^{-1} \left\{ \frac{\partial u_3^{(i)}}{A_2 \partial y} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2} + \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{A_2 \partial y} + \frac{u_3^{(i)}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u_1^{(i)} \right) \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{A_2 \partial y} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u_2^{(i)} \right) \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{A_2 \partial y} - \frac{u_2^{(i)}}{R_2} \right) \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z_i} \right\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} \text{де } \varepsilon_1^{(i)} &= \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{u_3^{(i)}}{R_1} \right); \omega_1^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_1}} \left(\frac{\partial u_2^{(i)}}{A_1 \partial x} \right); \theta^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_1}} \left(-\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x} + \frac{u_1^{(i)}}{R_1} \right); \\ \varepsilon_2^{(i)} &= \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial y} + \frac{u_3^{(i)}}{R_2} \right); \omega_2^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}} \left(\frac{\partial u_1^{(i)}}{A_2 \partial y} \right); \psi^{(i)} = \frac{1}{1+\frac{z_i}{R_2}} \left(-\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} + \frac{u_2^{(i)}}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Необхідна для побудови рівнянь потенційна енергія шарів представлена інтегральним виразом:

$$U_i = 0.5 \int_{V_i} \left(\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy}^{(i)} + \sigma_{zz}^{(i)} \varepsilon_{zz}^{(i)} + \sigma_{xy}^{(i)} \varepsilon_{xy}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{yz}^{(i)} \varepsilon_{yz}^{(i)} \right) \times \\ \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i, \quad (1)$$

де V_i - об'єм, що займає шар; σ - напруження, що знаходяться з закону Гука.

Кінетична енергія системи визначається згідно зі співвідношенням:

$$T_i = 0.5 \int_{V_i} \rho_i \left(\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i \quad (2)$$

Механічні енергії оболонки представляються в формі $U_\Sigma = \sum U_i$; $T_\Sigma = \sum T_i$.

Дискретизація вихідної континуальної задачі здійснюється із застосуванням методу заданих форм, який передбачає розкладання шуканих змінних за власними формами коливань оболонки. Розглянемо кінематичні граничні умови закріплення контуру оболонки:

$$\mathbf{B}(\mathbf{E})|_\Gamma = 0, \quad (3)$$

де $\mathbf{E} = \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \psi_X^{(i)}, \psi_Y^{(i)}, i = 1 \dots N_l\}$; N_l - кількість шарів; Γ - заданий контур серединної поверхні оболонки; $\mathbf{B}$ - диференціальний за часом оператор.

Змінні задачі представляються в формі розкладень за власними формами коливань оболонки у вигляді:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_w(i-1)+j}(t) W_{i,j}(x, y); v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi 1}} q_{N_l N_w + N_v(i-1)+j}(t) V_{i,j}(x, y); \\ \psi_X^{(i)} &= \sum_{j=1}^{N_{\phi 2}} q_{N_l N_w + N_l N_v + N_X(i-1)+j}(t) X_{i,j}(x, y); \\ \psi_Y^{(i)} &= \sum_{j=1}^{N_u} q_{N_l N_w + N_l N_v + N_l N_X + N_Y(i-1)+j}(t) Y_{i,j}(x, y); \\ u^{(i)} &= \sum_{j=1}^{N_v} q_{N_l N_w + N_l N_v + N_l N_X + N_l N_Y + N_u(i-1)+j}(t) U_{i,j}(x, y); i = 1, \dots, N_l, \quad (4) \end{aligned}$$

де $W_{i,j}, V_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}, U_{i,j}$, - власні форми коливань оболонки; $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_{N_*(t)})$; $N_* = N_l(N_w + N_v + N_X + N_Y + N_u)$; $\mathbf{q}$ - вектор узагальнених координат.

Загальний вираз потенційної енергії системи розділяється на квадратичну частину та складову, що містить члени вищих порядків: $\Pi(\mathbf{E}) = \iint_S \tilde{\Pi}(\mathbf{E}) dS$, де $\tilde{\Pi}(\mathbf{E})$ - диференціальний вираз в часткових похідних; $\tilde{\Pi}(\mathbf{E}) = \tilde{\Pi}_2(\mathbf{E}) + \tilde{\Pi}_*(\mathbf{E})$; $\tilde{\Pi}_2(\mathbf{E})$ - вираз, що складається виключно з моноmів другого порядку відносно компонентів $\mathbf{E}$ та їхніх похідних; $\tilde{\Pi}_*$ - вираз, який містить всі мономи вищих порядків відносно компонентів $\mathbf{E}$ та їхніх похідних; S - серединна поверхня оболонки.

Кінетична енергія оболонки має лінійну форму $T(\mathbf{E}) = \iint_S \tilde{T}(\mathbf{E}) dS$, де $\tilde{T}(\mathbf{E})$ - диференціальний вираз в часткових похідних.

У результаті процедури дискретизації потенційна енергія оболонки

трансформується у поліном четвертого степеня відносно узагальнених координат q , тоді як кінетична енергія набуває вигляду квадратичної форми відносно узагальнених швидкостей:

$$T(\mathcal{E}) = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_*});$$

$$\Pi(\mathcal{E}) = \Pi^{(2)}(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)) + \Pi^{(3)}(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)) + \Pi^{(4)}(q_1(t), \dots, q_{N_*}(t)).$$

Для попереднього визначення власних форм коливань оболонки застосовано варіаційний метод Релея-Рітца. Шукані змінні апроксимуються розкладаннями за системою базисних функцій:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \psi_x^{(i)} \\ \psi_y^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x, y) \\ V_i(x, y) \\ W_i(x, y) \\ X_i(x, y) \\ Y_i(x, y) \end{bmatrix} \cos(\omega t); i = 1 \dots N_l,$$

де $U_i(x, y), V_i(x, y), W_i(x, y), X_i(x, y), Y_i(x, y)$ задовольняють умові (3);

$$U_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu j}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x) U_y^{(j)}(y); V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\mu j}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x) V_y^{(j)}(y); W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x) W_y^{(j)}(y); X_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\mu j}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x) F_y^{(j)}(y);$$

$$Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\mu j}^{(f)} G_x^{(\mu)}(x) G_y^{(j)}(y), \quad (5)$$

$\mathbf{A} = (A_{t11}, A_{t12}, \dots, A_{bN_b^{(g)}L_b^{(g)}}) = \mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{N_*})$ – вектор невідомих коефіцієнтів.

Таким чином опис динамічної поведінки континууму зводиться до скінченного набору невідомих коефіцієнтів розкладання.

Визначення коефіцієнтів розкладень (5) здійснюється шляхом застосування варіаційного принципу Гамільтона $\int_0^{2\pi/\omega} (\Pi_2(\mathcal{E}) - T(\mathcal{E})) dt \rightarrow \min$, де $\Pi_2(\mathcal{E}) = \iint_S \tilde{\Pi}_2(\mathcal{E}) dS$.

Оскільки механічні енергії є квадратичними формами відносно амплітудних коефіцієнтів, задача мінімізації функціонала зводиться до класичної узагальненої задачі на власні значення та власні вектори, які й визначають спектр частот та відповідні власні форми коливань конструкції:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_2(\mathcal{E}) &= \tilde{U}(\mathbf{A}) \cos^2(\omega t) \\ T(\mathcal{E}) &= \omega^2 \tilde{K}(\mathbf{A}) \sin^2(\omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial A_j} (\tilde{U}(\mathbf{A}) - \omega^2 \tilde{K}(\mathbf{A})) = 0; j = 1, \dots, N_*.$$

Для дослідження динамічної стійкості та нелінійних режимів руху застосовано метод пристрілки у поєднанні з методом продовження розв'язку за параметром. З цією метою дискретизовану систему диференціальних рівнянь руху оболонки записано в узагальнених координатах:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \omega^2 \boldsymbol{\eta} + \omega \beta \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, \tau),$$

де $\boldsymbol{\eta}$ – вектор головних координат системи розмірністю N ; ω^2 – діагональна матриця розмірністю $N \times N$, що містить в собі квадрати власних частот системи; β – коефіцієнт дисипації, що пропорційна матриці мас; $\mathbf{H}(\boldsymbol{\eta})$ – вектор-функція

розмірністю N , що містить в собі нелінійні компоненти; $\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ – N -вимірний вектор періодичної узагальненої сили з періодом Ω .

За допомогою масштабування часу здійснюється перехід до безрозмірного аргументу з постійним періодом коливань, рівним одиниці $\tau \rightarrow \tau \frac{\Omega}{2\pi}$.

Вихідна система другого порядку трансформується до нелінійної системи першого порядку у формі Коші:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \tau),$$

де $\mathbf{y}$ – вектор розмірності $2N$; $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \tau)$ – вектор-функція розмірності $2N$: $F_i(\mathbf{y}, \tau) = \frac{2\pi}{\Omega} y_{i+N}$; $G_{i+N}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{2\pi}{\Omega} \left(-\omega_i^2 y_i - \frac{\Omega}{2\pi} \omega_i^2 \dot{y}_i - H_i(\boldsymbol{\eta})|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{y}_{1\dots N}} + G_i(\boldsymbol{\eta}, \tau)|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{y}_{1\dots N}} \right)$.

Пошук стійких та нестійких періодичних розв'язків виконується шляхом чисельного інтегрування рівнянь руху на інтервалі одного періоду. Обов'язковою умовою існування періодичного режиму є виконання критерію замкненості траєкторії, згідно з яким вектор стану системи наприкінці періоду має збігатися з вектором початкових умов:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \xrightarrow[\tau \in [0; T]]{(2.18)} \mathbf{y}_T = \mathbf{y}(T) \\ \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}_0, \Omega) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}_0, \Omega) = \mathbf{y}_T - \mathbf{y}_0$.

Для ефективної побудови повних амплітудно-частотних характеристик оболонки та подолання точок повороту (біфуркацій) застосовано метод продовження за довжиною дуги кривої частотного відгуку. Особливістю реалізації метода є те, що для знаходження наступної точки розв'язку на фіксованій відстані Δ_s уздовж дотичного вектора, вихідна система доповнюється рівнянням псевдодугового кроку, після чого розв'язується сумісно ітераційним методом Ньютона. В цих умовах розв'язок на $i+1$ ітерації $\mathbf{y}_0^{(i+1)}$ визначається виразом

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}}_0^{(i+1)(j+1)} \\ \widetilde{\Omega}^{(i+1)(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}}_0^{(i+1)(j)} \\ \widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)} \end{bmatrix} - \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\theta}(\widetilde{\mathbf{y}}_0^{(i+1)(j)}, \widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)}), \quad j = 0, \dots;$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}}_0^{(i+1)(0)} \\ \widetilde{\Omega}^{(i+1)(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0^{(i)} \\ \Omega^{(i)} \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{\mathbf{y}}_0^{(i+1)(j)}$ – оцінка $\mathbf{y}_0^{(i+1)}$ на ітерації за номером j ; $\widetilde{\Omega}^{(i+1)(j)}$ – оцінка $\Omega^{(i+1)}$ на ітерації за номером j ; $\mathbf{J}$ – якобіан системи (6), (7);

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_1}{d\Omega} \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_2}{d\Omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_{2N}}{d\Omega} \\ \frac{dy_0^{(i)}_1}{ds} & \frac{dy_0^{(i)}_2}{ds} & \dots & \frac{dy_0^{(i)}_{2N}}{ds} & \frac{d\Omega^{(i)}}{ds} \end{bmatrix}.$$

Для обчислення якобіану $\mathbf{J}$ здійснюється сумісне чисельне інтегрування основної системи та відповідних рівнянь у варіаціях з нормованих початкових

УМОВ:

$$\dot{\xi}_{ij} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial \Gamma_i(y, \tau)}{\partial y_k} \xi_{kj},$$

$$\xi_{ii}(0) = 1; \xi_{ij}(0) = 0, i \neq j, i, j = 1 \dots 2N,$$

де $\xi_{ij} = \frac{dy_i}{dy_{0,j}}$.

Значення матриці варіацій наприкінці періоду інтегрування безпосередньо визначають блоки шуканого якобіана:

$$\left[\frac{\partial \Theta_{1 \dots 2N}}{\partial y_{0,1 \dots 2N}} \right] = [\xi_{1 \dots 2N, 1 \dots 2N}(T)] - \mathbf{E},$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Для пошуку останнього стовпця J рівняння в варіаціях мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{1,2N+1} \\ \dots \\ \dot{\xi}_{2N,2N+1} \end{bmatrix} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \begin{bmatrix} \xi_{1,2N+1} \\ \dots \\ \xi_{2N,2N+1} \end{bmatrix} - \frac{1}{\Omega} \mathbf{F}; \xi_{i,2N+1}(0) = 0, i = 1 \dots 2N.$$

Власні значення отриманої матриці монодромії (значення варіацій у момент часу T) є мультиплікаторами Флоке, які характеризують локальну стійкість періодичного розв'язку. Після виконання чергового кроку продовження вектор дотичної до інтегральної кривої оновлюється за допомогою процедури нормування за Евклідовою нормою:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_1}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_1}{d\Omega} \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_2}{d\Omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,1}} & \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,2}} & \dots & \frac{\partial \Theta_{2N}}{\partial y_{0,2N}} & \frac{d\Theta_{2N}}{d\Omega} \\ \frac{dy_0^{(i)}_1}{ds} & \frac{dy_0^{(i)}_2}{ds} & \dots & \frac{dy_0^{(i)}_{2N}}{ds} & \frac{d\Omega^{(i)}}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy^{(i+1)}_1}{ds} \\ \frac{dy^{(i+1)}_2}{ds} \\ \dots \\ \frac{dy^{(i+1)}_{2N}}{ds} \\ \frac{d\Omega^{(i+1)}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, у межах даного розділу сформульовано та теоретично обґрунтовано нову комплексну методику аналізу коливань і стійкості композитних багатопарових оболонок в умовах геометрично нелінійного деформування. У наступних розділах розроблений математичний апарат застосовано для розв'язання конкретних науково-прикладних задач механіки.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено комплексному дослідженню нелінійної динаміки циліндричних оболонок. Першим етапом дослідження є аналіз нелінійних коливань та стійкості нанокомпозитної циліндричної оболонки, що взаємодіє з надзвуковим повітряним струменем. Ескіз оболонки зі зв'язаною криволінійною системою координат наведено на рис. 1, а.

Оболонку створено з функціонально градієнтного нанокомпозитного матеріалу. Основні способи армування за розподілом вуглецевих нанотрубок у товщині матеріалу наведено на рис. 1, б. Всі види армування, крім UD, характеризуються змінною концентрацією нанотрубок в товщині матеріалу, що і приводить до створення функціонально градієнтного нанокомпозиту. Всі нанотрубки вважаються орієнтованими вздовж вісі x оболонки.

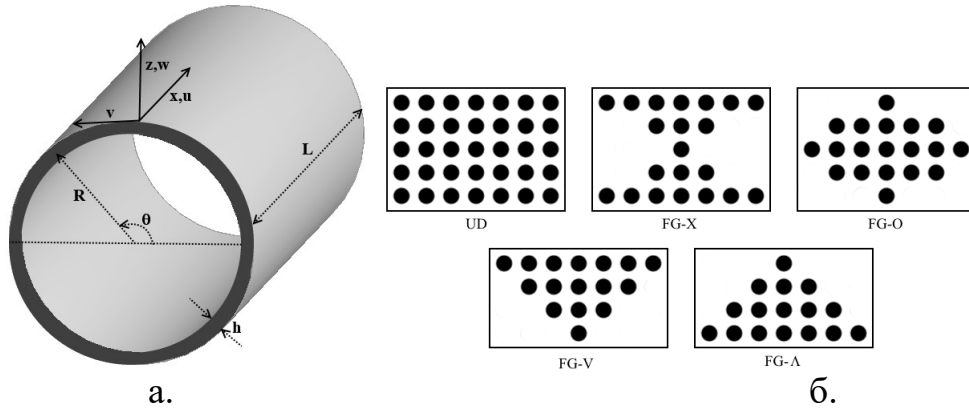


Рисунок 1 – Об’єкт дослідження: а. – Ескіз оболонки; б. – типи наноармування вздовж координати z

У табл. 1 наведено залежності об’ємних часток нанотрубок в композиті від поперечної координати для різних видів армування. Параметр V_{CNT}^* позначає загальну об’ємну частку нанотрубок в композиті; $V_{CNT}(z)$ – об’ємну частку нанотрубок в перерізі, який відповідає значенню поперечної координати z .

Таблиця 1 – Залежність об’ємної частки нанотрубок від координати z для різних типів армування

Тип армування	Об’ємна частка нанотрубок в перерізі z
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^*$;
FGV-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$;
FGA-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$;
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4 z }{h} V_{CNT}^*$;
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2 \left(1 - \frac{2 z }{h}\right) V_{CNT}^*$.

Для оцінки механічних властивостей нанокомпозитного матеріалу застосовується розширене правило змішування:

$$E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m; E_{22}(z) = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}};$$

$$G_{12}(z) = \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} G^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}}; \mu_{12}(z) = V_{CNT}(z) \mu_{12}^{CNT} + V_m(z) \mu^m; \quad (8)$$

$$\mu_{21}(z) = \frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)} E_{22}(z); \rho(z) = V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m; V_m(z) = 1 - V_{CNT}(z),$$

де $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ – модулі Юнга та модуль зсуву вуглецевих нанотрубок; μ_{12}^{CNT} – коефіцієнт Пуассона вуглецевих нанотрубок; η_1, η_2, η_3 – коефіцієнти ефективності армування; E^m, G^m – модуль Юнга та модуль зсуву матриці; ρ^{CNT}, ρ^m – густина вуглецевих нанотрубок та матриці відповідно.

З огляду на високу жорсткість конструкції, у межах розв’язуваної задачі зміною товщини оболонки в процесі деформації можна знехтувати. Фізичні співвідношення для матеріалу оболонки базуються на узагальненому законі Гука для ортотропного тіла:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}; \sigma_{\theta z} = G_{23}(z) \gamma_{\theta z}; \sigma_{xz} = G_{13}(z) \gamma_{xz}; \sigma_{x\theta} = G_{12}(z) \gamma_{x\theta}.$$

Аеродинамічний тиск, що діє на зовнішню поверхню оболонки, моделюється на основі поршневої теорії першого порядку:

$$p = -\frac{\gamma p_{\infty} M_*^2}{\sqrt{M_*^2 - 1}} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_{\infty} (M_*^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2R\sqrt{M_*^2 - 1}} \right],$$

де γ – адіабатична експонента; p_{∞} – статичний тиск вільного струменя; M_* – число Маха; a_{∞} – швидкість звуку вільного струменя.

Для опису граничних умов прийнято шарнірне опертя контуру оболонки:

$$w|_{x=0} = v|_{x=0} = \phi_2|_{x=0} = w|_{x=L} = v|_{x=L} = \phi_2|_{x=L} = 0; \quad (9)$$

$$N_X|_{x=0} = M_X|_{x=0} = N_X|_{x=L} = M_X|_{x=L} = 0, \quad (10)$$

де N_X – мембранна сила; M_X – мембранний момент.

При застосуванні методу Релея-Рітца для аналізу лінійних власних коливань оболонки розв'язок обмежено тільки геометричними граничними умовами (9), силові граничні умови (10) при цьому автоматично задовольняються

Базисні функції у варіаційному методі Релея-Рітца обираються у вигляді тригонометричних розкладань, які строго задовольняють зазначеним кінематичним та силовим умовам закріплення:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{m=1} A_m^{(U)} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) \cos(n\theta) \\ \left(\sum_{m=1} A_m^{(V)} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) \sin(n\theta) \\ \left(\sum_{m=1} A_m^{(W)} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) \cos(n\theta) \\ \left(\sum_{m=1} A_m^{(X)} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) \cos(n\theta) \\ \left(\sum_{m=1} A_m^{(Y)} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) \sin(n\theta) \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

Дослідження автоколивальних режимів (флатеру) реалізовано за допомогою методу заданих форм. У розрахунковій моделі враховано взаємодію кількох спряжених форм із тотожною кількістю хвиль в окружному напрямку, а також супутніх вісесиметричних форм коливань. Кінцеве наближення для компонентів вектора переміщень та кутів повороту нормалі має вигляд:

$$w(x, \theta, t) =$$

$$\sum_{m=1}^{N_1} [A_m(t) \cos(n\theta) + B_m(t) \sin(n\theta)] \sin(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^{N_2} C_m(t) \sin(\lambda_{2m-1} x);$$

$$u(x, \theta, t) =$$

$$\sum_{m=1}^{N_1} [A_{N_1+m}(t) \cos(n\theta) + B_{N_1+m}(t) \sin(n\theta)] \cos(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^{N_2} C_{N_2+m}(t) \cos(\lambda_{2m-1} x);$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{N_1} [A_{2N_1+m}(t) \cos(n\theta) + B_{2N_1+m}(t) \sin(n\theta)] \sin(\lambda_m x);$$

$$\phi_1(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{N_1} [A_{3N_1+m}(t) \cos(n\theta) + B_{3N_1+m}(t) \sin(n\theta)] \cos(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^{N_2} C_{2N_2+m}(t) \cos(\lambda_{2m-1} x);$$

$$\phi_2(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{N_1} [A_{4N_1+m}(t) \cos(n\theta) + B_{4N_1+m}(t) \sin(n\theta)] \sin(\lambda_m x),$$

$$\text{де } \mathbf{q} = [A_1, \dots, A_{3N_1}, B_1, \dots, B_{3N_1}, C_1, \dots, C_{2N_2}, A_{3N_1+1}, \dots, A_{5N_1}, B_{3N_1+1}, \dots, B_{5N_1}, C_{2N_2+1}, \dots, C_{3N_2}] \equiv [q_1, \dots, q_{N_*}]; N_* = 10N_1 + 3N_2; \lambda_m = \frac{m\pi}{L}.$$

Математичну модель динаміки побудовано шляхом формування рівнянь руху системи у формі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\sum_{j=1}^{N_*} (m_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j) = \sum_{v=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{j \leq v} \alpha_{vj}^{(i)} q_v q_j + \sum_{v=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{j \leq v} \sum_{j_1=1}^{j_1 \leq j} \beta_{vjj_1}^{(i)} q_v q_j q_{j_1} + Q_i$$

$$\mathbf{M} = \{m_{ij}\}_{i=1, \dots, N_*}^{j=1, \dots, N_*}; \mathbf{K} = \{K_{ij}\}_{i=1, \dots, N_*}^{j=1, \dots, N_*}. \quad (11)$$

На першому етапі аналіз втрати динамічної стійкості здійснюється у лінійній постановці:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}, \quad (12)$$

де $\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}$ – вектор узагальнених сил, який описує взаємодію циліндричної оболонки з газовим струменем.

Систему рівнянь (12) зведено до форми Коші $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, де $\mathbf{y} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]$; $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{K}) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}$. Тоді характеристичні експоненти знаходяться шляхом розв'язання узагальненої задачі на власні значення для відповідної матриці системи: $\det[\mathbf{P} - \xi \mathbf{E}] = 0$.

Для розв'язання нелінійної задачі та визначення параметрів усталених автоколивань оболонки застосовано метод гармонійного балансу. Пошук періодичних розв'язків здійснюється шляхом представлення узагальнених координат тригонометричними рядами Фур'є першого наближення:

$$q_i = A_i^{(0)} + A_i \cos(\Omega t) + B_i \sin(\Omega t); i = 1, \dots, N_*,$$

де Ω – частота автоколивань.

Через підстановку цих апроксимацій у рівняння руху (11) вихідну систему зведено до еквівалентної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів та частоти коливань, яка розв'язується методом Ньютона.

Аналіз автоколивань було проведено для циліндричної оболонки з геометричними параметрами $R = 0.25$ м; $h = 5$ мм; $\frac{h}{R} = 0.02$; $L = 1$ м.

Властивості матеріалу оболонки обчислюються за виразами (8) з наступних величин:

$$\eta_1 = 0.141, \eta_2 = 1.585, \eta_3 = 1.109,$$

$$E_{11}^{CNT} = 2.247 \times 10^{11} \text{ Па}, E_{22}^{CNT} = 5.5027 \times 10^9 \text{ Па}, G_{12}^{CNT} = 1.436 \times \text{Па},$$

$$\mu_{12}^{CNT} = 0.29380, \mu_{21}^{CNT} = 0.007194, \rho^{CNT} = 1400 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho^m = 1150 \text{ кг/м}^3, \mu^m = 0.34, E^m = 2.5 \text{ ГПа} \quad (13)$$

У результаті чисельного аналізу ідентифіковано критичні режими та побудовано області існування стійких автоколивань оболонки. Встановлено (рис. 2), що найменше значення критичного тиску надзвукового струменя відповідає хвилеутворенню в окружному напрямку з числом хвиль $n = 4 \dots 6$.

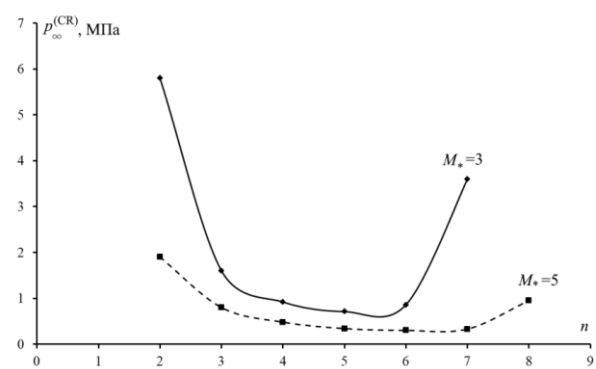


Рисунок 2 – Зв'язок $p_{\infty}^{(CR)}(n)$

Показано (рис. 3–4), що після перевищення критичної точки

статичного тиску вільного струменя в системі відбувається народження стабільних граничних циклів, які відповідають стійким нелінійним автоколиванням конструкції. Частота автоколивань швидко стабілізується та незначно зростає при подальшому підвищенні статичного тиску вільного струменя.

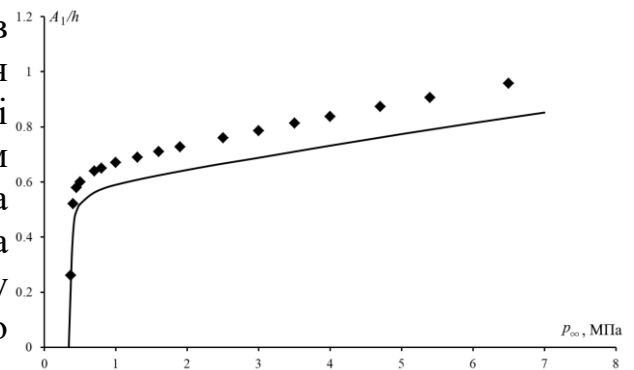
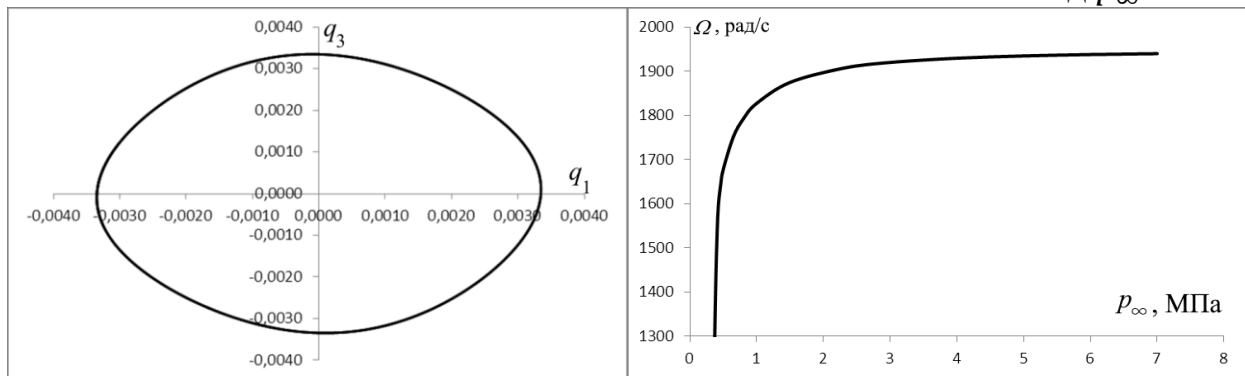


Рисунок 3 – Залежність амплітуди автоколивань від p_{∞}



а.

б.

Рисунок 4 – Властивості автоколивань: а. – Траєкторія автоколивань у конфігураційному просторі; б. – Залежність частоти автоколивань від p_{∞}

Наступним етапом досліджень є аналіз геометрично нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим

заповнювачем під дією періодичного осьового навантаження. Розглянуто конструкцію, де середній шар (заповнювач) має значну товщину, проте його зсувна та тангенціальна жорсткість є суттєво меншою порівняно із жорсткістю зовнішніх обшивок. На торець оболонки діє рівномірно розподілене поздовжнє зусилля $\Phi \sin(\Omega \tau)$, що змінюється за гармонійним законом. Ескіз оболонки наведено на рис. 5.

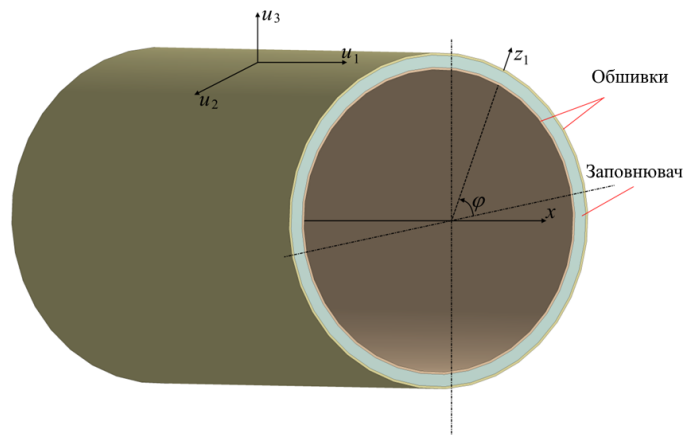


Рисунок 5 – Ескіз оболонки та зв'язана система координат

Макроскопічне моделювання стільникового заповнювача виконано шляхом його заміни еквівалентним однорідним шаром, ефективні механічні характеристики якого визначено за допомогою процедури гомогенізації. Закон Гука для нього має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi z}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \\ \sigma_{xy}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{\varphi z}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(c)} \end{bmatrix}.$$

Натомість для тонких зовнішніх обшивок використано наступні залежності ортотропного тіла:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}; \sigma_{\varphi z} = G_{23}\varepsilon_{\varphi z}; \sigma_{xz} = G_{13}\varepsilon_{xz}; \sigma_{x\varphi} = G_{12}\varepsilon_{x\varphi}. \quad (14)$$

Повна робота зовнішніх сил обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{W} = -\frac{\Phi \sin(\Omega\tau)}{2} & \left(h_t R_t \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi + h_c R_c \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi + \right. \\ & \left. + h_b R_b \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(b)}}{\partial x} \right)^2 dx d\varphi \right). \end{aligned}$$

Дискретизацію рівнянь руху оболонки проведено за методом заданих форм. В матричній формі рівняння руху мають вигляд:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \beta\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \tau), \quad (15)$$

де $\mathbf{M}$ – матриця мас $(15 + 30N_f) \times (15 + 30N_f)$; $\mathbf{K}$ – матриця жорсткостей $(15 + 30N_f) \times (15 + 30N_f)$; β – коефіцієнт дисипації, яка обирається пропорційною матриці жорсткості; $\mathbf{\Xi}$ – $(15 + 30N_f)$ -мірна поліноміальна вектор-функція 3 порядку відносно узагальнених координат; $\mathbf{F}$ – $(15 + 30N_f)$ -мірний вектор узагальненої сили, $\mathbf{F}_i = \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{q}, \tau)}{\partial q_i}$.

Специфіка фізико-механічних властивостей стільникового заповнювача призводить до появи в матриці мас значної кількості елементів, близьких до нуля, що призводить до значних обчислювальних похибок. З метою оптимізації обчислювального процесу виконано процедуру редукції (зниження розмірності) задачі. Частина узагальнених координат, які відповідають квазістатичним формам деформування, виключено шляхом їхнього алгебраїчного вираження через динамічні змінні:

$$\mathbf{q}_{6+12N_f \dots 15+30N_f} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{r}, \quad (16)$$

де $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{7+12N_f \dots 15+30N_f, 7+12N_f \dots 15+30N_f}$ – матриця $(9 + 18N_f) \times (9 + 18N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{7+12N_f \dots 15+30N_f, 1 \dots 6+12N_f}$ – матриця $(9 + 18N_f) \times (6 + 12N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\mathbf{r} = [q_1 \dots q_{6+12N_f}]$ – редукований вектор узагальнених координат.

Врахування зв'язку (16) дозволило суттєво зменшити розмірність розв'язуваної системи рівнянь, звівши її до форми:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{K}}\beta\dot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{\Xi}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \tau), \quad (17)$$

де $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{1 \dots 6+12N_f, 1 \dots 6+12N_f}$ – матриця мас редукованої системи розмірністю

$(6 + 12N_f) \times (6 + 12N_f)$, яка є блоком матриці мас; $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}$; $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{1\dots 6+12N_f, 1\dots 6+12N_f}$ – матриця жорсткостей редукованої системи розмірністю $(6 + 12N_f) \times (6 + 12N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{1\dots 6+12N_f, 7+12N_f\dots 15+30N_f}$ – матриця $(6 + 12N_f) \times (9 + 18N_f)$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\tilde{\mathbf{F}}$ – $(6 + 12N_f)$ -вимірний вектор узагальненої сили $\mathbf{F}$ після застосування підстановки (16).

Таким чином, систему (15) з $15 + 30N_f$ рівняннями зведено до системи (17), яка складається з $6 + 12N_f$ рівнянь.

Для чисельного моделювання обрано сендвіч-оболонку з вуглепластиковими обшивками, стільниковий заповнювач якої має гексагональну структуру комірок і виготовлений за допомогою адитивних технологій (3D-друку) з високоміцного термопластику Ultem 9085 (рис. 6). Геометричні параметри оболонки є наступними: $L = 1$ м, $R = 0.25$ м, товщина обшивок 1 мм. Товщина заповнювача складає 10 мм, його розміри $l_1 = 6.1054$ мм; $l_2 = 3.0527$ мм; $\theta = 60^\circ$; $h_1 = h_2 = 0.4$ мм.

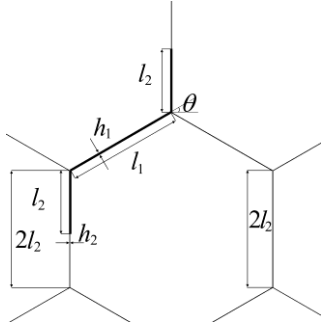


Рисунок 6 – схема комірки заповнювача

Гомогенізовані пружні характеристики заповнювача є наступними:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 2.91 \text{ МПа}; E_{\varphi\varphi} = 2.91 \text{ МПа}; \\ E_{zz} &= 215.10 \text{ МПа}; \nu_{x\varphi} = 0.972; \nu_{\varphi z} = 0.0051; \\ \nu_{xz} &= 0.0042; G_{x\varphi} = 1.118 \text{ МПа}; G_{\varphi z} = 39.1 \text{ МПа}; \\ G_{xz} &= 39.1 \text{ МПа}; \rho = 253.189 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вуглепластикові обшивки оболонки мають такі пружні характеристики:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 35 \text{ ГПа}; E_{\varphi\varphi} = 35 \text{ ГПа}; E_{zz} = 8 \text{ ГПа}; \nu_{\varphi z} = 0.09; \nu_{xz} = 0.09; \\ \nu_{x\varphi} &= 0.01; G_{\varphi z} = 30 \text{ ГПа}; G_{xz} = 30 \text{ ГПа}; G_{x\varphi} = 6 \text{ ГПа}; \rho = 1477 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

Було проведено аналіз власної динаміки за допомогою методу Релея-Рітца. Деякі зі знайдених власних частот оболонки наведено в табл. 2. Верифікацію розробленого підходу виконано за допомогою порівняльного аналізу спектра власних частот, отриманих методом Релея-Рітца, із результатами скінченно-елементного моделювання. Максимальна розбіжність результатів не перевищує 1%, що підтверджує достовірність розробленого аналітичного апарату.

Таблиця 2 – Власні частоти коливань оболонки, Гц

Номер	Метод Релея-Рітца	n	МСЕ	Похибка, %
1	385.56	2	381.76	1.00
2	414.62	3	411.97	0.64
3	590.17	1	587.82	0.40
4	590.38	4	588.85	0.26

Нелінійні параметричні коливання оболонки розглянуто для двох випадків внутрішнього резонансу: резонанс 1:1 між двома спряженими формами з

частотою $\bar{\omega}_1$ та резонанс 1:1:1:1 між попарними спряженими формами з частотами $\bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_4$ (табл. 2). Аналіз параметричних коливань оболонки в околі частоти $\bar{\omega}_1$ (385.56 Гц) виконано чисельно за допомогою методу продовження за параметром. Побудовано нелінійні амплітудно-частотні характеристики системи, які наведено на рис. 7.

Встановлено, що початкова тривіальна форма рівноваги втрачає стійкість у точці біфуркації подвоєння періоду F, породжуючи дві нестійкі коливальні гілки. У точках B та C породжуються стійкі коливання, які характеризуються біжучими хвилями вздовж окружної координати оболонки. У точці A внаслідок седловузлової біфуркації коливання, що описуються гілкою FA, стають стійкими.

Проаналізовано нелінійну поведінку системи в умовах внутрішнього резонансу (590.17 Гц). Амплітудно-частотну характеристику, яку отримано методом продовження за параметром, відображено на рис. 8, 9. У цих режимах спостерігається одночасне збудження різних форм коливань.

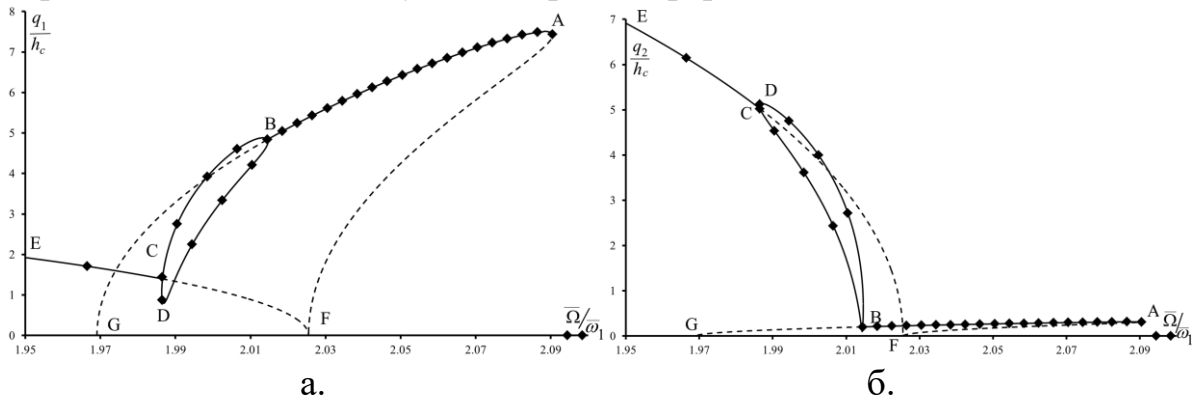


Рисунок 7 – частотний відгук системи: а. – координата q_1 ; б. – координата q_2

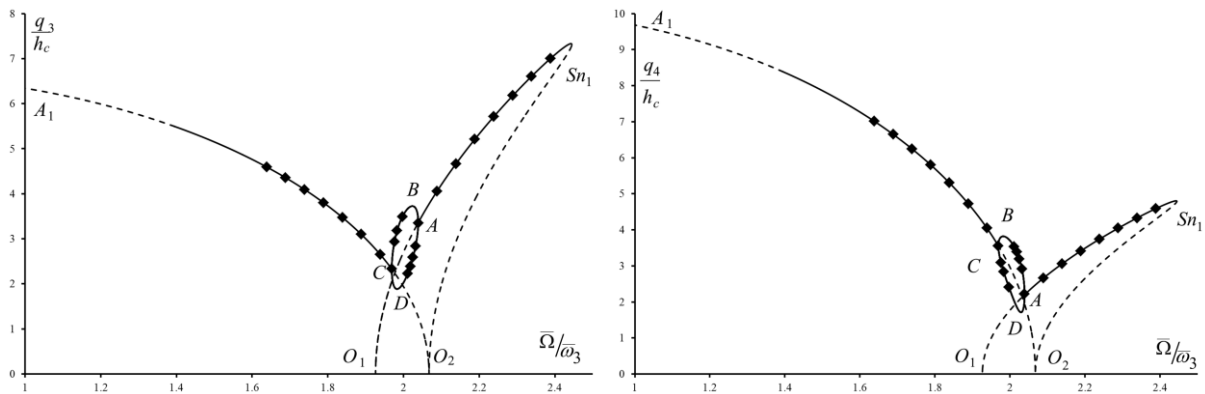


Рисунок 8 – Частотний відгук при $\beta = 0.021$

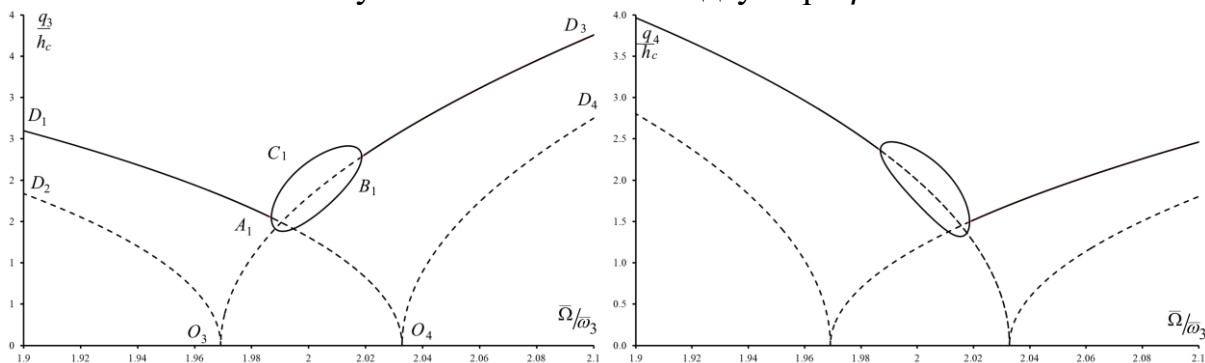


Рисунок 9 – Частотний відгук при $\beta = 0.062$

Таким чином, запропонована методика дозволила проаналізувати автоколивання та нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок, виявивши небезпечні режими коливань конструкцій. На окремих ділянках частотного відгуку параметричних коливань циліндричної оболонки спостерігалась стійка зміна фазових співвідношень між спряженими модами, що приводить до виникнення біжучих хвиль у окружному напрямку конструкції. Такі біфуркації в багатошарових циліндричних оболонках виявлено вперше.

У **четвертому розділі** розглянуто дві задачі з аналізу динаміки конічних оболонок. Перша задача – динаміка композитної оболонки зі шпангоутом під дією імпульсного навантаження. Розглядається ортотропні оболонка з ізотропним шпангоутом, ескіз якої наведено на рис. 10, а. Зв'язані системи координат оболонки та шпангоута наведено на рис. 10, б, в. Границі зміни координат є наступними: $x \in [x_0; L]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; $z \in [-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}]$; $x_1 \in [-\frac{b_1}{2}; \frac{b_1}{2}]$; $z_1 \in [-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$.

Закон Гука для оболонки має вигляд (14).

Динаміка оболонки описується за розглянутими раніше моделями із застосуванням наступних геометричних характеристик: параметри Ляме дорівнюють $A_x = 1$; $A_\varphi = x \sin \alpha$, радіуси кривизни – $R_x = \infty$ $R_\varphi = x \operatorname{tg} \alpha$.

Рух оболонки описується п'ятьма змінними $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$, $\psi_x(x, \varphi, t)$, $\psi_\varphi(x, \varphi, t)$.

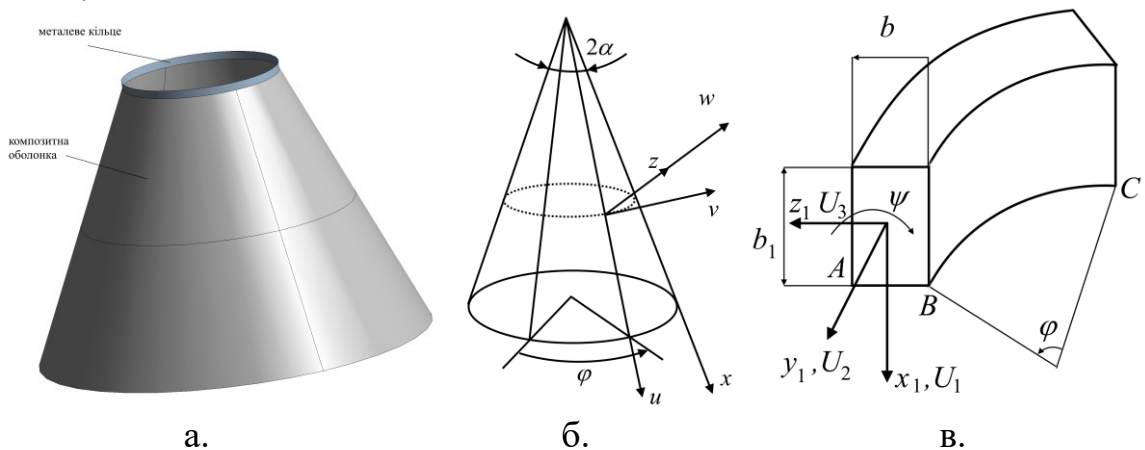


Рисунок 10 – Об'єкт дослідження: а. – Ескіз оболонки; б. – Зв'язана система координат конічної оболонки; в. – Зв'язана система координат ізотропного кільця

Ізотропне кільце та конічна оболонка з'єднуються на поверхні $x = x_0$. Кільце (рис. 10, б) виготовлено з ізотропного матеріалу. Стороною АВС воно кріпиться до композитної оболонки. З'єднання між кільцем та оболонкою вважається жорстким. В цих умовах деформування кільця описується гіпотезою Ейлера-Бернуллі. Внаслідок перехідних процесів під дією імпульсних навантажень кільце вигинається в двох перпендикулярних площинах, які описуються переміщеннями центрів тяжіння поперечного перерізу $\bar{u}(\varphi, t)$ та $\bar{w}(\varphi, t)$. Поздовжнє деформування описується окружними переміщеннями центрів тяжіння поперечного перерізу $\bar{v}(\varphi, t)$. Кручення описується поворотом поперечного перерізу на кут $\psi(\varphi, t)$ навколо центру тяжіння.

Потенційну та кінетичну енергії кільця виражено через переміщення точок оболонки з урахуванням умов неперервності переміщень в точках його з'єднання

з оболонкою. Таким чином, кінетична та потенційна енергія конструкції з конічної оболонки та кільця складається з енергій її компонентів, що виражаються через переміщення оболонки: $T_{\Sigma} = T + T_1$; $\Pi_{\Sigma} = \Pi + \Pi_1$, де T , T_1 – кінетичні енергії оболонки та кільця; Π , Π_1 – потенційні енергії оболонки та кільця.

Розглянуто оболонку, яку защемлено по нижній кромці. Для неї виконуються граничні умови $u|_{x=L} = v|_{x=L} = w|_{x=L} = \psi_x|_{x=L} = \psi_{\varphi}|_{x=L} = 0$.

На оболонку діють зосереджені імпульсні сили (рис. 11):

$$Q = \begin{cases} \sum_{j=1}^2 Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(\varphi - \varphi_j); & 0 \leq t \leq T; \\ 0; & t > T, \end{cases}$$

де δ – дельта-функція; Q_0 – амплітуда імпульсу; φ_j – кутова координата точки застосування сили; T – тривалість імпульсу.

Лінеаризовану модель динаміки оболонки дискретизовано методом заданих форм.

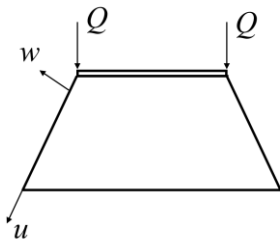


Рисунок 11 – Схема навантаження конструкції

Рівняння нестационарного відгуку конструкції формулюються як рівняння Лагранжа II роду:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (19)$$

де $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{m_1}\}$ – вектор узагальнених сил.

Шляхом чисельного інтегрування (19) проведено аналіз для конічних оболонок зі шпангоутами. Для нанокompозитної оболонки з алюмінієвим шпангоутом проаналізовано нестационарний відгук в залежності від типу наноармування.

Для верифікації результатів проведено їхнє порівняння зі скінченно-елементним моделюванням оболонки з UD-наноармуванням.

В результаті інтегрування рівнянь руху (19), коли діє імпульсне навантаження з параметрами $Q_0 = 3454$ Н, $T = 0.5$ мс, отримано перехідний процес в оболонці. При цьому у розкладеннях (4) враховано 27 власних форм коливань. У заданій точці оболонки ($x = 0.5(L_1 + L_2)$, $\varphi = 0.5\pi$) її поперечні переміщення змінюються так, як наведено на рис. 12 суцільною лінією. Результати скінченно-елементного моделювання наведено пунктиром. Видно, що ці результати є близькими. Близкість результатів свідчить про коректність застосованої методики.

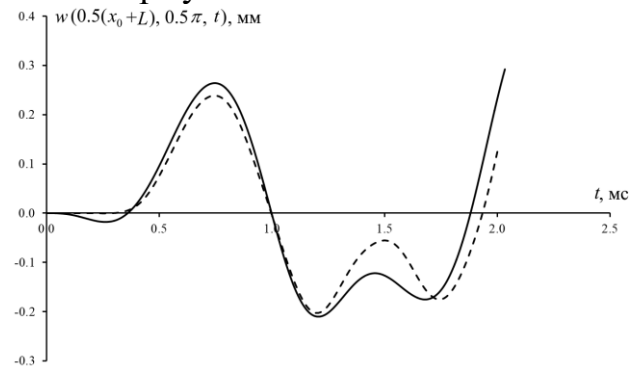


Рисунок 12 – Поперечне переміщення конічної конструкції зі шпангоутом з плином часу в точці $x = 0.5(L_1 + L_2)$, $\varphi = 0.5\pi$

Досліджено, як змінюються амплітуди перехідного процесу в оболонці в залежності від типу армування. У табл. 3 наведено залежність амплітуд нестационарного відгуку від типу армування. Видно, що FG-X армування

забезпечує найменшу амплітуду, а FG-O – найбільшу.

Таблиця 3 – Залежність амплітуд безрозмірного нестационарного відгуку від виду армування

Вид наноармування	V_{CNT}^*		
	0.28	0.17	0.12
FG-X	0.0860	0.098	0.14
UD	0.0930	0.110	0.15
FG-O	0.1018	0.120	0.17

Другою задачею, яку розглянуто в розділі, є аналіз нелінійної динаміки тришарової конічної оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем.

Ескіз досліджуваної конструкції та зв'язані системи координат наведено на рис. 13. В складі оболонки застосовано заповнювач, комірку якого зображено на рис. 6. Рух точок оболонки описується в криволінійних системах координат

$(s_t, \theta, z_t), (s_c, \theta, z_c), (s_b, \theta, z_b), s_i \in [s_i^{(1)}; s_i^{(2)}];$
 $\theta \in [0; 2\pi]; z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$. для верхньої обшивки, заповнювача та нижньої обшивки відповідно.

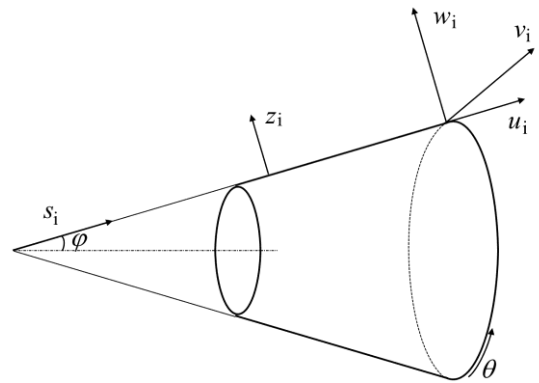


Рисунок 13– Ескіз конічної оболонки

В якості моделі тиску газового струменя було застосовано лінійну поршневу теорію:

$$p = \frac{\gamma p_\infty M^2}{\sqrt{M^2-1}} \left[\frac{\partial w_t}{\partial s} \cos \beta + \frac{\partial w_t}{R(s) \partial \theta} \sin \beta + \frac{M^2-2}{(M^2-1)Ma_\infty} \frac{\partial w_t}{\partial t} - \frac{w_t}{2R(s)\sqrt{M^2-1}} \right], \quad (20)$$

де β – кут атаки; p_∞, M, γ – статичний тиск вільного струменя, число Маха та адіабатична експонента; a_∞ – швидкість звуку вільного струменя; $R(s) = (s_t^{(1)} + s) \sin(\varphi)$.

Для аналізу коливань оболонки використано запропоновану в роботі методику. Рух оболонки моделюється системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь II порядку, які отримано в формі рівнянь Лагранжа II роду:

$$\sum_{j=1}^{N_*} (m_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j) = \sum_{v=1}^{N_*} \sum_{j=1}^v \alpha_{vj}^{(i)} q_v q_j + \sum_{v=1}^{N_*} \sum_{j=1}^v \sum_{j_1=1}^j \beta_{vjj_1}^{(i)} q_v q_j q_{j_1} + Q_i. \quad (21)$$

Розмірність системи диференціальних рівнянь руху було знижено за методикою, аналогічною застосованій при аналізі тришарової циліндричної оболонки. Редукована система рівнянь (21) у матричній формі має вигляд:

$$M_{11} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{K}_{11} \mathbf{q}_1 = \tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q}_1) + \tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q}_1) + \mathbf{G} \mathbf{q}_1 + \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (22)$$

де $\tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{q}_1)$ та $\tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{q}_1)$ – квадратичні та кубічні поліноми відносно узагальнених координат, що входять до вектору $\mathbf{q}_1$; $\mathbf{G}$ – матриця аеродинамічної жорсткості; $\mathbf{\Gamma}$ – матриця аеродинамічного демпфування.

Для дослідження стійкості положення рівноваги (22) розглядається лінійна частина системи (22):

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathbf{G}\mathbf{q}_1 + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}_1. \quad (23)$$

Система (23) має розв'язок $(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{v}) = \mathbf{P}_* \exp(\lambda t)$.

Для аналізу стійкості положення рівноваги будується задача на власні значення, розв'язком якої є характеристичні експоненти (23) λ :

$$\mathbf{R}\lambda\mathbf{P}_* = \mathfrak{Z}\mathbf{P}_*, \text{ де } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix}; \mathfrak{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} - \bar{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{F} \end{bmatrix}.$$

В залежності від положення λ на комплексній площині робляться висновки стосовно стійкості тривіального положення рівноваги.

Для побудови нелінійного частотного відгуку конструкції, що описується системою (22), застосовано запропонований в роботі метод продовження за параметром.

Описану методику було використано для аналізу нелінійних коливань тришарової конічної оболонки з заповнювачем. Її геометричні параметри: $\varphi = \frac{\pi}{12}$; $s_t^{(1)} = 2.354$ м; $s_c^{(1)} = 2.33$ м; $s_b^{(1)} = 2.313$ м; $L = 1$ м; $h_t = h_b = 10^{-3}$ м; $h_c = 10^{-2}$ м. Оболонка складається з вуглепластикових обшивок та гексагонального стільникового заповнювача, комірку якого зображено на рис. 6. Гомогенізовані пружні властивості заповнювача описуються виразом (18). Пружні властивості обшивок є наступними:

$$E_{ss} = 160 \text{ ГПа}; E_{\theta\theta} = 6.8 \text{ ГПа}; \nu_{s\theta} = 0.32; G_{s\theta} = 800 \text{ МПа}; G_{sz} = G_{\theta z} = 4 \text{ ГПа}; \rho_t = \rho_b = 1400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (24)$$

Розглянуто залежність нелінійного відгуку від способу її закріплення. Досліджено нелінійні коливання защемленої з обох боків та консольної оболонки при куті атаки струменя $\beta = 0$.

Оболонка, защемлена з обох боків. Власні частоти оболонки було визначено за допомогою методу Релея-Рітца та методом скінченних елементів для верифікації лінійної моделі. У табл. 4 наведено порівняння перших частот оболонки, знайдених за різними методами. Видно, що результати є близькими.

Таблиця 4 – Власні частоти оболонки

n	ω , Гц	ω_{FEM} , Гц	Відносна похибка
1	411.83	421.98	0.024
2	430.1	438.45	0.019
3	448.56	455.76	0.015

Аналіз втрати стійкості положенням рівноваги оболонки свідчить, що стійкість втрачається на формах з $n = 1$. На рис. 14 наведено межу області динамічної нестійкості.

Нелінійний аналіз методом продовження за параметром підтверджує результати лінійного аналізу. Оболонка втрачає стійкість на формах з $n=1$ внаслідок біфуркації Хопфа та виникають стійкі періодичні автоколивання. При подальшому зростанні статичного тиску вільного струменя зберігається режим стійких автоколивань, амплітуда якого зростає.

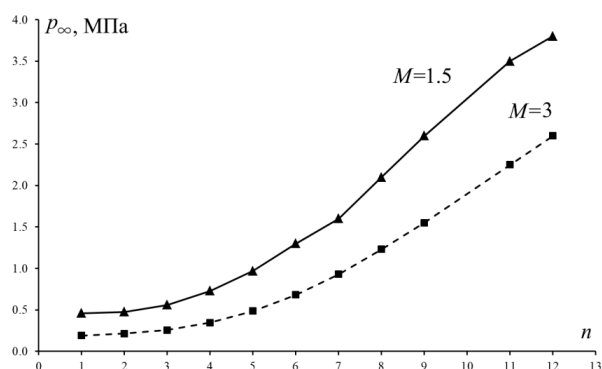
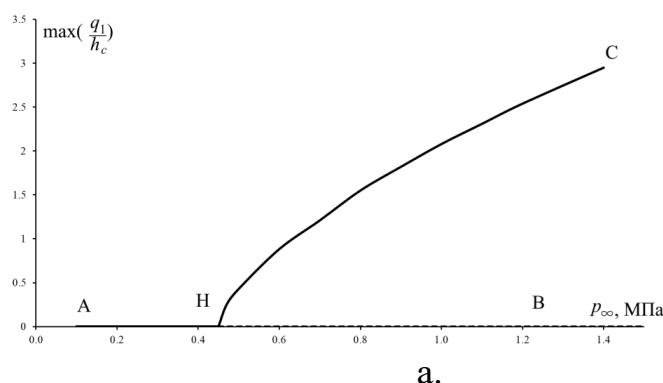
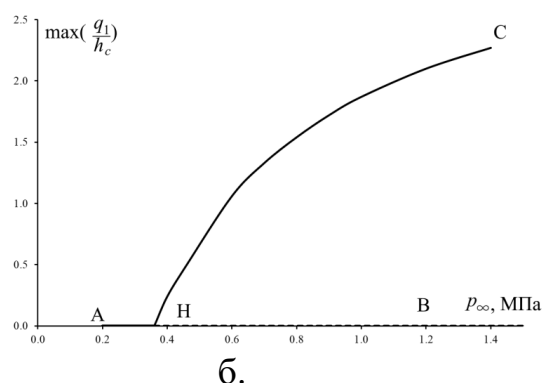


Рисунок 14 – Межа динамічної стійкості для різних значень n



а.



б.

Рисунок 15 – Біфуркаційні діаграми оболонки: а. – $M = 1.5$; б. – $M = 3$

Консольна оболонка. Аналіз коливань консольної оболонки проводився аналогічно. Було знайдено власні частоти оболонки методом Релея-Рітца та методом скінченних елементів, а також проаналізовано втрату динамічної стійкості оболонкою. Втрата стійкості положенням рівноваги консольної оболонки також відбувається на формі з $n=1$ (рис. 16).

Біфуркаційна діаграма, яку зображено на рис. 17, демонструє, що положення рівноваги втрачає стійкість внаслідок біфуркації Хопфа та виникають періодичні автоколивання.

При подальшому підвищенні тиску автоколивання стають квазіперіодичними внаслідок проходження через біфуркацію Неймарка-Сакера.

При великих значеннях числа Маха біфуркаційна поведінка консольної оболонки якісно не відрізнялась поведінки заземленої оболонки (рис. 18, а). Однак побудова

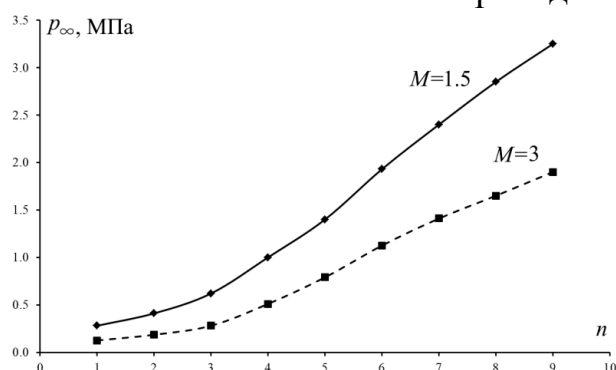


Рисунок 16 – Межа динамічної стійкості для різних значень n

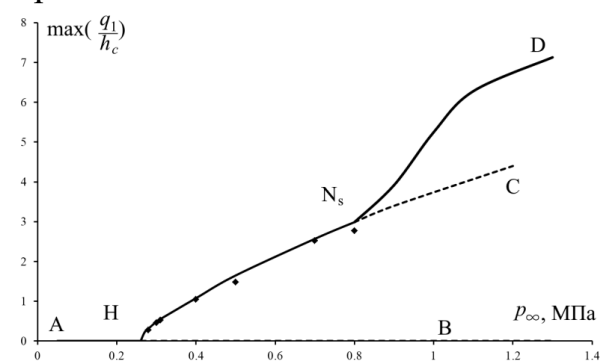


Рисунок 17 – Біфуркаційна діаграма оболонки при $M = 1.5$

біфуркаційної діаграми як залежності амплітуди автоколивань від числа Маха (рис. 18, б) дозволила виявити, що при малих значеннях швидкості струменя виникають більш складні режими коливань: так, при числі Маха 1.45 та тиску струменя 0.9 МПа виникають хаотичні коливання значної амплітуди (рис. 19).

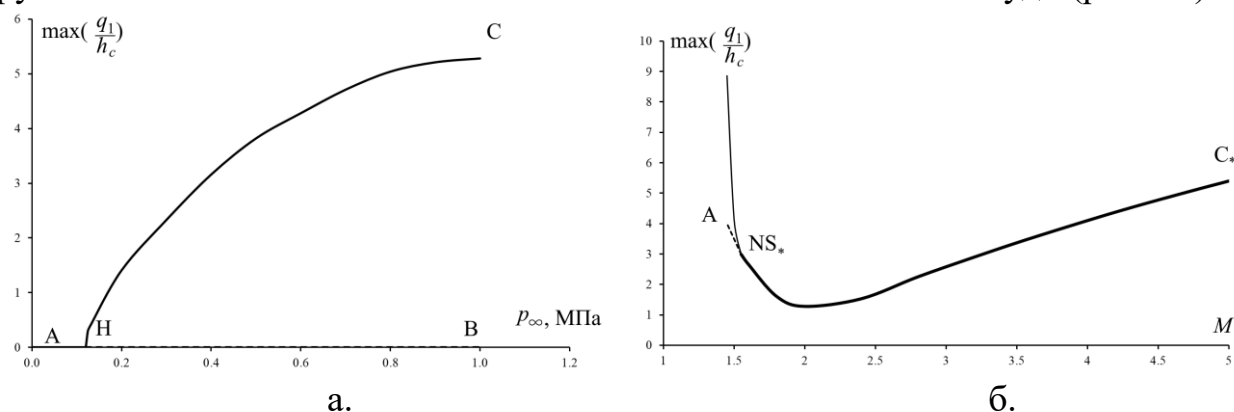


Рисунок 18 – Біфуркаційні діаграми: а. – при $M = 5$; б. – при $p_{\infty} = 0.9$ МПа

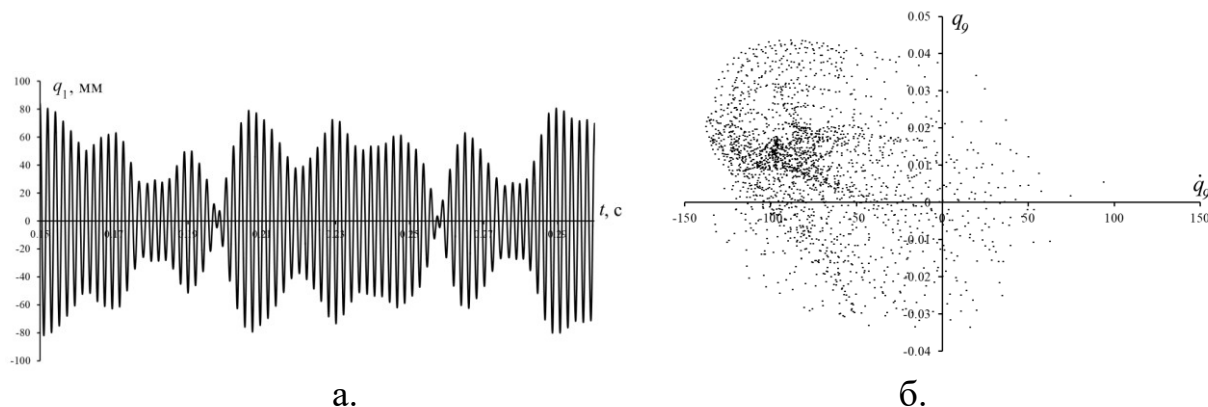


Рисунок 19 – Хаотичні автоколивання при $M=1.45$, $p_{\infty} = 0.9$ МПа: а. – залежність $q_1(t)$; б. – перетин Пуанкаре

Таким чином, досліджувані конічні оболонки демонструють складну поведінку. Запропонована методика дозволила виявити можливі періодичні та квазіперіодичні автоколивання оболонок, а також можливість виникнення хаотичних коливань.

Розділ 5 присвячено дослідженню коливань складених коніко-циліндричних оболонок. Об'єктом дослідження є тришарова конструкція, яку наведено на рис. 20, з гексагональним стільниковим заповнювачем, комірку якого зображено на рис. 6. Рух оболонки описується в криволінійній системі координат (x, φ, z_i) : $x \in [0; L]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, $i = t, b, c$. Змінні, пов'язані з

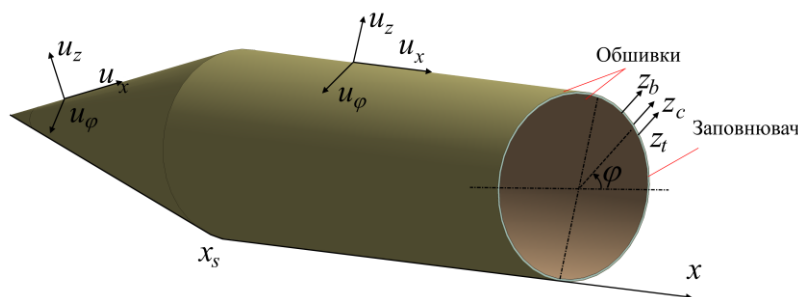


Рисунок 20 – Ескіз складеної конструкції

зовнішньою та внутрішньою обшивками, мають індекси t та b відповідно, змінні, пов'язані з заповнювачем, – індекси c . Взаємодіючи з надзвуковим повітряним струменем, оболонка втрачає стійкість положення рівноваги. Це явище і розглянуто в п'ятому розділі.

Оболонка, яку зображено на рис. 20, відрізняється від попередніх конструкцій тим, що її геометричні параметри є кусково-лінійними, а на лінії стику між геометріями виникають додаткові умови зшивання.

Для опису геометрії оболонки застосовано наступні параметри:

$$R_b(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + 0.5 \frac{h_b}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + 0.5 h_b, & x \geq x_s \end{cases}; R_c(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_b + 0.5 h_c}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5 h_t, & x \geq x_s \end{cases};$$

$$R_t(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_b + h_c + 0.5 h_t}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5 h_t, & x \geq x_s \end{cases}; A_b(x) = \begin{cases} x \sin \alpha + \frac{0.5 h_b}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + 0.5 h_b, & x \geq x_s \end{cases};$$

$$A_c(x) = \begin{cases} x \sin \alpha + \frac{h_b + 0.5 h_c}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + 0.5 h_c, & x \geq x_s \end{cases}; A_t(x) = \begin{cases} x \sin \alpha + \frac{h_b + h_c + 0.5 h_t}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5 h_t, & x \geq x_s \end{cases},$$

де $\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{x_s}\right)$; R_i – радіус кривизни i -го шару оболонки, що відповідає координаті φ ; A_i – параметр Ляме i -го шару оболонки, що відповідає координаті φ .

Координати x відповідають радіус кривизни, що дорівнює ∞ , та параметр Ляме, що дорівнює 1.

На лінії $x = x_s$ переміщення точок оболонки повинні задовольняти умовам безперервності:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \cos \alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \sin \alpha; \\ w^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= -u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \sin \alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \cos \alpha; \\ v^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= v^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \\ \varphi_{1,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) \cos \alpha &= \varphi_{1,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \\ \varphi_{2,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= \varphi_{2,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t), i = \{t, b, c\}. \end{aligned}$$

Для забезпечення нових умов в методі Релея-Рітца застосовуються спеціальні кусково-лінійні базисні функції. Змінні задачі: $u^{(i)}(x, \varphi, t)$, $v^{(i)}(x, \varphi, t)$, $w^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $i = \{t, b, c\}$ представляються в формі розкладень за базисними функціями:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x, \varphi, t) &= \widetilde{u}^{(i)}(x) \cos(n\varphi) \cos(\omega t); v^{(i)}(x, \varphi, t) = \widetilde{v}^{(i)}(x) \sin(n\varphi) \cos(\omega t); \\ w^{(i)}(x, \varphi, t) &= \widetilde{w}^{(i)}(x) \cos(n\varphi) \cos(\omega t); \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, t) = \widetilde{\varphi}_{1,1}^{(i)}(x) \cos(n\varphi) \cos(\omega t); \\ \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, t) &= \widetilde{\varphi}_{2,1}^{(i)}(x) \sin(n\varphi) \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (25)$$

$$i = \{t, b, c\},$$

$$\text{де } \widetilde{u}^{(i)}(x) = \begin{cases} U^{(i)}(x) \cos \alpha + W^{(i)}(x) \sin \alpha; & x < x_s; \\ U^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases}$$

$$\widetilde{w}^{(i)}(x) = \begin{cases} -U^{(i)}(x) \sin \alpha + W^{(i)}(x) \cos \alpha; & x < x_s; \\ U^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases}$$

$$\widetilde{v}^{(i)}(x) = V^{(i)}(x); \widetilde{\varphi}_{1,1}^{(i)}(x) = X^{(i)}(x); \widetilde{\varphi}_{2,1}^{(i)}(x) = \begin{cases} \Phi^{(i)}(x); & x < x_s; \\ \Phi^{(i)}(x) \cos \alpha; & x \geq x_s. \end{cases}$$

Функції $U^{(i)}(x)$, $W^{(i)}$, $V^{(i)}$, $X^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ розкладаються по базисних функціях $P_i(x)$, що задовольняють умовам закріплення оболонки, з невідомими коефіцієнтами

розкладень $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_{N_\Sigma}]$; $N_\Sigma = 3N_U + 3N_V + 3N_W + 3N_X + 3N_\phi$, де N_U , N_V , N_W , N_X , N_ϕ – кількість базисних функцій для розкладень відповідних змінних.

Вільні коливання оболонки досліджено методом Релея-Рітца з урахуванням розкладень (25).

Для побудови рівнянь коливань оболонки, що взаємодіє з надзвуковим повітряним струменем, застосовується метод заданих форм. Змінні задачі представляються в формі розкладень за формами коливань оболонки. При цьому враховуються кілька пар спряжених форм коливань.

Тиск надзвукового струменя описується поршневою теорією (20). Лінеаризовані рівняння руху системи, які отримано в формі рівнянь Лагранжа II роду, мають матричну форму:

$$\mathbf{\Sigma} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}, \quad (26)$$

де $\mathbf{\Sigma}$ – матриця мас системи: $\Sigma_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$, $i, j = 1..30N_f$; $\mathbf{\Omega}$ – матриця жорсткостей

системи: $\Omega_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}$, $i, j = 1..30N_f$; $\mathbf{q} = [q_i(\tau), i = 1 \dots 30N_f]^T$ – вектор

узагальнених координат; $\mathbf{\Lambda}$ – матриця аеродинамічної жорсткості розмірності $30N_f \times 30N_f$; $\mathbf{H}$ – матриця аеродинамічного демпфування розмірності $30N_f \times 30N_f$; Π , T – дискретизовані вирази для потенційної та кінетичної енергій оболонки, отримані методом заданих форм.

Розмірність системи диференціальних рівнянь руху було знижено за методикою, аналогічною застосованій раніше. Редукована система рівнянь (26) в формі Коші у матричній формі має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{M}_{11}^{-1}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{C}) & \mathbf{M}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{r}$ – вектор значущих узагальнених координат; $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$; $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{\Sigma}_{1..18N_f, 1..18N_f}$ – матриця мас редукованої системи розмірністю $18N_f \times 18N_f$, яка є блоком матриці мас; $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{\Omega}_{1..18N_f, 18N_f+1..30N_f}$ – матриця розмірністю $18N_f \times 12N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{\Omega}_{1..18N_f, 1..18N_f}$ – матриця розмірністю $18N_f \times 18N_f$, яка є блоком матриці жорсткостей; $\mathbf{E}_{12}$ – одинична матриця розмірністю $18N_f \times 18N_f$; $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ – матриці $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{H}$ з урахуванням процедури редукції.

Дослідження стійкості положення рівноваги проведено методом характеристичних експонент. Для цього розв'язується задача на власні значення:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{M}_{11}^{-1}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{C}) & \mathbf{M}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{E} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} = 0,$$

де λ – характеристичні експоненти; $\mathbf{E}$ – одинична матриця розмірністю $36N_f \times 36N_f$.

Стійкість положення рівноваги визначається положенням характеристичних показників λ на комплексній площині.

Описану методику реалізовано для дослідження динамічної стійкості складеної оболонки з геометричними параметрами: $R = 0.5$ м; $h_t = h_b = 2$ мм; $h_c = 10$ мм; $L = 5$ м; $x_s = 2$ м; $\alpha = 14^\circ$. Розглядалась консольна оболонка, для

якої граничні умови мають вигляд $u^{(i)}|_{x=L} = v^{(i)}|_{x=L} = w^{(i)}|_{x=L} = \varphi_{1,1}^{(i)}|_{x=L} = \varphi_{2,1}^{(i)}|_{x=L} = 0$; $\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}|_{x=x_0} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}|_{x=x_0} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}|_{x=x_0} = \frac{\partial \varphi_{1,1}^{(i)}}{\partial x}|_{x=x_0} = \frac{\partial \varphi_{2,1}^{(i)}}{\partial x}|_{x=x_0} = 0$; $i = \{t, c, b\}$.

Було досліджено власні коливання оболонки методом Релея-Рітца. Верифікацію власних частот та форм, які знайдено методом Релея-Рітца, проведено порівнянням зі скінченно-елементним розрахунком власних коливань оболонки. Метод демонструє збіжність власних частот і дозволяє з високою точністю аналізувати власні коливання оболонки.

Аналіз втрати динамічної стійкості оболонкою дозволив визначити значення критичного тиску для різних параметрів струменя, а саме числа Маха та кута атаки. При різних значеннях числа Маха активізуються власні форми з різною кількістю хвиль в круговому напрямку (табл. 5). Зв'язок між критичним тиском та кутом атаки наведено на рис. 21: при підвищенні кута атаки критичний тиск знижується.

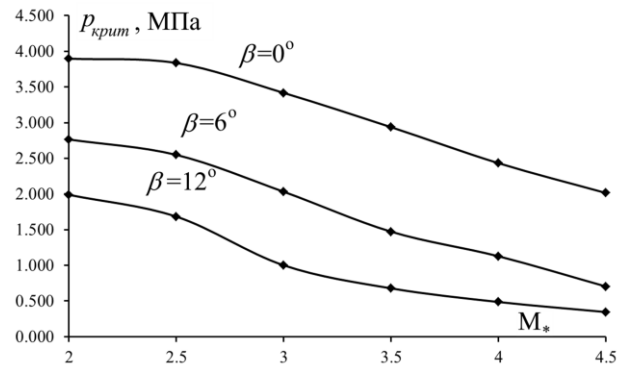


Рисунок 21 – Зв'язок між критичним тиском та кутом атаки

Таблиця 5 – Критичний тиск для різних значень n та числа Маха

		M_*					
		2	2.5	3	3.5	4	4.5
n	2	2.124	1.830	1.479	1.173	1.009	0.901
	3	1.988	1.683	1.309	1.074	0.910	0.801
	4	2.640	2.000	1.000	0.678	0.537	0.453
	5	16.358	16.630	10.195	1.456	0.487	0.345
	6	40.781	43.681	36.794	25.466	10.286	0.498
	7	73.950	82.039	75.630	62.631	44.0378	23.051
	8	118.900	128.190	122.181	108.818	90.115	63.362

Таким чином, на підставі запропонованої методики знайдено параметри надзвукового струменя, при яких положення рівноваги складеної оболонки втрачає свою стійкість.

Шостий розділ присвячено дослідженню вимушених коливань сендвіч-оболонки подвійної кривизни під дією зосередженої періодичної сили. Розглянуто оболонку, ескіз якої наведено на рис. 22. Вона складається з трьох шарів постійної товщини, які жорстко зв'язані поміж собою. Крайні шари (обшивки) є жорсткими, середній шар являє собою стільниковий заповнювач. Радіуси кривизни оболонки вздовж напрямів кривизни є константами. На оболонку діє поперечна гармонійна точкова сила.

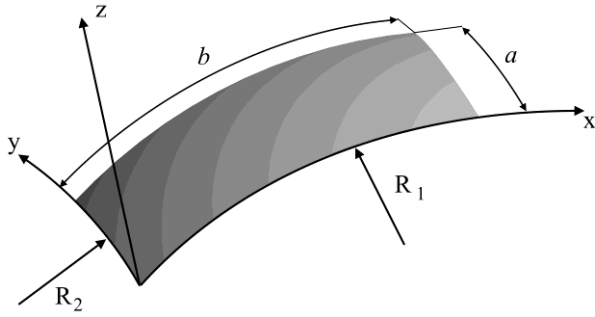


Рисунок 22 – Ескіз оболонки

Зв'яжемо з шарами оболонки системи координат $(x, y, z_i), i = 1 \dots 3$, $x \in [0; b]; y \in [0; a]; z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$.

Аналіз нелінійної динаміки оболонки було проведено у відповідності з запропонованою в роботі методикою. Власні коливання оболонки досліджуються методом Релея-Рітца.

Розкладення мають більш складну форму, ніж для оболонок одинарної кривизни:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x, y) \\ V_i(x, y) \\ W_i(x, y) \\ X_i(x, y) \\ Y_i(x, y) \end{bmatrix} \cos(\omega t); i = 1 \dots 3;$$

де ω – частота лінійних коливань; $U_i(x, y), V_i(x, y), W_i(x, y), X_i(x, y), Y_i(x, y)$ – невідомі функції, що задовольняють граничним умовам закріплення оболонки;

$$U_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu j}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x) U_y^{(j)}(y); V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\mu j}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x) V_y^{(j)}(y);$$

$$W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x) W_y^{(j)}(y); \quad (27)$$

$$X_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\mu j}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x) F_y^{(j)}(y); Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\mu j}^{(g)} G_x^{(\mu)}(x) G_y^{(j)}(y),$$

$\mathbf{A} = (A_{t11}, A_{t12}, \dots, A_{bN_b^{(g)}L_b^{(g)}})$ – вектор невідомих коефіцієнтів розмірності N_* ,

$$N_* = \sum_{i=1}^3 N_i^{(u)} L_i^{(u)} + N_i^{(v)} L_i^{(v)} + N_i^{(w)} L_i^{(w)} + N_i^{(f)} L_i^{(f)} + N_i^{(g)} L_i^{(g)};$$

$U_x^{(1)}(x), U_x^{(2)}(x), \dots, G_y^{(L_b^{(g)})}(y)$ – базисні функції.

Модель руху оболонки повністю відповідає виразам (1), (2). Після дискретизації механічних енергій за допомогою розкладень (27), розв'язується задача мінімізації інтегралу дії для пошуку коефіцієнтів розкладень $\mathbf{A}$ і визначаються власні форми та частоти коливань оболонки.

Для побудови рівнянь руху оболонки використано метод заданих форм: рух оболонки описується через узагальнені координати $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_*})$, де $N_* = 3N_w + 3N_{\phi 1} + 3N_{\phi 2} + 3N_u + 3N_v$, а $N_w, N_{\phi 1}, N_{\phi 2}, N_u, N_v$ – кількість узагальнених координат, що описують відповідну змінну задачі.

Періодична зовнішня сила прикладена до оболонки в точці $x = x_0; y = y_0$:

$$F = F_0 \cos(\Omega t) \delta(x - x_0, y - y_0),$$

де F_0, Ω – амплітуда та частота сили; $\delta(x - x_0, y - y_0)$ дельта-функція.

Рівняння руху оболонки є звичайними нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку, що мають квадратичні та кубічні нелінійності:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_1^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\ \mathfrak{R}_2^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t),$$

де $\mathbf{H} = [H_1, \dots, H_{N_w}, 0, 0, \dots]$, $H_j = -F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)$; $\mathfrak{R}_1^{(2)}(q_1, q_2), \mathfrak{R}_2^{(2)}(q_1, q_2)$ – вектор-функції, що складаються з квадратичних поліномів узагальнених координат; $\mathfrak{R}_1^{(3)}(q_1, q_2), \mathfrak{R}_2^{(3)}(q_1, q_2)$ – вектор-функції, що складаються з кубічних поліномів узагальнених координат.

До оболонки застосовується процедура редукції рівнянь руху, яку було описано раніше. Також проведено безрозмірювання змінних для підвищення обчислювальної стійкості:

$$\begin{aligned} \vartheta_j &= \frac{q_j}{h_c}; \quad \tau = \omega_1 t; \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_1}; \\ \tau_1 &= \bar{\Omega} \tau; \quad m_0 = \rho_c h_c a b, \\ \bar{m}_{ij} &= \frac{m_{ij}}{m_0}; \quad \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{K}_{ij} = \frac{K_{ij}}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{\alpha}_{vj}^{(i)} = \frac{\alpha_{vj}^{(i)} h_c}{m_0 \omega_1^2}; \\ \bar{\beta}_{vjj_1}^{(i)} &= \frac{\beta_{vjj_1}^{(i)} h_c^2}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{H}_i = \frac{H_i}{m_0 \omega_1^2 h_c} = \frac{F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)}{m_0 \omega_1^2 h_c} = \bar{F}_0 W_{1,j}(x_0, y_0); \end{aligned}$$

де ω_1 – перша власна частота конструкції.

Застосування описаної методики розглянуто на прикладі двох оболонок, які защемлено за контуром: сферичної та в формі гіперболічного параболоїда. Граничні умови, які відповідають такому закріпленню, є наступними:

$$u^{(i)}|_{\partial D} = v^{(i)}|_{\partial D} = w^{(i)}|_{\partial D} = \phi_1^{(i)}|_{\partial D} = \phi_2^{(i)}|_{\partial D} = 0; \quad i = t, c, b, \quad (28)$$

де ∂D – контур оболонки.

Оболонки мають гексагональний заповнювач, комірка якого зображено на рис. 6, а гомогенізовані пружні властивості визначаються виразами (18). Вуглепластикові обшивки мають пружні властивості (24).

Сферична оболонка має геометричні параметри:

$$a = 0.22 \text{ м}; \quad b = 0.33 \text{ м}; \quad R_1 = R_2 = 1 \text{ м}; \quad (29)$$

$$h_t = h_b = 10^{-3} \text{ м}; \quad h_c = 10^{-2} \text{ м}.$$

Базисні функції методу Релея-Рітца, що відповідають умовам закріплення (28), є наступними: $U_y^{(\mu)} = V_y^{(\mu)} = W_y^{(\mu)} = F_y^{(\mu)} = G_y^{(\mu)} = \sin\left(\frac{\mu\pi y}{a}\right)$; $U_x^{(\mu)} = V_x^{(\mu)} = W_x^{(\mu)} = F_x^{(\mu)} = G_x^{(\mu)} = \sin\left(\frac{\mu\pi x}{b}\right)$.

Кількість базисних функцій в розкладеннях (27) приймається однаковою для всіх розкладень, вона дорівнює дев'яти. Верифікація знайдених власних частот проводилась за допомогою порівняння з методом скінчених елементів.

Досліджено нелінійний частотний відгук оболонки в околі основного резонансу. Досліджено залежність частотного відгуку сферичної оболонки при збудженні, що застосовано в її центрі, від радіусу кривизни оболонки. Безрозмірна амплітуда збудження $\bar{F}_0 = 0.003$, воно застосовано в точці $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$.

Амплітудно-частотна характеристика має жорсткий характер. На рис. 23 наведено амплітудно-частотні характеристики при різних значеннях радіусу кривизни. При зменшенні радіусу кривизни оболонки амплітуда відгуку знижується.

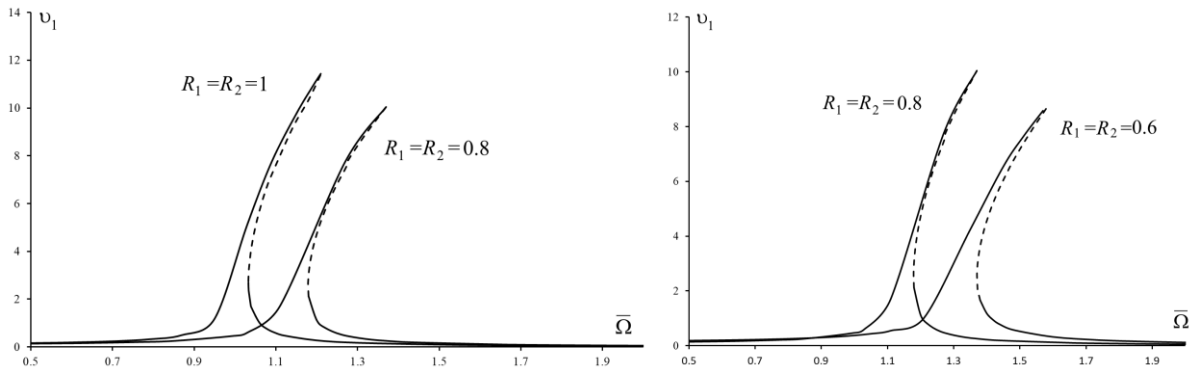


Рисунок 23 – Частотний відгук оболонки з радіусами кривизни 1, 0.8, 0.6
Оболонка в формі гіперболічного параболоїда має геометричні параметри (29) та $R_1 = -R_2 = 1$. Ескіз оболонки наведено на рис. 24.

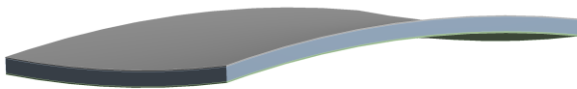


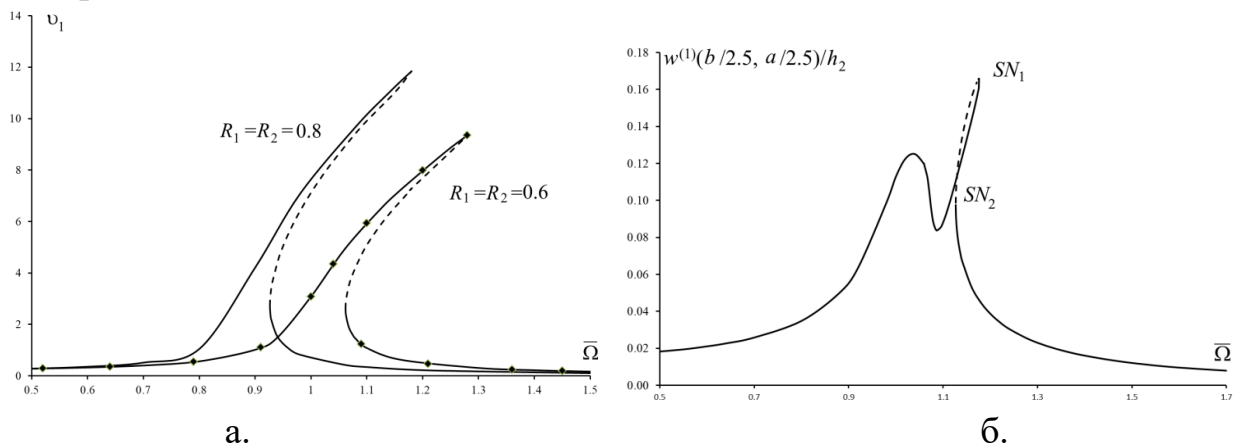
Рисунок 24 – Ескіз оболонки

Проведено аналіз власних коливань оболонки методом Релея-Рітца для різних значень її радіусу кривизни. Його результати наведено в табл. 6. Власні частоти оболонки зростають при зменшенні її радіусу кривизни.

Таблиця 6 – Власні частоти оболонки для різних радіусів кривизни

$R_1 = -R_2, \text{ м}$	$\omega_1, \text{ Гц}$	$\omega_2, \text{ Гц}$	$\omega_3, \text{ Гц}$	$\omega_4, \text{ Hz}$	$\omega_5, \text{ Гц}$	$\omega_6, \text{ Гц}$	$\omega_7, \text{ Гц}$	$\omega_8, \text{ Гц}$	$\omega_9, \text{ Гц}$
1	1606	1808	2158	2219	2535	2825	2853	3046	3380
0.9	1699	1861	2249	2250	2582	2842	2929	3067	3424
0.8	1808	1929	2298	2370	2644	2866	3033	3096	3485
0.7	1927	2018	2391	2532	2730	2905	3140	3178	3542
0.6	2039	2133	2567	2751	2848	2971	3214	3388	3569

Аналіз нелінійних коливань методом продовження за параметром свідчить, що частотний відгук оболонки при збудженні з характеристиками $\bar{F}_0 = 0.003$; $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$ в околі основного резонансу також є жорстким (рис. 25, а). При зміщенні точки застосування сили в $(x_0, y_0) = (b, a)/3$, відгук поперечних переміщень оболонки набуває два екстремуми внаслідок двох близьких власних частот (рис. 25, б).



а.

б.

Рисунок 25 – Частотний відгук оболонки при $\bar{F}_0 = 0.003$: а. – $(x_0, y_0) = 0.5(b, a)$; б. – $(x_0, y_0) = (b, a)/3$

При збільшенні амплітуди зовнішньої сили до 0.09, вплив першої власної форми практично нівелюється, що видно на рис. 26.

Таким чином, за допомогою запропонованої методики проаналізовано вимушені коливання оболонок подвійної кривизни та виявити режими, що характеризуються значними амплітудами.

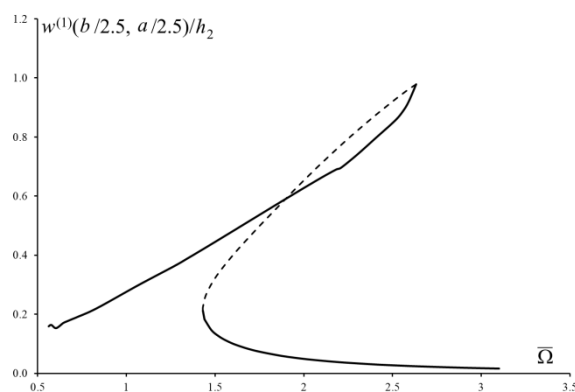


Рисунок 26 – Частотний відгук оболонки при $\bar{F}_0 = 0.09$; $(x_0, y_0) = (b, a)/3$

У цьому розділі розглянуто проблему визначення пружних властивостей стільникових заповнювачів. Розглядаються чотири типи заповнювачів з різними комірками: класичний гексагональний, квадратний, трикутний, ауксетичний. Ескізи заповнювачів наведено на рис. 27.

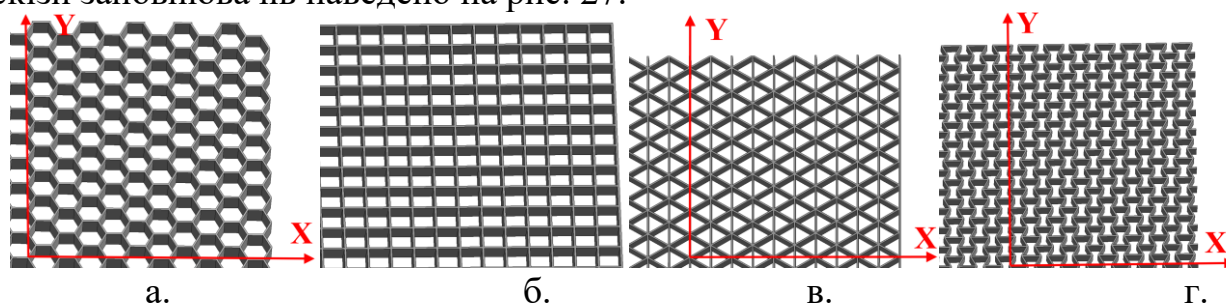


Рисунок 27 – Геометричні моделі заповнювачів: а. – гексагональний; б. – квадратний; в. – трикутний; г – ауксетичний

На макроскопічному рівні заповнювач поводить себе як однорідний ортотропний матеріал. Характеристики цього матеріалу є корисними при аналізі напружено-деформованого стану конструкцій з заповнювачами, які піддаються малим деформаціям. Зокрема, до таких процесів відносяться й розглянуті вище нелінійні коливання оболонкових конструкцій, для яких є характерними великі переміщення точок оболонки при малих деформаціях.

Для визначення пружних властивостей заповнювача проводиться процедура скінченно-елементної гомогенізації. З цією метою будується тривимірна модель референтного об'єму, яка моделює $1/4$ комірки заповнювача. Приклад такого об'єму, а також пов'язаної з заповнювачем системи координат, для гексагонального заповнювача наведено на рис. 28.

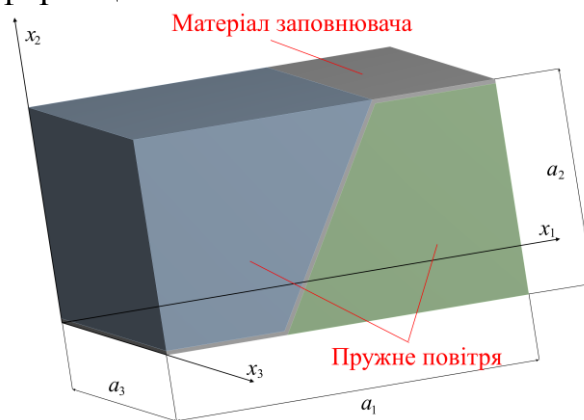


Рисунок 28 – Референтний об'єм гексагонального заповнювача

Не зайнятий несучим матеріалом простір референтного об'єму заповнюється т.зв. еластичним повітрям, єдиною метою якого є забезпечення безперервності

деформацій референтного об'єму.

Для визначення пружних властивостей заповнювача проведено моделювання відгуку референтного об'єму на малі переміщення його граней. Обчислюються осереднені за об'ємом напруження в заповнювачі. Завдяки такому моделюванню визначається матриця жорсткості, яка пов'язана з пружними характеристиками матеріалу наступним чином:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Умови обчислювальних експериментів для визначення матриці C наведено в табл. 7, 8. Стовпці, які позначено U_1, U_2, U_3 , містять значення переміщень вздовж відповідних координатних вісей. Комірки таблиці, в яких значиться «В», відповідають граням референтного об'єму, на переміщення яких не накладаються обмеження. Всі інші грані є або нерухомими, або зсуваються на мале значення u в заданому напрямку. Деформації заповнювача в кожному випадку обчислюються аналітично. Перші три експерименти дозволили визначити модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона. Експерименти 4–6 дозволили визначити модулі зсуву матеріалу.

Таблиця 7 – Умови розрахункових експериментів 1–3

	Експеримент 1			Експеримент 2			Експеримент 3		
Грань	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3
$x_1 = 0$	0	В	В	0	В	В	0	В	В
$x_1 = a_1$	u	В	В	0	В	В	0	В	В
$x_2 = 0$	В	0	В	В	0	В	В	0	В
$x_2 = a_2$	В	0	В	В	u	В	В	0	В
$x_3 = 0$	В	В	0	В	В	0	В	В	0
$x_3 = a_3$	В	В	0	В	В	0	В	В	u
Деформація	$\varepsilon_1 = \frac{u}{a_1}$			$\varepsilon_2 = \frac{u}{a_2}$			$\varepsilon_3 = \frac{u}{a_3}$		

Елементи матриці жорсткості C визначаються з результатів розрахунків наступним чином: $C_{ij} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_j}$; $i, j = 1, 2, 3$; $C_{ii} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$, $i = 4, 5, 6$, де $[\sigma_1, \dots, \sigma_6] = [\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{yy}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{yz}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{xy}^{(c)}]$ – осереднені за об'ємом значення напружень у референтному об'ємі.

Таблиця 8 – Умови розрахункових експериментів 4–6

	Експеримент 4			Експеримент 5			Експеримент 6		
Грань	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3	U_1	U_2	U_3
$x_1 = 0$	0	В	В	В	0	0	В	0	0
$x_1 = a_1$	0	В	В	В	0	0	В	0	0
$x_2 = 0$	0	В	0	В	0	В	0	В	0
$x_2 = a_2$	0	В	0	В	0	В	u	0	0
$x_3 = 0$	0	0	В	0	0	В	В	В	0
$x_3 = a_3$	0	u	0	u	0	0	В	В	0
Деформація	$\varepsilon_4 = \frac{u}{a_3}$			$\varepsilon_5 = \frac{u}{a_3}$			$\varepsilon_6 = \frac{u}{a_2}$		

Для різних типів заповнювачів (рис. 27) референтні об'єми виглядають так, як наведено на рис. 29.

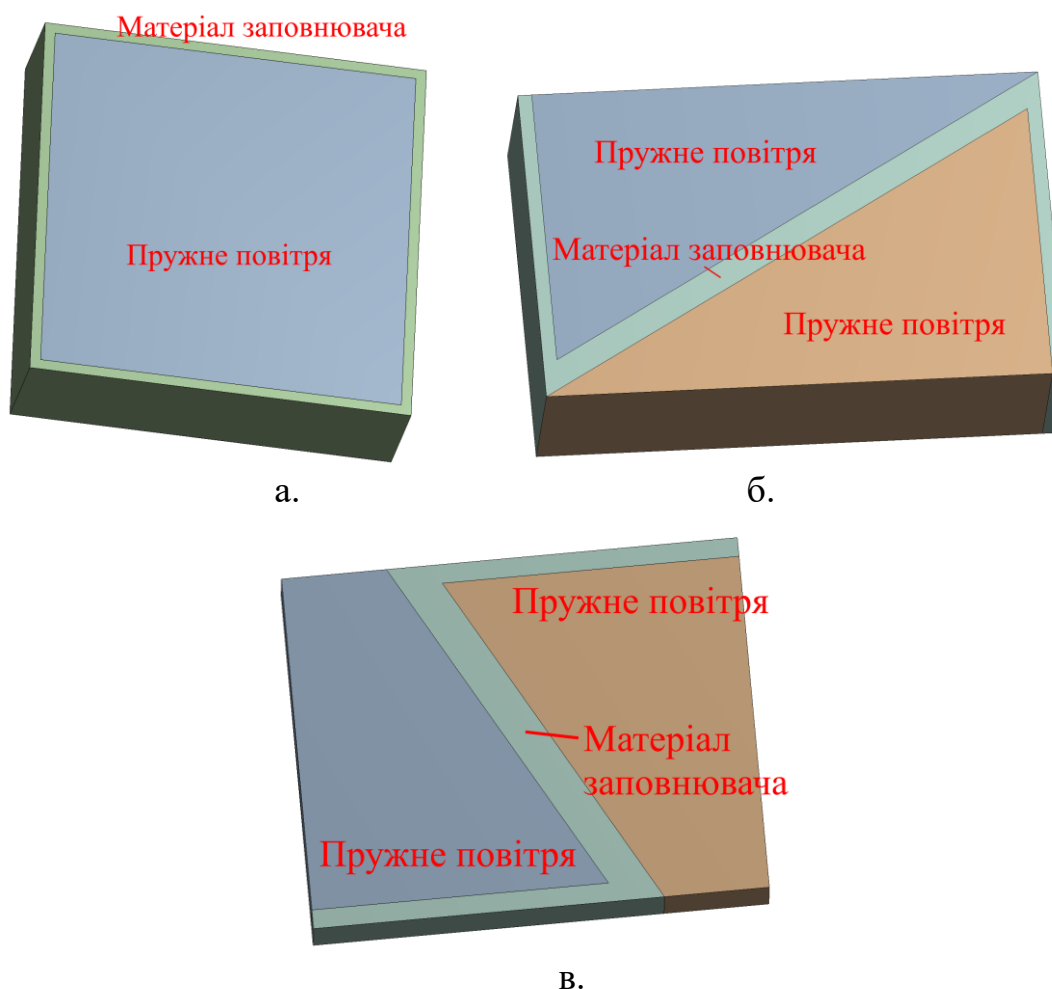


Рисунок 29 – Референтні елементи для різних типів заповнювачів:

а. – квадратного; б. – трикутного; в. – ауксетичного

Було оцінено механічні властивості заповнювачів. Їх було порівняно з експериментальними даними. Результати порівняння наведено в табл. 9. Зазначимо, що фізичні експерименти з визначення деяких властивостей заповнювача складно провести, тому обчислювальна методика оцінки

властивостей є важливою частиною проектування сендвіч-конструкцій.

Таким чином, запропоновано та реалізовано методику аналізу механічних властивостей стільникових заповнювачів, яка може бути застосована при проектуванні та аналізі нелінійних коливань сендвіч-пластин, панелей та оболонок.

Таблиця 9 – Властивості заповнювачів з PLA з різними комірками
А – оцінка за скінченно-елементним методом;
В – експериментальні результати

	Гексагональна		Квадратна		Трикутна		Ауксетична	
	А	В	А	В	А	В	А	В
E_x , МПа	12.3	15.4	142,2	155.5	162.4	161.5	29,6	29.3
E_y , МПа	12.5	15.2	142,0	155.5	173.1	171.2	59,2	83.3
E_z , МПа	77.2		327,8		387.3		342,4	
ν_{xy}	0.96	0.94	-0,037	0	0.272	0.11	-0,657	-0.64
ν_{xz}	0.008		0,197		0.130		0,009	
ν_{yz}	0.005		0,197		0.139		0,018	
G_{yz} , МПа	60.9	58.0	34,2	31.8	52.1	48.5	81,3	73.6
G_{xz} , МПа	61.0	55.7	34,3	31.8	67.9	45.5	78,7	56.4
G_{xy} , МПа	4.85		0,9		57.3		7,0	
ρ , кг/м ³	141	141	203	203	240	240	283	283

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розроблено нову методику для аналізу коливань композитних багатошарових оболонок при геометрично нелінійному деформуванні. Застосування цієї методики дозволяє розв'язати важливу наукову проблему аналізу нелінійних коливань композитних оболонок різної форми. Одержано наступні результати:

1. Запропоновано моделі нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсуву високого порядку. Для дискретизації моделі застосовується метод заданих форм.

2. Запропоновано застосування методу пристрілки сумісно з продовженням за довжиною дуги частотного відгуку для аналізу нелінійних коливань багатошарових оболонок.

3. Проведено аналіз нелінійних коливань функціонально градієнтної нанокомпозитної циліндричної оболонки, що взаємодіє з надзвуковим газовим струменем. Виявлено умови при яких в оболонці виникають автоколивання.

Втрата динамічної стійкості нанокомпозитною циліндричною оболонкою в надзвуковому струмені відбувається внаслідок біфуркації Хопфа. Мінімальний критичний тиск вільного струменя спостерігається при кількості хвиль в круговому напрямку $n = 5$ та $n = 6$. Це значення суттєво менше ніж таке для ізотропних оболонок, для яких найменший критичний тиск спостерігається при $n = 27$. Тип армування вуглецевими нанотрубками суттєво впливає на значення критичного тиску. За рахунок раціонального вибору типу армування критичний

тиск може бути змінений в два рази.

Як свідчать результати аналізу флатера циліндричної нанокompозитної оболонки, в точці біфуркації Хопфа виникають стійкі автоколивання. Підвищення об'ємної кількості вуглецевих нанотрубок в композиті значно знижує амплітуди автоколивань; частоти автоколивань при цьому змінюються несуттєво.

4. Проведено аналіз нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем. У частотному відгуку сендвіч-оболонки на параметричне навантаження поблизу параметричного резонансу знайдено замкнені кільця розв'язків, що відповідають бігучим хвилям вздовж кругової координати. Всі інші розв'язки характеризують стоячі хвилі в круговому напрямку. У точках перетину гілок стоячих та бігучих хвиль перші змінюють стійкість. Таких точок завжди спостерігалось дві. Поблизу параметричного резонансу спостерігався значний вплив коефіцієнту лінійного демпфування на амплітуди резонансних коливань: при підвищенні демпфування амплітуди знижувались

5. Проведено аналіз нестационарного відгуку композитної усіченої конічної оболонки зі шпангоутом на імпульсне навантаження. Методика аналізу вирізняється точністю та швидкістю при порівнянні з методом скінченних елементів. В результаті використання методики отримано часові залежності перехідних процесів у оболонці.

6. Проведено аналіз нелінійної динаміки конічної тришарової оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Розглянуто оболонку, защемлену з двох боків, та консольне закріплення оболонки.

Результати аналізу нелінійної динаміки оболонок свідчать, що консольна оболонка має більш різноманітну біфуркаційну поведінку. В обох оболонках виникають стійкі періодичні автоколивання внаслідок біфуркації Хопфа. Оболонка, защемлена з двох боків, демонструє цю поведінку в широкому діапазоні параметрів струменя. У консольній оболонці спостерігалось виникнення біфуркації Неймарка-Сакера, яка приводила до перетворення періодичних автоколивань на квазіперіодичні, які в свою чергу перетворюються на хаотичні. Для аналізу цих режимів побудовано перетини Пуанкаре, які свідчать, що при квазіперіодичних автоколиваннях в фазовому просторі спостерігається інваріантний тор. Амплітуди квазіперіодичних та хаотичних коливань є значно вищими за амплітуди періодичних автоколивань.

7. Запропоновано методику аналізу втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною тришаровою оболонкою зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Основою методики є застосування спеціальної системи кусково-лінійних базисних функцій, що забезпечує виконання граничних умов. Було проведено аналіз втрати динамічної стійкості для заданої оболонки при різних параметрах струменя. Втрати динамічної стійкості відбувалася на формах з невеликою (2–5) кількістю хвиль у круговому напрямку. З підвищенням швидкості струменя збуджувались форми з більшою кількістю хвиль у круговому напрямку. Збільшення кута атаки приводило до зменшення критичного тиску, що відрізняє складену оболонку від конічної. Зі

збільшенням швидкості струменя критичний тиск зменшувався.

8. Проведено аналіз нелінійних вимушених коливань тришарових оболонок подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем. Проаналізовано поведінку сферичної оболонки та оболонки в формі гіперболічного параболоїда. Чисельний аналіз нелінійних коливань оболонок подвійної кривизни в широкому діапазоні радіусів кривизни свідчить, що частотні відгуки оболонок якісно схожі, якщо зосереджену силу застосовано до центру тяжіння верхнього шару конструкції. Всі частотні відгуки мають дві седловузлові біфуркації, а також є жорсткими. Відповідні коливання близькі до моногармонійних з домінантною першою гармонікою. При зниженні радіусів кривизни частотні відгуки зсуваються праворуч, а їхні амплітуди знижуються.

Якщо зосереджену періодичну силу застосовано на відстані від центру тяжіння верхнього шару, спостерігаються сильні взаємодії між узагальненими координатами. Якщо дві власні частоти є близькими, спостерігається два екстремума поблизу головного резонансу при малих амплітудах зовнішньої сили. Якщо амплітуда зовнішньої сили є значною, головний резонанс має один екстремум, а частотний відгук характеризується жорсткою поведінкою.

При субгармонійному резонансі, коли частота зовнішньої сили приблизно вдвічі більша за першу власну частоту конструкції, виникають коливання зі значними амплітудами. Джерелом цих коливань є біфуркація подвоєння періоду гармонійних коливань. Субгармонійні коливання проходять через седловузлову біфуркацію. Вони є мультигармонійними, з домінуючою першою гармонікою ряду Фур'є. У розглянутій системі не спостерігалось хаотичних коливань.

9. Запропоновано методику аналізу механічних характеристик стільникових заповнювачів з різною формою комірок. Отримано оцінки механічних характеристик гексагональних, квадратних, трикутних, ауксетичних заповнювачів. Проведено порівняння з експериментальними даними.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Avramov K.V., Chernobryvko M.V., Uspensky B.V. Free vibrations of functionally gradient cnt-infused cylindrical shells | Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. *Space Science and Technology*. 2019. Vol. 25, № 2(117). P. 23-37. DOI: 10.15407/KNIT2019.02.023. (квартиль Q4)

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання вільних коливань наноармованої циліндричної оболонки.

2. Avramov K.V., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazrnova K.K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite cylindrical shells in supersonic flow. *Nonlinear dynamics*. 2019. №98. P. 1853-1876. DOI: 10.1007/s11071-019-05292-z. (квартиль Q1)

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань циліндричної оболонки в надзвуковому струмені.

3. Avramov K., Myrzaliyev D., Uspensky B., Sakhno N., Seitkazenova K.K. Buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite joined spherical-cylindrical-spherical thin-walled structure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science (PIC)*. 2021. Vol. 235, issue 22. Pp. 6287-6310. DOI: 10.1177/09544062211005795. (квартиль Q2)

Здобувачу належить розробка алгоритмічного та програмного забезпечення, а також проведення оптимізаційних заходів та тестування.

4. Сахно Н.Г., Аврамов К.В., Успенський Б.В. Dynamic Instability of a Compound Nanocomposite Shell [Динамічна втрата стійкості складеною нанокомпозитною оболонкою]. *Космічна наука і технологія*. 2021, № 5 (22). С. 60-70. DOI: <https://doi.org/10.15407/knit2021.05.060>. (квартиль Q4)

Здобувачем запропоновано методику аналізу коливань складених оболонок.

5. Uspensky B., Avramov K., Sakhno N. and Nikonov O. Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Conical-Cylindrical Shell. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22, No. 7. Paper 2250039. 28 pages. DOI: 10.1142/S0219455422500390. (квартиль Q1)

Здобувачем проведено аналіз втрати динамічної стійкості складеною оболонкою.

6. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear supersonic flutter of sandwich truncated conical shell with flexible honeycomb core manufactured by fused deposition modeling. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 143. Paper 104039. 18 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104039. (квартиль Q1)

Здобувачем проведено аналіз автоколивань тришарової конічної оболонки.

7. Avramov K., Uspensky B., Sakhno N., Nikonov O. Transient response of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite conical shell with ring-stiffener under the action of impact loads. *European Journal of Mechanics – A/Solids*.

2022. № 91. Paper 104429. 13 pages. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104429 (квартиль Q1)

Здобувачем запропоновано модель деформування композитної конічної оболонки.

8. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Polishchuk O. & Salenko A. Experimental and Numerical Study on Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modelling. *Applied Composite Materials*. 2022. Vol. 29. P. 2033–2061. DOI: 10.1007/s10443-022-10057-w. (квартиль Q2)

Здобувачем проведено аналіз та узагальнення експериментальних даних та обчислювальний експеримент.

9. Derevianko I., Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Maksymenko-Sheiko K. Experimental and numerical analysis of mechanical characteristics of fused deposition processed honeycomb fabricated from PLA or ULTEM 9085. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2022. Vol. 25, Issue 2. P. 264-283. DOI: 10.1177/10996362221137292 (квартиль Q1)

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання експерименту.

10. Avramov K.V., Uspensky B.V., Derevyanko I.I., Degtyarev M.O., Polishchuk O.F., Chernobryvko M.V. Dynamic properties of nanocomposite and three-layer thin-walled aerospace elements manufactured by additive technologies. *Space Science & Technology*. 2023. Vol. 29(1). P. 52-64. DOI: 10.15407/knit2023.01.052 (квартиль Q4)

Здобувачем проведено чисельний аналіз властивостей стільникових заповнювачів та розроблено програмне забезпечення для аналізу коливань оболонкових елементів конструкцій.

11. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear vibrations of doubly curved composite sandwich shells with FDM additively manufactured flexible honeycomb core. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234, Issue 3. P. 1183–1210. DOI: 10.1007/s00707-022-03426-w (квартиль Q2)

Здобувачем реалізовано модель деформування оболонки та метод аналізу частотного відгуку.

12. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shell with Fused Deposition Processed Honeycomb Core and Carbon Nanotubes Reinforced Composite Faces Sheets. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023. Vol. 12(2). 2003–2023 DOI: 10.1007/s42417-023-00960-2 (квартиль Q2)

Здобувачем запропоновано модель деформування оболонки та розроблено програмне забезпечення для аналізу коливань оболонки.

13. Avramov K., Chernobryvko Marina, Pierre C., Uspensky Boris, Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Influence of cell breakings on the buckling of composite sandwich shells with FDM additively manufactured honeycomb cores. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2025. Vol. 239 (8). P. 774-791. DOI: 10.1177/09544100241308955 (квартиль Q2)

Здобувачем запропоновано підхід до моделювання недосконалості стільникового заповнювача.

14. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Maksymenko-Sheiko K.,

Chernobryvko M. Mechanical properties of auxetic honeycombs realized via material extrusion additive manufacturing: Experimental testing and numerical studies. *Applied Composite Materials*. 2025. Vol. 32(1). P. 119–148. DOI: 10.1007/s10443-024-10269-2. (квартиль Q2)

Здобувачем проведено обчислювальні експерименти.

15. Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Nikonov O. Dynamic instability of composite sandwich joined conical–cylindrical shell interacting with supersonic gas stream. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2025. Vol. 105, Issue 5. Paper e70063. <https://doi.org/10.1002/zamm.70063> (квартиль Q3)

Здобувачем запропоновано методику дискретизації механічних енергій оболонки та розроблено програмне забезпечення для аналізу втрати динамічної стійкості.

16. Uspensky B., Avramov K., Malyshev S., Nikonov O. Geometrically nonlinear oscillations of composite sandwich cylindrical shell with honeycomb core under axial time periodic force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2025. Vol. 178. Paper 105196. 14 pages. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105196 (квартиль Q1)

Здобувачу належить розробка моделі нелінійного деформування циліндричної оболонки та застосування методу продовження за довжиною дуги для аналізу частотного відгуку

17. Avramov K., Uspensky B., Liubarskyi B.. Asymptotic analysis of resonant nonlinear oscillations of composite sandwich doubly curved shell with soft honeycomb core under axial harmonic excitation. *Acta Mechanica*. 2026. Vol. 237. P. 3069-3090. <https://doi.org/10.1007/s00707-026-04648-y> (квартиль Q2)

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання власних форм оболонки.

Статті в наукових фахових виданнях України категорії «Б»:

18. Avramov K.V., Sakhno N.H., Uspensky B.V. Transient dynamic response of a nanocomposite conical shell with a ring stiffener under the action of an impact load. *Technical Mechanics*. 2020. No. 2. P. 64-78. DOI: 10.15407/itm2020.03.064

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання перехідного процесу.

19. Avramov K.V., Uspensky B.V., Sakhno N.H., Biblik I.V. Non-stationary Response of a Carbon Nanotube-reinforced Composite Conical Shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 23, no. 2. P. 21-32. DOI: 10.15407/pmach2020.02.021

Здобувачем розроблено математичну модель напружено-деформованого стану оболонки.

20. Avramov Kostiantyn V., Sakhno Nataliia H., Uspenskyi Borys V. Static buckling of a pre-loaded complex nano-composite shell. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, no. 1. P. 28-35. DOI: 10.15407/pmach2021.01.028

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

21. Успенский Б., Аврамов К., Деревянко И., Библик И. К расчету механических характеристик сотовых заполнителей, изготовленных аддитивными технологиями FDM. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2021. Вып.1.

C. 14-20. DOI: 10.32620/aktt.2021.1.02.

Здобувачем проведено скінченно-елементну гомогенізацію стільникового заповнювача та отримано його пружні властивості.

22. Дерев'янка І. І., Аврамов К. В., Успенський Б. В., Саленко О. Ф. Експериментальний аналіз механічних характеристик деталей ракет-носіїв, виготовлених за допомогою FDM адитивних технологій. *Технічна механіка*. 2021. № 1. С. 92-100. DOI: 10.15407/itm2021.01.092

Здобувач здійснював обчислювальний супровід експерименту.

23. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Derevianko Ihor I. Analytical calculation of the mechanical properties of honeycombs printed using the fdm additive manufacturing technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №2. P. 16-23. DOI: 10.15407/pmach2021.02.016

Здобувачем проведено оптимізацію програмного забезпечення та скінченно-елементний аналіз для верифікації результатів.

24. Derevianko I.I., Uspenskyi B.V., Avramov K.V., Salenko O.F., Biblik I.V. Experimental and numerical analysis of the shear properties of honeycomb cores produced using additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 71-76. DOI: 10.15407/pmach2021.04.071.

Здобувачем проведено обчислювальний експеримент, а також узагальнено експериментальні дані

25. Uspenskyi Borys V., Avramov Kostiantyn V., Derevianko Ihor I. Vibrations of a cylindrical sandwich shell with a honeycomb core made using FDM technology. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24, №4. P. 49-60. DOI: 10.15407/pmach2021.04.049.

Здобувачем отримано власні частоти та форми коливань оболонки.

26. Avramov K. V., Uspensky B. V., Derevianko I. I. Nonlinear oscillations of a sandwich plate with a 3D-printed honeycomb core. *Technical mechanics*. 2021. № 4. P. 104-117. DOI: 10.15407/itm2021.04.104

Здобувачем проведено аналіз характеристик стільникового заповнювача та скінченно-елементне моделювання відгуку пластини.

27. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Biblik Iryna V. Instability of a Three-Layer Conical Shell with Honeycomb Structure Made by Additive Technologies. *Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 6-14. DOI: 10.15407/pmach2022.01.006

Здобувачем проведено аналіз втрати стійкості положення рівноваги конічної оболонки.

28. Дерев'янка І. І., Успенський Б. В., Аврамов К. В., Саленко О. Ф. Експериментальний і числовий аналіз напруженого стану стільникових заповнювачів, виготовлених адитивними технологіями. *Технічна механіка*. 2022. № 1. С. 42-50. DOI: 10.15407/itm2022.01.042

Здобувачем проведено обчислювальний експеримент та проведено оцінку пластичних властивостей матеріалу стільників.

29. Avramov K. V., Uspensky B. V. Self-vibrations of a truncated conical sandwich shell with a honeycomb core made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2022. №2. P. 87-100. DOI: 10.15407/itm2022.02

Здобувачем реалізовано метод продовження за параметром для аналізу автоколивань оболонки.

30. Аврамов К. В., Успенський Б. В. Вимушені коливання тришарової оболонки подвійної кривизни з пружним стільниковим заповнювачем. *Технічна механіка*. 2022. № 4. С. 79-94. DOI: 10.15407/itm2022.04.079

Здобувачем побудовано вирази для опису напружено-деформованого стану оболонки.

31. Uspenskyi B. V., Derevianko I. I., Avramov K. V., Polishchuk O. F., Salenko O. F. Multi-Cycle Fatigue of Composite Three-Layer Plates with Honeycomb Structure Made by Additive FDM Technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia*. 2022. vol. 25, no. 3. P. 16-28. DOI: 10.15407/pmach2022.03.016.

Здобувачем побудовано *S-N* криві втомних властивостей матеріалу PLA та сендвіч-пластин.

32. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Urniaieva Inna A., Breslavskyi Ivan D. Bifurcations and Stability of Nonlinear Vibrations of a Three-Layer Composite Shell with Moderate Amplitudes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26, no. 2. P. 6-15. DOI: 10.15407/pmach2023.02.006

Здобувачем запропоновано методику побудови біфуркаційних діаграм

33. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Marshuba I. S. Static stability of sandwich panels with honeycomb cores made by additive technologies. *Technical mechanics*. 2023. Vol. 3. P. 88-97. DOI: 10.15407/itm2023.03.088

Здобувачем запропоновано методику аналізу деформування панелі після втрати стійкості

34. Uspenskyi B., Avramov K., Salenko O., Nikonov O. Dynamic instability in the interaction of a composite shell made by additive technologies with a gas flow. *Technical Mechanics*. 2024. Vol. 3. P. 91-109. DOI: 10.15407/itm2024.03.097

Здобувачем досліджено втрату стійкості оболонкою та проведено варіативні розрахунки.

35. Derevianko I. I., Avramov K. V., Uspenskyi B. V., Salenko O. F. Manufacturing Technology, Experimental and Numerical Analysis of Static Bending of Three-Layer Composite Plate with Honeycomb Structure. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27, no. 3. P. 25-33. DOI: 10.15407/pmach2024.03.025.

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання експерименту.

36. Avramov Kostiantyn V., Uspenskyi Borys V., Liubarskyi Borys H., Smetskykh Oleksii A. Linear vibrations analysis of a composite sandwich conical shell manufactured by additive technologies. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2025. Vol. 28, no. 2. P. 27-35. DOI: 10.15407/pmach2025.02.027.

Здобувачем отримано власні частоти коливань оболонки.

37. Успенський Б., Аврамов К., Малишев С., Біблік І. Резонансні параметричні коливання циліндричної сендвіч-оболонки. *Технічна механіка*. 2025. № 3. С. 46-62. DOI: 10.15407/itm2025.03.046

Здобувачу належить написання програм та здійснення чисельного аналізу.

Статті в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та
виданнях матеріалів конференцій:

38. Avramov K., Sakhno N., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained oscillations of nanotubes reinforced composite thin-walled structures. *2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek): Proceedings of the 2020 conference IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 5–10 October 2020. P. 24-28. DOI:10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250099

Здобувачем запропоновано модель нелінійного деформування конструкції.

39. Avramov K. V., Uspensky B. V., Sakhno N. H., Nikonov O. Buckling of Joined Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Thin-Walled Structure. *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek): Proceedings of the 2021 conference IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 13–17 September 2021. P. 323-327. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570016.

Здобувачем проведено чисельний аналіз деформування конструкції.

40. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Polishchuk O., Salenko O. Stiffness and Fatigue of Sandwich Plates with Honeycomb Core Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2023. Vol. 536. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-20141-7_44.*

Здобувачем проведено аналіз та узагальнення експериментальних даних, а також скінченно-елементне моделювання експерименту.

41. Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Nonlinear vibrations of sandwich shells of revolutions with carbon nanotubes reinforced composite faces and fused deposition processed honeycomb core. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek): Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 03–07 October 2022, P. 64-69. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916364

Здобувачем проведено аналіз власних коливань оболонки та створено програмну реалізацію методу пристрілки.

42. Chernobryvko Maryna, Avramov Konstantin, Uspensky Boris. Dynamic Deformation of Functionally Graded Carbon Nanotubes-Reinforced Composite Joined Spherical-Cylindrical-Spherical Shell. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek): Proceedings of the 2022 conference IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 03–07 October 2022. P. 785-788. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916392

Здобувачем створено програмне рішення для аналізу відгуку оболонки.

43. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Urniaieva Inna. Geometrically Nonlinear Oscillations of Sandwich Thin-Walled Structure with Honeycomb Manufactured by Fused Deposition Modeling. *Lecture Notes in Networks and Systems: Smart Technologies in Urban Engineering / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_19*

Здобувачем запропоновано метод аналізу частотного відгуку конструкції.

44. Uspensky B., Avramov K. Linear Parametric Vibrations of Sandwich Cylindrical Shell with Honeycomb Manufactured by FDM Additive Technology. *Lecture Notes in Networks and Systems: Smart Technologies in Urban Engineering* / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). Vol. 807. 2023. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_20

Здобувачу належить алгоритмічна та програмна реалізація моделі деформування оболонки та методу аналізу частотного відгуку.

45. Uspensky B., Avramov K., Chernobryvko M., Nikonov O. Linear Vibrations of Sandwich Cylindrical Shells with Nanocomposite Layers. *Lecture Notes in Networks and Systems: Smart Technologies in Urban Engineering* / O. Arsenyeva, T. Romanova, M. Sukhonos, I. Biletskyi, Y. Tsegelnyk (eds.). 2026. Vol. 1658. P. 140–150. DOI: 10.1007/978-3-032-06829-3_13.

Здобувачем досліджено залежність лінійних коливань оболонки від типу наноармування.

46. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Maryna, Salenko A. Self-sustained Vibrations of Conical Sandwich Shell Interacting with Supersonic Gas Stream. *Тези доповіді на конференції Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2024 (ICTM 2024)*. 2024. 11 pages. DOI: 10.1007/978-3-031-94852-7_38

Здобувачем проведено аналіз вільних коливань оболонки.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

47. Kruszka L., Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Sakhno N., Mesha Y. Modeling of deformation of nanocomposite body structures considering different types of nanotubes reinforcement under gasodynamic pressure. Abstracts of the 13th Workshop of dynamic behavior of materials and its applications in industrial processes. Nicosia, Cyprus. 17-19 April, 2019. P. 371-372.

Здобувачем побудовано модель нанокомпозитного матеріалу та проведено скінченно-елементні розрахунки.

48. Аврамов К.В. Клименко Д.В., Чернобрывко М.В., Успенский Б. Флаттер тонкостенных конструкций из нанокомпозитов. Тезисы докладов Научно-практической конференции. «Современные расчетно-экспериментальные методы определения характеристик ракетно-космической техники». Дніпро, 10–12 грудня 2019. С. 36.

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань оболонки.

49. Chernobryvko Marina, Uspensky Boris, Avramov Konstantin, Sakhno Nataliia, Mesha Yurii, Kruszka Leopold. Advantages of using nanocomposite materials for manufacturing of body armour suit's plates. Proceedings of the Light-Weight Armour Group for Defense and Security Conference. – October 8–9, 2019. – Roubaix, France. – P. 306-311.

Здобувачем проведено скінченно-елементні розрахунки деформування нанокомпозитних пластин.

50. Аврамов К.В. Чернобрывко М.В., Успенський Б.В., Сахно Н.Г. Моделирование деформирования корпусных элементов ракет с нанокомпозитного материала при нестационарном нагружении. Матеріали конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. 2020». –

13–15 травня 2020. Ч. 1. С. 61.

Здобувачем запропоновано підхід до дискретизації математичних моделей деформування складених оболонок.

51. Аврамов К.В., Успенский Б.В., Сахно Н.Г. Нестационарная динамика функционально-градиентной усиленной углеродными нанотрубками композитной составной оболочечной конструкции. Матеріали II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 379–380.

Здобувачем проведено скінченно-елементне моделювання для верифікації результатів.

52. Успенский Б.В., Аврамов К.В., Сахно Н.Г. Динамическая неустойчивость составных нанокompозитных оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Матеріали II міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» 5–8 жовтня 2020 року, Харків. С. 336

Здобувачем отримано власні частоти та форми коливань конструкції.

53. Avramov Konstantin, Uspensky Borys. Nonlinear vibrations of sandwich shells with additive manufactured flexible honeycomb core interacting with supersonic gas flow. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

Здобувачем запропоновано методику дискретизації рівнянь руху оболонки.

54. Avramov Konstantin, Uspensky Boris, Chernobryvko Marina. Self-sustained Vibrations and Dynamic Instability of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Shells. ENOC 2020+2, July 17-22, 2022, Lyon, France.

Здобувачем запропоновано методику аналізу автоколивань нанокompозитної циліндричної оболонки.

АНОТАЦІЯ

Успенський Б.В. Коливання композитних багатошарових тонкостінних конструкцій при геометрично нелінійному деформуванні. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла. Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2026.

У дисертаційній роботі розв’язано науково-технічну проблему розробки методики для аналізу коливань композитних багатошарових оболонок при їхньому геометрично нелінійному деформуванні.

Запропоновано моделі нелінійних коливань багатошарових композитних оболонок на базі теорії зсуву високого порядку та методу заданих форм. Для побудови базису методу заданих форм проводиться аналіз власних коливань конструкції за допомогою методу Релея-Рітца.

Запропоновано застосування методу пристрілки сумісно з продовженням за довжиною дуги частотного відгуку для аналізу нелінійних коливань багатошарових оболонок.

Проведено аналіз нелінійних коливань функціонально градієнтної нанокомпозитної циліндричної оболонки, що взаємодіє з надзвуковим газовим струменем. Виявлено умови при яких в оболонці виникають автоколивання. Досліджено вплив типу наноармування на значення критичного тиску та характеристики автоколивань.

Проведено аналіз нелінійних параметричних коливань тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем. У частотному відгуку сендвіч-оболонки на параметричне навантаження поблизу параметричного резонансу знайдено замкнені кільця розв'язків, що відповідають бігучим хвилям вздовж кругової координати. Досліджено вплив коефіцієнту лінійного демпфування на амплітуди резонансних коливань.

Проведено аналіз нестационарного відгуку композитної усіченої конічної оболонки зі шпангоутом на імпульсне навантаження. Методика аналізу вирізняється точністю та швидкістю при порівнянні з методом скінченних елементів.

Проведено аналіз нелінійної динаміки конічної тришарової оболонки зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Досліджено вплив типу закріплення оболонки на її динамічний відгук. Виявлено майже періодичні та хаотичні режими автоколивань консольної конічної оболонки.

Запропоновано методику аналізу втрати динамічної стійкості складеною коніко-циліндричною тришаровою оболонкою зі стільниковим заповнювачем у взаємодії з надзвуковим газовим струменем. Проведено аналіз втрати динамічної стійкості для заданої оболонки при різних параметрах струменя.

Проведено аналіз нелінійних вимушених коливань тришарових оболонок подвійної кривизни зі стільниковим заповнювачем. Розглянуто дві форми оболонки – сферична та в формі гіперболічного параболоїда. Виявлено нелінійну поведінку оболонок при основному та субгармонійному резонансах.

Запропоновано методику аналізу механічних характеристик стільникових заповнювачів з різною формою комірок. Отримано оцінки механічних характеристик гексагональних, квадратних, трикутних, ауксетичних заповнювачів. Проведено порівняння з експериментальними даними.

Ключові слова: конічна оболонка, циліндрична оболонка, полога оболонка, багатошаровий композит, стільниковий заповнювач, функціонально градієнтний матеріал, флатер, параметричні коливання, вимушені коливання, низькошвидкісний удар, геометрична нелінійність, теорія зсуву високого порядку, нелінійна дискретна модель, математична симуляція, метод продовження за параметром.

ABSTRACT

Uspenskyi B.V. Vibrations of composite multilayered thin-walled structures under geometrically nonlinear deformation. – Manuscript.

The dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2026.

The dissertation solves a scientific and technical problem consisting of development of a method to analyze vibrations of composite multilayered shells under geometrically nonlinear deformation.

Mathematical models for analysis of nonlinear vibrations of multilayered composite shells have been proposed. They are based on high-order shear theory and given forms method. To build a basis for the given forms method free vibrations are analyzed using Rayleigh-Ritz method.

To implement analysis of multilayered shells' nonlinear vibrations, shooting technique along with arc length continuation technique are being used.

Analysis of nonlinear vibrations of functional gradient nanocomposite cylindrical shell interacting with a supersonic gas stream has been conducted. Conditions for emergence of self-sustained vibrations have been identified. Influence of the type of carbon nanotubes reinforcement on the critical pressure and self-sustained vibrations' properties has been investigated.

An analysis of nonlinear parametrical vibrations of a sandwich cylindrical shell with honeycomb core has been conducted. Shell's frequency response to the parametric loading contains loops of stable solutions that describe travelling waves along the circumferential coordinate of the shell. Influence of the linear damping coefficient on the resonance vibrations' amplitudes has been investigated.

Transient response of a composite conical shell with isotropic ring under impulse loading has been analyzed. The analysis method has high precision and speed compared to the finite elements method.

Nonlinear dynamics of a sandwich conical shell with honeycomb core interacting with a supersonic gas stream has been analyzed. Influence of the support type on the shell's dynamical response has been investigated. For a console conical shell, almost periodic and chaotic vibrations have been detected.

A technique for analysis of dynamic instability of a compound conical-cylindrical sandwich shell with honeycomb core interacting with a supersonic gas stream has been proposed. Analysis of dynamic instability of the shell under different excitation conditions has been conducted.

Nonlinear forced vibrations of double-curved sandwich shells with honeycomb core have been analyzed. A spherical and a hyperbolic parabolic shell have been considered. Nonlinear response of the shells has been detected under main and subharmonic resonances.

A technique for analysis of mechanical properties of honeycomb cores with different cell topology has been proposed. Estimations for mechanical properties of

hexagonal, square, triangle and auxetic cores have been obtained. Verification through comparison with experimental data has been conducted.

Keywords: conical shell, cylindrical shell, shallow shell, layered composite, honeycomb core, functional gradient material, flutter, parametric vibrations, forced vibrations, low velocity impact, geometric nonlinearity, high-order shear theory, nonlinear discrete model, mathematical simulation, continuation technique.